

В. А. БАРИНОВ, Н. Г. ТАКТАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН



$$C = \left[\operatorname{th} \operatorname{Re} (V_{A2}^2 + V_{A1}^2 \operatorname{cth} \operatorname{Re} + \right. \\ \left. + g/\operatorname{Re} + \operatorname{Re}/g) \right]^{1/2} (1 - \varepsilon^2 \delta_2/2)$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РСФСР ПО ДЕЛАМ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
МОРДОВСКИЙ ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.П.ОГАРЕВА

В.А.БАРИНОВ, Н.Г.ТАКТАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Учебное пособие

Издательство Мордовского университета
1991

ББК В2
В24
УДК 532.59:537.84

Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн: Учеб. пособие/ В.А.Баринов, Н.Г.Тактаров. - Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991. - 96 с.

ISBN 5-7103-0001-2

Пособие посвящено математическим методам моделирования и исследования волн на поверхности проводящей и намагничивающейся жидкости при наличии магнитного поля. Приведено решение задач о распространении магнитогидродинамических волн на поверхности слоя покоящейся и движущейся жидкости, а также поверхностных волн в намагничивающихся средах.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике и механике жидкости, газа и плазмы; может быть полезно для специалистов, занимающихся магнитной гидродинамикой.

Библиогр.: 36 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Мордовского ордена Дружбы народов государственного университета имени Н.П.Огарева.

Рецензенты: кафедра высшей математики факультета прикладной математики - процессов управления Ленинградского государственного университета;
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Б.Малыханов.

Б1604010000-5 19-91
193(03)-91

ББК В2

ISBN 5-7103-0001-2

© Издательство Мордовского университета, 1991

ПРЕДИСЛОВИЕ

С точки зрения математики задача о распространении волн на поверхности жидкости представляет собой нелинейную краевую задачу для области с заранее неизвестной и зависящей от времени границей.

Уравнения гидродинамики нелинейны, и их точные решения найдены только в нескольких частных случаях. Точные аналитические решения этих уравнений в общем случае получить нельзя. В прикладной математике разработаны различные приближенные методы решения нелинейных краевых задач, среди которых основными являются методы возмущений (асимптотических разложений). Идея этих методов заключается в том, что многие дифференциальные уравнения, соответствующие конкретным физическим задачам, допускают введение безразмерного малого параметра ε , имеющего различный смысл в разных физических задачах, так что решение при $\varepsilon = 0$ может быть найдено легко. Тогда решение при $\varepsilon \neq 0$ можно искать в виде ряда (не обязательно сходящегося) по степеням ε , такого, что нулевой член этого ряда соответствует решению краевой задачи при $\varepsilon = 0$.

Предметом изучения магнитной гидродинамики является движение электропроводящей жидкости в магнитном поле. Далее будем предполагать, что жидкость является идеальной (невязкой и бесконечно проводящей) и несжимаемой.

Отметим, что магнитогидродинамические (МГД) краевые задачи значительно сложнее краевых задач обычной гидродинамики в связи с тем, что область, в которой ищется решение задачи, превышает область, занятую жидкостью, по той причине, что надо находить распределение магнитного поля не только в области, занятой жидкостью, но и в окружающем пространстве. Причем эти поля должны быть сшиты между собой посредством граничных условий на поверхностях раздела. Сами же поверхности раздела при этом обычно неизвестны и зависят от времени.

Исследование МГД поверхностных волн представляет интерес для астрофизики, геофизики, металлургии, ядерной энергетики. В частности, учет нелинейных МГД эффектов, возникающих при течении жидкого металла со свободной поверхностью, можно использовать при создании гидравлических систем охлаждения и защиты ядерных энергетических установок.

Поверхностные МГД волны могут распространяться по свободной поверхности жидкого металла, а также по поверхности раздела ионизированного газа и вакуума при наличии магнитного поля. В общем ви-

де проблема заключается в исследовании волн, распространяющихся по поверхности раздела электропроводной и непроводящей жидких либо газообразных сред.

Первая глава носит вспомогательный характер и посвящена изложению основных сведений из магнитной гидродинамики идеальной жидкости. В ней приведена постановка задачи о поверхностных волнах и сформулированы граничные условия для гидродинамических и электромагнитных величин.

Вторая глава содержит исследование распространения волн конечной амплитуды на поверхности неподвижного слоя жидкости, находящегося на твердом неэлектропроводном основании. Исследование проводится по схеме, предложенной в работах [8;9]. Найдены траектории частиц жидкости. Рассматривается влияние магнитного поля на высоту волны.

Третья глава посвящена исследованию распространения поверхностных волн в слое жидкости, движущейся с произвольным гладким профилем скорости по сечению слоя. Для определения волнового движения жидкости в этом случае был использован метод, предложенный в работах [10;11]. Найдены условия, при которых волновое движение жидкости является потенциальным. Определены траектории жидких частиц.

Четвертая глава содержит исследование распространения поверхностных волн в намагничивающихся средах, а также гидродинамической устойчивости течений в этих средах на основе работ [13;33-36].

Изложение методов малого параметра с приложениями к решению конкретных задач приведено в ряде работ [1-3].

Наиболее полным учебником по гидродинамике является книга [4]. В качестве учебника по магнитной гидродинамике можно рекомендовать работу [6].

Математические методы исследования поверхностных волн в обычной гидродинамике приведены в книгах [7;16].

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов математико-механических факультетов университетов, специализирующихся по прикладной математике и механике жидкостей, газа и плазмы.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ

§ I. Уравнения движения идеальной жидкости

В гидродинамике жидкость при исследовании ее движения моделируется как сплошная среда, микроскопическим строением которой пренебрегают. Далее будем предполагать жидкость несжимаемой. Это значит, что плотность любого элемента жидкости при движении не меняется. Ограничимся далее моделью идеальной жидкости, которая не может передавать касательные (сдвиговые) напряжения, а все нормальные напряжения независимо от направления одинаковы в данной точке пространства и в данный момент времени.

Изучать движение сплошной среды, в том числе и жидкости, можно с двух точек зрения: Эйлера и Лагранжа. В первом случае вводится некоторая неподвижная система координат x, y, z . Все гидродинамические величины: скорость $\vec{v}(x, y, z, t)$, плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ — определяются как функции координат неподвижной точки пространства с координатами x, y, z и времени t . Таким образом, по Эйлеру изучается движение частиц среды по отношению к геометрическим точкам в неподвижной системе координат.

При описании движения среды с точки зрения Лагранжа каждой движущейся частице жидкости приписываются три числа a, b, c , которые не изменяются со временем при движении частицы. При переходе от одной частицы жидкости к другой числа a, b, c изменяются. В качестве переменных Лагранжа можно выбрать, в частности, декартовы координаты жидкой частицы при $t=0$. Закон движения частицы с лагранжевыми координатами a, b, c записывается в виде

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned} \quad (I.1)$$

Компоненты скорости частицы жидкости находятся из соотношений: $v_x = \partial x / \partial t$, $v_y = \partial y / \partial t$, $v_z = \partial z / \partial t$, где производные по времени берутся при постоянных a, b, c , т.е. для фиксированной частицы жидкости.

Система уравнений движения идеальной жидкости при постоянной температуре в переменных Эйлера имеет вид [4.С.16]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p; \quad \text{div } \vec{v} = 0. \quad (I.2)$$

Эти четыре уравнения позволяют найти четыре неизвестные функции U_x, U_y, U_z и p . Для решения соответствующей краевой задачи математической физики необходимо знать граничные условия для скорости и давления на поверхностях, ограничивающих объем жидкости. Граничное условие для поля скоростей идеальной жидкости заключается в том, что жидкость не протекает через твердую поверхность, т.е. нормальная к поверхности компонента скорости жидкости U_n равна нормальной составляющей скорости твердой поверхности V_n : $U_n = V_n$. Для неподвижной поверхности $V_n = 0$. Граничное условие для скорости на свободной поверхности заключается в том, что нормальная компонента скорости равна нормальной компоненте скорости свободной поверхности.

Граничное условие для давления на поверхности раздела двух жидкостей является следствием непрерывности потока импульса через поверхность [4.С.28] и заключается в том, что давления в обеих средах равны между собой на поверхности (при отсутствии капиллярных сил). Соответствующее граничное условие с учетом капиллярных сил приведено в § I гл. 2.

§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики

При движении электропроводной жидкости в магнитном поле в ней возникают электрические токи. С одной стороны, эти токи изменяют внешнее магнитное поле, а с другой — на них со стороны магнитного поля действуют механические силы, влияющие на движение жидкости. Это взаимное влияние магнитного поля и поля скоростей должно быть отражено в уравнениях движения. При этом напряженность магнитного поля входит в уравнения движения жидкости, а скорость жидкости входит в уравнения изменения магнитного поля. Система уравнений движения невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости при постоянной температуре в переменных Эйлера имеет вид [5;10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{H} \times \text{rot } \vec{H}, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{rot } (\vec{v} \times \vec{H}); \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad \text{div } \vec{H} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\vec{v}$ — скорость, p — давление.

Тензор напряжений в МГД записывается в виде

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{4\pi} (H_i H_j - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ij}). \quad (2.2)$$

Выражение для плотности тока $\vec{j} = c[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{H})/c]$ в идеальной проводящей среде, т.е. при $\sigma \rightarrow \infty$, переходит в соотношение $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{H})/c$. Плотность тока находится при этом из уравнения $\text{rot } \vec{H} = 4\pi\vec{j}/c$, после того как найдено магнитное поле.

Из второго уравнения (2.1) (записанного в переменных Эйлера) с учетом третьего и четвертого следует (в переменных Лагранжа):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{a,b,c} \vec{H}(a,b,c,t) = (\vec{H} \nabla) \vec{v}. \quad (2.3)$$

Для любого жидкого элемента длины $\delta \vec{r} = \vec{r}(a+\delta a, b+\delta b, c+\delta c, t) - \vec{r}(a,b,c,t)$, состоящего при своем движении из одних и тех же частиц жидкости, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \vec{r}}{\partial t} \Big|_{a,b,c} &= \delta \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Big|_{a,b,c} = \delta \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial a} \delta a + \\ &+ \frac{\partial \vec{v}}{\partial b} \delta b + \frac{\partial \vec{v}}{\partial c} \delta c = (\delta \vec{r} \nabla) \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, изменение векторов $\vec{H}$ и $\delta \vec{r}$ описывается одинаковыми уравнениями (2.3), (2.4). Отсюда следует, что если в какой-либо момент времени векторы $\delta \vec{r}$ и $\vec{H}$ параллельны, то при движении среды всегда будет выполняться соотношение

$$\delta \vec{r} = \delta k(a,b,c) \vec{H}, \quad (2.5)$$

где δk — скалярный параметр, не зависящий от времени. Это значит, что при движении среды длина жидкого элемента изменяется пропорционально напряженности магнитного поля. Этот результат известен как свойство "вмороженности" силовых линий магнитного поля — частица жидкости при своем движении не может покидать силовую линию, а расстояние между двумя близкими жидкими частицами на силовой линии изменяется пропорционально величине магнитного поля. Иначе можно сказать, что каждая силовая линия при движении состоит из одних и тех же жидких частиц [6].

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ
НА СЛОЕ НЕПОДВИЖНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Уравнения и граничные условия

Рассмотрим слой жидкости постоянной глубины, находящейся на твердом неэлектропроводном основании. Свободная поверхность граничит со средой пренебрежимо малой плотности и электропроводности (неионизированный газ, вакуум). Предполагается, что жидкость несжимаемая и бесконечно проводящая. Движение такой жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики [6]:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + (\vec{v}^* \nabla^*) \vec{v}^* = -\nabla^* \left(\frac{p^*}{\rho} + \frac{H^{*2}}{8\pi\rho} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H}^* \nabla^*) \vec{H}^* + \vec{g},$$

$$\operatorname{div}^* \vec{v}^* = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t} = \operatorname{rot}^* (\vec{v}^* \times \vec{H}^*); \quad \operatorname{div}^* \vec{H}^* = 0.$$

Здесь ρ - плотность, p^* - давление, $\vec{v}^*$ - скорость, $\vec{g}$ - ускорение силы тяжести, $\vec{H}^*$ - напряженность магнитного поля. Звездочкой обозначены (там, где это необходимо) размерные величины, чтобы отличать их от соответствующих безразмерных величин. Величины, относящиеся к областям, занятым электропроводной жидкостью, газом (вакуумом) и твердым основанием, будем обозначать соответственно индексами 1, 2, 3.

Поскольку среда в областях 2 и 3 неэлектропроводная, уравнения Максвелла примут вид

$$\operatorname{rot}^* \vec{H}_i^* = 0; \quad \operatorname{div}^* \vec{H}_i^* = 0; \quad i = 2, 3. \quad (1.2)$$

Граничные условия на свободной поверхности жидкости имеют вид:

$$\{p_{ij} n_j\} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \alpha n_i; \quad v_n^* - V_n^* = 0, \quad (1.3)$$

$$\{H_n^*\} = 0; \quad p_{ij} = -p^* \delta_{ij} + \frac{H_i^* H_j^*}{4\pi} - \delta_{ij} \frac{H^{*2}}{8\pi}.$$

Здесь α - поверхностное натяжение, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали,

направленный из области 1 в область 2; $\{a\} = a_2 - a_1$ - скачок величины на поверхности; V_n^* - нормальная скорость поверхности; R_1, R_2 - главные радиусы кривизны поверхности.

Из первого условия (1.3) следует $\{H_\tau^* H_n^*\} = 0$, где индексы τ и n обозначают касательную и нормальную компоненты вектора. Отсюда следует, что имеют место два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad H_n^* &= 0; \quad \{\vec{H}_\tau^*\} \neq 0, \\ 2) \quad H_n^* &\neq 0; \quad \{\vec{H}_\tau^*\} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением первого случая. Специфика второго случая обсуждается в § 2 гл. 4.

Граничные условия на твердой поверхности имеют вид

$$v_n^* = 0; \quad H_{1n}^* = H_{3n}^* = 0. \quad (1.5)$$

К граничным условиям (1.3)-(1.5) необходимо присоединить условия на бесконечности, заключающиеся в том, что величины $\vec{H}_2^*$ и $\vec{H}_3^*$ не должны возрастать на бесконечности по обе стороны от слоя жидкости.

Введем декартову систему координат так, что невозмущенная свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z^* = 0$, а ось z^* направлена против вектора $\vec{g}$. Далее предполагается, что все величины не зависят от y^* и $v_y^* = 0$.

В выбранной системе координат с учетом сделанных предположений граничные условия (1.3)-(1.5) запишутся следующим образом:

1) на свободной поверхности, заданной уравнением $z^* = \xi^*(t, x^*)$:

$$v_z^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad (1.6)$$

$$H_{1z}^* = H_{1x}^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}; \quad H_{2z}^* = H_{2x}^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*},$$

$$\frac{H_2^{*2}}{8\pi} - p^* - \frac{H_1^{*2}}{8\pi} = \alpha \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} \right)^2 \right],$$

2) на дне, $z^* = -e^*$:

$$v_z^* = 0; \quad H_{1z}^* = 0; \quad H_{3z}^* = 0, \quad (1.7)$$

3) $\vec{H}_2^*$ и $\vec{H}_3^*$ не должны возрастать при $z^* \rightarrow \pm \infty$.

Приведем подробный вывод первого соотношения (I.6), являющегося кинематическим условием для скорости жидкости.

В силу непрерывности движения, в связи с которой при движении жидкости в ней не должно возникать разрывов сплошности, частицы жидкости, находившиеся в какой-либо момент времени на свободной поверхности, должны оставаться на ней и в последующие моменты времени. В силу этого координаты $x^*(a, c, t^*)$, $z^*(a, c, t^*)$ любой жидкой частицы на поверхности $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ должны удовлетворять уравнению поверхности

$$z^*(a, c, t^*) = \xi^*[t^*, x^*(a, c, t^*)].$$

Дифференцируя это равенство по t^* , находим

$$\left. \frac{\partial z^*}{\partial t^*} \right|_{a, c} = \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} \right|_{x^*} + \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial t^*} \right|_{a, c}$$

или

$$v_z^* = \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} \right|_{x^*} + \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} \right|_{t^*} v_x^*.$$

Подчеркнем, что ξ^* показывает смещение геометрических точек поверхности по оси z^* , тогда как жидкие частицы смещаются как по оси x^* , так и z^* .

Приведем для сравнения еще один вывод кинематического соотношения.

Записывая уравнение поверхности в виде $f(x^*, z^*, t^*) = z^* - \xi^*(t^*, x^*) = 0$, нетрудно показать, что единичная нормаль к этой поверхности запишется в виде

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{\vec{e}_z^* - \vec{e}_x^* (\partial \xi^* / \partial x^*)}{\sqrt{1 + (\partial \xi^* / \partial x^*)^2}}. \quad (\text{I.8})$$

Здесь $\vec{e}_x^*$, $\vec{e}_z^*$ — единичные векторы осей x^* , z^* .

Нормальная к поверхности $f(x^*, z^*, t^*) = 0$ компонента скорости жидкости равна

$$v_n^* = \vec{v}^* \cdot \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}. \quad (\text{I.9})$$

Нормальная компонента скорости жидкости должна быть равна скорости движения поверхности по нормали V_n , которая находится следующим образом. Если координаты точки поверхности $f = 0$ в некоторый момент времени t^* обозначить через x^* , z^* , то в бесконечно близкий момент $t^* + dt^*$ координаты геометрической точки,

движущейся по нормали к поверхности, будут $x^* + n_x dx^*$, $z^* + n_z dz^*$, где n_x, n_z — компоненты единичного вектора нормали, определяемые соотношением (I.8). Координаты точки в момент времени $t^* + dt^*$ удовлетворяют уравнению поверхности

$$f(x^* + n_x dx^*, z^* + n_z dz^*, t^* + dt^*) = 0.$$

Отсюда следует

$$f(x^*, z^*, t^*) + \frac{\partial f}{\partial x^*} n_x dx^* + \frac{\partial f}{\partial z^*} n_z dz^* + \frac{\partial f}{\partial t^*} dt^* = 0.$$

Поскольку $f(x^*, z^*, t^*) = 0$, то имеем

$$V_n (\text{grad } f) \cdot \vec{n} + \frac{\partial f}{\partial t^*} = 0.$$

Далее, так как $|\text{grad } f| = (\text{grad } f) \cdot \vec{n}$, будем иметь

$$V_n = - \left(\frac{\partial f}{\partial t^*} \right)_{x^*, z^*} / |\text{grad } f|. \quad (\text{I.10})$$

Приравнявая (I.9) и (I.10), находим соответствующее кинематическое условие.

§ 2. Краевая задача о поверхностных МГД волнах

Рассмотрим плоское волновое движение жидкости в случае распространения по свободной поверхности установившейся волны. Ось x^* выберем в направлении распространения поверхностной волны. Предполагается, что векторы напряженности невозмущенного магнитного поля $\vec{H}_{01}^*$, $\vec{H}_{02}^*$, $\vec{H}_{03}^*$ в областях 1, 2, 3 параллельны оси x^* . При распространении волны магнитное поле будет записываться в виде

$\vec{H}_i^* = \vec{H}_{0i}^* + \vec{H}_{wi}^*$, где $\vec{H}_{wi}^*$ — возмущение поля, связанное с распространением волны, $i = 1, 2, 3$. Для установившихся прогрессивных волн принимается, что все величины зависят от x^* и t^* через комбинацию $x^* - ct^*$, где c — фазовая скорость. Будем считать крутизну волны малой величиной. В качестве малого параметра ε примем

$$\varepsilon = k \xi_{\max}^* \quad (\text{2.1})$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $\xi_{\max}^*$ — максимальное значение смещения свободной поверхности. Волновое число k (длину волны λ) считаем заданным.

Введем безразмерные переменные и величины:

$$x = k(x^* - ct^*); \quad z = k z^*; \quad \xi = \frac{k \xi^*}{\varepsilon}, \quad (\text{2.2})$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}^*}{\varepsilon c}; \quad \vec{h}_i = \frac{\vec{H}_{oi}^*}{\varepsilon |\vec{H}_{oi}|}; \quad i = 1, 2, 3,$$

$$p = \frac{1}{\varepsilon \rho c^2} (p^* - \rho g z^* - p_o^*); \quad \rho_o^* = \frac{1}{8\pi} (H_{o2}^{*2} - H_{o1}^{*2}).$$

В силу (2.2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = -k c \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x^*} = k \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнения (I.1) в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \varepsilon (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p - \frac{v_{A1}^2}{c^2} \nabla (h_{1x} + \varepsilon \frac{h_1^2}{2}) + \frac{v_{A1}^2}{c^2} \frac{\partial \vec{h}_1}{\partial x} + \\ + \frac{\varepsilon v_{A1}^2}{c^2} (\vec{h}_1 \nabla) \vec{h}_1; \quad -\frac{\partial \vec{h}_1}{\partial x} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{e}_x) + \varepsilon \text{rot} (\vec{v} \times \vec{h}_1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0; \quad \text{div} \vec{h}_1 = 0; \quad v_{A1}^2 = \frac{H_{o1}^{*2}}{4\pi p}.$$

Здесь $\vec{e}_x$ - единичный вектор оси x , v_{A1} - альфвеновская скорость в области I. Видно, что в системе координат x, z движение является стационарным.

Безразмерные уравнения (I.2) для магнитного поля в областях 2, 3 записываются в виде:

$$\Delta \Psi_i = 0; \quad \vec{h}_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \vec{e}_z; \quad i = 2, 3. \quad (2.4)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $\vec{e}_z$ - единичный вектор оси z .

Безразмерные граничные условия (I.6), (I.7) записываются в виде:

I) на свободной поверхности, при $z = \varepsilon \xi(x)$, выполняются условия для напряжений, скорости и магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{v_{A2}^2}{c^2} h_{2x} + \frac{v_{A1}^2}{c^2} \varepsilon \frac{h_2^2}{2} - \frac{v_{A1}^2}{c^2} h_{1x} - \frac{v_{A1}^2}{c^2} \varepsilon \frac{h_1^2}{2} - p + \frac{g \xi}{k c^2} = \\ = \frac{v_c^2}{c^2} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \left[1 - \frac{3 \varepsilon^2}{2} \left(\frac{d \xi}{dx} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$v_z = -\frac{d \xi}{dx} + \varepsilon v_x \frac{d \xi}{dx}; \quad h_{1z} = \frac{d \xi}{dx} + \varepsilon h_{1x} \frac{d \xi}{dx},$$

$$h_{2z} = \frac{d \xi}{dx} + \varepsilon h_{2x} \frac{d \xi}{dx}; \quad v_c^2 = \frac{d k}{p}; \quad v_{A2}^2 = \frac{H_{o2}^{*2}}{4\pi p},$$

2) на дне, при $z = -l$ ($l = k l^*$), выполняются условия непротекания и отсутствия нормальной компоненты магнитного поля:

$$v_z = 0; \quad h_{1z} = h_{3z} = 0, \quad (2.6)$$

3) на бесконечности, при $z \rightarrow \pm \infty$, возмущения магнитного поля в областях 2 и 3 должны затухать:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \vec{h}_2 = 0; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \vec{h}_3 = 0. \quad (2.7)$$

Здесь величина v_{A2} не имеет смысла альфвеновской скорости в области 2.

Будем предполагать также, что волна периодическая и ось x направлена вдоль среднего уровня свободной поверхности:

$$\xi(x + 2\pi) = \xi(x); \quad \int_0^{2\pi} \xi(x) dx = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, имеем нелинейную краевую задачу: требуется определить величины $\vec{v}$, $\vec{h}_1$, p , подчиненные уравнениям (2.3); $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, подчиненные уравнениям (2.4), и координату свободной поверхности ξ , которые удовлетворяют граничным условиям (2.5) - (2.7) и ограничениям (2.8).

Отметим, что второе уравнение (2.3), учитывая четвертое уравнение (2.3) и граничные условия на дне (2.6), можно свести к равенству

$$h_{1z} + v_z - \varepsilon (v_x h_{1z} - v_z h_{1x}) = 0. \quad (2.9)$$

Далее вместо второго уравнения (2.3) будем рассматривать уравнение (2.9).

Определим возмущение магнитного поля в области 3. Используя общее решение уравнения Лапласа [14.С.102], из уравнений (2.4) получаем

$$h_{3x} = -C_n n e^{nz} \sin nx + \tilde{C}_n n \vec{e}^{nz} \cos nx,$$

$$h_{zx} = C_n n e^{nz} \cos nx - \tilde{C}_n n e^{-nz} \sin nx,$$

$$C_n = \text{const}; \tilde{C}_n = \text{const}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Удовлетворив граничным условиям (2.6), (2.7), находим $C_n = \tilde{C}_n = 0$. Тогда

$$h_{zx} = h_{zy} = 0. \quad (2.10)$$

Прежде чем исследовать нелинейную задачу (2.3)–(2.8), рассмотрим линейную задачу, отвечающую параметру $\varepsilon = 0$. Полагая в уравнениях (2.3) и (2.5) $\varepsilon = 0$, из нелинейных соотношений получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v_{xz}^2 k}{g v} \left(\frac{\partial h_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial h_{1x}}{\partial z} \right),$$

$$h_{1z} = -v_z; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial h_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial h_{1z}}{\partial z} = 0,$$

граничные условия при $z = 0$:

$$\frac{v_{xz}^2 k}{g v} h_{2x} - \frac{v_{xz}^2 k}{g v} h_{1x} - p + \frac{\varepsilon}{v} - \frac{v_c^2 k}{g v} \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$v_z = -\frac{d\varepsilon}{dx}; \quad h_{1z} = \frac{d\varepsilon}{dx}; \quad h_{2z} = \frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Здесь $v = kc^2/g$. Линейные уравнения (2.4), граничные условия (2.6), (2.7) и ограничения (2.8) остаются прежними.

Сначала определим возмущения магнитного поля в области 2. Из уравнений (2.4) и граничного условия (2.7) получаем

$$h_{2zn} = -\beta_n n e^{-nz} \sin nx, \quad (2.13)$$

$$h_{1zn} = \beta_n n e^{-nz} \cos nx,$$

$$\beta_n = \text{const}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя первое выражение (2.13) в четвертое граничное условие (2.12) и учитывая второе ограничение (2.8), будем иметь

$$\xi_n = \beta_n \cos nx. \quad (2.14)$$

Примем условие нормировки, состоящее в равенстве единице амплитуды функции $\xi(x)$. Тогда из (2.14) следует

$$\beta_n = 1; n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Из уравнений (2.11) после некоторых преобразований получаем

$$\Delta \bar{v}_z = 0. \quad (2.16)$$

Решая это уравнение методом разделения переменных $\bar{v}_z = X(x)Z(z)$, для $X(x)$ и $Z(z)$ получаем уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} X + q X = 0; \quad \frac{d^2}{dz^2} Z + q Z = 0,$$

где q — постоянная разделения.

Учитывая периодичность функции $\xi(x)$ и второе граничное условие (2.12), находим

$$q = n^2; n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$X(x) = \sin nx.$$

В силу граничного условия на дне (2.6) и условия нормировки функции $\xi(x)$ (2.15), для $Z(z)$ будем иметь

$$Z(z) = \frac{n}{\text{sh } n l} \text{sh } n(z+l).$$

Таким образом, получаем

$$v_{zn} = \frac{n}{\text{sh } n l} \text{sh } n(z+l) \sin nx; n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Подставляя в продифференцированное по x первое граничное условие (2.12) вместо производных $\partial h_{1x}/\partial x$ и $\partial p/\partial x$ их выражения через v_{zn} из уравнений (2.11), а также выражения (2.13), (2.14), находим, что собственные числа $v = v_n$, отвечающие собственным функциям h_{2zn} , v_{zn} , имеют вид

$$v_n = \frac{k}{g n \text{ch } n l} \left(n v_{xz}^2 + n v_{xz}^2 \text{ch } n l + \frac{g}{k} + n^2 v_c^2 \right); n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Теперь вернемся к нелинейной задаче (2.3)-(2.8). Ее решение будем искать в виде рядов по малому параметру

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi_i; \quad \bar{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{v}_i; \quad \rho = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \rho_i, \quad (2.19)$$

$$\bar{h}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{h}_{1i}; \quad \bar{h}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{h}_{2i}; \quad \Psi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Psi_{2i},$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_n} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i \right),$$

где n - фиксированное целое положительное число.

Для преобразования граничных условий (2.5), величины, входящие в эти условия, следует разложить в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной поверхности $\bar{z} = 0$, например, $\bar{v}_x(x, \bar{z}) = \bar{v}_x(x, \varepsilon \xi)$ следует записать в виде

$$\bar{v}_x(x, \varepsilon \xi) = \bar{v}_x(x, 0) + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} \varepsilon \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\bar{z}=0} \varepsilon^2 \xi^2 + \dots \quad (2.20)$$

Преобразованием (2.20) граничные условия (2.5) переносятся со свободной поверхности $\bar{z} = \varepsilon \xi$ на поверхность $\bar{z} = 0$. Выпишем преобразованные граничные условия с точностью до членов порядка: при $\bar{z} = 0$:

$$\frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma} \left[h_{2x} + \varepsilon \left(\frac{1}{2} h_{2x}^2 + \frac{1}{2} h_{2z}^2 + \xi \frac{\partial h_{2x}}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon^2 \xi \left(h_{2x} \frac{\partial h_{2x}}{\partial \bar{z}} + h_{2z} \frac{\partial h_{2z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 h_{2x}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] - \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma} \left[h_{1x} + \varepsilon \left(\frac{1}{2} h_{1x}^2 + \frac{1}{2} h_{1z}^2 + \xi \frac{\partial h_{1x}}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon^2 \xi \left(h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial \bar{z}} + h_{1z} \frac{\partial h_{1z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 h_{1x}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] - \rho -$$

$$- \varepsilon \xi \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\xi}{\gamma} = \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \right],$$

$$\bar{v}_z + \varepsilon \xi \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \xi^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{z}^2} = - \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon \left(\bar{v}_x + \varepsilon \xi \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}} \right) \frac{d\xi}{dx},$$

$$h_{1z} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{1z}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \xi^2 \frac{\partial^2 h_{1z}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon \left(h_{1x} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{1x}}{\partial \bar{z}} \right) \frac{d\xi}{dx},$$

$$h_{2z} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{2z}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \xi^2 \frac{\partial^2 h_{2z}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon \left(h_{2x} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{2x}}{\partial \bar{z}} \right) \frac{d\xi}{dx}.$$

Подставляя ряды (2.19) в уравнения (2.3), (2.4), граничные условия (2.6), (2.7), (2.21), ограничения (2.8) и приравнявая коэффициенты при ε^0 , ε^1 , ε^2 , получим соответственно уравнения первого, второго и третьего приближений. Отметим, что линейные соотношения сохраняют свой вид во всех приближениях:

уравнения в области I и 2:

$$\operatorname{div} \bar{v}_i = 0; \quad \operatorname{div} \bar{h}_{1i} = 0; \quad \Delta \Psi_{2i} = 0, \quad (2.22)$$

$$\bar{h}_{2i} = \frac{\partial \Psi_{2i}}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial \Psi_{2i}}{\partial \bar{z}} \bar{e}_z; \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

граничные условия (2.6), (2.7) и ограничения (2.8):

$$\bar{v}_{zi} = 0; \quad h_{1zi} = 0; \quad \bar{z} = -\ell; \quad \lim_{\bar{z} \rightarrow +\infty} \bar{h}_{2i} = 0, \quad (2.23)$$

$$\xi_i(x + 2\pi) = \xi_i(x); \quad \int_0^{2\pi} \xi_i(x) dx = 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Нелинейные равенства (2.3), (2.5) в первом (линейном) приближении примут вид

уравнения в области I:

$$\frac{\partial \bar{v}_{x0}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_0}{\partial x}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{z0}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_0}{\partial \bar{z}} + \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right); \quad h_{1z0} + \bar{v}_{z0} = 0,$$

граничные условия при $\bar{z} = 0$:

$$\bar{v}_{z0} = - \frac{d\xi_0}{dx}; \quad h_{1z0} = \frac{d\xi_0}{dx}; \quad h_{2z0} = \frac{d\xi_0}{dx}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} h_{2x0} - \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} h_{1x0} - \rho_0 + \frac{1}{\gamma_n} \xi_0 - \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} \frac{d^2 \xi_0}{dx^2} = 0.$$

Для определения второго приближения будем иметь уравнения в области I:

$$\frac{\partial \bar{v}_{x1}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} h_{1z0} \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) + \bar{v}_{x0} \frac{\partial \bar{v}_{x0}}{\partial x} + \bar{v}_{z0} \frac{\partial \bar{v}_{z0}}{\partial \bar{z}}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{z1}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) + \frac{\gamma_{A1}^2 k}{g \gamma_n} (\gamma_1 + h_{1x0}) \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial \bar{z}} - \right.$$

$$-\frac{\partial h_{1z0}}{\partial x}) + v_{x0} \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} + v_{z0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial z};$$

$$h_{1z1} + v_{z1} - v_{x0} h_{1z0} + v_{z0} h_{1x0} = 0,$$

граничные условия при $z = 0$:

$$v_{z1} = -\frac{d\xi_1}{dx} - \xi_0 \frac{\partial v_{z0}}{\partial z} + v_{x0} \frac{d\xi_0}{dx},$$

$$h_{1z1} = \frac{d\xi_1}{dx} - \xi_0 \frac{\partial h_{1z0}}{\partial z} + h_{1x0} \frac{d\xi_0}{dx},$$

$$h_{2z1} = \frac{d\xi_1}{dx} - \xi_0 \frac{\partial h_{2z0}}{\partial z} + h_{2x0} \frac{d\xi_0}{dx},$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x1} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x1} - \rho_1 + \frac{\xi_1}{v_n} - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} = \\ & = -\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} \left[\xi_0 \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} + \frac{1}{2} (h_{2x0}^2 + h_{2z0}^2) \right] + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left[\xi_0 \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} + \frac{1}{2} (h_{1x0}^2 + \right. \\ & \left. + h_{1z0}^2) \right] + \xi_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \gamma_1 \left[\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x0} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x0} + \frac{\xi_0}{v_n} - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_0}{dx^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Для определения третьего приближения имеем уравнения в области I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{xz2}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left[h_{1z0} \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) + (h_{1z1} + \gamma_1 h_{1z0}) \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) \right] + v_{x1} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{x0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + v_{z1} \frac{\partial v_{x0}}{\partial z} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial v_{z2}}{\partial x} = \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left(\frac{\partial h_{1x2}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z2}}{\partial x} \right) + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left[(h_{1x1} + \gamma_1 h_{1x0} + \right.$$

$$+ \gamma_2) \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) + (h_{1x0} + \gamma_1) \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) \left. \right] +$$

$$+ v_{x0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} + v_{x1} \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + v_{z1} \frac{\partial v_{z0}}{\partial z},$$

$$h_{1z2} + v_{z2} - v_{x0} h_{1z1} - v_{x1} h_{1z0} + v_{z0} h_{1x1} + v_{z1} h_{1x0} = 0,$$

граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} v_{z2} = -\frac{d\xi_2}{dx} - \left(\xi_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial v_{z0}}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial z^2} \right) + v_{x1} \frac{d\xi_0}{dx} + \\ + \xi_0 \frac{d\xi_0}{dx} \frac{\partial v_{x0}}{\partial z} + v_{x0} \frac{d\xi_1}{dx}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$h_{1z2} = \frac{d\xi_2}{dx} - \left(\xi_0 \frac{\partial h_{1z1}}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial h_{1z0}}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 h_{1z0}}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ h_{1x1} \frac{d\xi_0}{dx} + \xi_0 \frac{d\xi_0}{dx} \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} + h_{1x0} \frac{d\xi_1}{dx},$$

$$h_{2z2} = \frac{d\xi_2}{dx} - \left(\xi_0 \frac{\partial h_{2z1}}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial h_{2z0}}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 h_{2z0}}{\partial z^2} \right) + h_{2x1} \frac{d\xi_0}{dx} +$$

$$+ \xi_0 \frac{d\xi_0}{dx} \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} + h_{2x0} \frac{d\xi_1}{dx},$$

$$\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x2} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x2} - \rho_2 + \frac{\xi_2}{v_n} - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_2}{dx^2} = -\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} \left\{ \xi_0 \frac{\partial h_{2x1}}{\partial z} + \right.$$

$$+ \xi_1 \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 h_{2x0}}{\partial z^2} + h_{2x0} h_{2x1} + h_{2z0} h_{2z1} + \xi_0 h_{2x0} \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} +$$

$$+ \xi_0 h_{2z0} \frac{\partial h_{2z0}}{\partial z} + \gamma_1 \left[h_{2x1} + \xi_0 \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} + \frac{1}{2} (h_{2x0}^2 + h_{2z0}^2) \right] \left. \right\} + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left\{ \xi_0 \frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} + \right.$$

$$+ \xi_1 \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 h_{1x0}}{\partial z^2} + h_{1x0} h_{1x1} + h_{1z0} h_{1z1} +$$

$$+ \xi_0 h_{1x0} \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} + \xi_0 h_{1z0} \frac{\partial h_{1z0}}{\partial z} + \gamma_1 \left[h_{1x1} + \xi_0 \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} + \frac{1}{2} (h_{1x0}^2 + \right.$$

$$+ h_{1z0}^2) \left. \right\} + \xi_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{\gamma_1}{v_n} \xi_1 + \frac{v_c^2 k}{g v_n} \left[\gamma_1 \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} - \right.$$

$$- \frac{3}{2} \left(\frac{d\xi_0}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \xi_0}{dx^2} \left. \right] - \gamma_2 \left[\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x0} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x0} + \frac{\xi_0}{v_n} - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_0}{dx^2} \right].$$

Таким образом, чтобы найти решение нелинейной задачи (2.6)–(2.8) с точностью до членов порядка ξ^3 , нужно определить решение уравнений первого, второго и третьего приближений.

§ 3. Нелинейные поверхностные МГД волны

Переходим к нахождению последовательных приближений. Будем искать величины v_{zi} , h_{2zi} , h_{2xi} в виде рядов по нормированным собственным функциям линейной задачи (2.13), (2.17) [2.С.81]

$$v_{zi} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(i)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{sh} s(z+l) \sin sx, \quad (3.1)$$

$$h_{2zi} = - \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{(i)} s e^{-sz} \sin sx,$$

$$h_{2xi} = \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{(i)} s e^{-sz} \cos sx; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Первое (линейное) приближение. Из первого и третьего граничных условий (2.25) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} s (A_s^{(0)} - B_s^{(0)}) \sin sx = 0.$$

Отсюда следует

$$B_s^{(0)} = A_s^{(0)}; \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Из первого граничного условия (2.25) получаем

$$\xi_0 = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(0)} \cos sx.$$

Подставляя v_{z0} в уравнения (2.22), (2.24), находим

$$v_{x0} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(0)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{ch} s(z+l) \cos sx,$$

$$h_{1x0} = - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(0)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{ch} s(z+l) \cos sx,$$

$$h_{1z0} = - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(0)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{sh} s(z+l) \sin sx.$$

При определении v_{x0} , h_{1x0} произвольные функции от z , возникающие при интегрировании первого и второго уравнений (2.22) по x , полагались равными нулю, так как рассматривается чисто волновое движение жидкости без всевозможных течений. Этот факт также учитывается при определении последующих приближений.

Подставляя найденные выражения и выражение для $\partial \rho_0 / \partial x$ из (2.24) в продифференцированное по x четвертое граничное условие (2.25), находим

$$\sum_{s=1}^{\infty} s A_s^{(0)} \left(\frac{s v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{s v_{A1}^2 k}{g v_n} \operatorname{cth} sl - s \operatorname{cth} sl + \frac{1}{v_n} + \frac{s^2 v_c^2 k}{g v_n} \right) \sin sx = 0.$$

Отсюда, учитывая выражение (2.18) для v_n , методом Фурье находим

$$A_s^{(0)} = 0; \quad s \neq n; \quad A_n^{(0)} - \text{любое}. \quad (3.3)$$

Из нормировки функции $\xi(x)$ следует

$$A_n^{(0)} = 1. \quad (3.4)$$

Окончательно в первом приближении будем иметь

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \cos nx, \\ v_{z0} &= \frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{sh} n(z+l) \sin nx, \\ v_{x0} &= \frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{ch} n(z+l) \cos nx, \\ h_{1x0} &= - \frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{ch} n(z+l) \cos nx, \\ h_{1z0} &= - \frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{sh} n(z+l) \sin nx, \\ p_0 &= \frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{ch} n(z+l) \cos nx, \\ h_{2x0} &= n e^{-nz} \cos nx; \quad h_{2z0} = - n e^{-nz} \sin nx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Второе приближение. Используя решение в первом приближении, уравнения (2.26), (2.27) второго приближения запишем в виде уравнения в области I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} &= \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{n^3}{2 \operatorname{sh}^2 nl} \sin 2nx, \\ \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} &= \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{n^3}{2 \operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{sh} 2n(z+l), \\ h_{1z1} + v_{z1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

граничные условия при $z=0$:

$$\begin{aligned} v_{z1} &= -\frac{d\xi_1}{dx} - n^2 \operatorname{cth} nl \sin 2nx, \\ h_{1z1} &= \frac{d\xi_1}{dx} + n^2 \operatorname{cth} nl \sin 2nx, \\ h_{2z1} &= \frac{d\xi_1}{dx} - n^2 \sin 2nx, \\ \frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x1} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x1} - \rho_1 + \frac{\xi_1}{v_n} - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} &= \\ &= \frac{n^2}{2} \left[\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{v_{A1}^2 k}{2g v_n} (\operatorname{cth}^2 nl - 3) + 1 \right] \cos 2nx - \\ &- n \gamma_1 \operatorname{cth} nl \cos nx + \frac{n^2}{2} \left[\frac{v_{A1}^2 k}{2g v_n} (\operatorname{cth}^2 nl - 1) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции v_{z1} , h_{2z1} , h_{2x1} ищем в виде рядов (3.1). Из первого и третьего граничных условий (3.7) следует

$$\sum_{s=1}^{\infty} s(A_s^{(1)} - B_s^{(1)}) \sin sx = -n^2 (\operatorname{cth} nl + 1) \sin 2nx.$$

Из этого уравнения методом Фурье находим

$$\begin{aligned} B_s^{(1)} &= A_s^{(1)}; \quad s \neq 2n, \\ B_{2n}^{(1)} &= A_{2n}^{(1)} + \frac{n}{2} (\operatorname{cth} nl + 1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из уравнений (2.22), (3.6) и граничных условий (2.23), (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} \cos sx + \frac{n}{2} \operatorname{cth} nl \cos 2nl, \\ v_{x1} &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{ch} s(z+l) \cos sx, \\ h_{1x1} &= - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{ch} s(z+l) \cos sx, \\ h_{1z1} &= - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} \frac{s}{\operatorname{sh} sl} \operatorname{sh} s(z+l) \sin sx. \end{aligned}$$

Используя первое уравнение (3.6), из продифференцированного по x последнего граничного условия (3.7) находим

при $s \neq 2n$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} s A_s^{(1)} \left(\frac{s v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{s v_{A1}^2 k}{g v_n} \operatorname{cth} sl + \frac{1}{v_n} - s \operatorname{cth} sl \right) \sin sx &= \\ &= n^2 \left[\frac{n v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{n v_{A1}^2 k}{g v_n} (\operatorname{cth}^2 nl - 3) + n \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 nl} \right) - \right. \\ &- \frac{1}{v_n} \operatorname{cth} nl - \frac{4 n^2 v_c^2 k}{g v_n} \operatorname{cth} nl \left. \right] \sin 2nx - \frac{n \gamma_1}{v_n} \left(\frac{n v_{A2}^2 k}{g} + \right. \\ &+ \frac{n v_{A1}^2 k}{g} \operatorname{cth} nl + \frac{n^2 v_c^2 k}{g} + 1 \left. \right) \sin nx. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$A_s^{(1)} = 0; \quad s \neq n, 2n; \quad \gamma_1 = 0. \quad (3.9)$$

Коэффициент $A_n^{(1)}$ положим равным нулю, поскольку последующие приближения (v_{zi} ; $i=1, 2, \dots$) не должны иметь слагаемых вида $\frac{n}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{sh} nx \times (z+l) \sin nx$, что равносильно ортогональности решений второго и первого приближений

при $s=2n$

$$\begin{aligned} A_{2n}^{(1)} \left(\frac{2n v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{2n v_{A1}^2 k}{g v_n} \operatorname{cth} 2nl + \frac{1}{v_n} + \frac{4n^2 v_c^2 k}{g v_n} - \right. \\ \left. - 2n \operatorname{cth} 2nl \right) \sin 2nx &= \frac{n}{2} \left[-\frac{n v_{A2}^2 k}{g v_n} (2 \operatorname{cth} nl + 1) + \right. \\ &+ \left(\frac{n v_{A1}^2 k}{2g v_n} - \frac{n}{2} \right) (\operatorname{cth}^2 nl - 3) - \frac{1}{v_n} \left(1 + \frac{4n^2 v_c^2 k}{g} \right) \operatorname{cth} nl \left. \right] \sin 2nx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$A_{2n}^{(1)} = \frac{n K_1}{4 L_1} \operatorname{cth} nl, \quad (3.10)$$

$$K_1 = n v_{A2}^2 k (5 \operatorname{cth}^2 nl + 2 \operatorname{cth} nl - 3) + 3 n^2 v_c^2 k (3 \operatorname{cth}^2 nl - 1) + 3g (\operatorname{cth}^2 nl - 1),$$

$$L_1 = g - n v_{A2}^2 k (\operatorname{cth}^2 nl - 1) - n^2 v_c^2 k (3 \operatorname{cth}^2 nl - 1).$$

Окончательно во втором приближении находим

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= (A^{(1)} + \frac{n}{2}) \operatorname{cth} nl \cos 2nx, \\
 v_{z1} &= \frac{n A^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{sh} 2n(z+l) \sin 2nx, \\
 v_{x1} &= \frac{n A^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{ch} 2n(z+l) \cos 2nx, \\
 h_{1z1} &= -\frac{n A^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{sh} 2n(z+l) \sin 2nx, \\
 h_{1x1} &= -\frac{n A^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{ch} 2n(z+l) \cos 2nx, \\
 h_{2z1} &= -n[n + (2A^{(1)} + n) \operatorname{cth} nl] e^{-2nz} \sin 2nx, \\
 h_{2x1} &= n[n + (2A^{(1)} + n) \operatorname{cth} nl] e^{-2nz} \cos 2nx, \\
 p_1 &= \frac{n A^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 nl} \operatorname{ch} 2n(z+l) \cos 2nx - \frac{n^2}{4 \operatorname{sh}^2 nl} (\operatorname{ch} 2n(z+l) + \\
 &+ \cos 2nx) + \frac{n^2}{4 \operatorname{sh}^2 nl} (1 - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n}); \quad A^{(1)} = A_{2n}^{(1)} \operatorname{th} nl.
 \end{aligned} \tag{3.II}$$

При определении p_1 постоянная интегрирования найдена из последнего граничного условия (3.7).

Третье приближение. Уравнения (2.28), (2.29) для третьего приближения с учетом (3.5), (3.II) примут вид уравнения в области I:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} &= \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{n^3 A^{(1)}}{2 \operatorname{sh}^3 nl} (3 \operatorname{ch} n(z+l) \sin 3nx + \\
 &+ \operatorname{ch} 3n(z+l) \sin nx),
 \end{aligned} \tag{3.I2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{z2}}{\partial x} &= \frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} \left(\frac{\partial h_{1x2}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z2}}{\partial x} \right) + \\
 &+ \frac{n^3 A^{(1)}}{2 \operatorname{sh}^3 nl} (\operatorname{sh} n(z+l) \cos 3nx + 3 \operatorname{sh} 3n(z+l) \cos nx),
 \end{aligned}$$

$$h_{1z2} + v_{z2} = 0,$$

граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 v_{z2} &= -\frac{d \xi_2}{dx} - \frac{n^2}{8} (4A^{(1)} + n) (2 \operatorname{cth}^2 nl + 1) (3 \sin 3nx + \\
 &+ \sin nx) - \frac{n^3}{4} \sin nx, \\
 h_{1z2} &= \frac{d \xi_2}{dx} + \frac{n^2}{8} (4A^{(1)} + n) (2 \operatorname{cth}^2 nl + 1) (3 \sin 3nx + \\
 &+ \sin nx) + \frac{n^3}{4} \sin nx, \\
 h_{2z2} &= \frac{d \xi_2}{dx} - \frac{3n^2}{8} [4A^{(1)} \operatorname{cth} nl + n(2 \operatorname{cth} nl + 1)] (3 \sin 3nx + \\
 &+ \sin nx) + \frac{n^3}{4} \sin nx, \\
 \frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} h_{2x2} - \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} h_{1x2} - p_2 + \frac{1}{v_n} \xi_2 - \frac{v_c^2 k}{g v_n} \frac{d^2 \xi_2}{dx^2} &= \\
 &= \frac{n^2}{8} \left\{ 4A^{(1)} \left[5 \left(\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} + 1 \right) \operatorname{cth} nl + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} (\operatorname{cth}^2 nl - 6) \operatorname{cth} nl \right] + \right. \\
 &+ n \left[\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} (10 \operatorname{cth} nl + 7) - \left(\frac{3 v_{A1}^2 k}{g v_n} - 4 \right) \operatorname{cth} nl - \frac{3n v_c^2 k}{g v_n} \right] \left. \right\} \cos 3nx + \\
 &+ \frac{n^2}{8} \left\{ 4A^{(1)} \left[\left(\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} + 5 \right) \operatorname{cth} nl + \frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} (\operatorname{cth}^2 nl - 2) \right] + n \left[\frac{v_{A2}^2 k}{g v_n} x \right. \right. \\
 &\times (2 \operatorname{cth} nl + 5) + \left. \left. \frac{3k}{g v_n} (v_{A1}^2 + n v_c^2) \right] \right\} \cos nx - n v_2 \operatorname{cth} nl \cos nx.
 \end{aligned} \tag{3.I3}$$

Функции v_{z2} , h_{2z2} , h_{2x2} будем искать в виде рядов (3.I). Из первого и третьего граничных условий (3.I3) находим

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^{\infty} s(B_s^{(2)} - A_s^{(2)}) &= \frac{n^2}{8} [4A^{(1)} (2 \operatorname{cth}^2 nl + 3 \operatorname{cth} nl + 1) + \\
 &+ 2n (\operatorname{cth}^2 nl + 3 \operatorname{cth} nl + 2)] (3 \sin 3nx + \sin nx).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$B_s^{(2)} = A_s^{(2)}; s \neq n, 3n,$$

$$B_m^{(2)} = A_m^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(1)}(2\text{cth}^2 nl + 3\text{cth} nl + 1) + n(\text{cth}^2 nl + 3\text{cth} nl + 2)]; m = n, 3n. \quad (3.14)$$

Из уравнений (2.22), (3.12) и граничных условий (2.23), (3.13) находим

$$\xi_2 = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(2)} \cos sx + \frac{n}{8} (4A^{(1)} + n)(2\text{cth}^2 nl + 1) \cos 3nx +$$

$$+ \frac{n}{8} [4A^{(1)}(2\text{cth}^2 nl + 1) + n(2\text{cth}^2 nl + 3)] \cos nx,$$

$$v_{x2} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(2)} \frac{s}{\text{sh} sl} \text{ch} s(z+l) \cos sx,$$

$$h_{1x2} = - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(2)} \frac{s}{\text{sh} sl} \text{ch} s(z+l) \cos sx,$$

$$h_{1z2} = - \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(2)} \frac{s}{\text{sh} sl} \text{sh} s(z+l) \sin sx.$$

Аналогично первому и второму приближению из последнего граничного условия (3.13) находим

при $s \neq n, 3n$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} s A_s^{(2)} \left(\frac{s v_{A2}^2 k}{g v_n} + \frac{s v_{A1}^2 k}{g v_n} \text{cth} sl + \frac{1}{v_n} + \frac{s^2 v_c^2 k}{g v_n} - s \text{cth} sl \right) \sin sx = \\ = \frac{3n^2}{8} \left\{ 4A^{(1)} \left[\frac{5n v_{A2}^2 k}{g v_n} \text{cth} nl + n \left(\frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} - 1 \right) (\text{cth}^2 nl - 6) \text{cth} nl - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{v_n} \left(\frac{9n^2 v_c^2 k}{g} + 1 \right) (2\text{cth}^2 nl + 1) \right] + n \left[\frac{n v_{A2}^2 k}{g v_n} (10\text{cth} nl + 7) - 3n \left(\frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} - 1 \right) \text{cth} nl - \right. \\ \left. - \frac{1}{v_n} (2\text{cth}^2 nl + 1) - \frac{6n^2 v_c^2 k}{g v_n} (3\text{cth}^2 nl + 2) \right] \right\} \sin 3nx + \\ + \frac{n^2}{8} \left\{ 4A^{(1)} \left[\frac{n v_{A2}^2 k}{g v_n} \text{cth} nl + n \left(\frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} - 1 \right) (\text{cth}^2 nl - 2) \text{cth} nl - \frac{1}{v_n} \left(\frac{n^2 v_c^2 k}{g} + 1 \right) (2\text{cth}^2 nl + 1) \right] + \right. \\ \left. + n \left[\frac{n v_{A2}^2 k}{g v_n} (5 + 2\text{cth} nl) + 3n \left(\frac{v_{A1}^2 k}{g v_n} - 1 \right) \text{cth} nl - \frac{2n^2 v_c^2 k}{g v_n} \text{cth}^2 nl - \frac{1}{v_n} (2\text{cth}^2 nl + 3) \right] \right\} \sin nx - n^2 \gamma_2 \text{cth} nl \sin nx. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$A_s^{(2)} = 0; s \neq n, 3n. \quad (3.15)$$

При $s = 3n$ находим

$$A_{3n}^{(2)} = - \frac{n K_2}{16 L_2} (3\text{cth}^2 nl + 1), \quad (3.16)$$

$$K_2 = n v_{A2}^2 k [4A^{(1)}(7\text{cth}^2 nl + 4\text{cth} nl - 3) + 2n(3\text{cth}^2 nl + 4\text{cth} nl + 2)] + n^2 v_c^2 k [4A^{(1)}(19\text{cth}^2 nl + 3) + 9n(2\text{cth}^2 nl + 1)] + g[4A^{(1)}(3\text{cth}^2 nl - 5) + n(2\text{cth}^2 nl - 2)];$$

$$L_2 = 3n v_{A2}^2 k (\text{cth}^2 nl - 1) + 12n^2 v_c^2 k \text{cth}^2 nl - 4g,$$

$$\gamma_2 = - \frac{n M}{8 N},$$

$$M = n v_{A2}^2 k [4A^{(1)}(3\text{cth}^2 nl + 2\text{cth} nl - 1) + n(2\text{cth}^2 nl + 4\text{cth} nl + 2)] + n^2 v_c^2 k [4A^{(1)}(3\text{cth}^2 nl - 1) + n(2\text{cth}^2 nl + 3)] + g[4A^{(1)}(3\text{cth}^2 nl - 1) + 2n(\text{cth}^2 nl + 3)];$$

$$N = n v_{A2}^2 k + n v_{A1}^2 k \text{cth} nl + n^2 v_c^2 k + g.$$

Величину $A_n^{(2)}$ определим из условия ортогональности решений третьего и первого приближений. Слагаемое вида $\frac{n}{\text{sh} nl} \text{sh} n(z+l) \sin nx$ входит в выражение v_{x2}^* при ξ^3 следующим образом:

$$c_0 (A_n^{(2)} - \frac{\gamma_2}{2}) \frac{n}{\text{sh} nl} \text{sh} n(z+l) \sin nx,$$

где $c_0 = (g v_n / k)^{1/2}$. Поэтому для $A_n^{(2)}$ будем иметь

$$A_n^{(2)} = \frac{\gamma_2}{2}. \quad (3.17)$$

Окончательно для построения решения в третьем приближении имеем:

$$\begin{aligned} \xi_2 = \left\{ A_n^{(2)} + \frac{n}{8} [4A^{(1)}(2\text{cth}^2 nl + 1) + n(2\text{cth}^2 nl + 3)] \right\} \cos nx + \\ + \left[A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{8} (4A^{(1)} + n)(2\text{cth}^2 nl + 1) \right] \cos 3nx, \\ v_{z2} = \frac{n A_n^{(2)}}{\text{sh} nl} \text{sh} n(z+l) \sin nx + \frac{3n A_{3n}^{(2)}}{\text{sh} 3nl} \text{sh} 3n(z+l) \sin 3nx, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$v_{x2} = \frac{n A_n^{(2)}}{sh nl} ch n(z+l) \cos nx + \frac{3n A_n^{(2)}}{sh^3 nl} ch 3n(z+l) \cos 3nx,$$

$$h_{1z2} = -\frac{n A_n^{(2)}}{sh nl} sh n(z+l) \sin nx - \frac{3n A_n^{(2)}}{sh^3 nl} sh 3n(z+l) \sin 3nx,$$

$$h_{1x2} = -\frac{n A_n^{(2)}}{sh nl} ch n(z+l) \cos nx - \frac{3n A_n^{(2)}}{sh^3 nl} ch 3n(z+l) \cos 3nx,$$

$$h_{2z2} = -n \left\{ A_n^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right\} e^{-nz} \sin nx - 3n \left\{ A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right\} e^{-3nz} \sin 3nx,$$

$$h_{2x2} = n \left\{ A_n^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right\} e^{-nz} \cos nx + 3n \left\{ A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right\} e^{-3nz} \cos 3nx,$$

$$p_2 = \frac{n}{2 sh nl} (2A_n^{(2)} ch n(z+l) - \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} ch 3n(z+l)) \cos nx + \frac{n}{2 sh^3 nl} (6A^{(2)} \times ch 3n(z+l) - n A^{(4)} ch n(z+l)) \cos 3nx; \quad A^{(2)} = \frac{A_{3n}^{(2)}}{sh 3nl}.$$

Теперь можно привести решение задачи с точностью до третьего приближения:

$$c = c_0 (1 - \varepsilon^2 \frac{\gamma_2}{2}),$$

$$\xi^* = \frac{\varepsilon}{k} \cos nx + \frac{\varepsilon^2}{k} (A^{(4)} + \frac{n}{2}) cth nl \cos 2nx + \quad (3.19)$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{k} \left\{ \left[A_n^{(2)} + \frac{n}{8} (4A^{(4)}(2cth^2 nl + 1) + n(2cth^2 nl + 3)) \right] \cos nx + \right. \\ \left. + \left[A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{8} (4A^{(4)} + n)(2cth^2 nl + 1) \right] \cos 3nx \right\},$$

$$v_z^* = c_0 \left[\varepsilon \frac{n}{sh nl} sh n(z+l) \sin nx + \varepsilon^2 \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} sh 2n(z+l) \sin 2nx + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \frac{3n A^{(2)}}{sh^3 nl} sh 3n(z+l) \sin 3nx \right],$$

$$v_x^* = c_0 \left[\varepsilon \frac{n}{sh nl} ch n(z+l) \cos nx + \varepsilon^2 \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} ch 2n(z+l) \cos 2nx + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \frac{3n A^{(2)}}{sh^3 nl} ch 3n(z+l) \cos 3nx \right],$$

$$H_{1z}^* = -|H_{01}^*| \left\{ \varepsilon \frac{n}{sh nl} sh n(z+l) \sin nx + \varepsilon^2 \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} sh 2n(z+l) \sin 2nx + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \frac{3n A^{(2)}}{sh^3 nl} sh 3n(z+l) \sin 3nx \right\},$$

$$H_{1x}^* = |H_{01}^*| \left\{ \varepsilon \frac{n}{sh nl} ch n(z+l) \cos nx + \varepsilon^2 \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} ch 2n(z+l) \cos 2nx + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \frac{3n A^{(2)}}{sh^3 nl} ch 3n(z+l) \cos 3nx \right\}$$

$$p^* = p_0^* - \frac{pg}{k} z + \varepsilon p c_0^2 \frac{n}{sh nl} ch n(z+l) \cos nx + \varepsilon^2 p c_0^2 \left[\frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} ch 2n(z+l) \cos 2nx - \right. \\ \left. - \frac{n^2}{4 sh^2 nl} (ch 2n(z+l) + \cos 2nx) + \frac{n^2}{4 sh^2 nl} (1 - \frac{v_{A1}^2 k}{g \gamma n}) \right] + \\ + \varepsilon^3 p c_0^2 \left[-\frac{n}{2 sh nl} (2A_n^{(2)} ch n(z+l) + \frac{n A^{(4)}}{sh^2 nl} ch 3n(z+l)) \cos nx + \frac{n}{2 sh^3 nl} \times \right. \\ \left. \times (6A^{(2)} ch 3n(z+l) - n A^{(4)} ch n(z+l)) \cos 3nx \right],$$

$$H_{2z}^* = -|H_{02}^*| \left\{ \varepsilon n e^{-nz} \sin nx + \varepsilon^2 n \left[n + (2A^{(4)} + n) cth nl \right] e^{-2nz} \sin 2nx + \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \left[n \left(A_n^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right) e^{-nz} \sin nx + \right. \right. \\ \left. \left. + 3n \left(A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(4)}(2cth^2 nl + 3cth nl + 1) + n(cth^2 nl + 3cth nl + 2)] \right) e^{-3nz} \sin 3nx \right] \right\},$$

$$H_{2x}^* = H_{02}^* + H_{02}^* \left\{ \varepsilon n e^{-nz} \cos nx + \varepsilon^2 n \left[n + (2A^{(1)} + n) \operatorname{cth} nl \right] e^{-2nz} \times \right. \\ \times \cos 2nx + \varepsilon^3 \left[n(A_n^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(1)}(2\operatorname{cth}^2 nl + 3\operatorname{cth} nl + 1) + n(\operatorname{cth}^2 nl + \right. \\ \left. + 3\operatorname{cth} nl + 2)]) \right] e^{-nz} \cos nx + 3n(A_{3n}^{(2)} + \frac{n}{4} [2A^{(1)}(2\operatorname{cth}^2 nl + 3\operatorname{cth} nl + \\ \left. + 1) + n(\operatorname{cth}^2 nl + 3\operatorname{cth} nl + 2)]) \right] e^{-3nz} \cos 3nx \left. \right\},$$

$$H_{3x}^* = H_{03}^*; \quad H_{3z}^* = 0.$$

Выражение для фазовой скорости в (3.19) в размерном виде записывается следующим образом:

$$C = [\operatorname{th} kl^* (v_{A2}^2 + v_{A1}^2 \operatorname{cth} kl^* + g/k + \alpha k^3/\rho)]^{1/2} (1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2}), \\ \gamma_2 = -\frac{M}{8N}; \quad M = v_{A2}^2 k [4A^{(1)}(3\operatorname{cth}^2 kl^* + 2\operatorname{cth} kl^* - 1) + \\ + (2\operatorname{cth}^2 kl^* + 4\operatorname{cth} kl^* + 2)] + (\alpha k^2/\rho) [4A^{(1)}(3\operatorname{cth}^2 kl^* - 1) + \\ + (2\operatorname{cth}^2 kl^* + 3)] + g [4A^{(1)}(3\operatorname{cth}^2 kl^* - 1) + (2\operatorname{cth}^2 kl^* + 6)]; \quad N = v_{A2}^2 k + \\ + v_{A1}^2 k \operatorname{cth} kl^* + \alpha k^2/\rho + g; \quad A^{(1)} = [v_{A2}^2 k (5\operatorname{cth}^2 kl^* + 2\operatorname{cth} kl^* - 3) + (3\alpha k^2/\rho) \times \\ \times (3\operatorname{cth}^2 kl^* - 1) + 3g(\operatorname{cth}^2 kl^* - 1)] \{ 4[g - v_{A2}^2 k(\operatorname{cth}^2 kl^* - 1) - (\alpha k^2/\rho)(3\operatorname{cth}^2 kl^* - 1)] \}^{-1}.$$

Здесь и далее в этом параграфе полагаем $n=1$.

Учет членов с множителем ε^2 в (3.20) позволяет определить зависимость фазовой скорости от высоты волны, имеющей порядок $O(\varepsilon)$. Зависимость фазовой скорости от высоты волны впервые установил Стокс для нелинейных гравитационных волн [15] (см. также [16, С. 612]).

При $H_{01}^* = H_{02}^* = H_{03}^* = 0$ и $\alpha = 0$ формула (3.20) переходит в выражение для фазовой скорости нелинейной гравитационной волны в обычной гидродинамике [7, С. 19-20]:

$$C = (g/k)^{1/2} (\operatorname{th} kl^*)^{1/2} \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{16 \operatorname{sh}^4 kl^*} (8 \operatorname{ch}^4 kl^* - 8 \operatorname{ch}^2 kl^* + 9) \right].$$

При отсутствии магнитного поля в линейном приближении ($\varepsilon=0$) из (3.20) следует:

$$C = [\operatorname{th} kl^* (g/k + \alpha k^3/\rho)]^{1/2}.$$

Соотношение (3.20) может быть записано также в виде дисперсионного уравнения, выражающего зависимость частоты колебания волны ($\omega = Ck$) от волнового числа k :

$$\omega^2 = [gk + v_{A2}^2 k^2 + \alpha k^3/\rho] \operatorname{th} kl^* + \\ + v_{A1}^2 k - (1 - \varepsilon^2 \gamma_2/2)^2. \quad (3.20)$$

В линейном приближении при отсутствии магнитного поля отсюда следует:

$$\omega^2 = (gk + \alpha k^3/\rho) \operatorname{th} kl^*.$$

Рассмотрим далее случай $kl^* \ll 1$, когда длина волны значительно превышает толщину слоя жидкости. Для линейных волн ($\varepsilon=0$) в этом случае из (3.20) получаем уравнение

$$\omega^2 = (gk + v_{A2}^2 k^2 + \alpha k^3/\rho) kl^* + v_{A1}^2 k^2, \quad (3.21)$$

которое в пренебрежении поверхностным натяжением, совпадает с дисперсионным соотношением, приведенным в [17]. При отсутствии магнитного поля соотношение (3.21) переходит в дисперсионное уравнение для линейных капиллярно-гравитационных волн на мелкой воде [4, С. 345]. В случае глубокого слоя жидкости $kl^* \gg 1$ выражение (3.20) принимает вид:

$$\omega^2 = [gk + (v_{A1}^2 + v_{A2}^2) k^2 + \alpha k^3/\rho] (1 - \varepsilon^2 \gamma_2/2)^2, \quad (3.22)$$

$$\gamma_2 = -\frac{8v_{A2}^2 k (2A^{(1)} + 1) + (\alpha k^2/\rho) (8A^{(1)} + 5) + 8g(A^{(1)} + 1)}{8[(v_{A1}^2 + v_{A2}^2) k + \alpha k^2/\rho + g]},$$

$$A^{(1)} = \frac{v_{A1}^2 k + 6\alpha k^2/\rho}{g - 2\alpha k^2/\rho}.$$

На рис. 1, 2 и 3 приведены графики зависимости частоты волны (соответственно в нелинейном и линейном случаях) от величины магнитного поля для различных длин волн, рассчитанные по формуле (3.22)

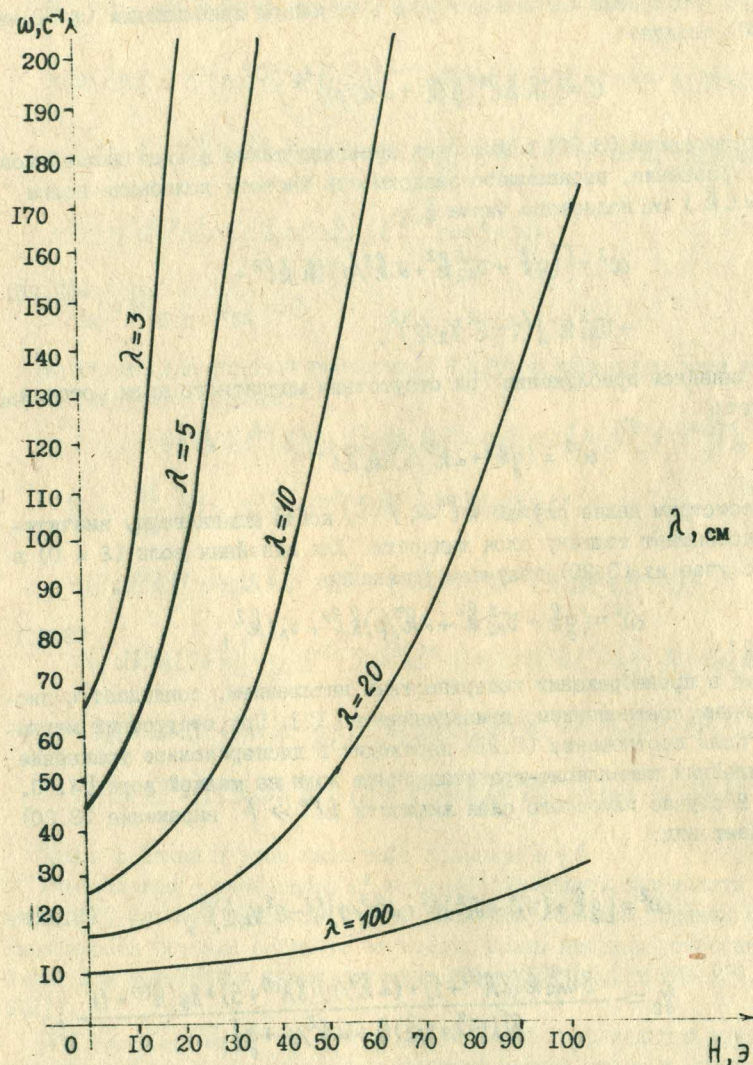


Рис. 1. Зависимость частоты нелинейной волны ($\xi = 0,1$) от величины магнитного поля

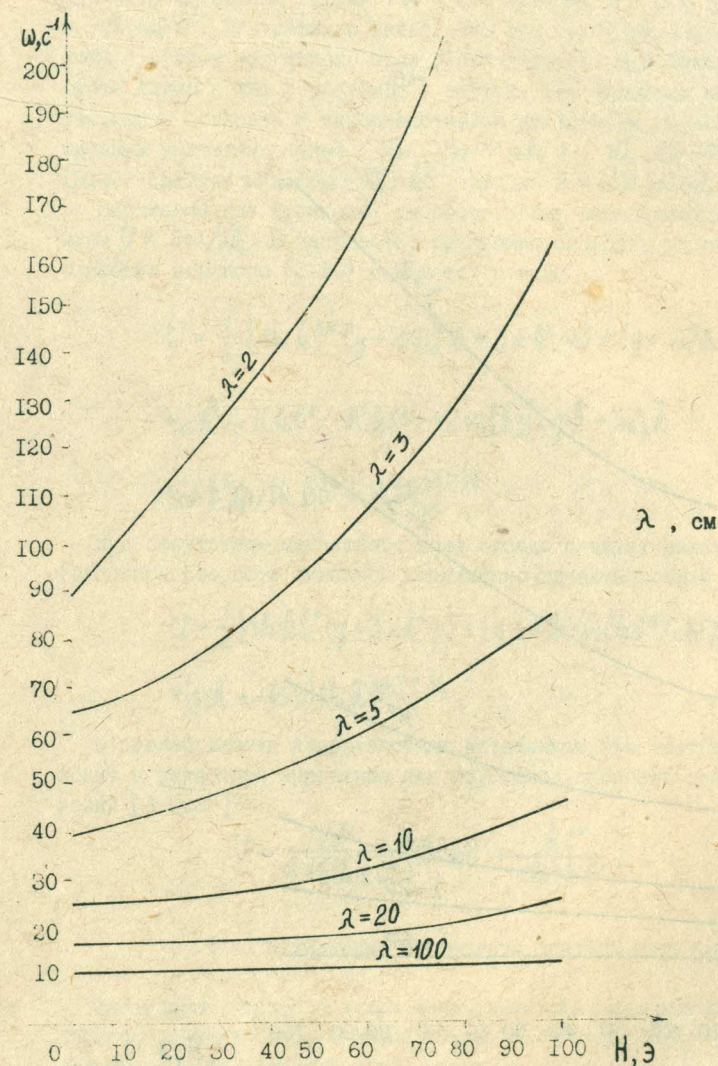


Рис. 2. Зависимость частоты нелинейной волны ($\xi = 0,01$) от величины магнитного поля

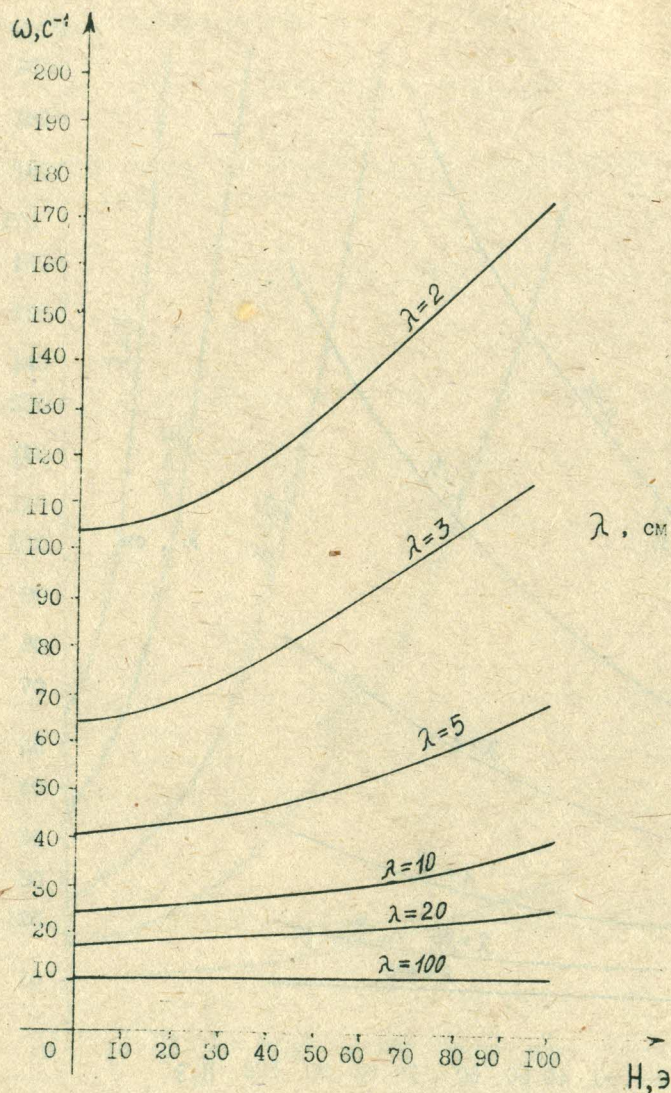


Рис. 3. Зависимость частоты линейной волны ($\epsilon = 0$) от величины магнитного поля

при $|H_{01}^*| = |H_{02}^*| = |H^*|$; $\epsilon = 0,1$; $\epsilon = 0,01$; $\epsilon = 0$ для следующих значений параметров (жидкий натрий): $\alpha = 200$ дин/см; $\rho = 0,8$ г/см³; $g = 980$ см/с². Из графиков видно, что при заданной длине волны частота с ростом магнитного поля увеличивается. При фиксированной частоте длина волны с ростом $|H^*|$ растет. Для линейных волн ($\epsilon = 0$) это можно показать и непосредственно из формулы (3.22). В случае сильных магнитных полей ($v_{A1}, v_{A2} \gg \alpha k/\rho$; $v_{A1}, v_{A2} \gg g/k$) из (3.22) следует $\omega^2 = (v_{A1}^2 + v_{A2}^2) k^2$, откуда $\lambda = (2\pi/\omega)(v_{A1}^2 + v_{A2}^2)^{-1/2}$.

Выражение для групповой скорости волны определяется соотношением $U = \partial\omega/\partial k$. В частности, групповая скорость в линейном приближении согласно (3.20) запишется в виде

$$U = \frac{1}{2} [th kl^* (g + 2v_{A2}^2 k + 3\alpha k^2/\rho) + (g + v_{A2}^2 k + \alpha k^2/\rho)(kl^*/ch^2 kl^*) + 2v_{A1}^2 k] [(gk + v_{A2}^2 k + \alpha k^3/\rho)th kl^* + v_{A1}^2 k^2]^{-1/2}.$$

При отсутствии магнитного поля отсюда следует выражение для групповой скорости линейной капиллярно-гравитационной волны:

$$U = \frac{1}{2} [th kl^* (g + 3\alpha k^2/\rho) + (g + \alpha k^2/\rho)(kl^*/ch^2 kl^*)] \times [(gk + \alpha k^3/\rho)th kl^*]^{-1/2}.$$

В пренебрежении поверхностным натяжением это соотношение переходит в известное выражение для групповой скорости гравитационной волны [4.С.60]:

$$U = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}th kl^*} \left(th kl^* + \frac{kl^*}{ch^2 kl^*} \right).$$

§ 4. Нахождение траектории частицы жидкости

Рассмотрим вопрос о нахождении траектории частицы жидкости при распространении прогрессивной волны. Координаты частицы жидкости $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = v_x^*; \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v_z^*. \quad (4.1)$$

Введем безразмерное время $t = \omega_p t^*$, где ω_p — частота колебаний частицы жидкости, которая в случае нелинейных волн, как это будет показано ниже, отличается от частоты колебания ω_w волны (в предыдущих параграфах частота волны обозначалась посредством ω). Для волны $\omega_w = ck$. Период τ_w волны связан с ее частотой соотношением $\omega_w = 2\pi/\tau_w$. Аналогичное соотношение имеет место и для частицы $\omega_p = 2\pi/\tau_p$.

В безразмерном виде уравнения (4.1) запишутся следующим образом

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ck}{\omega_p} (-1 + \varepsilon v_x); \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon \frac{ck}{\omega_p} v_z. \quad (4.2)$$

Проинтегрируем уравнения (4.2) в случае $n = 1$. Решение будем искать в виде рядов по малому параметру

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i X_i; \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i; \quad \frac{ck}{\omega_p} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \eta_i. \quad (4.3)$$

Подставляя ряды (4.3) в уравнения движения, для определения первых четырех коэффициентов получим

$$\frac{dX_0}{dt} = -1; \quad \frac{dZ_0}{dt} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{dX_1}{dt} = -\eta_1 + \frac{1}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \cos X_0, \quad (4.5)$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{1}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \cos X_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} = & -\eta_2 + \frac{\eta_1}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \cos X_0 + \frac{Z_1}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \cos X_0 - \\ & - \frac{X_1}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \frac{A^{(4)}}{sh^2 \ell} ch 2(Z_0 + \ell) \cos 2X_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{dt} = & \frac{\eta_1}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \frac{Z_1}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \\ & + \frac{X_1}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \cos X_0 + \frac{A^{(4)}}{sh^2 \ell} sh 2(Z_0 + \ell) \sin 2X_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_3}{dt} = & -\eta_3 + \frac{\eta_2}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \cos X_0 + \eta_1 \left[\frac{1}{sh \ell} (Z_1 sh(Z_0 + \ell) \cos X_0 - \right. \\ & - X_1 ch(Z_0 + \ell) \sin X_0) + \frac{A^{(4)}}{sh^2 \ell} ch 2(Z_0 + \ell) \cos 2X_0 \left. \right] + Z_2 sh(Z_0 + \\ & + \ell) \cos X_0 - X_2 ch(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \frac{1}{2} (Z_1^2 - X_1^2) ch(Z_0 + \ell) \cos X_0 - \\ & - X_1 Z_1 sh(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \frac{2A^{(4)}}{sh^2 \ell} (Z_1 sh 2(Z_0 + \ell) \cos 2X_0 - \\ & - X_1 ch 2(Z_0 + \ell) \sin 2X_0) + \frac{3A^{(2)}}{sh^3 \ell} ch 3(Z_0 + \ell) \cos 3X_0 + \\ & + \frac{A_1^{(2)}}{sh \ell} ch(Z_0 + \ell) \cos X_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{dt} = & \frac{\eta_2}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \eta_1 \left[\frac{1}{sh \ell} (Z_1 ch(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \right. \\ & + X_1 sh(Z_0 + \ell) \cos X_0) + \frac{A^{(4)}}{sh^2 \ell} sh 2(Z_0 + \ell) \sin 2X_0 \left. \right] + Z_2 ch(Z_0 + \\ & + \ell) \sin X_0 + X_2 sh(Z_0 + \ell) \cos X_0 + \frac{1}{2} (Z_1^2 - X_1^2) sh(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \\ & + X_1 Z_1 ch(Z_0 + \ell) \cos X_0 + \frac{2A^{(4)}}{sh^2 \ell} (Z_1 ch 2(Z_0 + \ell) \sin 2X_0 + X_1 sh 2 \\ & \times (Z_0 + \ell) \cos 2X_0) + \frac{A_1^{(2)}}{sh \ell} sh(Z_0 + \ell) \sin X_0 + \frac{3A^{(2)}}{sh^3 \ell} sh 3(Z_0 + \ell) \sin 3X_0. \end{aligned}$$

Из системы уравнений (4.4) в нулевом приближении получаем

$$X_0 = \alpha - t; \quad Z_0 = \beta, \quad (4.8)$$

где α, β — лагранжевы координаты частицы жидкости.

При определении последующих приближений будем пользоваться периодичностью величин $X_i; Z_i; i = 1, 2, 3$. Учитывая (4.8), систему (4.5) запишем в виде

$$\frac{dX_1}{dt} = -\eta_1 + \frac{1}{sh \ell} ch(\beta + \ell) \cos(\alpha - t), \quad (4.9)$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{1}{sh\ell} sh(b+\ell) \sin(a-t).$$

В силу периодичности X_1, Z_1 из (4.9) находим

$$X_1 = -\frac{1}{sh\ell} ch(b+\ell) \sin(a-t), \quad (4.10)$$

$$Z_1 = \frac{1}{sh\ell} sh(b+\ell) \cos(a-t); \quad \eta_1 = 0.$$

Используя (4.8), (4.10), для определения траектории жидкой частицы во втором приближении будем иметь

$$\frac{dX_2}{dt} = -\eta_2 + \frac{1}{sh^2\ell} sh^2(b+\ell) \cos^2(a-t) + \frac{1}{sh^2\ell} ch^2(b+\ell) \times \quad (4.11)$$

$$\times \sin^2(a-t) + \frac{A^{(1)}}{sh^2\ell} ch 2(b+\ell) \cos 2(a-t),$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = \frac{A^{(1)}}{sh^2\ell} sh 2(b+\ell) \sin 2(a-t).$$

Учитывая периодичность X_2, Z_2 , из (4.11) получаем

$$X_2 = \frac{1}{4sh^2\ell} (2A^{(1)} ch 2(b+\ell) - 1) \sin 2(a-t), \quad (4.12)$$

$$Z_2 = \frac{A^{(1)}}{2sh^2\ell} sh 2(b+\ell) \cos 2(a-t),$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2sh^2\ell} ch 2(b+\ell).$$

Система уравнений (4.7) с учетом (4.8), (4.10), (4.12) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dX_3}{dt} = & -\eta_3 + \frac{1}{4sh^3\ell} [(A^{(1)} sh\ell + 12A^{(2)}) ch 3(b+\ell) - \\ & - 4A^{(1)} ch(b+\ell)] \cos 3(a-t) + \frac{1}{8sh^3\ell} \{ (sh\ell + 8A^{(1)} + 2) ch 3(b+\ell) + \\ & + [8A_1^{(2)} sh^2\ell - (2A^{(1)} + 1) sh\ell + 2] ch(b+\ell) \} \cos(a-t), \end{aligned}$$

$$\frac{dZ_3}{dt} = \frac{1}{4sh^3\ell} [(A^{(1)} sh\ell + 12A^{(2)}) sh 3(b+\ell) - (sh\ell + 4A^{(1)}) \times \quad (4.13)$$

$$\times sh(b+\ell)] \sin 3(a-t) + \frac{1}{8sh^3\ell} \{ (8A^{(1)} - sh\ell + 2) sh 3(b+\ell) +$$

$$+ [8A_1^{(2)} sh^2\ell - (2A^{(1)} + 3) sh\ell - 2] sh(b+\ell) \} \sin(a-t).$$

Отсюда с учетом периодичности X_3, Z_3 находим

$$\begin{aligned} X_3 = & \frac{1}{12sh^3\ell} [4A^{(1)} ch(b+\ell) - (A^{(1)} sh\ell + 12A^{(2)}) ch 3(b+\ell)] \sin 3(a-t) + \\ & + \frac{1}{8sh^3\ell} \{ [(2A^{(1)} + 1) sh\ell - 8A_1^{(2)} sh^2\ell - 2] ch(b+\ell) - (sh\ell + 8A^{(1)} + \\ & + 2) ch 3(b+\ell) \} \sin(a-t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} Z_3 = & \frac{1}{12sh^3\ell} [(A^{(1)} sh\ell + 12A^{(2)}) sh 3(b+\ell) - (sh\ell + 4A^{(1)}) sh(b+\ell)] \times \\ & \times \cos 3(a-t) + \frac{1}{8sh^3\ell} \{ [8A_1^{(2)} sh^2\ell - (2A^{(1)} + 3) sh\ell - 2] sh(b+\ell) + \\ & + (8A^{(1)} - sh\ell + 2) sh 3(b+\ell) \} \cos(a-t), \end{aligned}$$

$$\eta_3 = 0.$$

Таким образом, с точностью до ε^3 найдены выражения $x(t), z(t)$, определяющие траекторию частицы жидкости.

Из первой формулы (2.2) с учетом того, что $t = \omega_p t^*$, следует

$$\frac{dx^*}{dt^*} = c + \frac{\omega_p}{k} \frac{dx}{dt}. \quad (4.15)$$

Из уравнений (4.2), (4.3) с учетом первого уравнения (4.4) находим

$$\frac{dx}{dt} = -1 + O(\varepsilon). \quad (4.16)$$

Из третьего уравнения (4.3) следует

$$\frac{\omega_p}{k} = c \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \eta_i \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

С учетом (4.16), (4.17) выражение (4.15) примет вид

$$\frac{dx^*}{dt^*} = c + c \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \eta_i \right)^{-1} [-1 + O(\varepsilon)].$$

Окончательно будем иметь

$$\frac{d\mathcal{X}^*}{dt^*} = \varepsilon^2 c_0 \left(\eta_2 - \frac{\eta_2}{2} \right) + \text{периодические функции} \quad (4.18)$$

от времени, имеющие порядок ε и выше.

Таким образом, горизонтальная (вдоль оси $\mathcal{X}^*$) компонента скорости частицы жидкости содержит как постоянные слагаемые порядка ε^2 , так и периодические слагаемые порядка ε и более высокого порядка малости.

Нетрудно показать, что вертикальная составляющая скорости частицы (вдоль оси $\mathcal{Z}^*$) содержит только периодические от времени составляющие.

Отсюда следует, что движение частицы представляет собой суперпозицию равномерного и прямолинейного движения вдоль оси $\mathcal{X}^*$ со скоростью

$$\theta = \varepsilon^2 c_0 \left(\eta_2 - \frac{\eta_2}{2} \right), \quad (4.19)$$

где η_2 , η_2 — определены формулами (3.15), (4.12); и периодических движений вдоль осей $\mathcal{X}^*$ и $\mathcal{Z}^*$.

Величина (4.19) известна [15] как переносная скорость Стокса, обуславливающая разомкнутость траектории частицы жидкости. За счет переносного течения период колебания частицы не совпадает с периодом волны

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = 1 + \varepsilon^2 \eta_2. \quad (4.20)$$

§ 5. Влияние магнитного поля на высоту волны

Вопрос о влиянии магнитного поля на высоту волны рассмотрим в случае бесконечно глубокого слоя жидкости, $\ell \rightarrow \infty$. В этом случае выражение для профиля волны ξ^* (3.19) запишется следующим образом:

$$\xi^* = \frac{\varepsilon}{k} \cos nx + \frac{\varepsilon^2}{k} a_1 \cos 2nx + \frac{\varepsilon^3}{k} (a_2 \cos nx + a_3 \cos 3nx); \quad a_1 = \frac{n(2m_2 + \varepsilon + 1)}{2(1 - 2\varepsilon)}, \quad (5.1)$$

$$a_2 = \frac{n^2}{8(1 - 2\varepsilon)(m_1 + m_2 + \varepsilon + 1)} [4m_2(3m_1 + m_2 + 2\varepsilon + 2) + \varepsilon(8m_1 + 4m_2 + 7\varepsilon + 10) + 5m_1 + m_2 + \frac{5}{2}\varepsilon + 1],$$

$$a_3 = \frac{n^2}{8(1 - 2\varepsilon)(1 - 3\varepsilon)} [8m_2(2m_2 + \varepsilon + 1) + \varepsilon(8m_2 + 3\varepsilon + 6) + 8m_2 + \frac{9}{2}\varepsilon + 3],$$

$$\varepsilon = (n^2 \varepsilon^2 k) / g; \quad m_i = (n \varepsilon^2 k) / g; \quad i = 1, 2.$$

Тогда выражение для высоты (амплитуды) волны $\delta = \xi^*(0) - \xi^*(\pi)$ примет вид

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{k} (\delta_0 + \varepsilon^2 \delta_2); \quad \delta_0 = 1, \quad (5.2)$$

$$\delta_2 = a_2 + a_3 = \left\{ n^2 / [8(1 - 2\varepsilon)(1 - 3\varepsilon)(m_1 + m_2 + \varepsilon + 1)] \right\} \times$$

$$\times [(16m_2^3 + 16m_2^2 m_1 + 20m_2^2 \varepsilon - 20m_2 m_1 \varepsilon - 17m_2 \varepsilon^2 - 21m_1 \varepsilon^2 -$$

$$- 18\varepsilon^3) + (36m_2^2 - 17\varepsilon^2 + 28m_2 m_1 + \frac{73}{2} m_2 \varepsilon + \frac{7}{2} m_1 \varepsilon) +$$

$$+ (28m_2 + 23\varepsilon + 8m_1) + 4].$$

В случае $\varepsilon \ll 1$, $m_i \ll 1$ выражения (5.1), (5.2) совпадают с полученными в работе [7]. Волны в этом случае будут чисто гравитационными. При отсутствии магнитного поля (5.1), (5.2) дают выражения для профиля и высоты капиллярно-гравитационной волны.

Рассмотрим частные случаи.

1. МГД капиллярные волны. Как видно из формул (5.2), влияние магнитного поля и поверхностного натяжения на высоту волны характеризует величина δ_2 . Исследуем это влияние в случае

$$\varepsilon \gg 1; \quad m \gg 1; \quad m \sim \varepsilon. \quad (5.3)$$

Здесь $m = m_1 = m_2$, т.е. $|H_{01}| = |H_{02}|$.

В силу (5.3) влиянием силы тяжести можно пренебречь по сравнению с магнитным полем и капиллярностью. Оставляя в выражении для δ_2 члены третьей степени по ε , m (m^3 , ε^3 , $m^2 \varepsilon$, $m \varepsilon^2$), получаем

$$\delta_2 = \frac{n^2(16\chi^3 - 19\chi - 9)}{24(2\chi + 1)}; \quad \chi = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{v_{A1}^2}{n v_c^2}. \quad (5.4)$$

Отсюда $\delta_2 = 0$ при χ , удовлетворяющих уравнению

$$16\chi^3 - 19\chi - 9 = 0.$$

Дискриминант этого кубического уравнения отрицательный, поэтому оно имеет три действительных корня [18]: два отрицательных и один положительный. Величина $\chi > 0$, следовательно, надо брать только положительный корень $\chi \approx 1,276$. Таким образом, при $\mu \approx 1,276\alpha$ величина $\delta_2 = 0$.

Из формул (5.2), (5.4) следует, что высота МГД капиллярной волны увеличивается при $\mu > 1,276\alpha$ и уменьшается при $\mu < 1,276\alpha$. Следовательно, поверхностное натяжение уменьшает амплитуду волны, а магнитное поле увеличивает при фиксированной длине волны. Увеличение амплитуды с увеличением поля связано со свойством вмерзности магнитных силовых линий. В самом деле, при фиксированной длине волны увеличение длины элемента силовой линии на поверхности жидкости с ростом магнитного поля должно сопровождаться ростом высоты волны.

2. МГД гравитационные волны. Если $\alpha \ll 1$; $\mu_1 \sim \mu_2 \sim 1$, то в формулах (5.1), (5.2) можно пренебречь членами, зависящими от капиллярности. Из (5.2) для δ_2 в этом случае будем иметь

$$\delta_2 = \frac{n^2}{2(\mu_1 + \mu_2 + 1)} (4\mu_2^3 + 4\mu_2^2\mu_1 + 9\mu_2^2 + 7\mu_2\mu_1 + 7\mu_2 + 2\mu_1 + 1). \quad (5.5)$$

Из формулы (5.5) видно, что высота гравитационной волны за счет магнитного поля увеличивается ($\delta_2 > n^2/2$).

3. МГД волны. В случае, когда влиянием силы тяжести и поверхностного натяжения можно пренебречь по сравнению с влиянием магнитного поля, $\mu_i \gg 1$; $\mu_i \gg \alpha$; $i = 1, 2$, выражение для δ_2 примет вид

$$\delta_2 = \frac{n^2}{2(\mu_1 + \mu_2)} (4\mu_2^3 + 4\mu_2^2\mu_1 + 9\mu_2^2 + 7\mu_2\mu_1 + 7\mu_2 + 2\mu_1). \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что δ_2 положительна. Высота волны растет с увеличением магнитного поля.

Отметим, что в случае МГД "мелкой воды" также наблюдается рост амплитуды волны при увеличении горизонтального магнитного поля [17].

ГЛАВА 3

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СЛОЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

§ 1. Краевая задача о поверхностных МГД волнах на слое движущейся жидкости

Уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.6), (1.7) второй главы удовлетворяют величины

$$\vec{v}^* = \vec{u}^* = u^*(z^*) \vec{e}_x; \quad \vec{H}^* = \vec{H}_{01}^* = H_{01}^*(z^*) \vec{e}_x, \quad (1.1)$$

$$\vec{H}_i^* = \vec{H}_{0i}^* = H_{0i}^* \vec{e}_x; \quad i = 2, 3,$$

$$p^* = P^* = \frac{1}{8\pi} (H_{02}^{*2} - H_{01}^{*2}) - \rho g z^*; \quad \xi^* = 0,$$

где $u^*(z^*)$, $H_{0i}^*(z^*)$ — произвольные функции, $H_{0i}^* = \text{const}$, $\vec{e}_x$ — единичный вектор оси x^* .

Рассмотрим слой текущей параллельно оси x^* со скоростью $\vec{u}^*$ жидкости в магнитном поле, которое в областях 1, 2, 3 задано соответственно векторами напряженности $\vec{H}_{01}^*$, $\vec{H}_{02}^*$, $\vec{H}_{03}^*$.

Пусть по свободной поверхности жидкости в положительном направлении оси x^* распространяется установившаяся волна с фазовой скоростью c^* . Для установившихся прогрессивных волн принимается, что все величины зависят от x^* и t^* через комбинацию $x^* - c^*t^*$.

Представим искомые величины в виде

$$\vec{v}^* = \vec{u}^* + \vec{v}_w^*; \quad p^* = P^* + p_w^*, \quad (1.2)$$

$$\vec{H}_i^* = \vec{H}_{0i}^* + \vec{H}_{wi}^*; \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $\vec{v}_w^*$ — скорость волнового движения жидкости, p_w^* и $\vec{H}_{wi}^*$ — соответственно возмущения давления и магнитного поля, вызванные волновым движением жидкости.

Задачу по определению $\vec{v}_w^*$, ξ^* , $\vec{H}_{wi}^*$, ρ_w^* , c^* будем решать методом малого параметра. В качестве малого параметра, как и во второй главе, примем величину

$$\varepsilon = k \xi_{\max}^*, \quad (I.3)$$

где $\xi_{\max}^*$ - максимальное значение смещения свободной поверхности, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны. Волновое число k (длину волны λ) считаем заданным.

Введем безразмерные независимые переменные и величины

$$x = k(x^* - c^*t^*); \quad z = k z^*; \quad \xi = \frac{k \xi^*}{\varepsilon},$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_w^*}{\varepsilon c_0^*}; \quad p = \frac{\rho_w^*}{\varepsilon \rho c_0^{*2}}; \quad c = \frac{c^*}{c_0^*}, \quad (I.4)$$

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{H}_{w1}^*}{\varepsilon |H_{01}^*(0)|}; \quad \vec{h}_i = \frac{\vec{H}_{wi}^*}{\varepsilon |H_{0i}^*|}; \quad i=2,3,$$

$$u = \frac{u^*}{c_0^*}; \quad \mathcal{H} = \frac{H_{01}^*}{|H_{01}^*(0)|},$$

где c_0^* - значение фазовой скорости c^* , соответствующее линейной задаче. Предполагается, что $H_{01}^*(0) = 0$ только в том случае, если $H_{01}^*(z) = 0$.

С учетом (I.4) уравнения в области I в безразмерном виде запишутся следующим образом:

$$(u-c) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_z \frac{du}{dz} \vec{e}_x + \varepsilon (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p - \alpha_1^2 \nabla (\mathcal{H} h_{1x} + \frac{\varepsilon}{2} h_1^2) + \alpha_1^2 \mathcal{H} \frac{\partial \vec{h}_1}{\partial x} + \alpha_1^2 h_{1z} \frac{d\mathcal{H}}{dz} \vec{e}_x + \varepsilon \alpha_1^2 (\vec{h}_1 \nabla) \vec{h}_1, \\ -c \frac{\partial \vec{h}_1}{\partial x} = \text{rot} (\vec{v} \times \mathcal{H} \vec{e}_x) + \text{rot} (u \vec{e}_x \times \vec{h}_1) + \quad (I.5)$$

$$+ \varepsilon \text{rot} (\vec{v} \times \vec{h}_1); \quad \text{div} \vec{v} = 0; \quad \text{div} \vec{h}_1 = 0,$$

$$\alpha_1^2 = \frac{H_{01}^{*2}(0)}{4\pi \rho c_0^{*2}}.$$

Здесь $\vec{e}_x$ - единичный вектор оси x .

Безразмерные уравнения для магнитного поля в областях 2 и 3 примут вид

$$\Delta \Psi_i = 0; \quad \vec{h}_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \vec{e}_z; \quad i=2,3. \quad (I.6)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $\vec{e}_z$ - единичный вектор оси z .

Безразмерные граничные условия запишутся в виде

1) на свободной поверхности при $z = \xi(x)$:

$$v_z = (u-c) \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon v_x \frac{d\xi}{dx}, \quad (I.7)$$

$$h_{1z} = \mathcal{H} \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon h_{1x} \frac{d\xi}{dx},$$

$$h_{2z} = \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon h_{2x} \frac{d\xi}{dx},$$

$$\alpha_2^2 h_{2x} + \frac{\varepsilon \alpha_2^2}{2} h_2^2 - \alpha_1^2 \mathcal{H} h_{1x} - \frac{\varepsilon \alpha_1^2}{2} h_1^2 + \gamma^2 \xi - p = \varepsilon^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \right]; \quad \alpha_2^2 = \frac{H_{02}^{*2}}{4\pi \rho c_0^{*2}}; \quad \gamma^2 = \frac{g}{k c_0^{*2}}; \quad \varepsilon^2 = \frac{d k}{\rho c_0^{*2}},$$

2) на дне при $z = -\ell$ ($\ell = k \ell^*$):

$$v_z = 0; \quad h_{1z} = h_{3z} = 0, \quad (I.8)$$

3) на бесконечности:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \vec{h}_2 = 0; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \vec{h}_3 = 0.$$

Будем предполагать также, что волна периодическая и ось x направлена вдоль среднего уровня свободной поверхности:

$$\xi(x+2\pi) = \xi(x); \quad \int_0^{2\pi} \xi(x) dx = 0. \quad (I.9)$$

Таким образом, для определения $\vec{v}$, ξ , p , $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$ имеем нелинейную краевую задачу (I.5)-(I.9).

Отметим, что второе уравнение (I.5), учитывая четвертое уравнение (I.5) и граничное условие на дне (I.8), можно свести к равенству

$$(u-c) h_{1z} - \mathcal{H} v_z + \varepsilon (v_x h_{1z} - v_z h_{1x}) = 0. \quad (I.10)$$

Далее вместо второго уравнения (I.5) будем рассматривать уравнение (I.10).

Отметим также, что из уравнений (I.6) в области 3 и граничных условий на дне и бесконечности (I.8) следует

$$h_{3x} = h_{3z} = 0. \quad (I.11)$$

Решение уравнений (I.5), (I.6) с граничными условиями (I.7), (I.8) и ограничениями (I.9) будем искать в виде рядов по малому параметру

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \vec{v}_i; \quad \xi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi_i; \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i, \quad (I.12)$$

$$\vec{h}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \vec{h}_{1i}; \quad \vec{h}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \vec{h}_{2i}; \quad \psi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{2i},$$

$$C = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i.$$

Для преобразования граничных условий (I.7) величины, входящие в эти условия, разложим в ряды Тейлора в окрестности невозмущенной поверхности $z = 0$. Например, $v_z(x, z) = v_z(x, \varepsilon \xi)$, $\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(\varepsilon \xi)$ следует записать в виде

$$v_z(x, \varepsilon \xi) = v_z(x, 0) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} \varepsilon \xi + \dots, \quad (I.13)$$

$$\mathcal{H}(\varepsilon \xi) = \pm 1 + \frac{d\mathcal{H}}{dz} \Big|_{z=0} \varepsilon \xi + \dots$$

В разложении $\mathcal{H}(\varepsilon \xi)$ знак при единице зависит от знака функции $H_{01}^*(z)$ при $z = 0$, т.е. от направления вектора $\vec{H}_{01}^*$ на поверхности $z = 0$. Далее для определенности будем считать, что $H_{01}^*(0) \geq 0$, это соответствует знаку "плюс" при единице.

Выпишем преобразованные граничные условия с точностью до членов порядка ε^2 .

При $z = 0$:

$$v_z + \varepsilon \xi \frac{\partial v_z}{\partial z} = (u - c) \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon \left(\xi \frac{du}{dz} + v_x \right) \frac{d\xi}{dx},$$

$$h_{1z} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{1z}}{\partial z} = \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon \left(\xi \frac{dh_{1z}}{dz} + h_{1x} \right) \frac{d\xi}{dx}, \quad (I.14)$$

$$h_{2z} + \varepsilon \xi \frac{\partial h_{2z}}{\partial z} = \frac{d\xi}{dx} + \varepsilon h_{2x} \frac{d\xi}{dx},$$

$$a_2^2 h_{2x} - a_1^2 h_{1x} + v^2 \xi - p - \partial^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\varepsilon \left\{ a_2^2 \frac{h_2^2}{2} - a_1^2 \frac{h_1^2}{2} + \right. \\ \left. + \xi \left[a_2^2 \frac{\partial h_{2x}}{\partial z} - a_1^2 \left(\frac{\partial h_{1x}}{\partial z} + h_{1x} \frac{d\mathcal{H}}{dz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\}.$$

Определим искомые величины с точностью до членов порядка ε^2 . Для этого подставим ряды (I.12) в уравнения (I.5), (I.6), граничные условия (I.8), (I.14) и ограничения (I.9). Приравнявая коэффициенты при ε^0 и ε^1 , получим уравнения первого и второго приближений. Заметим, что линейные соотношения останутся без изменений во всех приближениях:

уравнения в области I и 2:

$$\operatorname{div} \vec{v}_i = 0; \quad \operatorname{div} \vec{h}_{1i} = 0, \quad (I.15)$$

$$\Delta \psi_{2i} = 0; \quad \vec{h}_{2i} = \frac{\partial \psi_{2i}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \psi_{2i}}{\partial z} \vec{e}_z; \quad i = 0, 1, \dots,$$

граничные условия (I.8) и ограничения (I.9):

$$v_{zi} = 0; \quad h_{1zi} = 0; \quad z = -l; \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \vec{h}_{2i} = 0, \quad (I.16)$$

$$\xi_i(x + 2\pi) = \xi_i(x); \quad \int_0^{2\pi} \xi_i(x) dx = 0; \quad i = 0, 1, \dots$$

Нелинейные равенства (I.5), (I.14) в первом (линейном) приближении примут вид

уравнения в области I:

$$w \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{z0} \frac{dw}{dz} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + a_1^2 h_{1z0} \frac{d\mathcal{H}}{dz}, \quad (I.17)$$

$$w \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} = -\frac{\partial p_0}{\partial z} - a_1^2 \mathcal{H} \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) - a_1^2 h_{1x0} \frac{d\mathcal{H}}{dz},$$

$$w h_{1z0} = \mathcal{H} v_{z0}; \quad w(z) = u(z) - 1,$$

граничные условия при $z = 0$:

$$v_{z0} = w \frac{d\xi_0}{dx}; \quad h_{1z0} = \frac{d\xi_0}{dx}; \quad h_{2z0} = \frac{d\xi_0}{dx}, \quad (I.18)$$

$$\alpha_2^2 h_{2x0} - \alpha_1^2 h_{1x0} + \gamma^2 \xi_0 - \rho_0 - \delta^2 \frac{d^2 \xi_0}{dx^2} = 0.$$

Для второго приближения будем иметь уравнения в области I:

$$\begin{aligned} w \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + v_{z1} \frac{dw}{dz} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} - (v_{x0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{z0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial z}) + \\ &+ \alpha_1^2 \left[h_{1z1} \frac{d\mathcal{H}}{dz} + h_{1z0} \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) \right], \\ w \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \gamma_1 \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} - \alpha_1^2 \left[h_{1x1} \frac{d\mathcal{H}}{dz} + \mathcal{H} \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. h_{1x0} \left(\frac{\partial h_{1x0}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} \right) \right] - (v_{x0} \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} + v_{z0} \frac{\partial v_{z0}}{\partial z}), \\ w h_{1z1} &= \mathcal{H} v_{z1} + \gamma_1 h_{1z0} + v_{z0} h_{1x0} - v_{x0} h_{1z0}, \end{aligned} \quad (I.I9)$$

граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} v_{z1} &= w \frac{d\xi_1}{dx} - \gamma_1 \frac{d\xi_0}{dx} - \xi_0 \frac{\partial v_{z0}}{\partial z} + (\xi_0 \frac{dw}{dz} + v_{x0}) \frac{d\xi_0}{dx}, \\ h_{1z1} &= \frac{d\xi_1}{dx} - \xi_0 \frac{\partial h_{1z0}}{\partial z} + (\xi_0 \frac{d\mathcal{H}}{dz} + h_{1x0}) \frac{d\xi_0}{dx}, \\ h_{2z1} &= \frac{d\xi_1}{dx} - \xi_0 \frac{\partial h_{2z0}}{\partial z} + h_{2x0} \frac{d\xi_0}{dx}, \\ \alpha_2^2 h_{2x1} - \alpha_1^2 h_{1x1} + \gamma^2 \xi_1 - \rho_1 - \delta^2 \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} &= -\alpha_2^2 \left[\xi_0 \frac{\partial h_{2x0}}{\partial z} + \frac{1}{2} (h_{2x0}^2 + \right. \\ &+ \left. h_{2z0}^2) \right] + \alpha_1^2 \left[(h_{1x0} \frac{d\mathcal{H}}{dz} + \frac{\partial h_{1x0}}{\partial z}) \xi_0 + \frac{1}{2} (h_{1x0}^2 + h_{1z0}^2) \right] + \xi_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \end{aligned} \quad (I.20)$$

§ 2. Линейное приближение

Рассмотрим линейную задачу (I.I5)-(I.I8). Сначала определим $\tilde{h}_{z0}$ и ξ_0 . Из уравнений (I.I5) и граничных условий на бесконечности (I.I6) следует

$$h_{2x0} = -\beta_n n e^{-nz} \sin nx,$$

$$h_{2x0} = \beta_n n e^{-nz} \cos nx, \quad (2.1)$$

$$\beta_n = \text{const}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из третьего граничного условия (I.I8) и ограничения (I.I6) получаем

$$\xi_0 = \beta_n \cos nx. \quad (2.2)$$

Для того чтобы в последующем приближении уничтожить вековые члены, собственные функции линейной задачи должны быть нормированы [2.С.81]. Приняв условие нормировки, заключающееся в равенстве единице амплитуды функции $\xi(x)$, из уравнения (2.2) получаем

$$\beta_n = 1; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Теперь определим решение задачи в области I. Введем новую функцию

$$\tilde{h}_z = \frac{h_{1z0}}{\mathcal{H}}. \quad (2.4)$$

Тогда из уравнений (I.I5), (I.I7) будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 + \alpha_1^2 \mathcal{H} h_{1x0}), \\ f(z) \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 + \alpha_1^2 \mathcal{H} h_{1x0}), \\ f(z) &= \alpha_1^2 \mathcal{H}^2 - w^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь предполагается, что $w \neq 0$ и $f \neq 0$. Случаи $w = 0$ и $f = 0$ рассмотрены ниже.

Из системы (2.5) для определения функции $\tilde{h}_z$ получаем обобщенное уравнение Чаплыгина

$$\Delta \tilde{h}_z + a(z) \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial z} = 0; \quad a(z) = \frac{d}{dz} \ln f(z). \quad (2.6)$$

Точное решение этого уравнения можно получить методом Бергмана [19]. Функцию $\tilde{h}_z$ ищем в виде

$$\tilde{h}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(x, z) G_m(z), \quad (2.7)$$

где Φ_m — гармонические функции. Выражение (2.7) удовлетворяет уравнению (2.6) при произвольной гармонической функции $\Phi_0(x, z)$, если Φ_m, G_m подчинены условиям

$$\begin{aligned} 2 \frac{dG_0}{dz} + Q G_0 &= 0; \quad 2 \frac{dG_m}{dz} + Q G_m = \\ &= - \left(\frac{d^2 G_{m-1}}{dz^2} + Q \frac{dG_{m-1}}{dz} \right); \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} = \Phi_{m-1}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

При определении G_m и Φ_m достаточно ограничиться частными решениями, не вводя постоянных интегрирования [19]. Тогда из уравнений (2.8) для G_m будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} G_0 &= f^{-1/2}, \\ G_m &= -\frac{1}{2} \frac{dG_{m-1}}{dz} - \frac{1}{4} f^{-1/2} \int f^{-1/2} \frac{df}{dz} \frac{dG_{m-1}}{dz} dz. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Функция $\Phi_0(x, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \Phi_0 = 0$. Принимая во внимание второе и третье граничные условия (I.18), а также первое выражение (2.1), решение уравнения Лапласа для $\Phi_0(x, z)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (C_n e^{nz} + D_n e^{-nz}) \sin nx, \\ C_n &= \text{const}; \quad D_n = \text{const}; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда из уравнения (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \frac{1}{n^m} (C_n e^{nz} + (-1)^m D_n e^{-nz}) \sin nx, \\ m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, решение (2.7) примет вид

$$\tilde{h}_z = (C_n M_n(z) e^{nz} + D_n N_n(z) e^{-nz}) \sin nx, \quad (2.12)$$

$$M_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m}{n^m}; \quad N_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{G_m}{n^m}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Вопрос о регулярной сходимости ряда (2.7) для конкретно заданных функций $Q(z)$ рассматривался в ряде работ, например, [20]. Для произвольных $Q(z)$ этот вопрос остается открытым. В нашем случае регулярная сходимость ряда (2.7) равносильна регулярной сходимости рядов M_n и N_n . Положим функции $U(z)$ и $H(z)$ такими, чтобы ряды M_n и N_n регулярно сходились в области $z \in [-\ell; 0]$.

Из уравнения (2.12) в силу формулы (2.4) следует

$$h_{1z0} = H(C_n M_n(z) e^{nz} + D_n N_n(z) e^{-nz}) \sin nx; \quad n = 1, 2, \dots$$

Удовлетворив граничному условию на дне (I.16) и второму граничному условию (I.18), получим

$$h_{1z0} = -\frac{n}{F_n(0)} H(z) F_n(z) \sin nx, \quad (2.13)$$

$$F_n(z) = \frac{M_n(z)}{M_n(-\ell)} e^{nz} - \frac{N_n(z)}{N_n(-\ell)} e^{-nz}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что определенная формулой (2.13) функция $F_n(z)$ является решением самосопряженного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz} \left(f \frac{dF_n}{dz} \right) - n^2 f F_n = 0. \quad (2.14)$$

Остальные искомые величины первого приближения определяются из уравнений (I.15), (I.17). Для $v_{z0}, v_{x0}, h_{1x0}, p_0$ получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} v_{z0} &= -\frac{n}{F_n(0)} w F_n \sin nx, \\ v_{x0} &= -\frac{1}{F_n(0)} \frac{d}{dz} (w F_n) \cos nx, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$h_{1x0} = -\frac{1}{F_n(0)} \frac{d}{dz} (H F_n) \cos nx,$$

$$p_0 = \frac{1}{F_n(0)} \left(a_1^2 F_n H \frac{dH}{dz} + w^2 \frac{dF_n}{dz} \right) \cos nx; \quad n = 1, 2, \dots$$

При определении v_{x0}, h_{1x0} произвольные функции от z , возникающие при интегрировании первого и второго уравнения (I.15) по

x , полагались равными нулю, так как $\tilde{v}$ и $\tilde{h}_1$ отражают соответственно скорость чисто волнового движения жидкости и возмущение магнитного поля, вызванное этим движением. При определении ρ_0 учтено, что функция $\mathcal{F}_n(z)$ является решением уравнения (2.14).

Подставляя найденные выражения в последнее граничное условие (1.18), получаем уравнение для определения C_0^* :

$$n a_2^2 + v^2 + n^2 \varepsilon^2 + f(0) \frac{d}{dz} \ln \mathcal{F}_n \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.16)$$

В силу сходимости рядов M_n и N_n из данного уравнения всегда можно с любой точностью найти величину C_0^* .

В заключение этого параграфа рассмотрим два случая, опущенных при решении линейной задачи: 1) $u^* - C_0^* = 0$; 2) $H_{01}^{*2}/4\pi\rho = (u^* - C_0^*)^2$.

В первом случае система уравнений в области I (1.15), (1.17) для линий $z = \text{const}$, на которых $u^*(z) = C_0^*$, примет вид

$$a_1^2 h_{1z0} \frac{d\mathcal{H}}{dz} = \frac{\partial \rho_0}{\partial x},$$

$$a_1^2 \mathcal{H} \frac{\partial h_{1z0}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 + a_1^2 \mathcal{H} h_{1x0}),$$

$$v_{z0} = v_{x0} = 0.$$

Причем, как будет видно ниже, $\tilde{v} = 0$ во всех последующих приближениях. В данном случае профиль волны переносится течением, не вызывая волнового движения жидкости. Задача в области I сводится к определению волновых возмущений давления и магнитного поля. Распространение поверхностной волны в этом случае аналогично распространению внутренней энтропийной волны [6]. Отметим, что такой ситуации не возникает, если скорость распространения волны и течения противоположно направлены.

Во втором случае из уравнений (1.15), (1.17) получаем

$$\rho_0 + a_1^2 \mathcal{H} h_{1x0} = \text{const}; \quad a_1 h_{1z0} = v_{z0}.$$

В этом случае поверхностная волна распространяется подобно внутренней альфвеновской волне [6].

§ 3. Нелинейные поверхностные МГД волны

Переходим к определению второго приближения. Используя решение задачи в первом приближении и учитывая (2.14), уравнения (1.19),

(1.20) запишем в виде

$$\begin{aligned} w \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} + v_{z1} \frac{dw}{dz} = & - \frac{\partial p_1}{\partial x} + a_1^2 h_{1z1} \frac{d\mathcal{H}}{dz} + \gamma_1 \frac{n}{\mathcal{F}_n(0)} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) \sin nx + \\ & + \frac{n}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left\{ \left(\frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) \right)^2 - w \mathcal{F}_n \frac{d^2}{dz^2} (w \mathcal{F}_n) + a_1^2 \left[\mathcal{H} \mathcal{F}_n \frac{d^2}{dz^2} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) - \right. \right. \\ & \left. \left. - n^2 (\mathcal{H} \mathcal{F}_n)^2 \right] \right\} \sin 2nx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} w \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} = & - \frac{\partial p_1}{\partial z} - a_1^2 \left[\mathcal{H} \left(\frac{\partial h_{1x1}}{\partial z} - \frac{\partial h_{1z1}}{\partial x} \right) + h_{1x1} \frac{d\mathcal{H}}{dz} \right] - \\ & - \gamma_1 \frac{n}{\mathcal{F}_n(0)} w \mathcal{F}_n \cos nx - \frac{a_1^2}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left(\frac{d^2}{dz^2} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) - n^2 \mathcal{H} \mathcal{F}_n \right) \times \\ & \times \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \cos 2nx - \frac{a_1^2}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \frac{d^2}{dz^2} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) - \\ & - \frac{n^2}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left[2 w \mathcal{F}_n \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) - a_1^2 \mathcal{H} \mathcal{F}_n \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w h_{1z1} = & \mathcal{H} v_{z1} + \gamma_1 \frac{n}{\mathcal{F}_n(0)} \mathcal{F}_n \sin nx + \frac{n \mathcal{F}_n}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left[w \times \right. \\ & \times \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) - \mathcal{H} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) \left. \right], \end{aligned}$$

граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} v_{z1} = & \frac{d\mathcal{F}_1}{dx} w + \gamma_1 n \sin nx + \frac{n w}{2} \frac{d}{dz} \ln(w \mathcal{F}_n^2) \sin 2nx, \\ h_{1z1} = & \frac{d\mathcal{F}_1}{dx} + \frac{n}{2} \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \sin 2nx, \\ h_{2z1} = & \frac{d\mathcal{F}_1}{dx} - n^2 \sin 2nx, \\ a_2^2 h_{2x1} - a_1^2 h_{1x1} + v^2 \mathcal{F}_1 - p_1 - \varepsilon^2 \frac{d^2 \mathcal{F}_1}{dx^2} = & \frac{1}{2} [n^2 (a_2^2 + w^2 - \\ & - \frac{3}{2} a_1^2) + \frac{a_1^2}{2} \left(\frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \right)^2] \cos 2nx + \frac{1}{2} [n^2 (w^2 - \\ & - \frac{a_1^2}{2} \left(\frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \right)^2]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины h_{1z1} , h_{2z1} , h_{2x1} будем искать в виде рядов по нормированным собственным функциям линейной задачи (2.1), (2.13):

$$\begin{aligned} h_{1z1} &= -\mathcal{H} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{s}{\mathcal{F}_s(0)} \mathcal{F}_s(z) \sin sx, \\ h_{2z1} &= -\sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{-sz} \sin sx, \\ h_{2x1} &= \sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{-sz} \cos sx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тогда из второго и третьего граничного условия (3.2) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} s(B_s - A_s) \sin sx = \frac{n}{2} \left(2n + \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right) \sin 2nx.$$

Отсюда, используя свойства рядов Фурье, находим

$$\begin{aligned} B_s &= A_s; \quad s \neq 2n, \\ B_{2n} &= A_{2n} + \frac{1}{4} \left(2n + \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из уравнений (1.15), (3.1) и граничных условий (1.16), (3.2) находим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos sx + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \cos 2nx, \\ v_{z1} &= -w \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{s}{\mathcal{F}_s(0)} \mathcal{F}_s \sin sx + \gamma_1 \frac{n}{\mathcal{F}_n(0)} \mathcal{F}_n \sin nx + \\ &+ \frac{n}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} w \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \sin 2nx, \\ v_{x1} &= -\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{1}{\mathcal{F}_s(0)} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) \cos sx + \gamma_1 \frac{1}{\mathcal{F}_n(0)} \frac{d \mathcal{F}_n}{dz} \cos nx + \\ &+ \frac{1}{4 \mathcal{F}_n^2(0)} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}}) \cos 2nx, \\ h_{1x1} &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{1}{\mathcal{F}_s(0)} \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_s) \cos sx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При определении v_{x1} , h_{1x1} так же, как и в линейной задаче, учтено, что $\vec{v}$ — скорость чисто волнового движения, $\vec{h}$ — магнитное поле, возникающее при этом движении.

Подставляя в продифференцированное по x последнее граничное условие (3.2) вместо производных от h_{2x1} , h_{1x1} , ξ_1 их выражения из (3.3), (3.5), а вместо $\partial \rho_1 / \partial x$ ее выражение из первого уравнения (3.1), получим при $s \neq 2n$

$$\begin{aligned} & - \sum_{s=1}^{\infty} s A_s (\alpha_2^2 s + \nu^2 + \delta^2 s^2 + \mathcal{F} \frac{d}{dz} \ln \mathcal{F}_s) \sin sx = \frac{n}{2} \{ n^2 (3\mathcal{F} - \\ & - 2\alpha_2^2) + \alpha_1^2 \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - w \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{\mathcal{F}_n^2} [(\frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n))^2 - \\ & - (\alpha_1 \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n))^2 + w^2 \frac{d}{dz} (\mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}})] + (\nu^2 + \\ & + 4n^2 \delta^2) \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \} \sin 2nx + \gamma_1 \frac{2n}{\mathcal{F}_n} w \sin nx; \quad z=0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} A_s &= 0; \quad s \neq n, 2n, \\ \gamma_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу условия ортогональности решений первого и второго приближений, коэффициент A_n положим равным нулю.

При $s = 2n$ будем иметь

$$\begin{aligned} & -2n A_{2n} (2n\alpha_2^2 + \nu^2 + 4n^2 \delta^2 + \mathcal{F} \frac{d}{dz} \ln \mathcal{F}_{2n}) \sin 2nx = \\ & = \frac{n}{2} \{ n^2 (3\mathcal{F} + 2\alpha_2^2) + (\nu^2 + 2n\alpha_2^2 + 4n^2 \delta^2) \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) + \\ & + \alpha_1^2 \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - w \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{\mathcal{F}_n^2} [(\frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n))^2 - (\alpha_1 \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n))^2 + \\ & + w^2 \frac{d}{dz} (\mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}})] \} \sin 2nx; \quad z=0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_{2n} = -\frac{K}{4L}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} K &= n^2 (3\mathcal{F} + 2\alpha_2^2) + (\nu^2 + 2n\alpha_2^2 + 4n^2 \delta^2) \frac{d}{dz} \ln(\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) + \\ & + \alpha_1^2 \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - w \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{\mathcal{F}_n^2} [(\frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n))^2 - (\alpha_1 \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n))^2 + \end{aligned}$$

$$+ w^2 \frac{d}{dz} \left(\mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \right) \Big],$$

$$L = 2n\alpha_2^2 + v^2 4n^2 \mathcal{G}^2 + \mathcal{F} \frac{d}{dz} \ln \mathcal{F}_{2n}; \quad z=0.$$

Окончательно во втором приближении получаем

$$\xi_1 = \left(A_{2n} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right) \cos 2nx,$$

$$h_{1z1} = - \frac{2n A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \mathcal{H} \mathcal{F}_{2n} \sin 2nx,$$

$$h_{1x1} = - \frac{A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_{2n}) \cos 2nx, \quad (3.8)$$

$$v_{z1} = -n w \left(\frac{2 A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \mathcal{F}_{2n} - \frac{1}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \right) \sin 2nx,$$

$$v_{x1} = - \left[\frac{A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_{2n}) - \frac{1}{4 \mathcal{F}_n^2(0)} \frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}}) \right] \cos 2nx,$$

$$h_{2z1} = -2n \left[A_{2n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right] e^{-2nz} \sin 2nx,$$

$$h_{2x1} = 2n \left[A_{2n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right] e^{-2nz} \cos 2nx,$$

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \left\{ \frac{A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \left(a_1^2 \mathcal{F}_{2n} \mathcal{H} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} + w^2 \frac{d \mathcal{F}_{2n}}{dz} \right) - \frac{1}{4 \mathcal{F}_n^2(0)} \left[w^2 \frac{d}{dz} \left(\mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{d}{dz} (w \mathcal{F}_n) \right)^2 + \mathcal{F}_n^2 \left(a_1^2 \mathcal{H} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - w \frac{d^2 w}{dz^2} - n^2 w^2 \right) \right] \right\} \cos 2nx - \\ & - \frac{1}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left\{ n^2 (w \mathcal{F}_n)^2 + \frac{a_1^2}{2} \left[\left(\frac{d}{dz} (\mathcal{H} \mathcal{F}_n) \right)^2 - n^2 (\mathcal{H} \mathcal{F}_n)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Приведем окончательно решение задачи с точностью второго приближения в размерном виде:

$$\xi^* = \frac{\varepsilon}{k} \cos nx + \frac{\varepsilon^2}{k} \left(A_{2n} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right) \cos 2nx,$$

$$\begin{aligned} v_z^* = & -n(u^* - c_0^*) \left[\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_n(0)} \mathcal{F}_n \sin nx + \varepsilon^2 \left(\frac{2 A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \mathcal{F}_{2n} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \right) \sin 2nx \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$v_x^* = u^* - \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_n(0)} \frac{d}{dz} [(u^* - c_0^*) \mathcal{F}_n] \cos nx - \varepsilon^2 \left\{ \frac{A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \frac{d}{dz} [(u^* - c_0^*) \mathcal{F}_{2n}] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4 \mathcal{F}_n^2(0)} \frac{d}{dz} [(u^* - c_0^*) \mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}}] \right\} \cos 2nx,$$

$$\rho^* = \frac{1}{8 \mathcal{H}} (H_{02}^* - H_{01}^*) - \rho g \frac{z}{k} + \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_n(0)} \left[\mathcal{F}_n \frac{H_{01}^*}{4 \mathcal{H}} \frac{d H_{01}^*}{dz} + \rho (u^* - c_0^*)^2 \right.$$

$$\left. \times \frac{d \mathcal{F}_n}{dz} \right] \cos nx + \varepsilon^2 \left\{ \frac{A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \left[\mathcal{F}_{2n} \frac{H_{01}^*}{4 \mathcal{H}} \frac{d H_{01}^*}{dz} + \rho (u^* - c_0^*)^2 \frac{d \mathcal{F}_{2n}}{dz} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4 \mathcal{F}_n^2(0)} \left[\rho (u^* - c_0^*)^2 \frac{d}{dz} \left(\mathcal{F}_n^2 \frac{d}{dz} \ln \frac{w}{\mathcal{H}} \right) + \rho \left(\frac{d}{dz} ((u^* - c_0^*) \mathcal{F}_n) \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \mathcal{F}_n^2 \left(\frac{H_{01}^*}{4 \mathcal{H}} \frac{d^2 H_{01}^*}{dz^2} + \rho (u^* - c_0^*) \frac{d^2 u^*}{dz^2} - n^2 \rho (u^* - c_0^*)^2 \right) \right\} \cos 2nx -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{2 \mathcal{F}_n^2(0)} \left\{ n^2 \rho (u^* - c_0^*)^2 \mathcal{F}_n^2 + \frac{1}{8 \mathcal{H}} \left[\left(\frac{d}{dz} (H_{01}^* \mathcal{F}_n) \right)^2 - n^2 (H_{01}^* \mathcal{F}_n)^2 \right] \right\},$$

$$H_{1z}^* = - \frac{\varepsilon n}{\mathcal{F}_n(0)} H_{01}^* \mathcal{F}_n \sin nx - \frac{2 \varepsilon^2 n A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} H_{01}^* \mathcal{F}_{2n} \sin 2nx,$$

$$H_{1x}^* = H_{01}^* - \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_n(0)} \frac{d}{dz} (H_{01}^* \mathcal{F}_n) \cos nx - \frac{\varepsilon^2 A_{2n}}{\mathcal{F}_{2n}(0)} \frac{d}{dz} (H_{01}^* \mathcal{F}_{2n}) \cos 2nx,$$

$$H_{2z}^* = -\varepsilon n |H_{02}^*| \left\{ e^{-nz} \sin nx + 2 \varepsilon \left[A_{2n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right] \times \right.$$

$$\left. \times e^{-2nz} \sin 2nx \right\},$$

$$H_{2x}^* = H_{02}^* + \varepsilon n |H_{02}^*| \left\{ e^{-nz} \cos nx + 2 \varepsilon \left[A_{2n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \ln (\mathcal{H} \mathcal{F}_n^2) \Big|_{z=0} \right] \times \right.$$

$$\left. \times e^{-2nz} \cos 2nx \right\},$$

$$H_{3x}^* = H_{03}^*; \quad H_{3z}^* = 0; \quad c^* = c_0^*.$$

Нетрудно проверить, что при $u^* = 0$, $H_{01}^* = \text{const}$ выражения (3.9) совпадают с соответствующими формулами второй главы.

§ 4. Нахождение траектории частицы жидкости

Определим траекторию частицы жидкости. Координаты $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = v_x^*; \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v_z^*$$

или в силу (1.2)

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^* + v_{wx}^*; \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v_{wz}^* \quad (4.1)$$

Введем безразмерное время $t = \omega_p t^*$, где ω_p — частота колебаний частицы жидкости. Переходя к безразмерным координатам и величинам (1.4), вместо (4.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{k c_0^*}{\omega_p} (u - c + \varepsilon v_x), \\ \frac{dz}{dt} &= \varepsilon \frac{k c_0^*}{\omega_p} v_z. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение уравнений (4.2) ищем в виде рядов по малому параметру

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i X_i; \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_i, \\ \frac{k c_0^*}{\omega_p} &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \eta_i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Полагая $n = 1$, запишем v_x, v_z в виде

$$v_x = V_1(z) \cos x + V_2(z) \cos 2x,$$

$$v_z = W_1(z) \sin x + W_2(z) \sin 2x,$$

где $V_i(z), W_i(z)$, $i = 1, 2$ определены формулами (2.15), (3.8). В силу (4.3) функции $\varepsilon v_x, \varepsilon v_z, u$ с точностью до членов порядка ε^2 запишутся следующим образом:

$$\varepsilon v_x = \varepsilon V_1(Z_0) \cos X_0 + \varepsilon^2 (Z_1 V_1'(Z_0) \cos X_0 - X_1 V_1(Z_0) \sin X_0 + \quad (4.4)$$

$$+ V_2(Z_0) \cos 2X_0),$$

$$\varepsilon v_z = \varepsilon W_1(Z_0) \sin X_0 + \varepsilon^2 (Z_1 W_1'(Z_0) \sin X_0 + X_1 W_1(Z_0) \cos X_0 +$$

$$+ W_2(Z_0) \sin 2X_0),$$

$$u = u(Z_0) + \varepsilon u'(Z_0) Z_1 + \varepsilon^2 (Z_2 u'(Z_0) + \frac{1}{2} Z_1^2 u''(Z_0)).$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по z .

Подставляя (4.3), (4.4) в уравнения движения (4.2) и приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$, получаем соответственно уравнения нулевого, первого и второго приближений:

$$\frac{dX_0}{dt} = u(Z_0) - 1; \quad \frac{dZ_0}{dt} = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \eta_1 u(Z_0) + Z_1 u'(Z_0) + V_1(Z_0) \cos X_0, \\ \frac{dZ_1}{dt} &= W_1(Z_0) \sin X_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= \theta_w + \eta_1 Z_1 u'(Z_0) + Z_2 u'(Z_0) + \frac{1}{2} Z_1^2 u''(Z_0) + \eta_1 V_1(Z_0) \cos X_0 + \\ &+ Z_1 V_1'(Z_0) \cos X_0 - X_1 V_1(Z_0) \sin X_0 + V_2(Z_0) \cos 2X_0, \end{aligned}$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = \eta_1 W_1(Z_0) \sin X_0 + Z_1 W_1'(Z_0) \sin X_0 + X_1 W_1(Z_0) \times \quad (4.7)$$

$$\times \cos X_0 + W_2(Z_0) \sin 2X_0),$$

$$\theta_w = (u(Z_0) - 1) \eta_2 - \eta_2.$$

Из системы уравнений (4.5) в нулевом приближении имеем

$$X_0 = \alpha + w(Z_0)t; \quad Z_0 = \beta, \quad (4.8)$$

где α, β — лагранжевы координаты частицы.

При определении последующих приближений $X_i, Z_i, i = 1, 2$ использовано условие периодичности этих величин. В силу (4.8) система уравнений (4.6) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= \eta_1 u(\varepsilon) + Z_1 u'(\varepsilon) + V_1(\varepsilon) \cos(\alpha + w(\varepsilon)t), \\ \frac{dZ_1}{dt} &= W_1(\varepsilon) \sin(\alpha + w(\varepsilon)t).\end{aligned}\quad (4.9)$$

Отсюда, учитывая периодичность X_1, Z_1 , получаем

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{1}{w(\varepsilon)} (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} - V_1(\varepsilon)) \sin(\alpha + w(\varepsilon)t), \\ Z_1 &= -\frac{W_1(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} \cos(\alpha + w(\varepsilon)t); \quad \eta_1 = 0.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Уравнения для определения второго приближения (4.7) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dX_2}{dt} &= \theta_w + Z_2 u'(\varepsilon) + \frac{1}{2} \left[\frac{u''(\varepsilon)}{2w^2(\varepsilon)} W_1^2(\varepsilon) - \frac{V_1(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} - \right. \\ &\quad \left. - V_1(\varepsilon)) - \frac{W_1(\varepsilon)V_1'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} + V_2(\varepsilon) \right] \cos 2(\alpha + w(\varepsilon)t) + \frac{1}{2} \left[\frac{u''(\varepsilon)}{2w^2(\varepsilon)} W_1^2(\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_1(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} - V_1(\varepsilon)) - \frac{W_1(\varepsilon)V_1'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} \right], \\ \frac{dZ_2}{dt} &= \left[W_2(\varepsilon) - \frac{W_1(\varepsilon)}{2w(\varepsilon)} (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} - V_1(\varepsilon) + W_1'(\varepsilon)) \right] \sin 2(\alpha + w(\varepsilon)t),\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\theta_w = w(\varepsilon) \eta_2 - \gamma_2.$$

С учетом периодичности X_2, Z_2 находим

$$\begin{aligned}X_2 &= \frac{1}{4w(\varepsilon)} \left\{ \frac{W_1(\varepsilon)}{2w^2(\varepsilon)} \left[W_1(\varepsilon) u''(\varepsilon) + u'(\varepsilon) (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} + W_1'(\varepsilon) - 3V_1(\varepsilon)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{w(\varepsilon)} (V_1^2(\varepsilon) - W_1(\varepsilon)V_1'(\varepsilon) + V_2(\varepsilon) - W_2(\varepsilon)u'(\varepsilon)) \right\} \sin 2(\alpha + w(\varepsilon)t), \\ Z_2 &= \frac{1}{w(\varepsilon)} \left[\frac{W_1(\varepsilon)}{2w(\varepsilon)} (W_1(\varepsilon) \frac{u'(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} + W_1'(\varepsilon) - V_1(\varepsilon)) - W_2(\varepsilon) \right] \cos 2(\alpha + w(\varepsilon)t),\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\theta_w = \frac{1}{2w(\varepsilon)} \left[V_1^2(\varepsilon) + W_1(\varepsilon)V_1'(\varepsilon) - \frac{W_1(\varepsilon)}{w(\varepsilon)} \left(\frac{W_1(\varepsilon)u''(\varepsilon)}{2} + V_1(\varepsilon)u'(\varepsilon) \right) \right].$$

Величина θ_w представляет собой переносную скорость частицы, возникающую за счет волнового движения. Действительно, горизонтальная скорость частицы имеет вид

$$\frac{dx^*}{dt^*} = c^* + \frac{\omega_p}{k} \frac{dx}{dt}.$$

Из первого уравнения (4.5) следует, что в выражении для dx/dt член нулевого порядка равен $u(\varepsilon) - 1$. Поэтому переносная скорость частицы жидкости

$$\theta = c_0^* \left[c + \frac{\omega_p}{kc_0^*} (u(\varepsilon) - 1) \right]. \quad (4.13)$$

Используя разложение функций $c, kc_0^*/\omega_p$ и последнее равенство (4.10), распишем выражение (4.13) с точностью до членов порядка ε^2 .

$$\theta = u^*(\varepsilon) - \varepsilon^2 c_0^* [(u(\varepsilon) - 1)\eta_2 - \gamma_2]$$

или в силу последнего равенства (4.7)

$$\theta = u^*(\varepsilon) - \varepsilon^2 c_0^* \theta_w(\varepsilon). \quad (4.14)$$

Из этой формулы видно, что составляющая θ_w обусловлена волновым движением жидкости. Следовательно, последнее выражение (4.12) определяет стоковую переносную скорость в случае поверхностных МГД волн на течении.

§ 5. Об условиях потенциальности волнового движения жидкости

Как известно, при решении задач о поверхностных волнах в гидродинамике как непроводящих, так и электропроводных жидкостей часто предполагается потенциальность волнового движения жидкости. Предположение потенциальности требует дополнительного обоснования. В нашем случае, анализируя линейную задачу, можно показать, при каких функциях $u^*(z)$ и $H_{01}^*(z)$ волновое движение жидкости и возмущение магнитного поля будут потенциальными.

Сначала покажем, что необходимым и достаточным условием потенциальности волнового движения в линейном приближении является гармоничность функции v_{z0} , т.е. $\Delta v_{z0} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \vec{v}_0 = 0$.

В случае плоского волнового движения

$$\text{rot } \vec{v}_0 = \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial z} - \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} \right) e_y.$$

Из уравнения $\text{div } \vec{v}_0 = 0$ получаем

$$\frac{\partial v_{x0}}{\partial z} - \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} = - \left(\int \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial z^2} dx + \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} \right).$$

При интегрировании учтено, что рассматривается чисто волновое движение. Тогда

1) если $\text{rot } \vec{v}_0 = 0$, то

$$\int \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial z^2} dx + \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} = 0$$

Дифференцируя это равенство по x , получаем

$$\Delta v_{z0} = 0;$$

2) если $\Delta v_{z0} = 0$, то

$$\int \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial z^2} dx + \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} = - \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{z0}}{\partial x} = 0,$$

т.е. $\text{rot } \vec{v}_0 = 0$.

Аналогично доказывается, что $\text{rot } \vec{h}_{10} = 0 \Leftrightarrow \Delta h_{1z0} = 0$. Последующие после линейного приближения строятся по собственным функциям линейной задачи, поэтому свойство потенциальности будет сохраняться и в последующих приближениях, т.е. $\text{rot } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{h}_1 = 0$.

Теперь покажем, что $\vec{v}$ и $\vec{h}_1$ будут потенциальными только при $u^*(z) = \text{const}$ и $H_{01}^*(z) = \text{const}$.

Систему уравнений (1.16), (1.17) можно свести к двум уравнениям

$$(u-1)h_{1z0} = \mathcal{H} v_{z0}, \quad (5.1)$$

$$(u-1)\Delta h_{1z0} - v_{z0} \frac{d^2 u}{dz^2} = a_1^2 (\mathcal{H} \Delta h_{1z0} - h_{1z0} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2}).$$

Отсюда видно, что v_{z0} , h_{1z0} будут гармоническими, а следовательно, $\vec{v}$, $\vec{h}_1$ — потенциальными только при $u(z) = \text{const}$, $\mathcal{H}(z) = \text{const}$.

Действительно, во второй главе рассматривался случай $u = 0$, $\mathcal{H} = \text{const}$. Полученные во второй главе выражения для $\vec{v}$ и $\vec{h}_1$ допускают потенциал (см. формулы (3.19) главы 2). Из формул (3.9) настоящей главы следует, что для произвольных $u(z) \neq \text{const}$, $\mathcal{H}(z) \neq \text{const}$ волновое движение жидкости и возмущение магнитного поля не будут потенциальными.

Отметим, что в случае непроводящей жидкости или отсутствия магнитного поля из второго уравнения (5.1) следует, что волновое движение будет потенциальным и при линейном профиле течения, т.е. при $u(z) = C_1 z + C_2$; C_1 , C_2 — постоянные. Этот случай рассмотрен в монографии [7.С.42-49].

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕДАХ

В этой главе рассматриваются вопросы распространения поверхностных волн в намагничивающихся средах, а также некоторые вопросы гидродинамической устойчивости.

В изотропных намагничивающихся средах связь между вектором индукции $\vec{B}$ и вектором напряженности магнитного поля $\vec{H}$ имеет вид $\vec{B} = \mu \vec{H}$, где μ — магнитная проницаемость. Уравнения магнитной гидродинамики следуют из уравнений гидродинамики намагничивающихся сред в предположении $\mu = 1$.

§ 1. Устойчивость тангенциального разрыва в намагничивающейся среде

Рассматривается устойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой, невязкой, неэлектропроводной и нетеплопроводной намагничивающейся жидкости. Учитывается зависимость магнитной проницаемости от температуры и магнитного поля.

Решение задачи об устойчивости тангенциального разрыва в обычной гидродинамике и магнитной гидродинамике приведено в работах [4.С.137; 5.С.337].

Систему уравнений гидродинамики намагничивающихся сред запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\nabla \left(\rho + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mu H dH \right) + \frac{\mu}{8\pi} \nabla H^2; \quad \text{div } \vec{v} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left[s + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_H H dH \right] &= 0; \quad \text{rot } \vec{H} = 0; \quad \text{div } \mu \vec{H} = 0, \\ \mu &= \mu(T, H). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь μ — магнитная проницаемость, $\vec{H}$ — магнитное поле, T — температура, S — энтропия единицы массы среды, остальные обозначения обычные.

Система координат выбирается так, что плоскость $z = 0$ является невозмущенной поверхностью тангенциального разрыва, разделяющего два слоя жидкости, которые движутся параллельно плоскости разрыва.

Магнитное поле имеет произвольное направление. Все величины в области $z < 0$ далее обозначаются индексом 1, а в области $z > 0$ — индексом 2.

Согласно (1.1), магнитное поле имеет потенциал $\vec{H} = \nabla \varphi$. Последнее уравнение (1.1) можно написать в виде

$$\text{div} (\mu \nabla \varphi) = 0. \quad (1.2)$$

Граничные условия на поверхности тангенциального разрыва в системе координат, в которой разрыв покоится:

$$\begin{aligned} \{\varphi\} &= 0; \quad \{\mu \vec{n} \nabla \varphi\} = 0; \quad \{\Pi_{ik} n_i n_k\} = \alpha (1/R_1 + 1/R_2), \\ v_n &= 0; \quad (\{\alpha\} = \alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности разрыва, $(1/R_1 + 1/R_2)$ — кривизна поверхности, α — поверхностное натяжение, Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, имеющий вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \frac{\mu H_i H_k}{4\pi} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \int_0^H \mu H dH.$$

Непрерывность потока энергии и равенство касательных напряжений на разрыве тождественно. Это следует из первых трех граничных условий (1.3) и условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля.

Устойчивость тангенциального разрыва будем исследовать в линейном приближении. Линеаризуем систему уравнений (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla \right) \vec{v}' &= -\nabla (p' + m T'); \quad \text{div } \vec{v}' = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla \right) \left[q T' + \frac{1}{4\pi} \mu_T \vec{H}_0 \nabla \varphi' \right] &= 0, \\ \mu_0 \Delta \varphi' + \alpha (\vec{H}_0 \nabla)^2 \varphi' + \mu_T \vec{H}_0 \nabla T' &= 0; \quad \{H_{0z} \xi + \varphi'\} = 0, \\ \{ -\mu_0 \vec{H}_0 \nabla \xi + \mu_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \mu_0 \nabla H_{0z} \vec{H}_0 \nabla \varphi' \} &= 0; \quad v_z' = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla \xi, \\ \{ p' + m T' + \frac{1}{4\pi} \mu_0 \vec{H}_0 \nabla \varphi' - \alpha \frac{H_{0z}^2}{4\pi} \vec{H}_0 \nabla \varphi' - \frac{H_{0z}^2}{4\pi} \mu_T T' - \frac{\mu_0 H_{0z}}{2\pi} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \} &= \alpha \Delta \xi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\alpha = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T; \quad \beta = \frac{\alpha}{M_0} - \frac{M_T}{4\pi M_0 q}; \quad m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_0} M_T H dH,$$

$$q = S_T + \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_0} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2} \right) H dH; \quad M_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H; \quad S_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H.$$

($\zeta = \zeta(x, y, t)$) - малое смещение точек разрыва на оси z).

Индексом "нуль" обозначены постоянные значения величин, соответствующих невозмущенному движению. Штрихами обозначены малые возмущения соответствующих величин. Далее индекс "нуль" у равновесных значений величин будет опускаться. Граничные условия для давления, скорости и потенциала магнитного поля в линейном приближении берутся при $z = 0$.

Малые возмущения величин будем искать в виде плоской волны

$$\zeta \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t); \quad \vec{v}' \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} + i\alpha z - i\omega t), \quad (I.5)$$

$$\rho' + mT' \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} + i\alpha z - i\omega t); \quad \varphi' + T' \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} + i\lambda z - i\omega t).$$

Здесь $\vec{k}$ - вещественный вектор, параллельный плоскости $z = 0$, ω - комплексная частота. Параметры λ и α тоже комплексные, их мнимые части являются коэффициентами затухания соответствующих величин по оси z .

Подставляя выражения (I.5) в третье уравнение системы (I.4), получим

$$(\omega - \vec{v}\vec{k}) \left[qT' + \frac{iM_T}{4\pi} (\vec{H}\vec{k} + \lambda H_z) \varphi' \right] = 0. \quad (I.6)$$

Если частота ω имеет положительную мнимую часть ($\text{Im} \omega > 0$), то амплитуда возмущения будет нарастать со временем по закону $\sim \exp(\text{Im} \omega)t$, это приводит к неустойчивости течения. Частота $\omega = \vec{v}\vec{k}$, соответствующая возмущению, движущемуся вместе с жидкостью, вещественная и не представляет интереса с точки зрения неустойчивости, поэтому формулу (I.6) можно написать в виде

$$T' = - \frac{iM_T}{4\pi q} (\vec{H}\vec{k} + \lambda H_z) \varphi'. \quad (I.7)$$

Подставляя в четвертое уравнение системы (I.4) выражения (I.5) и (I.7), получаем квадратное уравнение относительно λ , после решения которого будем иметь

$$\lambda = - \frac{\beta H_z \vec{H}\vec{k}}{1 + \beta H_z^2} \pm i \left(\frac{k^2 + \beta [(\vec{H}\vec{k})^2 + k^2 H_z^2]}{1 + \beta H_z^2} \right)^{1/2}. \quad (I.8)$$

Физический смысл имеют только решения, затухающие на бесконечности по оси z , поэтому в области $z < 0$ берем знак минус, а в области $z > 0$ - плюс.

Взяв операцию div от первого уравнения (I.4) и учитывая, что $\text{div} \vec{v}' = 0$, получим

$$\Delta(\rho' + mT') = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $\alpha = \pm i k$. Аналогично выбору знаков в выражении для λ будем считать $\alpha_1 = -i k$, $\alpha_2 = +i k$.

Из первого и седьмого уравнений (I.4) следует

$$\rho' + mT' = - \frac{i\rho\zeta}{\alpha} (\omega - \vec{v}\vec{k})^2. \quad (I.9)$$

Далее, из граничных условий для φ' из системы (I.4) находим при $z = 0$

$$\varphi_{(2)} = \zeta \frac{(\vec{H}\vec{k})(M_2 - M_1) + A_{2(1)}(H_{2z} - H_{1z})}{A_2 - A_1}, \quad (I.10)$$

$$A_{1(2)} = M_{1(2)} \left[\left(1 + \beta_{1(2)} \frac{B_z^2}{M_{1(2)}^2} \right) \lambda_{1(2)} + \beta_{1(2)} \frac{B_z}{M_{1(2)}} \vec{H}\vec{k} \right]; \quad B_z = M H_z.$$

Подставляя выражения (I.7), (I.9) и (I.10) в последнее уравнение (I.4), находим дисперсионное соотношение

$$\rho_1(\omega - \vec{v}_1\vec{k})^2 + \rho_2(\omega - \vec{v}_2\vec{k})^2 - \alpha k^3 + F = 0, \quad (I.11)$$

$$F = \frac{k(M_2 - M_1)^2}{4\pi(M_1 D_1 + M_2 D_2)} \left[\frac{B_z^2}{M_1 M_2} D_1 D_2 - (\vec{H}\vec{k})^2 \right],$$

$$D_{1(2)} = (k^2 + \beta_{1(2)} [(\vec{H}\vec{k})^2 + \frac{B_z^2}{M_{1(2)}^2} k^2])^{1/2}.$$

Условие устойчивости тангенциального разрыва (вещественность корней квадратного уравнения (I.11)) имеет вид

$$\alpha k^3 - \frac{\rho_1 \rho_2 (\vec{u} \vec{k})^2}{\rho_1 + \rho_2} - F \geq 0. \quad (I.12)$$

Здесь $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ - относительная скорость жидкостей. Если $\mu = const$, условие (I.12) принимает вид

$$\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)} \left[(\vec{H} \vec{k})^2 - \frac{k^2 B_z^2}{\mu_1 \mu_2} \right] - \frac{\rho_1 \rho_2 (\vec{u} \vec{k})^2}{\rho_1 + \rho_2} + \alpha k^3 \geq 0. \quad (I.13)$$

Если жидкость находится в поле тяжести $\vec{g}$ ($\vec{g}$ будем считать направленным против оси Z), то можно показать, что к левой части выражений (I.12), (I.13) должен быть добавлен член $(\rho_1 - \rho_2) g k$.

Если условие (I.12) не выполняется, уравнение (I.11) имеет два комплексно-сопряженных корня, один из которых имеет положительную мнимую часть, что приводит к неустойчивости.

Из условий (I.12), (I.13) следует, что тангенциальная составляющая магнитного поля стабилизирует разрыв, поскольку выражение $(\vec{H} \vec{k})^2$ входит в эти неравенства с положительным знаком. Поперечная составляющая H_z дестабилизирует разрыв.

Любое малое возмущение поверхности разрыва можно представить как суперпозицию плоских волн, поэтому необходимо найти условие устойчивости, не зависящее от величины и направления вектора $\vec{k}$.

В общем случае нахождение этого условия сталкивается с математическими трудностями, однако иногда его можно получить.

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$, $\mu = const$, $\vec{g} = 0$. Неравенство (I.13) можно написать в виде

$$\left[\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)} H_i H_j - \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2 B_z^2}{4\pi \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \delta_{ij} - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} u_i u_j \right] k_i k_j \geq 0.$$

Исследование этой квадратичной формы дает следующие два условия устойчивости:

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)} k^2 - \frac{B_z^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\pi \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} - \frac{\rho_1 \rho_2 u^2}{\rho_1 + \rho_2} &\geq 0, \\ \frac{(\mu_1 + \mu_2)^4}{16\pi^2 \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)^2} \left(\frac{B_z^4}{\mu_1 \mu_2} - k^2 B_z^2 \right) + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 \rho_1 \rho_2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)(\rho_1 + \rho_2)} \left(\frac{B_z^2 u^2}{\mu_1 \mu_2} - \right. \\ \left. - [\vec{u} \vec{k}]^2 \right) &\geq 0; \quad \vec{k} = (H_{0x}, H_{0y}, 0). \end{aligned}$$

В случае, когда тангенциальная составляющая магнитного поля отсутствует, условие абсолютной устойчивости принимает вид

$$[\rho_1 \rho_2 u^2 / (\rho_1 + \rho_2) + M]^2 \leq 4 g (\rho_1 - \rho_2), \quad (I.14)$$

$$M = \frac{B_z^2 (\mu_2 - \mu_1)^2 (1 + \mu_1 H_{1z}^2)^{1/2} (1 + \mu_2 H_{2z}^2)^{1/2}}{4\pi \mu_1 \mu_2 [\mu_1 (1 + \mu_1 H_{1z}^2)^{1/2} + \mu_2 (1 + \mu_2 H_{2z}^2)^{1/2}]}.$$

При отсутствии магнитного поля неравенство (I.14) переходит в обычное гидродинамическое условие устойчивости, приведенное в работе [4.С.137].

Если $u = v_1 = v_2 = 0$, из условия (I.14) можно найти величину критического поля

$$B_{kz}^4 = 64 \pi^2 \mu_1^2 \mu_2^2 (\mu_1 + \mu_2)^2 (\mu_2 - \mu_1)^{-4} (\rho_1 - \rho_2) \alpha g.$$

Все приведенные результаты можно применить к диэлектрическим жидкостям, для этого необходимо заменить μ на диэлектрическую проницаемость ϵ , а поле $\vec{H}$ - на электрическое поле $\vec{E}$.

§ 2. Устойчивость поверхности раздела намагничивающихся сред со скачком проводимости и магнитной проницаемости

Рассматривается устойчивость поверхности раздела между двумя слоями движущихся намагничивающихся жидкостей. В одном из слоев жидкость предполагается идеально проводящей, а в другом - неэлектропроводной. Диссипативными эффектами (вязкостью и теплопроводностью) пренебрегаем. Магнитная проницаемость неэлектропроводной жидкости предполагается зависящей от температуры и магнитного поля.

Магнитную проницаемость идеально проводящей жидкости считаем постоянной. Очевидно, что в этом случае применимы уравнения магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\nabla(p + \frac{\mu H^2}{8\pi}) + \frac{\mu}{4\pi} (\vec{H} \nabla) \vec{H}; \quad \text{div } \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}); \quad \text{div } \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения гидродинамики неэлектропроводной намагничивающейся жидкости запишем в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \left(\rho + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mathcal{M} H dH \right) + \frac{\mathcal{M}}{8\pi} \nabla H^2, \quad (2.2)$$

$$\frac{C_{v,H}}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{d}{dt} \int_0^H \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T} \right)_H H dH = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0; \operatorname{rot} \vec{H} = 0; \operatorname{div} \mathcal{M} \vec{H} = 0; \mathcal{M} = \mathcal{M}(T, H).$$

Здесь $C_{v,H}$ - теплоемкость при постоянных объеме и магнитном поле, а остальные обозначения общепринятые.

Тензор плотности потока импульса имеет вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \frac{\mathcal{M} H_i H_k}{4\pi} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \int_0^H \mathcal{M} H dH. \quad (2.3)$$

Граничные условия на разрыве в системе координат, в которой разрыв покоится:

$$\{\Pi_{ik} n_k\} = n_i \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); v_n = 0; \{B_n\} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь R_1, R_2 - главные радиусы кривизны поверхности, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали, $\{\alpha\} = \alpha_2 - \alpha_1$ - скачок величины на разрыве, α - коэффициент поверхностного натяжения.

Из формул (2.3), (2.4) следует:

$$\left\{ \rho - \frac{\mathcal{M} H^2}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mathcal{M} H dH \right\} = -\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); B_n \{ \vec{H}_T \} = 0. \quad (2.5)$$

Индексом τ обозначена тангенциальная составляющая вектора $\vec{H}$. Система координат выбрана так, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью разрыва. Идеально проводящая жидкость занимает область $z < 0$, а непроводящая - $z > 0$. Величины, относящиеся к области $z < 0$, далее там, где это необходимо, обозначаются индексом 1, а к области $z > 0$ - индексом 2.

Из уравнений (2.5) следует, что имеют место два случая:

$$1) B_n \neq 0; \{ \vec{H}_T \} = 0 \quad \text{и} \quad 2) B_n = 0; \{ \vec{H}_T \} \neq 0.$$

Рассмотрим первый случай. Линеаризуем уравнения и граничные условия (2.1)-(2.4), причем нулем будем отмечать равновесные значения

величин, штрихом - малые возмущения.

1. Область $z < 0$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla \left(\rho' + \frac{\mathcal{M} \vec{H}_0 \vec{H}'}{4\pi} \right) + \frac{\mathcal{M}}{4\pi} (\vec{H}_0 \nabla) \vec{H}'; \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} = (\vec{H}_0 \nabla) \vec{v}'; \operatorname{div} \vec{H}' = 0.$$

2. Область $z > 0$:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \nabla) \vec{v}' \right] = -\nabla (p' + m T'); T' = -\mathcal{M}_T \vec{H}_0 \vec{H}' / 4\pi q,$$

$$\operatorname{div} \vec{H}' + \beta \vec{H}_0 \nabla (\vec{H}_0 \vec{H}') = 0; \operatorname{div} \vec{v}' = 0; \operatorname{rot} \vec{H}' = 0, \quad (2.7)$$

$$\alpha = H_0^{-1} (\partial \mathcal{M} / \partial H)_T; \beta = \alpha / \mu_0 - \mathcal{M}_T^2 / 4\pi \mu_0 q,$$

$$m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_0} \mathcal{M}_T H dH; q = \frac{C_{v,H}}{T} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_0} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial T^2} \right)_H H dH.$$

3. Граничные условия на разрыве:

$$\mathcal{M}_1 \vec{H}_{01} \nabla \xi - \mathcal{M}_1 H'_{1z} = \mathcal{M}_2 \vec{H}_{02} \nabla \xi - \mathcal{M}_2 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \beta \mathcal{M}_2 H_{02z} \vec{H}_{02} \nabla \varphi',$$

$$\{ H'_x + H_{0z} \frac{\partial \xi}{\partial x} \} = 0; \{ H'_y + H_{0z} \frac{\partial \xi}{\partial y} \} = 0; v'_{1z} = v'_{2z} - v_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\rho'_1 - \frac{\mathcal{M}_1}{2\pi} H_{01z} H'_{1z} + \frac{1}{4\pi} \vec{H}_{01} \vec{H}'_1 = \rho'_2 + m T' + \frac{1}{4\pi} \mathcal{M}_2 \vec{H}_{02} \nabla \varphi' - \\ - \frac{1}{2\pi} \mathcal{M}_2 H_{02z} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{4\pi} \beta \mathcal{M}_2 H_{02z}^2 \vec{H}_{02} \nabla \varphi' - \alpha \Delta \xi.$$

Здесь $\xi = \xi(x, y, t)$ - смещение точек разрыва, φ' - возмущение потенциала магнитного поля ($\vec{H}' = \nabla \varphi'$) в области $z > 0$. Предполагается, что $\vec{v}_{01} = 0$, а $\vec{v}_{02} = \vec{v}_0$; ось x направлена параллельно $\vec{v}_0$. Возмущения величин в уравнениях (2.6), (2.7) будем искать в виде плоских гармонических волн:

$$\xi = \xi_0 \exp(i \vec{k} \vec{r} + \Omega t); f(z) \exp(i \vec{k} \vec{r} + \Omega t). \quad (2.9)$$

Здесь $f(\bar{z})$ - функция, подлежащая определению, $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$ - волновой вектор. Далее индекс "нуль" у равновесных значений величин для краткости будем опускать.

Из уравнений (2.6) следует, что z - компонента скорости жидкости в области $z < 0$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{\mu H_z^2}{4\pi\rho\Omega^2 k^2} \frac{\partial^4 v_z'}{\partial z^4} - \frac{i\mu H_z(\vec{k}\vec{H})}{2\pi\rho\Omega^2 k^2} \frac{\partial^3 v_z'}{\partial z^3} - \left[\frac{\mu H_z^2}{4\pi\rho\Omega^2} + \frac{\mu(\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi\rho\Omega^2 k^2} + \frac{1}{k^2} \right] \frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2} - \frac{i\mu H_z(\vec{k}\vec{H})}{4\pi\rho\Omega^2} \frac{\partial v_z'}{\partial z} + \left[1 + \frac{\mu(\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi\rho\Omega^2} \right] v_z' = 0. \quad (2.10)$$

Вследствие громоздкости выражений далее ограничимся наиболее важным случаем чисто поперечного к разрыву магнитного поля $H_x = H_y = 0$, $H_z \neq 0$. Из уравнения (2.10) в этом случае следует, что $f \sim \exp \gamma z$, где γ^2 имеет два значения: k^2 и δ^2 . Величина определяется выражением

$$\delta^2 = 4\pi\rho\Omega^2 / \mu H_z^2.$$

В области $z > 0$ для случая чисто поперечного поля величины ищем в виде

$$\vec{v}' \sim p' + m\vec{T}' \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} - kz + \Omega t); \quad \varphi' \sim T' \sim \exp(i\vec{k}\vec{r} - kx + \Omega t).$$

Здесь $\gamma = (1 + \mu H_z^2 / 4\pi\rho)^{-1/2}$ предполагается вещественной величиной. Решения должны выбираться так, чтобы они не возрастали на бесконечности по оси z . Рассмотрим вопрос об устойчивости разрыва, когда $\text{Re}(\Omega) < 0$. В этом случае, например, решение уравнения (2.10), не возрастающее на бесконечности, запишется в виде

$$v_{iz}' = [C_1 \exp kz + C_2 \exp(-v_a^{-1} \Omega z)] \exp(i\vec{k}\vec{r} + \Omega t).$$

Здесь $v_a = (\mu H_z^2 / 4\pi\rho)^{1/2}$ - альфвеновская скорость в области $z < 0$; C_1 , C_2 - постоянные, подлежащие определению из граничных условий. Аналогичные выражения, содержащие произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, могут быть записаны и для остальных величин. Дисперсионное уравнение для волн на поверхности разрыва находится из уравнений (2.8), (2.9) после исключения произвольных постоянных. При анализе дисперсионного уравнения ограничимся случаем $v_0 = 0$ (вследствие громоздкости выражений):

$$a_0 \left(\frac{\Omega}{k v_a} \right)^4 + a_1 \left(\frac{\Omega}{k v_a} \right)^3 + a_2 \left(\frac{\Omega}{k v_a} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\Omega}{k v_a} \right) + a_4 = 0, \quad (2.11)$$

$$a_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad a_1 = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(1 + \gamma + \frac{\gamma \rho_2}{\rho_1} \right); \quad a_2 = 1 + \frac{\alpha k}{\rho_1 v_a^2} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + \frac{\gamma \mu_1}{\mu_2} \right),$$

$$a_3 = 1 + \frac{\alpha k}{\rho_1 v_a^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(2 + \gamma + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right); \quad a_4 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(3 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) - \frac{\alpha k}{\rho_1 v_a^2} \left(1 + \frac{\gamma \mu_1}{\mu_2} \right) - 1.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы все корни уравнения (2.11) находились в левой комплексной полуплоскости, т.е. имели отрицательную вещественную часть (критерий Гурвица) [21.С.426]. Например, в случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \gamma = 1$, $\rho_1 = \rho_2$, разрыв будет неустойчивым, так как $a_1 < 0$.

Устойчивость возможна также в случае, когда $\text{Re}(\Omega) = 0$, т.е. Ω - чисто мнимая величина. Выражение для v_{iz}' , не возрастающее на бесконечности, в этом случае запишется в виде

$$v_{iz}' = [C_1 \exp kz + C_2 \exp(-\frac{\Omega z}{v_a}) + C_3 \exp(\frac{\Omega z}{v_a})] \exp(i\vec{k}\vec{r} + \Omega t).$$

Таким образом, число произвольных постоянных возросло на единицу при неизменном количестве граничных условий. В этом случае дисперсионное уравнение вообще не может быть записано. Согласно работе [22] для нахождения возмущений в этом случае необходимо задавать амплитуду, фазу и частоту приходящей из бесконечности к разрыву альфвеновской волны, а также волновое число искривленной поверхности разрыва.

Во втором случае $B_n = 0$, $\{\vec{H}_z\} \neq 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\rho_1 \omega^2 + \rho_2 (\omega - k_x v)^2 - \alpha k^3 - \frac{\mu_1 (\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi} - \frac{\mu_2 k (\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi \sqrt{k^2 + \beta (\vec{k}\vec{H})^2}} = 0. \quad (2.12)$$

Здесь $\omega = i\Omega$ - комплексная частота, $k = |\vec{k}|$.

Условие устойчивости разрыва имеет в этом случае следующий вид:

$$\frac{\mu_1 (\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi} + \frac{k \mu_2 (\vec{k}\vec{H})^2}{4\pi \sqrt{k^2 + \beta (\vec{k}\vec{H})^2}} + \alpha k^3 - \frac{\rho_1 \rho_2 (k_x v)^2}{\rho_1 + \rho_2} \geq 0.$$

§ 3. Устойчивость струи намагничивающейся жидкости

Рассматривается устойчивость струи намагничивающейся нетеплопроводной жидкости, когда магнитная проницаемость M зависит от температуры T и магнитного поля $\vec{H}$. Решение задачи о распаде струи обычной жидкости приведено в работе [23]. Устойчивость струи в магнитной гидродинамике исследована в работе [24]. Устойчивость струи жидкости с поверхностным электрическим зарядом рассматривается в работе [25]. Распад струи намагничивающейся жидкости рассмотрен в работе [26], в которой предполагалось, что магнитная проницаемость есть величина постоянная.

Скорость движения струи будем считать малой, чтобы пренебречь влиянием окружающего воздуха на распад струи. Однородное магнитное поле H_0 создается соленоидом, по оси которого движется цилиндрическая струя намагничивающейся жидкости. Задача решается в цилиндрической системе координат с осью Z , направленной по оси струи.

Система уравнений гидродинамики намагничивающейся жидкости записывается в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \frac{1}{4\pi} \int_0^H [M - \rho(\frac{\partial M}{\partial \rho})_{T,H}] H dH + \frac{M}{8\pi} \nabla H^2), \quad (3.1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0; \quad \frac{d}{dt} [S + \frac{1}{4\pi \rho} \int_0^H (\frac{\partial M}{\partial T})_{\rho,H} H dH] = 0;$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0; \quad \text{div } M \vec{H} = 0; \quad M = M(T, H).$$

Здесь $S(\rho, T)$ - энтропия единицы массы среды без магнитного поля для заданных плотности ρ и температуры T . Согласно (3.1), магнитное поле имеет потенциал $\vec{H} = \nabla \varphi$. Последнее уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\text{div } M \text{ grad } \varphi = 0. \quad (3.2)$$

Граничные условия на поверхности струи в системе координат, в которой поверхность покоится, следующие:

$$\{\varphi\} = 0; \quad \{M \vec{n} \nabla \varphi\} = 0; \quad \{\Pi_{ik} n_i n_k\} = \alpha (R_1^{-1} + R_2^{-1}), \quad (3.3)$$

$$v_n = 0; \quad \{\alpha\} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Здесь $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности разрыва, $R_1^{-1} + R_2^{-1}$ - кривизна поверхности, α - поверхностное натяжение, Π_{ik} - тензор плотности потока импульса, имеющий вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \frac{M H_i H_k}{4\pi} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \int_0^H [M - \rho(\frac{\partial M}{\partial \rho})_{T,H}] H dH.$$

Равенство касательных напряжений на разрыве выполняется тождественно. Это следует из первых трех граничных условий (3.3).

Устойчивость будем исследовать в линейном приближении. Линеаризуем систему уравнений (3.1), (3.2) и граничные условия (3.3):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla(p' + fT); \quad \text{div } \vec{v}' = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} (qT' + \frac{1}{4\pi} M_T \vec{H}_0 \nabla \varphi') = 0, \\ M_0 \Delta \varphi' + \alpha (H_0' \nabla)^2 \varphi' + M_T \vec{H}_0 \nabla T' = 0; \quad \{H_{0z} z + \varphi'\} = 0, \quad (3.4)$$

$$\{-M_0 \vec{H}_0 \nabla \xi + M_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t}\} = 0; \quad \{p' + fT' + \frac{1}{4\pi} M_0 \vec{H}_0 \nabla \varphi'\} = \alpha \Delta \xi,$$

$$\alpha = \frac{1}{H_0} (\frac{\partial M}{\partial H})_T; \quad \beta = \frac{\alpha}{M_0} - \frac{M_T^2}{4\pi M_0 \rho}; \quad f = \frac{1}{4\pi} \int_0^{H_0} M_T H dH,$$

$$q = S_T + \frac{1}{4\pi \rho} \int_0^{H_0} (\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}) H dH; \quad M_T = (\frac{\partial M}{\partial T})_H; \quad S_T = (\frac{\partial S}{\partial T})_\rho,$$

$\xi = \xi(z, \theta, t)$ - малое смещение точек поверхности.

В уравнениях (3.4) штрихами обозначены возмущения величин. Величины, относящиеся к струе, будем обозначать индексом 1, а к атмосфере - 2, примем $M_2 = 1$.

Из первого уравнения (3.4) следует, что возмущение скорости имеет потенциал Ψ , удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta \Psi = 0$, решение которого ищем в виде

$$\Psi = -i\omega \xi_0 \frac{J_m(kr)}{k J'_m(kr_0)} \cos m\theta \cdot \exp(i k z - i\omega t). \quad (3.5)$$

Здесь k - волновое число, ω - комплексная частота, r и θ - цилиндрические координаты, $m = 0, 1, 2, \dots$, ξ_0 - максимальная амплитуда колебаний поверхности струи, $J_m(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода порядка m [27], r_0 - радиус невозмущенной струи.

Перейдем к определению магнитного поля. Из четвертого уравнения системы (3.4) в цилиндрической системе координат следует:

$$(1+bH_0^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \theta^2} = 0.$$

Решая это уравнение в областях I и 2 и учитывая, что $b_2 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= A_1 J_m(k\beta r) \cdot \cos m\theta \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ \varphi'_2 &= [A_2 J_m(kr) + B_2 K_m(kr)] \cos m\theta \cdot \exp(ikz - i\omega t), \\ A_1 &= (\mu_0 - 1) i \xi_0 H_0 [\mu_0 \beta J'_m(k\beta r_0) - F J_m(k\beta r_0)]^{-1}, \\ A_2 &= i \xi_0 H_0 (\mu_0 - 1) J_m(k\beta r_0) \cdot K_m(kR_0) [\mu_0 \beta J'_m(k\beta r_0) - \\ &\quad - F J_m(k\beta r_0)]^{-1} [J_m(kr_0) \cdot K_m(kR_0) - J_m(kR_0) \cdot K_m(kr_0)]^{-1}, \\ B_2 &= -A_2 J_m(kR_0) \cdot K_m^{-1}(kR_0), \\ F &= \frac{J'_m(kr_0) \cdot K_m(kR_0) - J_m(kR_0) \cdot K'_m(kr_0)}{J_m(kr_0) \cdot K_m(kR_0) - J_m(kR_0) \cdot K_m(kr_0)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $K_m(kr)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода порядка m [27]; A_1, A_2, B_2 - малые величины; $\beta = \sqrt{1+b_1 H_0^2}$; R_0 - радиус соленоида. Будем считать $r_0/R_0 \ll 1$; в этом случае

$$F = K'_m(kr_0)/K_m(kr_0).$$

Из первого уравнения системы (3.4) находим, что

$$p' + f T' = -\rho \partial \Psi / \partial t. \quad (3.7)$$

Из формул (3.5), (3.6) и (3.7) находим дисперсионное уравнение волн, распространяющихся на поверхности струи:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2 (\mu_0 - 1)^2 H_0^2 J'_m(kr_0) \cdot K_m(kr_0) \cdot J_m(kr_0 \beta)}{4\pi \rho J_m(kr_0) [\mu_0 \beta J'_m(k\beta r_0) \cdot K_m(kr_0) - K'_m(kr_0) \cdot J_m(k\beta r_0)]} - \\ &\quad - \frac{\alpha k J'_m(kr_0)}{\rho r_0^2 J_m(kr_0)} (1 - k^2 r_0^2 - m^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) следует, что струя устойчива по отношению к модам с $m \geq 1$ при выполнении условия $1 + b_1 H_0^2 \geq 0$. Рассмотрим устойчивость струи по отношению к симметрическим возмущениям с $m = 0$. Уравнение (3.8) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2 (\mu_0 - 1)^2 H_0^2 J_1(kr_0) \cdot K_0(kr_0) \cdot J_0(k\beta r_0)}{4\pi \rho J_0(kr_0) [\mu_0 \beta J_1(k\beta r_0) \cdot K_0(kr_0) + K_1(kr_0) \cdot J_0(k\beta r_0)]} - \\ &\quad - \frac{\alpha k J_1(kr_0)}{\rho r_0^2 J_0(kr_0)} (1 - k^2 r_0^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя асимптотику бесселевых функций $J_m(x), K_m(x)$ [27], уравнение (3.9) можно упростить:

$$\omega^2 = \frac{k^2 (\mu_0 - 1)^2 H_0^2}{4\pi \rho (\mu_0 \beta + 1)} + \frac{\alpha k^3}{\rho}.$$

Из этого уравнения следует, что при выполнении условия $1 + b_1 H_0^2 \geq 0$ струя будет устойчивой по отношению к коротковолновым возмущениям. При выполнении обратного неравенства величина β становится мнимой, струя будет неустойчивой; неустойчивыми в этом случае будут также и все моды $m \geq 1$ в длинноволновой области. Рассмотрим случай $1 + b_1 H_0^2 > 0$ в длинноволновой области. График зависимости безразмерной частоты $\omega^2 r_0^2 / \alpha$ от $(kr_0)^{-1}$ пересекает ось абсцисс и имеет отрицательное мнимое значение при определенном значении волнового числа. Волновое число, при котором частота обращается в нуль, отделяет область устойчивости от области неустойчивости. Соответствующую этому волновому числу длину волны λ_c будем называть критической. Длина волны λ_m , при которой частота имеет минимум ω_m^2 , соответствует наибольшей скорости роста возмущений, так как возмущение зависит от времени по закону $\sim \exp J_m(\omega)t$. Этот множитель принимает наибольшее значение для длины λ_m , при которой ω^2 отрицательна и минимальна.

На рис. 4 приведен график зависимости величин λ_c и λ_m от магнитного поля H_0 при следующих параметрах: $\alpha = 20$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $r_0 = 1$ см, $\mu_0 = 2$, $b_1 H_0^2 = 0$. При увеличении магнитного поля возмущения сдвигаются в область более длинных волн, величины λ_c и λ_m возрастают. На рис. 5 показана зависимость $|\omega_m|$ от магнитного поля H_0 . При увеличении H_0 величина $|\omega_m|$ уменьшается. Длина неразбившейся части струи может быть оценена по формуле $\ell \sim v/|\omega_m|$, где v - скорость струи. Таким образом, приведенные результаты показывают, что струю намагничиваемой жидкости можно стабилизировать продольным

магнитным полем.

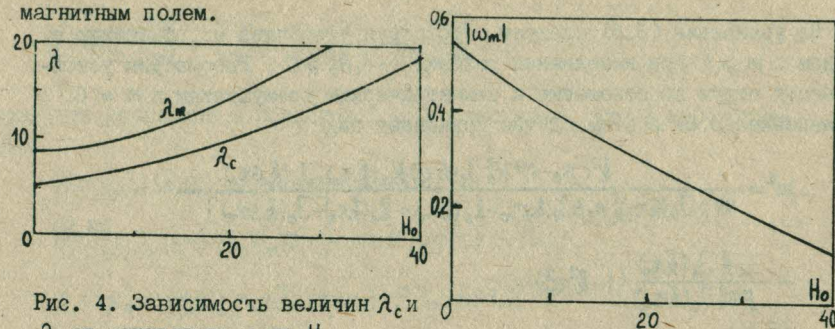


Рис. 4. Зависимость величин λ_c и λ_m от магнитного поля H_0

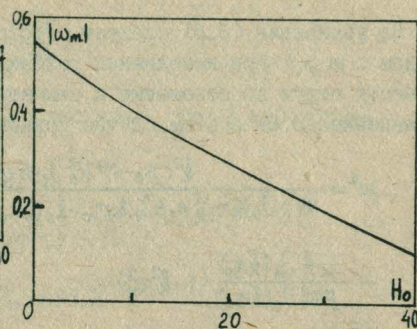


Рис. 5. Зависимость величины $|\omega_m|$ от магнитного поля H_0

Рассмотрим теперь влияние зависимости магнитной проницаемости от температуры и магнитного поля на устойчивость струи. В этом случае величины λ_c и λ_m зависят не только от магнитного поля H_0 , но и от величины $\beta_1 H_0^2$. В таблице приведены значения λ_c , λ_m и $|\omega_m|$, вычисленные при следующих значениях $\beta_1 H_0^2$: первая строка сверху - при $\beta_1 H_0^2 = 0,1$, вторая - при $\beta_1 H_0^2 = 0$, третья - при $\beta_1 H_0^2 = -0,1$ при значениях магнитного поля: 0, 10, 20, 30, 40 Э. С уменьшением $\beta_1 H_0^2$ значения λ_c и λ_m увеличиваются и достигают своих наибольших предельных значений при $\beta_1 H_0^2 = -1$. Так, например, при $H_0 = 10$ Э предельные значения λ_c и λ_m равны 7,18 и 10,46 см. При дальнейшем уменьшении $\beta_1 H_0^2$, как уже отмечалось, наступает неустойчивость при всех длинах волн.

Таблица

Зависимость λ_c , λ_m , $ \omega_m $ от $\beta_1 H_0^2$					
$\lambda_c, \lambda_m, \omega_m $	H_0				
	0	10	20	30	40
λ_c	6,28	6,82	8,79	12,73	18,39
	6,28	6,85	8,88	12,91	18,47
	6,28	6,96	8,92	13,06	18,63
λ_m	9,02	9,80	12,81	18,47	26,16
	9,02	9,81	12,94	19,03	27,30
	9,02	9,82	13,08	19,62	28,54
$ \omega_m $	0,536	0,3059	0,2243	0,1683	0,1038
	0,536	0,3050	0,2211	0,1485	0,1054
	0,536	0,3041	0,2182	0,1473	0,1043

Отметим, что в случае $\beta_1 H_0^2 > 0$ величины λ_c и λ_m меньше, чем в случае $M = \text{const}$ при одинаковых прочих условиях; в случае $\beta_1 H_0^2 < 0$ - наоборот, больше. При уменьшении $\beta_1 H_0^2$ величина $|\omega_m|$ уменьшается до своего наименьшего предельного значения, достигаемого при $\beta_1 H_0^2 = -1$. Например, при $H_0 = 10$ Э это предельное значение равно 0,2928. Таким образом, для фиксированного значения H_0 при уменьшении $\beta_1 H_0^2$ длина неразбившейся части струи увеличивается до определенного предела, определяемого условием $\beta_1 H_0^2 = -1$. Длина неразбившейся части струи в случае $\beta_1 H_0^2 < 0$ больше, чем в случае $M = \text{const}$ при одинаковых прочих условиях.

В выражении (3.4) величину q можно записать в виде

$$q = \frac{C_v}{T} + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^{H_0} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2} \right)_H dH,$$

где C_v - теплоемкость при постоянном объеме. Ясно, что величину q можно считать положительной, так как во всех практически интересных случаях первое слагаемое C_v/T больше второго. В выражении (3.4) величина $M^2/4\pi\rho_0 q$ положительна, таким образом, зависимость M от температуры приводит к уменьшению величины $\beta_1 H_0^2$ при фиксированном H_0 , что делает струю более устойчивой. Если предположить, что M зависит только от H , тогда $\beta_1 = (1/\rho_0 H_0) dM/dH$. Из приведенных выше рассуждений следует, что для увеличения значений λ_c и λ_m , а

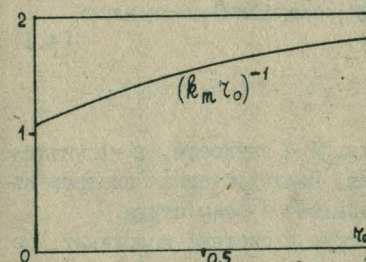


Рис. 6. Зависимость $(k_m r_0)^{-1}$ от r_0

также для уменьшения $|\omega_m|$ величина $\beta_1 H_0^2$ должна лежать в интервале $-1 \leq \beta_1 H_0^2 < 0$, следовательно, в этом случае dM/dH должна быть отрицательной.

Отметим также, что для обычной жидкости величина $(k_m r_0)^{-1} = 1,43$ не зависит от радиуса струи, однако в магнитном поле она зависит от r_0 ; при уменьшении радиуса r_0 величина $(k_m r_0)^{-1}$ уменьшается, оставаясь больше 1,43. На рис. 6 приведен график зависимости $(k_m r_0)^{-1}$ от r_0 при $\alpha = 20$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $M_0 = 2$, $\beta_1 H_0^2 = 0$, $H_0 = 10$ Э.

Приведенные результаты применимы в случае слабовязкой жидкости. Критерием этого условия является соотношение

$$\nu k^2 / |\omega_m| \ll 1.$$

Здесь ν - кинематическая вязкость жидкости. Это условие выполняется

ся при достаточно малой вязкости жидкости либо при достаточно больших радиусах струи или коэффициента поверхностного натяжения в длинноволновой области возмущений. Отметим, что неустойчивость струи возникает именно в длинноволновой области.

§ 4. Параметрическая неустойчивость и стабилизация струи намагничивающейся жидкости

Устойчивость струи вязкой неэлектропроводной, а также проводящей жидкости в постоянном магнитном поле исследована в монографии [22]. Параметрическое возбуждение волн на свободной поверхности невязкой намагничивающейся жидкости рассматривалось в работе [28]. Представляет интерес исследование поведения струи намагничивающейся неэлектропроводной жидкости в переменном во времени магнитном поле, создаваемом бесконечно длинным соленоидом, вдоль оси которого движется струя намагничивающейся жидкости. Ограничимся простейшим случаем, когда невозмущенное магнитное поле зависит от времени по гармоническому закону: $\vec{H}_0 = \vec{h} \cos \gamma t$. Магнитная проницаемость M жидкости предполагается постоянной.

Систему уравнений гидродинамики намагничивающейся несжимаемой среды для случая $M = \text{const}$ запишем в виде

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}; \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0; \quad \text{div } M \vec{H} = 0.$$

Здесь $\vec{v}$ - скорость среды, p - давление, η - вязкость, ρ - плотность, $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля. Цилиндрическая система координат выбирается так, что ось z совпадает с осью струи.

Граничные условия на поверхности струи в системе координат, в которой эта поверхность покоится:

$$\{ \Pi_{ik} n_i n_k \} = \alpha (R_1^{-1} + R_2^{-1}); \quad v_n = 0, \quad (4.2)$$

$$\{ \varphi \} = 0; \quad \{ M \vec{n} \nabla \varphi \} = 0; \quad \{ a \} = a_2 - a_1.$$

Здесь φ - потенциал магнитного поля ($\vec{H} = \nabla \varphi$), $\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности струи, $R_1^{-1} + R_2^{-1}$ - кривизна поверхности, α - коэффициент поверхностного натяжения, Π_{ik} - тензор плотности потока

импульса:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{M}{4\pi} (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik})$$

Индексом 1 отмечены величины, относящиеся к струе, индексом 2 - к атмосфере. Предполагается, что $M_2 = 1$.

Уравнения (4.1) и граничные условия (4.2) в линейном приближении для симметрических возмущений, не зависящих от азимутального угла θ , примут вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla p' + \eta \Delta \vec{v}'; \quad \text{div } \vec{v}' = 0; \quad \Delta \varphi' = 0, \quad (4.3)$$

$$\left\{ p' + \frac{1}{4\pi} M \vec{H}_0 \nabla \varphi' - 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\} = \frac{\alpha}{r_0^2} \left(\xi + r_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right),$$

$$\{ H_{0z} + \varphi' \} = 0; \quad \{ -M \vec{H}_0 \nabla \xi + M \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \} = 0; \quad v_r = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Здесь $\xi(z, t)$ - малое смещение точек поверхности струи в радиальном направлении, r_0 - радиус невозмущенной струи, штрихами обозначены малые возмущения величин.

Решая уравнения (4.3), будем иметь

$$v_z = [ik A_1 J_0(kr) + A_2 (r^{-1} J_1(lr) + l J_1'(lr))] \exp(ikz + \delta t),$$

$$v_r = [A_1 k J_1(kr) - ik A_2 J_1(lr)] \exp(ikz + \delta t), \quad (4.4)$$

$$p' = -\rho \delta A_1 J_0(kr) \exp(ikz + \delta t),$$

$$\xi = [A_1 k J_1(kr_0) - ik A_2 J_1(lr_0)] e^{-1} \exp(ikz + \delta t),$$

$$\varphi'_1 = \frac{i \xi (M-1) h \cos \gamma t J_0(kr) K_0(kr_0)}{M J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)},$$

$$\varphi'_2 = \frac{i \xi (M-1) h \cos \gamma t J_0(kr_0) K_0(kr)}{M J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)},$$

$$\frac{A_1}{A_2} = - \frac{J_1(lr_0) (l^2 + k^2)}{2 i k^2 J_1(kr_0)}.$$

Здесь $\ell^2 = k^2 + \delta \nu^{-1}$, $\nu = \eta \rho^{-1}$, $J_m(x)$ и $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя; предполагается, что радиус струи много меньше радиуса солениода.

Рассмотрим случай малой вязкости $|\ell^2| \gg k^2$. Из уравнений (4.3) и (4.4) следует

$$\ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega^2(1 + q \cos 2\gamma t) \xi = 0, \quad (4.5)$$

$$\beta = \nu k^2 \left[1 + \frac{J_1'(kr_0)}{J_0(kr_0)} \right],$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 h^2 (m-1)^2 J_1(kr_0) K_0(kr_0)}{8\pi \rho [m J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)]} - \frac{\alpha k J_1(kr_0) (1 - r_0^2 k^2)}{\rho r_0^2 J_0(kr_0)},$$

$$q = \frac{k^2 h^2 (m-1)^2 J_1(kr_0) K_0(kr_0)}{8\pi \rho \omega^2 [m J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)]}$$

Будем предполагать выполненным условие $q \omega^2 / 4\gamma^2 \ll 1$. Из уравнения $q = 4\beta / \omega$ [29.С.110] находим пороговое значение амплитуды магнитного поля h_c , начиная с которого возникает параметрический резонанс:

$$h_c^2 = \frac{32 \eta \gamma [J_0(kr_0) + J_1'(kr_0)] [m J_1(kr_0) K_1(kr_0) + J_1(kr_0) K_0(kr_0)]}{(m-1)^2 J_1(kr_0) J_0(kr_0) K_0(kr_0)}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) позволяет для заданных γ и k найти наименьшее значение амплитуды магнитного поля h_c , при котором возникает параметрический резонанс.

Пороговое значение магнитного поля (4.6) соответствует основному (первому) резонансу, возникающему при частоте изменения поля γ , лежащей в окрестности собственной частоты ω . Радиус этой окрестности равен [29.С.110]

$$\sqrt{\left(\frac{q\omega}{2}\right)^2 - 4\beta^2}.$$

С увеличением частоты γ пороговая напряженность h_c возрастает и может стать больше приложенного поля h , при этом возможна ситуация, при которой наступает обычная непараметрическая неустойчивость [30].

В случае обычной неустойчивости критическое значение амплитуды магнитного поля h_c находится из уравнения $\omega^2 = 0$ для возмущения с

заданным волновым числом:

$$h_c^2 = \frac{8\pi \alpha (1 - k^2 r_0^2) [m J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)]}{k r_0^2 (m-1)^2 J_0(kr_0) K_0(kr_0)}.$$

Необходимо отличать приведенное значение критического поля h_c от минимального критического поля, при котором неустойчивость наступает только при некотором определенном значении волнового числа, которое нельзя задавать произвольно.

Из условия $h_c = h$ находим верхнюю границу частоты γ возбуждения параметрического резонанса для возмущения с данным волновым числом:

$$\gamma_c = \frac{\alpha (1 - k^2 r_0^2) J_1(kr_0)}{4\eta k r_0^2 [J_0(kr_0) + J_1'(kr_0)]}.$$

Если для возмущения с заданным волновым числом k выполняется условие $h < h_c$, параметрический резонанс может наступить только при частотах $\gamma < \gamma_c$. Таким образом, возмущение с заданным волновым числом k будет устойчивым в переменном магнитном поле в следующем интервале частот:

$$\gamma_c < \gamma < \gamma_c,$$

$$\gamma_c = \frac{h^2 (m-1)^2 J_1(kr_0) J_0(kr_0) K_0(kr_0)}{32\pi \eta [J_0(kr_0) + J_1'(kr_0)] [m J_1(kr_0) K_1(kr_0) + J_1(kr_0) K_0(kr_0)]}.$$

Для частот $\gamma > \gamma_c$ возникает обычная параметрическая неустойчивость, для частот $\gamma < \gamma_c$ — параметрический резонанс.

При $\omega^2 < 0$, что соответствует неустойчивости движения, выбором частоты переменного магнитного поля можно стабилизировать неустойчивость. Частота изменения поля в этом случае должна удовлетворять условию

$$\sqrt{q'} \ll 2\gamma < q / \sqrt{-2\omega^2}, \quad (4.7)$$

$$q = \frac{k^2 h^2 (m-1)^2 J_1(kr_0) K_0(kr_0)}{8\pi \rho [m J_1(kr_0) K_0(kr_0) + J_0(kr_0) K_1(kr_0)]}.$$

Отметим, что условие (4.7) относится к возмущениям с отрицате-

льной величиной ω^2 , находящейся в окрестности нуля. Условие малой вязкости может быть тогда записано в виде

$$\left| -\frac{\alpha k_c(1-k_c^2 r_0^2) J_1(k_c r_0)}{2\rho r_0^2 J_0(k_c r_0)} \right| (\nu k_c^2)^{-1} \gg 1 \quad (4.8)$$

и выполняется для достаточно больших значений амплитуды магнитного поля. Величина k_c в формуле (4.8) представляет собой критическое волновое число, при котором $\omega^2 = 0$ для заданной величины h .

В случае сильновязкой жидкости ($|e^2| \ll k^2$) выражение для смещения точек поверхности струи в переменном магнитном поле имеет вид

$$\xi = \text{const} \cdot \exp[At + B \sin 2\gamma t],$$

$$A = -\frac{h^2(M-1)^2 J_1(k r_0) K_0(k r_0)}{16\pi\eta [M J_1(k r_0) K_0(k r_0) + J_0(k r_0) K_1(k r_0)]} - \frac{\alpha k(1-k^2 r_0^2) J_1(k r_0)}{2\eta k r_0 J_0(k r_0)},$$

$$B = -\frac{h^2(M-1)^2 J_1(k r_0) K_0(k r_0)}{32\eta\pi\gamma [M J_1(k r_0) K_0(k r_0) + J_0(k r_0) K_1(k r_0)]}.$$

Из этого выражения следует, что струя сильновязкой жидкости ни при каких условиях не может быть неустойчивой.

§ 5. Течение тонкого слоя жидкости, покрытой пленкой намагничивающегося вещества

Движение тонких слоев вязкой жидкости по вертикальной стенке исследовалось в работе [31]. Теоретически было предсказано, а затем экспериментально подтверждено существование незатухающего волнового режима течения [32].

Ниже решается задача о течении по вертикальной стенке слоя немагнитной жидкости, покрытой пленкой намагничивающегося вещества. В качестве намагничивающегося вещества может быть использована магнитная жидкость. Предполагается, что движение происходит в неоднородном магнитном поле. Наличие намагничивающегося вещества приводит к появлению дополнительных сил, действующих на поверхность жидкости.

В приближении пограничного слоя уравнения движения и граничные условия для тонкого слоя жидкости запишем в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Gamma U = 0,$$

при $y = h$:

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{d\alpha}{d\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + M G_\tau; \quad p = -\rho_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - M G_n,$$

$$v_x = U; \quad v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x},$$

при $y = 0$:

$$v_x = v_y = 0.$$

Здесь v_x, v_y - компоненты скорости жидкости, p - давление, $\nu = \eta/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости, $\alpha = \alpha(\Gamma)$ - коэффициент поверхностного натяжения, h - толщина слоя, Γ - концентрация вещества, $\vec{G} = \text{grad} |\vec{H}|$ - градиент магнитного поля, $M(\Gamma)$ - намагниченность единицы площади вещества. Индексами n и τ обозначены нормальная и тангенциальная составляющие вектора $\vec{G}$ к поверхности жидкости. Ось x ориентирована вдоль стенки в направлении действия силы тяжести $\vec{g}$, ось y - перпендикулярно к стенке.

Рассмотрим плоскопараллельное течение слоя жидкости. Полагая в уравнениях производные по x и t равными нулю, получаем решение

$$v_x = -\frac{\rho g}{2\eta} y^2 + \left(\frac{M G_\tau}{\eta} + \frac{\rho g h}{\eta} \right) y; \quad v_y = 0; \quad \Gamma = \Gamma_0 = \text{const}.$$

Анализ выражения для скорости v_x показывает, что при $G_\tau = -\rho g h/2M$ скорость жидкости на поверхности слоя равна нулю $U = 0$. При $G_\tau < -\rho g h/2M$ скорость поверхности слоя направлена против действия силы тяжести, при $G_\tau > -\rho g h/2M$ весь слой жидкости движется по направлению градиента магнитного поля G_τ . В отсутствие силы тяжести направление движения слоя жидкости целиком определяется направлением градиента магнитного поля. В отсутствие магнитного поля толщина слоя жидкости равна $h = (3\nu Q/g)^{1/3}$, где Q - расход жидкости:

$$Q = \int_0^h v_x dy.$$

При движении слоя жидкости в магнитном поле величина h находится из уравнения

$$h^3 + 3MG_{\tau} h^2 / 2\rho g = 3\nu Q / g. \quad (5.2)$$

В случае, когда $g = 0$, уравнение (5.2) принимает вид

$$h^2 = 2\nu Q / MG_{\tau}.$$

При наличии силы тяжести и при расходах $Q > 0$ отрицательные значения G_{τ} приводят к увеличению, а положительные — к уменьшению толщины слоя жидкости по сравнению с толщиной в отсутствие градиента магнитного поля. В поле тяжести возможен случай, когда расход жидкости равен нулю: $Q = 0$.

Изучим возможность реализации волнового режима течения слоя жидкости. Будем рассматривать такие волны на поверхности слоя, длина которых велика по сравнению с толщиной слоя h . Предполагая, что скорость v_x так же, как и в случае плоскопараллельного течения, имеет квадратичную зависимость от y , и используя граничные условия системы (5.1) для v_x , находим:

$$v_x = \frac{2U(x,t)}{h} \left(y - \frac{y^2}{2h} \right) - \left(\frac{MG_{\tau}}{\eta} + \frac{1}{\eta} \frac{d\alpha}{d\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \left(y - \frac{y^2}{2h} \right), \quad (5.3)$$

$$MG_{\tau} = M_0 G_x + M_0 G_y \frac{\partial h}{\partial x} + G_x \frac{dM}{d\Gamma} (\Gamma - \Gamma_0).$$

Здесь индексом "нуль" обозначены величины, относящиеся к плоскопараллельному течению слоя жидкости. Для давления, используя уравнения и граничные условия системы (5.1), получаем соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha_0 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{\partial MG_n}{\partial x},$$

$$MG_n = M_0 G_y + G_y \frac{dM}{d\Gamma} (\Gamma - \Gamma_0) - M_0 G_x \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Уравнение неразрывности и граничное условие для v_y дают

$$v_y = -\frac{2U}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6h} \right) - \frac{M_0 G_x}{3\eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{y^3}{h^2} - \left(\frac{2y^3}{3h} - y^2 \right) \left[\frac{U}{h^2} - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{d\alpha}{d\Gamma} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + M_0 G_y \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + G_x \frac{dM}{d\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \right].$$

Величины h и Γ запишем в виде $h = h_0(1 + \varphi)$, $\Gamma = \Gamma_0(1 + \gamma)$; $\varphi, \gamma \ll 1$. Все переменные величины будем искать как функции аргумента $x - at$. Тогда $\partial/\partial t = -a \partial/\partial x$ и граничное условие для v_y на поверхности слоя дает

$$(\langle v \rangle - a)(1 + \varphi) = (\langle v_0 \rangle - a); \quad \langle v \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h v_x dy. \quad (5.4)$$

Значение $\langle v_0 \rangle$ отвечает скорости в среднем сечении потока толщиной h_0 . Из уравнения для концентрации следует

$$(U - a)(1 + \gamma) = (U_0 - a). \quad (5.5)$$

Связь между $\langle v \rangle$ и U находится из уравнения (5.2):

$$\langle v \rangle = \frac{2}{3} U - \frac{h_0}{6\eta} \left(\frac{d\alpha}{d\Gamma} \Gamma_0 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + M_0 G_y h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + G_x \frac{dM}{d\Gamma} \Gamma_0 \gamma \right) - \frac{h_0}{6\eta} M_0 G_x (1 + \varphi).$$

Значение U_0 равно скорости поверхности слоя толщиной h_0 при плоскопараллельном течении со средней скоростью $\langle v_0 \rangle$:

$$U_0 = \frac{3}{2} \langle v_0 \rangle + \frac{M_0 G_x h_0}{4\eta}.$$

Уравнения (5.4) и (5.5) в линейном приближении дают связь между φ и γ :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} (a - \langle v_0 \rangle) \varphi + \frac{M_0 G_y h_0^2}{4\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \gamma (a - \frac{3}{2} \langle v_0 \rangle - \\ &- \frac{M_0 G_x h_0}{4\eta} - \frac{h_0 G_x}{4\eta} \frac{dM}{d\Gamma} \Gamma_0) - \frac{h_0}{4\eta} \frac{d\alpha}{d\Gamma} \Gamma_0 \frac{\partial \gamma}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя найденные выражения для v_x, v_y, p в первое уравнение системы (5.1), усредняя по y и используя (5.4), (5.5), получим в линейном приближении

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{2}{5} U_0 - \frac{2}{3} a \right) (a - U_0) + \frac{h_0 (a - U_0)}{\eta} G_x \frac{dM}{d\Gamma} \Gamma_0 - \right. \\ \left. - \frac{7}{30} \frac{M_0 G_x h_0}{\eta} (a - U_0) - \frac{G_y}{\rho} \frac{dM}{d\Gamma} \Gamma_0 - \frac{2}{\rho h_0} \frac{d\alpha}{d\Gamma} \Gamma_0 \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[U_0 \left(\frac{2}{3} \alpha - \frac{2}{15} U_0 \right) - \frac{7}{30} \frac{M_0 G_x h_0 U_0}{\eta} - \frac{2 M_0 G_y}{\rho} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
& + \left[\frac{M_0 G_x h_0}{\rho} - \frac{M_0 G_y h_0^2}{6 \eta} (\alpha - U_0) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\alpha_0 h_0}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \\
& + \frac{h_0 (\alpha - U_0)}{6 \eta} \frac{d\alpha}{d\Gamma} \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \gamma \left[\frac{2 \gamma (\alpha - U)}{h_0^2} - \frac{2 G_x}{\rho h_0} \frac{dM}{d\Gamma} \right] \right] + \\
& + \frac{2 M_0 G_x}{\rho h_0} - \frac{4 U_0 \gamma}{h_0^2} + \frac{2 \gamma U_0}{h_0^2} - g - \frac{2 M_0 G_x}{\rho h_0} = 0.
\end{aligned}$$

Решение уравнений (5.6), (5.7) ищем в виде $\exp(ikx - i\omega t)$, $\omega = \alpha k$. В общем виде решение алгебраической системы уравнений, получающейся после преобразований, получить сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением частных случаев.

Предположим, что $G_x \neq 0$, $(\Gamma_0 d\alpha/d\Gamma)/\alpha_0 \rightarrow 0$, $(\Gamma_0 dM/d\Gamma)/M_0 \rightarrow 0$, $G_y = 0$. Из уравнения (5.7) следует формула для определения толщины пленки через среднюю скорость в потоке:

$$\frac{3 \gamma \langle v_0 \rangle}{h_0^2} - \frac{3}{2} \frac{M_0 G_x}{\rho h_0} - g = 0; \quad \langle v_0 \rangle = \frac{Q}{h_0}. \quad (5.8)$$

Толщина слоя жидкости при волновом режиме течения в первом приближении равна толщине слоя при плоскопараллельном течении.

После несложных преобразований из уравнений (5.6), (5.7) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{M_0 G_x h_0 k^2}{\rho} - \frac{M_0 G_x}{\rho h_0} - \frac{3 \gamma}{h_0^2} (\alpha - 3 \langle v_0 \rangle) = 0, \\
& \frac{\alpha_0 h_0}{\rho} k^2 + \frac{29}{10} \alpha \langle v_0 \rangle - \alpha^2 - \frac{6}{5} \langle v_0 \rangle^2 - \alpha \frac{M_0 G_x h_0}{30 \eta} + \\
& + \frac{3}{20} \frac{M_0 G_x h_0}{\eta} \langle v_0 \rangle - \frac{1}{15} \left(\frac{M_0 G_x h_0}{\eta} \right)^2 = 0.
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Ограничимся рассмотрением случая $\langle v_0 \rangle = 0$. Как следует из анализа плоскопараллельного течения, такой случай реализуется при отрицательных G_x . Так как скорость поверхности слоя при этом отрицательна, то фазовая скорость возмущений α тоже отрицательна. Первое уравнение системы (5.9) дает:

$$k^2 = \frac{1}{h_0^2} \left(1 + \frac{3 \eta \alpha}{M_0 G_x h_0} \right).$$

После подстановки во второе уравнение системы (5.9) получаем алгебраическое уравнение второго порядка для фазовой скорости α :

$$\alpha^2 + \alpha \left(\frac{M_0 G_x h_0}{\eta} - \frac{\alpha_0 \gamma}{h_0^2 M_0 G_x} \right) + \frac{1}{15} \left(\frac{M_0 G_x h_0}{\eta} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho h_0} = 0.$$

Уравнение имеет два корня, но только один из них принимает отрицательные значения для градиентов магнитных полей, удовлетворяющих условию

$$G_x^2 > \frac{15 \alpha_0 \gamma^2}{\rho h_0^3 M_0^2}. \quad (5.10)$$

Следовательно, при выполнении условия (5.10) для отрицательных градиентов магнитных полей возможен волновой режим течения со средним расходом, равным нулю $Q = 0$. Для таких течений возможен также случай реализации стоячих волн. Такой случай реализуется при условии

$$G_x^2 = \frac{15 \alpha_0 \gamma^2}{\rho h_0^3 M_0^2}.$$

Порядок градиента магнитного поля при следующих значениях параметров: $\alpha_0 = 20$ дин/см, $\eta = 10^{-2}$ г/см·с, $\rho = 1$ г/см³, $h_0 = 0,1$ мм, $M_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ Гс·см — равен $3 \cdot 10^5$ Гс/см.

Рассмотрим случай $G_x = 0$, $(\Gamma_0 dM/d\Gamma)/M_0 \rightarrow 0$, $(\Gamma_0 d\alpha/d\Gamma)/\alpha_0 \rightarrow 0$, $G_y \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{M_0 G_y h_0^2 \langle v_0 \rangle}{10 \eta} k^2 + \frac{3 \gamma}{h_0^2} (\alpha - 3 \langle v_0 \rangle) = 0, \\
& \frac{\alpha_0 h_0}{\rho} k^2 + \left(\frac{29}{10} \langle v_0 \rangle \alpha - \frac{6}{5} \langle v_0 \rangle^2 - \alpha^2 \right) = 0.
\end{aligned} \quad (5.11)$$

Толщина пленки в этом случае находится из уравнения

$$\frac{3 \langle v_0 \rangle \gamma}{h_0^2} - g = 0.$$

Из условия, что $k^2 > 0$, получаем неравенства: для $G_y < 0$ необходимо, чтобы $\alpha > 3 \langle v_0 \rangle$, для $G_y > 0$ — чтобы $0,5 \langle v_0 \rangle > \alpha > 0$. Система (5.11) дает уравнение для определения α :

$$\alpha^2 + \alpha \left(\frac{30 \gamma \alpha_0}{h_0^3 M_0 G_y \langle v_0 \rangle} - \frac{29}{10} \langle v_0 \rangle \right) + \frac{6}{5} \langle v_0 \rangle^2 - \frac{90 \gamma^2 \alpha_0}{h_0^3 M_0 G_y} = 0.$$

При $G_y < 0$ это уравнение имеет два положительных корня, больших, чем $3\langle v_0 \rangle$. В этом случае возможны волновые режимы с двумя различными фазовыми скоростями. Вопрос о том, какой из этих режимов реализуется в действительности, требует дополнительного рассмотрения.

В случае

$$2 \cdot 10^3 \alpha_0 \nu^4 h_0^{-7} g^{-2} M_0^{-1} > G_y > 0$$

возможен волновой режим с одной ветвью колебаний.

Что касается условия $G_y > 2 \cdot 10^3 \alpha_0 \nu^4 h_0^{-7} g^{-2} M_0^{-1}$, при котором имеют место две ветви колебаний, оно не может быть реализовано, так как выполняется при больших градиентах поля порядка 10^8 Гс/см.

Предельным случаем для двух рассмотренных выше является $G_x = G_y = 0, (G_0 d \Delta / d \Gamma) / \alpha_0 \rightarrow 0$. Получаем следующее решение:

$$\alpha = 3\langle v_0 \rangle,$$

$$k^2 = \frac{1,5 \langle v_0 \rangle^2 \rho}{\alpha_0 h_0}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение остановимся на том минимуме знаний, который необходим читателю для успешного усвоения материала, изложенного в пособии, а также на направлениях дальнейшего развития исследований, приведенных в книге.

1. В гидродинамике необходимо усвоить следующий материал.

- Введение двух систем координат (Эйлеровой и Лагранжевой) для изучения движения жидкости. Этот вопрос в сжатой форме освещается в первой главе работы [7].

- Уравнения, с помощью которых описывается движение как идеальной, так и вязкой жидкости. В достаточно полной форме эта тема изложена в первой и второй главах книги [4].

- Основные граничные условия для постановки задач о поверхностных волнах в обычной гидродинамике. С выведением этих граничных условий можно ознакомиться в первой главе [7].

Кроме того, желательно изучить вторую и четвертую главы монографии [7], так как изучение этих глав поможет лучшему пониманию результатов, полученных во второй и третьей главах данного пособия. Во второй главе работы [7] исследуется распространение нелинейных поверхностных волн на слое покоящейся, а в четвертой главе - движущейся (в случае линейного профиля течения) жидкости в обычной гидродинамике при отсутствии поверхностного натяжения.

Из магнитной гидродинамики необходимо знать следующий ряд вопросов.

- Как происходит взаимодействие движущейся электропроводной жидкости с магнитным полем?

- Какими уравнениями описывается движение проводящей жидкости и электромагнитное поле? Как эти уравнения изменяются при бесконечной проводимости жидкости?

- Какие граничные условия используются для электромагнитных величин на разрывах?

Ответы на все эти вопросы можно найти в работе [6] и восьмой главе работы [5].

Из теории методов возмущений для изучения пособия достаточно освоить метод Рэлея - Шредингера [2, гл. 3]. Кроме того, желательно изучение вопросов введения малого параметра при обезразмеривании дифференциальных уравнений. Эти вопросы отражены в первой главе

работы [3].

2. Основываясь на результатах, приведенных в пособии, дальнейшие исследования можно проводить в следующих направлениях:

- исследование распространения нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн на слое покоящейся и движущейся вязкой жидкости;

- исследование распространения нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн на слое жидкости конечной проводимости;

- исследование распространения нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн произвольной амплитуды;

- исследование распространения нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн в случае контактного разрыва;

- исследование распространения нелинейных магнитогидродинамических волн по поверхности струи электропроводной жидкости (как идеальной, так и вязкой; как бесконечно проводящей, так и конечной проводимости);

- исследование в нелинейной постановке распространения волн по поверхности струи намагничивающейся жидкости;

- исследование в нелинейной постановке волнового режима течения слоя жидкости, покрытой пленкой намагничивающегося вещества.

Вышеуказанные задачи имеют большое как теоретическое, так и практическое значение. Их решение позволит расширить теорию волн на поверхности электропроводных и намагничивающихся жидкостей, а также может найти применение в астрофизике, металлургии, ядерной энергетике и других приложениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276с.
2. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456с.
3. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624с.
6. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320с.
7. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196с.
8. Алешков Ю.З., Баринов В.А., Тактаров Н.Г. О распространении нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 79-86.
9. Баринов В.А. К исследованию нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн / Мордов. ун-т. Саранск, 1989. 19с. Деп. в ВИНТИ 28.03.89, № 1966-В89.
10. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Исследование нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн на течении / Мордов. ун-т. Саранск, 1989. 35с. Деп. в ВИНТИ 27.11.89, № 7078-В89.
11. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Нелинейные магнитогидродинамические поверхностные волны на слое движущейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1990. №4. С. 71-76.
12. Глухих В.А., Тананаев А.В., Кириллов И.Р. Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 264с.
13. Тактаров Н.Г. Об устойчивости поверхности раздела намагничивающихся сред со скачком проводимости и магнитной проницаемости // Магнитная гидродинамика. 1981. №3. С.37-40.
14. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384с.
15. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. 1880. Vol.1. P.197-229.
16. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816с.
17. Данов К.Д., Рудерман М.С. Нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. №5. С.110-115.
18. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431с.
19. Назаров Г.И. К точным решениям некоторых задач магнитной гидродинамики // Прикл. мех. и техн. физика. 1963. №2. С.63-72.

20. Мизес Р., Шиффер М. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости // Проблемы механики. М., 1955. С.489-518.
21. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688с.
22. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 690p.
23. Релей Д. Теория звука: В 2т. Т.2. М.: Гостехиздат, 1955. 473с.
24. Гельфрат Ю.М., Ольшанский С.В., Явнайст Г.А. Исследование разрушения свободной жидкометаллической струи под действием осевого тока // Магнитная гидродинамика. 1973. №2. С.49-54.
25. Huebner A.L., Chu H.N. Instability and breakup of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. Vol.49, pt.2. P.361-372.
26. Тактаров Н.Г. Распад струи магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика. 1973. №2. С.35-38.
27. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344с.
28. Perry M.P., Jones T.B. Interfacial parametric ferrohydrodynamics // J. Appl. Phys. 1975. Vol.46, N2. P.756-760.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216с.
30. Devitt E.B., Melcher J.R. Surface electrohydrodynamics with high-frequency fields // Phys. Fluids. 1965. Vol.8, №6. P.1193-1195.
31. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т.18, №1. С.3-19.
32. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1949. Т.19, №2. С.105-120.
33. Сутырин Г.Г., Тактаров Н.Г. Об устойчивости тангенциального разрыва в намагничивающейся среде // Прикл. математика и механика. 1975. Т.39, №3. С.547-550.
34. Мартынов С.И., Тактаров Н.Г. Об устойчивости струи намагничивающейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1979. №3. С.23-27.
35. Мартынов С.И., Тактаров Н.Г. О параметрической неустойчивости и стабилизации струи намагничивающейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1980. №2. С.27-30.
36. Мартынов С.И., Тактаров Н.Г. О течении тонкого слоя жидкости, покрытой пленкой намагничивающегося вещества // Магнитная гидродинамика. 1983. №1. С.40-44.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Основные сведения из гидродинамики	5
§ 1. Уравнения движения идеальной жидкости	5
§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики	6
Глава 2. Магнитогидродинамические поверхностные волны на слое неподвижной жидкости.....	8
§ 1. Уравнения и граничные условия	8
§ 2. Краевая задача о поверхностных МГД волнах	11
§ 3. Нелинейные поверхностные МГД волны	20
§ 4. Нахождение траектории частицы жидкости	35
§ 5. Влияние магнитного поля на высоту волны	40
Глава 3. Магнитогидродинамические поверхностные волны на слое движущейся жидкости	43
§ 1. Краевая задача о поверхностных МГД волнах на слое движущейся жидкости	43
§ 2. Линейное приближение	48
§ 3. Нелинейные поверхностные МГД волны	52
§ 4. Нахождение траектории частицы жидкости	58
§ 5. Об условиях потенциальности волнового движения жидкости	61
Глава 4. Поверхностные волны в намагничивающихся средах	64
§ 1. Устойчивость тангенциального разрыва в намагничивающейся среде	64
§ 2. Устойчивость поверхности раздела намагничивающихся сред со скачком проводимости и магнитной проницаемости	69
§ 3. Устойчивость струи намагничивающейся жидкости	74
§ 4. Параметрическая неустойчивость и стабилизация струи намагничивающейся жидкости	80
§ 5. Течение тонкого слоя жидкости, покрытой пленкой намагничивающегося вещества	84
Заключение	91
Библиографический список	93

БАРИНОВ Василий Александрович
ТАКТАРОВ Николай Григорьевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН**

Редактор Л.В.Горшкова
Художественный редактор В.Д.Зотова

ИБ I

Подписано в печать 12.12.90. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,0. Усл. печ. л. 5,58. Усл.кр.-отт. 5,82. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 1000 экз. Заказ № I. Цена 20 к.

Мордовский ордена Дружбы народов государственный университет имени Н.П.Огарева. 430000, Саранск, ул. Большевикская, 68.

Межузовская типография Мордовского университета. 430000, Саранск, ул. Советская, 24.

20 к.



Издательство
Мордовского
университета

