ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 450, № 6, с. 640–643

МАТЕМАТИКА

УДК 517.947.44

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЕМ НА ОДНОМ КОНЦЕ ПРИ СВОБОДНОМ ВТОРОМ ДЛЯ ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ТЕЛЕГРАФНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2013 г. Л. В. Крицков, М. Ф. Абдукаримов

Представлено академиком В.А. Ильиным 28.12.2012 г.

Поступило 10.01.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565213180060

В работе изучается задача граничного управления смещением при $x = 0$ для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом вида

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - q(x, t)u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

при условии, что при $x = l$ выполнено однородное условие $u_x(l, t) = 0$. Здесь $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$, а коэффициент $q(x, t)$ ограничен и измерим в Q_T. Суть задачи граничного управления состоит в построении функции $\mu(t)$, для которой рассматриваемый процесс при соблюдении условия $u(0, t) = \mu(t)$ переходит из начального состояния $\{u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)\}$ при $t = 0$ в финальное состояние $\{u(x, T) = \varphi_1(x), u_t(x, T) = \psi_1(x)\}$ при $t = T$.

Исследование этой задачи для уравнения (1) ведется в терминах обобщенного решения с конечной энергией. Определение такого обобщенного решения как для смешанной задачи, так и для задачи граничного управления хорошо известно (см. [1–3]). Следуя [1], будем обозначать через $\hat{W}_2^1(Q_T)$ рассматриваемый класс обобщенных решений.

В настоящей работе изучен так называемый "критический" случай, когда $T = 2l$. Как показал анализ задачи для одномерного волнового уравнения ($q(x, t) \equiv 0$) [3–4], при $T = 2l$ граничное управление существует и единственно для максимально широких классов начальных и финальных функций, в то время как при $T > 2l$ граничное управление определяется неоднозначно, а при $T < 2l$ для существования граничного управления необходимо потребовать, чтобы функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ удовлетворяли некоторым дополнительным условиям на промежутках суммарной длины $2l - T$.

Отметим, что в работах В.А. Ильина [1, 2] был впервые предложен подход, позволяющий решить задачу граничного управления для однородного одномерного волнового уравнения при любом значении T, причем в явном аналитическом виде. Некоторые задачи граничного управления для уравнения (1) с постоянным коэффициентом $q(x, t)$ изучены в [5–7]. Из более ранних работ, посвященных этой тематике, можно отметить работы [8–11].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть далее коэффициент $q(x, t)$ в (1) – произвольная ограниченная и измеримая в Q_T функция.

Т е о р е м а 1. *Для любого $T \in (0, 2l]$ рассматриваемая задача граничного управления для уравнения* (1) *может иметь лишь одно решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$.*

Для обоснования данной теоремы о единственности изучаются две смешанные задачи для уравнения (1): первая – с условиями

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) \equiv \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

вторая – с условиями (2) при $0 \le t \le T$ и условиями

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, T) \equiv \psi_1(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l. \tag{4}$$

Анализируя интегральные уравнения, которым удовлетворяют решения из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ этих задач, мы доказали следующее утверждение.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Л е м м а. *Пусть* $T \in (0, 2l]$, $\mu(t) \in W_2^1[0, T]$, *а данные Коши* (3), (4) *таковы, что* $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0, l]$ *и* $\varphi(0) = \mu(0)$, $\varphi_1(0) = \mu(T)$.

Тогда каждая из смешанных задач (2), (3) *и* (2), (4) *для уравнения* (1) *имеет единственное решение из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$, *причем*:

1) *если* $\varphi(x) \equiv 0$ *при* $x \in [0, l]$, $\psi(x) = 0$ *для почти всех* $x \in [0, l]$, *то решение задачи* (2), (3) *тождественно равно нулю в области* $\{(x, t) \mid 0 \le t \le l, t \le x \le l\} \cap Q_T$;

2) *если* $\varphi_1(x) \equiv 0$ *при* $x \in [0, l]$, $\psi_1(x) = 0$ *для почти всех* $x \in [0, l]$, *то решение задачи* (2), (4) *тождественно равно нулю в области* $\{(x, t) \mid T - l \le t \le T, T - t \le x \le l\} \cap Q_T$.

Прежде чем привести теорему существования обобщенного решения задачи граничного управления при $T = 2l$, отметим одну ее особенность, обнаруженную в случае одномерного волнового уравнения [3–4].

Разделим прямоугольник Q_{2l} на семь частей Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, характеристиками, проходящими через его углы. Из [3, 4] следует, что функция $\overset{0}{u}(x, t)$, равная

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_1 = \left\{0 \le t \le \frac{l}{2} - \left|x - \frac{l}{2}\right|\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(0) + \int_0^{x+t}\psi(\xi)d\xi + \varphi_1(t-x) - \right.$$
$$\left. - \varphi_1(0) + \int_0^{t-x}\psi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_2 = \left\{0 \le x \le \frac{l}{2} - \left|t - \frac{l}{2}\right|\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-t) + \varphi(2l-x-t) + \int_{x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_{2l-x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_3 = \left\{\frac{l}{2} + \left|t - \frac{l}{2}\right| \le x \le l\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(2l-x-t) + \varphi(0) + \int_{2l-x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_0^l\psi(\xi)d\xi + \varphi_1(t-x) - \varphi_1(0) + \int_0^{t-x}\psi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_4 = \{|t-l| \le x \le l - |t-l|\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(2l-x-t) + \varphi(0) + \int_{2l-x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi + \right.$$
$$+ \int_0^l\psi(\xi)d\xi + \varphi_1(2l+x-t) - \varphi_1(0) +$$
$$\left. + \int_{2l+x-t}^{l}\psi_1(\xi)d\xi + \int_0^l\psi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_5 = \left\{0 \le x \le \frac{l}{2} - \left|t - \frac{3l}{2}\right|\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-2l) + \varphi_1(t-x) - \int_{x+t-2l}^{l}\psi_1(\xi)d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_{t-x}^{l}\psi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_6 = \left\{\frac{l}{2} + \left|t - \frac{3l}{2}\right| \le x \le l\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-2l) + \varphi_1(x-t+2l) - \int_{x+t-2l}^{x-t+2l}\psi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$\text{при } (x, t) \in \Delta_7 = \left\{\frac{3l}{2} + \left|x - \frac{l}{2}\right| \le t \le 2l\right\},$$

является единственным решением рассматриваемой задачи граничного управления для однородного волнового уравнения тогда и только тогда, когда

$$A_0 \equiv \varphi(0) + \int_0^l\psi(\xi)d\xi = \varphi_1(0) - \int_0^l\psi_1(\xi)d\xi \equiv B_0. \quad (5)$$

В случае общего телеграфного уравнения (1) построен аналог условия (5), в котором участвует коэффициент $q(x, t)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $T = 2l$. *Тогда для существования решения из класса* $\hat{W}_2^1(Q_{2l})$ *рассматриваемой задачи граничного управления процессом, описываемым уравнением* (1), *необходимо выполнение следующих условий*:

1) $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0, l]$,

2) *начальные и финальные функции удовлетворяют соотношению*

$$A_0 + \int_0^l \int_\tau^{2l-\tau} q_A^*(\xi, \tau)A(\xi, \tau)d\xi d\tau =$$

$$= B_0 + \int_l^{2l} \int_{2l-\tau}^{\tau} q_B^*(\xi, \tau)B(\xi, \tau)d\xi d\tau, \quad (6)$$

где A_0, B_0 — *константы из равенства* (5), *величины* $A(\xi, \tau)$, $B(\xi, \tau)$ *вычисляются через начальные и финальные условия по формулам*

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{2}\left[\varphi(l - |\xi + \tau - l|) + \varphi(l - |\xi - \tau - l|) + \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \psi(l - |\zeta - l|)d\zeta\right],$$

$$B(\xi, \tau) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(l - |\xi + \tau - 3l|) + \varphi_1(l - |\xi - \tau + l|) - \int_{\xi+\tau-2l}^{\xi-\tau+2l} \psi_1(l - |\zeta - l|)d\zeta\right],$$

а ядра интегральных операторов $q_A^*(\xi, \tau)$ *и* $q_B^*(\xi, \tau)$ *связаны с коэффициентом* $q(\xi, \tau)$ *в* (1) *соотношениями*

$$q_A^*(\xi, \tau) = q(l - |\xi - l|, \tau)\sum_{k=0}^{\infty} q_A^{(k)}(l, l; \xi, \tau),$$

$$q_A^{(0)}(x, t; \xi, \tau) \equiv \frac{1}{2};$$

$$q_A^{(k+1)}(x, t; \xi, \tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\tau^t \int_{\max(x-t+\tau_1, \xi+\tau-\tau_1)}^{\min(x+t-\tau_1, \xi-\tau+\tau_1)} q(l - |\xi_1 - l|, \tau_1) \times$$

$$\times q_A^{(k)}(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau)d\xi_1 d\tau_1,$$

$$q_B^*(\xi, \tau) = q(l - |\xi - l|, \tau)\sum_{k=0}^{\infty} q_B^{(k)}(l, l; \xi, \tau),$$

$$q_B^{(0)}(x, t; \xi, \tau) \equiv \frac{1}{2};$$

$$q_B^{(k+1)}(x, t; \xi, \tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_t^\tau \int_{\max(x+t-\tau_1, \xi-\tau+\tau_1)}^{\min(x-t+\tau_1, \xi+\tau-\tau_1)} q(l - |\xi_1 - l|, \tau_1) \times$$

$$\times q_B^{(k)}(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau)d\xi_1 d\tau_1.$$

Отметим, что условие (6) равносильно равенству в точке $x = t = l$ решений при $T = 2l$ двух смешанных задач для уравнения (1): задачи (2), (3) в области $\Delta_1 \cup \Delta_3$ и задачи (2), (4) в области $\Delta_6 \cup \Delta_7$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $T = 2l$ *и выполнено условие* 1) *теоремы* 2. *Тогда соотношение* (6) *является и достаточным для существования* (*единственного*!) *решения из класса* $\hat{W}_2^1(Q_{2l})$ *задачи граничного управления для уравнения* (1).

Для обоснования теорем 2 и 3 строятся интегральные уравнения, которым удовлетворяет искомое решение $u(x, t)$ в каждой подобласти Δ_j, $j = 1, 2, ..., 7$, и показывается, что они имеют решения требуемой гладкости.

Используя интегральные представления решения задачи граничного управления, получена априорная оценка

$$\|u(x, t)\|_{W_2^1(Q_{2l})} \le$$

$$\le C(\|\varphi\|_{W_2^1[0, l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0, l]} + \|\psi\|_{L_2[0, l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0, l]}),$$

которая свидетельствует об устойчивости полученного решения относительно начальных и финальных условий.

Кроме того установлено, что если $\|q\|_\infty \to 0$, то $\|u - \overset{0}{u}\|_{W_2^1(Q_{2l})}$ и, соответственно, $\|\mu - \overset{0}{\mu}\|_{W_2^1[0, 2l]}$ стремятся к нулю, здесь $\overset{0}{\mu}(t) = \overset{0}{u}(0, t)$. Это свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x, t)u(x, t)$ волнового оператора в (1) с ограниченным и измеримым коэффициентом $q(x, t)$.

Авторы выражают глубокую благодарность академику В.А. Ильину за внимание к результатам данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.
2. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1670–1686.
3. *Рево П.А., Чабакаури Г.Д.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1082–1095.
4. *Рево П.А., Чабакаури Г.Д.* // ДАН. 2001. Т. 379. № 4. С. 459–462.

5. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // ДАН. 2002. Т. 387. № 5. С.600–603.
6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // ДАН. 2004. Т. 394. № 2. С. 154–158.
7. *Смирнов И.Н.* Управление процессом, описываемым телеграфным уравнением. Дис. канд. физ.-мат. наук. М: МГУ, 2011.
8. *Lions J.L.* // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
9. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 476 с.
10. *Васильев Ф.П.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
11. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1993. № 3. С. 8–15.