объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-865

Е.А.Дей *, В.Н.Капшай*, Н.Б.Скачков

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

*Гомельский государственный университет

1988

I. Введение

Квазипотенциальный подход в квантовой теории поля [I-3] нашёл широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний. Знание релятивистских волновых функций связанного состояния позволяет рассчитывать спектры масс атомов и составных систем типа позитрония и кваркония [4,5], формфакторы упругого рассеяния и распадов мезонов, структурные функции адронов и т.д.

В импульсном представлении интегральные уравнения квазипотенциального подхода являются трехмерными, что позволяет развить эффективные методы их решения [6-II]. Другой привлекательной чертой подхода является возможность формулировки уравнений в релятивистском конфигурационном представлении (РКП), где они имеют вид разностных [6,I2]. Отметим, что первоначально точные решения квазипотенциальных уравнений были найдены именно в релятивистском конфигурационном представлении [6].

В работе [II] был предложен метод решения разностных уравнений общего вида в случае квазипотенциала, обладающего в импульсном пространстве "асимптотически свободным" поведением при больших переданных импульсах, а в релятивистском конфигурационном представлении имеющего вид αr^{-1}. Метод основан на сведении с помощью преобразования Лапласа разностных уравнений к дифференциальным и на последующем их решении в классе обобщенных функций медленного роста. В настоящей работе аналог метода [II] развит для случая суперпозиций квазипотенциалов однобозонного обмена (в том числе с ненулевой массой бозона).

План нашей работы таков. Во втором разделе мы формулируем квазипотенциальные уравнения и приводим явный вид квазипотенциалов однобозонного обмена и их суперпозиций. В третьем разделе класс разностных квазипотенциальных уравнений сведен к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и изложен метод их решения. В четвёртом разделе получены волновые функции в импульсном и релятивистском конфигурационном представлениях. В заключении указаны другие квазипотенциалы, для которых может быть применен предложенный метод.

2. Квазипотенциалы однобозонного обмена и их суперпозиции

Для связанной системы двух скалярных частиц одинаковой массы m квазипотенциальные уравнения Логунова - Тавхелидзе [I] и Кадышевского [3] записываются, соответственно, в виде

$$\left(p_0^2 - E^2\right) \Psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int V(\vec{p},\vec{k};E)\, \Psi(\vec{k})\, m^2 d\vec{k}/k^0 , \qquad (2.I)$$

$$p_0(p_0-E)\Psi(\vec{p})=(2\pi)^{-3}\int V(\vec{p},\vec{k},E)\Psi(\vec{k})m^2 d\vec{k}/k_0 . \qquad (2.2)$$

Здесь $\vec{p}$ и $\vec{k}$ – импульсы частиц в системе центра инерции. При этом 4-импульсы p^μ, k^μ принадлежат поверхности массового гиперболоида $p_0^2-\vec{p}^2=m^2$ (т.е. $p_0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$, $k_0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$), $2E=M$ – масса связанной системы, $d\vec{k}/k_0$ – лоренц-инвариантная мера интегрирования в импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на массовой поверхности. Квазипотенциал V зависит, вообще говоря, от полной энергии системы $2E$ и задается вне энергетической поверхности $2p_0=2k_0=2E$.

Для построения квазипотенциала в теории поля применяют два метода. Метод, основанный на формализме двухвременных функций Грина, был предложен в /I/ и использован для нахождения явного вида $V(\vec{p},\vec{k};E)$ в скалярной теории в работе /I3/. Другой метод основан на использовании квазипотенциального уравнения для амплитуды рассеяния, которая считается при этом заданной, например, диаграммами гамильтоновой формулировки квантовой теории поля /3,I4/ (для уравнения (2.2)) или фейнмановскими диаграммами (для уравнения (2.I)). В этом последнем случае квазипотенциал обмена бозоном массы μ не зависит от M и имеет вид

$$V_{(\mu)}(\vec{p},\vec{k}) = \frac{g^2}{\mu^2+Q^2} \ ; \ Q^2=-(p-k)^2=2m\Delta^0_{p,k}-2m^2. \qquad (2.3)$$

Здесь, следуя /I5/, ввели "вектор передачи 4-импульса $\Delta_{p,k}$", компоненты которого определяются с помощью операции чистого преобразования Лоренца Λ_k $(\Lambda_k^{-1}k=(m,\vec{0}))$ следующим образом /I6/:

$$\Delta^0_{p,k}=(\Lambda_k^{-1}p)^0=(p_0k_0-\vec{p}\vec{k})/m=\sqrt{m^2+\vec{\Delta}^2_{p,k}} , \qquad (2.4)$$

$$\vec{\Delta}_{p,k}=(\overrightarrow{\Lambda_k^{-1}p})=\vec{p}-\frac{\vec{k}}{m}\left(p_0-\frac{\vec{p}\vec{k}}{k_0+m}\right)=\vec{p}(-)\vec{k}. \qquad (2.5)$$

Квазипотенциал (2.3) является локальным в импульсном пространстве Лобачевского: $V(\vec{p},\vec{k})=V(\vec{p}(-)\vec{k})$. Для потенциалов такого рода уравнения (2.I) и (2.2) с помощью интегрального преобразования /6,I2/

$$\Psi(\vec{p})=\int\xi(\vec{p},\vec{r})\Psi(\vec{r})d\vec{r} \ ; \quad V(\vec{\Delta})=\int\xi(\vec{\Delta},\vec{r})V(r)d\vec{r} \qquad (2.6)$$

с функциями /I7/

$$\xi(\vec{p},\vec{r}) = \left[(p_0 - \vec{p}\vec{n})/m\right]^{-1-imr}, \qquad (2.7)$$

образующими полную ортогональную систему на массовом гиперболоиде $p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$, могут быть записаны в РКП в виде дифференциально-разностных уравнений

$$\left(\hat{H}_0^2 - E^2\right)\Psi(\vec{r}) = m V(r)\Psi(\vec{r})\,;\ \hat{H}_0\left(\hat{H}_0 - E\right)\Psi(\vec{r}) = m V(r)\Psi(\vec{r}). \qquad (2.8)$$

В(2.8) $\hat{H}_0$ – свободный релятивистский гамильтониан /6/

$$\hat{H}_0 = m\,ch(iD) + \frac{i}{r}\,sh(iD) - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}\exp(iD)\,;\quad D = \frac{1}{m}\frac{d}{dr}.$$

При этом квазипотенциалу (2.3) отвечает в РКП выражение $(\alpha = g^2/4\pi)$ (см. /6,I2/)

$$V_{(\mu)}(r) = \frac{\alpha}{r}\,\frac{ch(rma)}{sh(rm\pi)}\,;\quad a = arccos\,\frac{\mu^2 - 2m^2}{2m^2}. \qquad (2.9)$$

В настоящей работе мы в основном сосредоточим своё внимание на квазипотенциалах, являющихся следующими суперпозициями выражений (2.3) в импульсном и, соответственно, (2.9) при $a = 0$ и $a = \pi$ в релятивистском конфигурационном представлении:

$$V^{\pm}(\vec{p},\vec{k}) = V_{(0)}(\vec{p},\vec{k}) \pm V_{(2m)}(\vec{p},\vec{k}) = \frac{g^2}{Q^2} \pm \frac{g^2}{4m^2 + Q^2}, \qquad (2.10)$$

$$V^{\pm}(r) = \frac{\alpha}{r}\,cth(\pi rm) \pm \frac{\alpha}{r}\,\frac{1}{sh(\pi rm)}\,;\ V^{+}(r) = \frac{\alpha}{r}\,cth\left(\frac{\pi rm}{2}\right);\ V^{-} = \frac{\alpha}{r}\,th\left(\frac{\pi rm}{2}\right). \qquad (2.11)$$

В случае связанной системы спинорных частиц эффективное выражение для квазипотенциала однобозонного обмена (построенного на основе амплитуды рассеяния) после учёта спиновых структур приводится к виду $V(\vec{p},\vec{k}) = V(\Delta^0_{p,k})R(p_0,k_0)$, где $R(p_0,k_0)$ – рациональная функция (см., например, /I8/). В связи с этим ниже мы будем рассматривать целый класс уравнений, которые являются обобщениями (2.I) и (2.2) и записываются в импульсном пространстве в следующей форме:

$$P_\alpha(p_0)\left[p_0^2 - E^2\right]\Psi(\vec{p}) = (2\pi)^{-3}\int P_\beta(p_0)V(\Delta^0_{p,k})P_\gamma(k_0)\Psi(\vec{k})\,m^2 d\vec{k}/k_0, \qquad (2.12)$$

и аналогично для (2.2), где

$$P_\alpha(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\alpha}\alpha_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu;\ P_\beta(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\beta}\beta_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu;\ P_\gamma(p_0)=\sum_{\nu=0}^{N_\gamma}\gamma_\nu\left(\frac{p_0}{m}\right)^\nu. \quad (2.13)$$

Полиномы $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ удовлетворяют только условиям $P_{\alpha,\beta,\gamma}(1)=1$, обеспечивающим правильный нерелятивистский предел уравнения (2.12).

3. Точное решение квазипотенциальных уравнений общего вида в релятивистском конфигурационном представлении

Уравнение (2.12) в РКП в случае сферически-симметричных волновых функций $(\ell=0)$ приводится к следующему виду $\left(\Phi(r)=r\Psi(r)\right)$:

$$\hat{P}_\alpha\cdot\left[ch^2(iD)-\cos^2\chi\right]\Phi(r)=\hat{P}_\beta\, m^{-1}V(r)\hat{P}_\gamma\ \Phi(r). \quad (3.1)$$

Здесь

$$\cos\chi=\frac{M}{2m};\quad \hat{P}_\alpha=P_\alpha\left[ch(iD)\right]=\sum_{\nu=0}^{N_\alpha}\alpha_\nu\, ch^\nu(iD), \quad (3.2)$$

и аналогично для $\hat{P}_{\beta,\gamma}$.

Для решения уравнения (3.1) мы применим преобразование Лапласа с фиксированным контуром

$$\Phi(r)=\int_0^\infty \exp(-mry)\,\varphi(y)\,dy. \quad (3.3)$$

Тогда из (3.1) получаем уравнение

$$P_\alpha(\cos y)\left[\cos^2 y-\cos^2\chi\right]\varphi(y)=P_\beta(\cos y)\int_0^y\tilde{V}(y-y')P_\gamma(\cos y')\varphi(y')\,dy', \quad (3.4)$$

в котором $\hat{V}(y)$ есть лапласовский прообраз $V(r)$. С помощью обратного преобразования Лапласа для потенциалов (2.11) получаем

$$\tilde{V}^\pm(y)=\theta(y)+2\sum_{s=1}^\infty(\pm1)^s\theta(y-\pi s), \quad (3.5)$$

где $\theta(y)$ – ступенчатая функция. Здесь и далее верхний знак относится к случаю $V^+(r)$, нижний – к случаю $V^-(r)$.

Введем функции

$$F(y)=P_\gamma(\cos y)\,\varphi(y);\ W(x,y)=\alpha^{-1}\left[\cos^2 y-\cos^2 x\right]R;\ R(\cos y)=\frac{P_\alpha(\cos y)}{P_\beta(\cos y)P_\gamma}. \quad (3.6)$$

Тогда нетрудно показать, что (3.4) эквивалентно следующему диффаренциально -разностному уравнению (уравнению с отклоняющимся аргументом):

$$\frac{d}{dy}\left[W(x,y)F(y)\right] - F(y) = 2\sum_{s=1}^{\infty}(\pm 1)^s \theta(y-\pi s)F(y-\pi s) . \tag{3.7}$$

Отметим, что уравнение (3.7), в отличие от рассматривавшихся в литературе (например, в /I9/), имеет переменный разностный порядок. Действительно, на каждом из интервалов $\Omega_k = [\pi k, \pi(k+1)]$, $k = 0, 1, \ldots$, можно записать (штрих означает дифференцирование по y)

$$\left[W(x,y)F(y)\right]' - F(y) = 0 \;;\; F(0) = 0 \;; \qquad y \in \Omega_0 , \tag{3.8}$$

$$\left[W(x,y)F(y)\right]' - F(y) = \pm 2F(y-\pi) \;; \qquad y \in \Omega_1 , \tag{3.9}$$

$$\left[W(x,y)F(y)\right]' - F(y) = \pm 2F(y-\pi) + 2F(y-2\pi) \;; \qquad y \in \Omega_2 , \tag{3.10}$$

. . . . . .

$$\left[W(x,y)F(y)\right]' - F(y) = 2\sum_{s=1}^{k}(\pm 1)^s F(y-\pi s) \;; \qquad y \in \Omega_k , \tag{3.11}$$

. . . . . .

Таким образом, разностный порядок уравнения (3.7) на интервале Ω_k равен k.

Уравнение (3.8) на Ω_0 является однородным. С использованием свойств функции $W(x,y)$ нетрудно убедиться, что все производные функции $F(y)$ при $y=0$ существуют и равны нулю. Это означает, что в классе обычных (непрерывно дифференцируемых) функций уравнение (3.8) имеет только тривиальное решение $F(y) = 0$. Нетривиальные решения, как показано в /II/, уравнение (3.8) имеет лишь в классе обобщенных функций медленного роста. Такие решения могут отличаться от классического в точках, где $W(x,y) = 0$, из которых мы рассмотрим (аргументацию см. в /II/) $y = x$, $y = x_1 = \pi - x$. В соответствии с теоремой о представлении обобщенной функции с точечным носителем /20/ запишем

$$F(y) = a_0 \sum_{j=0}^{n} B_j^n \delta^{(j)}(y-x) + b_0 \sum_{j=0}^{n_1} G_j^n \delta^{(j)}(y-x_1) \;; \quad y \in \Omega_0 , \tag{3.12}$$

где n и n_1 - натуральные числа a_0 , b_0 произвольны.

Подставляя (3.12) в (3.8), получаем для каждой совокупности коэффициентов B_j^n и G_j^n однородную алгебраическую систему уравнений. Система уравнений для B_j^n имеет решения только при выполнении условия $(\cos x \neq 0)$

$$1 + n\left[W(x,y)\right]'_{y=x} = 1 - \frac{n}{\alpha}\sin(2x)\,R(\cos x) = 0, \qquad (3.13)$$

которое является условием квантования. Для самих коэффициентов B_j^n получаем $(B_0^n = 0)$

$$B_j^n = n(n-j)^{-1}\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k-j+1}\,C_k^{j-1}\left[W(x,y)\right]_{y=x}^{(k-j+1)} B_k^n\,;\; j = n-1,\dots,1\,, \qquad (3.14)$$

где в силу произвольности a_0 положим $B_n^n = 1$.

Из системы уравнений для $G_j^{n_1}$ вытекает условие

$$1 + n_1\left[W(x,y)\right]'_{y=x_1} = 1 + \frac{n_1}{\alpha}\sin(2x)\,R(-\cos x) = 0. \qquad (3.15)$$

Далее удобно рассматривать раздельно следующие три случая $(c = \cos x)$:

а) функция $R(c)$ является нечётной,
б) функция $R(c)$ является чётной,
в) функция $R(c)$ не является ни чётной, ни нечётной.

В случае а) из (3.15) с учётом (3.13) следует, что $n_1 = n$. Рекуррентные соотношения для коэффициентов G_j^n имеют следующее решение:

$$G_j^n = (-1)^j B_j^n. \qquad (3.16)$$

В случаях б) и в) условие (3.15) не выполняется ни при каком n_1, это означает, что однородная система для G_j^n имеет только тривиальное решение: $G_j^n = 0$.

Рассмотрим теперь уравнение (3.9) на Ω_1, которое с учётом найденного решения на предыдущем интервале Ω_0 принимает вид

$$\left[W(x,y)F(y)\right]' - F(y) = \pm 2a_0\sum_{j=1}^{n} B_j^n\,\delta^{(j)}(y-x-\pi)\,\pm$$
$$\pm\, 2b_0\sum_{j=1}^{n} G_j^n\,\delta^{(j)}(y-x_1-\pi)\,;\quad y\in\Omega_1. \qquad (3.17)$$

В случае а) можно показать, что общее решение однородного уравнения, соответствующего (3.17), тривиально: $F_{одн}(y) = 0$. Частное решение неоднородного уравнения (3.17) будем искать в виде

$$F(y) = a_0\sum_{j=0}^{n} P_j^n\,\delta^{(j)}(y-x-\pi) + b_0\sum_{j=0}^{n} R_j^n\,\delta^{(j)}(y-x_1-\pi)\,, \qquad (3.18)$$

где P_j^n, R_j^n – подлежащие определению коэффициенты. Из (3.I7), (3.I8) находим для P_j^n рекуррентные формулы

$$P_j^n\left[1+jW'_{y=x+\pi}\right]=\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k-j+1}P_k^n C_k^{j-1} W^{(k-j+1)}_{y=x+\pi} \mp 2B_j^n \tag{3.I9}$$

и аналогичные для R_j^n. При $j=n$, в частности, имеем из (3.I9)

$$P_n^n\left[1-R(-c)/R(c)\right]=\mp 2B_n^n . \tag{3.20}$$

В случае а) из (3.20) следует, что $P_n^n=\mp B_n^n$, далее из (3.I9) (и аналогично для R_j^n) получаем с учётом свойства $W(x,y)=-W(x,y+\pi)$, что

$$P_j^n=\mp B_j^n\ ;\quad R_j^n=\mp G_j^n=\mp(-1)^j B_j^n . \tag{3.2I}$$

Таким образом, решение уравнения (3.I7) на интервале Ω_1 совпадает в случае потенциала $V^+(r)$ (и совпадает с точностью до знака в случае потенциала $V^-(r)$) со сдвинутым на π решением на интервале Ω_0, то есть $F(y)=\mp F(y-\pi)$,$(y\in\Omega_1,\ y-\pi\in\Omega_0)$.

В случае б) однородное уравнение, соответствующее (3.I7), имеет следующее решение:

$$F(y)=a_1\sum_{j=1}^{n}B_j^n\,\delta^{(j)}(y-x-\pi)\ , \tag{3.22}$$

где B_j^n – те же, что и в (3.I4). Но тогда неоднородное уравнение (3.I7) не имеет решений вообще, что проще всего понять, используя (3.20), где $R(-c)=R(c)$. Фактически это означает, что в случае б) решения исходного уравнения (3.I) непредставимы в виде преобразования Лапласа. Поэтому дальше случай б) не рассматриваем.

В случае в) однородное уравнение (3.I7) имеет только тривиальное решение $F_{одн}(y)=0$. Решение неоднородного уравнения (3.I7) имеет вид (3.I8) при $R_j^n=0$, коэффициенты P_j^n легко определяются из (3.I9),(3.20), причем ясно, что свойство (3.2I) не выполняется.

Рассмотрим теперь уравнение (3.I0) на Ω_2. С учётом полученных выше решений на Ω_0 и Ω_1 находим, что в случае а) правая часть (3.I0) равна нулю и уравнение фактически однородно. Его решение имеет вид

$$F(y)=a_2\sum_{j=1}^{n}B_j^n\,\delta^{(j)}(y-x-2\pi)+b_2\sum_{j=1}^{n}(-1)^j B_j^n\,\delta^{(j)}(y-x_1-2\pi)\ , \tag{3.23}$$

где a_2 , b_2 произвольны.

В случае в) уравнение (3.10) неоднородно. Соответствующее однородное уравнение имеет решение вида (3.23), однако неоднородное уравнение решений вообще не имеет. Таким образом, случай в) аналогичен случаю б) и дальше также не рассматривается.

Дальнейшее решение уравнения (3.7) на интервалах Ω_3 , Ω_4 , ... в случае нечетной функции $R(c)$ проводится так же. На чётных интервалах $\Omega_{2\ell}$ уравнение (3.7), с учётом решений на предыдущих интервалах, оказывается однородным, и его обобщенное решение имеет вид, аналогичный (3.12), (3.23) с носителями $x+2\pi\ell$, $x_1+2\pi\ell$. На нечётных интервалах $\Omega_{2\ell+1}$ в качестве неоднородности (3.7) содержится только функция $F(y)$ из предыдущего интервала $\Omega_{2\ell}$. При этом $F(y) = \mp F(y-\pi)$, $(y \in \Omega_{2\ell+1})$. Таким образом, общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{n} B_j^n \delta^{(j)}(y-x-\pi k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{j=1}^{n} (-1)^j B_j^n \delta^{(j)}(y-x_1-\pi k) \; ; \quad a_{2\ell+1} = \mp a_{2\ell} ; \; b_{2\ell+1} = \mp b_{2\ell} , \tag{3.24}$$

где n - натуральное число (главное квантовое число), коэффициенты B_j^n определены в (3.14), $a_{2\ell}$, $b_{2\ell}$ произвольны. Они отражают известный i/m-периодический произвол решения уравнения (3.1).

В заключение этого раздела отметим, что если с самого начала интересоваться только случаем, когда функция $R(c)$ нечётна, уравнение (3.7) можно несколько упростить. Запишем наряду с (3.7) уравнение для функции $F(y-\pi)$:

$$\left[W(x,y-\pi)F(y-\pi)\right]' - F(y-\pi) = 2\sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^s \theta(y-\pi s-\pi) F(y-\pi s-\pi) . \tag{3.25}$$

Введем далее функцию

$$f(y) = F(y) \pm F(y-\pi) , \tag{3.26}$$

"дополняющую" решение (со знаком ∓ 1) на Ω_{k-1} до решения на Ω_k . Из (3.7),(3.25) с учётом свойства $W(x,y-\pi) = -W(x,y)$ находим для $f(y)$ однородное уравнение $[W(x,y)f(y)]' - f(y) = 0$, решения которого на Ω_k могут быть найдены так же, как и выше.

Функция $F(y)$ определится через $f(y)$ следующим образом:

$$F(y) = \sum_{s=0}^{k} (\mp 1)^s f(y-\pi s) \; ; \quad y \in \Omega_k , \tag{3.27}$$

при этом, разумеется, в результате получим решение $F(y)$ того же вида, что и (3.24).

4. Волновые функции в импульсном и релятивистском конфигурационном представлениях

Используя формулы (3.3), (3.6), (3.24), в РКП находим

$$\Phi_n(r) = \left(1 \mp e^{-\pi r m}\right)\left\{ C_a(r) \sum_{j=1}^{n} B_j^n \left(-\frac{d}{dx}\right)^j \left[\frac{e^{-rmx}}{P_\gamma(\cos x)}\right] + \right.$$
$$\left. + C_b(r) \sum_{j=1}^{n} (-1)^n B_j^n \left(\frac{d}{dx_1}\right)^j \left[\frac{e^{-rmx_1}}{P_\gamma(\cos x_1)}\right]\right\}. \qquad (4.I)$$

Здесь $C_{a,b}(r)$ - i/m-периодические функции, с точностью до которых и определяется решение уравнения (3.I). Они следующим образом выражаются через коэффициенты a_k , b_k :

$$C_a(r) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} \exp(-2l\pi r m) \ ; \ C_b(r) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l} \exp(-2l\pi r m). \qquad (4.2)$$

Подчеркнем, что явный вид $C_{a,b}(r)$ или, что то же самое, вид коэффициентов a_{2l} , b_{2l} из разностного уравнения не определяется и может быть определен лишь на основе интегральных уравнений в импульсном или релятивистском конфигурационном представлениях.

В работах /7/ были рассмотрены простейшие частные случаи уравнения (3.I), а именно:

$$\text{I)} \quad P_\alpha^{I}(c) = P_\gamma^{I}(c) = 1 \ ; \ P_\beta^{I}(c) = c \ , \qquad (4.3)$$

$$\text{II)} \quad P_\alpha^{II}(c) = P_\beta^{II}(c) = 1 \ ; \ P_\gamma^{II}(c) = c \ , \qquad (4.4)$$

с квазипотенциалом V^- . Вид коэффициентов a_{2l} , b_{2l} и функций $C_{a,b}(r)$ в этих случаях очень простой:

$$a_{2l} = b_{2l} = 1 \ ; \ C_a(r) = C_b(r) = \frac{1}{1-\exp(-2\pi r m)} = \hat{\theta}(rm), \qquad (4.5)$$

где $\hat{\theta}(rm)$ – разностный аналог ступенчатой функции /6/. Из (4.I), (4.5) находим, например, волновые функции основного $(n = 1)$ и первого возбужденного (n = 2) состояний в случае (4.3):

$$\Phi_1^{I}(r) = B_1^1 \cdot rm \cdot sh\left[(\pi/2 - x)rm\right] / sh\left[\pi rm/2\right], \tag{4.6}$$

$$\Phi_2^{I}(r) = B_2^2 \left\{ (rm)^2 ch\left[(\pi/2 - x)rm\right] - \frac{2}{\sin 2x} rm\, sh\left[(\pi/2 - x)rm\right] \right\} / sh\left[\pi rm/2\right], \tag{4.7}$$

при этом x в (4.6), (4.7) определяется из условия квантования (3.13), то есть $2\sin x = \alpha/n$ при n =1 и 2 соответственно.

Выражение для волновой функции в импульсном представлении через $\varphi(y)$, как это следует из формул (2.6),(3.3), имеет вид $(\chi_p = Arch(p_0/m))$

$$p\Psi(p) = \frac{2\pi}{m} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\chi_p + iy} + \frac{1}{\chi_p - iy} \right] \varphi(y)\, dy \tag{4.8}$$

и является фактически комбинацией преобразований Стилтьеса. С использованием (3.24) находим следующую "полюсную" структуру функции $p\Psi(p)$ в терминах быстроты χ_p:

$$p\Psi(p) = \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{n} B_j^n \left(-i\frac{d}{d\chi_p}\right)^j \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{1}{\chi_p + ix + i\pi k} + \frac{(-1)^j}{\chi_p - ix - i\pi k} \right] + \right.$$

$$\left. + (-1)^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\frac{1}{\chi_p + ix_1 + i\pi k} + \frac{(-1)^j}{\chi_p - ix_1 - i\pi k} \right] \right\}. \tag{4.9}$$

Особенности функции $\varphi(y)$ (производные δ - функций) принимают в пространстве быстрот облиние полюсов.

Для примера рассмотрим случай (4.3),(V^-), когда коэффициенты a_k и b_k задаются формулами (4.5). Тогда для волновой функции с $n = 1$ имеем из (4.9)

$$p\Psi_1^{I}(p) = -\frac{2\pi}{m} B_1^1\, i\frac{d}{d\chi_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\chi_p + ix + i\pi k} - \frac{1}{\chi_p - ix - i\pi k} \right]. \tag{4.10}$$

Сумма в (4.10) есть разложение на элементарные дроби функции $-i\sin 2x\left(ch^2\chi_p - \cos^2 x\right)^{-1}$, поэтому

$$p\Psi_1^{I}(p) = C\,\frac{sh\,\chi_p \cdot ch\,\chi_p}{(ch^2\chi_p - \cos^2 x)^2}, \tag{4.11}$$

где $C = 2\pi \sin 2x \cdot B_1^1/m$ - нормировочная константа.

Отметим здесь, что в случае потенциала $V(r) = \alpha r^{-1}$ вид функции $\varphi(y)$ аналогичен (3.24) /II/, из чего следует, что в этом случае $p\Psi(p)$ также задается полюсным выражением типа (4.9), что было использовано авторами работы /IO/.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложен метод нахождения как спектров (уравнение (3.I3)), так и волновых функций широкого класса квазипотенциальных уравнений, основанный на их сведении к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и решении затем в классе обобщенных функций медленного роста. Волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении находятся с помощью преобразования Лапласа, а волновые функции в импульсном представлении-с помощью преобразования Стилтьеса. Возникающие в этом методе константы в некоторых частных случаях могут быть определены полностью и имеют очень простой вид.

Метод был изложен нами на примере квазипотенциалов (2.IO), (2.II), его можно применять также и в других случаях, когда лапласовский прообраз потенциала имеет ступенчатый характер типа (3.5). К таким потенциалам, например, относится $V_{(0)}(r) = \alpha r^{-1} cth(\pi r m)$ (образ пропагатора однофотонного обмена), а также следующие суперпозиции выражений (2.9):

$$V_1^{\pm}(r) = V_{(0)}(r) + V_{(2m)}(r) \pm 2V_{(\sqrt{2}m)}(r) \; ; \; V_1^{+}(r) = \frac{\alpha}{r} cth\left(\frac{\pi r m}{4}\right) ; \; V_1^{-}(r) = \frac{\alpha}{r} th\left(\frac{\pi r m}{4}\right).$$

Кроме того, метод применим к потенциалам, обладающим в РКП степенным поведением, из которых отметим здесь потенциал

$$V_2(\vec{p},\vec{k}) = \frac{g^2}{\sqrt{Q^2(4m^2+Q^2)}} \quad ; \quad V_2(r) = \frac{\alpha}{\pi m r^2} \; , \tag{5.I}$$

уравнения (2.I), (2.2) с которым были ранее решены в киральном пределе $(M=0)$ точно /9/, а в общем случае -методом ВКБ /2I/.

Отличие квазипотенциалов, получаемых на основе функций Грина или диаграммной техники гамильтоновой формулировки теории поля, от рассмотренных выше состоит в том, что они не являются локальными в импульсном пространстве Лобачевского, а имеют вид типа следующего /3/:

$$V(\vec{p},\vec{k};M) = \frac{g^2}{|\vec{p}-\vec{k}|} \cdot \frac{1}{|\vec{p}-\vec{k}| + p_0 + k_0 - M} \; , \tag{5.2}$$

и, на первый взгляд, уравнения с ними не могут быть сформулированы в РКП. Отметим, однако, следующее важное обстоятельство. Уравнение (2.2) с квазипотенциалом (5.2) в случае сферически-симметричных $(\ell = 0)$ волновых функций $\left(\Psi(\vec{p}) = \Psi(p);\, p = |\vec{p}|\right)$ приводится к виду

$$p_0(p_0 - E)\, p\Psi(p) = -\frac{g^2 m^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \ln\left(\frac{p_0 + k_0 + |p-k| - M}{p_0 + k_0 + |p+k| - M}\right) k\Psi(k)\, dk/k_0 \,. \qquad (5.3)$$

Рассмотрим наряду с (5.3) уравнение (2.2) с суперпозицией квазипотенциала однобозонного обмена (2.3) с массой бозона $\mu = 2m$ и потенциала (5.I), а именно:

$$V_2(\vec{p},\vec{k}) - V_{(2m)}(\vec{p},\vec{k}) = -\frac{g^2}{4m^2 + Q^2} + \frac{g^2}{\sqrt{Q^2(4m^2+Q^2)}} \,. \qquad (5.4)$$

В случае сферически-симметричной волновой функции уравнение с квазипотенциалом (5.4) имеет вид

$$p_0(p_0 - E)\, p\Psi(p) = -\frac{g^2 m^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \left\{ \ln \frac{ch[(\chi_p + \chi_k)/2]}{ch[(\chi_p - \chi_k)/2]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}|\chi_p - \chi_k| - \frac{1}{2}|\chi_p + \chi_k| \right\} k\Psi(k)\, dk/k_0 \,. \qquad (5.5)$$

Нетрудно убедиться, что в киральном пределе или в случае сильно связанной системы $(M \ll 2m)$ уравнения (5.3) и (5.5) совпадают.

Таким образом, нелокальный (даже при $M \equiv 0$) квазипотенциал (5.2) в сферически-симметричном случае и пределе сильной связи эквивалентен локальному потенциалу (5.4), который в РКП имеет вид

$$V_2(r) - V_{(2m)}(r) = \frac{\alpha}{r}\left\{ \frac{1}{\pi m r} - \frac{1}{sh(\pi m r)} \right\} ,$$

и, следовательно, к нему также может быть применен предложенный выше метод.

В заключение авторы выражают благодарность А.А. Афонину, В.Г. Кадышевскому, Н.В. Максименко, В.И. Саврину, В.Н. Старикову, Г.Ю. Тюменкову и С.Г. Шульге за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

I. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, No.2, 380-400.

2. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В сб.: Проблемы теоретической физики (сб., посвященный 60-летию Н.Н. Боголюбова). М.: Наука , I969, 26I-277.

3. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., I968, B6, No I, I25-I37.

4. Фаустов Р.Н. ЭЧАЯ, I972, 3, № I, 238-268.

5. Savrin V.I., Sidorov A.V., Skachkov N.B. Hadronic Jor., I98I, 4, No 5, I642-I679.

6. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, I972, 2, № 3, 638-680.

7. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ТМФ, I982, 53, № I, 32-42; I983, 54, № 3, 406-4I5; 55, № I, 26-38; № 2, 236-245.

8. Архипов А.А., Саврин В.И. ТМФ, I982, 53, № 3, 342-357.

9. Капшай В.Н., Кулешов С.П., Скачков Н.Б. ТМФ, I983, 55, № 3, 349-360.

I0. Боос Э.Э., Саврин В.И.,Шаблыгин Е.М. ТМФ, I987, 72, № 2, I97-203.

II. Дей Е.А., Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ТМФ, I986, 69, № I, 55-68.

I2. Kadyshvsky V.G., Mir-Kasimov R.M. , Skachkov N.B. Nuovo Cimento, I968, A55, No 2, 233-257.

I3. Капшай В.Н., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ТМФ, I986, 69, № 3.

I4. Кадышевский В.Г. ЖЭТФ, I968, 46, № 2, 654-662; № 3, 872-883.

I5. Широков Ю.М. ЖЭТФ, I958, 35, № 4, I005-I0I3.

I6. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ТМФ,I978, 43, № 3, 330-342.

I7. Шапиро И.С. ДАН СССР, I956, I06, № 4, 647-649.

I8. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ТМФ, I983, 54, № 2, I83-I92.

I9. Беллман П., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, I967.

20. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, I979.

2I. Капшай В.Н., Конопляников В.Ф., Скачков Н.Б., Стариков В.Н. Препринт Р2-87-30I, Дубна, ОИЯИ, I987.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря I988 года.

Дей Е.А., Капшай В.Н., Скачков Н.Б. P2-88-865
Точные решения класса квазипотенциальных уравнений для суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена

Показано, что квазипотенциальные уравнения в случае взаимодействия, взятого в виде суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена, могут быть приведены путем преобразования Лапласа к форме дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Решения последних найдены в классе обобщенных функций. Получены условия квантования и волновые функции в релятивистском конфигурационном и импульсном представлениях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Dej E.A., Kapshaj V.N., Skachkov N.B. P2-88-865
Exact Solutions of a Class of Quasipotential Equations for a Superposition of One-Boson Exchange Quasipotentials

It is shown that quasipotential equations of a wide class when the interaction is a superposition of one-boson-exchange quasipotentials, can be reduced to differential equations with a deviating argument through the Laplace transformation. Solutions of the latter are derived in the class of generalized functions. Quantization conditions and wave functions in relativistic configurational and momentum representations are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988

18 коп.

Редактор Т.Я.Жабицкая. **Макет** Н.А.Киселевой.

Подписано в печать 17.01.89.
Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 1,21.
Тираж 490. **Заказ** 41524.
**Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.**