Встречные скачки уплотнения

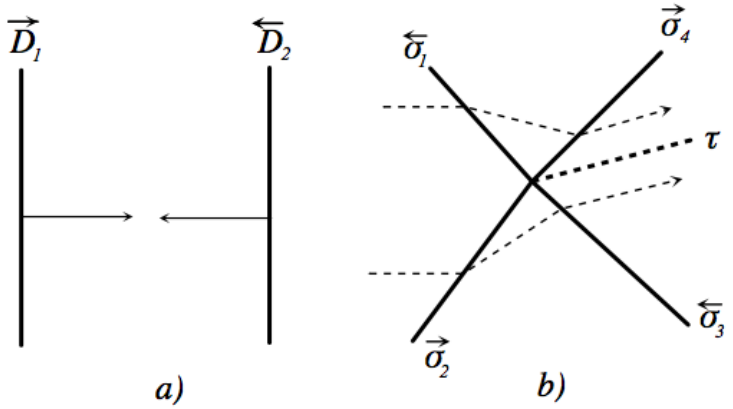
Павел Викторович Булат,
Николай Владимирович Продан
Владимир Владимирович Упырев,
Университет ИТМО

Аннотация. Рассматривается взаимодействие встречных скачков уплотнения. Описаны критерии перехода от регулярного отражения встречных скачков к нерегулярному: критерий фон Неймана, а также критерий стационарной маховской конфигурации. Описаны области, в которых переход от одного типа отражения к другому возможен только скачком, а также области возможного плавного перехода. Представлены зависимости интенсивности отраженных скачков от интенсивности взаимодействующих встречных скачков. Представлены качественные картины ударно-волновых структур, возникающих при взаимодействии встречных скачков уплотнения.

КЛЮЧЕВЫЕМ СЛОВА: УДАРНАЯ ВОЛНА, СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ, МАХОВСКОЕ ОТРАЖЕНИЕ, ВСТРЕЧНЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ, УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ.

ВВЕДЕНИЕ

Цель - представить основные сведения о проблеме взаимодействия встречных скачков уплотнения. Проще всего представить встречные газодинамические разрывы в одномерном случае, когда ударные волны бегут навстречу друг-другу (рисунок 1a). В зависимости от их интенсивности могут возникать различные виды волнового взаимодействия [1]. По аналогии с одномерным случаем встречными косыми скачками уплотнения называются взаимодействующие скачки, которые разворачивают поток в разные стороны (рисунок 1b). Необходимость изучения встречных скачков возникает при проектировании современных воздухозаборников внутреннего сжатия, рассчитанных на большие числа Маха, прямоточных воздушно-реактивных двигателей с дозвуковым и сверхзвуковым горением, в несимметричных сверхзвуковых соплах и в ряде других случаев.



$\vec{D}_1$ - "левая" движущаяся ударная, $\overleftarrow{D}_2$ - "правая" движущаяся ударная, $\overleftarrow{\sigma}_1$ - "левый" приходящий скачок уплотнения, $\vec{\sigma}_2$ - "правый" приходящий скачок уплотнения, $\overleftarrow{\sigma}_3$ - "левый" исходящий скачок уплотнения, $\vec{\sigma}_4$ - "правый" исходящий скачок уплотнения, τ - тангенциальный разрыв.

Рисунок 1 - Встречные газодинамические разрывы: a) одномерные ударные волны, b) косые скачки уплотнения.

В некотором смысле данная задача является обобщением случая отражения косого скачка от стенки или от плоскости симметрии [2]. Отличие заключается в том, что картина течения может быть несимметричной, т.е. взаимодействующие скачки (ударные волны), в общем случае, могут иметь разные интенсивности. В результате картины взаимодействия встречных скачков отличаются бóльшим разнообразием, чем в случае отражения волны от стенки. В 1960 году Молдер [3; 1960] разработал аналитическую теорию регулярного взаимодействия встречных ударных волн. Так же, как и в случае отражения скачка от стенки, возможно как регулярное, так и нерегулярное взаимодействие встречных скачков уплотнения [4]. Наибольший вклад в определение областей существования различных регулярных и нерегулярных взаимодействий встречных скачков принадлежит В.Н.Ускову [5; 1980] и А.Л.Старых [6; 1986]. Алгоритмы, определяющие вид взаимодействия и характер исходящих разрывов, были разработаны А.Л.Адриановым [7; 1988] и доведены им до уровня пакета прикладных программ для расчета сверхзвуковых течений с ударными волнами, в котором все газодинамические разрывы выделялись и отслеживались явно.

С новой силой интерес к данной задаче проявился с конца 90-х годов. Это было связано со стартом программ изучения полета с гиперзвуковыми скоростями. Первые же эксперименты, проведенные с воздухозаборниками, в которых реализуется взаимодействие встречных скачков уплотнения, показали, что изменение скорости потока сопровождается резкими скачкообразными перестройками ударно-волновой структуры, возникновением нестационарных и колебательных явлений. С увеличением скорости потока эти неприятные для конструкции летательного аппарата явления становились более выраженными. Как показал анализ, причина заключается в неоднозначности решений уравнений газовой динамики для регулярного и нерегулярного взаимодействия скачков в некотором диапазоне параметров, что ведет к гистерезису [8] при увеличении и уменьшении числа Маха перед ударно-волновой структурой. Проявляется это в том, что при увеличении и уменьшении числа Маха переход от регулярного к нерегулярному отражению осуществляется при разных числах Маха (рисунок 2), отличается и высота ножки Маха.

Наибольший вклад в изучение этого феномена внесли сотрудники Института теоретической и прикладной механики Сибирского Отделения Академии Наук России [9, 10], а также Бен-Дор [11, 12]. Стоит отметить их совместную работу [13], в которой изучались асимметричные случаи взаимодействия встречных скачков. Бен-Дор, Т.Ельперин и Е.И.Васильев изучили с помощью численных методов гистерезис при взаимодействии конических скачков [14].

Несмотря на то, что взаимодействие встречных скачков уплотнения изучается уже более 30 лет, теория до сих пор не закончена. Неясно, является ли классификация ударно-волновых структур, возникающих при взаимодействии встречных скачков, предложенная В.Н.Усковым, исчерпывающей. Каковы критерии перехода от регулярного отражения к нерегулярному? Каково влияние динамических эффектов и наличия возмущения перед волновой структурой и за ней на гистерезис? Все это требует подробного аналитического, численного и экспериментального изучения.

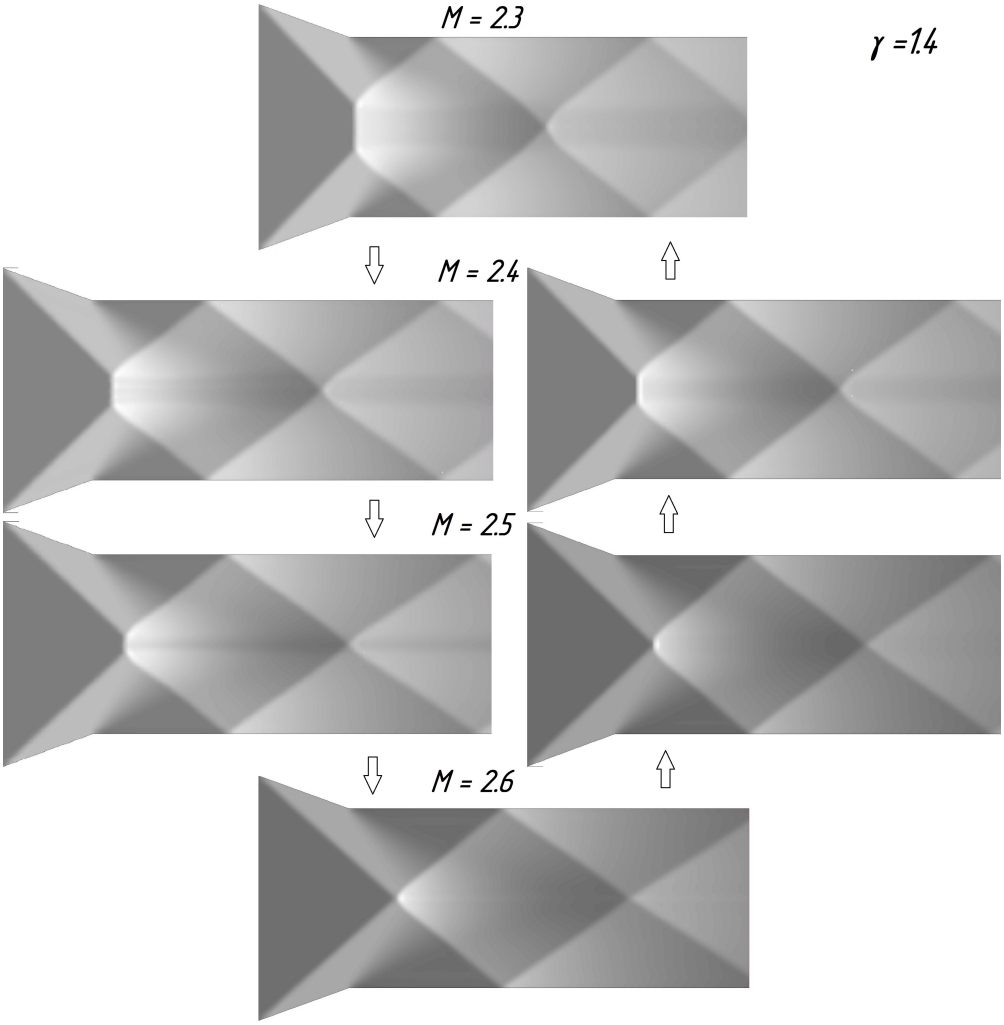


Рисунок 2 - Гистерезис при переходе от регулярного взаимодействия встречных скачков к нерегулярному и обратно.

1 Модель регулярного взаимодействия встречных скачков уплотнения

Вид интерференции встречных скачков уплотнения $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$, имеющих различные направления, зависит от их интенсивности J_1 и J_2, соответственно. Если J_1 и J_2 (см. рисунок 1b) меньше J_s

$$J_S = \frac{M^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2-1}{2}\right)^2 + \varepsilon\left(M^2-1\right)+1}, \tag{1}$$

где γ - показатель адиабаты, то течение за приходящими скачками сверхзвуковое, и в результате их пересечения возникают исходящие скачки $\vec{\sigma}_3$ и $\vec{\sigma}_4$, направления которых противоположны соответствующим приходящим скачкам $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$. Такое взаимодействие называется регулярным.

Уравнение интерференции для сверхзвуковых встречных скачков в случае регулярного взаимодействия имеет вид [15]

$$\beta_\sigma(\hat{M}_1, J_4) = -\beta_\sigma(\frac{J_1}{J_2} J_4, \hat{M}_2) + \beta_\sigma(M, J_1) + \beta_\sigma(M, J_2), \tag{2}$$

Углы отклонения потока на накрест лежащих скачках приблизительно равны $\beta_3 \approx \beta_1$ и $\beta_4 \approx \beta_2$ при произвольных интенсивностях приходящих скачков. Это нетрудно показать, используя линейное приближение для приходящих скачков

$$\Lambda = \ln J = \Gamma(M)\beta, \ \Gamma(M) = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует

$$\Lambda_3 = (a\Lambda_1 + b)\Gamma_3(\hat{M}_1) / \Gamma_2(M), \tag{4}$$

где $a = \dfrac{\Gamma_2(M) + \Gamma_4(\hat{M}_1)}{\Gamma_4(\hat{M}_1) + \Gamma_3(\hat{M}_2)}$; $b = \dfrac{\Gamma_4(\hat{M}_1) - \Gamma_2(M)}{\Gamma_4(\hat{M}_1) + \Gamma_3(\hat{M}_2)}$.

Используя линейные зависимости между Λ_i и β_i

$$\Lambda = \chi \cdot \Gamma(\gamma, M) \cdot \beta, \ \ \chi = \pm 1, \tag{5}$$

легко определить углы поворота на исходящих разрывах

$$\beta_3 = a\beta_1 - b\beta_2. \tag{6}$$

Коэффициент b при небольших интенсивностях скачков является величиной второго порядка малости по сравнению с коэффициентом a. Этот факт может служить основой для создания быстро сходящегося алгоритма расчета решений уравнения интерференции (2). Полагая в нулевом приближении $\beta_3^0 = \beta_1$, определим интенсивность J_3^0 отраженного скачка $\bar{\sigma}_3$ с помощью кубического уравнения с коэффициентами $A_n(\hat{M}_1, \beta_1)$.

$$\sum_{n=0}^{3} A_n z^n = 0, \tag{7}$$

где

$$z = J - 1,\ A_3 = 1 + tg^2\beta,\ A_2(\beta;M) = (1+\varepsilon)\gamma M^2 - \left[2\gamma M^2 - (1+\varepsilon)\right]A_3,$$

$$A_1(\beta;M) = \gamma M^2\left[\gamma M^2 - 2(1+\varepsilon)\right]tg^2\beta,\ A_0(\beta;M) = (1+\varepsilon)(\gamma M^2)^2 tg^2\beta.$$

Так как

$$J_4^0 = J_3^0\frac{J_2}{J_1}, \tag{8}$$

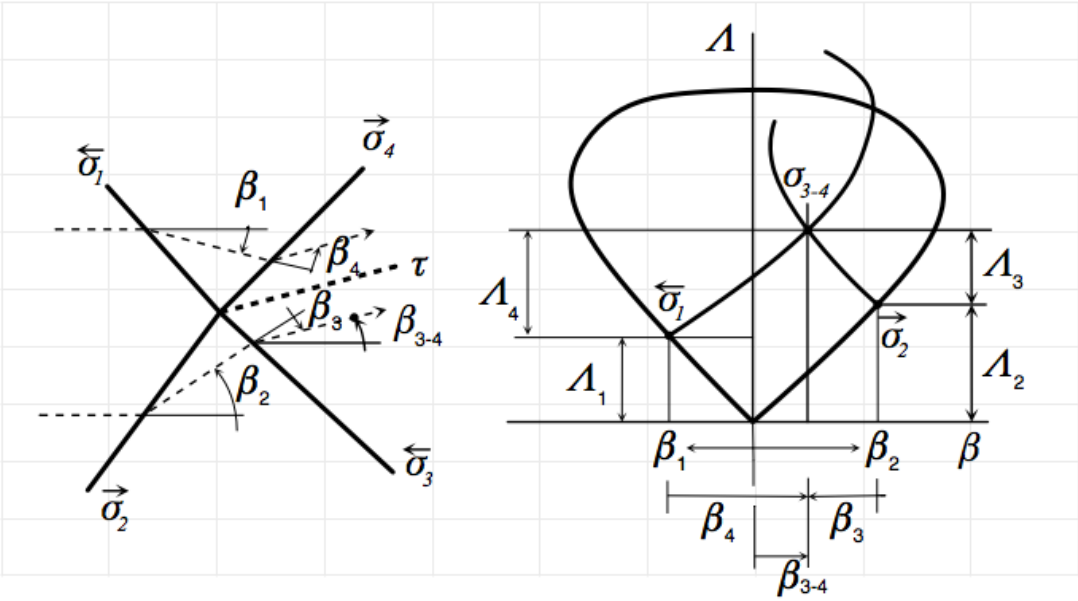
то можно найти угол поворота $\beta_4^0(\hat{M}_1, J_4^0)$ на скачке $\bar{\sigma}_4$

$$tg\beta_\sigma = \frac{1-E}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{\frac{J_m - J}{1+\varepsilon J}} + \sqrt{\frac{1+\varepsilon J}{J_m - J}}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Индекс "m" означает максимальную интенсивность скачка, т.е. интенсивность прямого скачка уплотнения. Если разность $\Delta = (\beta_2 + \beta_3^0) - (\beta_1 + \beta_4^0)$ больше заданной точности расчета, задавая в первом приближении $\beta_3^{(1)} = \beta_3^0 + \Delta/2$, повторяем процедуру вычислений. Заметим, что при равных интенсивностях приходящих скачков уплотнения (J_1=J_2) интенсивности исходящих разрывов равны ($J_3 = J_4$), и их расчет аналогичен задаче об отражении скачков от стенки.

Зависимости $\Lambda = lnJ(\beta)$ при заданном числе Маха называются ударными полярами или изомахами. Ударные поляры удобно использовать для анализа задач интерференции разрывов. На рисунке 3 приведено графическое решение для случая регулярного взаимодействия встречных скачков. Слева на рисунке 3 показаны скачки уплотнения σ_1 и σ_2, разворачивающие исходное течение в противоположном направлении β_1 и β_2. За скачками σ_3 и σ_4 потоки должны быть параллельны друг другу, поэтому скачок σ_4 разворачивает поток в направлении противоположном развороту потоку на скачке σ_1. Со скачками σ_2 и σ_3 аналогично. Итоговый угол разворота $\beta_{3\text{-}4}$ определяется как алгебраическая сумма углов разворота потока на всех скачках, что показано на рисунке 3 справа. Очевидно, что при равенстве интенсивности скачков σ_1 и σ_2, итоговый угол разворота потока $\beta_{3\text{-}4}$ будет равен нулю, картина на плоскости поляр полностью симметричная и в, данном случае, взаимодействие встречных скачков аналогично случаю регулярного отражения скачка от стенки. Давление за скачками σ_3 и σ_4 должны быть равны, поэтому

$\Lambda_1+\Lambda_4=\Lambda_2+\Lambda_3$, что хорошо видно на плоскости поляр на рисунке 3 справа. Очевидно, что при регулярном взаимодействии скачков точка 3-4 пересечения поляры 1 и поляры 2 должна обязательно находиться внутри основной поляры. Если вторичные поляры пересекаются выше основной поляры, то возможно, как регулярное, так и нерегулярное взаимодействие скачков.



a) b)

a –регулярное взаимодействие косых скачков уплотнения; b – отображение решения регулярного взаимодействия косых скачков на плоскости поляр. β_i - углы разворота потока на соответствующем i-ом скачке, Λ_i- логарифм интенсивности соответствующего i-ого скачка, τ- тангенциальный разрыв.

Рисунок 3 - Решение на плоскости поляр задачи о регулярном взаимодействии скачков.

2 Модель нерегулярного взаимодействия встречных скачков уплотнения

Если вторичные поляры, соответствующие скачкам σ_1 и σ_2, не пересекаются, то регулярное взаимодействие встречных скачков невозможно. Очевидно, достаточное условие существования решений заключается в расположении предельной точки (l), соответствующей предельному углу отклонения потока на одной из поляр, внутри другой поляры. Эти условия можно сформулировать сравнивая, углы поворота потоков

$$K_{l_1} = \beta_2(M, J_2) - \beta_3(\hat{M}_2, J_2 J_{l_3}) + \beta_1(M, J_1) - \beta_4(\hat{M}_1, J_2 J_{l_3}); \qquad (10)$$

или

$$K_{l_2} = \beta_2(M, J_2) - \beta_3(\hat{M}_2, J_1 J_{l_4}) + \beta_1(M, J_1) - \beta_4(\hat{M}_1, J_1 J_{l_4}); \qquad (11)$$

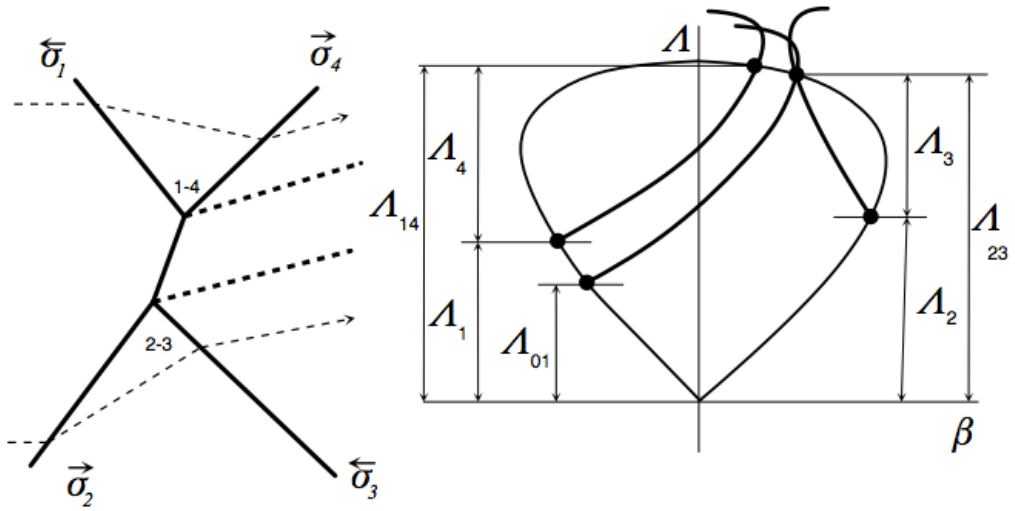
где предельные углы $J_{l_3} = J_l(\hat{M}_2)$, а $J_{l_4} = J_l(\hat{M}_1)$ рассчитываются по формуле

$$J_l = \frac{M^2 - 2}{2} + \left[\left(\frac{M^2 - 2}{2} \right)^2 + (1 + 2\varepsilon)(M^2 - 2) + 3 + 2\varepsilon \right]^{1/2}. \qquad (12)$$

Если $K_{l_1} \le 0$ и выполняется ограничение $J_1 J_{l_3} \le J_5 J_{m_4}$ или $K_{l_2} \le 0$ и выполняется ограничение $J_5 J_{l_4} \le J_1 J_{m_3}$, то решение для регулярного взаимодействия существует. Максимальные интенсивности скачков определяются по формулам

$$J_{m_4} = (1 + \varepsilon)\hat{M}_1^2 - \varepsilon, \; J_{m_3} = (1 + \varepsilon)\hat{M}_2^2 - \varepsilon. \qquad (13)$$

Если условия (10)-(11) не выполняются, то точка пересечения поляр 1 и 2 лежит выше основной поляры, либо поляры 1 и 2 вообще не пересекаются. Границей, разделяющей регулярную (РИ) и нерегулярную маховскую интерференцию (МИ), является случай, когда точка пересечения поляр 1 и 2 лежит на основной поляре (рисунок 4).



a) b)

a –нерегулярное взаимодействие встречных скачков; b – отображение решения нерегулярного взаимодействия косых встречных скачков на плоскости поляр. Λ_i- логарифм интенсивности соответствующего i-ого скачка. Λ_{01}- логарифм особой интенсивности скачка $\vec{\sigma}_1$, при которой осуществляется переход от регулярного взаимодействия к нерегулярному.

Рисунок 4 - Решение на плоскости поляр задачи о маховском взаимодействии скачков.

Аналогом этому при отражении скачка от стенки или оси симметрии является критерий стационарной маховской конфигурации (СМК), когда вторичная поляра пересекает главную поляру в её вершине [16, 17]. Если интенсивности приходящих скачков равны $J_1=J_2$, то эта точка располагается в вершине основной поляры и переход РИ→МИ начинается при $J_1=J_2=J_0$, J_0 определяется формулой

$$\sum_{k=0}^{3} A_k J_0^k = 0\,,\quad \begin{aligned} &A_3 = 1-\varepsilon^2,\\ &A_2 = -\left(\left(1+\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)J_m+1+\varepsilon^2\right),\\ &A_1 = \varepsilon\left(1+J_m\right)\left[\left(1-\varepsilon\right)J_m-2\right],\\ &A_0 = \left(1-\varepsilon\right)J_m\left(J_m-1\right),\\ &J_m = \left(1+\varepsilon\right)M^2-\varepsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Для случая $J_1 \neq J_2$, каждому значению J_2 соответствует величина J_{01}, определяющая начало нерегулярной интерференции (см.рисунок 4). Определение этой величины производится в следующей последовательности: по заданным значениям M и J_2 рассчитывается тройная конфигурация ударных волн (ТК-1 или ТК-2 по классификации [18]) и находится интенсивность $J_{1\text{-}4}$ главного скачка уплотнения в этой конфигурации. Величина $J_{1\text{-}4}$ позволяет путем расчета тройной конфигурации при скачке $\bar{\sigma}_1$ найти интенсивность J_{01} другого скачка уплотнения, при которой существует данная тройная конфигурация. При этом считается, что главный скачок прямолинейный и $J_{1\text{-}4}=J_{2\text{-}3}$. Так определяются области существования нерегулярного взаимодействия встречных скачков уплотнения. В описанном выше случае переход РИ→МИ происходит плавно, без скачкообразного изменения параметров.

Следует отметить, что существует область параметров задачи, когда вторичные поляры пересекаются выше основной поляры. Долгое время считалось, что в таком случае следует выбирать МИ. Однако в последнее время появились численные и экспериментальные результаты, которые показывают, что реализация того или иного решения зависит от предыстории, т.е. направления изменения параметров задачи, а также от наличия возмущений. Таким образом, в данной области могут теоретически существовать два решения: РИ и МИ. Её границей

является случай, когда поляры касаются друг друга и точка касания лежит вне основной поляры. Критерий и механизм обратного перехода МИ→РИ в области неоднозначности решения требуют дополнительных исследований.

Касание ударных поляр в точках, соответствующих предельным углам поворота потока на соответствующем скачке может происходить внутри основной поляры, для этого достаточно, чтобы предельная точка одной из поляр, соответствующая $J=J_l$, находилась внутри основной поляры. Если точка касания двух поляр лежит внутри главной поляры, то плавный переход к МИ невозможен, т.к. при вырождении точки пересечения вторичных поляр ударно-волновая структура скачком переходит к конфигурации, соответствующей пересечению вторичных ударных поляр с дозвуковой частью основной ударной поляры.

3 Результаты и анализ

3.1 Определение интенсивности исходящих скачков при РИ

Если при РИ зафиксировать интенсивность одного из скачков, например σ_1, а интенсивность второго скачка σ_2 увеличивать, то увеличивается интенсивность накрест лежащих скачков (в рассматриваемом случае σ_3), а интенсивность прилежащего скачка σ_4 уменьшается. Зависимость интенсивности отраженных скачков σ_3 и σ_4 от интенсивности взаимодействующих скачков σ_1 и σ_2 приведена на рисунке 5. Как видно, интенсивности накрест лежащих скачков уплотнения могут отличаться весьма значительно.

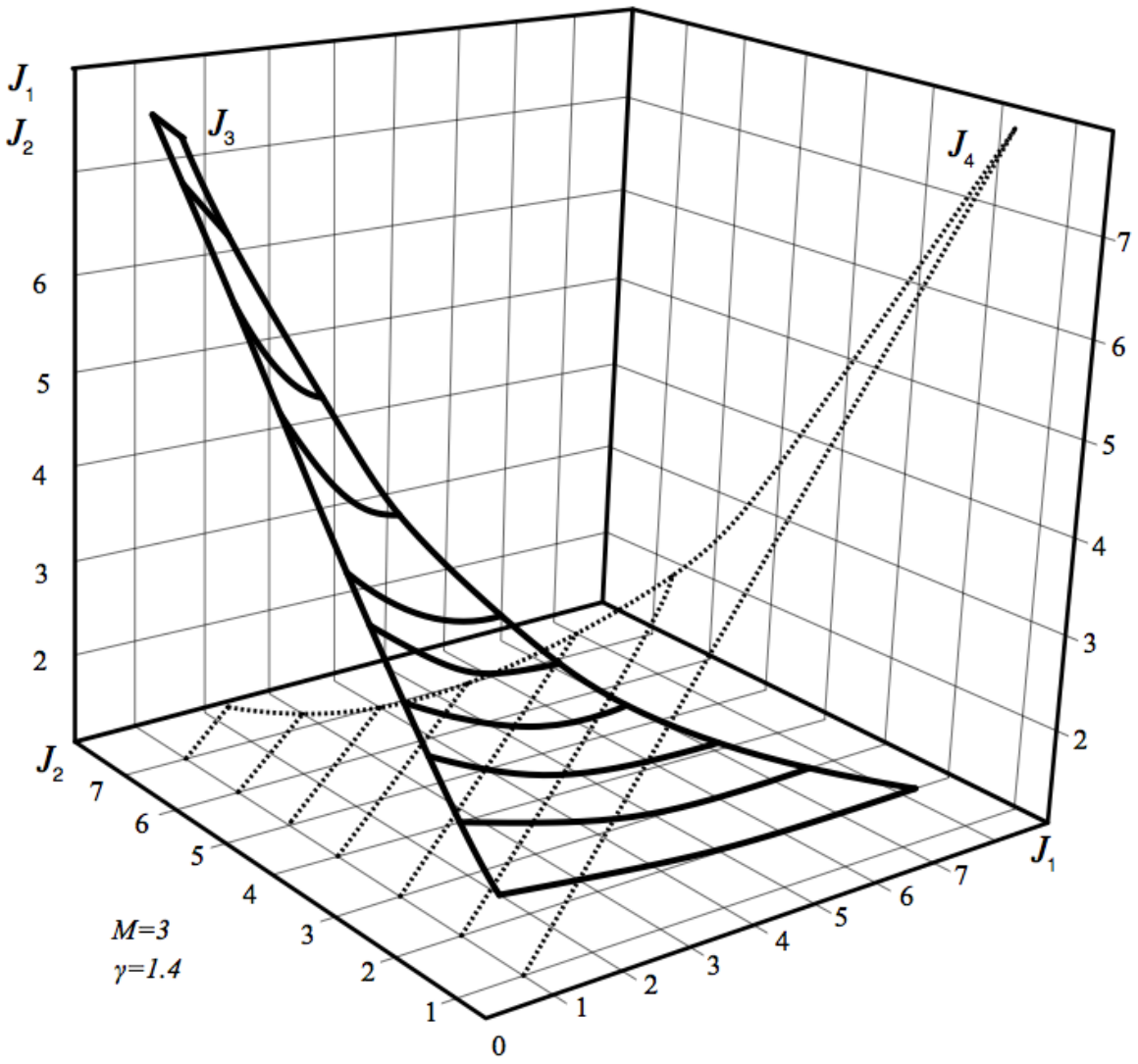


Рисунок 5 - Зависимость интенсивности отраженных скачков от интенсивности приходящих скачков при регулярном взаимодействии.

3.2 Определение граничных параметров при переходе РИ→МИ

Некоторые результаты расчетов зависимости $J_{02}(J_1)$ для $\gamma = 1.4$ и различных чисел Маха приведены на рисунке 6. Прямая линия соответствует равенству $J_1=J_2$.

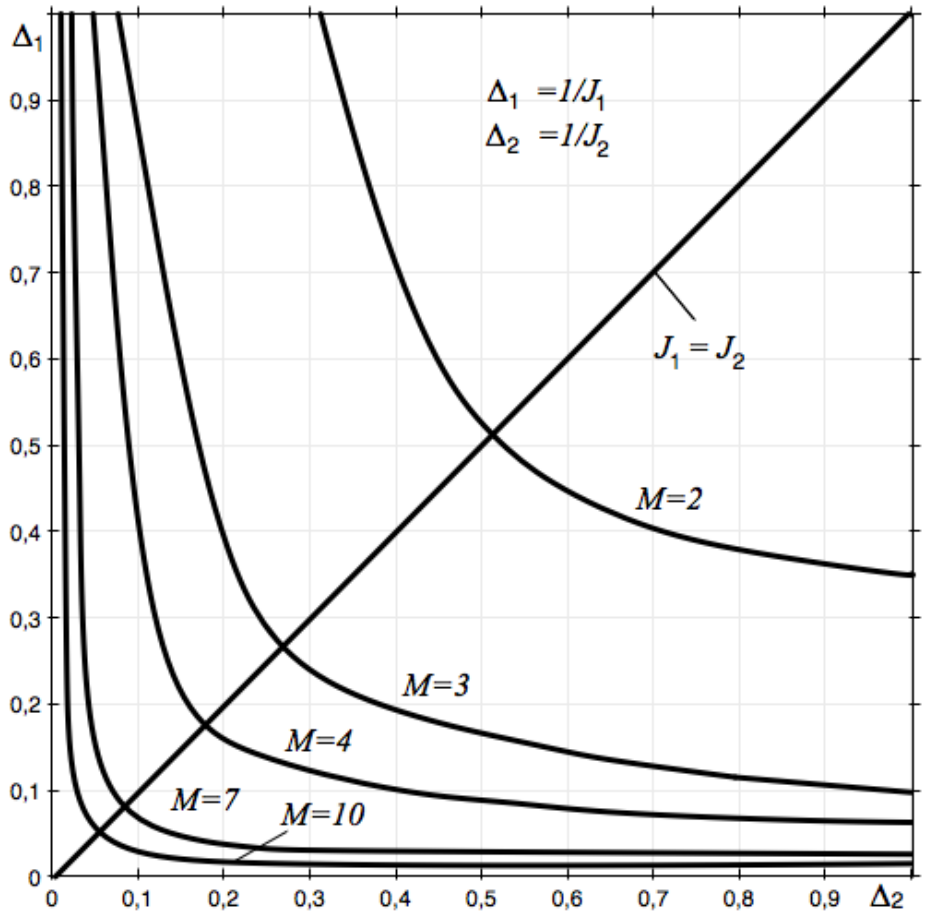
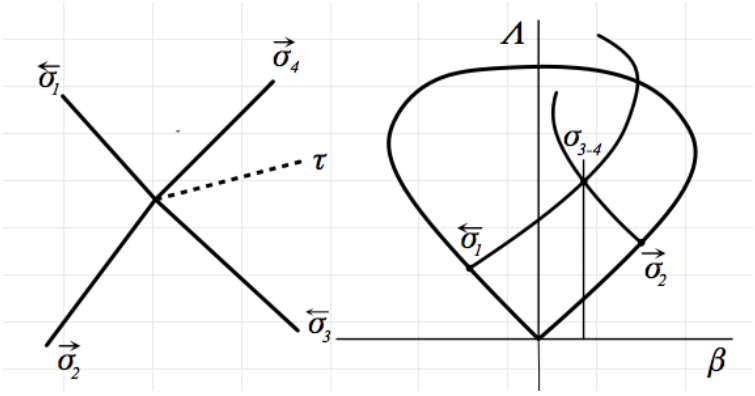


Рисунок 6 - Зависимость интенсивности приходящего скачка уплотнения, соответствующей началу МО, от интенсивности другого приходящего скачка.

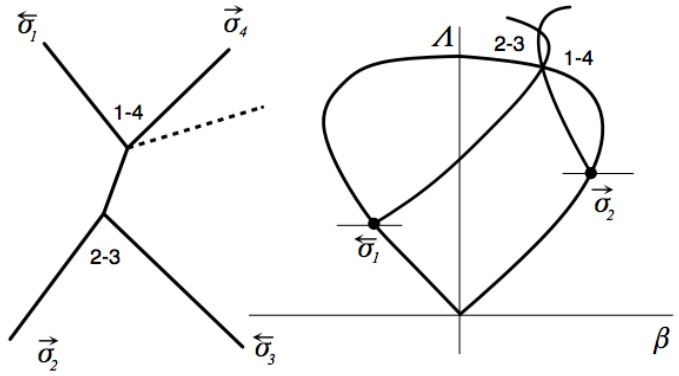
3.3 Изменение качественной картины течения при увеличении интенсивности одного из встречных скачков

Рассмотрим процесс перехода регулярной интерференции встречных скачков уплотнения в маховскую по мере увеличения интенсивностей приходящих ударных волн (рисунок 7). На рисунке 7: a – регулярное взаимодействие; b – маховское отражение с прямым главным скачком уплотнения, c - маховское отражение с мостообразным главным скачком уплотнения, d - конфигурация с вырожденной тройной точкой 2-3.

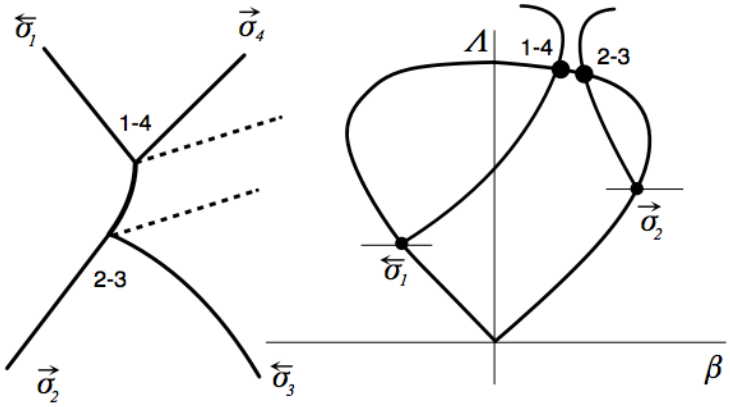
При больших числах Маха и фиксированной интенсивности одного из скачков J_1 по мере увеличения величины J_2 четырехскачковая регулярная конфигурация ударных волн (рисунок 7a) переходит в пятискачковую маховскую (рисунок 7b) при $J_2 = J_0$ с образованием мостообразной ударной волны σ_5, которая образует тройные конфигурации ТК-2 в точке 2-3 при скачке σ_2 и ТК-1 в точке 1-4 при σ_1.



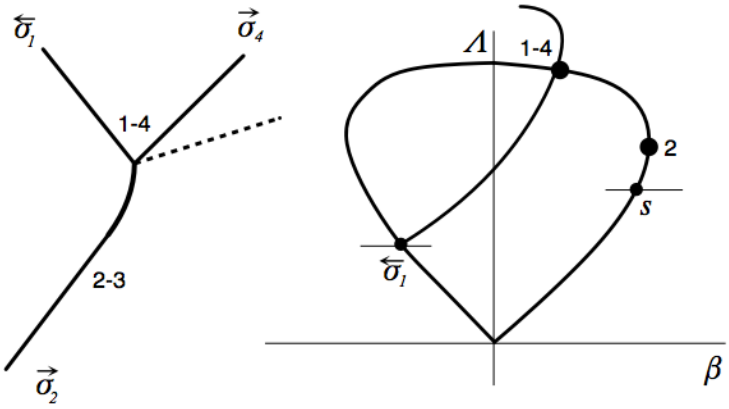
a)



b)



c)



d)

Рисунок 7 - Трансформация ударно-волновой структуры при изменении интенсивности одного из двух взаимодействующих скачков.

При этом его форма прямолинейна, а интенсивность $J_5=J_{1\text{-}4}=J_{2\text{-}3}$. Дальнейшее увеличение J_2 приводит к трансформации ТК-2 при неизменных интенсивностях ударных волн в ТК-1, в силу чего скачок σ_5 становится криволинейным (рисунок 7с). Его длина растет. Интенсивность скачка σ_5 изменяется от $J_{1\text{-}4}$ до $J_{2\text{-}3}$.

Если продолжать увеличивать интенсивность скачка σ_2 до $J_2=J_T$, где

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon)M^2(1+\varepsilon J_T)^2=(1-\varepsilon)(J_T+\varepsilon)\bullet\\&\bullet\left[(1+\varepsilon)M^2-(J_T+\varepsilon)\right]\left[(J_T+\varepsilon)M^2-(J_T-1)(J_T+2-\varepsilon)\right]\end{aligned}\qquad(15)$$

Когда $J_2=J_T$, отраженный скачок уплотнения σ_3 становится прямым, затем меняет свое направление, образуя ТК-3, т.е. скачки σ_2 и σ_3 образуют структуру, состоящую из догоняющих скачков одного направления.

Если продолжать увеличивать интенсивность скачка σ_2 так, что течение за ним станет дозвуковым при $J_2>J_S$, то скачок σ_3 исчезает, и интерференция встречных скачков представляется в виде одной тройной конфигурации ТК-1. Приходящий скачок уплотнения σ_2 становится криволинейным и его интенсивность изменяется от J_2 до значения, соответствующего интенсивности скачка 1-4 в ТК-1. Если теперь увеличивать интенсивность J_1 второго приходящего скачка уплотнения σ_1, то при $J_1>J_S$, исчезает тройная конфигурация при этом скачке, и интерференция встречных ударных волн приводит к образованию единого криволинейного скачка уплотнения с полностью дозвуковым течением за ним.

Перестройка ударно-волновых структур встречных скачков при небольших числах Маха имеет свои особенности и здесь не рассматривается.

При симметричном взаимодействии встречных скачков ударно-волновые структуры подобны, изображенным на рисунке 7, но симметричны. Симметрией отличаются и решения на плоскости поляр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное взаимодействие встречных скачков сложнее случая отражения скачка уплотнения от стенки. При регулярном взаимодействии встречных скачков интенсивности накрест лежащих скачков могут отличаться весьма значительно. Переход от регулярного отражения к нерегулярном может происходить плавно при

больших числах Маха или в ходе быстрого скачкообразного нестационарного процесса при небольших числах Маха. Механизм перехода к нерегулярному взаимодействию при небольших числах Маха требует дополнительного изучения. Трансформация ударно-волновых структур при увеличении и уменьшении числа Маха характеризуется наличием гистерезиса, т.е. в некоторых областях параметров одним и тем же параметрам задачи соответствует две различные картины течения. Возможность возникновения гистерезиса объясняется наличием областей параметров задачи, в которых допускается существование и регулярного отражения, и нерегулярного отражения скачков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Усков, В.Н. Бегущие одномерные волны.- СПб: БГТУ ВОЕНМЕХ.. - 2000.- 224 с.

[2] Bulat P.V., Uskov V. N. Mach reflection of a shock wave from the symmetry axis of the supersonic nonisobaric jet. // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. – 2014 – 8, 1. – 135–42 С. http://maxwellsci.com/print/rjaset/v8-135-142.pdf

3 Molder S. (1960) Head–on interaction of oblique shock waves. University of Toronto Institute for Aerospace Studies (UTIAS) Technical Note No. 38. September.

[4] Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов // Сверхзвуковые газовые струи: Сб. ст. - Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1983. С.22 - 46.

[5] Усков В.Н. Ударные волны и их взаимодействие. Учеб. пособие.-Л.:Ленингр. механ.ин-т, 1980. - 88 с.

[6] Старых А.Л. Нерегулярное взаимодействие скачков уплотнения между собой и с тангенциальными разрывами // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. - Т.17, №6.-С.119-124.

[7] Адрианов А.Л. Выделение множества разрывов на несогласованной сетке в двумерных стационарных сверхзвуковых течениях//Моделирование в механике. Сер.Струйные течения.-Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР.-1988.-Т.2(19), №6.-С. 3-9.

[8] Chpoun A, Ben-Dor G. Numerical confirmation of the hysteresis phenomenon in the regular to the Mach reflection transition in steady flows. Shock Waves 1995; 5(4):199–204.

[9] Fomin VM, Hornung HG, Ivanov MS, Kharitonov AM, Klemenkov GP, Kudryavtsev AN, Pavlov AA. The study of transition between regular and Mach reflection of shock waves in different wind tunnels. In: Skews B, editor. Proceedings of the 12th International Mach Reflection Symposium, Pilanesberg, South Africa, 1996. p. 137–51.

[10] Ivanov MS, Ben-Dor G, Elperin T, Kudryavtsev A, Khotyanovsky D. Mach-number-variation-induced hyster- esisinsteadyflowshockwavereflections.AIAAJ 2001;39(5):972–4.

[11] Ben-Dor G. Shock wave reflection phenomena. New York: Springer, 1991.

[12] Ben-Dor G. Two-dimensional interactions. In: Ben-Dor G, Igra O, Elperin T, editors. Handbook of shock waves. Boston: Academic Press, 2001.

[13] Ivanov MS, Ben-Dor G, Elperin T, Kudryavtsev AN, Khotyanovsky DV. The reflection of asymmetric shock waves in cteady flows. J Fluid Mech 1999; 390:25-43.

[14] Ben-Dor G, Elperin T, Vasilev EI. A numerical investiga- tion of the flow-Mach-number-induced hysteresis phenom- enon in the interaction of conical shock waves, 2003, to be published.

[15] Усков В.Н., Адрианов А.Л., Старых А.Л., "Монография. 'Интерференция Стационарных Газодинамических Разрывов'.," Новосибириск: ВО "Наука". Сибирская издательская фирма., 1995, С. 180.

[16] Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н. В. Обоснование применения модели стационарной маховской конфигурации к расчету диска маха в сверхзвуковой струе. // Фундаментальные исследования. – 2012 – №11, Ч.1. – 168–75 С. http://www.rae.ru/fs/pdf/2012/11-1/30468.pdf

[17] Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н. В. История изучения нерегулярного отражения скачка уплотнения от оси симметрии сверхзвуковой струи с образованием диска маха. // Фундаментальные исследования. – 2012 – №9, Ч.2. – 414–20 С. http://www.rae.ru/fs/pdf/2012/9-2/29.pdf

[18] Uskov V.N., Chernyshov M. V. Special and extreme triple shock-wave configurations. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2006 – 47, 4. – 492–504 C. http://link.springer.com/article/10.1007/s10808-006-0081-5. DOI: 10.1007/s10808-006-0081-5