

МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Термогидродинамика океана
- Анализ результатов наблюдений и методы расчета гидрофизических полей океана
- Экспериментальные и экспедиционные исследования
- Спутниковая гидрофизика
- Математическое моделирование морских систем
- Автоматизация научных исследований морей и океанов



УДК 532.5:534.3:550.3

А. Е. Букатов, В. В. Жарков

Прогиб плавающего льда вблизи движущейся с малой скоростью области давлений

В линейной постановке изучается пространственная структура прогиба плавающего ледяного покрова и возмущений идеальной однородной жидкости под ним вблизи области постоянных давлений, движущейся с докритической скоростью. Анализируется зависимость топографии прогиба и затухания возмущений жидкости с глубиной от характеристик льда, скорости перемещения области давлений и вида их пространственного распределения. Колебания на больших удалениях от области движущихся давлений исследовались в работах [1—6].

1. Пусть по сплошному ледяному покрову, плавающему на поверхности безграничной в горизонтальных направлениях однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины $H = \text{const}$, перемещаются со скоростью v давления вида

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const}. \quad (1)$$

В предположениях линейной теории задача о возникающих при этом изгибно-гравитационных колебаниях в первоначально невозмущенной системе лед—вода заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty \quad (2)$$

с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \nabla^2 \zeta + \kappa_1 \zeta_{tt} + \zeta + \frac{1}{g} \varphi_t = -\frac{p}{\rho g}, \quad z = 0, \quad (3)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -H \quad (4)$$

и начальными

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \quad (5)$$

условиями. Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$\nabla^4 = (\nabla^2)^2$; ρ — плотность жидкости; E , H , ρ_1 , μ — модуль упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда; Q — сжимающее усилие; прогиб льда ζ и потенциал скорости φ связаны кинематическим условием $\zeta_t = \varphi_z$ при $z=0$.

Переходя к системе координат x_1 , y , z , связанной с движущейся областью давлений, и применяя интегральные преобразования Фурье по горизонтальным координатам x_1 , y и Лапласа по времени t , при осесимметричном распределении давлений из (1) — (5) получим

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} \int_0^\infty r f^*(r) M(r) J(r, R, \gamma) dr, \quad J = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi(r, \theta) e^{i[rR \cos(\theta - \gamma)]} d\theta, \quad (6)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g},$$

$$M(r) = rg(1 + \kappa_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad \tau(r) = [l(r)M(r)]^{1/2},$$

$$l(r) = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1, \quad \Delta_j = rv \cos \theta + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j,$$

$$x_1 = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad R^2 = x_1^2 + y^2, \quad n = r \sin \theta,$$

$$m = r \cos \theta, \quad r^2 = m^2 + n^2,$$

$f^*(r)$ — трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Второе и третье слагаемые в выражении ζ определяются начальными условиями и характеризуют развитие колебаний. Первое слагаемое является решением задачи без начальных условий. Оно представляет установившееся движение, исследованием которого ограничимся для $v < v_0$ при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости ледяной пластины [1]. Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — единственный положительный корень уравнения $\tau' r - \tau = 0$, штрих означает производную по r . Отметим, что зависимость v_0 от Q и h изучена в [6]. При скоростях перемещения давлений $v < v_0$ подынтегральная функ-

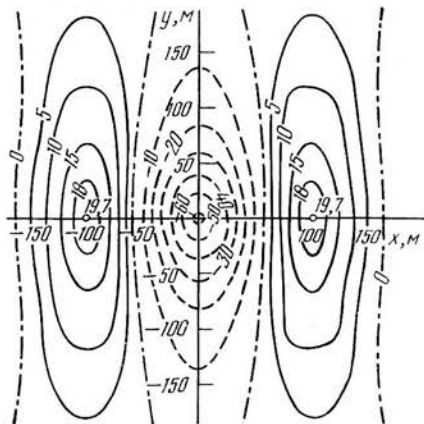


Рис. 1. Топография прогиба льда при движении сосредоточенной нагрузки

ция в (6) особенностей не имеет, и на больших удалениях от области давлений $\zeta = O(R^{-1})$. В ближней зоне исследование ζ проведем численно для $p_0 = 100$ Па, $H = 10^3$ м и значений [1, 7] $E = 3 \cdot 10^9$ Н·м⁻², $\rho_1 = 870$ кг/м³, $\mu = 0,34$.

Верхний предел интегрирования по r будем выбирать таким образом, чтобы погрешность вычисления ζ не превышала 0,5 %.

2. Анализ результатов численных расчетов прогиба льда и возмущений жидкости при движении сосредоточенной нагрузки типа дельта-функции $f(x_1, y) = \delta\left(\frac{x_1}{H}\right) \cdot \delta\left(\frac{y}{H}\right)$ показал, что при близких к нулю скоростях перемещения давлений в случае $Q = 0$ прогиб имеет форму, близкую к осесимметричной.

С увеличением скорости осесимметричность прогиба нарушается, но симметрия относительно координатных осей сохраняется. При этом впереди и за нагрузкой образуются локальные возвышения, вытянутые в направлении, перпендикулярном курсу следования нагрузки. В этом же направлении происходит и растяжение прогиба под нагрузкой. Крутизна прогиба становится максимальной перед нагрузкой и за ней, а минимальной — в направлении, перпендикулярном к трассе.

Локальные возвышения имеют место и по обе стороны от трассы. Однако их высота увеличивается с ростом скорости нагрузки существенно медленнее, чем высота поднятий по курсу. При v , близких к v_0 , высота боковых возвышений составляет менее 20 % от высоты возвышений по трассе. Топография прогиба при $h = 2,5$ м, $F = v/\sqrt{gH} = 0,2$, $Q = 0$ иллюстрируется на рис. 1, где сплошные и штриховые линии характеризуют соответственно отклонение в сантиметрах вверх и вниз от нулевого уровня, представленного штрихпунктиром. Вне представленной на рис. 1 области происходят волновые колебания льда. Однако они быстро затухают с удалением от нагрузки.

Увеличение толщины льда приводит к уменьшению глубины прогиба ζ_0 под эпицентром нагрузки и высоты ζ^* образующихся по

трассе поднятий. С ростом числа Фруда F значения ζ_0 , ζ^* увеличиваются. Это иллюстрируется рис. 2, где сплошные, штриховые, штрихпунктирные линии с одной и двумя точками отвечают толщинам льда 1,5; 2; 2,5; 3 м, а ζ^* дано в логарифмическом масштабе. Треугольниками отмечены значения, достигаемые для указанных толщин льда при

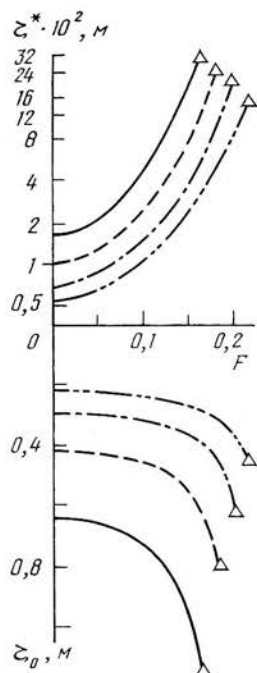


Рис. 2. Зависимость характеристик прогиба от скорости перемещения области давлений и толщины льда

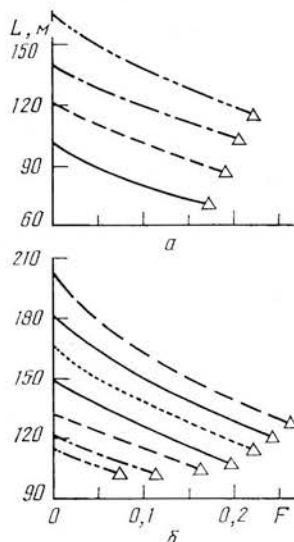


Рис. 3. Расстояние между центрами оснований прогиба льда и его поднятий по трассе перемещения давлений

числах Фруда 0,165; 0,185; 0,202; 0,215 соответственно. При этом значения $v_0/\sqrt{gH}$ для рассматриваемых h равны 0,171; 0,190; 0,207; 0,221.

Расстояние L между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе увеличивается с ростом толщины льда и уменьшается с увеличением числа Фруда. Это видно на рис. 3, а, где обозначения те же, что и на рис. 2.

Пространственное распределение амплитуд возмущений в жидкости на фиксированной глубине качественно такое же, как и на поверхности лед—вода, но затухание возмущений с глубиной вне трассы следования нагрузки происходит медленнее, чем под трассой.

Изменения топографии прогиба льда под влиянием ледового сжатия при фиксированном v качественно аналогичны изменению скорости перемещения нагрузки при $Q=0$.

Глубина прогиба ζ_0 и высота поднятий ζ^* на трассе увеличиваются с ростом сжимающего усилия и убывают с увеличением растягивающего. Расстояние L между центрами их оснований меняется в противоположном направлении. Влияние Q на эти характеристики прогиба при $h=3$ м показано на рис. 3, б; 4, где пунктиром дана зависимость без учета ледового сжатия ($Q=0$). Сплошные, штриховые, штрихпунктирные линии с одной и двумя точками для L и ζ_0 над пунктирной соответствуют здесь растяжению, а под ней — сжатию с усилием $0,5\sqrt{D_1}$, $\sqrt{D_1}$, $1,5\sqrt{D_1}$, $1,8\sqrt{D_1}$. Аналогичные линии для ζ^* сверху от пунктирной характеризуют сжатие, а снизу — растяжение. Треугольниками отмечены значения, достигаемые при числах Фруда 0,188; 0,155; 0,110; 0,067 в условиях сжатия, и 0,237; 0,257, 0,275 — при растяжении в порядке

возрастания усилия. Значения $v_0/\sqrt{gH}$ равны здесь соответственно 0,194; 0,161; 0,115; 0,072 при сжатии и 0,243; 0,263; 0,280 при растяжении.

Ледовое сжатие увеличивает, а растяжение уменьшает амплитуду возмущения жидкости под ледяным покровом. Однако затухание амплитуды с глубиной в условиях сжатия происходит быстрее, а при растяжении медленнее, чем при $Q=0$. Вместе с тем на фиксированной глу-

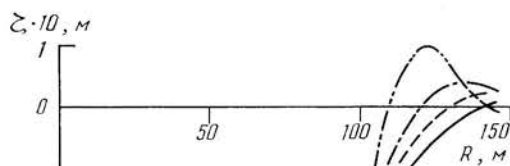
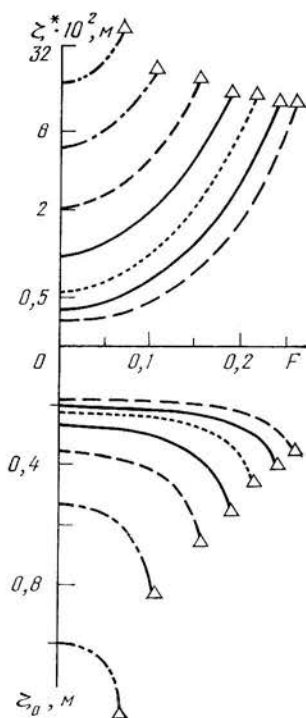


Рис. 5. Вид прогиба льда при движении распределенной в круге нагрузки

Рис. 4. Влияние ледового сжатия на характеристики прогиба

бине амплитуда при сжатии оказывается большей, чем при отсутствии ледового сжатия.

3. Пусть теперь по поверхности льда движется осесимметричная область давлений

$$p = p_0 \frac{k^2}{\pi} \exp(-k^2 R^2 / H^2). \quad (7)$$

В этом случае, как и для сосредоточенной нагрузки типа дельта-функции, $\iint_S p dS = p_0 H^2$, где S — поверхность льда. Результаты численных

расчетов, выполненных при таком распределении давлений, показали, что структура топографии прогиба льда в качественном отношении аналогична полученной при движении сосредоточенной нагрузке (рис. 1). Характеристики прогиба при $F=7 \cdot 10^{-2}$ ($v=24,7$ км/ч), $Q=0$ даны в таблице, где R_0 — радиус окружности, в точках которой нагрузка в e раз меньше, чем в эпицентре. Значениям радиуса 0, 1, 10, 100 м соответствуют k , равные ∞ , 10^3 , 10^2 , 10 . Видно, что чем равномернее распределена нагрузка с удалением от эпицентра при фиксированной толщине льда, тем меньше глубина прогиба ζ_0 и высота локальных максимумов ζ^* . Расстояние между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе при этом увеличивается. Величины ζ^* , ζ_0 практически равны нулю при $R_0=10^3$ м ($k=10^{-3}$). Уменьшение толщины льда усиливает влияние неравномерности распределения нагрузки на характеристики прогиба. При этом величина R_0 , для которой ζ_0 , ζ^* , L близки по значениям к соответствующим параметрам прогиба при сосредоточенной нагрузке, убывает.

4. Предположим, что $p = p_0 \exp(-k^2 R^2 / H^2)$. Тогда $\iint_S p dS = \pi p_0 H^2 / k^2$. В этом случае с увеличением k при фиксированном p_0 в центре движущейся

щейся области величина нагрузки не меняется, а вне его на заданном удалении R убывает. Для такого распределения давления при тех же условиях, что и для (7), с ростом k от нуля до некоторого k^* (уменьшением R_0 от ∞ до R_0^*) глубина прогиба ζ_0 увеличивается до значения ζ_0^* . Дальнейшее увеличение k (уменьшение R_0) приводит к убыванию ζ_0 . Отметим, что $k^*=7,46$, $R_0^*=180$ м, $\zeta_0^*=3 \cdot 10^{-2}$ м, если $F=0,2$, $h=2,5$ м, $Q=0$. С уменьшением F значения k^* , R_0^* практически не меняются, а ζ_0^* убывает. С ростом h растут k^* , ζ_0^* , а R_0^* уменьшается. Характер зависимости у ζ^* от изменений k (или R_0) качественно такой же, как и у ζ_0 . Величина L при этом принимает примерно те же значения, что и в таблице для давлений вида (7).

5. Пусть

$$p = \begin{cases} p_0 H^2 / (\pi b^2), & R \leq b \\ 0, & R > b, \end{cases} \quad (8)$$

т. е. нагрузка величиной $p_0 H^2$ распределена в круге радиуса b . При $b \rightarrow 0$ эта нагрузка переходит в сосредоточенную.

Для значений b , меньших некоторого b^* , зависящего от толщины льда, числа Фруда и величины сжимающего усилия, топография прогиба и волновое возмущение жидкости под ледяным полем в качественном отношении аналогичны образующимся при рассмотренных выше распределениях нагрузки. Увеличение b от 0 до b^* приводит к качественно таким же изменениям характеристик прогиба и возмущений жидкости, как и уменьшение k (рост R_0) для нагрузки вида (7). При этом в случае нагрузки (8) для заданного $b=b_0 < b^*$ глубина прогиба ζ_0 и высота образующихся по трассе гребней ζ^* больше, а расстояние L между ними меньше, чем в случае нагрузки (7) при $R_0=b_0$. С ростом толщины льда убывает зависимость характеристик прогиба от вида распределения нагрузки. В частности, для давлений (8) при $b_0=10$ м величины ζ_0 , ζ^* превышают приведенные в таблице соответственно на 30, 65 % при $h=0,2$ м и на 3, 10 % при $h=2,5$ м. Отличия значений L в этих случаях не превышают 4 %.

Если $b > b^*$, то структура прогиба качественно меняется. Это иллюстрируется на рис. 5, где сплошной, штриховой, штрихпунктирной линиями с одной и двумя точками изображен вид прогиба ζ вдоль трассы ($\varphi=0$) движения нагрузки (8), распределенной в круге радиусом $b=100$ м; для толщин льда 2,0; 1,5; 1,0; 0,5 м при $F=0,07$. Таким значениям h при $Q=0$, $F=0,07$ отвечают величины b^* , равные 96, 78, 56,5,

Зависимость характеристик прогиба от распределения нагрузки

Характеристики прогиба, м	R_0 , м		100	10	1	0
	h , м					
$\zeta_0 \cdot 10^2$	0,2	5,294	603,8	1861	1922	
	0,5	5,289	231,4	378,1	382,5	
	1,0	5,245	99,12	126,4	126,9	
	1,5	5,141	57,68	67,47	67,45	
	2,0	4,977	38,71	43,37	43,45	
	2,5	4,771	28,23	30,82	30,86	
$\zeta^* \cdot 10^2$	0,2	0,0157	95,15	253	257	
	0,5	0,0158	19,46	26,55	26,75	
	1,0	0,0162	4,436	5,813	5,820	
	1,5	0,0184	2,115	2,641	2,651	
	2,0	0,0246	1,34	1,551	1,560	
	2,5	0,0336	0,925	1,029	1,030	
L	0,2	265	20,83	17,88	17,84	
	0,5	263	36,39	33,75	33,75	
	1,0	261	62,27	60,63	60,63	
	1,5	253	87,5	82,3	82,0	
	2,0	246	108	106	106	
	2,5	247	128	127	127	

33 м. Из графиков следует, что при $b > b^*$ положение максимума глубины прогиба смещено от центра к границе области давлений. Чем меньше толщина льда, тем это смещение больше.

При других значениях φ структура прогиба качественно такая же, как и на рис. 5. Имеются лишь количественные отличия значений максимума глубины прогиба. С удалением от трассы движения нагрузки от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi/2$ эти значения убывают, но не более чем на 10 % при $b=100$ м.

На рис. 5 видна точка, в которой пересекаются все кривые. Аналогичная точка имеется и при любом другом значении φ . Геометрическое место проекций таких точек на горизонтальную плоскость образует эллипс, меньшая полуось которого ($\varphi=0$) практически совпадает с радиусом области давлений, а большая ($\varphi=\pi/2$) превышает его. Однако это превышение, увеличивающееся с ростом F , незначительно. Например, при $b=100$ м, $F=0,07$ оно составляет 2 м, а при $F=0,12$ — 3 м. Глубина прогиба вдоль эллипса практически не зависит от толщины льда. С увеличением φ от 0 до $\pi/2$ она возрастает, но не более чем на 5 %.

При фиксированной толщине льда с уменьшением радиуса области давлений до b^* максимальная глубина прогиба растет, а ее местоположение смещается к центру нагрузки. При этом разность значений максимальной глубины прогиба и глубины прогиба под центром области давлений убывает.

Отметим, что с ростом числа Фруда значение b^* при фиксированном h увеличивается, хотя и незначительно. Например, при изменении F от 0,07 до 0,12 для $h=1$ м, $Q=0$ величина b^* возросла на метр.

ABSTRACT Within the framework of the linear theory studied is the spatial structure of the floating ice cover deflection and disturbances of the underlying ideal uniform fluid nearby the area of constant pressures moving with the subcritical velocity. Analysed is the dependence of the deflection topography and attenuation of fluid disturbances with depth on the ice characteristics, displacement velocity of the pressure area and the type of their spatial distribution. Oscillations occurring at large distances from the area of moving pressures were studied in papers [1—6].

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.—215 с.
2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Неустойчивые колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости // Прикл. механика.— 1977.— 13, № 9.— С. 103—107.
3. Доценко С. Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустойчивых корабельных волнах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.— 1978.— № 5.— С. 26—32.
4. Букатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустойчивое волновое движение однородной жидкости // Там же.— 1980.— № 5.— С. 68—75.
5. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн.— Киев: Наук. думка, 1980.— 260 с.
6. Букатов А. Е., Черкесов Л. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // ПМТФ.— 1984.— № 2.— С. 151—157.
7. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.— 384 с.

Мор. гидрофиз. ин-т АН УССР

Поступила 10.04.87
После доработки 20.07.87