

1 ПРОСТРАНСТВА СХОДИМОСТИ

Пусть E является *линейным пространством* над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Через $\zeta = \zeta_E$ обозначается *сходимость* в пространстве E , т.е. множество последовательностей $\{x_n\}$, которые называются *сходящимися*. Как обычно, в поле $\mathbb{F}$ сходимость $\zeta_{\mathbb{F}}$ определяется метрикой $\rho(a, b) \doteq |a - b|$.

Определение. Пара (E, ζ) называется *пространством сходимости*, если задана сходимость ζ в пространстве E , для которой выполняются следующие свойства:

- а) если $\{x_n\} \in \zeta$, то существует единственный предел $x = \lim x_n$;
- б) если $x_n = x$ для всех $n \geq n_0$, то $\{x_n\} \in \zeta$ и $x = \lim x_n$;
- с) если $\{x_n\} \in \zeta$ и $x = \lim x_n$, то всякая $\{x_{n_k}\} \in \zeta$ и $x = \lim x_{n_k}$;
- д) если $\{x_n\}, \{y_n\} \in \zeta$, то $\{x_n + y_n\} \in \zeta$ и $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
- е) если $\{x_n\} \in \zeta$ и $\{\lambda_n\} \in \zeta_{\mathbb{F}}$, то $\{\lambda_n x_n\} \in \zeta$ и $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n$.

Отображение $f : E \rightarrow F$ пространств сходимости называется (секвенциально) *непрерывным*, если из $\{x_n\} \in \zeta_E$ следует, что $\{f(x_n)\} \in \zeta_F$ и $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Пространство сходимости называется *регулярным*, если для каждой двойной последовательности $\{x_{nk}\}$ из существования предела по строкам $x_n = \lim_k x_{nk}$ и предела $x = \lim_n x_n$ следует, что существуют такие $k_n \rightarrow \infty$, что $\lim_n x_{nk_n} = x$.

Лемма 1. *Метрическое линейное пространство (E, ρ) является регулярным пространством сходимости.*

Доказательство. Аксиомы а), б) и с) очевидны. Аксиомы д) и е) вытекают из непрерывности линейных операций в пространстве (E, ρ) . Докажем регулярность. Пусть $\lim_k \rho(x_{nk}, x_n) = 0$ и $\lim_n \rho(x_n, x) = 0$. Выберем $k_n \rightarrow \infty$, т.ч. $\rho(x_{nk_n}, x_n) < 1/n$. Тогда получим $\rho(x_{nk_n}, x) \leq \rho(x_{nk_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *безусловно суммируемой*, если для каждой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.

Говорят, что пространство сходимости (E, ζ) удовлетворяет *аксиоме полноты*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \in \zeta$ с пределом $\lim x_n = 0$ существует безусловно суммируемая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Лемма 2. *Полное метрическое линейное пространство (E, ρ) удовлетворяет аксиоме полноты.*

Доказательство. Пусть $\|x\| \doteq \rho(x, 0)$ обозначает квазинорму в E и $\lim \|x_n\| = 0$. Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\|x_{n_k}\| < 1/2^k$. Полагая $s_n \doteq \sum_{k=1}^n x_{n_k}$, получим $\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_{n_k}\| < 1/2^n$ при всех $m > n$. Следовательно, $\{s_n\}$ есть последовательность Коши и в силу полноты пространства E ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ сходится. Аналогично доказывается, что всякий подряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_{k_i}}$ сходится. $\square$

Пример. Рассмотрим пространство $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем, в котором сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$ определяется следующими двумя условиями: 1) $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$; 2) существует компакт $K \subseteq \mathbb{R}$, т.ч. $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ при всех n . Носителем $\text{supp}(\varphi)$ функции φ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}$, в которых $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю.

В силу леммы 2 в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ выполняется аксиома полноты. Однако сходимость в $C_0(\mathbb{R})$ не регулярна и поэтому пространство $C_0(\mathbb{R})$ не метризуемо. В самом деле, пусть $\eta(x) \doteq 1 - |x|$ при $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 1$. Тогда для $\varphi_{mk}(x) \doteq \eta(x/n)/k$ имеем $\lim_k \varphi_{nk} = 0$, однако $\varphi_{nk_n} \not\rightarrow 0$ для любых $k_n \rightarrow \infty$.

Определение. Пусть (E', ζ') — сопряженное пространство к пространству сходимости (E, ζ) , где E' — множество непрерывных линейных функционалов $f : E \rightarrow \mathbb{F}$ и сходимость ζ' в пространстве E' определяется условием: $f_n \rightarrow f$, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in E$. Сопряженное пространство (E', ζ') называется *полным*, если из сходимости $f_n \rightarrow f$ и $f_n \in E'$ следует, что $f \in E'$.

Лемма 3. Предположим, что двойная последовательность чисел $\{a_{mn}\}$ из поля $\mathbb{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

- a) при всех m существует предел $\lim_n a_{mn} = b_m$;
- b) существует такое $\varepsilon > 0$, что $|b_m| > \varepsilon$ при всех m ;
- c) при всех n ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$ сходится абсолютно.

Тогда существуют $m_l \rightarrow \infty$ и $n_k \rightarrow \infty$, т.ч. $\lim_k \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k} \right| = \infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $a_{mn} \in \mathbb{R}$. Выберем возрастающую последовательность $n_1 < n_2 < \dots$, т.ч. $|a_{kn}| > \varepsilon$ при всех $n \geq n_k$. Тогда $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| \geq \sum_{m=1}^k |a_{mn_k}| > k\varepsilon$. Отсюда предел $\lim_k \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| = \infty$. Следовательно, $\lim_k \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn_k}^+ = \infty$ или $\lim_k \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn_k}^- = \infty$, где $a^{\pm} \doteq \max\{\pm a, 0\}$. Поэтому существует последовательность $\{m_l\}$, т.ч. $\lim_k \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k} \right| = \infty$. $\square$

Теорема. Пусть в пространстве сходимости (E, ζ) выполняется аксиома полноты. Тогда сопряженное пространство (E', ζ') является полным.

Доказательство. Предположим, что $f_n \in E'$ и $f_n \rightarrow f$ сходится, но $f \notin E'$. Тогда функционал f не является непрерывным в нуле, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и $\{x_m\} \in \zeta$, т.ч. $\lim x_m = 0$ и $|f(x_m)| > \varepsilon$. В силу аксиомы полноты мы можем считать, что последовательность $\{x_m\}$ безусловно суммируема. Обозначим через $a_{mn} \doteq f_n(x_m)$ двойную последовательность чисел. Поскольку каждый подряд ряда $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ является сходящимся, то этот ряд сходится абсолютно. Поэтому выполнены все условия леммы 3 и, значит, существуют $\{m_l\}$ и $\{n_k\}$, т.ч. $\lim_k \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k} \right| = \infty$. Пусть $x = \sum_{l=1}^{\infty} x_{m_l}$, тогда в силу непрерывности функционалов f_{n_k} мы имеем равенство $|f(x)| = \lim_k |f_{n_k}(x)| = \lim_k \left| \sum_{l=1}^{\infty} f_{n_k}(x_{m_l}) \right| = \infty$, что невозможно. $\square$

Определение. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_E$ обозначает систему полунорм в пространстве E . Пара $(E, \mathcal{P})$ называется *полинормированным пространством*, если из $p(x) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ вытекает, что $x = 0$. Полинормированное пространство $(E, \mathcal{P})$ называется *счетно-нормированным*, если система $\mathcal{P}$ не более, чем счетная.

Последовательность $\{x_n\}$ *сходится* $x_n \rightarrow x$ в полинормированном пространстве $(E, \mathcal{P})$ к элементу $x \in E$, если для всех $p \in \mathcal{P}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N , т.ч. $p(x_n - x) < \varepsilon$ при всех $n \geq N$, т.е. $\lim_n p(x_n - x) = 0$ при всех $p \in \mathcal{P}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши*, если для всех $p \in \mathcal{P}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N , т.ч. $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$, т.е. $\lim_{n,m} p(x_n - x_m) = 0$ при всех $p \in \mathcal{P}$. Полинормированное пространство $(E, \mathcal{P})$ называется *полным*, если всякая последовательность Коши сходится.

Всякое полинормированное пространство является пространством сходимости. В силу доказанной теоремы сопряженное пространство (E', ζ') к пространству сходимости (E, ζ) , в котором выполняется аксиома полноты, является полным полинормированным пространством с системой полунорм $p_x(f) \doteq |f(x)|$, $x \in E$.

Теорема. *Сходимость в счетно-нормированном пространстве $(E, \mathcal{P})$ относительно системы полунорм $\mathcal{P} \doteq \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равносильна сходимости в метрическом линейном пространстве (E, ρ) относительно метрики*

$$\rho(x, y) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}, \quad x, y \in E.$$

Доказательство. Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t + 1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ при всех $a, b \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Если $\rho(x, y) = 0$, то $p_n(x - y) = 0$ при всех n и, следовательно, $x = y$. Докажем равносильность сходимостей.

Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем m так, чтобы $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $x_n \rightarrow x$, то для каждого k найдется такое n_k , т.ч. $p_k(x_n - x) < \varepsilon/2m$ при всех $n \geq n_k$. Тогда, полагая $N \doteq \max_{1 \leq k \leq m} n_k$, получим

$$\rho(x_n, x) \leq \sum_{k=1}^m p_k(x_n - x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N , т.ч. $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Тогда для любого k выполняется неравенство $p_k(x_n - x) < \varepsilon 2^k (p_k(x_n - x) + 1)$ при всех $n \geq N$. Отсюда при всех $n \geq N$ и $\varepsilon < 1/2^k$ имеем $p_k(x_n - x) \leq \varepsilon 2^k / (1 - \varepsilon 2^k)$. Следовательно, существует предел $\lim_n p_k(x_n - x) = 0$ при всех k .

Аналогично доказывается, что $\{x_n\}$ образует последовательность Коши в $(E, \mathcal{P})$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ образует последовательность Коши в (E, ρ) . $\square$

Следствие. *Счетно-нормированное пространство $(E, \mathcal{P})$ полно тогда и только тогда, когда полно соответствующее метрическое пространство (E, ρ) .*

Определение. Линейное отображение $f : E \rightarrow F$ полинормированных пространств называется *ограниченным*, если для каждого $p \in \mathcal{P}_F$ существуют $c > 0$ и $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_E$, т.ч. $p(f(x)) \leq c(p_1(x) + \dots + p_n(x))$ при всех $x \in E$.

Теорема. Пусть $(E, \mathcal{P}_E)$ является счетно-нормированным пространством, а $(F, \mathcal{P}_F)$ есть полинормированное пространство. Тогда линейное отображение $f : E \rightarrow F$ ограничено в том и только в том случае, когда оно непрерывно.

Доказательство. Ясно, что ограниченное линейное отображение непрерывно.

Докажем обратное утверждение. По определению система $\mathcal{P}_E = \{p_n\}$ счетная. Пусть функции $q_n(x) \doteq \sum_{k=1}^n p_k(x)$ определяют возрастающую последовательность полунорм в E . Если отображение f не является ограниченным, то найдутся такие $p \in \mathcal{P}_F$ и $\{x_n\}$, что $p(f(x_n)) > nq_n(x_n)$ при всех n . Пусть $y_n \doteq x_n/\sqrt{n}q_n(x_n)$, тогда имеет место неравенство $p_k(y_n) \leq 1/\sqrt{n}$ при всех $k \leq n$. Отсюда $y_n \rightarrow 0$, однако $p(f(y_n)) > \sqrt{n}$, т.е. $f(y_n) \not\rightarrow 0$ не сходится к нулю. Получили противоречие. $\square$

Определение. Функция $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$ называется *бесконечно дифференцируемой*, если при всех $x \in \mathbb{R}^m$ существуют частные производные $\partial^\alpha \varphi(x)$ любого порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ обозначают целые неотрицательные числа. Через $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ обозначается *порядок мультииндекса* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Носителем $\text{supp}(\varphi)$ непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^m$, в которых функция $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю.

Пусть $C_0^\infty(X)$ обозначает множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$ с компактным носителем $\text{supp}(\varphi) \Subset X \subset \mathbb{R}^m$. Система норм

$$p_k(\varphi) \doteq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

определяет структуру счетно-нормированного пространства в $C_0^\infty(X)$. Сходимость в $C_0^\infty(X)$ равносильна равномерной сходимости функций и всех производных на множестве X . При этом все операторы дифференцирования $\partial^\alpha : C_0^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(X)$ непрерывны. В силу доказанной теоремы $C_0^\infty(X)$ образует метрическое линейное пространство, в котором сходимость определяется метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\varphi - \psi)}{1 + p_k(\varphi - \psi)}, \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty(X).$$

Для краткости полное счетно-нормированное пространство обычно называется *пространством Фреше*. По известной теореме из математического анализа, если последовательность функций пространства $C_0^\infty(X)$ сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на множестве X вместе с производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leq k$, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leq k$ на множестве X . Отсюда, если $X \Subset \mathbb{R}^m$ компактно, то счетно-нормированное пространство $C_0^\infty(X)$ будет полным и, следовательно, является пространством Фреше.

2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\mathbb{R}^m$ обозначает далее евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle \doteq \sum_{k=1}^m x_k y_k$ и нормой $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Через $C_0^\infty(X)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$ с компактным носителем $\text{supp}(\varphi) \Subset X$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ вместе со сходимостью по системе норм

$$p_k(\varphi) \doteq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пример 1. При помощи правила Лопиталья нетрудно проверить, что функция $e(t) \doteq e^{-1/t}$ при $t > 0$ и $e(t) \doteq 0$ при $t \leq 0$ будет бесконечно дифференцируемой. Функция $\xi(x) \doteq e(1 - \|x\|^2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ также бесконечно дифференцируема и имеет носитель $\text{supp}(\xi) = S \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$ в единичном шаре.

Система функций $\theta_r(x) \doteq c_r \xi(x/r)$ при $r > 0$ называется *аппроксимативной единицей*, где константы $c_r > 0$ подобраны так, что интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x) dx = 1$. Все функции $\theta_r(x)$ являются неотрицательными, бесконечно дифференцируемыми и имеют носитель $\text{supp}(\theta_r) = S_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq r\}$ в шаре радиуса r .

Пусть $\eta(x) \doteq \int_{S_2} \theta_1(x - y) dy$, тогда $\eta(x) = 1$ при $x \in S_1$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin S_3$. Функция $\eta(x)$ является неотрицательной, бесконечно дифференцируемой и имеет носитель $\text{supp}(\eta) = S_3$ в шаре радиуса $r = 3$.

Пусть $\mathcal{D}(X) = C_0^\infty(X)$ обозначает *пространство основных функций* $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, в котором задана сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$, определяемая двумя следующими условиями: 1) $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$ сходятся равномерно при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ и 2) найдется компакт $K \Subset X$, т.ч. $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Сопряженное пространство $\mathcal{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{D}(X)$ называется *пространством обобщенных функций* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$. Значение линейного функционала $f \in \mathcal{D}'(X)$ на основной функции далее обозначается через $\langle f, \varphi \rangle$. Из определения вытекают следующие свойства:

- 1) обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(X)$;
- 2) обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{D}(X)$, то $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ сходится;
- 3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{D}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, то $f \in \mathcal{D}'(X)$.

Последнее свойство вытекает из теоремы о полноте сопряженного пространства $\mathcal{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{D}(X)$. В самом деле, все носители сходящейся последовательности функций $\varphi_n \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(X)$ находятся на одном компакте $K \Subset X$. Поэтому $\varphi_n \rightarrow 0$ сходится в $\mathcal{D}(K) = C_0^\infty(K)$. Поскольку $C_0^\infty(K)$ является полным метрическим линейным пространством, то в нем выполняется аксиома полноты.

Пример 2. 1) Обобщенная функция $\delta(x - a)$ называется δ -функцией Дирака и определяется равенством $\langle \delta(x - a), \varphi \rangle \doteq \varphi(a)$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Ее производные $\partial^\alpha \delta(x - a)$ порядка α определяются равенством $\langle \partial^\alpha \delta(x - a), \varphi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a)$.

2) Обобщенная функция $\mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}$ называется *главным значением* $\frac{1}{x}$ и определяется равенством $\langle \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$. Для доказательства существования этого предела при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и непрерывности функционала применим формулу Лагранжа $\varphi(x) - \varphi(-x) = 2x\varphi'(t)$, где $|t| < |x|$. Тогда, используя равенство

$$\langle \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx,$$

получим $|\langle \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle| \leq 2c \max_{t \in (-c, c)} |\varphi'(t)|$, где $\varphi \in \mathcal{D}(-c, c)$. Отсюда $\mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f \in \mathcal{D}(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^m$.

1. Обозначим через $L_{loc}(X)$ пространство локально интегрируемых функций $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, т.е. интегрируемых по Лебэгу на всяком компакте $K \Subset X$. Каждая функция $f \in L_{loc}(X)$ определяет регулярную обобщенную функцию, заданную по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteq \int_X f(x) \varphi(x) dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Непрерывность этого функционала $f \in \mathcal{D}'(X)$ следует из теоремы Лебёга.

2. Произведение обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ на бесконечно дифференцируемую $\psi \in C^\infty(X)$ задается формулой $\langle \psi f, \varphi \rangle \doteq \langle f, \psi \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Непрерывность функционала $\psi f \in \mathcal{D}'(X)$ вытекает из непрерывности оператора умножения на функцию $M_\psi(\varphi) \doteq \psi \varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(X)$.

3. Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi \rangle \doteq \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle \doteq |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, где $\tau_a \varphi(x) \doteq \varphi(x - a)$ и $\rho_\lambda \varphi(x) \doteq \varphi(\lambda x)$.

Непрерывность функционалов $\tau_a f, \rho_\lambda f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ получается из непрерывности соответствующих операторов сдвига $\tau_a \varphi$ и растяжения $\rho_\lambda \varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

4. Пусть $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A \neq 0$. Замена переменных в обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ задается по формуле $\langle T_A f, \varphi \rangle \doteq |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}} \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, где $T_A \varphi(x) = \varphi(Ax)$.

Непрерывность функционала $T_A f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ сразу вытекает из непрерывности оператора замены переменных $T_A \varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

5. Производная $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ определяется по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(X)$ вытекает из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha \varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(X)$. Из указанных определений легко вывести формулу Лейбница: $\partial_i(\psi f) = (\partial_i \psi) f + \psi(\partial_i f)$, где $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, m$.

$$\langle \partial_i(\psi f), \varphi \rangle = -\langle f, \psi(\partial_i \varphi) \rangle = \langle f, (\partial_i \psi) \varphi - \psi(\partial_i \varphi) \rangle = \langle (\partial_i \psi) f, \varphi \rangle + \langle \psi(\partial_i f), \varphi \rangle.$$

Формула Сохо́цкого: $\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - \pi i \delta(x)$, где обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяется по формуле $\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \rangle \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Действительно, если функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет носитель $\text{supp}(\varphi) \subset (-c, c)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-c}^c \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-c}^c \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-c}^c \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = \\ &= \int_{-c}^c \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx - 2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{c}{\varepsilon} = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} dx - \pi i \varphi(0). \end{aligned}$$

Теорема (о локальной структуре). Пусть $K \Subset X$ компактное множество. Тогда для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ существуют непрерывная функция $g \in C(K)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $\langle f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_K g(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Доказательство. Производя замену переменных, считаем, что $K \subset \Delta \doteq [0, 1]^m$. Поскольку f непрерывен в $\mathcal{D}(K) = C_0^\infty(K)$, то он ограничен по системе норм

$$p_k(\varphi) \doteq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому существуют $c > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, т.ч. $|\langle f, \varphi \rangle| \leq c p_k(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Так как $p_0(\varphi) = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$, то, применяя формулу Лагранжа по переменной x_i , мы имеем $p_0(\varphi) \leq p_0(\partial_i \varphi)$ при $i = 1, \dots, m$. Определим дифференциальный оператор по формуле $D \doteq \partial_1 \dots \partial_m$. Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ и $|\alpha| \leq k$ получим

$$p_0(\partial^\alpha \varphi) \leq p_0(D^k \varphi) \leq \int_\Delta |D^{k+1} \varphi(x)| dx \leq \|D^{k+1} \varphi\|_{L_2}.$$

Здесь использовалась формула Лейбница $D^k \varphi(x) = \int_{\Delta_x} D^{k+1} \varphi(y) dy$ для функций многих переменных, где $\Delta_x \doteq [0, x_1] \times \dots \times [0, x_m]$ при всех $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Delta$, а также неравенство Коши–Буняковского в $L_2(\Delta)$. Таким образом, выполняется неравенство $|\langle f, \varphi \rangle| \leq c_k \|D^{k+1} \varphi\|_{L_2}$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ при некотором $c_k > 0$.

Линейный оператор $A \doteq D^{k+1} : \mathcal{D}(K) \rightarrow \mathcal{D}(K)$ является непрерывным и взаимно однозначным на пространстве $\mathcal{D}(K)$. Поэтому корректно определен следующий линейный функционал: $F(\psi) \doteq \langle f, A^{-1} \psi \rangle$ при всех $\psi = A\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. В силу доказанного выше этот функционал ограничен по норме $L_2(K)$ и, следовательно, по теореме Хана–Банаха существует его ограниченное продолжение на все $L_2(K)$. По теореме Рисса о представлении ограниченных функционалов найдется такая функция $h \in L_2(K)$, что $F(\psi) = \int_K h(x) \psi(x) dx$ при всех $\psi = A\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Пусть $h(x) = 0$ при всех $x \notin K$, тогда интегрируя по частям, получим

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Delta h(x) D^{k+1} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Delta g(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

где $g(x) \doteq (-1)^{|\alpha|+m} \int_{\Delta_x} h(y) dy$ и $\alpha \doteq (k+2, \dots, k+2)$. □

Если для любого компакта $K \Subset A \subset X$ существует $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi \rangle| \leq c p_k(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, то говорят, что обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет порядок не выше, чем k , на множестве A . Наименьшее такое число k называется *порядком обобщенной функции f* на множестве A . Если же такого числа k не существует, то $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет *бесконечный порядок* на множестве A .

Определение. Говорят, что обобщенные функции $f, g \in \mathcal{D}'(X)$ совпадают $f = g$ на множестве $A \subset X$, если $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{D}(O_A)$ с носителем в некоторой окрестности $O_A \subset X$ множества A .

В частности, обобщенные функции $f, g \in \mathcal{D}'(X)$ совпадают $f(x) = g(x)$ в точке $x \in X$, если они совпадают в некоторой ее окрестности $O_x \subset X$. Множество

$$\text{supp}(f) \doteq \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

называется *носителем обобщенной функции* $f \in \mathcal{D}'(X)$. Очевидно, он является замкнутым множеством в X . В силу теоремы о локальной структуре для каждой функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $K \Subset X$ существуют $g \in C(K)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $f = \partial^\alpha g$ на K .

Теорема. Пусть $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет носитель $\text{supp}(f) = \{a\}$ в точке $a \in X \subset \mathbb{R}^m$. Тогда существуют числа $c_\alpha \in \mathbb{F}$ при $|\alpha| \leq k$, т.ч. $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - a)$.

Эта теорема формулируется без доказательства. Она устанавливает структуру обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'(X)$, у которых носитель состоит из одной точки.

Лемма. Если $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ и $\partial f = 0$, то $f = c \in \mathbb{F}$ на интервале (a, b) .

Доказательство. Имеем $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ при $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Следующие подпространства

$$L \doteq \{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \int_a^b \varphi dt = 0\}, \quad M \doteq \{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \exists \psi \in \mathcal{D}(a, b) : \psi' = \varphi\}$$

совпадают. В самом деле, если $\varphi \in M$, то мы имеем $\int_a^b \varphi dt = \psi(b) - \psi(a) = 0$. Обратно, если $\varphi \in L$, то, полагая $\psi(x) = \int_a^x \varphi dt$, получим $\psi'(x) = \varphi(x)$.

Для доказательства леммы рассмотрим функцию $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$, т.ч. $\int_a^b \eta dt = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ имеет представление $\varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi dt$, где $\psi \in L$. Поскольку $L = M$ и по условию леммы $\langle f, \psi \rangle = 0$, то мы имеем равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta \rangle \int_a^b \varphi dt = \langle c, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b),$$

где $c \doteq \langle f, \eta \rangle \in \mathbb{F}$. Следовательно, $f = c$ на интервале (a, b) . □

Теорема (о существовании первообразной). Для всякой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ существует обобщенная функция $g \in \mathcal{D}'(a, b)$, т.ч. $\partial g = f$.

Доказательство. Определим функционал g на подпространстве $M \subset \mathcal{D}(a, b)$ по формуле $\langle g, \varphi' \rangle \doteq -\langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Также как в лемме всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ представляется в виде $\varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi dt$, где $\psi \in L$. Поскольку $L = M$, то функционал g можно продолжить на все пространство $\mathcal{D}(a, b)$ по формуле

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \psi \rangle + \langle g, \eta \rangle \int_a^b \varphi dt = -\langle f, A\varphi \rangle + \langle c, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b),$$

где $c \doteq \langle g, \eta \rangle$ и $A\varphi(x) \doteq \int_a^x (\varphi - \eta \int_a^b \varphi dt) dy$ определяет непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{D}(a, b)$. Поэтому функционал $g \in \mathcal{D}'(a, b)$ является непрерывным и в силу леммы любая обобщенная функция, удовлетворяющая условию теоремы, отличается от g на аддитивную константу. □

3 ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. Через $\mathcal{E}(X)$ обозначается пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : X \rightarrow \mathbb{F}$, для которых определена сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$, удовлетворяющая условию: $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$ сходится равномерно на каждом компакте $K \Subset X$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Определение. Сопряженное пространство $\mathcal{E}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{E}(X)$ называется пространством *обобщенных функций с компактным носителем*.

Из определения вытекают следующие свойства:

- 1) обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(X)$;
- 2) обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{E}(X)$, то $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$;
- 3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{E}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, то $f \in \mathcal{E}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $K_l \doteq \{x \in X \mid \|x\| \leq l, \rho(x, \partial X) \geq 1/l\}$ при $l > 0$. Тогда получим последовательность вложенных компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, объединение которых $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X$. Система полунорм

$$e_l(\varphi) \doteq \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in K_l} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

определяет в $\mathcal{E}(X)$ структуру счетно нормированного пространства. Сходимость по этой системе полунорм равносильна равномерной сходимости функций и всех производных на каждом компакте $K \Subset X$. Поэтому по доказанной ранее теореме $\mathcal{E}(X)$ является метрическим линейным пространством с указанной сходимостью. В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность функций из пространства $\mathcal{E}(X)$ сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в области $D \subset X$ вместе с производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leq l$, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leq k$ в этой области D . Поэтому $\mathcal{E}(X)$ полное счетно-нормированное пространство, т.е. является пространством Фреше. Таким образом, по доказанному ранее, в пространстве $\mathcal{E}(X)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathcal{E}'(X)$ полно.

Теорема. Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда существует функция $g \in \mathcal{E}'(X)$, т.ч. $g|_{D(X)} = f$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задана обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ с компактным носителем $\text{supp}(f) \Subset X$. Рассмотрим следующие основные функции:

$$\eta_l(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} \theta_{1/4l}(x-y) \chi_{K_{4l/3}}(y) dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_l; \\ 0, & \text{если } x \notin K_{2l}. \end{cases}$$

Определим функционал $g \in \mathcal{E}'(X)$ по формуле $\langle g, \varphi \rangle \doteq \langle f, \eta_l \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, где число $l \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $\text{supp}(f) \subset K_l$. Поскольку операция $A_l \varphi \doteq \eta_l \varphi$ умножения на функцию η_l линейна и непрерывна в $\mathcal{E}(X)$, то $g \in \mathcal{E}'(X)$ и имеет носитель $\text{supp}(g) \subseteq K_{2l}$. Так как $\text{supp}(\varphi - \eta_l \varphi) \subset X \setminus K_l$, то имеет место равенство $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \eta_l \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi - \eta_l \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Пусть $g \in \mathcal{E}'(X)$, тогда $f \doteq g|_{\mathcal{D}(X)}$ является линейным функционалом в $\mathcal{D}(X)$. При этом, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в $\mathcal{D}(X)$, то $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в $\mathcal{E}(X)$ и, значит, $\lim \langle f, \varphi_n \rangle = \lim \langle g, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Отсюда функционал $f \in \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным. Так как функционал g непрерывен в $\mathcal{E}(X)$, то он ограничен в $\mathcal{E}(X)$ и, следовательно, существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi \rangle| \leq c_l(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$. Поэтому имеем $\langle g, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, т.ч. $\text{supp}(\varphi) \subset X \setminus K_l$. Таким образом, носитель $\text{supp}(f) \subset K_l$ является компактным. $\square$

Пример 1. Функция $f \in L_{loc}(X)$, такая, что $f(x) \neq 0$ на открытом множестве X , определяет регулярную обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteq \int_X f(x) \varphi(x) dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, которая не имеет компактного носителя в X , т.е. $f \notin \mathcal{E}(X)$.

Определение. Пусть задана аппроксимативная единица $\{\theta_r\}_{r>0}$. Усреднением функции $f \in L_{loc}(X)$ в смысле Соболева называется система функций $\{f_r\}_{r>0}$,

$$\text{где } f_r(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) f(x-y) dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m,$$

и предполагается, что функция $f(x) = 0$ равна нулю при всех $x \notin X$.

1. Функции f_r являются бесконечно дифференцируемыми, т.е. $f_r \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Так как функции $\theta_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемые, то по теореме Лебёга усреднение можно дифференцировать под знаком интеграла.

2. Носитель $\text{supp}(f_r) \subset B_r(X)$, где $B_r(X) \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x, X) \leq r\}$.

Так как $\text{supp}(\theta_r) \subset S_r$, то $f_r(x) = 0$, если выполняется неравенство $\rho(x, X) > r$.

3. Если $f \in L_p(X)$, то $\|f_r\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}$ и $\|f_r - f\|_{L_p} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $1 \leq p < \infty$.

Применяя обобщенное неравенство Минковского, мы получим $\|f_r\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p}$. В силу плотности множества $C_0(X) \subset L_p(X)$ непрерывных функций с компактным носителем для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in C_0(X)$, т.ч. $\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon/3$. Так как функция g равномерно непрерывна, то существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\tau_y g - g\|_{L_p} < \varepsilon/3$ при всех $\|y\| < \delta$, где $\tau_y g(x) \doteq g(x-y)$ оператор сдвига. Отсюда имеем

$$\|\tau_y f - f\|_{L_p} \leq \|\tau_y f - \tau_y g\|_{L_p} + \|\tau_y g - g\|_{L_p} + \|g - f\|_{L_p} < \varepsilon \text{ при всех } \|y\| < \delta.$$

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) dy = 1$, то $f_r(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) (\tau_y f(x) - f(x)) dy$. Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минковского, при всех $0 < r < \delta$ получим

$$\|f_r - f\|_{L_p} \leq \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{L_p} dy \leq \sup_{\|y\| < r} \|\tau_y f - f\|_{L_p} < \varepsilon.$$

Лемма (о плотности). Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $1 \leq p < \infty$. Тогда, если $f \in L_p(X)$, то существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)$, т.ч.

- a) $|\varphi_n(x)| \leq \|f\|_{L_\infty}$ при всех $x \in X$;
- b) $\|f - \varphi_n\|_{L_p} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое компактное множество $K \Subset X$, что выполняется неравенство $\int_{X \setminus K} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$. Положим $g(x) = f(x)$ при $x \in K$ и $g(x) = 0$ при $x \notin K$. Если $d \doteq \rho(K, \partial X)$, то $\text{supp}(g_r) \Subset X$ при всех $0 < r < d$. В силу свойства 3 найдется $0 < \delta < d$, т.ч. $\|g - g_r\|_{L_p} < \varepsilon/2$ при всех $0 < r < \delta$. Отсюда имеет место неравенство $\|f - g_r\|_{L_p} \leq \|f - g\|_{L_p} + \|g - g_r\|_{L_p} < \varepsilon$ при всех $0 < r < \delta$. Таким образом, функции $\varphi_n(x) \doteq g_{\delta/2n}(x)$ удовлетворяют условиям леммы. $\square$

Следствие. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное открытое множество. Тогда, если функция $f \in L_\infty(X)$ ограничена, то существует $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)$, т.ч.

- a) $|\varphi_n(x)| \leq \|f\|_{L_\infty}$ при всех $x \in X$;
- b) $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ при п.в. $x \in X$ и $n \rightarrow \infty$.

Для доказательства следствия применяем лемму в случае $p = 1$, а затем можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. на множестве X .

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f \in L_{loc}(X)$. Функционал $f \in \mathcal{D}'(X)$, определенный по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteq \int_X f(x) \varphi(x) dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, называется *регулярной обобщенной функцией*.

Доказательство непрерывности регулярного функционала на пространстве $\mathcal{D}(X)$ вытекает из теоремы Лебёга о предельном переходе под знаком интеграла.

Сходимость последовательности $f_n \rightarrow f$ в пространстве $L_{loc}(X)$ определяется сходимостью в пространстве $L_1(K)$ на каждом компакте $K \Subset X$. Так как найдется последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, т.ч. $\bigcup_{l=1}^\infty K_l = X$, то сходимость в $L_{loc}(X)$ равносильна сходимости по системе полунорм $k_l(f) \doteq \int_{K_l} |f(x)| dx$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, $L_{loc}(X)$ является пространством Фреше.

Теорема. Отображение $L_{loc}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным вложением.

Доказательство. В силу неравенства $\langle f_n - f, \varphi \rangle \leq \max |\varphi(x)| \int_K |f_n(x) - f(x)| dx$, где $\text{supp}(\varphi) \subset K$, отображение является непрерывным. Докажем вложение.

Пусть $\int_X f(x) \varphi(x) dx = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Введем ограниченную функцию $e(x) \doteq |f(x)|/f(x)$ при $f(x) \neq 0$ и $e(x) = 0$ при $f(x) = 0$. Применяя следствие к множеству $X_l \doteq \{x \in X \mid \|x\| < l\}$, построим последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X_l)$, т.ч. $|\varphi_n(x)| \leq 1$ и $\varphi_n(x) \rightarrow e(x)$ при п.в. $x \in X_l$. Тогда по теореме Лебёга

$$\int_{X_l} |f(x)| dx = \int_{X_l} f(x) e(x) dx = \lim_n \int_{X_l} f(x) (e(x) - \varphi_n(x)) dx = 0.$$

Следовательно, $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X_l$. Поскольку это равенство выполняется при всех $l \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{l=1}^\infty X_l = X$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X$. $\square$

Определение. Функция $f \in L_{loc}(X)$ имеет производную $\partial^\alpha f$ в смысле Соболева на множестве X , если существует $g \in L_{loc}(X)$, т.ч. при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$

$$\int_X g(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_X f(x)\partial^\alpha \varphi(x) dx.$$

По доказанной теореме производная $\partial^\alpha f \doteq g$ в смысле Соболева определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций п.в. на множестве X .

Пространство Соболева $W_p^k(X)$ состоит из классов эквивалентности функций $f \in L_p(X)$, у которых при всех $|\alpha| \leq k$ существуют производные в смысле Соболева и принадлежат $\partial^\alpha f \in L_p(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leq p \leq \infty$. Норма функции $f \in W_p^k(X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{W_p^k} \doteq \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p}, \quad \text{где } \|f\|_{L_p} = \begin{cases} (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}, & \text{при } 1 \leq p < \infty; \\ \inf_{\mu(A)=0} \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)|, & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Теорема. $W_p^k(X)$ — банахово пространство при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство. Поскольку $L_p(X)$ является нормированным пространством, то $W_p^k(X)$ также будет нормированным пространством. При этом $\|f\|_{W_p^k} = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ при почти всех $x \in X$. Докажем полноту.

Пусть $\{f_n\}$ задает последовательность Коши в пространстве $W_p^k(X)$. Тогда в силу определения нормы в $W_p^k(X)$ последовательность производных в смысле Соболева $\{\partial^\alpha f_n\}$ является последовательностью Коши в $L_p(X)$ при всех $|\alpha| \leq k$. Поскольку пространство $L_p(X)$ полно, то $f_n \rightarrow f$ сходится в $L_p(X)$ и все производные порядка $|\alpha| \leq k$ сходятся $\partial^\alpha f_n \rightarrow g_\alpha$ в $L_p(X)$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|\langle f_n - f, \varphi \rangle| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|f_n - f\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_q} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ и аналогично имеем $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle g_\alpha, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Отсюда по определению производной

$$\langle g_\alpha, \varphi \rangle = \lim_n \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_n \langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(X).$$

Поэтому $\partial^\alpha f = g_\alpha$. Таким образом, $f_n \rightarrow f$ сходится в пространстве $W_p^k(X)$. $\square$

Пример 2. Докажем, что δ -функция $\delta(x-a)$ не является регулярной обобщенной функцией. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 3$. Затем положим $\varphi_n(x) \doteq \eta(n(x-a))$. Если предположить, что δ -функция является регулярной, то получим $\langle \delta(x-a), \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x) dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$. Однако это невозможно, поскольку $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ при всех $x \neq a$ и, значит, по теореме Лебёга интеграл также стремится к нулю.

Функция Хевисайда $\theta(x-a) = \chi_{(a,\infty)}(x)$ имеет на $\mathbb{R}$ обобщенную производную $\partial\theta(x-a) = \delta(x-a)$, которая является δ -функцией. Так как $\delta(x-a)$ не является регулярной, то функция Хевисайда $\theta(x-a)$ не имеет на $\mathbb{R}$ производной $\partial\theta(x-a)$ в смысле Соболева. Однако она имеет производную в смысле Соболева, равную нулю, на каждом интервале $(c,d) \subset \mathbb{R}$, где она постоянная.

4 ПРОСТРАНСТВА ШВÁРЦА

Пусть далее $x^\beta \doteq x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}$, где $x \doteq (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\beta \doteq (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ обозначается линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$, для которых $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$. Его обычно называют пространством быстро убывающих функций.

Определение. *Пространством Шв́арца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространство быстро убывающих функций, в котором задана сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$, удовлетворяющая условию: $x^\beta \partial^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}^m$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$.*

Сопряженное пространство Шв́арца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ к пространству сходимости $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Из определения вытекают следующие свойства:

- 1) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(X)$;
- 2) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(X)$, то $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$;
- 3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{S}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, то $f \in \mathcal{S}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Вначале заметим, что система норм

$$s_l(\varphi) \doteq \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1 + \|x\|^2)^l |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

определяет в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ структуру счетно-нормированного пространства. Поскольку $|x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \leq (1 + \|x\|^2)^l |\partial^\alpha \varphi(x)|$ при всех $|\beta| \leq l$, то сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ по этой системе норм равносильна равномерной сходимости в $\mathbb{R}^m$ всех функций вида $x^\beta \partial^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)$. Следовательно, по доказанной ранее теореме $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим линейным пространством с указанной сходимостью.

В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность бесконечно дифференцируемых функций сходится равномерно в $\mathbb{R}^m$ вместе со всеми производными, то предельная функция имеет непрерывные производные любого порядка в $\mathbb{R}^m$. Отсюда предельная функция любой последовательности, сходящейся в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, будет также принадлежать $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является полным счетно-нормированным пространством, т.е. задает пространство Фрешé. Таким образом, по доказанному ранее в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ полно.

Пример 1. Функция $f(x) \doteq e^{x^2} \in L_{loc}(\mathbb{R})$ определяет регулярную обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Однако $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, т.к. этот функционал f не имеет непрерывного продолжения на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. В самом деле, существуют функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, т.ч. $f\varphi \notin L_1(\mathbb{R})$, например, $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. Но тогда в силу следующей леммы f не имеет непрерывного продолжения в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Лемма. Пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Пусть основная функция $\eta(x) = 1$ при $\|x\| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $\|x\| \geq 3$. Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ положим $\varphi_n(x) \doteq \eta(x/n)\varphi(x)$. Тогда $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя формулу Лейбница, получим равенство

$$\partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x)) = \partial^\alpha((\eta(x/n) - 1)\varphi(x)) = \sum_{\gamma \leq \alpha} c_{\alpha\gamma} \partial^\gamma(\eta(x/n) - 1) \partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы $|x^\beta \partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > N$ и $\gamma \leq \alpha$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^m$. Поскольку $\partial^\gamma(\eta(x/n) - 1) = 0$ при $\|x\| \leq n$, то имеем $|x^\beta \partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x))| < c\varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $n \geq N$, где $c \doteq \sum_{\gamma \leq \alpha} c_{\alpha\gamma} \max |\partial^\gamma \eta(x)|$. Таким образом, последовательность $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Теорема. Отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным вложением.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то каждому $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ соответствует линейный функционал $g \doteq f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$ на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, и поэтому $\langle f, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, т.е. $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя лемму, для каждой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ построим такие $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Отсюда $\langle f, \varphi \rangle = \lim \langle f, \varphi_n \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому функционал $f = 0$ и, следовательно, отображение является вложением. Если $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то очевидно $g_n \rightarrow g$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, вложение является непрерывным. $\square$

Рассмотрим действия с обобщенными функциями медленного роста.

1. Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi \rangle \doteq \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle \doteq |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, где $\tau_a \varphi(x) \doteq \varphi(x - a)$ и $\rho_\lambda \varphi(x) \doteq \varphi(\lambda x)$.

2. Пусть $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A \neq 0$. Замена переменных в обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ задается по формуле $\langle T_A f, \varphi \rangle \doteq |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}} \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, где $T_A \varphi(x) = \varphi(Ax)$.

3. Производная $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(X)$ определяется по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(X)$.

Доказательство непрерывности в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ соответствующих функционалов в этих свойствах аналогично доказательству, проведенному ранее для $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\widehat{f}(x) \doteq \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteq \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy,$$

где $\kappa \doteq 1/\sqrt{2\pi}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ и $\langle x, y \rangle \doteq \sum_{k=1}^m x_k y_k$.

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteq \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteq \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье* для функций $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, интегрируемых по Лебэгу.

Пример 2. Докажем, что прямое и обратное преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ совпадают с ней самой. Поскольку по теореме Фубини кратный интеграл сводится к повторному, то достаточно рассмотреть одномерный случай

$$\widehat{f}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2 - ixy} dy = e^{-x^2/2} \varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-(y+ix)^2/2} dy = e^{-x^2/2},$$

т.к. по теореме Коши последний интеграл $\int_{\Im z=x} e^{-z^2/2} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$.

Лемма. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно и биективно.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то, дифференцируя и интегрируя по частям, получим следующие равенства:

$$\partial^\alpha \widehat{\varphi}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) (-iy)^\alpha e^{-i\langle x, y \rangle} dy, \quad \widehat{\partial^\alpha \varphi}(x) = \varkappa^m (ix)^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Отсюда имеем $x^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(x) = (-i)^{|\alpha+\beta|} \mathcal{F}(\partial^\beta y^\alpha \varphi(y))$ и выполняется неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(x)| \leq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |\partial^\beta (y^\alpha \varphi(y))| dy \leq (\pi \varkappa)^m \max(1 + \|y\|^2)^m |\partial^\beta (y^\alpha \varphi(y))|.$$

Поэтому $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{\varphi}$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. $\mathcal{F}$ непрерывно в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Докажем равенство $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x) &= \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle - \varepsilon^2 \|y\|^2/2} dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa^{2m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle z-x, y \rangle - \|y\|^2/2} dy \right) dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varkappa^{2m}}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \frac{z-x}{\varepsilon}, y \rangle - \|y\|^2/2} dy \right) dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varkappa^m}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) e^{-\|\frac{z-x}{\varepsilon}\|^2/2} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x + \varepsilon z) e^{-\|z\|^2/2} dz = \varphi(x). \end{aligned}$$

Аналогично $\widehat{\widetilde{\varphi}}(x) = \varphi(x)$. Значит $\mathcal{F}$ является биективным в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Определение. Для каждой функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle \doteq \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle \doteq \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle \quad \text{при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteq \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteq \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье* обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Теорема. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ является линейным, непрерывным и биективным оператором.

Доказательство. В силу леммы, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{\varphi}$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ при всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, если $f_n \rightarrow f$ сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то преобразования Фурье $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ сходятся в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ непрерывен в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Так как по лемме выполняются равенства

$$\langle \widetilde{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{и} \quad \langle \widehat{\widetilde{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\widetilde{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

то произведение операторов $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = I$ совпадает с тождественным оператором. Таким образом, оператор $\mathcal{F}$ будет биективным в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Рассмотрим формулы для преобразования Фурье обобщенных функций.

1. Формулы сдвига. Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-i\langle a, x \rangle} \mathcal{F}f(x), \quad \tau_a \mathcal{F}f = \mathcal{F}(e^{i\langle a, y \rangle} f(y)).$$

Для функции $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ эти формулы легко доказываются из определения преобразования Фурье. Поэтому, применяя вторую формулу, получим

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-i\langle a, y \rangle} \varphi(y)) \rangle = \langle e^{-i\langle a, x \rangle} \mathcal{F}f, \varphi \rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

2. Формулы замены переменных. Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейный оператор с определителем $\det A \neq 0$ и $T_A \varphi(x) \doteq \varphi(Ax)$, то

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'|^{-1} T_{A'^{-1}} \mathcal{F}f, \quad T_A \mathcal{F}f = |\det A'|^{-1} \mathcal{F}(T_{A'^{-1}} f).$$

В самом деле, вначале доказываем эти формулы для функций $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$. Тогда по определению замены переменных обобщенной функции получим

$$\langle \mathcal{F}(T_A f), \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}} \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(T_{A'} \varphi) \rangle = |\det A'|^{-1} \langle T_{A'^{-1}} \mathcal{F}f, \varphi \rangle,$$

где A' — сопряженный оператор. Аналогично доказывается вторая формула.

3. Формулы дифференцирования. Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$

$$\partial^\alpha (\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-iy)^\alpha f(y)), \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (ix)^\alpha \mathcal{F}f(x),$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций.

Дифференцируя и интегрируя по частям преобразование Фурье, мы докажем эти формулы $\partial^\alpha \mathcal{F}\varphi(x) = \mathcal{F}((-iy)^\alpha \varphi)$ и $\mathcal{F}\partial^\alpha \varphi(x) = (ix)^\alpha \mathcal{F}\varphi(x)$ для всех функций $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$. Поэтому из определения преобразования Фурье следуют равенства

$$\langle \partial^\alpha (\mathcal{F}f), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \mathcal{F}\partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, (ix)^\alpha \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}((-iy)^\alpha f(y)), \varphi \rangle.$$

Отсюда вытекает первая формула и аналогично вторая.

4. Формулы для многочлена. Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x^\alpha$ многочлен и $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \partial^\alpha$ дифференциальный оператор, то

$$\mathcal{F}(P f) = P(i\partial) \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(P(\partial) f) = P(ix) \mathcal{F}f(x).$$

В силу свойства линейности преобразования Фурье $\mathcal{F}$ эти формулы являются простым следствием из формул дифференцирования.

Пример 3. Преобразование Фурье производной δ -функции $f(x) \doteq \partial^\alpha \delta(x - a)$. По определению преобразования Фурье и производной, для всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta(x - a), \partial^\alpha \mathcal{F}\varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}\varphi(a) = \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) (iy)^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle} dy.$$

Таким образом, получаем следующую формулу: $\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta(x - a)) = \kappa^m (iy)^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle}$. Отсюда $\mathcal{F}^{-1}(y^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle}) = \kappa^{-m} (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta(x - a)$.

5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В $L_1(\mathbb{R}^m)$ И $L_2(\mathbb{R}^m)$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\langle x, y \rangle \doteq \sum_{k=1}^m x_k y_k$ обозначает скалярное произведение. Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteq \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteq \widetilde{f}$, где

$$\widehat{f}(x) \doteq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy, \quad \varkappa \doteq 1/\sqrt{2\pi},$$

называются прямым и обратным преобразованием Фурье для функций $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ интегрируемых по Лебёгу в $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = f(x)$.

Лемма (Римана-Лебёга). Если $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то преобразование Фурье имеет следующие свойства: $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^m)$, $\|\widehat{f}\|_C \leq \varkappa^m \|f\|_{L_1}$ и $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \widehat{f}(x) = 0$.

Доказательство. Неравенство $\|\widehat{f}\|_C \leq \varkappa^m \|f\|_{L_1}$ очевидно. Пусть $\tau_a f(x) \doteq f(x - a)$, тогда $|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| |e^{-i\langle a, y \rangle} - 1| dy = 2\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| \left| \sin \frac{\langle a, y \rangle}{2} \right| dy$.

Так как последний интеграл по теореме Лебёга стремится к нулю при $a \rightarrow 0$, то функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$. Пусть $a = \pi x / \langle x, x \rangle$, тогда $\tau_a \widehat{f} = -\widehat{f}$ и

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(x)| &= \frac{1}{2} |\widehat{f}(x) - \tau_a \widehat{f}(x)| = \frac{\varkappa^m}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(y) - \tau_a f(y)) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\varkappa^m}{2} \|f - \tau_a f\|_{L_1} \leq \frac{\varkappa^m}{2} (\|f - g\|_{L_1} + \|g - \tau_a g\|_{L_1} + \|\tau_a g - \tau_a f\|_{L_1}). \end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ и $\delta > 0$, т.ч. выполняются неравенства

$$\|f - g\|_{L_1} = \|\tau_a g - \tau_a f\|_{L_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \quad \text{и} \quad \|g - \tau_a g\|_{L_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \quad \text{при всех } \|a\| = \pi/\|x\| < \delta.$$

Следовательно, $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > \pi/\delta$. $\square$

Теорема (условие Дини). Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ существует $\delta > 0$,

$$\text{т.ч. } \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty. \quad \text{Тогда предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, получим

$$\varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = \varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{-n}^n e^{i(x-z)y} dy \right) dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z} dz.$$

Делая замену переменных $t = x - z$ и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin nt}{t} dt = \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t} dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t| > n\delta} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ по лемме Римана-Лебёга, а последний стремится к нулю в силу его сходимости в бесконечности. $\square$

Рассмотрим свойства преобразования Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^m)$.

1. Формула умножения. Если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фубини, имеем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \right) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \right) dy.$$

В частности, из формулы умножения вытекает, что преобразование Фурье любой интегрируемой функции совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье.

2. Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то равенства $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ выполняются при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{\widehat{\varphi}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx.$$

По доказанному ранее отсюда следует, что $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. Формулы дифференцирования. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $x^\alpha f(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство $\partial^\alpha \widehat{f}(x) = (-iy)^\alpha \widehat{f}(y)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$. Если $f(x) \in W_1^k(\mathbb{R}^m)$ и $|\alpha| \leq k$, то выполняется равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (ix)^\alpha \widehat{f}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Первая формула вытекает из возможности дифференцирования преобразования Фурье под знаком интеграла Лебёга. Для доказательства второй формулы в силу определения производной в смысле Соболева при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle \widehat{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, (-iy)^\alpha \widehat{\varphi}(y) \rangle = \langle (ix)^\alpha \widehat{f}(x), \varphi \rangle.$$

Отсюда вытекает, что равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (ix)^\alpha \widehat{f}(x)$ имеет место при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$, а так как функции непрерывны, то равенство выполняется всюду.

4. Формула свертки. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $f * g(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x - y) dy$ есть свертка функций. Тогда $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Линейное преобразование $(x, y) \rightarrow (y, x - y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^{2m}$ в измеримые в $\mathbb{R}^{2m}$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x - y)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$. Поэтому $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(z) g(y - z) dz \right) e^{-i\langle x, y \rangle} dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(y - z) e^{-i\langle x, y - z \rangle} dy \right) e^{-i\langle x, z \rangle} dz.$$

Производя замену переменных $y \rightarrow y - z$, приходим к указанному равенству.

Определение. Пусть $\Delta_n \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| < n\}$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^m$ с ребром $2n$. Преобразованием Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ называется предел $\widehat{f}(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_n} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$.

В следующей теореме будет доказано, что этот предел существует в $L_2(\mathbb{R}^m)$ и преобразование Фурье является изометрией пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\widetilde{f}(x) \doteq \widehat{f}(-x)$ и $f_n(x) \doteq f(x) \chi_{\Delta_n}(x)$. Тогда $f_n \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f}(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(x)$.

Теорема (Планшереля). Если $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$, то существует предел $\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство Парсеваля $\|\widehat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то по формулам умножения и обращения

$$\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\varphi}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \|\widehat{\varphi}\|_{L_2}^2.$$

Пусть вначале $f(x) = 0$ при $x \notin \Delta_r$. По доказанному ранее найдутся $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Delta_r)$, т.ч. $\|f - \varphi_n\|_{L_2} \rightarrow 0$. Так как $\{\varphi_n\}$ является последовательностью Коши в $L_2(\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi_k - \varphi_n\|_{L_2} = \|\widehat{\varphi}_k - \widehat{\varphi}_n\|_{L_2}$, то $\{\widehat{\varphi}_n\}$ будет последовательностью Коши в $L_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $\|f - \varphi_n\|_{L_1} \rightarrow 0$, то $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{f}$ сходится равномерно. Следовательно, предел в $L_2(\mathbb{R}^m)$ равен $\lim \widehat{\varphi}_n = \widehat{f}$ и $\|\widehat{f}\|_{L_2} = \lim \|\widehat{\varphi}_n\|_{L_2} = \lim \|\varphi_n\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$.

Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ существует предел $\lim f_n = f$ в $L_2(\mathbb{R}^m)$, где $f_n(x) \doteq f(x) \chi_{\Delta_n}(x)$. Так как $\{f_n\}$ есть последовательность Коши в $L_2(\mathbb{R}^m)$ и по доказанному выше $\|f_k - f_n\|_{L_2} = \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_n\|_{L_2}$, то $\{\widehat{f}_n\}$ будет последовательностью Коши в $L_2(\mathbb{R}^m)$. Поэтому существует предел $\lim \widehat{f}_n \doteq \widehat{f}$ по норме $L_2(\mathbb{R}^m)$ и при этом выполняется равенство $\|\widehat{f}\|_{L_2} = \lim \|\widehat{f}_n\|_{L_2} = \lim \|f_n\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$. $\square$

Рассмотрим свойства преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$.

1. Формула умножения. Если $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Это равенство вытекает из теоремы Планшереля и непрерывности скалярного произведения. Заметим, что из формулы умножения следует, что преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^m)$ совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье.

2. Формула обращения. Если $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx.$$

Отсюда следует, что равенство $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ выполняется при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. Формула свертки. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда свертка этих функций $f * g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f * g}(x) = \kappa^{-m} \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Используя обобщенное неравенство Минковского, мы получаем неравенство $\|f * g\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_2}$. Поэтому $f * g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и свертка непрерывна по второму аргументу $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда, применяя теорему Планшереля, формулу свертки для функций из $L_1(\mathbb{R}^m)$ и непрерывность скалярного произведения, получим

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \lim \langle \widehat{f * g_n}, \varphi \rangle = \kappa^{-m} \lim \langle \widehat{f} \widehat{g_n}, \varphi \rangle = \kappa^{-m} \langle \widehat{f} \widehat{g}, \varphi \rangle.$$

Отсюда равенство $\widehat{f * g}(x) = \kappa^{-m} \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ выполняется при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Определение. Функциями Эрмита называются следующие функции

$$h_n(x) \doteq c_n e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ называются *многочленами Эрмита*.

Функции Эрмита обладают свойством ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при $m > n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x) h_m(x) dx = c_m \int_{\mathbb{R}} H_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^m e^{-x^2} dx = c_m (-1)^m \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m H_n(x) dx = 0.$$

При $m = n$ получим $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x) dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому, если $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$, то система функций Эрмита $\{h_n\}$ будет ортонормированной системой.

Лемма. Пусть $\varphi_n(t) \doteq t^n \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ измерима; $0 < |\varphi(t)| \leq b e^{-a|t|}$ при $t \in \mathbb{R}$; $a > 0$, $b > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда система функций $\{\varphi_n\}$ полна в $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ ортогональна $f \perp \varphi_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. имеет место равенство $\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция

$$F(z) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) e^{-itz} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) e^{ty} e^{-itx} dt, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

голоморфна в полосе $|\Im z| < a$ комплексной плоскости и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) (-it)^n e^{-itz} dt|_{z=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt = 0.$$

Поэтому $F(z) = 0$ при всех $|\Im z| < a$. В частности, имеем $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда по формуле обращения преобразования Фурье получим, что произведение $f(t)\varphi(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, функция $f(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, система $\{\varphi_n\}$ полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема. Система функций Эрмита $\{h_n\}$ образует в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье с собственными значениями $\lambda_n = (-i)^n$, т.е. $\widehat{h}_n(x) = \lambda_n h_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Поскольку функции Эрмита $h_n(x)$ получаются ортогонализацией системы функций $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$, где $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$, то их полнота вытекает из леммы. Докажем, что $h_n(x)$ является собственной функцией оператора Фурье.

$$\begin{aligned} \widehat{h}_n(x) &= \kappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-ixy} dy = \kappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{y^2/2 - ixy} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} dy = \\ &= \kappa c_n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{(y-ix)^2/2} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} dy = \\ &= \kappa c_n (-1)^n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{(y-ix)^2/2} dy = \\ &= \kappa c_n (-i)^n e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2 - ixy - x^2/2} dy = \\ &= c_n (-i)^n e^{-x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-i)^n h_n(x). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали в предпоследнем равенстве, что преобразование Фурье функции $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ равно $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, которое было получено ранее. $\square$

6 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть E — нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел и E^* — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов $f : E \rightarrow \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteq \sup_{x \in S} |f(x)|$, где $S \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Значения линейного функционала f будем обозначать через $f(x) \doteq \langle f, x \rangle$.

Определение. Система элементов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$ следует, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Система функционалов $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ при всех $x \in E$ следует, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Систему элементов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$ и систему функционалов $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$ будем называть *биортогональными*, если $f_k(e_k) = 1$ и $f_l(e_k) = 0$ при $l \neq k$.

Бесконечная система элементов называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система элементов E называется *базисом Гамеля*. Ее существование вытекает из леммы Цорна. Говорят, что пространство E имеет размерность $\dim E = n$, если максимальная линейно независимая система состоит из n элементов.

Последовательность элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ называется *базисом* нормированного пространства E , если любой элемент $x \in E$ представляется в виде сходящегося по норме ряда $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ единственным образом. Если, кроме того, линейные функционалы $f_n(x) \doteq c_n$, заданные с помощью этого представления, являются непрерывными, то система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ называется *базисом Шáудера*. В банаховом пространстве любой базис является базисом Шáудера и система функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset E^*$ биортогональна системе элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset E$.

Теорема. Система $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$ в том и только в том случае имеет биортогональную систему $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$, когда она линейно независима.

Доказательство. Необходимость. Если имеет место равенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ при всех $x \in E$, то полагая в нем $x = e_k$, получим $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Достаточность. По индукции. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$, тогда существует $e_1 \in E$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. Пусть при $n - 1$ утверждение верно. По предположению индукции существуют такие $v_k \in E$, что $f_k(v_k) = 1$ и $f_l(v_k) = 0$ при $l \neq k$ и $k, l = 1, \dots, n - 1$. Тогда элемент $y \doteq x - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) v_k$ удовлетворяет условию $f_k(y) = 0$ при всех $x \in E$ и при всех $k = 1, \dots, n - 1$. Если выполняется $f_n(y) = 0$ при всех $x \in E$, то $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) f_n(v_k)$, что невозможно в силу линейной независимости. Значит $f_n(y) \neq 0$ при некотором $x \in E$. Тогда, полагая $e_n \doteq y/f_n(y)$ и $e_k \doteq v_k - f_n(v_k) e_n$ при $k = 1, \dots, n - 1$, получим биортогональную систему элементов. $\square$

Следствие. Система $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$ в том и только в том случае имеет биортогональную систему $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$, когда она линейно независима.

Для доказательства рассмотрим изометрическое вложение $J : E \rightarrow E^{**}$, определенное по формуле $J(x) \doteq \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteq f(x)$ являются функционалами Дирака при $f \in E^*$. Поскольку система $\{\delta_{e_k}\}_{k=1}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда система $\{e_k\}_{k=1}^n$ линейно независима, то по доказанной теореме существует биортогональная система $\{f_k\}_{k=1}^n$ в пространстве E^* .

Пусть E, F — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathcal{L}(E, F)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов $A : E \rightarrow F$ с нормой $\|A\| \doteq \sup_{x \in S} \|A(x)\|$. Следующие множества

$$\ker A \doteq \{x \in E \mid A(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A \doteq \{y \in F \mid y = A(x), x \in E\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного оператора A . Рассмотрим свойства ядра и образа ограниченного линейного оператора.

1. Если линейный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то ядро $\ker A$ замкнутое линейное подпространство в E , а образ $\operatorname{Im} A$ линейное подпространство в F .

Пусть $x, y \in \ker A$. Тогда $A(x + y) = A(x) + A(y) = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x + y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Пусть $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $A(x) = \lim A(x_n) = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

Пусть $u, v \in \operatorname{Im} A$. Тогда имеем $u + v = A(x) + A(y) = A(x + y) \in \operatorname{Im}(A)$ и $\lambda u = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u + v \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u \in \operatorname{Im} A$.

2. Линейный оператор $A : E \rightarrow F$ в том и только в том случае является биективным, когда его ядро $\ker A = 0$ и он сюръективный $\operatorname{Im} A = F$.

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = F$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $A(x) = A(y)$ следует, что $A(x - y) = 0$ и, значит, $x - y = 0$. Отсюда A будет взаимно однозначным отображением на свой образ.

Определение. Произведением операторов $A : E \rightarrow F$ и $B : F \rightarrow G$ называется оператор $BA : E \rightarrow G$, определенный по формуле $BA(x) \doteq B(A(x))$ при $x \in E$.

Оператор $B : F \rightarrow E$ называется *обратным к оператору* $A : E \rightarrow F$, если выполняются равенства $BA = I_E$ и $AB = I_F$, где I_E есть тождественный оператор в E , т.е. $I_E(x) = x$ при всех $x \in E$. Обратный оператор обозначается через A^{-1} .

1. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B \in \mathcal{L}(F, G)$, то $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leq \|B\| \|A(x)\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|$ при всех $x \in E$.

2. Если оператор $A : E \rightarrow F$ является линейным и биективным, то обратный оператор $A^{-1} : F \rightarrow E$ также является линейным и биективным.

Докажем линейность оператора A^{-1} . Пусть $u, v \in F$ и $A^{-1}(u) = x$ и $A^{-1}(v) = y$. Тогда получим $A^{-1}(u + v) = A^{-1}(Ax + Ay) = A^{-1}A(x + y) = x + y = A^{-1}u + A^{-1}v$ и $A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Определение. Оператор $A^* : F^* \rightarrow E^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathcal{L}(E, F)$, если $A^*(f) = g$, где $f \in F^*$ и $g(x) \doteq f(Ax)$ при всех $x \in E$, т.е. имеет место равенство $\langle A^*f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle$ при всех $x \in E$ и $f \in F^*$.

1. Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Докажем, что A^* есть линейный оператор. Пусть $f, g \in F^*$ и $A^*(f + g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f + g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax)$, т.е. $A^*(f + g) = A^*f + A^*g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A^*(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A^*(\lambda f) = \lambda A^*f$.

Докажем равенство норм. Поскольку $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов $\|A^*f\| \leq \|f\| \|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leq \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in E$ по теореме Хана–Банаха найдется $f \in F^*$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leq \|A^*f\| \|x\| \leq \|A^*\| \|x\|$. Следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$.

2. Если операторы $A \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B \in \mathcal{L}(F, G)$, то $(BA)^* = A^*B^*$. В частности, если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является биективным, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Пусть $g \in G^*$, тогда по определению $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*(g)$. Второе утверждение вытекает из определения обратного оператора и теоремы Банаха об обратном операторе, которую мы докажем позже.

Определение. Пусть $V \subset E$ и $W \subset E^*$, тогда следующие множества:

$$V^\perp \doteq \{f \in E^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_\perp \doteq \{x \in E \mid f(x) = 0, f \in W\}$$

называются соответственно аннулятором* V и аннулятором W . Заметим, что эти множества $W_\perp = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^\perp = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$ являются пересечением ядер ограниченных функционалов и, значит, будут замкнутыми подпространствами.

Теорема. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то имеют место следующие свойства:

- 1) $\ker A = (\text{Im } A^*)^\perp$; 2) $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$;
- 3) $\text{Im } A \subset (\ker A^*)^\perp$; 4) $\text{Im } A^* \subset (\ker A)^\perp$.

Доказательство. Доказательство этих соотношений легко вывести из указанных определений сопряженного оператора, ядра, образа и их аннуляторов.

1) Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. Последнее равенство в силу теоремы Хана–Банаха выполняется тогда и только тогда, когда $f(Ax) = 0$ при всех $f \in F^*$. Это равносильно включению $x \in (\text{Im } A^*)^\perp$.

2) Функционал $f \in \ker A^*$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(Ax) = 0$ при всех $x \in E$. Последнее равносильно включению $f \in (\text{Im } A)^\perp$.

3) Если $y \in \text{Im } A$, то $y = Ax$ при некотором $x \in E$. Поэтому $f(y) = f(Ax) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$ и, следовательно, выполняется включение $y \in (\ker A^*)^\perp$.

4) Если $g \in \text{Im } A^*$, то существует $f \in F^*$, т.ч. $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in E$. Отсюда вытекает включение $g \in (\ker A)^\perp$. $\square$

Замечание. В дальнейшем будет доказано, что если E и F являются банаховыми пространствами и образ $\text{Im } A$ оператора $A \in \mathcal{L}(E, F)$ замкнут в пространстве F , то включения (3) и (4), полученные в теореме, будут равенствами.

Пример 1. Каждый линейный оператор $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ определяется матрицей $A = \{a_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$, т.е. если $Ax = y$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{F}^m$, то $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}x_l$ при всех $k = 1, \dots, m$. Следовательно, по определению имеем

$$\langle u, Ax \rangle = \sum_{k=1}^m u_k \left(\sum_{l=1}^n a_{kl}x_l \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{kl}u_k \right) x_l = \langle A^*u, x \rangle,$$

т.е. если $A^*u = v$, где $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{F}^m$ и $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, то получим $v_l = \sum_{k=1}^m a_{kl}u_k$ при всех $l = 1, \dots, n$. Таким образом, оператор $A^* = \{a_{kl}^*\}_{k,l=1}^{n,m}$ имеет транспонированную матрицу $a_{kl}^* = a_{lk}$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор $A : L_p([0, 1]) \rightarrow L_p([0, 1])$ при $1 \leq p < \infty$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x) \doteq \int_0^1 K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_p([0, 1]),$$

где функция $K(x, y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что $K(x, y)$ является измеримой функцией на квадрате $[0, 1]^2$, для которой следующая смешанная норма в пространстве $L_{pq}([0, 1]^2)$ является конечной:

$$\|K\|_{L_{pq}} \doteq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^p dx \right)^{q/p} dy \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь внутренняя норма берется в $L_p([0, 1])$, а внешняя норма берется в $L_q([0, 1])$, при этом полагаем, что $q = p/(p-1)$ в случае $1 < p < \infty$ и $q = \infty$ в случае $p = 1$. Применяя далее обобщенное неравенство Минковского и неравенство Гёльдера в случае $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |Af(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^p dx \right)^{1/p} |f(y)| dy \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^p dx \right)^{q/p} dy \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда оператор A , действующий из $L_p([0, 1])$ в $L_p([0, 1])$, является ограниченным и его норма не превосходит $\|A\| \leq \|K\|_{L_{pq}}$. Следовательно, можно поменять порядок интегрирования, используя известную теорему Фубини. Тогда для всех функций $f \in L_p([0, 1])$ и $g \in L_q([0, 1]) = L_p^*([0, 1])$ получим равенство

$$\langle g, Af \rangle = \int_0^1 g(x) \left(\int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y) g(x) dx \right) f(y) dy = \langle A^*g, f \rangle.$$

Таким образом, в силу доказанного выше свойства (1) сопряженный оператор A^* действует из $L_q([0, 1])$ в $L_q([0, 1])$ и имеет норму $\|A^*\| = \|A\| \leq \|K\|_{L_{pq}}$. При этом он является интегральным оператором и справедлива следующая формула:

$$A^*g(y) = \int_0^1 K(x, y) g(x) dx, \quad g \in L_q([0, 1]).$$

Отсюда ядро интегрального оператора A^* равно $K^*(x, y) = K(y, x)$.

7 ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть E и F — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $E \times F \doteq \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$ их прямое произведение. Введем в пространство $E \times F$ операции сложения и умножения, а также норму:

- а) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ при всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$;
- б) $\lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x, y) \in E \times F$;
- в) $\|(x, y)\| \doteq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x, y) \in E \times F$.

Тогда $E \times F$ превращается в нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Лемма. Если E и F являются банаховыми пространствами, то их прямое произведение $E \times F$ также является банаховым пространством.

Доказательство. Докажем полноту пространства $E \times F$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ будет последовательностью Коши в $E \times F$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что при всех $n, m \geq N$ выполняется неравенство $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| < \varepsilon$. Отсюда имеем $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ и $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$. Поэтому $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши в пространствах E и F соответственно. Следовательно, существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Таким образом, существует предел $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ в пространстве $E \times F$. $\square$

Далее будем предполагать, что E и F являются банаховыми пространствами. Пусть линейный оператор $A : L \rightarrow F$, необязательно ограниченный, определен на некотором линейном подпространстве $L \subset E$. Тогда подпространство $\text{dom } A \doteq L$ называется *областью определения* оператора A , а множество

$$\text{gr } A \doteq \{(x, y) \in E \times F \mid x \in L, y = Ax\}$$

называется *графиком* оператора A . График является линейным подпространством в $E \times F$, но, вообще говоря, незамкнутым.

Определение. Оператор $A : L \rightarrow F$ называется *замкнутым*, если его график $\text{gr } A$ является замкнутым подпространством в $E \times F$.

Определение замкнутости графика $\text{gr } A$ оператора A равносильно следующему условию: если $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow y$, где $x_n \in L$, то $x \in L$ и $Ax = y$. В самом деле, пусть $Ax_n = y_n$, тогда $(x_n, y_n) \in \text{gr } A$. Поэтому график замкнут тогда и только тогда, когда из сходимости $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ следует, что $(x, y) \in \text{gr } A$, т.е. $Ax = y$.

Теорема (критерий замкнутости для ограниченного оператора). Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(L, F)$ является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения $\text{dom } A = L$ замкнута в E .

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x$ и $x_n \in L$. В силу непрерывности оператора имеем $y_n = Ax_n \rightarrow y$. Из замкнутости A следует, что $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \text{gr } A$, т.е. $x \in L$. Обратно, пусть $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow y$, где $x_n \in L$. Из замкнутости L получим $x \in L$ и по непрерывности оператора $Ax_n \rightarrow Ax = y$. Поэтому график $\text{gr } A$ замкнут. $\square$

Пример 1. Пусть $D : L \rightarrow L_1([0, 1])$ является оператором дифференцирования, заданным по формуле $D\varphi(x) \doteq \varphi'(x)$ при п.в. $x \in [0, 1]$, где производная берется в смысле Соболева и область определения L оператора совпадает с пространством Соболева $W_1^1([0, 1])$. При этом предполагается, что L является подпространством в пространстве $L_1([0, 1])$ с соответствующей нормой из $L_1([0, 1])$.

Докажем, что оператор неограниченный. В самом деле, полагая $\varphi_n(x) \doteq e^{inx}$, получим $\|\varphi_n\|_{L_1} = 1$ и $\|D\varphi_n\|_{L_1} = n \rightarrow \infty$. Поэтому норма $\|D\| = \infty$.

Докажем замкнутость оператора. Пусть последовательности функций $\varphi_n \rightarrow \varphi$ и $\varphi'_n \rightarrow \psi$ сходятся в $L_1([0, 1])$, где $\varphi_n \in W_1^1([0, 1])$. Поскольку каждая функция из $W_1^1([0, 1])$ совпадает п.в. на $[0, 1]$ с абсолютно непрерывной функцией, то из указанных условий вытекает, что выполняется формула Ньютона-Лейбница

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi'_n(t) dt \text{ при п.в. } x \in [0, 1].$$

Поэтому $|\varphi_n(0)| \leq \|\varphi_n\|_{L_1} + \|\varphi'_n\|_{L_1}$ и, следовательно, последовательность $\{\varphi_n(0)\}$ ограничена. Тогда, переходя к пределу по некоторой подпоследовательности, мы получим, что $\varphi(x) = c + \int_0^x \psi(t) dt$ при п.в. $x \in [0, 1]$. Таким образом, функция $\varphi(x)$ п.в. совпадает с абсолютно непрерывной функцией, т.е. $\varphi \in W_1^1([0, 1])$ и при этом $\varphi'(x) = \psi(x)$ при п.в. $x \in [0, 1]$. Значит оператор D является замкнутым.

Обозначим через $S_r(x) \doteq \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$ шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in E$, а через $S_r \doteq S_r(0)$ шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле.

Лемма. Пусть $A : E \rightarrow F$ линейный оператор в банаховом пространстве E и множество $M_c \doteq \{x \in E \mid \|Ax\| \leq c\}$. Тогда для каждого $c > 0$ существует такое $r > 0$, что $S_r \subset \overline{M_c}$, где $\overline{M_c}$ обозначает замыкание M_c .

Доказательство. Поскольку $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{kc}$, то по теореме Бэра существуют такие $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $x \in E$, что $S_r(x) \subset \overline{M_{kc}}$. Поскольку множество M_{kc} и его замыкание являются симметричными, т.е. $M_{kc} = -M_{kc}$ и $\overline{M_{kc}} = -\overline{M_{kc}}$ то имеем $S_r(-x) \subset \overline{M_{kc}}$. Докажем, что выполняется включение $S_r \subset \overline{M_{kc}}$.

В самом деле, пусть $y \in S_r$, тогда $y \pm x \in S_r(\pm x)$. Поэтому существуют такие последовательности $\{x_n^{\pm}\} \subset M_{kc}$, что $x_n^{\pm} \rightarrow y \pm x$. Отсюда $x_n \doteq (x_n^+ + x_n^-)/2 \rightarrow y$ и из $x_n \in M_{kc}$ следует, что $y \in \overline{M_{kc}}$. Следовательно, $S_r \subset \overline{M_{kc}}$. Наконец, используя однородность множества $M_{kc} = kM_c$, получим включение $S_{r/k} \subset \overline{M_c}$. $\square$

Теорема (Банаха о замкнутом графике). Пусть линейный оператор $A : E \rightarrow F$, заданный в банаховых пространствах E и F , имеет замкнутый график $\text{gr } A$. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является ограниченным.

Доказательство. В силу леммы для каждого $c > 0$ существует такое $r > 0$, что выполняется $S_r \subset \overline{M_c}$. Положим $c_n = c/2^n$ и $r_n = r/2^n$, тогда $S_{r_n} \subset \overline{M_{c_n}}$.

Пусть элемент $x \in S_r$. Так как $S_r \subset \overline{M_c}$, то существует $x_0 \in M_c$, т.ч. $\|x - x_0\| < r_1$. Поскольку $S_{r_1} \subset \overline{M_{c_1}}$, то существует $x_1 \in M_{c_1}$, т.ч. $\|x - x_0 - x_1\| < r_2$ и т.д. Поэтому существуют такие $x_k \in M_{c_k}$, что $\|x - \sum_{k=0}^n x_k\| < r_{n+1} \rightarrow 0$. Значит ряд $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится к x в пространстве E и выполняются неравенства

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m Ax_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|Ax_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m c_k < c/2^n,$$

где $y_n \doteq \sum_{k=0}^n Ax_k$. Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши в пространстве F . В силу полноты F существует предел $y = \lim y_n$. Так как график замкнут, то $y = Ax$. Применяя свойство непрерывности нормы, получим

$$\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|Ax_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 2c.$$

Отсюда $\|Ax\| \leq 2c$ при всех $x \in S_r$. Поэтому норма оператора $\|A\| \leq 2c/r$. $\square$

Пусть H является гильбертовым пространством, в котором форма $\langle x, y \rangle$ задает скалярное произведение и $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ определяет норму в H .

Определение. Предположим, что линейный оператор $A : L \rightarrow H$ определен на некотором линейном подпространстве $L \subset H$ гильбертова пространства.

Оператор $A' : M \rightarrow H$ называется *эрмитово-сопряженным* к $A : L \rightarrow H$, если его значения $A'y = z$ определяются из уравнения $\langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ при всех $x \in L$, а область определения $M \doteq \text{dom } A'$ определяется следующим образом:

$$M \doteq \{y \in H \mid \exists z \in H : \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle, \forall x \in L\}.$$

1. Эрмитово-сопряженный оператор к оператору $A : L \rightarrow H$ существует тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{L} = H$.

Покажем, что условие $\overline{L} = H$ необходимо и достаточно для однозначности A' . Уравнение $\langle z_1, x \rangle = \langle z_2, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ при всех $x \in L$ равносильно $\langle z_1 - z_2, x \rangle = 0$ при всех $x \in L$. Поэтому $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $\overline{L} = H$.

2. Эрмитово-сопряженный оператор является линейным оператором.

Если уравнения $\langle z_1, x \rangle = \langle y_1, Ax \rangle$ и $\langle z_2, x \rangle = \langle y_2, Ax \rangle$ выполняются при всех $x \in L$, то уравнение $\langle z_1 + z_2, x \rangle = \langle y_1 + y_2, Ax \rangle$ имеет место при всех $x \in L$. Отсюда $A'(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и уравнение $\langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ будет выполняться при всех $x \in L$, то $\langle \lambda z, x \rangle = \langle \lambda y, Ax \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому $A'(\lambda y) = \lambda z$.

3. Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым оператором.

Пусть $y_n \rightarrow y$ и $z_n = A'y_n \rightarrow z$, где $y_n \in M$. По определению $z_n \in H$ удовлетворяет уравнению $\langle z_n, x \rangle = \langle y_n, Ax \rangle$ при всех $x \in L$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда, переходя к пределу и используя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ при всех $x \in L$. Следовательно, $y \in M$ и $A'y = z$.

Теорема (достаточное условие ограниченности). Если оператор $A : L \rightarrow H$ ограничен и замыкание $\bar{L} = H$, то $A' \in \mathcal{L}(H, H)$ ограничен и $\|A'\| = \|A\|$.

Доказательство. Определим функционал $f(x) \doteq \langle Ax, y \rangle$ при $x \in L$. По теореме Хана–Банаха можно продолжить функционал f на пространство H . Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем $|f(x)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|$. Отсюда получим $\|f\| \leq \|A\| \|y\|$. Поэтому $f \in H^*$ и, следовательно, по теореме Рисса существует элемент $z \in H$, т.ч. $f(x) = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in H$ и $\|f\| = \|z\|$.

Таким образом, выполняется уравнение $\langle x, z \rangle = \langle Ax, y \rangle$ при всех $x \in L$. Это означает, что $A'y = z$ и $\|A'y\| \leq \|A\| \|y\|$. Отсюда имеем неравенство $\|A'\| \leq \|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору A' равен $A'' = A$ на подпространстве L . Поэтому $\|A\| \leq \|A'\|$ и, следовательно, $\|A\| = \|A'\|$. $\square$

Определение. Линейный оператор $A : L \rightarrow H$, определенный на некотором линейном подпространстве $\text{dom } A \doteq L \subset H$, называется *самосопряженным*, если $A' = A$, т.е. $\text{dom } A' = \text{dom } A$ и $\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ при всех $x, y \in \text{dom } A$.

Линейный оператор $A : H \rightarrow H$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ при всех $x, y \in H$. В этом случае выполняется равенство $A = A'$.

Теорема (Хёллингера–Тёплица). Всякий эрмитовый оператор $A : H \rightarrow H$ в гильбертовом пространстве H является ограниченным, т.е. $A \in \mathcal{L}(H, H)$.

Доказательство. Так как имеет место равенство $A = A'$, то оператор A замкнут по свойству (3). Поэтому по теореме о замкнутом графике $A \in \mathcal{L}(H, H)$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве ℓ_2 диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteq \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \ell_2$. Тогда $A : L \rightarrow \ell_2$, где $L \doteq \{x \in \ell_2 \mid Ax \in \ell_2\}$ область определения. Справедливы следующие свойства:

- 1) оператор A ограниченный тогда и только тогда, когда $\sup |\lambda_n| < \infty$;
- 2) оператор A самосопряженный тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
- 3) оператор A эрмитовый тогда и только тогда, когда $\sup |\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
- 4) оператор A замкнутый для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$.

Из равенства $\|A\| = \sup |\lambda_n|$ получаем (1); так как множество всех финитных последовательностей содержится в L , то (2) очевидно; (3) вытекает из (1) и того факта, что ограниченный оператор A определен на всем ℓ_2 . Докажем (4).

Введем множества индексов $I_1 \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leq 1\}$ и $I_2 \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup |\lambda_n^{(1)}| \leq 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf |\lambda_n^{(2)}| \geq 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1} . Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2 , то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

8 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Теорема (Банаха об обратном операторе). Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является ограниченным и обратимым отображением банаховых пространств E и F , то его обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ является ограниченным.

Доказательство. Так как $A : E \rightarrow F$ — ограниченный оператор, определенный в банаховом пространстве E , то его график $\text{gr}(A)$ замкнут. Поэтому, если $x_n \rightarrow x$ и $y_n = Ax_n \rightarrow y$, где $x_n \in E$ и $y_n \in F$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора получим, что если $y_n \rightarrow y$ и $x_n = A^{-1}y_n \rightarrow x$, где $x_n \in E$ и $y_n \in F$, то $A^{-1}y = x$. Следовательно, график $\text{gr } A^{-1}$ оператора A^{-1} замкнут. Таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ ограничен. $\square$

Пусть $M \subset E$ — замкнутое подпространство нормированного пространства E и $\widehat{E} \doteq E/M$ его факторпространство по подпространству M . Всякий элемент $\widehat{E}$ будем записывать в виде $\widehat{x} \doteq x + M$, где $x \in E$. Факторпространство $\widehat{E}$ является линейным нормированным пространством относительно следующих операций:

- а) сложение элементов $\widehat{x} + \widehat{y} \doteq \widehat{x + y}$, где $x, y \in E$;
- б) умножение на число $\lambda \widehat{x} \doteq \widehat{\lambda x}$, где $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;
- с) норма элемента $\|\widehat{x}\| \doteq \inf_{y \in M} \|x + y\|$, где $x \in E$.

Проверим свойства нормы. По определению имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|\lambda \widehat{x}\| &= \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y \in M} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y \in M} \|x + y\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|; \\ \|\widehat{x + y}\| &= \inf_{u, v \in M} \|x + y + u + v\| \leq \inf_{u \in M} \|x + u\| + \inf_{v \in M} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|. \end{aligned}$$

Кроме того, если $\|\widehat{x}\| = \inf_{y \in M} \|x + y\| = 0$, то существуют такие элементы $y_n \in M$, что $x + y_n \rightarrow 0$. Поэтому $x = -\lim y_n \in M$ и, следовательно, $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. Если $M \subset E$ — замкнутое подпространство банахова пространства E , то факторпространство $\widehat{E} = E/M$ является банаховым.

Доказательство. Докажем полноту нормированного пространства $\widehat{E}$. Пусть $\{\widehat{x}_n\}$ есть последовательность Коши. Выберем последовательность индексов так, чтобы $n_1 < n_2 < \dots$ и $\|\widehat{x}_n - \widehat{x}_m\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geq n_k$. Тогда существуют элементы $z_{n_k} \in \widehat{x}_{n_k} = x_{n_k} + M$, т.ч. $\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\| < 1/2^k$. Поэтому ряд $z = z_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{n_{k+1}} - z_{n_k})$ сходится по норме в E и, следовательно, при всех $n \geq n_k$ получим

$$\|\widehat{z} - \widehat{x}_n\| \leq \|\widehat{z} - \widehat{x}_{n_k}\| + \|\widehat{x}_{n_k} - \widehat{x}_n\| \leq \|z - z_{n_k}\| + 1/2^k \leq \sum_{l=k}^{\infty} 1/2^l + 1/2^k < 3/2^k.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x}_n = \widehat{z} \in \widehat{E}$. $\square$

Определение. Оператор $A : E \rightarrow F$ называется *открытым отображением* нормированных пространств E и F , если образ $A(U) \subset F$ каждого открытого множества $U \subset E$ является открытым множеством в пространстве F .

Пусть $\pi : E \rightarrow \hat{E}$ — факторотображение, определенное по формуле $\pi(x) \doteq \hat{x}$. Непрерывность π вытекает из неравенства $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Из этого неравенства и определения нормы в факторпространстве $\hat{E}$ следует, что образ $\pi(U_r)$ открытого шара $U_r \doteq \{x \in E \mid \|x\| < r\}$ будет открытым шаром $\hat{U}_r \doteq \{\hat{x} \in \hat{E} \mid \|\hat{x}\| < r\}$ того же радиуса $r > 0$. Поэтому образ всякого открытого множества будет открытым и, следовательно, π является открытым отображением.

Определение. Оператор $A : E \rightarrow F$ называется *гомоморфизмом* нормированных пространств E и F , если он является непрерывным и открытым отображением.

Теорема (о гомоморфизме). *Если ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ задает сюръективное отображение банаховых пространств E и F , то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку ядро $M \doteq \ker A$ является замкнутым линейным подпространством E , то факторпространство $\hat{E} \doteq E/M$ является банаховым пространством. Определим оператор $\hat{A} : \hat{E} \rightarrow F$, полагая $\hat{A}(\hat{x}) = A(x)$. Этот оператор корректно определен, так как если $\hat{x} = \hat{y}$, то $x - y \in M$ и, значит, $A(x) = A(y)$.

Заметим, что оператор $\hat{A} : \hat{E} \rightarrow F$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker \hat{A} = \{\hat{x} \in \hat{E} \mid A(x) = 0\} = \hat{0}$ и образ $\text{Im } \hat{A} = \text{Im } A = F$. Поэтому оператор $\hat{A}$ является биективным и его норма $\|\hat{A}\| = \|A\|$. В самом деле, имеем

$$\|\hat{A}(\hat{x})\| = \|A(x)\| = \inf_{y \in M} \|A(x + y)\| \leq \|A\| \inf_{y \in M} \|x + y\| = \|A\| \|\hat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\hat{A}\| \leq \|A\|$. С другой стороны, мы имеем $\|A(x)\| = \|\hat{A}(\hat{x})\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{x}\| \leq \|\hat{A}\| \|x\|$. Таким образом, выполняется равенство $\|\hat{A}\| = \|A\|$. По теореме Банаха об обратном операторе $\hat{A}$ является гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \hat{A} \cdot \pi$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также является гомоморфизмом пространств E и F . $\square$

Теорема (о тройке). *Пусть E, F, G — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является сюръективным, оператор $B \in \mathcal{L}(E, G)$ и $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathcal{L}(F, G)$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Определим оператор $C : F \rightarrow G$ по формуле $C(y) = B(x)$, если $y = Ax$ и $x \in E$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, где $x_1, x_2 \in E$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда $Bx_1 = Bx_2$, т.е. оператор C определен корректно. Докажем линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = C(y_1) + C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным.

Пусть $M = \ker A$, тогда оператор $\hat{A} \in \mathcal{L}(\hat{E}, F)$ биективен и при $y = Ax$ имеем

$$\|C(y)\| = \|B(x)\| = \inf_{z \in M} \|B(x + z)\| \leq \|B\| \|\hat{x}\| = \|B\| \|\hat{A}^{-1}y\| \leq \|B\| \|\hat{A}^{-1}\| \|y\|.$$

Таким образом, $\|C\| \leq \|B\| \|\hat{A}^{-1}\|$ и, следовательно, $C \in \mathcal{L}(F, G)$. $\square$

Напомним, что для $V \subset E$ и $W \subset E^*$ определяются следующие множества:

$$V^\perp \doteq \{f \in E^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_\perp \doteq \{x \in E \mid f(x) = 0, f \in W\},$$

которые называются соответственно аннулятором* V и аннулятором W . Они будут замкнутыми подпространствами в пространствах E^* и E соответственно.

Лемма (о бианнуляторе). *Если подпространство $M \subset E$ замкнуто, то имеет место равенство $(M^\perp)_\perp = M$.*

Доказательство. Включение $M \subset (M^\perp)_\perp$ очевидно. Предположим, что элемент $x \in (M^\perp)_\perp$. Если $x \notin M$, то $\|\widehat{x}\| \neq 0$. Зададим линейный функционал на линейной оболочке $L = \text{sp}\{x, M\}$ по следующей формуле: $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех чисел $\lambda \in \mathbb{F}$ и элементов $y \in M$. Он имеет конечную норму $\|f\|_L < \infty$, так как

$$\|f\|_L = \sup_{z \in L} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in M} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in M} \frac{1}{\|x + y\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|}.$$

По теореме Хана–Банаха существует $g \in E^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$. Тогда имеем $g \in M^\perp$ и $g(x) = 1$, т.е. элемент $x \notin (M^\perp)_\perp$. Получили противоречие. $\square$

Теорема. *Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, заданный в банаховых пространствах E и F , имеет замкнутый образ $\text{Im } A \subset F$. Тогда справедливы равенства:*

$$\text{Im } A = (\ker A^*)_\perp, \quad \text{Im } A^* = (\ker A)^\perp.$$

Доказательство. В силу доказанного ранее имеем равенство $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$. Следовательно, применяя лемму, получим $(\ker A^*)_\perp = ((\text{Im } A)^\perp)_\perp = \text{Im } A$.

Для доказательства второго равенства мы имеем включение $\text{Im } A^* \subset (\ker A)^\perp$. Если функционал $g \in (\ker A)^\perp$, то $\ker A \subset \ker g$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Хана–Банаха, получим $f \in F^*$, т.ч. $g(x) = f(A(x))$ при всех $x \in E$. Поэтому функционал $g = A^*f \in \text{Im } A^*$ и, следовательно, $\text{Im } A^* = (\ker A)^\perp$. $\square$

Определение. Линейный оператор $P : E \rightarrow E$ называется *проектором* на подпространство $L \subset E$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\text{Im } P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов на подпространство $L \subset E$:

1. *Ограничение $P|_L = I|_L$ есть тождественный оператор в L .*

Действительно, если $y = Px$, то $Pu = P^2x = Px = y$ при всех $x \in L$.

2. *Справедливы равенства $\ker(I - P) = \text{Im } P$ и $\text{Im}(I - P) = \ker P$.*

Если $x \in \ker(I - P)$, т.е. $x - Px = 0$, то $x \in \text{Im } P$. Если $y = Px \in \text{Im } P$, то $(I - P)y = (P - P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker P$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *Пространство $E = L \oplus M$ является прямой суммой $L = \text{Im } P$ и $M = \ker P$.*

Поскольку $I = P + (I - P)$, то $E = L + M$. Кроме того, если $y \in L \cap M$, то $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$ и, применяя P , получим $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset E$ называется *дополняемым* в нормированном пространстве E , если оно является замкнутым и существует такое замкнутое подпространство $M \subset E$, что $E = L \oplus M$.

Теорема. В банаховом пространстве E замкнутое подпространство $L \subset E$ тогда и только тогда будет дополняемым, когда существует ограниченный проектор $P : E \rightarrow E$ на подпространство L .

Доказательство. Необходимость. Пусть $E = L \oplus M$, где L и M замкнутые подпространства. Для каждого $x \in E$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. По определению полагаем $Px \doteq y$. Заметим, что оператор $P : E \rightarrow E$ имеет замкнутый график. В самом деле, если $x_n \rightarrow x$ и $y_n = Px_n \rightarrow y$, то $x_n = y_n + z_n \rightarrow x = y + z$ и из замкнутости L вытекает, что $y \in L$. В силу единственности разложения $x = y + z$ получим $z \in M$ и, следовательно, $Px = y$. По теореме о замкнутом графике оператор P является ограниченным.

Достаточность. Так как проектор P на подпространство L является непрерывным, то $L = \text{Im } P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \text{Im}(I - P)$ являются замкнутыми и непересекающимися подпространствами. Поскольку $I = P + (I - P)$, то отсюда следует разложение $E = L \oplus M$ в прямую сумму. $\square$

Лемма. Пусть замкнутое подпространство $L \subset E$ в банаховом пространстве E имеет конечную размерность $\dim L = n$ или конечную коразмерность $\text{codim } L \doteq \dim \hat{E} = m$, где $\hat{E} \doteq E/L$. Тогда L является дополняемым.

Доказательство. Введем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ подпространства L . Обозначим через $M \doteq \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$, где $\{f_1, \dots, f_n\}$ образует биортогональную систему к $\{e_1, \dots, e_n\}$. Для каждого $x \in E$ положим $y \doteq \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$ и $z \doteq x - y$. Тогда имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $E = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m\}$ факторпространства $\hat{E} = E/L$. Обозначим через $M \doteq \text{sp}\{e_1, \dots, e_m\}$ линейную оболочку. Тогда для каждого $x \in E$ существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$, т.ч. $\hat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \hat{e}_k$. Если $z \doteq \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k$ и $y \doteq x - z$, то $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $E = L \oplus M$. $\square$

Пример. Недополняемое замкнутое подпространство (без доказательства).

Обозначим через $C(T)$ пространство всех непрерывных функций $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ на окружности $T \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с нормой $\|f\| \doteq \sup_{z \in T} |f(z)|$, а через $A(D)$ пространство всех функций $g : D \rightarrow \mathbb{C}$, которые являются непрерывными в круге $D \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ и голоморфными внутри круга $\dot{D}$. По принципу максимума $\sup_{z \in D} |g(z)| = \sup_{z \in T} |g(z)|$. Кроме того, в силу теоремы Вейерштрасса равномерно сходящаяся последовательность голоморфных функций сходится к голоморфной функции в $\dot{D}$. Таким образом, $A(D) \subset C(T)$ образует замкнутое подпространство. Можно доказать, что $A(D)$ является недополняемым подпространством в $C(T)$.

9 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \doteq \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ банахово пространство ограниченных линейных операторов $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ с нормой $\|A\| \doteq \sup_{x \in S} \|Ax\|$, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ будем называть *регулярным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, если оператор $A_\lambda : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, определенный по формуле $A_\lambda \doteq \lambda I - A$ является обратимым, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathbf{E}$.

Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A) \doteq \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A . Обратный оператор $R_\lambda \doteq A_\lambda^{-1}$, определенный при всех $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A .

Для того чтобы оператор A_λ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он был биективным отображением, т.е. его ядро $\ker A = 0$ и образ $\operatorname{Im} A = \mathbf{E}$. Если оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ ограничен, то по теореме Банаха об обратном операторе резольвента $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ будет ограниченным оператором при всех $\lambda \in \rho(A)$.

Пример 1. Рассмотрим *диагональный* оператор $A : \ell_p \rightarrow \ell_p$, заданный по формуле $(Ax)_n \doteq \lambda_n x_n$ при $x = \{x_n\} \in \ell_p$, где $1 \leq p \leq \infty$. Его норма равна $\|A\| = \sup |\lambda_n|$. Все $\lambda_n \in \sigma(A)$, поскольку $\ker A_{\lambda_n} \neq 0$. При $\lambda \neq \lambda_n$ оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$ тогда и только тогда имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1}y_n$, когда $\|R_\lambda\| = \sup |\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$. Следовательно, спектр диагонального оператора равен $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$ замыканию множества диагональных элементов $\{\lambda_n\}$.

Определение. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$, определенная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω , если для каждого $z_0 \in \Omega$ существуют $r > 0$ и такие $c_n \in \mathbf{E}$, что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ при всех $z \in U_r(z_0)$, где $U_r(z_0) \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ обозначает открытый круг в Ω .

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\mathbf{E}$ и его радиус сходимости вычисляется по формуле Коши–Адамара $1/r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция голоморфна в Ω , то этот радиус сходимости равен $r = \rho(z_0, \partial\Omega)$ расстоянию от точки $z_0 \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Лемма. Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteq I - A$ обратим и $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Доказательство. Пусть $C_n \doteq \sum_{k=0}^n A^k$ и $\|A\| = a < 1$. Так как $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, то по неравенству треугольника получим $\|C_m - C_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|A\|^k < a^{n+1}/(1-a)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N , т.ч. $\|C_m - C_n\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$. Следовательно, $\{C_n\}$ является последовательностью Коши в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ и, значит, существует предел $\lim C_n \doteq C \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$. Отсюда получим

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I,$$

т.к. $\lim A^{n+1} = 0$. Аналогично имеем $CB = I$. Таким образом, $C = B^{-1}$. $\square$

Теорема (о резольвенте). Если оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ является ограниченным, то резольвентное множество $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ открыто, функция резольвенты R_λ голоморфна в $\rho(A)$ и ее норма $\|R_\lambda\| \geq 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteq \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки λ до спектра $\sigma(A)$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству $|z - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$, где $\lambda \in \rho(A)$. Так как $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda(I - (\lambda - z)R_\lambda)$, то по лемме получим

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1}R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Так как $|\lambda - z| \|R_\lambda\| < 1$, то ряд сходится по норме и, следовательно, $R_z \in \mathcal{L}(E)$. Поэтому множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция резольвенты R_λ является голоморфной в $\rho(A)$. Кроме того, если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $|\lambda - z| \geq \|R_\lambda\|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$. $\square$

Следствие. Спектр $\sigma(A)$ любого ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.

Пусть $|\lambda| > \|A\|$. По лемме получим $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ и $\|R_\lambda\| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Кроме того, для каждого функционала $f \in \mathcal{L}^*(E)$ функция $F(\lambda) \doteq f(R_\lambda)$ голоморфна в $\rho(A)$ и $|F(\lambda)| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиувилля $F(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда, применяя теорему Хана–Банаха, получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Свойства спектра сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.

Так как $A_\lambda = \lambda I - A$, то $A_\lambda^* = \lambda I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = R_\lambda^*$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

2. Если $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, то $\sigma(A') = \overline{\sigma(A)}$.

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle \lambda x - Ax, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y - A'y \rangle = \langle x, (A')_{\bar{\lambda}} y \rangle,$$

т.е. $(A_\lambda)' = (A')_{\bar{\lambda}}$. Отсюда $(R_\lambda)' = (A_\lambda^{-1})' = (A_\lambda')^{-1} = R_\lambda'$ и поэтому $\rho(A') = \overline{\rho(A)}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A , если существует $e \in E$, т.ч. $e \neq 0$ и $Ae = \lambda e$. Следующие множества

$\sigma_p(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений;

$\sigma_c(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = E, \operatorname{Im} A_\lambda \neq E\}$;

$\sigma_r(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq E\}$;

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A .

Рассмотрим свойства точечного, непрерывного и остаточного спектров.

1. Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то справедливо равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Это равенство является очевидным следствием определения.

2. Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то будут выполняться включения: $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$, $\sigma_c(A) \subset \sigma_c(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$ и $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A^*)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, тогда $\ker A_\lambda = (\operatorname{Im} A_\lambda^*)^\perp \neq 0$. Следовательно, либо $\ker A_\lambda^* \neq 0$, либо $\ker A_\lambda^* = 0$ и $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq E^*$, т.е. выполняется первое включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$, тогда $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = E$ и значит $\ker A_\lambda^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = 0$. Поэтому либо $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} = E^*$, либо $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq E^*$, т.е. выполняется второе включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq E$. Отсюда, применяя теорему Хана–Банаха, получим $\ker A_\lambda^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \neq 0$, т.е. выполняется третье включение.

3. Если $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, то выполняются соотношения: $\sigma_p(A) \subset \overline{\sigma_p(A')} \sqcup \overline{\sigma_r(A')}$, $\sigma_c(A) = \overline{\sigma_c(A')}$ и $\sigma_r(A) \subset \overline{\sigma_p(A')}$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, тогда существует $x \neq 0$, т.ч. $A_\lambda x = 0$. Поэтому из равенства $\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A'_\lambda y \rangle$ имеем $x \perp \operatorname{Im} A'_\lambda$, т.е. выполняется первое включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если существует $y \neq 0$, т.ч. $A'_\lambda y = 0$, то из $\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A'_\lambda y \rangle$ следует, что $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$, и наоборот. Значит выполняется второе равенство.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда существует $y \neq 0$, т.ч. $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$. В силу равенства $\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A'_\lambda y \rangle$ получим $A'_\lambda y = 0$, т.е. выполняется третье включение.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *обобщенным собственным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, если существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset E$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim \|A_\lambda x_n\| = 0$. Множество обобщенных собственных значений

$$\sigma_l(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}$$

называется *предельным спектром* оператора A . Множество

$$\sigma_d(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq E\}$$

называется *дефектным спектром* оператора A .

4. Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то имеет место равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) \sqcup \sigma_d(A)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$, тогда существует $\{x_n\} \subset E$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim \|A_\lambda x_n\| = 0$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то $\|x_n\| = \|R_\lambda A_\lambda x_n\| \leq \|R_\lambda\| \|A_\lambda x_n\| \rightarrow 0$, что невозможно. Поэтому выполняется включение $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. Пусть теперь $\lambda \notin \sigma_l(A)$. Тогда существует $c > 0$, т.ч. $\|A_\lambda x\| \geq c\|x\|$ при всех $x \in E$. Отсюда следует, что $\ker A_\lambda = 0$. Если $y_n = A_\lambda x_n \rightarrow y$, то $\|x_n - x_m\| \leq \|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\|/c \leq \|A_\lambda x_n - y\|/c + \|A_\lambda x_m - y\|/c \rightarrow 0$. Таким образом, $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и значит существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $A_\lambda x = y$. Следовательно, образ оператора замкнут $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \operatorname{Im} A_\lambda$ и выполняется включение $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_d(A)$. Обратное включение вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе.

Теорема (о границе спектра). Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.

Доказательство. Для каждой точки $\lambda \in \partial\sigma(A)$ существует последовательность регулярных значений $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Тогда имеем $d_{\lambda_n} \leq |\lambda - \lambda_n| \rightarrow 0$. Рассмотрим линейные операторы $B_n \doteq R_{\lambda_n}/\|R_{\lambda_n}\|$, где R_{λ_n} — резольвента оператора A_{λ_n} . Так как произведение $A_{\lambda_n}R_{\lambda_n} = I$ является тождественным оператором, то

$$A_{\lambda}B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + A_{\lambda_n}B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + I/\|R_{\lambda_n}\|.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset E$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Положим $x_n \doteq B_n y_n / \|B_n y_n\|$. Применяя указанную выше формулу для оператора $A_{\lambda}B_n$, получим следующее равенство:

$$A_{\lambda}x_n = A_{\lambda}B_n y_n / \|B_n y_n\| = (\lambda - \lambda_n)x_n + y_n / \|R_{\lambda_n}\| \|B_n y_n\|.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n}\| \geq 1/d_{\lambda_n}$, то $\|A_{\lambda}x_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda} \leq 3|\lambda - \lambda_n| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим *диагональный* оператор $A : \ell_p \rightarrow \ell_p$, определенный по формуле $(Ax)_n \doteq \lambda_n x_n$ при $x = \{x_n\} \in \ell_p$ ($1 \leq p \leq \infty$). Заметим, что λ_n являются собственными значениями, поскольку существует собственный вектор $e \in \ell_p \setminus 0$, имеющий единственный ненулевой член с индексом n . Поэтому $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$.

В случае $1 \leq p < \infty$, если λ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, то образ $\text{Im } A_{\lambda}$ содержит множество всех финитных последовательностей и поэтому всюду плотен в ℓ_p , т.е. в этом случае $\lambda \in \sigma_c(A)$. При этом весь спектр оператора будет предельным, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

В случае $p = \infty$, если λ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, то найдется последовательность $\{n_k\}$, т.ч. $\lim y_{n_k} = 0$ для всех $y = \{y_n\} \in \text{Im } A_{\lambda}$. По теореме Хана–Банаха существует продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$, заданного на подпространстве $c \subset \ell_{\infty}$ сходящихся последовательностей. Отсюда следует, что $\text{Im } A_{\lambda} \subset \ker f$, т.е. в этом случае $\lambda \in \sigma_r(A)$. При этом весь спектр оператора будет предельным, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_r(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

Пример 3. Рассмотрим оператор *левого сдвига* $T_l : \ell_1 \rightarrow \ell_1$, определенный по формуле $(T_l x)_n = x_{n+1}$ при $x = \{x_n\} \in \ell_1$. Его сопряженным будет оператор *правого сдвига* $T_r = T_l^* : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$, определенный по формуле $(T_r x)_n = x_{n-1}$ при $x = \{x_n\} \in \ell_{\infty}$, где $x_0 = 0$. Элементы $e_{\lambda} = \{\lambda^{n-1}\}$ являются собственными векторами оператора T_l с собственным значением λ при всех $|\lambda| < 1$. Так как норма оператора T_l равна $\|T_l\| = 1$, то его спектр $\sigma(T_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Отсюда оператор T_r имеет норму $\|T_r\| = 1$ и его спектр $\sigma(T_r) = \sigma(T_l)$.

Структура спектра операторов левого и правого сдвига						
	σ	σ_p	σ_c	σ_r	σ_l	σ_d
$T_l : \ell_1 \rightarrow \ell_1$	$ \lambda \leq 1$	$ \lambda < 1$	$ \lambda = 1$	$\emptyset$	$ \lambda \leq 1$	$\emptyset$
$T_r : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$	$ \lambda \leq 1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$ \lambda \leq 1$	$ \lambda = 1$	$ \lambda < 1$

10 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пример 1. Найдем спектр и резольвенту оператора Фурье $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, определенного по формуле $\mathcal{F}f(x) \doteq \widehat{f}(x)$. По теореме Планшереля выполняется равенство Парсеваля $\|\mathcal{F}f\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ и образ оператора Фурье $\text{Im } \mathcal{F} = L_2(\mathbb{R})$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ является изометрией пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Функции Эрмита $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ образуют полную ортонормированную систему и являются собственными функциями оператора Фурье, т.е. $\widehat{h}_n(x) = \lambda_n h_n(x)$, где $\lambda_n = (-i)^n$ являются собственными значениями. Поэтому спектр оператора Фурье совпадает с точечным спектром $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma_p(\mathcal{F}) = \{\pm 1, \pm i\}$ и имеет место разложение $L_2(\mathbb{R})$ в прямую сумму собственных подпространств

$$L_2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_{-1} \oplus H_i \oplus H_{-i}, \text{ где } H_\lambda \doteq \ker(\lambda I - \mathcal{F}) \text{ при } \lambda \in \sigma_p(\mathcal{F}).$$

Рассмотрим ортогональные проекторы $P_\lambda : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H_\lambda$ на подпространства H_λ . Тогда имеют место равенства $I = P_1 + P_{-1} + P_i + P_{-i}$ и $\mathcal{F} = P_1 - P_{-1} + iP_i - iP_{-i}$. Отсюда вытекает, что $\lambda I - \mathcal{F} = (\lambda - 1)P_1 + (\lambda + 1)P_{-1} + (\lambda - i)P_i + (\lambda + i)P_{-i}$. Поэтому получаем следующую формулу для резольвенты оператора Фурье:

$$R_\lambda \doteq (\lambda I - \mathcal{F})^{-1} = (\lambda - 1)^{-1}P_1 + (\lambda + 1)^{-1}P_{-1} + (\lambda - i)^{-1}P_i + (\lambda + i)^{-1}P_{-i}.$$

Определение. Пусть E и F — банаховы пространства. Операторы $A \in \mathcal{L}(E)$ и $B \in \mathcal{L}(F)$ называются *эквивалентными* $A \sim B$, если существует биективный оператор $T \in \mathcal{L}(E, F)$, т.ч. $BT = TA$. Если оператор T является изометрией, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$.

1. Если $A \sim B$, то $\sigma(A) = \sigma(B)$ и $\sigma_*(A) = \sigma_*(B)$, где $*$ = p, c, r, l, d .

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$, то $B_\lambda = \lambda I - B$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом $\ker B_\lambda = T(\ker A_\lambda)$, $\text{Im } B_\lambda = T(\text{Im } A_\lambda)$ и $R_\lambda(B) = TR_\lambda(A)T^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. Если $A \approx B$, то $\|A\| = \|B\|$.

Поскольку $B = TAT^{-1}$ и $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ в силу изометричности, то имеют место неравенства $\|B\| \leq \|A\|$ и $\|A\| \leq \|B\|$. Отсюда следует $\|A\| = \|B\|$.

Пример 2. Пусть функция $K \in L_1(\mathbb{R})$. Выясним структуру спектра оператора свертки в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определенного по следующей формуле:

$$Af(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y) f(y) dy, \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим $\|Af\|_{L_2} \leq \|K\|_{L_1} \|f\|_{L_2}$. Поэтому образ оператора $\text{Im}(A) \subset L_2(\mathbb{R})$ и его норма $\|A\| \leq \|K\|_{L_1}$. По формуле свертки мы имеем равенство $\widehat{Af}(x) = \sqrt{2\pi} \widehat{K}(x) \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

По лемме Рымана–Лебёга функция $\varphi(x) \doteq \sqrt{2\pi}\widehat{K}(x)$ непрерывна и $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Поэтому можно считать функцию $\varphi(x)$ заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Пусть $Bg(x) \doteq \varphi(x)g(x)$ оператор умножения на функцию в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда имеем $B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))g(x)$ и резольвента $R_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$. Так как операторы $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то

- a) норма оператора $\|A\| = \|B\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$;
- b) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \doteq \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;
- c) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$;
- d) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$;
- e) структура спектра $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A)$.

Если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$, то $e(x) = \chi_E(x)$ собственная функция оператора B , т.е. $Be(x) = \lambda e(x)$, где $E \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ измеримо и $\mu(E) > 0$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(B)$.

Докажем, что если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\text{Im } B_\lambda} = L_2(\mathbb{R})$. Обозначим через $O_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < \delta\}$ окрестность точки λ . Для каждой функции $g \in L_2(\mathbb{R})$ определим функцию $g_\delta(x) \doteq (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$, если $\varphi(x) \notin O_\delta$, $g_\delta(x) \doteq 0$, если $\varphi(x) \in O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leq |g(x)|/\delta$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $g_\delta \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебёга получим

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(O_\delta)} |g(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда следует включение $\lambda \in \sigma_c(B)$.

Теорема (о спектральном радиусе). Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, где $r(A) \doteq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ называется спектральным радиусом оператора A .

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Так как $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ многочлен степени $n-1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Отсюда $|\lambda|^n \leq \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leq \liminf \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n / \lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если $f \in \mathcal{L}^*(E)$, то функция $F(\lambda) \doteq f(R_\lambda)$ будет голоморфной в $\rho(A)$ по теореме о резольвенте и, следовательно, ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A^n) / \lambda^{n+1}$ будет сходиться при всех $|\lambda| > r(A)$. Поэтому существует такая константа $c_f > 0$, что $|f(A^n) / \lambda^n| \leq c_f$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда в силу теоремы Банаха–Штейнгауза найдется такая константа $c > 0$, что $\|A^n / \lambda^n\| \leq c$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, имеем $\limsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. $\limsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A)$. Таким образом, верхний и нижний пределы совпадают со спектральным радиусом $r(A)$. $\square$

Определение. Линейный оператор $A : E \rightarrow F$, определенный в банаховых пространствах E и F , называется *компактным*, если образ $A(M) \subset F$ каждого ограниченного множества $M \subset E$ является предкомпактным. Пространство всех компактных операторов обозначается через $\mathcal{K}(E, F)$.

1. Оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(S) \subset F$ единичного шара $S \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ является предкомпактным.

В самом деле, по определению множество $M \subset E$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $S_r \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$, где $r > 0$.

2. Компактный оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ является ограниченным $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ограничен и $\dim(E) < \infty$ или $\dim(F) < \infty$, то оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный.

Так как всякое ограниченное множество в пространстве конечной размерности является предкомпактным.

4. Если $A, B \in \mathcal{K}(E, F)$ компактны, то сумма $A + B \in \mathcal{K}(E, F)$ компактна.

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset S$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \rightarrow y \in F$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \rightarrow z \in F$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \rightarrow y + z \in F$. Таким образом, множество $A(S) \subset F$ является предкомпактным.

5. Если $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный, а $B \in \mathcal{L}(F, G)$ ограниченный, то произведение $BA \in \mathcal{K}(E, F)$ компактно. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ограниченный, а $B \in \mathcal{K}(F, G)$ компактный, то произведение $BA \in \mathcal{K}(E, F)$ компактно.

Первое следует из того, что ограниченный оператор переводит предкомпактные множества в предкомпактные. Второе вытекают из того, что ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные.

6. Если оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный и $\dim(E) = \infty$, то он необратим.

Если A обратим, то по теореме Банаха об обратном операторе $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ является ограниченным. Поэтому тождественный оператор $A^{-1}A = I$ является компактным, что невозможно, т.к. шар $S \subset E$ некомпактный.

Лемма. Если $A_n \in \mathcal{K}(E, F)$ и $A_n \rightarrow A$ сходится по норме, то $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

Доказательство. Так как $A_n \rightarrow A$ сходится по норме пространства $\mathcal{L}(E, F)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n , т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in S$. Поскольку $A_n(S)$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$ -сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ в множестве $A_n(S)$. Отсюда для каждого $x \in S$ найдется индекс k , т.ч. $\|y_k - Ax\| \leq \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Следовательно, $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε -сетью в множестве $A(S)$. $\square$

Теорема (Шáудера). Пусть ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ определен в банаховых пространствах E и F . Оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный тогда и только тогда, когда его сопряженный $A^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$ является компактным.

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteq \overline{A(S)}$ является компактным. Для каждого функционала $f \in S^*$ из единичного шара $S^* \subset F^*$ рассмотрим непрерывную функцию: $g(y) \doteq f(y)$ при всех $y \in K$. Множество таких функций $g \in C(K)$ обозначим через M . Поскольку

$$\sup_{y \in K} |g(y)| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| \leq \|A\|, \quad |g(y_1) - g(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|,$$

то множество $M \subset C(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Аскóли–Арцелá M является предкомпактным. Заметим, что множество M изометрично множеству $A^*(S^*)$, поскольку имеет место равенство

$$\|A^*f\| = \sup_{x \in S} |A^*f(x)| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| = \sup_{y \in K} |g(y)| = \|g\|_C.$$

Поэтому образ единичного шара $A^*(S^*) \subset E^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathcal{K}(E^{**}, F^{**})$. Пусть $J_1 : E \rightarrow E^{**}$ и $J_2 : F \rightarrow F^{**}$ канонические вложения во второе сопряженное пространство. Если $J_1(x) = \delta_x$ и $J_2(y) = \delta_y$, то при всех $y = Ax$ и $f \in F^*$

$$\langle A^{**}J_1(x), f \rangle = \langle A^{**}\delta_x, f \rangle = \langle \delta_x, A^*f \rangle = \langle A^*f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle = \langle \delta_y, f \rangle = \langle J_2(y), f \rangle.$$

Отсюда $A^{**}J_1 = J_2A$. Поэтому имеем включение $J_2(A(S)) = A^{**}(J_1(S)) \subset A^{**}(S^{**})$. Поскольку $A^{**}(S^{**})$ предкомпактно, то $A(S)$ также будет предкомпактным. $\square$

Пример 3. Компактность интегрального оператора $Af(x) \doteq \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$. Функция $K(x, y)$, заданная на квадрате $[0, 1]^2$, называется *ядром* интегрального оператора. Предположим, что $A : L_p([0, 1]) \rightarrow L_p([0, 1])$ и разберем два случая.

а) Пусть ядро $K \in C([0, 1]^2)$ и $1 \leq p \leq \infty$. В силу неравенства Гёльдера $\|Af\|_{L_p} \leq \|K\|_C \|f\|_{L_p}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Отсюда имеем $|Af(x_1) - Af(x_2)| < \varepsilon \|f\|_{L_p}$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$. Следовательно, образ единичного шара $A(S)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Таким образом, в силу теоремы Аскóли–Арцелá множество $A(S)$ является предкомпактным в $C([0, 1])$ и, следовательно, будет предкомпактным в $L_p([0, 1])$. Поэтому $A \in \mathcal{K}(L_p, L_p)$ компактный.

б) Пусть ядро $K \in L_r([0, 1]^2)$ и $1 < p < \infty$, где $r = \max\{p, q\}$ и $1/p + 1/q = 1$. Применяя неравенство Гёльдера, получим неравенства $\|f\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_q}$ при $p < q$ и $\|Af\|_{L_p} \leq \|K\|_{L_r} \|f\|_{L_p}$. Выберем функцию $K_n \in C([0, 1]^2)$, т.ч. $\|K - K_n\|_{L_r} < 1/n$ и положим $A_n f(x) \doteq \int_0^1 K_n(x, y) f(y) dy$. Тогда имеем $\|Af - A_n f\|_{L_p} \leq \|K - K_n\|_{L_r} \|f\|_{L_p}$, т.е. $\|A - A_n\| < 1/n$. Таким образом, последовательность компактных операторов $A_n \in \mathcal{K}(L_p, L_p)$ сходится по норме. Отсюда по лемме $A \in \mathcal{K}(L_p, L_p)$ компактный.

В частности, в случае $p = 2$ получаем, что интегральный оператор является компактным $A \in \mathcal{K}(L_2, L_2)$, если его ядро $K \in L_2([0, 1]^2)$.

11 ФРЕДГӨЛЬМОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство ограниченных операторов $A : E \rightarrow E$, определенных в банаховом пространстве E , а $\mathcal{K}(E)$ — подпространство компактных операторов. Рассмотрим свойства спектра компактного оператора.

1. Если $A \in \mathcal{K}(E)$, то выполняется включение $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$. По определению существует последовательность $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \rightarrow 0$. В силу компактности оператора A существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \rightarrow e \in E$. Так как $x_{n_k} = (A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k})/\lambda$, то $x_{n_k} \rightarrow e/\lambda$ и в силу непрерывности оператора A получим, что $Ax_{n_k} \rightarrow Ae/\lambda = e$, т.е. имеет место равенство $Ae = \lambda e$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. Если $A \in \mathcal{K}(E)$, то для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Lambda_\varepsilon \doteq \{\lambda \in \sigma_p(A) \mid |\lambda| \geq \varepsilon\}$ является конечным или пустым.

Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda_\varepsilon$ различных чисел. Тогда найдется последовательность элементов $\{e_n\} \subset E$, т.ч. $e_n \neq 0$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$. Пусть $L_n = \text{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$ линейная оболочка. Поскольку $\{e_n\}$ состоит из линейно независимых элементов, то $L_n \neq L_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому по лемме Рисса (о почти перпендикуляре) существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Пусть $y_n \doteq c_n e_n + x_n$, где $c_n \in \mathbb{F}$ и $x_n \in L_{n-1}$. Тогда получим $Ay_n = \lambda_n c_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n)$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Отсюда

$$\|Ay_n - Ay_k\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_k)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2 \text{ при всех } n > k.$$

Поэтому последовательность $\{Ay_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A .

Теорема (Рисса–Шаудера). Пусть E — банахово пространство бесконечной размерности $\dim E = \infty$ и $A \in \mathcal{K}(E)$ — компактный оператор. Тогда спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ и каждое ненулевое собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ имеет конечную кратность $\dim E_\lambda < \infty$, где $E_\lambda \doteq \ker A_\lambda$.

Доказательство. Поскольку компактный оператор A необратим, то $0 \in \sigma(A)$. В силу теоремы о границе спектра имеем включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$, а из свойства 1 следует, что $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поэтому получаем $\partial\sigma(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Отсюда в силу свойства 2 вне любого круга $|\lambda| < \varepsilon$ может быть только конечное число граничных точек спектра. Следовательно, все точки множества $\sigma(A) \setminus 0$ являются изолированными точками и совпадают с собственными значениями оператора A . Таким образом, имеют место равенства $\sigma(A) = \partial\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ — собственное значение и $E_\lambda \doteq \ker A_\lambda$ — соответствующее собственное подпространство оператора A . Так как оператор $A : E_\lambda \rightarrow E_\lambda$ является обратимым $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ и компактным, то размерность $\dim E_\lambda < \infty$. $\square$

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ в банаховых пространствах E и F называется *фредгольмовым*, если его ядро имеет конечную размерность $\dim(\ker A) = n$, а образ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Множество всех фредгольмовых операторов обозначается через $\mathcal{F}(E, F)$.

По определению коразмерность подпространства $\operatorname{Im} A \subset F$ равна размерности факторпространства $\hat{F} \doteq F / \operatorname{Im} A$. В следующей лемме доказывается замкнутость образа фредгольмова оператора. Поэтому $\hat{F}$ будет банаховым пространством.

Лемма. Если оператор $A \in \mathcal{F}(E, F)$ фредгольмовый, то его образ замкнут.

Доказательство. Пусть $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\hat{F} = \operatorname{sp}\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m\}$. Так как для всякого элемента $x \in F$ существует представление $\hat{x} = \sum_{k=1}^m c_k \hat{y}_k$, то $x = \sum_{k=1}^m c_k y_k + z$, где $z \in \operatorname{Im} A$. Отсюда $F = \operatorname{Im} A \oplus M$, где $M \doteq \operatorname{sp}\{y_1, \dots, y_m\}$. Рассмотрим оператор $B : E \times M \rightarrow F$, определенный по формуле $B(x, y) \doteq Ax + y$, где $x \in E$ и $y \in M$. Так как оператор B является ограниченным и сюръективным, то по теореме о гомоморфизме образ $B(E \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым в F . $\square$

Определение. Пусть $A \in \mathcal{K}(E)$ является компактным оператором в банаховом пространстве E . Тогда оператор $B = I - A$, где I — тождественный оператор в E , называется *классическим оператором Фредгольма* в пространстве E .

Теорема (о классическом операторе Фредгольма). Если $A \in \mathcal{K}(E)$ компактный оператор в банаховом пространстве E , то $B \doteq I - A \in \mathcal{F}(E)$ фредгольмовый.

Доказательство. По теореме Рёсса–Шаудера ядро оператора B имеет конечную размерность $\dim(\ker B) = n$. Выберем дополнительное подпространство $M \subset E$, тогда $E = \ker B \oplus M$. Докажем, что образ оператора $\operatorname{Im} B$ является замкнутым.

Рассмотрим оператор $C \doteq B|_M$ на подпространстве M . Его ядро $\ker C = 0$ и образ $\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B$. В силу свойства 1 найдется $c > 0$ т.ч. $\|Cx\| \geq c\|x\|$ при всех $x \in M$. Если $y \in \overline{\operatorname{Im} C}$, то существует последовательность $\{x_k\} \subset M$, т.ч. $Cx_k \rightarrow y$. Тогда $\|x_k - x_s\| \leq \|Cx_k - Cx_s\|/c \leq \|Cx_k - y\|/c + \|y - Cx_s\|/c \rightarrow 0$ при $k, s \rightarrow \infty$. Поэтому $\{x_k\}$ является последовательностью Коши и, значит, существует предел $\lim x_k = x \in M$. Отсюда в силу непрерывности оператора $Cx = y \in \operatorname{Im} C$.

По доказанной ранее формуле имеем $\operatorname{Im} B = (\ker B^*)^\perp$. Так как по теореме Рёсса–Шаудера ядро $\ker B^*$ имеет конечную размерность, то $\operatorname{Im} B = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^m$ есть базис $\ker B^*$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^m$ — биортогональная система к системе $\{f_k\}_{k=1}^m$ и $L \doteq \operatorname{sp}\{e_1, \dots, e_m\}$ образует ее линейную оболочку. Тогда для всякого элемента $x \in E$ получим $x = y + z$, где $y = x - z \in \operatorname{Im} B$ и $z = \sum_{k=1}^m f_k(x) e_k \in L$. Таким образом, образ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} B) = m$. $\square$

Замечание. Из леммы и последнего абзаца доказательства теоремы получается, что ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ в банаховом пространстве E является фредгольмовым $A \in \mathcal{F}(E)$ тогда и только тогда, когда ядро $\ker A$ и сопряженное ядро $\ker A^*$ имеют конечную размерность, а образ $\operatorname{Im} A$ является замкнутым.

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредгольма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение для любых свободных членов, либо соответствующая однородная система уравнений будет иметь ненулевое решение. Теоремы Фредгольма устанавливают соответствующие связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых классическим оператором Фредгольма в банаховом пространстве.

Для доказательства теорем Фредгольма предположим, что $A \in \mathcal{K}(E)$ является компактным оператором в банаховом пространстве E и определены операторы $B = I - A$ и его сопряженный $B^* \doteq I - A^*$. По теореме Рёсса–Шаудера их ядра имеют конечную размерность $\dim(\ker B) = n$ и $\dim(\ker B^*) = m$.

Теорема (первая теорема Фредгольма). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ задает базис решений однородного сопряженного уравнения $B^*f = 0$. Неоднородное уравнение $Bx = y$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} B$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} B = (\ker B^*)^\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \operatorname{Im} B$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \dots, m$. $\square$

Теорема (вторая теорема Фредгольма). Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ задает базис решений однородного уравнения $Bx = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $B^*f = g$ имеет решение тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} B$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} B^* = (\ker B)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in E^{**}$ и $\delta_{x_k}(f) \doteq f(x_k)$ при $f \in E^*$. Отсюда следует, что $g \in \operatorname{Im} B^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \dots, n$. $\square$

Теорема (третья теорема, альтернатива Фредгольма). Неоднородное уравнение $Bx = y$ имеет решение при всех $y \in E$ в том и только в том случае, когда однородное уравнение $Bx = 0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такой $x_0 \neq 0$, что $Bx_0 = 0$. Обозначим через $L_k \doteq \ker B^k$ ядро оператора B^k . Покажем, что все включения $L_k \subset L_{k+1}$ будут строгими. Действительно, по условию существуют $x_{k+1} \in L_{k+1}$, т.ч. $Bx_{k+1} = x_k$ при $k = 0, 1, \dots$. Тогда $B^k x_{k+1} = x_0 \neq 0$ и поэтому $x_{k+1} \notin L_k$.

По лемме Рисса (о почти перпендикуляре) существуют $y_k \in L_k$, т.ч. $\|y_k\| = 1$ и $\|y_k - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{k-1}$. Поскольку $Ay_k = y_k - By_k$, то имеют место равенства $Ay_k - Ay_s = y_k - (By_k + y_s - By_s)$. Поэтому получаем $\|Ay_k - Ay_s\| > 1/2$ при всех $k > s$, что противоречит компактности оператора A .

Достаточность. Если однородное уравнение $Bx = 0$ имеет только нулевое решение, то в силу второй теоремы неоднородное сопряженное уравнение $B^*f = g$ разрешимо при всех $g \in E^*$. Тогда по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $B^*f = 0$ имеет только нулевое решение. Значит по первой теореме неоднородное уравнение $Bx = y$ разрешимо при всех $y \in E$. $\square$

Теорема (четвертая теорема Фредгольма). *Однородные уравнения $Bx = 0$ и $B^*f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, т.е. $n = m$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker B$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из E^* . Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker B^*$ и $\{y_j\}_{j=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из E . Докажем невозможность следующих двух случаев.

а) $n < m$. Определим операторы $Cx \doteq Ax + \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ при $x \in E$ и $D = I - C$. Докажем, что $\ker D = 0$. Если элемент $x \in \ker D$, то $Bx = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$. Так как $B^*g_j = 0$ при $j = 1, \dots, m$, то $B^*g_j(x) = g_j(Bx) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Поэтому имеем $Bx = 0$ и, следовательно, элемент $x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i = 0$.

Поскольку оператор C компактный, то по третьей теореме существует элемент $z \in E$, т.ч. $Dz = y_m$. Тогда $D^*g_m(z) = g_m(Dz) = g_m(y_m) = 1$. С другой стороны, имеем $g_m(Dz) = g_m(Bz) = B^*g_m(z) = 0$, что невозможно.

б) $n > m$. Определим операторы $C^*f \doteq A^*f + \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$ при $f \in E^*$ и $D^* = I - C^*$. Тогда C^* сопряженный к $Cx \doteq Ax + \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$, а D^* сопряженный к $D = I - C$. Докажем, что $\ker D^* = 0$. Если элемент $f \in \ker D^*$, то $B^*f = \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$. Так как $Bx_i = 0$ при $i = 1, \dots, n$, то $B^*f(x_i) = f(Bx_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \dots, m$. Поэтому имеем $B^*f = 0$ и, следовательно, элемент $f = \sum_{j=1}^m f(y_j) g_j = 0$.

Поскольку оператор C^* компактный, то по третьей теореме существует элемент $h \in E^*$, т.ч. $D^*h = f_n$. Тогда получим $D^*h(x_n) = f_n(x_n) = 1$. С другой стороны, имеем $D^*h(x_n) = h(Dx_n) = h(Bx_n) = 0$, что невозможно. $\square$

Пример 1. Пусть $A : \ell_p \rightarrow \ell_p$ является диагональным оператором $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \ell_p$ и $1 \leq p \leq \infty$. Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N} \setminus N$. Тогда имеем $\ell_p = \ell_p(N) \oplus \ell_p(M)$. Если оператор $A \in \mathcal{F}(\ell_p)$ фредгольмовый, то его ядро $\ker A = \ell_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\text{Im } A = A(\ell_p(M))$ замкнут. Следовательно, множество N является конечным и оператор $A : \ell_p(M) \rightarrow \ell_p(M)$ имеет ограниченный обратный, т.е. выполняется неравенство $\sup_{n \in M} |\lambda_n|^{-1} < \infty$. Таким образом, оператор $A \in \mathcal{F}(\ell_p)$ фредгольмовый тогда и только тогда, когда нуль 0 не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пример 2. Пусть $A : L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ является оператором умножения на функцию $Af(x) = \varphi(x)f(x)$, где $f \in L_p[a, b]$ и $1 \leq p \leq \infty$. Оператор является ограниченным $A \in \mathcal{L}(L_p)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in L_\infty[a, b]$. Обозначим через $N = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и $M = [a, b] \setminus N$. Тогда получаем представление $L_p[a, b] = L_p(N) \oplus L_p(M)$. Если оператор $A \in \mathcal{F}(L_p)$ фредгольмовый, то его ядро $\ker A = L_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\text{Im } A = A(L_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : L_p(M) \rightarrow L_p(M)$ имеет ограниченный обратный, т.е. выполняется неравенство $\text{ess sup}_{x \in M} |\varphi(x)|^{-1} < \infty$. Таким образом, оператор $A \in \mathcal{F}(L_p)$ фредгольмовый тогда и только тогда, когда он обратим, т.е. имеет место неравенство $\text{ess inf}_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| > 0$.

12 ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ называется *эрмитовым* в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ при всех $x, y \in \mathbf{H}$. Множество $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ всех эрмитовых операторов образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. По теореме Хёллингера–Тёплица $\mathcal{H}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ является действительным подпространством в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{H})$. Рассмотрим свойства спектра эрмитова оператора.

1. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны $\lambda \in \mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteq \ker A_\lambda$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$.

Если $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, то $\lambda = \langle Ae, e \rangle = \langle e, Ae \rangle = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда, если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, то $\lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle = \langle Ae_1, e_2 \rangle = \langle e_1, Ae_2 \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle$, т.е. $e_1 \perp e_2$.

2. Критерий Вёйля: если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то спектр $\sigma(A) = \sigma_l(A)$ предельный.

Имеем $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. Пусть $\lambda \notin \sigma_l(A)$. Тогда $\|A_\lambda x\| \geq c\|x\|$ при некотором $c > 0$. Отсюда следует $\ker A_\lambda = 0$. Докажем, что образ $\text{Im } A_\lambda$ замкнут. Если $A_\lambda x_n \rightarrow y$, то $\|x_n - x_m\| \leq \|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\|/c \leq \|A_\lambda x_n - y\|/c + \|y - A_\lambda x_m\|/c \rightarrow 0$. Поэтому $\{x_n\}$ есть последовательность Коши и, значит, существует предел $\lim x_n = x$. Тогда в силу непрерывности оператора получим $A_\lambda x = y \in \text{Im } A_\lambda$, т.е. образ $\text{Im } A_\lambda$ замкнут.

Если $y \perp \text{Im } A_\lambda$ и $y \neq 0$, то $\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A_{\bar{\lambda}} y \rangle = 0$ при всех $x \in \mathbf{H}$. Отсюда получаем $A_{\bar{\lambda}} y = A_\lambda y = 0$, что невозможно. Поэтому по теореме об ортогональном разложении $\text{Im } A_\lambda = \mathbf{H}$. Следовательно, оператор A_λ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ действительный.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda = A_\alpha + i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x \rangle - i\beta \langle A_\alpha x, x \rangle + i\beta \langle x, A_\alpha x \rangle + \beta^2 \langle x, x \rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| \geq |\beta|$ и, следовательно, по критерию Вёйля $\lambda \notin \sigma(A)$.

4. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то спектральный радиус равен $r(A) = \|A\|$ норме.

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\|A^2\| = \sup_{x \in S} \|A^2 x\| = \sup_{x, y \in S} \langle A^2 x, y \rangle = \sup_{x, y \in S} \langle Ax, Ay \rangle \geq \sup_{x \in S} \langle Ax, Ax \rangle = \|A\|^2,$$

где $S \subset \mathbf{H}$ — единичный шар. Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, получаем $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

5. Если $A \in \mathcal{K}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{H})$ компактный эрмитовый оператор, то $\sigma_p(A) \neq \emptyset$.

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$ и $\dim \mathbf{H} = \infty$. Тогда по теореме Рёсса–Шаудера $\sigma(A) = \{0\}$ и по свойству 4 спектральный радиус $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Гильберта–Шмидта). Пусть задан $A \in \mathcal{K}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{H})$ компактный эрмитовый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Тогда существует полная ортонормированная система $\{e_n\} \subset \mathbf{H}$, состоящая из собственных векторов оператора A .

Доказательство. В случае $\dim \mathbf{H} < \infty$ теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Рассмотрим случай $\dim \mathbf{H} = \infty$. Поскольку оператор A компактный, то собственных значений не более, чем счетно $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$, и при этом собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda} \doteq \ker A_{\lambda}$.

Так как оператор A эрмитовый, то его собственные значения действительны, а собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$. В каждом подпространстве H_{λ_n} выберем ортонормированный базис из собственных векторов с собственным значением λ_n . Тогда объединение этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в пространстве $\mathbf{H}$.

Пусть $L \doteq \overline{\text{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Так как в силу непрерывности L является инвариантным подпространством оператора $A : L \rightarrow L$, то в силу эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ будет также инвариантным подпространством оператора $A : L^\perp \rightarrow L^\perp$. По свойству 5 заключаем, что $L^\perp$ имеет собственный вектор, что невозможно по построению. Поэтому $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\mathbf{H} = L \oplus L^\perp = L$. $\square$

Пример 1. Примером компактного эрмитова оператора в пространстве $L_2([a, b])$ является интегральный оператор Гильберта–Шмидта

$$Af(x) \doteq \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_2([a, b]),$$

у которого ядро удовлетворяет условиям: $\overline{K(y, x)} = K(x, y)$ и $K(x, y) \in L_2([a, b]^2)$. Первое условие обеспечивает эрмитовость, а второе компактность. Обозначим через $\{\lambda_n\}$ ненулевые собственные значения оператора A , причем каждое из них взято столько раз, какова его кратность, и они упорядочены $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$.

По теореме Гильберта–Шмидта существует ортонормированная система $\{e_n\}$ собственных функций оператора $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.ч. всякий элемент $f \in L_2([a, b])$ представляется в виде $f = h + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, где $h \in \ker A$. Отсюда вытекает равенство $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$, где ряд сходится в $L_2([a, b])$.

Докажем, что ядро интегрального оператора $K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x) \overline{e_n(y)}$ п.в., где ряд сходится в $L_2([a, b]^2)$. Поскольку функции $\varphi_n(x, y) = e_n(x) \overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $L_2([a, b]^2)$ и $\langle K, \varphi_n \rangle = \langle Ae_n, e_n \rangle = \lambda_n$, то ряд Фурье функции $K(x, y)$ сходится к функции $F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x, y)$. Так как система функций $h(x, y) = f(x) \overline{g(y)}$ полна в $L_2([a, b]^2)$ и имеют место равенства

$$\langle K, h \rangle = \langle Ag, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi_n, h \rangle = \langle F, h \rangle,$$

то $K(x, y) = F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x) \overline{e_n(y)}$ п.в., где ряд сходится в $L_2([a, b]^2)$.

Задачей Штурма–Лиувилля является нахождение и доказательство полноты системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка

$$Du(x) = -(p(x) u'(x))' + q(x) u(x), \quad x \in [a, b].$$

Будем предполагать, что $p(x) \in C^1[a, b]$ и $p(x) > 0$, а $q(x) \in C[a, b]$ и $q(x) \in \mathbb{R}$. Оператор D определим на подпространстве $L \subset W_2^2[a, b]$ функций u , у которых производная u' абсолютно непрерывна, а вторая производная в смысле Соболева $u'' \in L_2[a, b]$, и, кроме того, для всех функций $u \in L$ должны выполняться два граничных условия $a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0$ и $b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и т.ч. $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ и $b_0^2 + b_1^2 \neq 0$.

Оператор D является симметричным в $L_2([a, b])$, т.е. $\langle Du, v \rangle = \langle u, Dv \rangle$ при всех $u, v \in L$ и подпространство L всюду плотно в $L_2([a, b])$. В самом деле, имеем

$$\langle Du, v \rangle - \langle u, Dv \rangle = \int_a^b (p u')' \bar{v} - u (p \bar{v}')' dx = p(u' \bar{v} - u \bar{v}')|_a^b = 0.$$

Последнее равенство вытекает из граничных условий, поскольку определители

$$\det \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Лемма. Если ядро $\ker D = 0$, то существует функция Грина $G(x, y)$, т.ч.

- а) функция $G(x, y)$ действительная, симметричная и непрерывная в $[a, b]^2$;
- б) при $y \neq x$ функция $G(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y ;
- в) при $y \neq x$ удовлетворяет уравнению $D_y G(x, y) = 0$ и граничным условиям;
- д) при $y = x \in (a, b)$ производная $G'_y(x, y)$ по y имеет разрыв первого рода, равный $G'_y|_{x-0}^{x+0} \doteq G'_y(x, x+0) - G'_y(x, x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 два действительных решения уравнения $Du = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Эти решения линейно независимы, т.к. ядро $\ker D = 0$, и любое решение принимает вид $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$. Поэтому определитель Вронского $u_1 u_2' - u_1' u_2$ не обращается в нуль на $[a, b]$, а функция $\Delta \doteq p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$ является константой не равной нулю, поскольку ее производная равна нулю $\Delta' = u_1 (p u_2')' - u_2 (p u_1')' = 0$.

При фиксированном x полагаем $G(x, y) \doteq c_1 u_1(y)$ при $y \leq x$ и $G(x, y) \doteq c_2 u_2(y)$ при $y \geq x$. Выберем c_1 и c_2 так, чтобы функция Грина $G(x, y)$ была непрерывной, а производная имела указанный скачок в точке x . Тогда имеем $c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0$ и $c_1 u_1'(x) - c_2 u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку Δ является константой не равной нулю, то достаточно взять $c_1 = -u_2(x)/\Delta$ и $c_2 = -u_1(x)/\Delta$, чтобы функция

$$G(x, y) = -\frac{1}{\Delta} \begin{cases} u_1(y) u_2(x), & a \leq y \leq x \leq b; \\ u_1(x) u_2(y), & a \leq x \leq y \leq b; \end{cases}$$

удовлетворяла всем условиям леммы. □

Теорема. Пусть $\ker D = 0$ и $f \in L_2([a, b])$. Для того чтобы функция $u \in L$ была решением уравнения $Du = f$ п.в. и удовлетворяла граничным условиям, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $u = Af$, где

$$Af(x) \doteq \int_a^b G(x, y) f(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

а $G(x, y)$ является функцией Грiна оператора D , определенной в лемме.

Доказательство. Докажем, что $ADu = u$ при всех $u \in L$. Пусть $Du = f$ п.в. на отрезке $[a, b]$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Грiна $G(x, y)$, а также граничные условия для функций u и G , мы получим равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, y) f(y) dy &= \int_a^x G(x, y) Du dy + \int_x^b G(x, y) Du dy = \int_a^b D_y(G) u dy + \\ &+ p(G'_y u - G u')|_a^{x-0} + p(G'_y u - G u')|_{x+0}^b = p(G'_y u - G u')|_{x+0}^{x-0} = u(x). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство $ADu = u$ для всех $u \in L$.

Докажем, что $DAf = f$ п.в. на $[a, b]$, где $f \in L_2([a, b])$. В самом деле, используя симметричность операторов A и D , получим $\langle DAf, v \rangle = \langle f, ADv \rangle = \langle f, v \rangle$ для всех $v \in L$. Так как множество L всюду плотно в $L_2([a, b])$, то $DAf = f$ п.в. на $[a, b]$. Таким образом, оператор A является обратным к оператору D . $\square$

Следствие. Существует полная в пространстве $L_2([a, b])$ ортонормированная система $\{e_n\} \subset L$, состоящая из собственных функций оператора D .

Пусть $\ker D = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы $\{e_n\}$ собственных функций оператора D вытекает из теоремы Гильберта–Шмiдта, так как собственные функции оператора D одновременно являются собственными функциями интегрального оператора, ядром которого является функция Грiна.

Пусть $\ker D \neq 0$. Поскольку оператор D может иметь не более, чем счетное множество собственных значений, то найдется такое действительное число λ_0 , которое не является собственным значением D . Тогда оператор $D_0 = \lambda_0 I - D$ будет удовлетворять условию $\ker D_0 = 0$. Собственные функции оператора D_0 являются собственными функциями оператора D и наоборот, а их собственные значения отличаются на число λ_0 . Следовательно, оператор D_0 одновременно с оператором D обладает полной системой собственных функций.

Пример 2. Рассмотрим оператор $Du = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(1) = 0$. Взяв два решения x и $1 - x$ уравнения $Du = 0$, построим функцию Грiна

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1 - x), & 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ x(1 - y), & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$, находим собственные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$, которая полна в $L_2([0, 1])$.