

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
Морской гидрофизический институт

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПОВЕРХНОСТНЫХ
И ВНУТРЕННИХ
ВОЛН**

СЕВАСТОПОЛЬ
1984

ВОЛНЫ В БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

А.Е. Букатов, О.М. Букатова

ВЛИЯНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ НА ДЛИННЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Распространение волн в канале постоянной глубины изучалось в [1,2,10], а в случае наклонного дна от одной стенки канала к другой — в [3,4]. Возбуждение длинных поверхностных волн возмущениями атмосферного давления с амплитудой, распределенной поперек канала на полуволне косинуса, анализировалось в [5,6] при постоянной глубине канала без учета сил трения.

В данной работе рассматривается влияние диссипативных сил и характера распределения амплитуды возмущающих давлений на поверхностные волны в бесконечно длинном канале переменной глубины.

Пусть однородная жидкость заполняет бесконечно длинный канал постоянной ширины $2b$. Глубина канала $H(y)$ переменная, но меняется только в поперечном направлении. Рассмотрим волновое движение, возникающее под действием возмущений

$$p = af(y) \exp(i\theta), \quad \theta = kx - \omega t. \quad (1)$$

В предположении линейной теории длинных волн с учетом линейной зависимости напряжения придонного трения от средней по вертикали скорости волнового течения задача заключается в решении системы уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \ell u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \mu v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (Hv)$$

с граничными условиями

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \quad (3)$$

Здесь ζ - возвышение свободной поверхности жидкости; $l = 2a \sin(\varphi + \mu R^{-1})$; R - радиус Земли; φ - широта места прохождения оси канала, совпадающей с осью x и перпендикулярной оси y , μ - коэффициент трения.

Отыскивая решение в виде $(u, v, \zeta) = [\bar{u}(y), \bar{v}(y), \bar{\zeta}(y)] \exp i\theta$, $\bar{\zeta} = \zeta_1 + i\zeta_2$, $\bar{u} = u_1 + iu_2$, $\bar{v} = v_1 + iv_2$ получим из (2), (3) для определения ζ_1 и ζ_2 два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \zeta_1'' \delta - \zeta_2'' \mu + \zeta_1' \Delta_1 + \zeta_2' \Delta_2 + \zeta_1 \Delta_3 + \zeta_2 \Delta_4 &= \eta_1 \\ \zeta_2'' \delta' + \zeta_1'' \mu - \zeta_1' \Delta_2 + \zeta_2' \Delta_4 - \zeta_1 \Delta_4 + \zeta_2 \Delta_3 &= \eta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} s_1 \mu \zeta_2 - s_2 \delta \zeta_1' + 2\mu \delta' \ell k \zeta_2 - s \ell k \zeta_1 &= \eta_3, \quad y = \pm b \\ s_2 \delta \zeta_2' + s_1 \mu \zeta_1' + s \ell k \zeta_2 + 2\mu \delta' \ell k \zeta_1 &= \eta_4, \quad y = \pm b, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (H'/H - \alpha_1 s_2) \delta, \quad \Delta_2 = (\alpha_1 s_1 - H'/H) \mu, \quad \Delta_3 = \Delta_5 - \delta s (gH)^{-1}, \\ \Delta_4 &= \Delta_6 - 2\delta' \mu (gH)^{-1}, \quad \Delta_5 = k\beta - (\alpha_1 s - H'/H) \ell k - k^2 \delta', \\ \Delta_6 &= (k + 2\alpha_1 \delta' \ell) k \mu, \quad \eta_1 = -a_1 (\Delta_1 f' + \Delta_5 f + \delta f''), \\ \eta_2 &= a_1 (\Delta_2 f' + \Delta_6 f - \mu f''), \quad \alpha_1 = 2\ell \beta (s^2 + 4\mu^2 \delta'^2)^{-1}, \\ \eta_3 &= a_1 (s_2 \delta f' + \ell k s f), \quad \eta_4 = -a_1 (s_1 \mu f' + 2\mu \delta' \ell k f) \\ s &= \ell^2 + \mu^2 - \delta^2, \quad s_1 = s + 2\delta', \quad s_2 = s - 2\mu^2, \quad \beta = \ell', \quad a_1 = a/(rg), \end{aligned}$$

штрих означает производную по y .

Определяя ζ_1 и ζ_2 из (4), (5), находим

$$\zeta = A(y) \cos(\theta + \alpha), \quad A = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \zeta_2 / \zeta_1.$$

Горизонтальные составляющие скорости u , v волнового возмущения определим по формулам

$$u = B(y) \cos(\theta + \alpha_1), \quad v = D(y) \cos(\theta + \alpha_2)$$

$$B = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}, \quad D = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = u_2 / u_1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = v_2 / v_1$$

$$u_1 = a_2(s_1 k \mu \zeta_2 - k b s_2 \zeta_1 + 2 \mu b l \zeta_2' - s l \zeta_1' - a_1 \eta_5),$$

$$u_2 = -a_2(s_2 k b \zeta_2 + k s_1 \mu \zeta_1 + s l \zeta_2' + 2 \mu b l \zeta_1' + a_1 \eta_6),$$

$$v_1 = -a_2(s l k \zeta_2 + 2 \mu b l k \zeta_1 + s_2 b \zeta_2' + s_1 \mu \zeta_1' + a_1 \eta_7),$$

$$v_2 = -a_2(2 \mu b l k \zeta_2 - s l k \zeta_1 + s_1 \mu \zeta_2' - s_2 b \zeta_1' - a_1 \eta_8),$$

$$\eta_5 = s_2 k b f + s l f', \quad \eta_6 = (s_1 k f + 2 l b f') \mu,$$

$$\eta_7 = (2 b l k f + s_1 f') \mu, \quad \eta_8 = s l k f + b s_1 f'.$$

Функции $\zeta_1(y)$ и $\zeta_2(y)$, через которые определяются ζ , u , v , находились численно. Расчеты проводились в случае $\ell = 2\omega \sin \varphi$ при постоянной и переменной глубине бассейна для различных законов распределения амплитуды атмосферных давлений по ширине канала и значений $b = 5 \cdot 10^5$ м, $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, $2\omega = 1,458 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹, $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹, $k = 6 \cdot 10^{-6}$ м, $\varphi = 20^\circ$, $a = 10^3$ Па.

Пусть дно канала ровное. Результаты расчетов при $H = 4 \cdot 10^3$ м представлены на рис. 1 для распределения амплитуды давлений в виде функции

$$f(y) = \exp[m_1(y/b - 1)], \quad m_1 = 25, \quad (6)$$

экспоненциально убывающей с удалением от правого берега ($y=b$) канала [7]. Коэффициент трения μ принимался [8,9] равным $1,2 \cdot 10^{-3}$; $2,4 \cdot 10^{-3}$; $4,8 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹. Этим значениям соответствуют по порядку сверху вниз кривые v_1 , A , B , D , изображенные сплошными линиями, и кривые ζ_2 , u_2 , v_2 , представленные штрихом. Сплошным линиям, характеризующим ζ_1 , u_1 , перечисленные μ отвечают в порядке снизу вверх. Распределение волновых характеристик по ширине канала дано на рис. 1 для $-b/2 \leq y \leq b$, так как при $-b \leq y \leq -b/2$ они практически равны нулю. При этом $\zeta_{1,2}$ и $A(m)$ даны с точностью до множителя 10^{-1} , а $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ (м/с) — до множителя 10^{-2} .

Видно, что величины анализируемых волновых характеристик, кроме ζ_2 , убывают с ростом μ . Величина ζ_2 растет при этом. Распределения $\zeta_{1,2}$, $u_{1,2}$, A , B по ширине канала прослеживают распределение амплитуды давлений. Значения этих характеристик убывают с удалением от правого берега. Величины $v_{1,2}$,

\bar{D} имеет по одному экстремуму, убывающему с ростом μ . Надо отметить, что ζ_2 , u_2 , v_1 обусловлены трением. Вклад u_2 в амплитуду \bar{v} больше вклада u_1 . Вклады v_2 и ζ_2 в \bar{D} и \bar{A} меньше вкладов v_1 и ζ_1 . Это характерно и для других рассмотренных законов распределения давлений.

Если давления затухают от левого берега ($y = -\bar{b}$) по закону
$$f(y) = \exp[-m_1(y/\bar{b} + 1)], \quad (7)$$
 то с удалением от этого берега величины волновых характеристики на рассматриваемой широте изменяются практически так же, как и с удалением от берега $y = \bar{b}$ в случае давлений (I), (6).

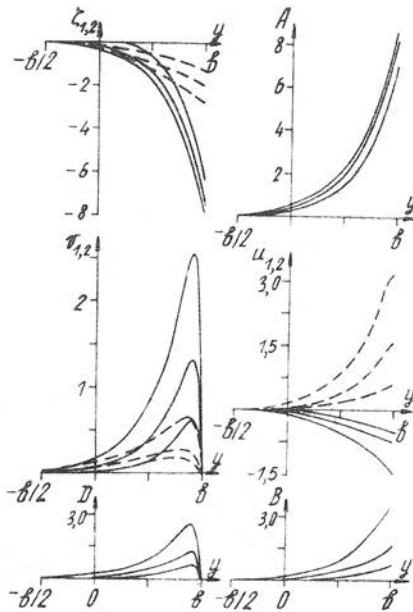


Рис. I

видно, что распределение u_1 по y качественно соответствует распределению $f(y)$. Функция $u_2(y)$ по виду похожа на $f(-y)$. Максимальное значение продольной составляющей скорости находится у берега канала. Непосредственно над осью канала u_1 и u_2 хотя и не равны нулю, но весьма малы. Нулевые значения u_1 и u_2 для $\mu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ находятся при $y = \bar{b}/20$ и $y = -\bar{b}/25$. Положение нулевых значений с ростом μ сдвигаются к оси канала. Поперечная

Значения характеристик на заданном расстоянии от правого берега в случае (6) примерно совпадают с соответствующими величинами на аналогичном расстоянии от левого берега для функции (7). При этом знак у $v_{1,2}$ для (6) противоположен знаку в случае (7). Знаки других характеристик для (6) и (7) совпадают.

Распределения $\zeta_k(m)$, u_k , v_k (м/с) по y для $H = 4 \cdot 10^3 \text{ м}$
$$f(y) = \sin(\pi y / 2\bar{b}) \quad (8)$$
 показаны с точностью до множителя 10^{-3} на рис. 2 сплошными ($k=1$) и штриховыми ($k=2$) линиями. Номерам I, 2 отвечает коэффициенты трения $1,2 \cdot 10^{-3}$; $2,4 \cdot 10^{-3}$. Отсюда

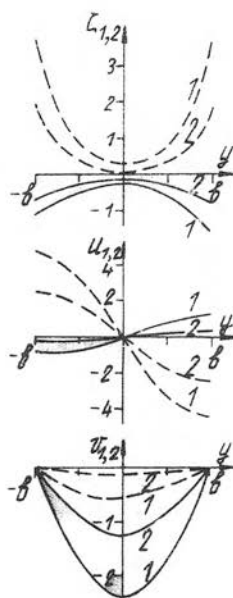


Рис. 2

составляющая скорости имеет максимум в окрестности оси.

При увеличении μ уменьшается разница значений ζ_1 у левого и правого берегов. Минимальное возмущение свободной поверхности наблюдается над осью канала, а максимальное у берега. При этом преобладающий вклад в ζ у берегов вносит величина ζ_2 , обусловленная наличием трения.

Пусть теперь глубина канала изменяется с шириной по закону $H = H_0 \{1 - n \exp[-(\pi y/b)^2]\}$, $H_0 = 4 \cdot 10^3$ м, $n = 79/80$, моделируемому подводный хребет с вершиной, расположенной над осью канала [7] и отстоящей от свободной поверхности на 50 м. Здесь m характеризует крутизну склонов хребта. Расчеты проводились для $m = 5$ и $m = 10$. При таких значениях m в областях $|y| > b/2$ и $|y| > b/4$ соответственно глубина канала практически постоянна и равна H_0 .

В случае $f(y)$ вида (8) наличие хребта заметно не проявилось на распределении волновых характеристик по ширине канала для всех рассмотренных значений коэффициента трения. Количественные отличия от случая ровного дна, имеющиеся лишь над вершиной хребта, пренебрежимо малы.

Для $f(y)$ вида (6) распределение волновых характеристик за счет неоднородности рельефа дна меняется существенно, однако только непосредственно над хребтом. При $m = 5$ это иллюстрируется рис. 3, где сплошные кривые отвечают рассмотренным значениям μ в том же порядке, что и на рис. 1. Над хребтом справа от вершины значения A и B стали большими, чем при $H = \text{const}$. Амплитуда D также возросла над вершиной хребта. Причем экстремум D над хребтом может превышать экстремум у берега, имеющийся и в случае ровного дна.

Увеличение m от 5 до 10 для $f(y)$ вида (6) не изменило характера распределения элементов волн по y . Практически не изменились и значения A, B, D вне хребта. Над хребтом вели-

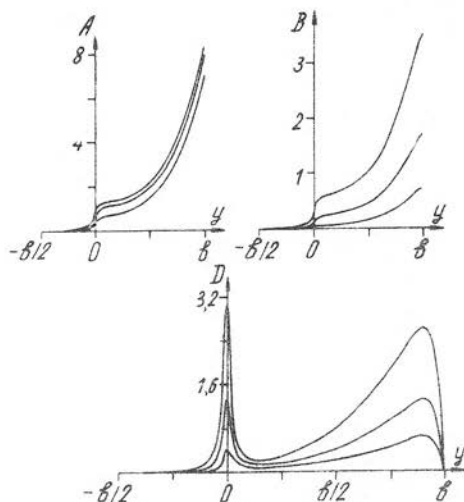


Рис. 3

чае $m=10$, чем при $m=5$. Крутизна кривых $A(y)$, $B(y)$ в окрестности вершины также увеличивается с ростом m . На фиксированном удалении от берега с ростом μ значения A , B , D убывают, а их изменение за счет m уменьшается.

Таким образом, давления, затухающие с удалением от берега канала постоянной и переменной глубины по закону (6) или (7), возбуждают у этого берега волновое движение с большими амплитудными значениями составляющих скорости волнового течения и прогиба свободной поверхности, чем давления, распределенные над поверхностью канала по закону (8). В первом случае существеннее, чем во втором, проявляется и влияние подводного хребта на распределение волновых характеристик. С увеличением коэффициента трения уменьшается интенсивность волнового движения по всей ширине канала. При этом влияние изменений коэффициента трения на волновые характеристики в окрестности вершины хребта фиксированной высоты возрастает с уменьшением крутизны его склонов.

чины A , B уменьшились, а экстремальное значение D над вершиной увеличилось. Для A и B эти изменения при $y = \delta/5$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ составили соответственно 14 и 16%, а величина D над вершиной возросла на 33%. При этом локальный минимум D над хребтом, имеющийся справа от вершины, уменьшился на 11%, а его положение сместилось от $y = 3\delta/20$ до $y = \delta/10$. Такая деформация кривой $D(y)$ свидетельствует о более резком возрастании амплитуды поперечной составляющей скорости с приближением к вершине хребта в случае

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Войт С.С. О распространении приливных волн на поверхности вращающейся жидкости при наличии границ. - ДАН СССР, 1959, т.127, № 4, с. 764-767.
2. Успенский П.Н. О распространении волн во вращающемся канале. - Тр. МИИ АН СССР, 1959, т.15, с. 17-33.
3. Мусатов В.В. Об одном случае движения волны Кельвина. - ПММ, 1957, т.21, вып.3, с. 347-352.
4. Секерж-Зенькович Т.Я. Частные задачи о распространении приливной волны в канале переменной глубины. - Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1959, № 10, с. 1460-1467.
5. Серебряков А.А., Черкесов Л.В. О влиянии широтного изменения параметра Кориолиса на длинные волны. - Мор. гидрофиз. исслед. Севастополь, 1974, № 1, с. 22-29.
6. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. - Киев: Наук. думка, 1976. - 364 с.
7. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Волны в неоднородном море. - Киев: Наук. думка, 1983. - 224 с.
8. Каган Б.А. Гидродинамические модели приливных движений в море. - Л.: Гидрометеиздат, 1968. - 220 с.
9. Некрасов А.В. Приливные волны в окраинных морях. - Л.: Гидрометеиздат, 1975. - 247 с.
10. Hidaka Koji. Some numerical computations on the poicare waves. - Jap. J. Geophys., 1970, 5, N 1, p. 1-15.