МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

ВОРОНЕЖСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

УДК 517.927.4

А.В.Боровских, В.Л.Прядиев

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ЭМДЕНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО СЛУЧАЯ

Воронеж - 1985

В статье исследуется аналог задачи Эмдена

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x^{1+\alpha}(t) = 0, & (I) \\ x(0) = x(T) = 0 & (2) \end{cases}$$

для случая $\alpha < 0$. Вместо (I) рассматривается уравнение

$$\varphi(x) \cdot \ddot{x} + x = 0, \tag{3}$$

где $\varphi: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ непрерывна и $\varphi(+0) = 0$.

Ставится вопрос о существовании строго положительного на $(0,T)$ решения дифференциального уравнения (3), удовлетворяющего краевым условиям (2). Доказывается, что решение существует для любого T, если $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и что множество тех T, для которых существует решение, ограничено, если $\varphi(x)$ ограничена.

Интерес к данному вопросу возник в связи с одной из работ В.А.Кондратьева и Ю.В.Егорова [2].

Обозначив $f(x) = 2\frac{x}{\varphi(x)}$, имеем вместо (2)-(3) задачу

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{1}{2} f(x(t)) = 0, & (4) \\ x(0) = x(T) = 0, & (5) \end{cases}$$

где $x(0)$ и $x(T)$ понимаются в предельном смысле, как $x(+0)$ и $x(T-0)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Theta(z) = \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}}$$

Т е о р е м а I. Для разрешимости задачи (4)-(5) необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $x_0 > 0$ имело место $\Theta(x_0) = \frac{T}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $x(t)$ – решение задачи (4)-(5). Тогда при всех $t \in (0,T)$

$$2\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = -f(x(t))\,\dot{x}(t) \tag{6}$$

Обозначим $x_0 = \max\limits_{(0,T)} x(t)$, пусть t_0 – точка максимума, т.е. $x_0 = x(t_0)$. Тогда $\dot{x}(t_0) = 0$. Проинтегрировав (6) в пределах от t_0 до t, получаем

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\int_{t_0}^{t} -f(x(t))\dot{x}(t)dt} \cdot \operatorname{sign}(t_0 - t)$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(t)\,dt}{\sqrt{\int_{t_0}^{t} -f(x(t))\,dx(t)}} = -|t_0 - t|$$

$$\int_{t}^{t_0} \frac{d\,x(t)}{\sqrt{\int_{t}^{t_0} f(x(t))dx(t)}} = |t_0 - t|$$

Меняя переменную интегрирования, получим:

$$\int_{x}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{x_0} f(\tau)d\tau}} = |t_0 - t|$$

откуда, в силу краевых условий (5),

$$T - t_0 = \int_{0}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{x_0} f(\tau)d\tau}}$$

и

$$t_0 - 0 = \int_{0}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{x_0} f(\tau)d\tau}}$$

Из этих двух равенств следует $t_0 = \frac{T}{2}$ и

$$\int_{0}^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{x_0} f(\tau)d\tau}} = \frac{T}{2}$$

что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть существует x_0 такое, что $\Theta(x_0) = \frac{T}{2}$.
Рассмотрим на $(0, x_0]$ функции

$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{T}{2} - \int_x^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{x_0} f(\tau)d\tau}}$$

$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{T}{2} + \int_x^{x_0} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{x_0} f(\tau)d\tau}}$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\mathcal{F}_1(+0) = 0 \qquad \mathcal{F}_2(+0) = T$$

$$\mathcal{F}_1(x_0) = \frac{T}{2} \qquad \mathcal{F}_2(x_0) = \frac{T}{2}$$

При этом функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ непрерывно дифференцируемы по x и

$$\mathcal{F}_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{\int_x^{x_0} f(\tau)d\tau}} > 0,$$

$$\mathcal{F}_2'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\int_x^{x_0} f(\tau)d\tau}} < 0.$$

Следовательно, существуют обратные к ним функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, обладающие следующими свойствами:

а) $x_1(t) : (0, \frac{T}{2}] \to (0, x_0]$, $x_1(+0) = 0$, $x_1(\frac{T}{2}) = x_0$;

$x_2(t) : [\frac{T}{2}, T) \to (0, x_0]$, $x_2(T-0) = 0$, $x_2(\frac{T}{2}) = x_0$;

б) они непрерывно дифференцируемы по t и

$$\dot{x}_1(t) = \sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_2(\frac{T}{2})} f(\tau)d\tau};$$

$$\dot{x}_2(t) = -\sqrt{\int_{x_2(t)}^{x_2(\frac{T}{2})} f(\tau)d\tau};$$

в) $\dot{x}_1(\frac{T}{2}) = \dot{x}_2(\frac{T}{2}) = 0$

г) функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, а их вторые производные определяются равенствами

$$\ddot{x}_1(t)=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}\right)=\frac{-f(x_1(t))\cdot\dot{x}_1(t)}{2\sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}=$$

$$=-\frac{1}{2}f(x_1(t))\cdot\frac{\sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}{\sqrt{\int_{x_1(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}=-\frac{1}{2}f(x_1(t))$$

$$\ddot{x}_2(t)=\frac{d}{dt}\left(-\sqrt{\int_{x_2(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}\right)=-\frac{-f(x_2(t))\cdot\dot{x}_2(t)}{2\sqrt{\int_{x_2(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}=$$

$$=-\frac{1}{2}f(x_2(t))\frac{-\sqrt{\int_{x_2(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}{-\sqrt{\int_{x_2(t)}^{x_0} f(\tau)d\tau}}=-\frac{1}{2}f(x_2(t))$$

д) $\ddot{x}_1\left(\frac{T}{2}\right)=\ddot{x}_2\left(\frac{T}{2}\right)=-\frac{1}{2}f(x_0)$

е) $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (4).

Составляем из этих функций новую

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t), & 0<t\le\frac{T}{2}\\ x_2(t), & \frac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$$

заданную на (0, T), дважды непрерывно дифференцируемую на этом интервале и удовлетворяющую уравнению (4) и краевым условиям (5). Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Функция $\theta(z)$ определена и непрерывна на $(0,+\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной точки $\xi \in (0, z)$

$$\Theta(z) = \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}} =$$

$$= \int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}} + \int_\xi^z \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}}$$

В полученной сумме первый интеграл собственный, а второй- несобственный. Так как $f(\tau)$ положительна и непрерывна на $[\xi, z]$, найдётся $m>0$ такое, что $f(\tau) \geqslant m$. Поэтому

$$\int_\xi^z \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \int_\xi^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{m}} \sqrt{z-y}\,\Big|_\xi^z = \frac{2}{\sqrt{m}} \sqrt{z-\xi} < \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{m}}$$

Значит, определяющий $\Theta(z)$ интеграл является сходящимся.

Покажем теперь, что $\Theta(z)$ непрерывна справа $\forall z>0$. Пусть $\Delta z > 0$ и δ -произвольное число из $(0, z)$. Представим разность

$$\Theta(z+\Delta z) - \Theta(z) = \int_0^{z+\Delta z} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{z+\Delta z} f(\tau)\,d\tau}} - \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{\int_y^z f(\tau)\,d\tau}}$$

в виде суммы трёх слагаемых:

$$\Theta(z+\Delta z) - \Theta(z) = P^+(\Delta z, \delta) + Q^+(\Delta z, \delta) - R^+(\delta)$$

где

$$P^{+}(\Delta z,\delta)=\int\limits_{0}^{z-\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{\int_{y}^{z+\Delta z}f(\tau)d\tau}}-\frac{1}{\sqrt{\int_{y}^{z}f(\tau)d\tau}}\right]dy \qquad (7)$$

$$Q^{+}(\Delta z,\delta)=\int\limits_{z-\delta}^{z+\Delta z}\frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{z+\Delta z}f(\tau)d\tau}} \qquad (8)$$

$$R^{+}(\delta)=\int\limits_{z-\delta}^{z}\frac{dy}{\sqrt{\int_{y}^{z}f(\tau)d\tau}} \qquad (9)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$.
Так как (9) - остаток сходящегося интеграла, найдется такое ϑ_1, что для любого $\delta<\vartheta_1$ $\quad |R^{+}(\delta)|<\varepsilon/3$.

Поскольку $f(\tau)>0$ на $(0,+\infty)$, найдутся ϑ_2 и $m>0$ такие, что при $\delta<\vartheta_2$ и $\Delta z<\vartheta_2$ $\quad f(\tau)\geq m$ на $[z-\delta,\ z+\Delta z]$. Тогда

$$|Q^{+}(\Delta z,\delta)|\leq\frac{1}{\sqrt{m}}\int\limits_{z-\delta}^{z+\Delta z}\frac{dy}{\sqrt{z+\Delta z-y}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{m}}\left(-\sqrt{z+\Delta z-y}\right)\Big|_{z-\delta}^{z+\Delta z}=\frac{2\sqrt{z+\delta}}{\sqrt{m}}$$

Очевидно, найдется такое ϑ_3, что при $\Delta z<\vartheta_3$ и $\delta<\vartheta_3$ $\ \frac{2\sqrt{\Delta z+\delta}}{\sqrt{m}}$ будет меньше $\varepsilon/3$.

Возьмем теперь некоторое $\delta_0=\min(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$ и рассмотрим $P^{+}(\Delta z, \delta_0)$.

Подынтегральная функция в интеграле (7) сходится к нулю при $\Delta z \to 0$ не только поточечно, но и равномерно, в силу компактности отрезка $[0, z-\delta_0]$. Отсюда следует, что $|P^{+}(\Delta z, \delta_0)| < \varepsilon/3$ при Δz, меньшем, чем некоторое ϑ_4.

Если обозначить $\vartheta = \min(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)$, то для любого $\Delta z < \vartheta$ справедливо

$$|\theta(z+\Delta z) - \theta(z)| = |P^{+}(\Delta z, \delta_0) + Q^{+}(\Delta z, \delta_0) - R^{+}(\delta_0)| \leq$$
$$\leq |P^{+}(\Delta z, \delta_0)| + |Q^{+}(\Delta z, \delta_0)| + |R^{+}(\delta_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

А это и означает, что $\theta(z)$ непрерывна справа.

Теперь покажем, что $\theta(z)$ непрерывна слева.

Возьмем неотрицательное приращение Δz и представим разность

$$\theta(z-\Delta z) - \theta(z) = \int_0^{z-\Delta z} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{z-\Delta z} f(\tau)d\tau}} - \int_0^{z} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{z} f(\tau)d\tau}}$$

в виде суммы трех слагаемых:

$$\theta(z-\Delta z) - \theta(z) = P^{-}(\Delta z, \delta) + Q^{-}(\Delta z, \delta) - R^{-}(\Delta z)$$

где

$$P^{-}(\Delta z, \delta) = \int_{z-\delta}^{z-\Delta z} \left[\frac{1}{\sqrt{\int_y^{z-\Delta z} f(\tau)d\tau}} - \frac{1}{\sqrt{\int_y^{z} f(\tau)d\tau}} \right] dy \qquad (10)$$

$$Q^{-}(\Delta z, \delta) = \int_0^{z-\delta} \left[\frac{1}{\sqrt{\int_y^{z-\Delta z} f(\tau)d\tau}} - \frac{1}{\sqrt{\int_y^{z} f(\tau)d\tau}} \right] dy \qquad (11)$$

$$R^{-}(\Delta z) = \int_{z-\Delta z}^{z} \frac{dy}{\sqrt{\int_y^{z} f(\tau)d\tau}} \qquad (12)$$

а δ - произвольное число из интервала $(\Delta z, z)$.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

В силу положительности и непрерывности $f(\tau)$ найдется такое ϑ_1 и такие $m > 0$ и $M > 0$, что для любых δ, Δz таких, что $\Delta z < \delta < \vartheta_1$ выполняется неравенство $m \le f(\tau) \le M$ на $[z-\delta, z]$. Тогда

$$P^-(\Delta z, \delta) \le \frac{1}{\sqrt{m}} \int\limits_{z-\delta}^{z-\Delta z} \frac{dy}{\sqrt{z-\Delta z-y}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \int\limits_{z-\delta}^{z-\Delta z} \frac{dy}{\sqrt{z-y}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{z-\Delta z-y}{m}} - \sqrt{\frac{z-y}{M}} \right)\Bigg|_{z-\delta}^{z-\Delta z} =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{\delta-\Delta z}{m}} + \sqrt{\frac{\Delta z}{M}} - \sqrt{\frac{\delta}{M}} \right)$$

Кроме того, $P^-(\Delta z, \delta) > 0$, так как подынтегральное выражение в интеграле (10) положительно.
Очевидно, найдется такое $\vartheta_2 < \vartheta_1$, что для всех δ, Δz таких, что $\vartheta_2 > \delta > \Delta z$ $\quad |P^-(\Delta z, \delta)| < \varepsilon/3$

Возьмем $\delta_0 < \vartheta_2$ и зафиксируем его.

Рассмотрим $Q^-(\Delta z, \delta)$. Так же, как у интеграла (7), можно доказать, что найдется такое $\vartheta_3 \le \delta_0$, что для любого $\Delta z < \vartheta_3$ $\quad |Q^-(\Delta z, \delta_0)| < \varepsilon/3$.

$R^-(\Delta z)$ можно будет сделать меньше $\varepsilon/3$ для всех $\Delta z < \vartheta_4 \le \delta_0$ как остаток сходящегося интеграла.
Итак, мы имеем: для всех $\Delta z < \vartheta = \min(\vartheta_3, \vartheta_4)$

$$|\Theta(z-\Delta z) - \Theta(z)| = |P^-(\Delta z, \delta_0) + Q^-(\Delta z, \delta_0) - R^-(\Delta z)| \le$$
$$\le |P^-(\Delta z, \delta_0)| + |Q^-(\Delta z, \delta_0)| + |R^-(\Delta z)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что и означает непрерывность слева. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.

а) $\varphi(+0)=0 \Rightarrow \Theta(+0)=0$;

б) $\varphi(+\infty)=+\infty \Rightarrow \Theta(+\infty)=+\infty$;

в) из ограниченности $\varphi(x)$ следует ограниченность $\Theta(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

а) Пусть $\varphi(+0)=0$. Значит, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, для которого $\varphi(x)<\varepsilon$ на $(0,\delta)$.
Возьмем $z<\delta$. Тогда

$$\Theta(z)=\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^z \frac{\tau}{\varphi(\tau)}d\tau}} \leq \sqrt{\varepsilon}\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^z \tau\, d\tau}} =$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{z^2-y^2}} = \sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Следовательно, $\Theta(z)\to 0$ при $z\to 0$.

б) Пусть $\varphi(+\infty)=+\infty$. Значит, для любого $M>0$ найдется $R>0$, такое, что $\varphi(x)>M$ на $(R,+\infty)$
Возьмем $z\geqslant 2R$. Получим:

$$\Theta(z)=\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^z \frac{\tau}{\varphi(\tau)}d\tau}} \geqslant \int_R^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^z \frac{\tau}{\varphi(\tau)}d\tau}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{M}\int_R^z \frac{dy}{\sqrt{z^2-y^2}} = \sqrt{M}\arcsin\frac{y}{z}\Big|_R^z \geqslant \sqrt{M}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt{M}\,\frac{\pi}{3}$$

Следовательно, $\Theta(z)\to+\infty$ при $z\to+\infty$.

в) Пусть $\varphi(x) \le M$. Тогда для всех z

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^z \frac{\tau}{\varphi(\tau)}\, d\tau}} \le \sqrt{M} \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{z^2 - y^2}} = \sqrt{M} \cdot \frac{\pi}{2} < \infty$$

Теорема доказана.

Результаты, изложенные выше, допускают следующее резюме:

Т е о р е м а 4.

Краевая задача (2)-(3) разрешима для всех T , если $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и разрешима для ограниченного множества значений $T > 0$ если $\varphi(x)$ ограничена.

В заключение авторы выражают благодарность Ю.В.Покорному за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Сансоне Дж., " Обыкновенные дифференциальные уравнения", И., Госиноиздат, I953.

2. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., "Об оценках первого собственного значения задачи Штурма- Лиувилля", журнал " Успехи математических наук", I984, 39, №2, с.I5I - I52.

Печатается в соответствии с решением Совета Воронежского ордена Ленина государственного университета им. Ленинского комсомола от 1. 11. 1985 года.

880/85

В печать 20.11.85

Тир. 1 Цена 1руб20коп Зак.3278л

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403