

ISBN 5-201-09755-3

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

**ЗАДАЧИ
ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ**

Часть 1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2000

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ
ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ
НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

А.С. Кулешов

Исследуется ветвление стационарных движений строго выпуклого тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, отвечающих критическим точкам интеграла энергии на фиксированных уровнях двух других интегралов, явный вид которых неизвестен.

Для получения уравнений движения тела используем алгоритм, предложенный в [1, 2]. Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат с началом в некоторой точке O плоскости Oxy , по которой движется тело, соприкасаясь с этой плоскостью в точке M . Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью. Расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ : $GQ = f(\theta)$. Пусть β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной его меридианной плоскостью, а γ – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и неподвижной осью Ox . Положение тела будет вполне определено углами θ, β, γ и координатами x, y точки M .

Введем еще систему координат $G\xi\eta\zeta$, движущуюся и в пространстве и в теле так, что ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости. Пусть вектор угловой скорости

ω тела и радиус-вектор $\mathbf{GM}$ точки контакта задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ соответственно. Тогда $\eta = 0$, а ξ и ζ будут функциями угла θ , причем

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta. \quad (1)$$

Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии. Уравнения движения тела можно представить в виде

$$\begin{aligned} [A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)] \frac{dq}{dt} &= mgf'(\theta) + (A_3r - A_1p \cot \theta) p \\ &\quad - m(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi)(p\zeta - r\xi)p - mq \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right), \\ A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{dt} &= (A_1p \operatorname{ctg} \theta - A_3r) q, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - \frac{A_3}{m\xi} \frac{dr}{dt} = (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq, \quad q = -\frac{d\theta}{dt}.$$

Используя последнее из уравнений (2), перейдем во втором и третьем уравнении к новой независимой переменной – углу θ . Получим

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} &= -A_1 \operatorname{ctg} \theta p + A_3 r, \\ \zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{C + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} &= -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta') p + \xi' r. \end{aligned} \quad (3)$$

Общее решение уравнений (3) имеет вид

$$p = c_1 \varphi_1(\theta) + c_2 \varphi_2(\theta), \quad r = c_1 \psi_1(\theta) + c_2 \psi_2(\theta), \quad (4)$$

где φ_i, ψ_i – некоторые функции.

Уравнения (2) допускают частное решение

$$\theta = \theta_0 \neq 0, \quad q = 0, \quad p = p_0, \quad r = r_0,$$

если постоянные θ_0, p_0, r_0 удовлетворяют уравнению

$$B_1 p_0^2 - B_2 r_0 p_0 - m g f'_0 = 0,$$

$$B_1 = \left(A_1 - \frac{m \zeta_0}{\cos \theta_0} f_0 \right) \operatorname{ctg} \theta_0, \quad B_2 = \left(A_3 - \frac{m \xi_0}{\sin \theta_0} f_0 \right).$$

Подставляя выражения (4) для p и r в данное соотношение, получим

$$a_{11} c_1^2 + a_{12} c_1 c_2 + a_{22} c_2^2 - m g f'_0 = 0$$

$$a_{ii} = B_1 \varphi_{i0}^2 - B_2 \varphi_{i0} \psi_{i0} \quad (5)$$

$$a_{12} = 2B_1 \varphi_{10} \varphi_{20} - B_2 (\varphi_{10} \psi_{20} + \varphi_{20} \psi_{10})$$

При каждом фиксированном θ_0 таком, что $f'_0 \neq 0$ уравнение (5) задает гиперболу, а если $f'_0 = 0$ – пару пересекающихся прямых

$$p_0 = c_1 \varphi_{10} + c_2 \varphi_{20} = 0, \quad (6)$$

$$[B_1^* \varphi_{10} - B_2^* \psi_{10}] c_1^0 = [B_2^* \psi_{20} - B_1^* \varphi_{20}] c_2^0,$$

$$B_1^* = B_1|_{(1)} = (A_1 + m f_0^2) \operatorname{ctg} \theta_0, \quad B_2^* = B_2|_{(1)} = A_3 + m f_0^2 \quad (7)$$

Частные решения (6) и (7) определяют стационарные движения тела, при которых центр тяжести тела находится на вертикали, проходящей через точку M касания тела

с опорной плоскостью. Положим

$$p_0 = \omega \sin \theta_0, \quad r_0 = \omega \cos \theta_0 + \Omega,$$

где постоянные ω и Ω представляют собой угловые скорости прецессии и собственного вращения соответственно. При $\Omega \neq 0$ решение (6) определяет равномерное качение тела вдоль неподвижной прямой, а при $\Omega = 0$ – равновесие тела. Решение (7) определяет некоторую прецессию тела, для которой угловые скорости прецессии и собственного вращения связаны соотношением

$$\Omega = \frac{(A_1 - A_3) \omega \cos \theta_0}{B_2^*}$$

и которая в случае $A_1 = A_3$ или $\theta_0 = \pi/2$ переходит в равномерное вращение тела вокруг вертикали, проходящей через точку касания и центр масс.

Исследуем поведение стационарных движений вблизи данных частных решений. Будем считать, что $\theta = \theta_0 + \varepsilon_1$, $c_1 = c_1^0 + \tilde{c}_1 \varepsilon_2$, $c_2 = c_2^0 + \tilde{c}_2 \varepsilon_3$. Тогда в окрестности семейства (6) имеем

$$\begin{aligned} -B_2^* (c_1^0 \psi_{10} + c_2^0 \psi_{20}) (\varphi_{10} \tilde{c}_1 \varepsilon_2 + \varphi_{20} \tilde{c}_2 \varepsilon_3) = [mgf_0'' + \\ + \frac{A_3 B_2^* (B_2^* + m f_0 f_0'' \cos^2 \theta_0)}{A_1 B_2^* + m (A_3 - A_1) f_0^2 \cos^2 \theta_0} (c_1^0 \psi_{10} + c_2^0 \psi_{20})^2] \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Заметим, что условие положительности коэффициента при ε_1 (обозначим его S_1) является условием устойчивости движения (6). Так как $r_0 = \Omega \neq 0$, то это условие запишется в виде

$$mgf_0'' + \frac{A_3 (A_3 + m f_0^2) (A_3 + m f_0^2 + m f_0 f_0'' \cos^2 \theta_0)}{A_1 A_3 + m A_1 f_0^2 \sin^2 \theta_0 + m A_3 f_0^2 \cos^2 \theta_0} \Omega^2 > 0,$$

известном из целого ряда работ (см., например, [3, 4]).

Таким образом, нетривиальные решения в окрестности решения (6) существуют при

$$\text{sign} (c_1^0 \tilde{c}_2 \varepsilon_3 - c_2^0 \tilde{c}_1 \varepsilon_2) = \text{sign} (S_1 \varepsilon_1)$$

Аналогично, в окрестности решения (7) имеем

$$\begin{aligned} & [B_1^* (\varphi_{10} \tilde{c}_1 \varepsilon_2 + \varphi_{20} \tilde{c}_2 \varepsilon_3) - B_2^* (\psi_{10} \tilde{c}_1 \varepsilon_2 + \psi_{20} \tilde{c}_2 \varepsilon_3)] \times \\ & \times (c_1^0 \varphi_{10} + c_2^0 \varphi_{20}) = \left[m g f_0'' + \frac{A_1 + m f_0^2}{\sin^2 \theta_0} (c_1^0 \varphi_{10} + c_2^0 \varphi_{20})^2 \right] \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Условие устойчивости этого движения имеет вид

$$S_2 = m g f_0'' + (A_1 + m f_0^2) \omega^2 > 0$$

Таким образом нетривиальные решения в окрестности решения (7) существуют при

$$\text{sign} (c_2^0 \tilde{c}_1 \varepsilon_2 - c_1^0 \tilde{c}_2 \varepsilon_3) = \text{sign} (S_2 \varepsilon_1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051, 98-01-00041)

Литература

1. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике негोलомных систем. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 112 с.
2. Муштару Х.М. О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сб. 1932. Т.39, № 1-2. С. 105-126.

3. *Карпетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 45-52.
4. *Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742-745.