

МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Термогидродинамика океана
- Анализ результатов наблюдений и методы расчета гидрофизических полей океана
- Экспериментальные и экспедиционные исследования
- Спутниковая гидрофизика
- Математическое моделирование морских систем
- Автоматизация научных исследований морей и океанов



А. Е. Букатов, Т. А. Соломаха

Влияние вязкости снега на вынужденные изгибно-гравитационные волны в бассейне со скачком плотности

Рассмотрено влияние внутреннего трения снега, покрывающего плавающий лед, на волны малой амплитуды, возбуждаемые периодическим по времени источником, в бассейне со скачком плотности. Исследованы зависимости амплитудно-фазовых характеристик волновых возмущений, обусловленных поверхностными и внутренними волнами, от коэффициента вязкости снега, частоты колебания и глубины погружения источника.

В работе выполнено исследование зависимости вынужденных волновых возмущений в бассейне со скачком плотности от внутреннего трения снега, покрывающего плавающий лед.

При отсутствии снега поверхностные и внутренние волны от периодических возмущений в бассейне с ледяным покровом изучались в работах [1—3].

1. Пусть на поверхности двухслойной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает сплошной упругий лед, покрытый слоем снега. Рассмотрим волновые возмущения, генерируемые источником, расположенным внутри жидкости в точке $(0, z_0)$, потенциал которого равен

$$\varphi^* = \frac{M}{4\pi} \ln \{ [x^2 + (z - z_0)^2] / [x^2 - (z - z_0)^2] \} \exp(i\sigma t), \quad (1.1)$$

M — мощность источника. Источник включается в момент времени $t=0$. До начала его действия жидкость невозмущена, а поверхность лед—вода ζ_1 и граница раздела слоев жидкости ζ_2 горизонтальны.

Моделируя ледяной покров тонкой упругой пластиной [1], получим для определения потенциалов скорости жидкости φ_1 в верхнем и φ_2 в нижнем слоях уравнения

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad 0 \leq z \leq H_1, \quad \Delta\varphi_2 = 0, \quad -H_2 \leq z \leq 0 \quad (1.2)$$

с граничными

$$L\varphi_1 = 0, \quad z = H_1, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -H_2, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi_2 - \gamma\varphi_1) + g\varepsilon \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, \quad z = 0$$

и начальными

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad t = 0 \quad (1.4)$$

условиями. Здесь $L = DV^4 \frac{\partial}{\partial z} + QV^2 \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial t} V^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + \kappa \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + \rho_1 g \frac{\partial}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $D = Eh_0^3/12(1-\nu^2)$; $\kappa = \rho_0 h_0 + \rho^* h^*$; $\mu = \eta h^*$; $\gamma = \rho_1/\rho_2$; $\varepsilon = 1 - \gamma$; ρ_k , H_k — плотность и толщина верхнего ($k=1$) и нижнего ($k=2$) слоев жидкости; E , ν , ρ_0 , h_0 — модуль нормальной упругости, коэффициент Пуассона, плотность и толщина льда; η , ρ^* , h^* — коэффициент внутреннего трения, плотность и толщина снега; Q — усилие ледового сжатия; ξ_1 и ξ_2 связаны с φ_1 и φ_2 кинематическими условиями

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad z = H_1, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (1.5)$$

Предположим, что источник располагается в верхнем слое. Заменяя φ_1 в (1.2) — (1.5) на $\varphi_1 + \varphi^*$ и применяя для решения данной задачи преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по времени, находим

$$\xi_k = M_1 \int_{-\infty}^{\infty} a_k(r) I_k \exp(irx) dr \quad (k=1, 2), \quad (1.6)$$

$$a_1 = \operatorname{ch} rh \operatorname{ch}^{-1} r H_1, \quad a_2 = \gamma \operatorname{ch} r (H_1 - h) \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1,$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \frac{N_k(r, \alpha) \exp(\alpha t)}{(\alpha - i\sigma) \Delta(r, \alpha)} d\alpha,$$

$$N_1 = \alpha^2 (\gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{th} rh + 1) + \varepsilon r g \operatorname{th} r H_2;$$

$$N_2 = r g (D^* + \alpha^2 \kappa_1 - \alpha \mu_1 r^2) + \alpha^2 \operatorname{th} r (H_1 - h),$$

$$M_1 = M/(2\pi g), \quad D^* = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1, \quad \{D_1, Q_1, \kappa_1, \mu_1\} \sim \{D, Q, \kappa, \mu\}/(\rho_1 g),$$

где h — расстояние от источника до границы раздела слоев жидкости.

Учитывая, что неоднородность жидкости оказывает слабое влияние на характеристики поверхностных волн [2, 3], запишем

$$\Delta = \Delta_1(r, \alpha) \cdot \Delta_2(r, \alpha), \quad (1.7)$$

$$\Delta_1 = \alpha^2 \kappa^* + \alpha \mu_1 r^3 g \operatorname{th} r H + D^* r g \operatorname{th} r H, \quad \Delta_2 = \alpha^2 + \gamma_2, \quad \kappa^* = \kappa_1 r g \operatorname{th} r H + 1,$$

$$\gamma_2 = \varepsilon r g \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2 \kappa^* [\operatorname{th} r H (\kappa_1 r g (\operatorname{th} r H_1 + \gamma \operatorname{th} r H_2) + 1 + \gamma \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2)]^{-1},$$

$$H = H_1 + H_2.$$

Вычисляя интегралы I_k , получим

$$I_k = \sum_{s=1}^5 N_k(r, \alpha) \tau_s^{-1} \exp(\theta_s \cdot t), \quad (1.8)$$

$$\theta_1 = i\sigma, \quad \theta_{2,3} = \pm i \sqrt{\gamma_1} - \gamma_0, \quad \theta_{4,5} = \pm i \sqrt{\gamma_2}, \quad \tau_1 = \Delta_1(r, \theta_1) \cdot \Delta_2(r, \theta_1),$$

$$\tau_{2,3} = 2 \sqrt{\gamma_1} (\alpha_{1,2} - i\sigma) (\alpha_{1,2}^2 + \gamma_2), \quad \tau_{4,5} = 2 \sqrt{\gamma_2} (\sqrt{\gamma_2} \mp \sigma) \times$$

$$\times (\sqrt{\gamma_2} \mp \alpha_1) (\sqrt{\gamma_2} \mp \alpha_2), \quad \alpha_{1,2} = -\gamma_0 \pm i \sqrt{\gamma_1}, \quad \gamma_0 = 0,5 \mu_1 r^3 g \operatorname{th} r H \kappa^{*-1},$$

$$\gamma_1 = 0,25 (4 \kappa^* D^* - \mu_1^2 r^5 g \operatorname{th} r H) r g \kappa^{*-2} \operatorname{th} r H.$$

Рассмотрим интегралы (1.6) для $x > 0$. Подынтегральные функции здесь являются аналитическими в окрестности действительной оси. Особенности типа полюсов (вещественные корни уравнения $\Delta_2(r, \theta_1) = 0$), содержащиеся в отдельных слагаемых, взаимно погашаются, а $\Delta_1(r, \theta_1) \neq 0$ при действительных значениях r . Поэтому исходный путь интегрирования можно деформировать в путь L_1 , идущий вдоль дейст-

вительной оси и обходящий по малым полуокружностям точку $r=r_2$ в верхней, $r=-r_2$ — в нижней полуплоскостях. Здесь $r=\pm r_2$ — корни уравнения $\Delta_2(r, \theta_1)=0$. Такой выбор обхода полюсов на контуре L_4 гарантирует выполнение условий $\operatorname{Re}(\theta_{4,5}) \leq 0$. Отметим, что в верхней полуплоскости справедливы неравенства $\operatorname{Re}(\theta_{2,3}) \leq 0$.

Запишем (1.6) в виде

$$\zeta_k = \sum_{s=1}^5 \zeta_k^s, \quad \zeta_k^s = M_1 \int_{L_s} a_k N_k \tau_s^{-1} \exp(irx + \theta_s t) dr. \quad (1.9)$$

Пути L_2, L_3 совпадают с действительной осью. Контур L_4, L_5 обходят соответственно одну из точек $r = \mp r_2$. Выполнение условий $\operatorname{Re}(\theta_s) \leq 0$ обеспечивает при $t \rightarrow \infty$ стремление к нулю интегралов ζ_k^s ($s=2-5$), определяющих неустановившиеся колебания. Рассмотрим установившуюся часть движения поверхности лед — вода ($k=1$) и границы раздела слоев ($k=2$), характеризуемых интегралами ζ_k^1 .

Кроме двух действительных корней $r = \pm r_2$ уравнения $\Delta_2=0$ подынтегральные выражения в ζ_k^1 имеют особенности в точках, соответствующих корням уравнения $\Delta_1=0$. Вычисляя интегралы ζ_k^1 , ограничиваясь рассмотрением периодических возмущений, получим

$$\zeta_k^1 = \sum_{l=1}^n \zeta_{kl}^l + \zeta_{k2}^0, \quad (1.10)$$

$$\zeta_{kl}^l = Y_{kj}^l(r_j^l) \cos(\beta_j^l + \psi_{kj}^l), \quad Y_{kj}^l = |A_{hj}|, \quad \psi_{kj}^l = \arg A_{hj}, \quad \beta_j^l = \sigma t - m^l x,$$

$$\beta_2^0 = \sigma t - r_2^0 x, \quad A_{hj} = a_k \cdot N_h q_j^{-1}, \quad q_1 = \Delta_1' \Delta_2 \exp(\xi^l x), \quad q_2 = \Delta_1 \cdot \Delta_2',$$

$$(l=0 \dots n, \quad k=1, 2; \quad j=1, 2).$$

Значения $l \neq 0$ принимаются при $j=1, l=0$ — при $j=2$. Здесь n — количество корней $r_1^l = m^l + i\xi^l$ ($m^l > 0, \xi^l > 0$) уравнения $\Delta_1=0$, штрих означает производную по r .

Если источник располагается в нижнем слое, то, заменяя φ_2 в (1.2) — (1.5) на $\varphi_2 + \varphi^*$ и решая аналогично, находим для ζ_k выражения (1.6) — (1.10), где $a_{1,2}$ и $N_{1,2}$ имеют вид

$$a_1 = \operatorname{ch} r(H_2 - h) (\operatorname{ch} r H_1 \operatorname{ch} r H_2)^{-1}, \quad \alpha_2 = \operatorname{ch} r(H_2 - h) \operatorname{ch}^{-1} r H_2,$$

$$N_1 = \alpha^2, \quad N_2 = \alpha^2 + r g (D^* + \alpha^2 \kappa_1 - \alpha \mu_1 r^2) \operatorname{th} r H. \quad (1.11)$$

Из (1.10) — (1.11) видно, что изгибные деформации льда и возмущения поверхности скачка плотности формируются поверхностными ζ_{k1}^l и внутренними ζ_{k2}^0 волнами. Если $Q \leq \rho_1 g Q_0$, где Q_0 определяется решением уравнений $(\sqrt{\gamma_1})' = 0, (\sqrt{\gamma_1})'' = 0$, то из поверхностных волн возбуждаются только гравитационные ζ_{k1}^l и обусловленные внутренним трением снега ζ_{k1}^4 волны. Частота этих волн изменяется в диапазоне $0 < \sigma < \sigma_1$, $\sigma_1 = \sqrt{\gamma_1(r_1)}$, r_1 — положительный корень уравнения $(\sqrt{\gamma_1})' = 0$.

При условии $Q > \rho_1 g Q_0$ возможно возбуждение до четырех систем волн. Кроме волн $\zeta_{k1}^1, \zeta_{k1}^4$ могут генерироваться и волны, обусловленные ледовым сжатием ζ_{k1}^2 и упругими характеристиками льда ζ_{k1}^3 . Верхние границы интервалов частоты волн ζ_{k1}^1 и ζ_{k1}^4 определяются величинами σ_1 и σ_3 соответственно. Частоты изгибных (ζ_{k1}^3) волн и обусловленных сжатием (ζ_{k1}^2) изменяются на интервалах $(\sigma_2, \sigma_3), (\sigma_2, \sigma_1)$. Здесь $\sigma_k = \sqrt{\gamma_1(r_k)}$, $k=1, 2, 3$, r_k — действительные корни уравнения $(\sqrt{\gamma_1(r)})' = 0$. При этом $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3$.

Отметим, что можно указать [4] такое значение $\eta = \eta_0$, при котором возбуждаются только две системы волн $\zeta_{k1}^1, \zeta_{k1}^4$ для любых усилий ледового сжатия.

Численный анализ зависимости волновых возмущений от условий их генерации проводился при значениях H_1 , H_2 , h_0 , h^* , равных 10^2 ; 10^3 ; 1,5; 1 м соответственно. Величины E , ν , ϵ полагались равными 3×10^9 Н/м²; 0,34; 10^{-3} , ρ_1 , ρ_0 , ρ^* — 10^3 , 870, 250 кг/м³ [5].

Коэффициент внутреннего трения снега η изменялся [6, 7] в пределах $4 \cdot 10^6$ — $1,87 \cdot 10^8$ Па·с. Глубина h_1 погружения источника (расстояние от поверхности лед—вода до источника) изменялась в пределах $0 < h_1 < H$.

2. Анализ результатов численных расчетов показал, что снежный покров изменяет амплитудно-фазовые характеристики поверхностных

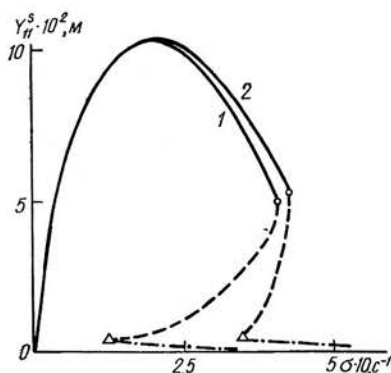


Рис. 1. Распределение модуля амплитуды поверхностных волн в ледяном покрове по частоте колебаний

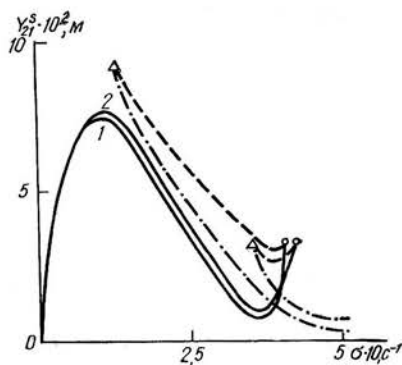


Рис. 2. Распределение модуля амплитуды поверхностных волн на границе раздела слоев по частоте колебаний

волн. Увеличение коэффициента внутреннего трения снега приводит к уменьшению модулей амплитуд Y_{k1}^1 , Y_{k1}^3 гравитационной и изгибной волн. Амплитуды волн, обусловленных ледовым сжатием и внутренним трением снега, возрастают с ростом η . Значения σ_k ($k=1, 2, 3$), определяющие интервалы изменения частоты поверхностных волновых возмущений, уменьшаются с ростом коэффициента трения. При этом частотный диапазон возбуждения волн ζ_{k1}^2 расширяется, а волн ζ_{k1}^3 , ζ_{k1}^4 сужается. Интервал частот для гравитационных волн практически не изменяется. Распределения модулей амплитуд поверхностных волн по частоте колебаний на границе лед—вода (рис. 1) и поверхности скачка плотности (рис. 2) иллюстрируют графики рис. 1, 2 соответственно при $h_1=80$ м, $Q_1=1,6 \sqrt{D_1}$, $x=0$. Номерам кривых 1, 2 отвечают значения коэффициента внутреннего трения $4 \cdot 10^6$; $4,7 \cdot 10^6$ Па·с.

Сплошные, штриховые и штрихпунктирные участки линий 1, 2 характеризуют волны ζ_{k1}^1 , ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 соответственно. Кружками и треугольниками отмечены значения модулей амплитуд волн при σ_1 и σ_2 . Верхняя граница частотного диапазона (σ_3) волны ζ_{k1}^4 выходит за пределы рис. 1, 2. Амплитуда этой волны мала (существенно меньше, чем у волн ζ_{k1}^2). Отметим, что при $\eta > \eta_0$, когда волны ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 не возбуждаются, модули Y_{k1}^1 , Y_{k1}^4 для рассмотренных значений параметров могут достигать 10^{-1} м. Модуль амплитуды волны, обусловленной ледовым сжатием, на поверхности лед—вода увеличивается, а волны ζ_{k1}^3 — убывает с частотой. Для поверхностных волн ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 отношение модуля амплитуд на границе лед—вода к его значению на поверхности скачка плотности в зависимости от частоты и глубины погружения источника может быть как больше, так и меньше единицы. Причем на границе раздела слоев жидкости значения модулей амплитуд этих волн могут быть соизмеримы с амплитудой гравитационной волны. Если $\eta=0$, то амплитуды всех поверхностных волн затухают с глубиной, а вносимый ими вклад в формирование поверхности скачка плотности определяется главным образом волной ζ_{121}^1 .

Амплитуды изгибных деформаций льда, формируемых каждой из поверхностных волн, убывают с глубиной погружения источника. Аналогичная зависимость характерна и для амплитуд волн ζ_{21}^1 , ζ_{21}^2 , ζ_{21}^3 на разделе слоев, если $\eta=0$. При $\eta \neq 0$ с увеличением h_1 уменьшается только Y_{21}^1 . Модули амплитуд других поверхностных волн на границе скачка плотности растут с приближением к ней источника. Для волны ζ_{21}^2 это иллюстрируют графики рис. 3 при $\sigma=0,4 \text{ с}^{-1}$, которые определяют зависимость Y_{21}^2 от глубины погружения источника. Номера кривых соответствуют тем же значениям параметров, что и на рис. 1, 2.

Наличие снежного покрова приводит также к изменению фазового

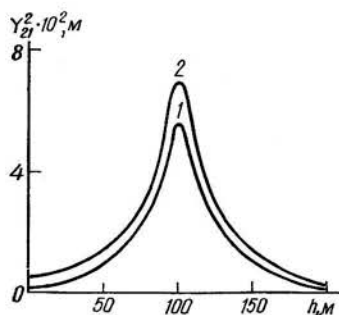


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды волны, обусловленной ледовым сжатием, на поверхности скачка плотности от глубины погружения источника

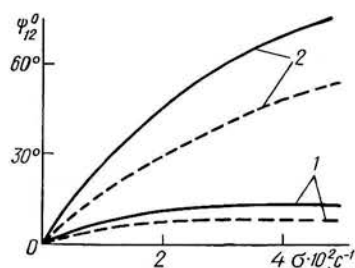


Рис. 4. Влияние внутреннего трения снега на фазовый сдвиг проявлений внутренних волн

сдвига (ψ_{k1}^1) всех поверхностных волн, значение которого растет с увеличением η . При этом фазовый сдвиг каждой из волн на поверхности лед—вода больший, чем на поверхности скачка плотности. Для гравитационной волны он изменяется в интервалах $(-90^\circ; 0)$ и $(0, 20^\circ)$ на верхней и нижней границах верхнего слоя соответственно. Фаза изгибных колебаний льда, обусловленных другими волнами, под влиянием внутреннего трения снега может изменяться на противоположную. Кроме того, ψ_{k1}^1 , ψ_{k1}^3 растут, а ψ_{k1}^2 , ψ_{k1}^4 уменьшаются с увеличением глубины погружения источника.

Отметим, что увеличение h^* приводит качественно к тем же изменениям поверхностных возмущений, что и рост η .

3. Амплитудно-фазовые характеристики возмущений, обусловленных внутренними волнами на поверхности скачка плотности, практически не зависят от льда и снега. Их распределения по частоте коле-

Таблица 1
Зависимость амплитуды внутренних волн от частоты и глубины погружения источника

$\sigma \cdot 10^2, \text{ с}^{-1}$	$h, \text{ м}$			
	20	40	60	80
3	12,1	8,73	6,61	5,45
	11,4	7,8	5,34	3,65
4	9,83	5,15	2,8	1,72
	9,81	5,0	2,63	1,36
5	7,08	2,66	1,0	0,43
	7,0	2,65	0,97	0,38

баний и глубине погружения источника такие же, как и в бассейне со свободной поверхностью. Это видно из табл. 1, где даны значения амплитуд внутренней волны на границе раздела слоев для $0 < h_1 < H_1$ (верхняя строка) и $H_1 < h_1 < H$ (нижняя строка). Характерно, что ис-

точник, действующий в верхнем слое, генерирует внутренние волны большей амплитуды, чем аналогичный источник, расположенный на том же расстоянии от поверхности скачка плотности, в нижнем слое.

Амплитуда проявлений внутренних волн в ледяном покрове уменьшается, а их фазовый сдвиг увеличивается с ростом коэффициента трения. Ледовое сжатие ослабляет влияние вязкости на амплитуды проявлений Y_{012} , увеличивая при этом ψ_{012}^0 . Убывает воздействие вязкости и с уменьшением частоты колебаний. Наглядная иллюстрация зависимости модуля амплитуды проявлений ($\text{м} \cdot 10^3$) и сдвига фазы внутренних волн от частоты представлена соответственно в табл. 2 и на рис. 4. Номера кривых 1, 2 отвечают сдвигу фаз при $0 < h_1 < H_1$ для значений η , равных $4,5 \cdot 10^6$; $1,87 \cdot 10^8$ Па·с. Сплошные линии даны при $Q_1 = 1,6 \sqrt{\nu_1}$, штриховые — при $Q_1 = 0$.

Таблица 2

Зависимость амплитуды проявлений внутренних волн от частоты и глубины погружения источника

η , Па·с	$Q/2\sqrt{D}$	$\sigma \cdot 10^2$, с^{-1}			h , м
		3	4	5	
0	0	18,1	1,73	0,03	20
		8,5	1,03	0,02	
		8,15	0,58	0,01	80
		2,7	0,44	0,009	
	1,6	22,1	6,47	1,5	20
		10,4	3,4	0,76	
		9,9	1,1	0,1	80
		3,3	0,45	0,07	
$4,5 \cdot 10^6$	0	18,1	0,3	0,02	20
		8,5	0,2	0,01	
		8,1	0,06	0,008	80
		2,7	0,01	0,005	
	1,6	22,1	6,4	1,5	20
		10,4	3,2	0,7	
		9,9	1,1	0,006	80
		3,2	0,2	0,003	

Отметим, что величина сдвига фазы проявлений не зависит от расстояния между границей раздела слоев и источником. При переходе источника через границу раздела фаза внутренних волн меняется на противоположную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.—215 с.
2. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны.— Киев: Наук. думка, 1973.—247 с.
3. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений // Морские гидрофизические исследования.— Севастополь, 1976.— № 4.— С. 5—16.
4. Букатов А. Е., Соломаха Т. А. Затухание изгибно-гравитационных волн // Морской гидрофизический журнал.—1990.— № 5.— С. 12—18.
5. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.—384 с.
6. Гаврило В. П., Трипольников В. П. Результаты исследования изгибно-гравитационного резонанса в морских льдах // Теория и прочность ледокольного корабля.— Горький: Изд-во ГПИ, 1962.— С. 28—34.
7. Yoside Z., Huzioka T. Some studies on the mechanical properties of snow.— Assemblée Générale de Rome.—1954.—4.— P. 98—105.

Морской гидрофизический институт АН УССР,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 18.06.90

A B S T R A C T Considered is the influence of the internal friction of snow covering floating ice upon small-amplitude waves generated by periodic in-time source, in a basin with a density jump. Investigated are dependences of the amplitude-phase characteristics of wave disturbances, induced by surface and internal waves, upon the snow viscosity coefficient, oscillation frequency and depth of the source.