МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

ВОРОНЕЖСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

УДК 517.927

А.В.Боровских

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Воронеж-1988

Целью настоящей работы является установление осцилляционных свойств спектра некоторых классов сингулярных дифференциальных операторов.

Пусть

$$\mathcal{L}x = x^{(n)} + p_1(\cdot)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(\cdot)x -$$

неосциллирующий дифференциальный оператор n -ого порядка. Если коэффициенты $p_i(\cdot)$ непрерывны на всей оси, то $\mathcal{L}$ определён в пространстве $C^n_\infty(R)$ всех n раз непрерывно дифференцируемых на всей оси функций (индекс " ∞ " означает отсутствие ограничений на рост функции на бесконечности) и действует в пространство $C_\infty(R)$ непрерывных на всей оси функций.

Пусть E - некоторое подпространство $C^n_\infty(R)$, в котором $\mathcal{L}$ инъективен. Задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f \\ x \in E \end{cases}$$

оказывается сингулярным аналогом краевой задачи, отличающимся от последней выбором пространства E : в регулярных краевых задачах это пространство выделяется с помощью краевых условий, а в нашем случае оно будет определяться асимптотикой функций.

В дальнейшем оператор $\mathcal{L}$ мы будем представлять в факторизованном виде:

$$\mathcal{L}x = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i\right)x = \mathcal{L}_n(\mathcal{L}_{n-1}(\ldots(\mathcal{L}_1 x)\ldots)) \quad (1)$$

$$L_i = \frac{d}{dt} + h_i(t) \qquad (2)$$

Заметим, что возможность разложения (I)-(2) (его обычно называют разложением Пойя-Маммана) эквивалентна, в силу известной теоремы Пойя [I], неосцилляции L.

В.И.Юдович [2] для автономного случая $h_i(t) \equiv const$ установил осцилляционность спектра задачи

$$\begin{cases} Lx = \lambda q x \\ x \in E \end{cases} \qquad (3)$$

с непрерывной положительной $q(t)$ в предположениях:

а/ $h_i \neq 0$, не все h_i одного знака;

б/ $q(\pm\infty) = 0$.

В качестве E бралось пространство u_0 - ограниченных сверху функций из $C^n_\infty(R)$, где $u_0(\cdot)$- положительная функция, имеющая "на концах" вещественной оси обобщённые нули (по системе решений уравнения $Lx = 0$ - см. [3]) суммарной кратности не меньше n.

В нашей работе доказывается, что осцилляционность спектра имеет место и в случае, когда h_i, вообще говоря, зависят от t. При этом предполагается:

а/ $h_i(t)$ отделены от нуля $(|h_i(t)| \geqslant c > 0)$, не все $h_i(t)$ одного знака;

б/ $q(\pm\infty) = 0$.

В качестве E берётся пространство функций $x \in C^n_\infty(R)$, ограниченных на всей оси вместе со своими квазипроизводными $\mathcal{D}_k x$:

$$\mathcal{D}_0 x \equiv x$$

$$\mathcal{D}_k x = \left(\prod_{i=1}^{k} L_i\right) x \quad , \quad k=\overline{1,n}$$

с нормой

$$\|x\|_E = \max_{0 \le k \le n} \left\{ \sup_t |(\mathcal{D}_k x)(t)| \right\}.$$

В дальнейшем это пространство мы будем обозначать $C_L^n(R)$ (индекс "L" означает, что ограничения на рост функции и её квазипроизводных определяются оператором L).

§I. Эквивалентная задача. Осцилляционные свойства.

I. Через G обозначим оператор

$$Gx = \left(\prod_{i=n}^{1} G_i\right)(x) = G_1(G_2(\ldots(G_n x)\ldots)) \tag{4}$$

где

$$(G_i u)(t) = e^{-\varphi_i(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\varphi_i(s)} u(s)\, ds \ , \quad h_i(t) > 0 \tag{5}$$

$$(G_i u)(t) = e^{-\varphi_i(t)} \int_{t}^{\infty} e^{\varphi_i(s)} u(s)\, ds \ , \quad h_i(t) < 0 \tag{6}$$

(здесь и далее $\varphi_i(t) = \int h_i(t)\, dt$).

Покажем, что оператор G является, с точностью до знака, обратным к L, т.е. $LG = GL = \varepsilon I \quad (\varepsilon = \pm 1)$,

причём

$$\mathcal{D}(G) \supseteq E(L)\ , E(G) \subseteq \mathcal{D}(L). \tag{7}$$

В предположении справедливости включений (7) (она будет доказана в теореме I) равенство

$$L G = \varepsilon I \qquad \left(\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sign} h_i(t)\right)$$

непосредственно следует из тождества

$$(L_i G_i)(u) \equiv u(t) \cdot \operatorname{sign} h_i$$

и факторизованных представлений (1), (4). Второе равенство ($GL = \varepsilon I$) следует из тождества $LGL = \varepsilon L$ и инъективности оператора L на области определения $C_L^n(R)$.

В том, что L действительно инъективен на $C_L^n(R)$ легко убедиться: пусть $x(t)$ - нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$. Тогда найдётся k $(0 \le k \le n-1)$ такое, что $(\mathcal{D}_k x)(t)$ будет нетривиальным решением уравнения $L_{k+1} u = 0$, а значит, в силу (2),

$$(\mathcal{D}_k x)(t) = \gamma \cdot e^{-\varphi_{k+1}(t)}$$

Но тогда $(\mathcal{D}_k x)(t)$ не будет ограниченной, т.к. в силу условия $|h_{k+1}(t)| \geq c$ она растёт не медленнее экспоненты в окрестности одной из бесконечностей. Следовательно, $x \notin C_L^n(R)$. Таким образом, в пространстве $C_L^n(R)$ уравнение $Lx = 0$ имеет только тривиальное решение, что, в силу линейности, и означает инъективность L .

Остаётся показать справедливость включений (7). Поскольку оператор L действует из пространства $C_L^n(R)$ в пространство $C(R)$ непрерывных ограниченных на всей оси функций с нормой $\|x\|_{C(R)} = \sup_t |x(t)|$, достаточное для (7) условие даётся следующей теоремой:

Т е о р е м а I. Оператор G определён в $C(R)$ и непрерывно действует из $C(R)$ в $C^n_L(R)$ $(\subseteq C(R))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку G является суперпозицией (4) операторов G_i, достаточно показать, что каждый из G_i определён и ограничен в $C(R)$. Это нетрудно сделать, опираясь на представления (5)-(6). Действительно, подынтегральное выражение $e^{\varphi_i(s)}u(s)$ убывает в окрестности несобственного предела интегрирования не медленнее экспоненты (в силу $|h_i(t)| \geq c$), а значит интегралы в (5)-(6) сходятся абсолютно и G_i определены в $C(R)$. Далее, для $h_i(t) \geq C$ (для $h_i(t) \leq -C$ - аналогично) имеем:

$$|(G_i u)(t)| = \left| e^{-\varphi_i(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\varphi_i(s)} u(s)\,ds \right| \leq$$

$$\leq \|u\|_{C(R)}\, e^{-\varphi_i(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\varphi_i(s)}\,ds \leq$$

$$\leq \|u\|_{C(R)}\, e^{-\varphi_i(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\varphi_i(s)} \frac{h_i(s)}{c}\,ds = \frac{\|u\|_{C(R)}}{c}.$$

Таким образом, $\|G_i u\|_{C(R)} \leq \frac{1}{c}\|u\|_{C(R)}$. Применяя последовательно эту оценку, получаем:

$$\|D_k(Gx)\|_{C(R)} = \left\| \left(\prod_{i=n}^{k+1} G_i\right) x \right\|_{C(R)} \leq \frac{1}{c^{n-k}} \|x\|_{C(R)},$$

откуда

$$\|Gx\|_{C^n_L(R)} \leq \max\left(1, \frac{1}{c^n}\right) \cdot \|x\|_{C(R)},$$

что и требовалось доказать.

2. Итак, задача (3) оказалась эквивалентной задаче на характеристические значения

$$x = \lambda \cdot G_q x \tag{8}$$

оператора

$$(G_q x)(t) = G(q(t) \cdot x(t)).$$

Поскольку умножение на непрерывную ограниченную функцию является непрерывной операцией в $C(R)$, оператор G_q непрерывен в $C(R)$.

<u>Теорема 2</u>. Оператор G_q вполне непрерывен в $C(R)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть B - единичный шар в $C(R)$. Функции из $G_q(B)$ обладают следующими свойствами:

1^0 они равномерно ограничены - в силу непрерывности оператора G_q;

2^0 они равностепенно непрерывны на каждом компакте $[-T, T]$ - в этом легко убедиться, оценив разность

$$|(G_q x)(t+\Delta t) - (G_q x)(t)|;$$

3^0 они равномерно стремятся к нулю на бесконечности - в силу оценки

$$|(G_q x)(t)| \le \|x\|_{C(R)} \cdot G(q(t)) \le G(q(t)) \xrightarrow{|t| \to \infty} 0.$$

Мы покажем, что эти три свойства обеспечивают относительную компактность $G_q(B)$ (а значит, и полную непрерывность G_q). Пусть $\{x_k\}$ - последовательность функций $x_k(t)$ равномерно ограниченных, равностепенно непрерывных на каждом компакте $[-T, T]$ и удовлетворяющих равномерной по k оценке

$$|x_k(t)| \le u(t),$$

где $u(\pm\infty) = 0$. Применяя теорему Арцела к последовательности расширяющихся компактов $[-T_m, T_m]$, $T_m \to \infty$, переходя каждый раз к подпоследовательности, получим систему "вложенных" последовательностей, каждая из которых сходится равномерно на "своём" компакте. Диагональная последовательность оказывается при этом подпоследовательностью последовательности $\{x_k\}$, сходящейся равномерно на каждом компакте к некоторой непрерывной функции $\bar{x}(t)$.

Докажем, что полученная подпоследовательность $\{x_{k_\ell}\}$ сходится к $\bar{x}(t)$ равномерно на всей оси. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое T, что $u(t)$ будет меньше $\varepsilon/2$ при всех $|t| > T$. Совершив поточечный предельный переход в неравенстве

$$|x_{k_\ell}(t)| \le u(t),$$

получим

$$|\bar{x}(t)| \le u(t),$$

а значит при $|t| > T$

$$|x_{k_\ell}(t) - \bar{x}(t)| \le |x_{k_\ell}(t)| + |\bar{x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

На компакте же $[-T, T]$ последовательность $x_{k_\ell}(t)$ равномерно сходится к $\bar{x}(t)$. Значит, найдётся номер N такой, что для всех $\ell \geq N$ на компакте $[-T, T]$ также будет выполнено неравенство $|x_{k_\ell}(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что для всех $\ell \geq N$ будет выполнено $\|x_{k_\ell} - \bar{x}\|_{C(R)} < \varepsilon$, т.е. подпоследовательность $\{x_{k_\ell}\}$ сходится в $C(R)$.

Теорема доказана.

3. В дальнейшем наряду с представлением (4)-(6) оператора G мы будем использовать также представление его в виде интегрального оператора с непрерывным ядром

$$(Gx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s)\, x(s)\, ds$$

Такое представление позволяет эффективно использовать сформулированные в терминах знакорегулярности ассоциированных ядер

$$K\begin{pmatrix} t_0 \dots t_m \\ s_0 \dots s_m \end{pmatrix} = \det \| K(t_i, s_j) \|_{i,j=0}^{m}$$

осцилляционные свойства оператора G.

<u>Теорема 3.</u> $K(t, s)$ - осцилляционное ядро.

<u>Доказательство.</u> По определению ([4]), ядро является осцилляционным, если

$$K\begin{pmatrix} t_0 \dots t_m \\ s_0 \dots s_m \end{pmatrix} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \\ s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m \end{pmatrix} \tag{9}$$

и

$$K\begin{pmatrix} t_0 \ldots t_m \\ t_0 \ldots t_m \end{pmatrix} > 0 \qquad (t_0 < t_1 < \ldots < t_m). \tag{10}$$

Неравенство (9) выполняется тогда и только тогда, когда (см., напр., [5], Теорема 2), когда оператор G не увеличивает числа перемен знака $S(x)$:

$$S(Gx) \leq S(x), \tag{11}$$

причём из

$$S(Gx) = S(x) \tag{12}$$

следует

$$\operatorname{sign}_1 Gx = \operatorname{sign}_1 x \tag{13}$$

(здесь $\operatorname{sign}_1 x$ - "первый" знак, считая от $-\infty$, функции $x(t)$).

Неравенство (11) является результатом последовательного применения неравенств

$$S(G_i u) \leq S(u),$$

в справедливости которых легко убедиться, опираясь на представления (5)-(6). Действительно, так как интеграл с переменным верхним (или нижним) пределом

$$\int_{-\infty\ (t)}^{t\ (+\infty)} e^{\varphi_i(s)} u(s)\,ds \tag{14}$$

является монотонной функцией на каждом из $S(u)+1$ промежутков знакопостоянства функции $u(t)$, он может менять знак не более $S(u)+1$ раз. Но, поскольку перемена знака на первом (если $h_i(t)>0$, на последнем- если $h_i(t)<0$) промежутке знакопостоянства функции $u(t)$ фактически отсутствует - интегрирование ведётся по части этого промежутка,- число перемен знака интеграла (I4) (а значит, и $G_i u$) не превосходит $S(u)$.

Равенство (I3) также является результатом последовательного применения равенств

$$\operatorname{sign}_1 G_i u = \operatorname{sign}_1 u .$$

Для G_i, отвечающих положительным $h_i(t)$, такое равенство непосредственно следует из (5): при всех t, принадлежащих "первому" промежутку знакопостоянства $u(t)$, интегрирование ведётся по части этого промежутка, а значит знак $(G_i u)(t)$ совпадает со знаком $u(t)$. Для G_i, отвечающих отрицательным $h_i(t)$, это равенство вытекает из равенства "последних" знаков $(G_i u)(t)$ и $u(t)$, получаемого из тех же соображений, в предположении $S(G_i u)=S(u)$. Последнее, как легко видеть, выполняется для всех обобщённых производных $(\mathcal{D}_K x)(t)$ удовлетворяющей (I2) функции $x(t)$.

М.Г.Крейн в одной из работ ([6]) отмечал, что для функций Грина неравенство (I0) всегда является следствием (9). По-видимому, это имеет место не только для функций Грина классических задач, которые имел в виду М.Г.Крейн, но и для всех интегральных ядер, которые можно в каком-то смысле назвать функцией Грина краевой задачи. Например, для функций Грина многоточечных краевых задач это свойство сформулировано в терминах δ-регулярности [7]. Обнаружилось, что в основе отмеченного М.Г.Крейном факта лежит следующее свойство:

Пусть несциллирующий дифференциальный оператор L определён в некотором пространстве E достаточно гладких функций, удовлетворяющих какой-то системе краевых условий. Назовём L δ-невырожденным, если никакое обобщённое в E решение уравнения

$$L x = z \tag{I5}$$

где z - нетривиальная комбинация δ-функций

$$z(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \delta(t - \xi_i) \tag{I6}$$

не может обращаться в нуль сразу во всех точках ξ_i $(i = \overline{1,k})$.

Л е м м а. Пусть G - обратный к L интегральный оператор с ядром $K(t,s)$. Тогда, если L δ-невырожден, то для ассоциированных ядер, отвечающих $K(t,s)$, из (9) следует (I0).

Доказательство этой леммы сводится к проверке того, что функция

$$u(t) = K\begin{pmatrix} t, t_1, \dots, t_m \\ t_0, t_1, \dots, t_m \end{pmatrix}$$

является решением (15)-(16) и обращается в нуль во всех точках t_i, $i=\overline{1,m}$. В силу δ-невырожденности L имеем

$$u(t_0) = K\begin{pmatrix} t_0, t_1, \dots, t_m \\ t_0, t_1, \dots, t_m \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Отсюда и из (9) при $s_i = t_i$ получаем (10).

Свойство δ-невырожденности оказывается весьма удобным, так как, с одной стороны, позволяет в общем случае установить неравенство (10), а с другой стороны, довольно легко проверяется с помощью соображений типа теоремы Ролля. В нашем случае δ-невырожденность также имеет место,- это устанавливается по общей схеме (см., напр., [7]): аналогично (11) устанавливается более жёсткое неравенство

$$\mathcal{N}(Gx) \leq S(x)$$

($\mathcal{N}(x)$ - число различных нулевых мест функции $x(t)$, не содержащих $-\infty$ и $+\infty$), откуда для решения $x(t)$ уравнения (15) с правой частью (16)

$$\mathcal{N}(x) \leq S(Lx) \leq k-1 .$$

Если бы решение (15)-(16) обращалось в нуль во всех точках ξ_i, $i=\overline{1,k}$, это означало бы, в силу приведенного неравенства, что по крайней мере два нуля принадлежат одному нулевому месту (или какой-то нуль "склеен" с бесконечностью). Но тогда, в силу гладкости решения $x(t)$ и невырожденности $(n-2,1)$ и $(1,n-2)$ - задач на любом $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, функция $x(t)$ будет тождествен-

5579-82

но равна нулю на всём $[\xi_1, \xi_k]$. Используя соображения, аналогичные доказательству инъективности L , можно показать, что $x(t)$ будет тождественным нулём и на интервалах $(-\infty, \xi_1)$ и (ξ_k, ∞) . При этом тот факт, что не все $h_i(t)$ одного знака обеспечивает наличие обобщённых краевых условий на обоих концах вещественной оси и, следовательно, тривиальное продолжение решения $x(t)$ на оба указанных интервала. Таким образом решение уравнения (15) оказывается тождественно равным нулю на всей оси, что противоречит предположению о нетривиальности комбинации (16).

Таким образом, оператор L δ-регулярен и, следовательно, ассоциированные к $K(t,s)$ ядра удовлетворяют (9)-(10). Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Для любой $q(t)>0$ ядро $K_q(t,s)=K(t,s)q(s)$ также будет осцилляционным.

<u>§2. Осцилляционные ядра и положительные операторы.</u>

1.Введём ряд обозначений:

$\Delta_m = \{T=(t_0,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1} : t_0<t_1<\dots<t_m\}$;

$C_0(\Delta_m)$ - пространство непрерывных на Δ_m функций $z(T)=z(t_0,\dots,t_m)$, обращающихся в нуль на $\partial\Delta_m$ и на бесконечности, с естественной нормой;

$K(\Delta_m)$ - конус неотрицательных на Δ_m функций из $C_0(\Delta_m)$;

E_m - пространство непрерывных на $\mathbb{R}^{m+1}$ аннулирующихся на бесконечности функций, удовлетворяющих равенству

$$z(t_0,\ldots,t_i,\ldots,t_j,\ldots,t_m)=-z(t_0,\ldots,t_j,\ldots,t_i,\ldots,t_m) \qquad (I7)$$

K_m - конус неотрицательных на Δ_m функций из E_m. Легко видеть, что сужение функции из E_m на Δ_m и продолжение функции из $C_0(\Delta_m)$ на $\mathbb{R}^{m+1}$ в соответствии с (I7) являются взаимно обратными операциями, устанавливающими изоморфизм между $(C_0(\Delta_m), K(\Delta_m))$ и (E_m, K_m). Этот же изоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между операторами

$$(\hat{G}_q^{(m)}z)(T)=\frac{1}{(m+1)!}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} K_q(T,S)\,z(S)\,dS \qquad (I8)$$

в E_m и

$$(\tilde{G}_q^{(m)}z)(T)=\int\limits_{\Delta_m} K_q(T,S)\,z(S)\,dS \qquad (I9)$$

в $C_0(\Delta_m)$. В дальнейшем мы будем рассматривать (I8) и (I9) как различные представления одного и того же оператора $G_q^{(m)}$. Если ядро этого оператора непрерывно и удовлетворяет (9)-(I0), то оператор, очевидно, будет положительным. В частности, для таких операторов справедлива следующая лемма:

Л е м м а I (о расширении носителя). Для любой функции $z(T)\in K(\Delta_m)$ выполняется включение

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{supp}_\Delta G_q^{(m)}z)\supseteq \mathrm{supp}_\Delta z \qquad (20)$$

(здесь $\mathrm{supp}_\Delta z=\mathrm{supp}\,z\cap\Delta_m$, а $\mathrm{supp}\,z$ понимается в обычном смысле- как замыкание множества точек, в которых $z(T)$ отлична от нуля).

Доказательство. Пусть $T=(t_0,\dots,t_m)\in \operatorname{supp}_\Delta z$. Ядро

$$K_q(T,S)=K_q\begin{pmatrix} t_0,\dots,t_m \\ s_0,\dots,s_m\end{pmatrix}$$

будет положительно при $S=T$ ((10)), а следовательно, в силу непрерывности, и для всех S, лежащих в некоторой окрестности T. В этой окрестности точки T найдётся (по определению $\operatorname{supp} z$) точка $S^0=(s_0^0,\dots,s_m^0)$ такая, что $z(s_0^0,\dots,s_m^0)>0$. Но тогда

$$\int\limits_{\Delta_m} K_q(T,S)\,z(S)\,dS>0,$$

так как подынтегральное выражение непрерывно и неотрицательно на Δ_m и положительно при $S=S^0$. Таким образом, мы показали, что $(G_q^{(m)}z)(T)>0$, то есть $T\in \operatorname{int}(\operatorname{supp}_\Delta G_q^{(m)}z)$. Включение (20) доказано.

Следствие. $\operatorname{supp}_\Delta G_q^{(m)}z=\operatorname{supp} z$ только если $\operatorname{supp}_\Delta z=\Delta_m$ или $z=0$ $(\operatorname{supp}_\Delta z=\varnothing)$.

2. Пусть Ω - открытое подмножество Δ_m. Функцию $z\in K(\Delta_m)$ назовём финитной на Ω, если её носитель- компакт, целиком лежащий в Ω. Условимся говорить, что функционал $F\in K^*(\Delta_m)=[K(\Delta_m)]^*$ равен нулю на Ω и писать $F|_\Omega=0$, если $F(z)=0$ для любой финитной на Ω функции z. Объединение всех Ω таких, что $F|_\Omega=0$ назовём нулевым множеством функционала $\operatorname{null} F$.

Лемма 2. $F|_{\operatorname{null} F}=0$.

<u>Доказательство</u>. опирается на следующее утверждение:

<u>Теорема</u> ([8], теорема 6.20). Пусть Γ -семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^{m+1}$, объединение которых содержит Ω. Тогда существует такая последовательность $\{\varkappa_i\}_{i=1}^{\infty}$ финитных гладких функций, что $\varkappa_i \geqslant 0$ и

а/ носитель каждой из функций $\varkappa_i$ содержится в некотором из множеств семейства Γ,

б/ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa_i(T) = 1$ при любом $T \in \Omega$,

в/ каждому компакту $V \subset \Omega$ соответствует такое целое число K и такое открытое множество $W \supset V$, что

$$\varkappa_1(T) + \ldots + \varkappa_K(T) = 1 \tag{21}$$

для всех $T \in W$.

Очевидно, что $\Gamma = \{\Omega_\alpha : F|_{\Omega_\alpha} = 0\}$ и $\Omega = \mathrm{null}\, F$ удовлетворяют условиям вышеприведённой теоремы. Значит, существует система функций $\{\varkappa_i\}$, удовлетворяющая а/-в/ (такую систему обычно называют локально конечным разбиением единицы в Ω, подчинённым открытому покрытию Γ). Пусть теперь $z(T)$ - финитная на Ω функция. В силу утверждения в/ теоремы существует конечная подсистема $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_K$, удовлетворяющая (21) на компакте $\mathrm{supp}\, z$. Положив $z_i(T) = z(T) \cdot \varkappa_i(T)$, получим, что

$$z(T) = \sum_{i=1}^{K} z_i(T)$$

для всех $T \in \mathrm{supp}\, z$. Равенство можно распространить на всё Δ_m, т.к. вне $\operatorname{supp} z$ как $z(T)$, так и $z_i(T)$ равны нулю. Поскольку носитель каждой из $\varkappa_i$ лежит в некотором Ω_{α_i}, каждая из z_i является финитной в некотором Ω_{α_i}, а значит $F(z_i)=0$. В силу аддитивности функционала имеем:

$$F(z)=\sum_{i=1}^{k} F(z_i)=0,$$

Таким образом, $F(z)=0$ для любой финитной на $\operatorname{null} F$ функции z, т.е. F равен нулю на $\operatorname{null} F$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Естественно писать $\operatorname{null} F=\varnothing$, если F строго положителен. Равенство же $\operatorname{null} F=\Delta_m$ эквивалентно $F=0$. Действительно, это равенство означает, что F аннулируется на всех финитных на Δ_m функциях, а поскольку любую функцию $z\in K(\Delta_m)$ можно приблизить с точностью до сколь угодно малого ε финитными на Δ_m функциями

$$z_\varepsilon(T)=\max(z(T),\varepsilon)-\varepsilon,$$

в силу непрерывности функционала получаем $F(z)=0$ для любой $z\in K(\Delta_m)$.

Л е м м а 3 (о сужении нулевого множества). Для любого $F\in K^*(\Delta_m)$ справедливо включение

$$\overline{\operatorname{null}([G_q^{(m)}]^* F)}\subseteq \operatorname{null} F.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega=\operatorname{null}([G_q^{(m)}]^* F)$.
Рассмотрим функцию

$$v(T)=\begin{cases}\dfrac{\rho(T,\partial\Omega)}{[1+\rho(T,\partial\Omega)]\cdot[1+\|T\|]} & , T\in\Omega\\ 0 & , T\notin\Omega\end{cases}$$

(здесь $\rho(\cdot,\cdot)$ - метрика в $\mathbb{R}^{m+1}$, порождённая нормой $\|T\|=\sqrt{t_0^2+\ldots+t_m^2}$. Очевидно, что $v\in K(\Delta_m)$, $\operatorname{supp} v=\overline{\Omega}$ и v можно приблизить с точностью до сколь угодно малого ε финитными на Ω функциями $v_\varepsilon(T)=\max(v(T),\varepsilon)-\varepsilon$. Поэтому из $[G_q^{(m)}]^*F|_\Omega=0$ следует $([G_q^{(m)}]^*F)(v_\varepsilon)=0$, и, в силу непрерывности $[G_q^{(m)}]^*F$,

$$([G_q^{(m)}]^*F)(v)=F(G_q^{(m)}v)=0.$$

Из леммы I следует, что множество Ω', на котором $(G_q^{(m)}v)(T)$ строго положительна, содержит $\operatorname{supp} v=$ $=\overline{\Omega}$. Докажем, что $F|_{\Omega'}=0$. Пусть $z(T)$ - финитная на Ω' функция. Поскольку на компакте $\operatorname{supp} z$ функция $(G_q^{(m)}v)(T)$ строго положительна, при некотором $\gamma>0$ справедлива оценка

$$z(T)\le\gamma(G_q^{(m)}v)(T)\qquad(T\in\operatorname{supp} z).$$

Неравенство сохраняется на всём Δ_m, так как вне $\operatorname{supp} z$ функция $z(T)$ обращается в нуль. В силу положительности F получаем

$$0\le F(z)\le\gamma F(G_q^{(m)}v)=0.$$

Таким образом, $F(z)=0$ для всех финитных на Ω' функций z, т.е. $F|_{\Omega'}=0$, а значит

$\bar{\Omega} \subseteq \text{null}\, F$. Лемма доказана.

Как легко понять, лемма 3 является аналогом леммы о расширении носителя (леммы I) для функционалов. Из этих лемм следует, что неравенство

$$G_q^{(m)} u \le \gamma u$$

для ненулевого $u \in K(\Delta_m)$ имеет место только когда $u(T)$ строго положительна (как функция и как элемент $K(\Delta_m)$ - в $C_0(\Delta_m)$ эти понятия совпадают), что означает, что оператор $G_q^{(m)}$ неразложим. Кроме того, поскольку для любой финитной функции $u \in K(\Delta_m)$ при некотором $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$G_q^{(m)} u \geqslant \gamma u$$

(это следует из той же леммы о расширении носителя), спектральный радиус оператора $G_q^{(m)}$ наверняка положителен. Применяя известные теоремы о неразложимых операторах ([9], см. также [10]) мы приходим к следующему утверждению

Л е м м а 4. Каждый из операторов $G_q^{(m)}$ имеет в $C_0(\Delta_m)$ собственный вектор $z_m \in K(\Delta_m)$, отвечающий простому положительному ведущему характеристическому числу Λ_m. Собственная функция $z_m(T)$ положительна на всём Δ_m, а отвечающий Λ_m собственный функционал F_m оператора $[G_q^{(m)}]^*$ строго положителен.

§3. Спектр.

Сформулированные в лемме 4 свойства операторов $G_q^{(m)}$ позволяют полностью описать, при переходе к оператору G_q структуру и свойства его спектра. Переход этот мы осуществим с помощью аналога известной теоремы Шура [II]:

Т е о р е м а 4. Характеристическое множество оператора G_q образует монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $\{\lambda_m\}_0^\infty$, где $\lambda_0 = \Lambda_0$, $\lambda_m = \Lambda_m / \Lambda_{m-1}$. При этом собственные функции z_m и собственные функционалы F_m операторов $G_q^{(m)}$ представимы (с точностью до постоянного множителя) через определители из собственных функций x_m и ψ_m операторов G_q и G_q^* :

$$z_m(t_0,\dots,t_m) = \Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_m \\ t_0 \dots t_m \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \det \| x_i(t_j) \|_{i,j=0}^m \qquad (22)$$

$$F_m(z) = \int\limits_{\Delta_m} \Delta\begin{pmatrix} \psi_0 \dots \psi_m \\ t_0 \dots t_m \end{pmatrix} z(t_0,\dots,t_m)\, dt_0 \dots dt_m \qquad (23)$$

Таким образом, в силу строгой положительности z_m и F_m, $\{x_m\}_0^\infty$ и $\{\psi_m\}_0^\infty$ образуют биортогональный ряд Маркова.

З а м е ч а н и е I. Оператор $G_q = G \circ q$ действует из пространства $C(R)$ в пространство $C_0(R)$ аннулирующихся на бесконечности функций из $C(R)$; поэтому спектры G_q в $C(R)$ и в $C_0(R)$ совпадают.

З а м е ч а н и е 2. Поскольку $C_0(R)$ можно изоморфно вложить в $C[0,1]$, любой функционал в $C_0(R)$ представим в виде

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ - функция ограниченной (на все оси) вариации. В силу этого, а также в силу непрерывности ядра $K(t,s)$ собственный функционал представим в виде

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,x(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ - абсолютно интегрируемая непрерывная функция. Поэтому мы будем говорить о собственных функциях сопряжённого оператора, подразумевая $\psi(\cdot)$, и о собственных функционалах, подразумевая $f(\cdot)$.

Доказательство теоремы 4. Последовательность $\{\lambda_m\}$ будем строить по индукции. При $m=0$ оператор $G_q^{(0)}$ совпадает с G_q, и, следовательно, $\lambda_0=\Lambda_0$, $x_0=z_0$, $f_0(x)=F_0(x)=$ $=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(t)x(t)\,dt$. Пусть последовательность $\{\lambda_m\}$ построена вплоть до $m=k-1$, причём при всех $m\le k-1$ выполняется (22)-(23). Рассмотрим функционал в $C_0(R)$

$$f_k(x)=F_k\left(\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{k-1} & x \\ t_0 \dots t_{k-1} & t_k\end{pmatrix}\right).$$

Легко видеть, что f_k будет собственным для G_q^*. Действительно,

$$(G_q^* f_k)(x)=f_k(G_q x)=F_k\left(\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{k-1} & G_q x \\ t_0 \dots t_{k-1} & t_k\end{pmatrix}\right)=$$

$$= F_K\left(\Delta\begin{pmatrix} \lambda_0 G_q x_0 & \dots & \lambda_{K-1} G_q x_{K-1} & G_q x \\ t_0 & \dots & t_{K-1} & t_K \end{pmatrix}\right),$$

а поскольку

$$\Delta\begin{pmatrix} G_q x_0 & \dots & G_q x_{K-1} & G_q x \\ t_0 & \dots & t_{K-1} & t_K \end{pmatrix} = G_q^{(K)} \Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{K-1}\, x \\ t_0 \dots t_{K-1} t_K \end{pmatrix},$$

имеем

$$(G_q^* f_K)(x) = F_K\left(\lambda_0 \dots \lambda_{K-1} G_q^{(K)} \Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{K-1}\, x \\ t_0 \dots t_{K-1} t_K \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{\Lambda_{K-1}}{\Lambda_K} F_K\left(\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{K-1}\, x \\ t_0 \dots t_{K-1} t_K \end{pmatrix}\right) = \frac{\Lambda_{K-1}}{\Lambda_K} f_K(x) \quad (24)$$

Остаётся заметить, что $f_K \neq 0$. В самом деле, поскольку (22) выполняется при всех $m \le K-1$, функции $\{x_m\}_0^{K-1}$ образуют систему Маркова порядка $K-1$. В силу известной теоремы ([12], теорема 5.3) эта система продолжаема, т.е. существует функция $\hat{x}(\cdot)$ такая, что

$$\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{K-1}\, \hat{x} \\ t_0 \dots t_{K-1} t_K \end{pmatrix} > 0$$

на Δ_K, откуда, в силу строгой положительности F_K,

$$f_K(\hat{x}) = F_K\left(\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{K-1}\, \hat{x} \\ t_0 \dots t_{K-1} t_K \end{pmatrix}\right) > 0 .$$

Из (24) видно, что функционал

$$f_K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_K(t)\, x(t)\, dt$$

отвечает характеристическому числу $\lambda_K = \Lambda_K / \Lambda_{K-1}$. Ему же, в силу полной непрерывности G_q, отвечает некоторая собственная функция $x_K(t) \in C_0(R)$. Поскольку функция

$$\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_k \\ t_0 \dots t_k \end{pmatrix}$$

и функционал

$$F(z) = \int\limits_{\Delta_k} \Delta\begin{pmatrix} \psi_0 \dots \psi_k \\ t_0 \dots t_k \end{pmatrix} z(t_0, \dots, t_k)\, dt_0 \dots dt_k$$

являются, очевидно, собственными векторами операторов $G_q^{(k)}$ и $\left[G^{(k)}\right]^*$ соответственно, отвечающими Λ_k, они, в силу простоты Λ_k, пропорциональны z_k и F_k, т.е. (22)-(23) выполняется при $m=k$.

Легко видеть, что построенная таким образом последовательность $\{\lambda_m\}$ монотонно возрастает. Действительно, если для какого-то m_0 будет $\lambda_{m_0} \geq \lambda_{m_0+1}$, то

$$\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{m_0-1} & x_{m_0+1} \\ t_0 \dots t_{m_0-1} & t_{m_0} \end{pmatrix}$$

будет собственной функцией оператора $G_q^{(m_0)}$, отвечающей $\Lambda = \lambda_0 \dots \lambda_{m_0-1} \lambda_{m_0+1} \leq \lambda_0 \dots \lambda_{m_0-1} \lambda_{m_0} = \Lambda_{m_0}$. С другой стороны, поскольку Λ_{m_0} - ведущее, $\Lambda \geq \Lambda_{m_0}$. Значит, $\Lambda = \Lambda_{m_0}$, что противоречит простоте Λ_{m_0}.

Легко также видеть, что G_q не имеет других характеристических чисел- в противном случае, поскольку $\lambda_m \to +\infty$ (G_q вполне непрерывен) для характеристического числа λ найдётся m_0 такое, что $|\lambda| < \lambda_{m_0}$; тогда, обозначив через $\hat{x}(t)$ отвечающую λ собственную функцию, получим, что

$$\Delta\begin{pmatrix} x_0 \dots x_{m_0-1} & \hat{x} \\ t_0 \dots t_{m_0-1} & t_{m_0} \end{pmatrix}$$

является собственной функцией оператора $G_q^{(m_0)}$, отвечающей $\Lambda = \lambda_0 \dots \lambda_{m_0-1}\lambda$, причём $|\Lambda| = \lambda_0 \dots \lambda_{m_0-1}|\lambda| < \lambda_0 \dots \lambda_{m_0-1}\lambda_{m_0} = \Lambda_{m_0}$, что противоречит определению Λ_{m_0} как ведущего характеристического числа.

Теорема доказана.

Полученные результаты можно резюмировать в следующей теореме:

<u>Т е о р е м а 5</u>. Задача (3) имеет осцилляционный спектр

<u>§4. Следствия</u>.

Легко видеть, что замена переменной

$$t = \ln \frac{\tau}{1-\tau}$$

переводит оператор (I)-(2) в оператор

$$\tilde{L} = \prod_{i=1}^{n} \left(\tau(1-\tau)\frac{d}{d\tau} + \tilde{h}_i(\tau) \right) \qquad (25)$$

на $(0,1)$, где $\tilde{h}_i(\tau) = h_i(t(\tau))$. Она же переводит функцию $q(t)$ в функцию $\tilde{q}(\tau) = q(t(\tau))$, пространство $C_L^n(R)$ в пространство $C_{\tilde{L}}^n(0,1)$.

<u>Т е о р е м а 6</u>. Задача

$$\begin{cases} \tilde{L}x = \lambda \tilde{q} x \\ x \in C_{\tilde{L}}^n(0,1) \end{cases}$$

где $\tilde{L}$ - оператор вида (25), $\tilde{q}(\cdot) > 0$, имеет осцилляционный спектр, если выполнены следующие условия:

I^0 $|\tilde{h}_i(\tau)| \geq c > 0$, не все $\tilde{h}_i(\tau)$ одного знака;

2^0 $\tilde{q}(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$ и $\tau \to 1$.

Рассмотрим преобразование $x(t) \to v(t)x(t)$, где $v(t) > 0$. Это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между задачей (3) и задачей

$$\begin{cases} L'x = \lambda q x \\ x \in C^{n}_{(L', v)}(R) \end{cases}$$

где

$$L' = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} + (h_i(t) + r(t)) \right),$$

$r(t) = \frac{d}{dt} \ln v(t)$, а $C^{n}_{(L', v)}(R)$ - пространство v -ограниченных сверху вместе со своими квазипроизводными $D'_k x$ функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{0 \le k \le n} \|D'_k x\|_v$.

<u>Т е о р е м а 7</u>. Пусть L - оператор вида (1)-(2) и существует $r(t)$ такая, что $|h_i(t) - r(t)| \geq c > 0$, причём не все разности $h_i(t) - r(t)$ одного знака. Тогда задача

$$\begin{cases} Lx = \lambda q x \\ x \in C^{n}_{(L, v)}(R) \end{cases} \qquad \left(v(t) = \exp\left(\int r(t) dt \right) \right)$$

с $q(t) > 0$, $q(\pm\infty) = 0$ имеет осцилляционный спектр.

<u>Т е о р е м а 8</u>. Пусть $\tilde{L}$ - оператор вида (25) на $(0, 1)$ и существует $r(\tau)$ такая, что $|\tilde{h}_i(\tau) - r(\tau)| \geq c > 0$, причём не все разности $\tilde{h}_i(\tau) - r(\tau)$ одного знака. Тогда задача

$$\begin{cases} \tilde{L}x = \lambda \tilde{q} x \\ x \in C^{n}_{(\tilde{L}, v)}(0, 1) \end{cases} \qquad \left(v(\tau) = \exp\left(\int \frac{r(\tau)}{\tau(1-\tau)} d\tau \right) \right)$$

с $\tilde{q}(\tau)>0$, $\tilde{q}(+0)=\tilde{q}(1-0)=0$ имеет осцилляционный спектр.

В заключение автор выражает благодарность Ю.В.Покорному за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polia G. // Trans. Am. Math. Soc. 1922. P. 312-324.

2. Юдович В.И.// Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 1. С. 205-206.

3. Левин А.Ю.// Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 2. С. 43-96.

4. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

5. Левин А.Ю., Степанов Г.Д.// Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 606-625; Т. 17, № 4. С. 813-830.

6. Крейн М.Г.// Докл. АН СССР. 1935. Т. 2, № 5-6. С. 345-347.

7. Покорный Ю.В., Лазарев К.П.// Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 658-670.

8. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975.

9. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М., 1985.

10. Стеценко В.Я.// Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 3. С. 242-244.

11. Schur I. // Mathem. Annalen. 1909. Bd. 67, H. 3, 306-339.

12. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.

13. Jentzsch R. // J. für reine und angew. Math. 1912. Bd. 141, 235-244.

14. Крейн М.Г., Рутман М.А. // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 1. С. 3-95.

Печатается в соответствии с решением Совета Воронежского ордена Ленина государственного университета им. Ленинского комсомола от 27.05.88.

5379-88

В печать 9.06.88

Тир. Цена 2 руб. 90 коп. Зак. 32492

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403