

УДК 534.26

## ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ В КЛИНЕ

*Крылов В. В., Можяев В. Г.*

Развита приближенная теория отражения и прохождения волн Рэлея в упругом клине, основанная на представлении клина в виде системы из двух связанных волноводов поверхностных волн. Рассмотренная теория хорошо согласуется с известными опытными данными и позволяет предсказать ряд новых результатов, которые могут быть проверены экспериментально.

Проблема взаимодействия волн Рэлея с ребром упругого клина исследуется в таких областях науки и техники, как сейсмология, ультразвуковая поверхностная дефектоскопия, механика разрушения [1—4]. В последнее время она вызвала определенный интерес и у специалистов по акустоэлектронике, что связано с перспективами использования ребер клиньев в качестве эффективных частотно-независимых отражателей поверхностных волн [5], для широкополосного преобразования объемных волн в поверхностные и обратно [6, 7], а также для подавления ложных сигналов в линиях задержки и фильтрах на поверхностных акустических волнах [8]. Несмотря на продолжительный период изучения указанной проблемы и большое количество посвященных ей публикаций (см., например, обзор [9]), в теоретическом плане она все еще далека от своего решения даже для изотропного случая. Это обусловлено принципиальными трудностями построения точных аналитических решений динамических уравнений теории упругости, удовлетворяющих условиям отсутствия нормальных напряжений на поверхности клиновидной области [10]. Известные численные решения, полученные при помощи ЭВМ [11, 12], относятся лишь к наиболее простому случаю прямоугольного клина. Существующие же в настоящее время приближенные теории [9, 13—16] плохо согласуются с экспериментальными данными, особенно в области малых углов раскрытия клина  $\theta$ . В частности, ни одна из этих теорий удовлетворительно не описывает наблюдаемые в эксперименте [1—3] многократные осцилляции коэффициентов отражения и прохождения рэлеевских волн в зависимости от угла  $\theta$ . Отсутствует также объяснение, почему при малых  $\theta$  возможно почти полное отражение или прохождение волн Рэлея.

В настоящей работе предлагается наглядная приближенная теория отражения и прохождения рэлеевских волн в клине, которая описывает упомянутые осцилляции. В отличие от большинства существующих подходов, справедливых при  $\theta \sim \pi$ , предлагаемая теория исходит из другого предельного случая —  $\theta \sim 0$ . Клин при этом можно рассматривать как совокупность двух связанных волноводов, поскольку каждая из его граней представляет собой направляющую структуру для поверхностных волн. Падающая на ребро клина рэлеевская волна тогда представляется в виде суммы симметричной и антисимметричной мод данной «системы связанных волноводов». Для достаточно острых клиньев эти моды можно аппроксимировать низшими симметричной (продольной) и антисимметричной (изгибной) волнами Лэмба в плоскопараллельной пластине с толщиной  $h$ , соответствующей локальной толщине клина. Заметим, что сама идея о представлении мод острого клина с помощью мод плоскопараллельной пластины достаточно хорошо известна [17, 18]. Однако применительно к анализу отражения и прохождения рэлеевских волн в клине такое представление ранее не использовалось.

Перейдем к непосредственному решению поставленной задачи (фиг. 1). Рассмотрим сначала более простой случай нормального падения рэлеев-

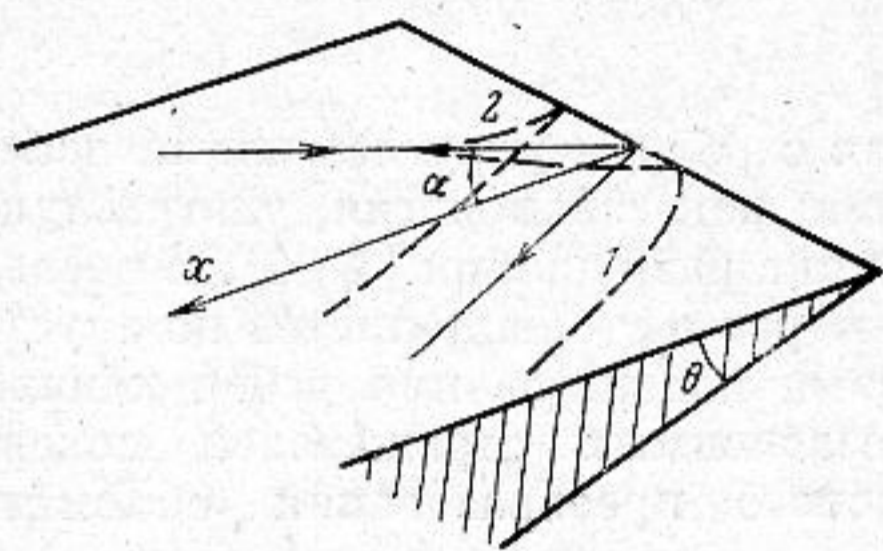
ской волны на ребро клина (угол падения  $\alpha$  равен нулю). Смещения  $u_i$  в падающей волне на поверхности клина представим в виде суммы симметричной  $u_s$  и антисимметричной  $u_a$  волн:

$$u_i = u_s + u_a, \quad (1)$$

$$u_s = (u_0/2) \exp \left[ -i \int_{x_0}^x k_s(x', \theta) dx' \right], \quad (2)$$

$$u_a = (u_0/2) \exp \left[ -i \int_{x_0}^x k_a(x', \theta) dx' \right]. \quad (3)$$

Здесь  $u_0$  — амплитуда падающей рэлеевской волны (множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен);  $k_s(x, \theta)$  и  $k_a(x, \theta)$  — волновые числа симметричной и антисимметричной мод, зависимость которых от координаты  $x$ , отсчитываемой от ребра клина, обусловлена изменением его эффективной локальной толщины  $h(x, \theta) = 2x \operatorname{tg}(\theta/2)$ ;  $x_0$  — некоторая достаточно удаленная от ребра начальная координата, удовлетворяющая условию  $h(x_0, \theta) > \lambda_R$ , где  $\lambda_R$  — длина рэлеевской волны для данной частоты  $\omega$ . В точке  $x_0$  производится возбуждение падающей на ребро клина рэлеевской волны и относительно этой точки отсчитываются фазы симметричной и антисимметричной мод.



Фиг. 1. Геометрия задачи

В качестве смещений  $u$  могут быть выбраны как продольная, так и поперечная составляющие векторов смещений в волнах Рэля и Лэмба. Равенство амплитуд симметричной и антисимметричной волн в выражениях (1) — (3) следует из того, что возбуждение падающей волны Рэля происходит только на одной грани клина и поэтому на противоположной грани при  $x \sim x_0$  симметричная и антисимметричная волны должны полностью компенсировать друг друга. Отметим, что представление (1) является стандартным в теории связанных волноводов (см., например, монографию [19]). Формулы же (2) и (3) являются по сути первым приближением известного метода ВКБ. Изменение амплитуд волн  $u_s$  и  $u_a$  с пройденным расстоянием не учитывается, поскольку их возрастание при приближении к ребру затем компенсируется в процессе обратного распространения отраженных симметричной и антисимметричной волн до точки приема.

При достаточно больших  $x$ , лежащих в области  $x < x_0$ , для которых  $h(x, \theta) > \lambda_R$ , с высокой степенью точности выполняется равенство  $k_s = k_a = k_R$ , где  $k_R$  — волновое число рэлеевской волны, и обе моды, входящие в выражение (1), распространяются в фазе. По мере приближения волн к ребру клина, т. е. при  $h(x, \theta) < \lambda_R$ , величины  $k_s$  и  $k_a$  становятся существенно отличными друг от друга, что приводит к появлению разности фаз между модами. После отражения симметричной и антисимметричной мод от ребра клина, которое в рассматриваемом приближении можно трактовать как отражение от свободного торца тонкой пластинки, процесс расфазировки продолжается при распространении волн в обратном направлении. Очевидно, в рамках используемой модели именно разность фаз у отраженных симметричной  $u_s'$  и антисимметричной  $u_a'$  волн в точке приема, зависящая от  $\theta$ , и является причиной осцилляций коэффициентов отражения и прохождения рэлеевской волны при изменении угла раскрытия клина  $\theta$ . Разумеется, сказанное справедливо в предположении, что модули коэффициентов отражения как симметричной, так и антисимметричной волн в отдельности близки к единице, т. е. преобразование энергии из рассмотренных низших мод Лэмба в высшие, соответствующее рассеянию поверхностных волн в объемные на ребре клина, практически отсутствует. Для очень

острых клиньев это предположение вполне оправдано, поскольку оно выполняется для волн в тонких плоскопараллельных пластинках.

Выражения для отраженной  $u_R$  и прошедшей  $u_T$  рэлеевских волн, измеряемых на расстояниях  $x_0$  от ребра клина, с учетом изложенного представляются в виде:

$$u_R = u_s' + u_a', \quad (4)$$

$$u_T = u_s' - u_a', \quad (5)$$

$$u_s' = (u_0/2) \exp(-i\varphi_s - i\Phi_s), \quad (6)$$

$$u_a' = (u_0/2) \exp(-i\varphi_a - i\Phi_a), \quad (7)$$

где  $\varphi_{s,a} = 2 \int_{x_0}^{\infty} k_{s,a}(x, \theta) dx$  — набег фаз симметричной и антисимметричной

волн при прохождении от точки  $x_0$  до ребра клина и обратно, а  $\Phi_s, \Phi_a$  — сдвиги фаз этих волн при их непосредственном отражении от ребра клина. Знак минус в формуле (5) связан с фазовыми соотношениями, имеющими место между колебаниями в волнах  $u_s$  и  $u_a$ . Если колебания в этих волнах на одной из граней клина имеют разность фаз  $\Delta\varphi$ , то на другой грани в силу антисимметричности волны  $u_a$  разность фаз будет равна  $\Delta\varphi + \pi$ , что эквивалентно появлению знака минус перед  $u_a'$  в формуле (5). Из соотношений (4) — (7) несложно найти выражения для коэффициентов отражения  $R = u_R/u_I$  и прохождения  $T = u_T/u_I$  рэлеевских волн в клине

$$R = \sin \Psi_- \exp(i\Psi_+ - i\pi/2), \quad T = \cos \Psi_- \exp(i\Psi_+), \quad (8)$$

где

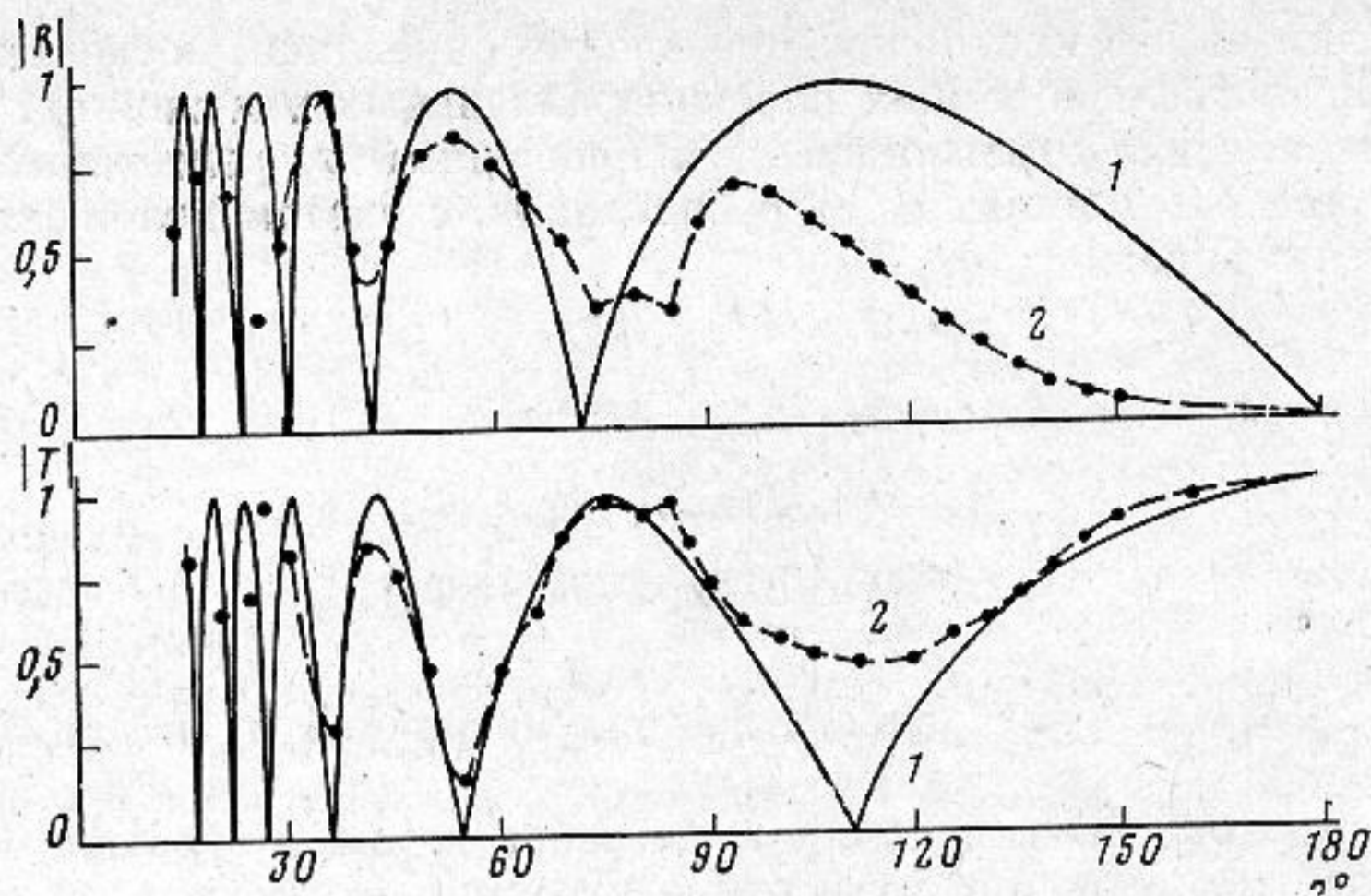
$$\Psi_{\pm} = \int_0^{x_0} [k_a(x, \theta) \pm k_s(x, \theta)] dx + (\pi + \Phi_a \pm \Phi_s)/2.$$

В выражениях (8) остаются не определенными фазовые сдвиги  $\Phi_s$  и  $\Phi_a$ . Из теории колебаний тонких пластинок известно [20], что для пластинок постоянной толщины  $\Phi_s = \Phi_s(0) = 0$  и  $\Phi_a = \Phi_a(0) = \pi/2$ . Чтобы распространить область применимости излагаемой теории отражения и прохождения рэлеевской волны на случай не слишком острых углов раскрыва клина, нужно учесть зависимости  $\Phi_s$  и  $\Phi_a$  от  $\theta$ . Наиболее просто это можно сделать при помощи линейной интерполяции значений  $\Phi_s$  и  $\Phi_a$  при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \pi$ . Случай  $\theta = \pi$ , очевидно, соответствует переходу от клина к полупространству. В этом случае  $\Phi_s$  и  $\Phi_a$  нетрудно определить, рассматривая движение навстречу друг другу на поверхности полупространства соответственно двух синфазных и двух противофазных рэлеевских волн, откуда следует, что  $\Phi_s = \Phi_s(\pi) = 0$  и  $\Phi_a = \Phi_a(\pi) = \pi$ . Зависимости  $\Phi_s(\theta)$  и  $\Phi_a(\theta)$  в рассматриваемом приближении принимают тогда вид  $\Phi_s(\theta) = 0$ ,  $\Phi_a(\theta) = (\pi + \theta)/2$ . Используя эти выражения и заменяя в формуле (8) интегрирование по  $x$  интегрированием по  $h$ , модули коэффициентов отражения и прохождения при  $x_0 \rightarrow \infty$ , которые фактически и определяются в эксперименте, можно записать в виде

$$|R| = |\sin[\delta/\operatorname{tg}(\theta/2) - (\pi - \theta)/4]|, \quad |T| = |\cos[\delta/\operatorname{tg}(\theta/2) - (\pi - \theta)/4]|, \quad (9)$$

где  $\delta = (1/2) \int_0^{\infty} [k_a(h) - k_s(h)] dh$  — безразмерная постоянная, зависящая от упругих свойств материала клина.

Дальнейший расчет состоит в вычислении величины  $\delta$ , для чего необходимо знать полные зависимости  $k_s(h)$  и  $k_a(h)$ . Поскольку аналитические выражения  $k_s(h)$  и  $k_a(h)$  отсутствуют, при расчете удобно воспользоваться аппроксимациями соответствующих дисперсионных зависимостей, полученных численными методами [21]. Аппроксимацию введем таким образом, чтобы при  $h \rightarrow 0$  зависимости  $k_a(h)$  и  $k_s(h)$  стремились соответственно к зависимостям для изгибных и продольных пластиночных волн, а при  $h \rightarrow \infty$  — к дисперсионной зависимости для рэлеевской волны. Исходя



Фиг. 2. Зависимости модулей коэффициентов отражения  $|R|$  и прохождения  $|T|$  рэлеевской волны от угла раскрыва клина  $\theta$ :  
1 — теория, 2 — эксперимент [1, 2]

из этого, аппроксимирующие функции запишем в виде

$$\xi_s = \Omega \left[ \frac{c_t}{c_p} - \frac{c_t}{c_R} \right] [1 + (A\Omega)^4]^{-1} + \Omega \frac{c_t}{c_R}, \quad (10)$$

$$\xi_a = \Omega^{1/2} \left( \frac{12}{\pi^2} \right)^{1/4} \left( \frac{c_t}{c_p} \right)^{1/2} [1 + (B\Omega)^4]^{-1} + \Omega \frac{c_t}{c_R}.$$

Здесь  $\xi_{s,a} = k_{s,a} h / \pi$ ,  $\Omega = \omega h / \pi c_t$ ,  $c_p = 2c_t (1 - c_t^2/c_l^2)^{1/2}$  — так называемая «пластиночная» скорость, к которой стремится скорость симметричной моды при  $h \rightarrow 0$ ,  $c_l$  и  $c_t$  — скорости продольной и сдвиговой объемных волн,  $A$  и  $B$  — безразмерные постоянные аппроксимации. Для дюралюминия ( $\nu = 0,35$ ), использовавшегося в экспериментах [1, 2],  $A \approx 0,94$ ,  $B \approx 1,95$ , и расчет величины  $\delta$  в соответствии с формулами (10) дает  $\delta \approx 2,75$ .

На фиг. 2 приведены зависимости  $|R|$  и  $|T|$  от угла  $\theta$ , рассчитанные по формулам (9) для  $\delta = 2,75$ . Здесь же изображены экспериментальные значения  $|R|$  и  $|T|$ , полученные для дюралюминиевых образцов [1, 2] (следует отметить, что измерения, проведенные в работах [1, 2], являются наиболее подробными из опубликованных к настоящему времени). Из фиг. 2 видно, что теоретические зависимости в целом достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. В частности, они правильно описывают наблюдаемое в эксперименте уменьшение периода осцилляций с уменьшением угла  $\theta$  и соответствие максимумов коэффициента отражения минимумам коэффициента прохождения и наоборот. Хорошее качественное согласие наблюдается и в случае больших  $\theta$ , где изложенная теория заведомо неприменима, в частности из-за неучета ею имеющегося при этих углах довольно значительного рассеяния в объемные волны. Наличие такого рассеяния проявляется в том, что величина  $|R|^2 + |T|^2$ , рассчитанная по экспериментальным данным [1, 2] (см. фиг. 2), становится меньше единицы. В то же время, согласно формулам (8) и (9) всегда  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ . В области предельно малых углов  $\theta$  для количественного сравнения теории с экспериментом имеющих в работах [1, 2] экспериментальных точек явно недостаточно. Описанные в этих работах измерения проводились на отдельных клиньях, угол раскрыва  $\theta$  которых менялся в области малых углов через каждые  $3,5^\circ$ . Периоды же осцилляций теоретических кривых уже при  $\theta < 30^\circ$  становятся сравнимыми и даже меньше шага измерений.

Остановимся теперь на случае наклонного падения рэлеевской волны на ребро клина под углом  $\alpha$  (см. фиг. 1). При этом как симметричная, так и антисимметричная моды испытывают рефракцию при приближении к ребру клина, причем характер рефракции для этих мод различен вследствие различия законов изменения их скоростей вблизи ребра. Очевидно,

симметричная мода будет более косо падать на ребро клина (кривая 1 на фиг. 1), а антисимметричная мода будет подходить практически под прямым углом (кривая 2 на фиг. 1) из-за стремления ее скорости к нулю вблизи ребра. Для малых углов падения  $\alpha$  рефракцией можно пренебречь. Тогда из простых геометрических соображений следует, что формулы (9) по-прежнему могут использоваться, если величину  $\delta$  в них заменить на  $\delta/\cos \alpha$ . Таким образом, даже для фиксированного угла раскрыва  $\theta$  могут иметь место осцилляции  $|R|$  и  $|T|$  при изменении угла падения  $\alpha$ . Ранее этот эффект в литературе не описывался.

При увеличении  $\alpha$  рефракционное различие путей, проходимых симметричной и антисимметричной модами, возрастает и его следует учитывать (величина  $\delta$  будет в этом случае зависеть от  $\alpha$ ). Очевидно, возникающее вследствие рефракции увеличение акустического пути для симметричной моды и его уменьшение для антисимметричной моды будут приводить к уменьшению разности фаз между ними и, следовательно, к уменьшению числа осцилляций  $|R|$  и  $|T|$  в зависимости от угла  $\alpha$ .

Таким образом, развитая в настоящей работе теория отражения и прохождения рэлеевских волн в клине достаточно хорошо согласуется с известными опытными данными и позволяет предсказать новые эффекты, которые могут быть проверены экспериментально.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. О влиянии несовершенств поверхности на распространение рэлеевских волн.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 3, с. 463–465.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1984.
3. De Bremaecker J. Cl. Transmission and reflection of Rayleigh waves at a corners.— Geophysics, 1958, v. 23, № 2, p. 253–266.
4. Ахенбах Дж. Д. Распространение волн, сингулярные эластодинамические напряжения и разрушение.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Тр. XIV Междунар. конгр. IUTAM / Под ред. Койтера В. Т. М.: Мир, 1979, с. 214–250.
5. Burov J. T., Thanh N. C., Anastasova N. V. Reflection, transmission and conversion of acoustic surface waves incident normally onto a quartz wedge with plane Y, Z-cut.— Appl. Phys., 1979, v. 20, № 2, p. 189–191.
6. Анисимкин В. И., Гуляев Ю. В., Котелянский И. М. Преобразователь поверхностных и приповерхностных акустических волн.— Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, № 17.
7. Rajewski W., Szalewski M. Transmission and reflection of a surface wave at a corner of two planes on an isotropic body.— Arch. Acoust., 1983, v. 8, № 1, p. 3–10.
8. Поляков В. В., Тараканов В. Ф. Уменьшение уровня отраженной волны в фильтрах на поверхностных акустических волнах.— В кн.: Пьезо- и акустоэлектронные устройства. Омск: Омск. политехн. ин-т, 1981, с. 22–25.
9. Knopoff L. Elastic wave propagation in a wedge.— In: Wave propagation in solids. Ed. Miklowitz J.— New York: ASME, 1969, p. 3–43.
10. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972.
11. Munasinghe M., Farnell G. W. Finite difference analysis of surface wave scattering at vertical discontinuities.— J. Geophys. Res., 1973, v. 78, № 14, p. 2454–2466.
12. Cuzzo F. C., Cambriaggio E. L., Damiano J.-P., Rivier E. Influence of elastic properties on Rayleigh wave scattering by normal discontinuities.— IEEE Trans. Son. Ultrason., 1977, v. 24, № 4, p. 280–289.
13. Kane J., Spence J. Rayleigh wave transmission on elastic wedges.— Geophysics, 1963, v. 28, № 5, pt. 1, p. 715–723.
14. Mal A. K., Knopoff L. Transmission of Rayleigh waves at a corner.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1966, v. 56, № 2, p. 455–466.
15. Yoneyama T., Nishida S. Further calculation on Rayleigh wave diffraction by elastic wedges.— J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v. 59, № 1, p. 206–208.
16. Viswanathan K., Kuo J. T., Lapwood E. R. Reflection and transmission of Rayleigh waves in a wedge. I.— Geophys. J. Roy. Astronom. Soc., 1971, v. 24, № 4, p. 404–414.
17. Kuo J. T., Thompson J. A. Model studies on the effect of a sloping interface on Rayleigh waves.— J. Geophys. Res., 1963, v. 68, № 22, p. 6187–6197.
18. Gutdeutsch R. On Rayleigh waves in a wedge with free boundaries.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1969, v. 59, № 4, p. 1645–1652.
19. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
20. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
21. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках.— В кн.: Физическая акустика / Под ред. Мэсона У. М.: Мир, 1966, т. 1, ч. А, с. 140–203.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Поступила в редакцию 7.VIII.1984