ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2016, № 5, с. 133–138

УДК 532.685

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПОРИСТОГО ШАРА

© 2016 г. Н. Г. Тактаров

Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева, Саранск

e-mail: colonnt@mail.ru

Поступила в редакцию 26.02.2016 г.

Определено движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В формуле Дарси для силы сопротивления пористой среды добавлен член, учитывающий движение этой среды. В граничных условиях также учтено движение пористой среды. Получены точные аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана в области внутри шара и уравнения Навье–Стокса – вне шара. Показано существование внутренних поперечных волн в жидкости, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны. Внутри шара эти волны стоячие, а вне – бегущие. Рассмотрены частные случаи малых и больших частот колебаний.

Ключевые слова: пористая среда, вязкая жидкость, уравнение Бринкмана, поперечные волны.

DOI: 10.7868/S0568528116050145

Распространение поверхностных волн в слое жидкости, находящейся на пористом основании, рассмотрено, например, в работах [1, 2]. Наряду с поверхностными волнами в вязкой жидкости могут существовать также внутренние поперечные волны, вызванные колебаниями погруженных в нее твердых тел. В частности, в [3, 4] рассмотрены поперечные волны, образованные движением плоской поверхности, контактирующей с жидкостью и совершающей колебания в своей плоскости, а также волны, возникающие при движении сплошного твердого шара, погруженного в жидкость и совершающего вращательные колебания вокруг оси, проходящей через его центр. В настоящей работе рассматривается движение неподвижной на бесконечности, вязкой несжимаемой однородной жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара вокруг стационарной оси вращения, проходящей через его центр.

1. Постановка задачи. Пористая среда (матрица), насыщенная жидкостью, предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость (близкую к единице) и высокую проницаемость. Подобными свойствами могут обладать, например, волокнистые металлы. При таких свойствах пористой матрицы в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости будет заметно отличаться от скорости матрицы.

Угловую скорость вращения шара запишем как функцию от времени t^* в виде $\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{\Omega}_0 \exp(-i\omega t^*)$, где $\mathbf{\Omega}_0$ – действительный вектор, ω – частота колебаний. Знаком "*" здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами.

Пусть R – радиус шара, η – вязкость жидкости, ρ – ее плотность. Предполагая число Рейнольдса малым ($\rho\Omega_0 R^2/\eta \ll 1$) и отбрасывая нелинейные слагаемые в ускорении, систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в виде [5]

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_1^* + \eta' \nabla^{*2}\mathbf{u}_1^* + \mathbf{F}^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\Gamma = \text{const}$ – пористость, $\mathbf{u}_1^*$ – макроскопическая скорость фильтрации ($\mathbf{u}_1^* = \Gamma\boldsymbol{\upsilon}_1^*$, где $\boldsymbol{\upsilon}_1^*$ – средняя по объему пор скорость), p_1^* – среднее по объему пор давление, η' – эффективная вязкость жидкости в порах, $\mathbf{F}^* = -\eta(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*)/K$ – плотность силы сопротивления пористой матрицы, точки которой с радиус-векторами $\mathbf{r}^*$, отложенными от центра шара, движутся со скоростями $\boldsymbol{\upsilon}^* = \boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{r}^*$, $\mathbf{u}^* = \Gamma\boldsymbol{\upsilon}^*$, K – коэффициент проницаемости пористой матрицы. В предположении, что пористость достаточно велика, полагаем $\eta' = \eta$ [6]. При $K \to 0$ из (1.1) следует $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}^*$, т.е. жидкость движется как целое вместе с пористой матрицей.

Уравнения движения свободной жидкости вне шара при сделанных предположениях (приближение Стокса) имеют обычный вид [4]

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_2^* + \eta\nabla^{*2}\mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0 \tag{1.2}$$

Частицы жидкости будут двигаться по окружностям с центрами на оси вращения. В силу осевой симметрии относительно оси вращения градиент давления в касательном к этим окружностям направлении будет отсутствовать. В связи с этим давление из уравнений движения (1.1), (1.2) выпадает.

Введем сферическую систему координат (r^*, θ, φ) с началом в центре шара. Полярная ось z^* этой системы направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0/\Omega_0$. Полярный угол θ отсчитывается от положительной полуоси z^*. От азимутального угла φ величины не зависят вследствие осевой симметрии.

Согласно [7], граничные условия на движущейся поверхности пористого шара $r^* = R$ имеют вид

$$u_{\varphi 1}^* = u_{\varphi 2}^*, \quad \Lambda(\sigma_{r\varphi 1}^* - \sigma_{r\varphi 2}^*) = \eta(u_{\varphi 1}^* - \upsilon_\varphi^*)$$

здесь Λ – постоянная с размерностью длины, $\sigma_{r\varphi j}^*$ – компонента тензора напряжений в сферических координатах ($j = 1, 2$)

$$\sigma_{r\varphi j}^* = \eta\left(\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r^*} - \frac{u_\varphi^*}{r^*}\right)_j$$

В граничных условиях учтено, что $u_{r1}^* = u_{r2}^* = 0$, $u_{\theta 1}^* = u_{\theta 2}^* = 0$.

Первое из граничных условий означает непрерывность скорости на поверхности шара, а второе – связывает скачок касательных напряжений с относительной тангенциальной скоростью жидкости на поверхности. При $\Lambda \to \infty$ получаем условие непрерывности касательных напряжений, а при $\Lambda \to 0$ – условие отсутствия проскальзывания жидкости на поверхности пористой матрицы: $u_{\varphi 1}^* = \upsilon_\varphi^*$.

2. Решение задачи. Введем безразмерные переменные $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/R$, $t = t^*\omega$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^*/\upsilon_0$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^*/\upsilon_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*/\upsilon_0 = \Gamma(\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r})\exp(-it)$, причем $\upsilon_0 = \Omega_0 R$.

Уравнения (1.1), (1.2) в безразмерном виде записываются как

$$\begin{gathered}\frac{\omega R^2}{\Gamma\nu}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{u}_1 - \frac{R^2}{K}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \frac{\omega R^2}{\nu}\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{u}_2, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \nu = \eta/\rho\end{gathered} \tag{2.1}$$

Граничные условия в безразмерном виде при $r = 1$

$$u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \lambda\left(\frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial r} - \frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial r}\right) = u_{\varphi 1} - \upsilon_\varphi \tag{2.2}$$

здесь $\lambda = \Lambda/R$, $\upsilon_\varphi = \exp(-it)\sin\theta$. Во втором граничном условии учтено, что на поверхности шара выполняется равенство $u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}$.

Скорость $\mathbf{u}_1$ ищется в виде [4]

$$\mathbf{u}_1 = e^{-it}\nabla\times[\mathbf{e}_0 f_1(r)] = -e^{-it}\mathbf{e}_0\times\nabla f_1(r)$$

здесь $f_1(r)$ – скалярная функция, зависящая только от $r = |\mathbf{r}|$.

Согласно (2.1), скорость $\mathbf{u}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathbf{u}_1 + m_1^2\mathbf{u}_1 = -\frac{2}{\Gamma}\left(\frac{R}{\delta_1}\right)^2\mathbf{u} \tag{2.3}$$

здесь

$$m_1^2 = \frac{2}{\Gamma}\left[i\left(\frac{R}{\delta_2}\right)^2 - \left(\frac{R}{\delta_1}\right)^2\right], \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Из (2.3) следует

$$\nabla^2 f_1(r) + m_1^2 f_1(r) = \left(\frac{R}{\delta_1}\right)^2 r^2 + \mathrm{const} \tag{2.4}$$

здесь

$$\nabla^2 f_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_1}{dr}\right)$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид [8]

$$\begin{gathered} f_1(r) = A_1\frac{1}{r}e^{im_1 r} + B_1\frac{1}{r}e^{-im_1 r} + Cr^2 \\ m_1 = \frac{R}{\sqrt{\Gamma}}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{i\delta}{\delta_2^2}\right), \quad \frac{1}{\delta^2} = -\frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}, \quad C = \frac{\Gamma}{2[i(\delta_1/\delta_2)^2 - 1]} \end{gathered} \tag{2.5}$$

здесь A_1, B_1 – произвольные постоянные. Поскольку скорость выражается через ∇f_1, аддитивная постоянная в правой части (2.5) отброшена. Для получения конечного решения при $r \to 0$ полагаем $B_1 = -A_1$.

Скорость $\mathbf{u}_2$ ищется в виде $\mathbf{u}_2 = e^{-it}\nabla\times[\mathbf{e}_0 f_2(r)]$, причем, согласно (2.1), имеем

$$\nabla^2\mathbf{u}_2 + m_2^2\mathbf{u}_2 = 0 \quad (m_2^2 = 2i(R/\delta_2)^2)$$

Отсюда следует

$$\nabla^2 f_2(r) + m_2^2 f_2(r) = \mathrm{const}$$

Общее решение этого уравнения

$$f_2(r) = A_2\frac{1}{r}e^{im_2 r} + B_2\frac{1}{r}e^{-im_2 r}, \quad m_2 = (1+i)(R/\delta_2)$$

здесь аддитивная постоянная в решении отброшена. Для того чтобы решение обращалось на бесконечности в нуль, следует положить $B_2 = 0$.

Определяя постоянные A_1 и A_2 из граничных условий (2.2), находим с учетом равенства $\mathbf{e}_0\times\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi\sin\theta$ $(\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r)$

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_\varphi\left[\frac{2iA_1}{r}\left(m_1\cos m_1 r - \frac{1}{r}\sin m_1 r\right) + 2Cr\right]e^{-it}\sin\theta \\ \mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_\varphi\frac{A_2}{r^2}\exp[i(m_2 r - t)](im_2 r - 1)\sin\theta \\ A_1 = \frac{C}{D}[im_2^2 - 3m_2 - 3i + (m_2 + i)/\lambda] + \frac{m_2 + i}{2\lambda D} \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$A_2 = \frac{(m_1\cos m_1 - \sin m_1)/\lambda - 2C[(m_1^2 - 3)\sin m_1 + 3m_1\cos m_1]}{D\exp im_2}$$

$$D = [m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2 + (im_2 - 1)/\lambda]\sin m_1 + [m_1 m_2^2 - m_1(im_2 - 1)/\lambda]\cos m_1$$

Везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

При $\lambda \to 0$ из (2.6) следует

$$A_1 = \frac{i(2C+1)}{2(m_1\cos m_1 - \sin m_1)}, \quad A_2 = \frac{i\sin m_2 - \cos m_2}{im_2 - 1}$$

а при $\lambda \to \infty$ имеем

$$A_1 = \frac{C}{D}(im_2^2 - 3m_2 - 3i), \quad A_2 = -\frac{2C}{D\exp im_2}[(m_1^2 - 3)\sin m_1 + 3m_1\cos m_1]$$

$$D = (m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2)\sin m_1 + m_1 m_2^2\cos m_1$$

Переход в (2.6) к пределу $\lambda \to 0$, $K \to 0$ равносилен замене пористого тела непроницаемой для жидкости средой. При этом в (2.6) следует положить

$$m_1 = \frac{iR}{\varepsilon}(\varepsilon = \sqrt{K}), \quad m_2 = Rk_2\left(k_2 = \frac{1+i}{\delta_2}\right)$$

и перейти затем к пределу $\varepsilon \to 0$.

В этом пределе внутренняя скорость принимает вид $\mathbf{u}_1 = \Gamma\mathbf{e}_\varphi r\exp(-it)\sin\theta$, или в размерном виде $\mathbf{u}_1^*/\Gamma = \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*\exp(-i\omega t^*)$, а для $\mathbf{u}_2$ имеем

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r})\frac{1 - iRk_2 r}{r^3(1 - iRk_2)}\exp[iRk_2(r-1) - it] \tag{2.7}$$

Переход к размерному виду в этом выражении показывает, что $\mathbf{u}_2^*$ совпадает со скоростью жидкости, течение которой вызвано вращательным колебательным движением сплошного твердого шара [4, § 24]. В пределе $K \to 0$ пористую матрицу можно представить как состоящую из не связанных между собой пор и не пропускающую по этой причине жидкость через себя. Жидкость в порах вращается в этом случае вместе с матрицей как единое целое со скоростью $\mathbf{\upsilon}^* = \mathbf{u}_1^*/\Gamma$.

3. Частные случаи. В связи с громоздкостью точного решения (2.6) ограничимся рассмотрением двух частных случаев (в предположении $\lambda \to \infty$)

$$(\delta_1/\delta_2)^2 = \omega K/(\nu\Gamma) \ll 1 \quad \text{и} \quad (\delta_1/\delta_2)^2 \gg 1$$

В первом частном случае малые порядка $(\delta_1/\delta_2)^2$ отбрасываются. При этом полагается

$$m_1 = iR/\varepsilon, \quad m_2 = Rk_2, \quad C = -\Gamma/2$$

Поля скоростей (2.6) принимают в этом случае вид

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_\varphi\left[\frac{2G}{rH}\left(\frac{R}{\varepsilon}\operatorname{ch}\frac{Rr}{\varepsilon} - \frac{1}{r}\operatorname{sh}\frac{Rr}{\varepsilon}\right) + \Gamma r\right]e^{-it}\sin\theta$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_\varphi\frac{\Gamma}{r^2 H}\exp[iRk_2(r-1) - it]\left[(R^2 + 3\varepsilon^2)\operatorname{sh}\frac{R}{\varepsilon} - 3R\varepsilon\operatorname{ch}\frac{R}{\varepsilon}\right](rRk_2 + i)\sin\theta \tag{3.1}$$

$$G = -\frac{3\varepsilon^2\Gamma}{2}\left[i + (1+i)\frac{R}{\delta_2}\right], \quad H = R^2\left[i + \frac{(1+i)R}{\delta_2}\right]\operatorname{sh}\frac{R}{\varepsilon} + 2R\varepsilon\left(\frac{R}{\delta_2}\right)^2\operatorname{ch}\frac{R}{\varepsilon}$$

Согласно (3.1), скорость фильтрации $\mathbf{u}_1$ внутри пористого шара возрастает от 0 при $r = 0$ до наибольшего значения при $r = 1$

$$u_{\varphi 1} = \left[\frac{2G}{H}\left(\frac{R}{\varepsilon}\operatorname{ch}\frac{R}{\varepsilon} - \operatorname{sh}\frac{R}{\varepsilon}\right) + \Gamma\right]e^{-it}\sin\theta$$

На полюсах шара $\theta = 0$; π эта скорость равна нулю, а на экваторе $\theta = \pi/2$ – максимальна.

Выражение для скорости $\mathbf{u}_2$ в (3.1) имеет вид поперечной бегущей волны, в которой скорость $\mathbf{u}_2$ перпендикулярна направлению распространения волны, т.е. вектору $\mathbf{e}_r$. В размерных величинах скорость $\mathbf{u}_2^*$ пропорциональна множителю

$$\exp[-(r^* - R)/\delta_2]\exp[i(r^* - R)/\delta_2 - i\omega t^*]$$

Видно, что волна имеет длину $2\pi\delta_2 = 2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$, фазовую скорость $\delta_2\omega = \sqrt{2\nu\omega}$ и затухает по закону $\exp[-(r^* - R)\sqrt{\omega/2\nu}]$. Эта волна быстро затухает по мере удаления от поверхности ее создающего шара. Вследствие сильного затухания движение жидкости вне пористого шара сосредоточено в основном в слое толщиной порядка длины волны вблизи поверхности шара. В связи с движением пористой матрицы скорость жидкости внутри шара равна нулю только на оси вращения и отлична от нуля во всех остальных точках внутри пор.

Из (3.1) следует, что в этом частном случае волны внутри шара отсутствуют, так как $\mathbf{u}_1$ не является периодической функцией от координаты r. Однако в общем случае, согласно (2.6), поперечные волны могут существовать как внутри, так и вне пористого шара. Внутри шара эти волны стоячие, а вне – бегущие.

Для оценки влияния пористости на внешнее движение жидкости рассмотрим отношение Q скорости $\mathbf{u}_2$ в (3.1) к скорости (2.7), соответствующей течению вне сплошного твердого шара [3, 4]

$$Q = \Gamma\frac{[1 + 3(\varepsilon/R)^2]\,\mathrm{th}(R/\varepsilon) - 3\varepsilon/R}{\mathrm{th}(R/\varepsilon) + 2R\varepsilon/\delta_2^2(i + k_2R)}$$

Полагаем, что $\varepsilon = \sqrt{K}$ является некоторой возрастающей функцией от Γ, обращающейся в нуль при $\Gamma = 0$. В пределе $K \to 0$ имеем $Q \to \Gamma$.

Можно показать, что действительная часть комплексного выражения Q будет меньше единицы при выполнении, например, любого из трех следующих условий: $\varepsilon/R \ll 1$, $\delta_2/R \ll 1$; $\varepsilon/R \ll 1$, $\delta_2/R \gg 1$; $\varepsilon/R \ll 1$, $\delta_2/R = N$, где N – любое конечное положительное число. Следовательно, влияние пористости при этих условиях заключается в уменьшении амплитуды скорости в волне. При этом длина волны, фазовая скорость и закон затухания будут одинаковыми как в случае пористого, так и сплошного шара при одинаковых радиусе и частоте колебаний.

Во втором предельном случае $(\delta_1/\delta_2)^2 \gg 1$ следует положить

$$m_1^2 = (2i/\Gamma)(R/\delta_2)^2, \quad m_2^2 = 2i(R/\delta_2)^2, \quad C \ll 1$$

В этом случае скорости $\mathbf{u}_1^*$ и $\mathbf{u}_2^*$ являются малыми порядка $\upsilon_0(\delta_2/\delta_1)^2$. Этот случай физически реализуется при очень больших частотах ω и высокой проницаемости матрицы, достигаемой при $\Gamma \to 1$. Пористая матрица пробуксовывает в жидкости, не сообщая ей вследствие инерции заметного макроскопического движения.

В пределе $\omega \to 0$ ($\delta_2 \to \infty$), $K \to 0$ ($\delta_1 \to 0$), $\lambda \to 0$ скорость жидкости в порах $\mathbf{u}_1/\Gamma$, согласно (2.6), переходит в размерном виде в поле скоростей равномерно вращающегося с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ шара $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*$, а $\mathbf{u}_2$ принимает вид $\mathbf{u}_2^* = (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*)(R/r^*)^3$.

Заключение. Решена задача о движении вязкой жидкости, вызванном вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В известной формуле Дарси для силы сопротивления пористой среды добавлен член, учитывающий движение этой среды. В граничных условиях также учтено движение пористой среды. Определено поле скоростей жидкости внутри и вне шара. Получены точные аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана для движения жидкости внутри шара и уравнения Навье–Стокса в приближении Стокса – вне шара. Показано существование поперечных волн в жидкости, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны. Внутри шара эти волны стоячие, а вне шара – бегущие. Рассмотрены частные случаи. Приведена оценка влияния пористости на движение жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н.А.* О влиянии пористости дна на плоскую стоячую волну в тяжелой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 160–163.
2. *Столяров И.В., Тактаров Н.Г.* Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 183–186.
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
5. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. 1. № 1. P. 27–34.
6. *Haber S., Mauri R.* Boundary conditions for Darcy's flow through porous media // Int. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9. № 5. P. 561–574.
7. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635–2646.
8. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Сдано в набор 03.06.2016 г. Подписано к печати 05.08.2016 г. Дата выхода в свет 27.09.2016 г. Формат $60 \times 88^1/_8$
Цифровая печать Усл. печ. л. 17.25 Усл. кр.-отт. 2.4 тыс. Уч.-изд. л. 17.3 Бум. л. 8.625
Тираж 134 экз. Зак. 522 Цена свободная

Учредители: Российская академия наук, ООО "Журналы по механике"

Издатель: Российская академия наук. Издательство "Наука", 117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен МАИК "Наука/Интерпериодика"
Отпечатано в ППП «Типография "Наука"». 121099 Москва, Шубинский пер., 6