РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Осколки и капли[1]

В 1933 году немецкие инженеры Пауль Отто Розин (1890–1967) и Эрих Раммлер (1901–1986) предложили эмпирическую формулу

$$F(R) = 1 - \exp\{-(R/\alpha)^\beta\}$$

для функции распределения частиц угля по размерам. Уголь широко использовался тогда в различных технологических процессах.

Позднее эта формула стала широко применяться для описания распределения по размерам капель жидкости, распыливаемой форсункой. На выходе из форсунки образуются осколки жидкости, которые под действием сил поверхностного натяжения очень быстро превращаются в капли. Здесь $F(R)$ — вероятность того, что капля имеет радиус, меньший R (эта вероятность пропорциональна числу молекул, образующих такие капли); α, β — положительные параметры распределения.

В 1939 году шведский ученый Эрнст Яльмар Валодди Вейбулл (1887–1979) предложил распределение, позднее названное его именем, для прочности материалов (см. далее). Позднее выяснилось, что предложенная им формула

$$F(m) = 1 - \exp\{-(m/\mu)^\Lambda\},$$

также хорошо описывает распределение осколков твердого тела по массам. Здесь $F(m)$ — вероятность того, что осколок имеет массу меньшую m (эта вероятность пропорциональна числу таких осколков); μ, Λ — положительные параметры распределения.

Английский физик Невилл Франсис Мотт (1905–1996), лауреат Нобелевской премии по физике 1977 года, полагал, что в формуле Вейбулла $\Lambda = 1/2$. Сегодня известно, что, в зависимости от свойств твердого тела, параметр Λ может принимать значения в некоторой окрестности $1/2$.

Математическая эквивалентность формул Розина-Раммлера и Вейбулла (формулы связаны соотношением $\beta = 3\Lambda$) указывает на универсальный характер процесса быстрого распада сплошной среды: распределение осколков по размерам не зависит от физико-химических свойств

[1] По *Антонюк П.Н.* Краткая история изучения распределения осколков по размерам // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях (АВМТВ-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г. / Под общ. ред. А.В.Лебедева. — Москва: РУДН, 2017. С. 341–346.

среды. Другими словами, можно предположить существование универсальной функции распределения осколков по размерам, одинаково подходящей как для жидкости, так и для твердого тела. Свойство универсальности предполагает, что твердое тело есть хрупкое тело (разрушается при небольших деформациях), а жидкость есть идеальная жидкость (невязкая и несжимаемая). При мгновенном распаде идеальная жидкость ведет себя как хрупкое тело.

Российский ученый П.Н.Антонюк недавно вывел из математических соображений следующую формулу для масс осколков:

$$F(m) = 1 - \exp\{-(m/\mu)^{\Lambda}\}, \qquad \Lambda = 2/3.$$

Функция $F(m)$, полученная теоретически, в точности совпадает с распределением Вейбулла, полученным из многочисленных экспериментов. Более того, значение $\Lambda = 2/3$, полученное в предположении хрупкости твердого тела, согласуется с экспериментальными значениями для хрупких тел: $0,6 \leq \Lambda \leq 0,7$.

Из недавних работ, где распределение Вейбулла используется для описания размеров осколков, отметим работу А.Б.Киселева[2], посвященную фрагментации тонкостенных конструкций. К таким конструкциям относятся топливные баки ракет, другие элементы летательных аппаратов. Их взрывное разрушение на околоземных орбитах приводит к засорению космического пространства частицами самых разных размеров (так называемый техногенный "космический мусор"), которые, ввиду высоких скоростей движения, представляют серьезную опасность для космических аппаратов.

Интересно, что размеры капель дождя тоже хорошо описываются распределением Вейбулла, хотя дождь образуется в результате не распыления, а конденсации жидкости. Эту закономерность открыл и теоретически обосновал в 1950 году физик-метеоролог А.Бест[3]. При этом вопрос о размерах капель дождя не чисто академический, он имеет важное значение для радиосвязи и радиолокации на миллиметровых и терагерцовых частотах, поскольку дождь влияет на прохождение радиоволн[4].

[2] *Киселев А.Б.* Моделирование фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов при взрывном нагружении и ударном взаимодействии // Матем. моделирование, 2012, том 24, № 2, с. 33–66.

[3] *Best A.C.* The size distribution of raindrops // Quarterly Journal of Royal Meteorology Society, 1950, vol. 76, № 327, p. 16–21.

[4] *Малышенко Ю.И., Роенко А.Н.* Функция распределения дождевых капель по размерам для миллиметрового и терагерцового диапазонов радиоволн // Системы обработки информации, 2008, № 1 (75), с. 78–84.

2. Прочность материалов

На практике большое значение имеет прочность различных материалов, используемых в технике, строительстве и др.

Известно, что если взять вроде бы одинаковые, однотипные образцы материала, то окажется, что одни из них могут выдержать определенную нагрузку, а другие нет. Таким образом, прочность отдельно взятого образца является случайной величиной. Она определяется ненаблюдаемыми скрытыми дефектами, включениями, трещинами, другими нарушениями и особенностями структуры. Наиболее сложная ситуация здесь с композиционными материалами.

На практике, кроме однократных, образцы часто подвергают *усталостным испытаниям*, при которых какая-то нагрузка прилагается к ним многократно. При этом уже имеющиеся дефекты могут усугубляться, а кроме них, могут появляться новые (например, трещины).

В 1939 году Вейбулл предложил использовать для описания прочности свое распределение[5] в наиболее общей (трехпараметрической) форме:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^m\right\}, \quad x \geq a, \quad a \geq 0, \quad b, m > 0,$$

где a называется *истинным пределом выносливости* (т.е. такую нагрузку заведомо выдержат все образцы). Часто полагают $a = 0$, если это не противоречит данным.

Наряду с эмпирическими данными, показывающими во многих случаях хорошее соответствие модели, для использования распределения Вейбулла существует следующее теоретическое обоснование, исходя из *принципа слабейшего звена*. Как известно, прочность цепи определяется прочностью слабейшего из ее звеньев. Конечно, образец материала — это не цепь, у него нет звеньев или иных явно выраженных деталей, однако его можно условно разделить на части, равные или неравные, причем на сколь угодно большое их число. Предполагается, что прочности этих условных частей независимы и прочность целого определяется минимумом из них:

$$\xi = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\},$$

[5] *Weibull W.* A statistical theory of of the strength of materials. Stockholm, 1939. См. также более объемную книгу, имеющуюся в переводе: *Вейбулл В.* Усталостные испытания и анализ их результатов. М.: Машиностроение, 1964.

тогда для функций распределения имеет место соотношение:

$$F(x) = 1 - (1 - F_1(x)) \dots (1 - F_n(x)).$$

При этом было бы странно, если бы прочность частей описывалась качественно другим законом распределения, чем прочность целого, скорее должен работать тот же закон, но с другими значениями параметров.

В предположении, что прочности частей имеют распределения Вейбулла с одинаковыми a, m и различными b_i, $1 \leq i \leq n$, получаем

$$F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b_i}\right)^m\right\} = 1 - \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-a}{b_i}\right)^m\right\} =$$
$$= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^m\right\}, \quad b = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{-m}\right)^{-1/m},$$

т.е. снова распределение Вейбулла, с теми же a, m и новым b.

Распределения, обладающие подобным свойством, называются *минимум-устойчивыми.* Существуют и другие такие, кроме распределения Вейбулла, однако они менее реалистичны.

В ряде работ обсуждались проблемы приложения модели к реальным данным испытаний[6]. Следует учитывать, что иногда данных бывает недостаточно для надежной оценки параметров, а иногда наблюдаются отклонения от модели, нуждающиеся в дополнительном осмыслении.

Из недавних работ отметим диссертацию М.Р.Абдуллина[7], где проводится статистическое исследование прочностных характеристик композиционных материалов, применяемых в отечественном авиастроеннии, в том числе, с использованием распределения Вейбулла.

---

[6]См. например, *Гумбель Э.* Статистическое оценивание предела выносливости как приложение теории экстремальных значений / Введение в теорию порядковых статистик. М.: Статистика, 1970. С. 369–388. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. Гл. 14.

[7]*Абдуллин М.Р.* Статистическое обоснование прочностных характеристик композиционных материалов. Дисс. к.т.н. Москва, Институт машиноведения РАН, 2014.