

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский педаго-
гический государственный университет»

академик РАН и РАО,

доктор физико – математических наук

профессор Семёнов А.Л.



«9» 12 2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

**Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский педагогический
государственный университет» на диссертационную работу
Зеленовой Марии Евгеньевны «Решение систем уравнений в полях
алгебраических чисел», представленную на соискание учёной
степени кандидата физико – математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.**

Диссертация посвящена построению решений полиномиальных уравнений и систем в полях алгебраических чисел. В ней решаются две задачи. Первая – построить детерминированный алгоритм, который для заданного порядка \mathfrak{D} какого-либо конечного расширения поля рациональных чисел и заданного многочлена $f(x) \in \mathfrak{D}[x]$ находил бы корни $f(x)$, лежащие в \mathfrak{D} . Вторая – построить детерминированный алгоритм, который для заданной системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, имеющей лишь конечное множество решений в поле комплексных чисел, находил бы все её решения в рациональных числах. Каждый из алгоритмов полиномиален в зависимости от размера коэффициентов многочлена $f(x)$ и коэффициентов системы алгебраических уравнений. Задача о нахождении корней, ей посвящена первая глава диссертации, может рассматриваться, как частный случай задачи о факторизации многочленов над конечным расширением поля рациональных чисел. В то же время задача

нахождения делителей заданного многочлена может быть сведена к решению некоторых систем полиномиальных уравнений. Последняя задача исследуется во второй главе диссертации.

Постановки обеих задач классические. Они восходят к Л. Кронекеру (разложение на множители) и К. Гензелю (подъём решений). Исследования в этой области вели такие известные математики, как Г. Цассенхауз (ускорение подъёма, удваивающее количество верных цифр), А. Ленстра, Х. Ленстра, Л. Ловас (разложение на множители с помощью LLL – алгоритма), Д. Бюлер, К. Померанс (точное извлечение квадратных корней в полях алгебраических чисел), Д. Диксон (точное решение больших систем линейных уравнений над полем рациональных чисел). Диссертационная работа удачно дополняет эти исследования.

В диссертации использованы методы коммутативной алгебры и методы построения решений в полях p -адических чисел с помощью подъёма по степеням простых идеалов. В ней разработан алгоритм решения полиномиальных уравнений в произвольном порядке поля алгебраических чисел, при этом найдена оценка высоты решения, найдена итерационная формула, позволяющая сделать подъём решения полиномиального сравнения в порядке по модулю простого числа p до решения по модулю p^{2^k} , $k \in \mathbb{N}$, получена эффективная граница, до которой следует поднимать решение сравнения для того, чтобы найти решение исходного уравнения в порядке. Итерационная схема в основном следует Цассенхаузу и является p -адической реализацией метода касательных Ньютона. Вместе с тем М.Е. Зеленовой удалось найти в общем случае итерационные формулы, в которых отсутствует деление на числа, меняющиеся с изменением шага итерации.

В работе также получен алгоритм нахождения неособых целых решений однородных полиномиальных систем с целыми коэффициентами нулевой размерности, при этом найдена оценка высоты рационального решения неоднородной полиномиальной системы уравнений с целыми коэффициентами, найдена итерационная формула, позволяющая сделать подъём решения неоднородной полиномиальной системы сравнений с целыми коэффициентами по модулю простого числа p до решения по модулю p^{2^k} , $k \in \mathbb{N}$, получена эффективная граница, до которой следует поднимать решение неоднородной полиномиальной системы сравнений с целыми коэффициентами для того, чтобы найти решение соответствующей полиномиальной системы уравнений. Как и в одномерном случае, в

диссертации предлагаются новые итерационные формулы, исключаящие обращение матриц с элементами, меняющимися в зависимости от шага итерации. Это, конечно, существенно упрощает и ускоряет вычисления.

Предлагаемые в диссертации алгоритмы сопровождаются теоремами, в которых аккуратно доказывается корректность работы алгоритмов и все необходимые для этого свойства величин, участвующих в процессе выполнения вычислений. Отметим, в частности, оценку величины решений систем полиномиальных уравнений. Доказательство этой оценки основано на методах коммутативной алгебры, разработанных в связи с доказательствами алгебраической независимости чисел.

Результаты диссертации являются новыми и представляют несомненный интерес для специалистов в области алгоритмической и алгебраической теории чисел. Они опубликованы и прошли надлежащую апробацию.

Диссертационное исследование Зеленовой М.Е. представляет собой самостоятельно проведённую автором научно - квалификационную работу на актуальную тему, результаты которой имеют теоретическое и практическое значение. Автореферат диссертации отражает основное содержание исследования, его результаты и выводы. Название диссертации «Решение систем уравнений в полях алгебраических чисел» соответствует содержанию работы и отражает основную проблему исследования.

Основные материалы диссертационного исследования в полной мере представлены в публикациях автора – всего 3 работы, из которых 2 опубликованы в рецензируемых научных журналах, указанных в списке Перечня ВАК Минобрнауки РФ.

Тема, содержание и результаты диссертации Зеленовой М.Е. отвечают Паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Представленная диссертация Зеленовой М.Е. полностью соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям в пп. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о порядке присуждения учёных степеней, утверждённого Правительством РФ (постановление № 842 от 24.09.2013 г.), а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико – математических наук.

Отзыв подготовлен Царёвым Андреем Валерьевичем, профессором кафедры алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет», доктором физико - математических наук (специальность 01.01.06

– математическая логика, алгебра и теория чисел).

Отзыв обсуждён и единогласно утверждён на заседании кафедры алгебры (протокол № 5 от 23.11.2015) и кафедры теории чисел (протокол № 5 от 23.11.2015).

Зам. заведующего кафедрой алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

д.ф.-м.н., профессор

Царёв А.В.

Зам. заведующего кафедрой теории чисел федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

Крупцын Е.С.



Контактные данные:

Царёв Андрей Валерьевич

кафедра алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

107140, город Москва, улица Краснопрудная, дом 14, кабинет 212

тел. (499)264 – 46 – 83

E-mail: algebra@mpgu.edu, an-tsarev@yandex.ru

Крупцын Евгений Станиславович

кафедра теории чисел федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

107140, город Москва, улица Краснопрудная, дом 14, кабинет 201

тел. (499)264 – 38 – 09

E-mail: tnum@mpgu.edu, es.krupitsyn@m.mpgu.edu