

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОЛБА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ДЛИННОЕ ПОРИСТОЕ ЯДРО

Н.Г.Тактаров, О.А.Рунова

Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е.Евсевьева, Саранск, Россия

Магнитные жидкости представляют собой искусственно созданные суспензии ферромагнитных частиц в жидкости-носителе. Такие жидкости широко используются в различных областях техники и технологии [1].

Задача о волнах на поверхности струи магнитной жидкости рассмотрена в [2]. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании исследовано в [3]. Задача о распространении волн на заряженной поверхности цилиндрического столба электропроводной жидкости, окружающей длинное пористое ядро, решена в [4].

1. Математическая модель. Предполагается, что внутри цилиндрического объема магнитной жидкости находится ядро из пористого материала в форме коаксиально расположенного круглого цилиндра. Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести отсутствует. Ось пористого цилиндра совпадает с осью коаксиально расположенного соленоида, создающего однородное магнитное поле \vec{H}_0 . Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , в которой жидкий столб покоится. Ось z направлена по оси пористого цилиндра. Радиус пористого цилиндра, невозмущенной поверхности и соленоида обозначим a, a_0 и b соответственно. Величины, относящиеся к пористой среде, свободной жидкости (вне пористой среды) и промежутку между жидкостью и соленоидом (воздух), будем обозначать в необходимых случаях индексами 1, 2 и 3 соответственно. Магнитная проницаемость μ_1, μ_2, μ_3 в областях 1, 2, 3 предполагается постоянной. Предполагаем, что $\mu_3 = 1$, а магнитная проницаемость среды в области 1 (жидкость плюс пористый материал) равна $\mu_1 = \mu_2 \Gamma + \mu_s (1 - \Gamma)$, где μ_s – проницаемость пористой матрицы, Γ – пористость (отношение объема пор ко всему элементарному объему среды). При постоянной проницаемости магнитная сила равна нулю, однако это не означает, что магнитное поле не влияет на движение жидкости. В самом деле, на поверхностях раздела сред существуют механические напряжения, посредством которых и происходит взаимодействие поля со средой.

Уравнения движения магнитной жидкости в пористой среде (при сделанных предположениях) имеют вид [3, 5]:

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 - \frac{\eta}{K} \bar{u}_1, \quad \text{div } \bar{u}_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, η – вязкость, K – коэффициент проницаемости пористой среды, p_1 – давление, \bar{u}_1 – макроскопическая скорость фильтрации, связанная со средней скоростью \bar{v}_1 жидкости в порах соотношением $\bar{u}_1 = \Gamma \bar{v}_1$.

Уравнения движения свободной жидкости, в предположении, что амплитуда волны значительно меньше ее длины, запишем в линейном приближении [6]

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -\text{grad } p_2, \quad \text{div } \bar{u}_2 = 0. \quad (2)$$

Здесь \bar{u}_2 – скорость свободной жидкости. Ограничиваемся случаем волн достаточно большой длины λ , существенно превышающей радиус a_0 жидкого столба, с тем, чтобы пренебречь слагаемыми, содержащими $\Delta \bar{u}_1$ и $\Delta \bar{u}_2$ в уравнениях (1) и (2). Вязкостью в правой части первого уравнения (2) в длинноволновом приближении пренебрегается в предположении отсутствия прилипания жидкости на поверхности пористого цилиндра. В рассматриваемой модели не

накладывается никаких ограничений на касательный к поверхности пористого цилиндра компонент скорости, требуется лишь непрерывность потока жидкости в нормальном к этой поверхности направлении.

Уравнения для магнитного поля в системе СГС [7]:

$$\text{rot } \bar{H}_i = 0, \quad \text{div} \mu_i \bar{H}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Из уравнений (1) – (3) следует

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = \nabla \varphi_1, \quad \bar{u}_2 = \nabla \varphi_2, \quad \bar{H}_i = \nabla \psi_i, \\ \Delta \varphi_1 = 0, \quad \Delta \varphi_2 = 0, \quad \Delta \psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее все величины будем записывать в виде

$$\begin{aligned} p_1 = p_{10} + p_{1w}, \quad p_2 = p_{20} + p_{2w}, \quad \bar{H}_i = \bar{H}_{i0} + \bar{H}_{iw}, \\ \psi_i = \psi_{i0} + \psi_{iw} = zH_{i0} + \psi_{iw}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь индексами 0 и w обозначены соответственно невозмущенные величины и малые возмущения, связанные с волной; $H_{10} = H_{20} = H_{30} \equiv H_0$. Возмущения ψ_{iw} также должны удовлетворять уравнениям Лапласа (4).

Система граничных условий имеет вид:

на границе пористой среды ($r = a$):

$$1) u_{1r} = u_{2r}, \quad 2) \psi_1 = \psi_2, \quad 3) \mu_1 \bar{n} \nabla \psi_1 = \mu_2 \bar{n} \nabla \psi_2, \quad (6)$$

$$4) p_1 - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{1n}^2 + \frac{\mu_1}{8\pi} \bar{H}_1^2 = p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \bar{H}_2^2,$$

на свободной поверхности жидкости $r = a_0 + \xi(\theta, z, t)$:

$$5) u_{2r} = \frac{d\xi}{dt}, \quad 6) \psi_2 = \psi_3, \quad 7) \mu_2 \bar{n} \nabla \psi_2 = \mu_3 \bar{n} \nabla \psi_3,$$

$$8) p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \bar{H}_2^2 - \left(p_3 - \frac{\mu_3}{4\pi} H_{3n}^2 + \frac{\mu_3}{8\pi} \bar{H}_3^2 \right) = 2\alpha C,$$

на поверхности соленоида ($r = b$):

$$9) \psi_{3w} = 0 \quad (\text{возмущение потенциала } \psi_3 \text{ равно нулю}).$$

Здесь α – коэффициент поверхностного натяжения, C – средняя кривизна поверхности, \bar{n} – единичная нормаль к соответствующей поверхности.

Для возмущений давления из (1) и (2) с учетом (5) следует

$$p_{1w} = -\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\eta}{K} \varphi_1, \quad p_{2w} = -\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \quad (7)$$

С учетом вышеизложенного, граничные условия (6) в линейном приближении принимают вид:

$$1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad (r = a), \quad 2) \psi_{1w} = \psi_{2w} \quad (r = a), \quad 3) \mu_1 \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r} \quad (r = a), \quad (8)$$

$$4) p_{1w} + \frac{\mu_1 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial z} = p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial z} \quad (r = a), \quad 5) \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{d\xi}{dt} \quad (r = a_0), \quad 6) \psi_{2w} = \psi_{3w} \quad (r = a_0),$$

$$7) \mu_2 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r} \right) = \mu_3 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial r} \right) \quad (r = a_0),$$

$$8) p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial z} - \frac{\mu_3 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial z} = -\alpha \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (r = a_0), \quad 9) \psi_{3w}(b) = 0.$$

Кроме того, на оси пористого цилиндра ($r = 0$) решения уравнений должны быть конечными.

В граничных условиях (8) вместо p_{1w} , p_{2w} надо подставить их выражения (7).

Математическая модель является, таким образом, краевой задачей.

2. Решение краевой задачи. Решение уравнений (4) с граничными условиями (8) ищем в виде

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \psi_{1w}, \psi_{2w}, \psi_{3w}, \xi\} = \{\hat{\varphi}_1(r), \hat{\varphi}_2(r), \hat{\psi}_{1w}(r), \hat{\psi}_{2w}(r), \hat{\psi}_{3w}(r), \hat{\xi}\} \exp(-\gamma t + ikz + im\theta). \quad (9)$$

Здесь, например, $\varphi_1(r, \theta, z, t) = \hat{\varphi}_1(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta)$, где $\hat{\varphi}_1(r)$ – неизвестная амплитуда, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $m = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$, $\omega = |\gamma_i|$ – частота, $\beta = \gamma_r$ – коэффициент, который может быть как положительным (при затухании возмущения), так и отрицательным (при неустойчивости, приводящей к нарастанию возмущения).

Подставляя выражения (9) для φ_i ($i = 1, 2$) и для ψ_{jv} ($j = 1, 2, 3$) в уравнения Лапласа, записанные в цилиндрических координатах, получим систему пяти модифицированных уравнений Бесселя порядка m для амплитуд, решения которых имеют вид

$$\hat{\varphi}_1 = C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr), \quad \hat{\varphi}_2 = C_3 I_m(kr) + C_4 K_m(kr),$$

$$\hat{\psi}_{1v} = C_5 I_m(kr) + C_6 K_m(kr), \quad \hat{\psi}_{2v} = C_7 I_m(kr) + C_8 K_m(kr), \quad \hat{\psi}_{3v} = C_9 I_m(kr) + C_{10} K_m(kr).$$

Здесь I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m . Следует положить $C_2 = 0$ и $C_6 = 0$, т. к. $K_m(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$.

Граничные условия (8) принимают для амплитуд вид

$$1) C_1 I'_m(ka) = C_3 I'_m(ka) + C_4 K'_m(ka), \quad 2) C_5 I_m(ka) = C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka),$$

$$3) \mu_1 C_3 I_m(ka) = \mu_2 C_7 I'_m(ka) + \mu_2 C_8 K'_m(ka),$$

$$4) -\frac{\rho\gamma}{\Gamma} C_1 I_m(ka) + \frac{\eta}{K} C_1 I_m(ka) - \frac{ik\mu_1 H_0}{4\pi} C_3 I_m(ka) =$$

$$= -\rho\gamma [C_3 I_m(ka) + C_4 K_m(ka)] - \frac{ik\mu_2 H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka)],$$

$$5) kC_3 I'_m(ka_0) + kC_4 K'_m(ka_0) = -\gamma \hat{\xi}, \quad 6) C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0) = C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0), \quad (10)$$

$$7) \mu_2 \{ ikH_0 \hat{\xi} - C_7 k I'_m(ka_0) - C_8 k K'_m(ka_0) \} = \mu_3 \{ ikH_0 \hat{\xi} - C_9 k I'_m(ka_0) - C_{10} k K'_m(ka_0) \},$$

$$8) \rho\gamma^2 [C_3 I_m(ka_0) + C_4 K_m(ka_0)] + \frac{ik\mu_2 \gamma H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0)] -$$

$$- \frac{ik\mu_3 \gamma H_0}{4\pi} [C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0)] = -\frac{\alpha\gamma \hat{\xi}}{a_0^2} (1 - m^2 - ka_0^2), \quad 9) C_9 I_m(kb) + C_{10} K_m(kb) = 0.$$

Имеем систему девяти уравнений (10) для девяти неизвестных: $C_1, C_3, C_4, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{10}, \hat{\xi}$. Для упрощения вычислений далее предполагаем, что $a_0/b \ll 1$ (соленоид достаточно большого радиуса). Приравнявая затем определитель системы (10) к нулю, получим дисперсионное уравнение для поверхностных волн, кубическое относительно γ :

$$A_1 \gamma^3 + A_2 \gamma^2 + A_3 \gamma + A_4 = 0. \quad (11)$$

Здесь A_1, A_2, A_3, A_4 – некоторые коэффициенты, зависящие от $\rho, \alpha, \eta, \Gamma, K, k, H_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_s$.

Отметим, что при $\Gamma \rightarrow 1, \eta/K \rightarrow 0$ (замена пористой среды жидкостью) первое уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера, а из уравнения (11) при $a \rightarrow 0$ следует квадратное относительно γ дисперсионное уравнение, полученное в работе [2], результаты которой согласуются с экспериментом. Наконец, при $H_0 = 0$ (либо при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$) получается классический результат Релея о распаде струи обычной жидкости.

Уравнение (11) – кубическое и может быть приведено к так называемому неполному кубическому уравнению [8] с дискриминантом $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2$, где p и q выражаются через коэффициенты уравнения (11). При условии $Q > 0$ существует волновое движение, поскольку уравнение (11) имеет при этом два комплексно сопряженных корня. При $Q \leq 0$ волновых движений нет, так как все три корня уравнения (11) действительные.

3. Анализ модели. Конкретные числовые расчёты с дисперсионным уравнением (11) проводились для следующих значений параметров: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$; $\alpha = 20 \text{ г/с}^2$; $\eta = 0,01 \text{ г/см} \cdot \text{с}$; $\Gamma = 0,8$; $K = 0,02 \text{ см}^2$; $0 < k < 1,8 \text{ см}^{-1}$; $0 \leq H_0 \leq 40 \text{ Э}$ (эрстед); $\mu_1 = 1,8$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 1$; $\mu_s = 1$ ($1 \text{ Э} \approx 89,6 \text{ А/м}$).

Для симметричных возмущений ($m = 0$) и фиксированных значений $a = 0,5$ см, $a_0 = 1,1$ см, $0 \leq H_0 \leq 40$ Э интервал $0 < k < 1,8$ см⁻¹ делится критической точкой k_c ($\lambda_c = 2\pi/k_c$), которая находится из условия $Q = 0$, на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ волны отсутствуют: происходит нарастание возмущений ($\beta < 0$). Амплитуда возмущения растет с наибольшей скоростью при $k = k_m$, при котором $|\beta|$ достигает максимума. Размер образующихся при распаде жидкого столба капель равен $\lambda_m \approx 2\pi/k_m$ [2]. При $k \rightarrow k_c$ движение жидкости замедляется, т.е. $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. В интервале $k_c < k < 1,8$ см⁻¹ существуют затухающие ($\beta > 0$) волны.

На рисунке 1 приведены графики зависимостей безразмерных величин $\tilde{\omega}(k) = \omega(k)(\alpha/\rho a_0^3)^{-1/2}$ и $\tilde{\beta}(k) = \beta(k)(\alpha/\rho a_0^3)^{-1/2}$ при $m = 0$ для различных значений невозмущенного магнитного поля H_0 .

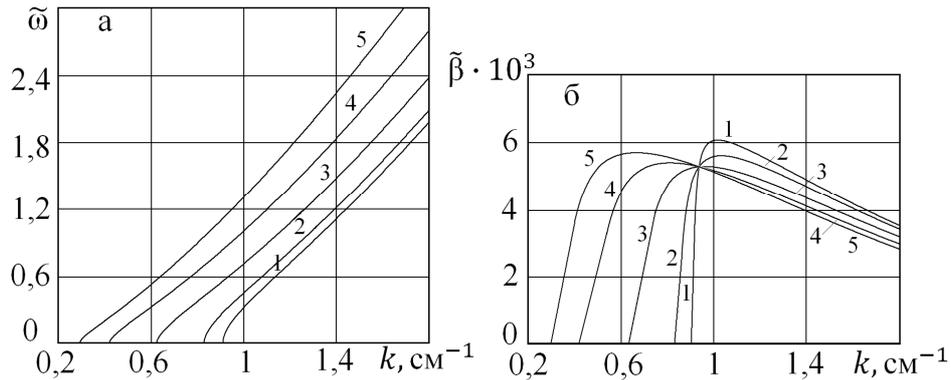


Рисунок 1. Зависимость безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ (а) и коэффициента затухания $\tilde{\beta}$ (б) от волнового числа k : $H_0 = 0, 10, 20, 30, 40$ Э (1 – 5); $m = 0$; $a = 0,5$ см; $a_0 = 1,1$ см

При $m = 1$ частота больше, а затухание возмущений сильнее, чем при $m = 0$ при одинаковых значениях прочих параметров. При $m \geq 2$ движение является аperiodическим, с сильным затуханием всех возмущений.

На рисунке 2 приведены графики зависимостей $\tilde{\omega}(k)$ и $\tilde{\beta}(k)$ при $m = 0$ и фиксированных значениях $H_0 = 20$ Э, $a = 0,5$ см, для разных значений a_0 . Они показывают влияние радиуса a_0 на безразмерные частоту и декремент возмущений различных длин волн.

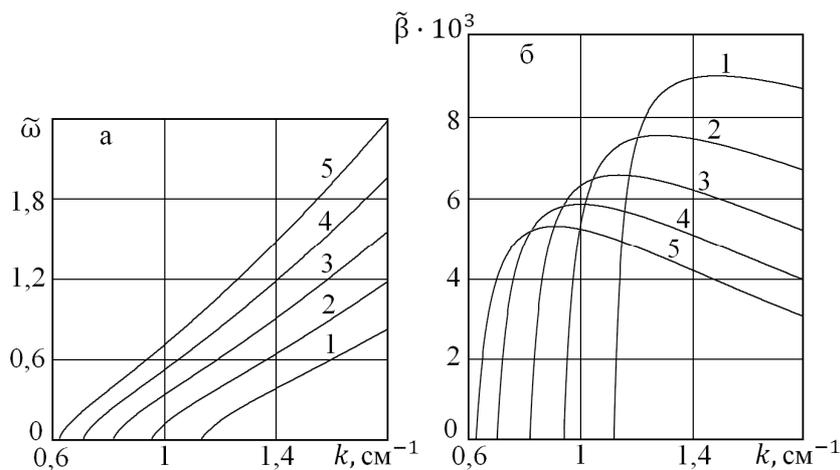


Рисунок 2. Зависимость безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ (а) и коэффициента затухания $\tilde{\beta}$ (б) от волнового числа k : $a_0 = 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1$ см (1 – 5); $a = 0,5$ см; $m = 0$; $H_0 = 20$ Э

Показано, что при $m=0$, $a_0=1,1$ см, $H_0=20$ Э и изменении a от 0,5 см до 0,9 см безмерная частота слабо зависит от радиуса пористого цилиндра. Изучена зависимость $\tilde{\beta}(k)$ при $m=0$ и фиксированных значениях $H_0=20$ Э, $a_0=1,1$ см для разных значений a . Показано, что при изменении a в пределах $a=0,5$ см до $a=0,9$ см величина $\tilde{\beta}(k)$ возрастает с ростом a при каждом фиксированном значении волнового числа.

Заключение. Исследовано распространение и неустойчивость волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости, окружающей ядро из пористого материала в приложенном магнитном поле, направленном вдоль оси жидкого столба. Рассмотрена область длинных волн ($0 < k < 1,8$ см⁻¹), которая при симметричных возмущениях ($m=0$) и достаточно слабых полях ($0 \leq H_0 \leq 40$ Э) делится критической точкой k_c на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ происходит апериодическое движение ($\beta < 0$) с нарастающей амплитудой, приводящее к образованию капель, размер которых равен $\lambda_m = 2\pi/k_m$. Показано, что размер капель увеличивается с ростом магнитного поля H_0 , т.е. магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на распад жидкого столба, препятствуя его разбрызгиванию.

При $k \rightarrow k_c$ ($\lambda \rightarrow \lambda_c = 2\pi/k_c$) движение жидкости замедляется, т.е. $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, что связано с взаимной нейтрализацией капиллярных и магнитных сил, действующих на поверхности жидкости.

В интервале $k_c < k < 1,8$ см⁻¹ существует затухающее волновое движение с безмерной частотой $\tilde{\omega}(k)$, монотонно возрастающей с ростом волнового числа k . Зависимость $\tilde{\beta}(k)$ имеет более сложный характер и не является монотонной.

Список литературы

1. Р.Розенцвейг. Феррогидродинамика // М.: Мир, 1989, 356с.
2. Н.Г.Тактаров. Распад струи магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика, 1975, №2, с. 35–38.
3. И.В.Столяров, Н.Г.Тактаров. Распространение волн в слое жидкости на пористом основании // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1987, №5, с. 183–186.
4. С.М.Миронова, Н.Г.Тактаров. Распространение волн на заряженной поверхности цилиндрического столба жидкости, окружающей длинное пористое ядро // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2012, №4, с. 104–110.
5. Н.Г.Тактаров, А.Б.Иванов. К исследованию фильтрации магнитных жидкостей // Магнитная гидродинамика, 1990, №3, с. 138–139.
6. Л.И.Седов. Механика сплошной среды // М.: Наука, 1976, Т. 1., 536с.
7. И.Е.Тамм. Основы теории электричества // М.: Наука, 1976, 616с.
8. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры // М.: Наука, 1975, 431с.