

**Министерство образования Московской области
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет**

Актуальные проблемы математики, физики и математического образования

*Сборник трудов кафедры математического анализа и
геометрии*



**Москва
2018**

УДК 51(06)
ББК 221.я43
А43

*Выпускается по решению Учёного
совета физико-математического
факультета МГОУ*

Ответственный редактор:

Г.В. Кондратьева – кандидат педагогических наук, доцент,
заведующий кафедрой математического анализа и геометрии
Московского государственного областного университета.

Члены редколлегии:

Е.А. Бедрикова – кандидат физико-математических наук,
доцент Московского государственного областного университета;

Д.А. Графов – кандидат физико-математических наук,
доцент Московского государственного областного университета.

Рецензенты:

Т.И. Кузнецова – доктор педагогических наук, профессор
Института русского языка и культуры
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова;

Э.В. Геворкян – доктор физико-математических наук, профессор
Московского государственного областного университета.

А43 **Актуальные проблемы математики, физики и математического образования** [Электронный ресурс] : сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии / под ред. Г.В. Кондратьевой, Е.А. Бедриковой, Д.А. Графова – Электрон. текстовые дан. (7,50 Мб). – М. : ИИУ МГОУ, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц; 512 Мб оперативной памяти; привод CD ROM; операционная система Microsoft Windows XP SP 2 и выше; Adobe Reader 7.0 (или аналогичный продукт для чтения файлов формата pdf).
ISBN 978-5-7017-2949-8

Сборник трудов кафедры математического анализа и геометрии состоит из двух частей. Первая часть посвящена памяти д.ф.-м.н. профессора Латышева А.В., в ней кратко изложена биография, основные этапы научной деятельности, приведены воспоминания коллег, учеников и близких.

Во второй части сборника представлены статьи преподавателей, научных сотрудников, студентов и аспирантов

Система навигации электронного издания построена на гипертекстовой технологии. С помощью данной системы обеспечивается переход от Содержания к тексту определённой статьи и обратно. Также система включает в себя ссылки на контекстно-связанные независимые интернет-ресурсы.

УДК 51(06)
ББК 22.3я43

ISBN 978-5-7017-2949-8

© МГОУ, 2018
© Оформление. ИИУ МГОУ, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

I. Воспоминания о профессоре А.В. Латышеве (20.09.1948–29.03.2017)

II. Научные труды преподавателей, студентов и аспирантов

В. И. Аскерова, А.В. Латышев Нелинейный продольный ток в квантовой плазме, генерируемый n поперечными электромагнитными волнами	14
Сулейманова С.Ш., Юшканов А.А. Электрическое поле вблизи поверхности плазмы с произвольной степенью вырождения с зеркальными граничными условиями	20
Зарочинцева М.А., Юшканов А.А. Постановка задачи об использовании дискретной моды при описании скин-эффекта с помощью ряда Неймана	27
Зверев Н.В. Слой среды с зеркальной диэлектрической симметрией и поверхностные импедансы	31
Парёнкина В.И. Применение преобразования Лапласа к решению уравнений с частными производными	37
Балабанова И.А., Кузьмин М.К., Серегина Л.С. Метод множителей Лагранжа для функции двух переменных и его применение к решению экстремальных задач в геометрии	41
Графов Д.А., Казаков Р.В. О суперпозициях непрерывных функций	49
Кондратьева Г.В. Исторический опыт развития школьного математического образования для современной модернизации школы	52
Матвеев О.А., Птицына И.В. Исторический очерк о возникновении и становлении проективной геометрии	59
Казаков Н.А., Солдатенков Р.М. Использование интерактивных геометрических сред при обучении математике	73
Бедрикова Е.А., Ищенко О.С., Марченко Т.А. Математика в жизни человека	76
Попова Л.Н. Черепенина А.Е. Журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики» (1886–1917) для совершенствования школьного математического образования	80

I. ВОСПОМИНАНИЯ О ПРОФЕССОРЕ А.В. ЛАТЫШЕВЕ (20.09.1948 – 29.03.2017)

**БИОГРАФИЯ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК,
ПРОФЕССОРА, ЗАСЛУЖЕННОГО ДЕЯТЕЛЯ НАУКИ РФ,
ЗАСЛУЖЕННОГО РАБОТНИКА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ РФ,
ПОЧЁТНОГО РАБОТНИКА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РФ, ДВАЖДЫ ЛАУРЕАТА КОНКУРСА «ГРАНТ
МОСКВЫ» В ОБЛАСТИ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ В СФЕРЕ ОБРА-
ЗОВАНИЯ, АКАДЕМИКА МЕЖДУНАРОДНОЙ ПЕДАГОГИЧЕ-
СКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ,
АНАТОЛИЯ ВАСИЛЬЕВИЧА ЛАТЫШЕВА**

Анатолий Васильевич Латышев родился в 1948 году в селе Баскаковка Вехотского района Смоленской области.

Детство Анатолия Васильевича прошло в послевоенное время. Его отец, Василий Петрович, работал в леспромхозе инженером по технике безопасности и был человеком удивительной эрудиции. В молодости он даже хотел пойти по научной стезе, но жизнь сложилась иначе. Зато Василию Петровичу удалось передать страсть к науке сыну. Анатолий Васильевич вспоминал, как отец подбрасывал его в детстве к потолку, приговаривая: «Ты обязательно станешь учёным!»

По словам мамы Латышева, Марии Ивановны (работала логопедом в школе-интернате), маленький Толя очень рано научился и сразу же полюбил читать. Однажды в детстве она оставила его на улице у магазина с только что купленной книгой. Выйдя из магазина, она увидела, что Толя нигде нет. После долгих поисков она обнаружила маленького мальчика на далёкой улице, куда он дошёл, увлекшись интересным чтением и не замечая ничего вокруг.

Школу Анатолий Васильевич заканчивал в поселке Уваровка Можайского района Московской области. учёбу там Латышев всегда вспоминал с большим удовольствием. Это было время зарождения надежд и мечтаний о великом будущем, которые Латышев разделял с двумя лучшими друзьями: Виктором Симаковым и Владимиром Евтушенковым, будущим выдающимся предпринимателем, председателем совета директоров АФК «Система», которому Анатолий Васильевич посвятил несколько своих монографий. «Три мушкетера» – так неразлучных одноклассников прозвали в школе. Дружба связывала их всю жизнь.

Никаких отметок, кроме пятёрок, школьник Толя Латышев не признавал, да никогда и не получал. И уже тогда проявилась удивительная

черта характера будущего профессора – в нём не было ни капли высокомерия по отношению к другим людям, даже если те не обладали никакими выдающимися способностями.

(Эта черта сохранялась в Анатолии Васильевиче всю его жизнь. Как чуткий педагог, он никогда не проявлял надменности, но всегда старался вдохновить, увлечь человека, помочь ему, «расшевелить» кроющиеся в нём способности. При этом, он как никто умел проявлять искреннее благоговение и перед чужим дарованием. «Ты просто гений, талант, умница, лучший!» - не устал говорить Анатолий Васильевич многим из своих учеников, коллег, друзей и родных. Эти щедрые похвалы, так необходимые талантливым людям, часто особенно нуждающимся в моральной поддержке, Латышев делал только в превосходной степени).

В 1966 году Анатолий Васильевич поступил на математический факультет МОПИ им. Н.К. Крупской. И с тех пор вся его жизнь навсегда неразрывно соединилась с физико-математическим факультетом МОПИ – МПУ – МГОУ, на котором Латышев проделал путь от студента до профессора, доктора физико-математических наук.

В студенческие годы ярко проявился математический талант Анатолия Васильевича, подспорьем которому были энергичность и большое трудолюбие. Окончив факультет с отличием, Латышев решил не покидать стен альма-матер и в 1970 году поступил в аспирантуру при кафедре математического анализа. С тех пор начался его непрерывный преподавательский стаж.

Анатолий Васильевич продолжал работу на кафедре и после успешной защиты кандидатской диссертации в 1974 году, к тому моменту будучи уже доцентом. Всё это время Латышев вёл в стенах родного института и общественную работу, а свою преподавательскую деятельность всегда успешно сочетал с активным научным трудом.



В 1980-е годы в жизни Анатолия Васильевича произошла судьбоносная встреча с талантливым физиком-теоретиком Александром Алексеевичем Юшкановым.

Первые совместные исследования и статьи переросли в многолетнее творческое сотрудничество, и ныне научный тандем Латышев-Юшканов, как яркое явление в современной математической физике, хорошо известен не только в России, но и за рубежом. Более четверти века кропотливых научных исследований выдвинули Анатолия Васильевича Латышева в ряды ведущих российских ученых.

Докторскую диссертацию Анатолий Васильевич защитил в институте прикладной математики имени М.В. Келдыша в 1993 году. Его диссертацию оппонировали известные в России и за рубежом ученые А.В. Бобылев, Е.М. Шахов и В.И. Агошков. Научная требовательность этих ученых общеизвестна и является залогом высокого качества научных исследований А.В. Латышева.



На высоком научно-теоретическом уровне читал все курсы математического анализа, теории функции комплексного переменного и математической физики, вел курсы по краевым задачам и интегральным уравнениям. Руководил курсовыми и дипломными работами, исследованиями аспирантов, стажеров и соискателей.

Анатолий Васильевич широко применял в работе передовые компьютерные технологии, в частности, программируемые редакторы La TeX, Mik TeX, такие программы, как MathCad, Maple, Mathematica, графические программы Origin и другие.

Для обучения студентов и аспирантов А.В. Латышев разработал учебно-методические комплексы и рабочие учебные программы курсов «Теория функций комплексного переменного» и «Интегральные уравнения». Его авторству также принадлежат учебные пособия «Введение в теорию функций комплексного переменного» и «Введение в математическую физику».

В 1975 году он был инициатором создания педагогических отрядов, с которыми лично ездил по России для оказания научно-методической помощи профильным факультетам провинциальных вузов.

После защиты докторской диссертации Латышев активно сотрудничал с Российской Академией Наук.

В период с 1996 по 2005 г. профессор Латышев работал руководителем ряда научных проектов Российского Фонда Фундаментальных Исследований, в Институте вычислительной математики. Проекты осуществлялись во многих областях математического естествознания: в теории аналитических функций, в механике управления движения, в механике сплошной среды.

Также Анатолием Васильевичем были проведены эффективные исследования по нелинейным уравнениям математической физики, развиты методы по построению многосолитонных и солитонноподобных решений.

Наиболее значительные научные результаты А.В. Латышева относятся к кинетическим уравнениям и теории переноса (излучение, радиация, нейтральные газы, квантовые газы, плазма, квантовая плазма и т.д.)

Также им была построена теория решения граничных задач для кинетических уравнений, создано новое научное направление «Граничные задачи для кинетических уравнений» и создана собственная научная школа.

В 2006 году А.В. Латышев был единогласно избран на должность заведующего кафедрой математического анализа МГОУ. На этой должности он уделял много времени как учебному процессу, так и воспитательной и научной работе.

За свою жизнь профессор А.В. Латышев опубликовал около 600 работ в т.ч. 10 монографий и свыше 200 научных работ в академических журналах. Последние входят во все научные базы данных, такие как Web of Science, Scopus, РИНЦ и т.п.

Он подготовил к защите четырнадцать кандидатов (Слободской Г.В., Моисеев А.В., Тимченко О.В., Борисова О.Н., Шестеркина С.Н., Рындина С.В., Сушков В.В., Любимова Н.Н., Алабина Ю.Ф., Терешина Т.В., Гриценко Н.В., Квашнин А.Ю., Акимова В.А., Бедрикова Е.А.) и одного доктора (Попов В.Н.) физико-математических наук.

Научные результаты Анатолия Васильевича по кинетическим уравнениям, теории квантовой и классической плазмы и излучения получили признание во всем мире. Профессор Латышев хорошо известен не только научной общественности России, но и учёным в США, Великобритании, Франции, Италии, Китае, Индии и Японии. Со многими из последних он много лет поддерживал научные и дружеские связи. Он регулярно выступал на международных научных конференциях и конгрессах.

После поездки на конференцию в США (штат Вирджиния) А.В. Латышев поддерживал постоянные дружеские отношения с зарубежными

учёными Владом Протопопеску и Биллом Гринбергом из США, Еленой Фриш из Франции и другими.

Анатолий Васильевич являлся членом научного комитета международной конференции «Математические модели нелинейных явлений» и Международного конгресса по математическому моделированию.

Под его редакцией изданы три сборника научных трудов в издательстве Академии Наук США в 1998 г, 2000 г. и 2013 г.

Результаты работ Анатолия Васильевича имеют важное практическое значение в вопросах конструирования электронных приборов, квантовых компьютеров и в развитии других современных нанотехнологий.

А.В. Латышев активно участвовал в работе по реформированию высшей школы. Он принимал участие в работе трех диссертационных советов, работал членом редколлегии журнала «Математика в высшем образовании». Ежегодно выступал оппонентом по докторским и кандидатским диссертациям, рецензировал монографии, книги, учебники и учебные пособия. Анатолий Васильевич являлся рецензентом ряда академических журналов.

В 1993 году А.В. Латышев получил грант Международного научного фонда. В 2002 г. и 2005 г. он становился лауреатом «Гранта Москвы» в области науки и технологий в сфере образования.

В 2015 г. за подготовку аспирантов и студентов награжден знаком отличия «Золотой крест» и медалью «НИРС» от общественной организации «Национальное достояние России».

А.В. Латышев награждался Почётными Грамотами Министерства образования и науки РФ, являлся «Почётным профессором МГОУ» 2011 г., имел награды:

1. Медаль «В память 850-летия Москвы», 1997 г.,
2. Почётное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации», 1998 г.,
3. Почётное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», 2007 г.,
4. Почётное звание «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации»,
5. Звание академика Международной педагогической академии образования.

Анатолий Васильевич заслуженно пользовался авторитетом среди студенческого и профессорско-преподавательского состава на своей кафедре, в коллективе факультета и в целом среди работников родного университета.

Он всю свою жизнь посвятил науке. Но она не была для него просто работой. Наука была его способом существования в этом мире, при чём способом радостным и любимым. Наука занимала его всегда и везде, ежедневно и в любом месте, дома, на даче, в транспорте - лишь бы были под

рукой бумага и ручка... Иногда создавалось впечатление, что даже ночью, во сне, он продолжал решать задачи, а утром, проснувшись, тут же спешил за рабочий стол, чтобы записать уже готовый результат. Анатолий Васильевич Латышев был счастливым человеком. Он всю жизнь занимался любимым делом.

ВОСПОМИНАНИЯ ДРУЗЕЙ БЛИЗКИХ

Мой дядя - волшебник! И он всегда таким был.

Человек, который знал разные секреты про этот сложный и загадочный мир и при этом всегда сохранял детскую способность искренне удивляться и видеть то, что другие не видят. Всю жизнь посвятив науке, ты умел видеть красоту искусства. Умел видеть талант в других людях и восхищаться его проявлению, по-настоящему, с открытым сердцем.

Помню, как, когда я была маленькой, ты рисовал разные многомерные фигуры и рассказывал о них - это было настоящее чудо, я совсем не могла понять, как на плоском листе бумаги появляется объемная фигура, которую, кажется, можно взять в руки и ощутить.

Когда я стала старше и пошла в школу, ты объяснял мне математику на несколько тем вперед, и я писала контрольные на отлично, так как знала, как решить задачу способом, который мы ещё не проходили в классе (ну и хитрецы же мы с тобой, дядя Толюшка).

Ещё совсем недавно, как будто вчера, я разговаривала с тобой наяву и могла узнать что-то новое и интересное и по-детски удивиться вместе с тобой, не смотря на то, что уже давно стала взрослой.

Я навсегда запомню наши прогулки на даче под звездами и разговоры о великих открытиях великих людей.

Мудрый волшебник, алхимик, звездочёт, настоящий ученый! Я бесконечно горжусь тобой и буду гордиться всегда! Ты в моем сердце! Живой, любящий эту жизнь, с нескончаемым интересом к познанию и освоению вселенной, которому я у тебя училась и учусь. Это счастье - быть твоей племянницей

С любовью, А.А. Довгань (племянница).

Деликатность. И искреннее уважение к чужому миру, пусть и совсем не знакомому, - вот что приходит на ум при воспоминании о дяде Толе. Деликатность и уважение... — такие редкие явления в мире, что становятся сразу заметны. Пусть не было долгих разговоров о жизни, советов, многих слов, душевных излияний. А они и не нужны. У каждого своя жизнь — непохожая ни на что, особенная. Даже главного никогда не расскажешь по-

настоящему, даже близкому. Поэтому так бесценно встретить в ком-то умение просто помолчать в присутствии другого человека. Создать нужную тишину, чтобы в ней звучал не собственный, а другой голос. И с искренним интересом вслушиваться в него... Свойство настоящего, светлого таланта, которое дано немногим. Искренний интерес и уважение, которые ощущались от дяди Толи даже в наши подростковые годы. А это так много значит для того, кто только начинает жизнь, - испытать на себе уважение взрослого человека, уважение полное, как к другому взрослому, как к равному. Доверие, которое пробуждает желание расти. И при том - осторожность, нежелание нарушить твою личную территорию. Уважение к твоим границам. Эта щедрость и широта - признаки внутренней свободы. Свойства настоящего Педагога. Взгляд, направленный не на себя. Невероятное свойство души – искреннее внимание к другому человеку. Глаза, загорающие весёлыми огоньками при рассказе о чужих - не своих - успехах.

И похожие же огоньки при объяснении какой-нибудь математической задачи... И благодарность в ученической душе – за то, что неформально, за то, что не сухо, за то, что не про цифры, не про отметки и не про поступление в институт, а совсем про другое – про красоту науки, изящество решения, про залихватскую находчивость светлого ума!

И – никогда не громко, не навязчиво. Да почти совсем не заметно... А оглянешься – Господи, сколько осталось от человека в сердце теплых воспоминаний! Дай Бог, чтобы оно, это тепло, возвращаясь, согревало дорогого дядю Толю.

И.В. Перекатов (племянник).

Латышев Анатолий Васильевич... Такой близкий, добрый, отзывчивый, потрясающе остроумный и веселый! Такой настоящий! Открытое русское лицо с обаятельной улыбкой и лукавым взглядом умных глаз.

Наши семьи очень сблизились, проводя летние месяцы по-соседству на даче в Подмосковье. Прогулки в лес за малиной, грибами, вечера у костра под звездным небом. С ним рядом было удивительно комфортно, спокойно, интересно и взрослым, и детям. Наши взрослые внучки до сих пор помнят его забавные истории и затеи. Светлая память об этом замечательном человеке в наших сердцах.

С любовью, семья Савченко.

ВОСПОМИНАНИЯ КОЛЛЕГ И УЧЕНИКОВ

Светлой памяти Анатолия Васильевича Латышева

Мое знакомство с Анатолием Васильевичем насчитывает полвека и ведет свое начало с 1968 года, когда я, окончив школу-десятилетку, поступил на математический факультет МОПИ им. Н.К.Крупской (так тогда именовался наш университет). Умный, энергичный, увлеченный наукой Анатолий привлекал внимание к себе и заслуживал уважение как среди студентов, так и среди преподавателей. Учился он тогда уже на выпускном курсе матфака, начинал научную работу под руководством заведующего кафедрой математического анализа профессора Ивана Ивановича Баврина, готовился к поступлению в аспирантуру.

Вот на кого надо равняться и в учебе, и в отношении к науке решил я. И не ошибся в своем выборе. Надо сказать, что на кафедре существовали славные традиции, заложенные известным математиком Алексеем Александровичем Темляковым (учеником знаменитого советского математика и механика академика Мстислава Всеволодовича Келдыша), заведовавшим кафедрой в 1949-1968 гг. и развившим целое направление в теории функций многих комплексных переменных, известное в мировой монографической литературе как «Интегралы Темлякова». В созданной А.А. Темляковым научной школе было подготовлено немало квалифицированных научных сотрудников, опытных вузовских преподавателей.

В 80-е годы А.В. Латышев продолжил свою научную деятельность в творческом содружестве с талантливым физиком Александром Алексеевичем Юшкановым. Благодаря написанным ими в соавторстве научным статьям и монографиям по граничным задачам физической кинетики, исследованиям газовой плазмы, нанотехнологиям, другим актуальным вопросам математической физики в кругах научной общественности все чаще стали говорить и писать о перспективном тандеме А.В. Латышев - А.А. Юшканов. Причем писать не только в отечественных, но и в широко известных зарубежных научных журналах.

Вспоминая все свои долгие годы сотрудничества с Анатолием Васильевичем, пытаясь выделить наиболее запомнившееся, остановлюсь на работе в составе диссертационного совета, в котором проходили защиты работ на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 90-х – начале 2000-х годов. Благодаря тщательно подобранному сильному составу совета (председатель – проф. Г.Л. Луканкин, зам. председателя – проф. А.В.Латышев, ученый секретарь – доц. А.В. Нелаев, в составе совета известные специалисты с мехмата МГУ, из Математического института имени В.А. Стеклова, из Института прикладной математики имени М.В. Келдыша, других авторитетных вузов) защиты проходили на очень высоком уровне.

В последние годы, как и всегда, Анатолий Васильевич продолжал интенсивную научную деятельность. Работал не жалея себя, хотя здоровье уже стало давать сбои. Трудился до последнего.

Светлая память об А.В. Латышеве навсегда сохранится в сердцах всех знавших его.

Доцент, канд. физ.-мат. наук, член-кор. МАНПО А.В.Нелаев

Физико-математический факультет МГОУ сыграл в моей жизни значительную роль. Именно здесь я пополнила знания в области математики, но особо значимую роль в мои студенческие годы внес добрейший, выдающийся, уважаемый всеми студентами, ученый, профессор Анатолий Васильевич Латышев. Он был в течение трех лет моим научным руководителем. Именно он раскрыл и показал значимость и важность математической физики. Анатолий Васильевич вдохновил меня на изучение плазмы. Под его руководством мною сделаны маленькие открытия в области математической физики, изменившие мою дальнейшую жизнь. Я постараюсь продолжить дело Анатолия Васильевича, которому он посвятил всю свою жизнь.

Я на всю жизнь запомнила занятия этого талантливой Ученого. Мне просто повезло, что на моем жизненном пути встретился такой удивительный, понимающий, жизнерадостный, любящий жизнь человек.

Это счастье, когда на твоём жизненном пути встречаются такие талантливые, добрые, внимательные, гениальные, искренне желающие передать накопленный опыт студентам преподаватели. Это человек от Бога. К сожалению, такие люди сейчас встречаются редко....

В.И.Аскерова (студентка)

Анатолий Васильевич Латышев, являясь моим научным наставником, открыл дорогу в научную деятельность и помог сделать первые шаги в ней, тем самым воплотив мою мечту в реальность. Умение Анатолия Васильевича доносить до своих учеников и студентов сложные физико-математические конструкции и схемы, с чувством юмора и паузами для осмысления, является для меня эталоном при проведении собственных занятий. Все студенты с трепетом слушали Анатолия Васильевича на занятиях. Несмотря на достаточную сложность его курсов, его заразительный интерес и любовь к своим предметам вдохновляли каждого студента разобратся в них.

Анатолий Васильевич был полон доброты и всегда был готов подсказать своим ученикам в возникших проблемах. К моим частым ошибкам на первых порах научной деятельности он относился с пониманием и всегда говорил, что это свойственно людям, в том числе и научным. Его советы и цитаты служат для меня ориентиром в науке и жизни.

Я слышал, что невозможно быть превосходным педагогом и учёным одновременно, этому есть и исторические подтверждения, однако Анатолий Васильевич является ярким исключением из этого тезиса.

А.Д. Курилов (ассистент МГОУ)

На свете очень мало людей, которые, следуя зову сердца, полностью отдаются своему делу. Вспоминая о таких людях, в моей голове возникает образ выдающего педагога, известного учёного и замечательного человека - Анатолия Васильевича Латышева.

Его лекции и семинары были наполнены любовью. Любовью мастера к своему делу, любовью педагога к своим ученикам, любовью человека к жизни. Всегда было интересно. Анатолий Васильевич великолепно управлял аудиторией: когда надо - вежливое замечание, когда надо - дежурный анекдот или интересная история из жизни. А жизнь была насыщенная и яркая. Иногда я удивлялся, как может один человек совмещать в себе такое множество талантов. К сожалению, жизнь быстро забирает у нас таких людей. Людей, живущих по совести, полностью отдающих себя своему делу и ничего не требующих взамен. За свою жизнь Анатолий Васильевич много достиг, внёс бесценный вклад в развитие науки в возвращение молодого поколения юных учёных. Он всегда был и останется для меня примером для подражания и эталоном для стремления.

Н.А. Казаков (студент)

Латышев А.В. был моим научным руководителем. К сожалению, под его руководством я училась в аспирантуре чуть менее двух лет. Он был невероятно добрым, терпеливым и отзывчивым человеком. Анатолий Васильевич до конца жизни останется в моей памяти как образец искрящейся жизнерадостности, активности, стойкости и профессионализма.

С.Ш. Сулейманова (аспирант)

II. НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ, СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ТОК В КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ N ПОПЕРЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

А.В.Латышев, В. И. Аскерова,

Московский государственный областной университет

Аннотация

Данная работа посвящена квантовой плазме с произвольной степенью вырождения электронного газа. В плазме распространяется N ($N > 2$) внешних электромагнитных полей. С помощью кинетического уравнения Вигнера найдена функция распределения в квадратичном приближении по величинам векторных потенциалов N электрических полей.

Ключевые слова: квантовая плазма, уравнение Вигнера, распределение Ферми-Дирака, продольный и поперечный электрический ток, нелинейный анализ.

Продemonстрируем, что в квантовои плазме, описываемой кинетическим уравнением Вигнера, генерируется продольный ток, и найдем его плотность.

Пусть в квантовой плазме распространяется N внешних электромагнитных полей с векторными потенциалами

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)} (j = 1, 2, \dots, N).$$

Электрические и магнитные поля равны соответственно

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)} (j = 1, 2, \dots, N) \text{ и } \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega_j t)} (j = 1, 2, \dots, N).$$

Электрическое и магнитное поля связаны с векторными потенциалами равенствами $\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{i\omega_j}{c} \mathbf{A}_j$, $\mathbf{H}_j = \text{rot } \mathbf{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Векторный потенциал электромагнитного поля ортогонален волновому вектору.

Волновые векторы N полей направлены вдоль оси x , а электромагнитные поля направлены вдоль оси y , т.е.

$$\mathbf{k}_j = k_j(1, 0, 0), \mathbf{E}_j = E_j(x, t)(0, 1, 0), E_j(x, t) = E_{0j} e^{i(k_j x - \omega_j t)}.$$

Воспользуемся уравнением Вигнера, описывающим поведение квантовой бесстолкновительной плазмы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + W[f] = 0 \quad (1)$$

с нелинейным интегралом Вигнера

$$W[f] = \mathbf{p} \sum_{j=1}^N \frac{ie\Lambda_j}{mc\hbar} \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_j}{2}, t\right) \right] -$$

$$- \frac{ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^N \Lambda_j^2 [f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}_j, t)] -$$

$$- \frac{ie^2}{mc^2\hbar} \sum_{\substack{i,j=1,2,\dots,N \\ i < j}} \Lambda_i \Lambda_j \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar \frac{\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \hbar \frac{\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j}{2}, t\right) \right].$$

В уравнении (1) f – аналог квантовой функции распределения электронов плазмы (функция Вигнера), t – время, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электрона, $\mathbf{v}$ – скорость электрона.

За нулевое приближение примем локально равновесное распределение Ферми–Дирака $f^{(0)} = f_{eq}(\mathbf{r}, t)$ (eq= equilibrium), $f^{(0)} = \left[1 + \exp \frac{\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r})}{k_B T}\right]^{-1}$, где $\mathcal{E} = m\mathbf{v}^2/2$ – энергия электронов, $\mu(\mathbf{r})$ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\alpha = \mu(\mathbf{r})/k_B T$ – безразмерный химический потенциал, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $k_B T = \mathcal{E}_T = m\mathbf{v}_T^2/2$ – тепловая кинетическая энергия электронов.

Перейдем к безразмерным величинам в уравнении (1). Введем $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{p_T}$, $p_T = m v_T$, а также абсолютное распределение Ферми–Дирака $f_F(P) = 1/(1 + e^{P^2 - \alpha})$.

Тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_T \mathbf{P} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{iev_T}{c\hbar} \mathbf{P} \sum_{j=1}^N \Lambda_j \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2}, t\right) \right] -$$

$$- \frac{ie^2}{2mc^2\hbar} \sum_{j=1}^N \Lambda_j^2 [f(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \mathbf{q}_j, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \mathbf{q}_j, t)] -$$

$$- \frac{ie^2}{mc^2\hbar} \sum_{\substack{i,j=1,2,\dots,N \\ i < j}} \Lambda_i \Lambda_j \left[f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j}{2}, t\right) - f\left(\mathbf{r}, \mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j}{2}, t\right) \right] = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) $\mathbf{q}_j$ – безразмерные волновые числа, $\mathbf{q}_j = \mathbf{k}_j/k_T$, $\mathbf{k}_T$ – тепловое волновое число, $\mathbf{k}_T = m\mathbf{v}_T/\hbar$.

Решение уравнения (2) найдем с помощью метода последовательных приближений в виде

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2,$$

где

$$f_1 = \sum_{j=1}^N A_j \varphi_j, \quad A_j \sim e^{i(k_j - \omega_j)} \quad (3)$$

$$f_2 = \sum_{j=1}^N A_j^2 \psi_j + \sum_{\substack{s,m=1,2,\dots,N \\ s < m}}^N A_s A_m \xi_{s,m}, \quad (4)$$

$$A_j^2 \sim e^{2i(k_j x - \omega_j t)}, \xi_{s,m} \sim e^{i[(k_s + k_m)x - (\omega_s + \omega_m)t]}.$$

Решение уравнения Вигнера в первом приближении найдем в виде $f^{(1)} = f_0(P) + f_1$, где f_1 определяется выражением (3).

Следовательно,

$$f_1 = -\frac{e}{c\hbar k_T} \sum_{j=1}^N P A_j \frac{f_F(P + \frac{q_j}{2}) - f_F(P - \frac{q_j}{2})}{q_j P_j - \Omega_j}$$

Здесь $\Omega_j = \omega_j / (v_T k_T)$ – безразмерная частота колебаний поля E_j .

Во втором приближении ищем решение, определяющее равенством (4). В зависимости от N уравнение (2) будет распадаться на несколько уравнений.

$$A_s A_m \xi_{s,m} = \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} (P A_s)(P A_m) \left[\frac{f_F(P + \frac{q_s + q_m}{2}) - f_F(P - \frac{q_s + q_m}{2})}{P q_m - \Omega_m + \frac{q_s q_m}{2}} - \frac{f_F(P - \frac{q_k - q_m}{2}) - f_F(P - \frac{q_k + q_m}{2})}{P q_m - \Omega_m + \frac{q_s q_m}{2}} + \frac{f_F(P + \frac{q_s + q_m}{2}) - f_F(P - \frac{q_s - q_m}{2})}{P q_s - \Omega_s + \frac{q_s q_m}{2}} - \frac{f_F(P + \frac{q_s - q_m}{2}) - f_F(P - \frac{q_k - q_m}{2})}{P q_s - \Omega_k + \frac{q_k q_m}{2}} \right] \frac{1}{P \frac{q_k + q_m}{2} - \frac{\Omega_k + \Omega_m}{2}} + \frac{e^2 A_s A_m}{2c^2 p_T^2} \frac{f_F(P + \frac{q_k + q_m}{2}) - f_F(P - \frac{q_k + q_m}{2})}{P \frac{q_k - q_m}{2} - \frac{\Omega_k + \Omega_m}{2}}, \quad s, m = 1, 2, \dots, N, \quad s < m.$$

и

$$A_j^2 \psi_j = \frac{e^2}{2c^2 p_T^2} \left[(P A_j)^2 \frac{f_F(P + q_j) - f_F(P - q_j)}{P q_j - \Omega_j + q_j^2/2} + \frac{A_j^2}{2} (f_F(P + q_j) - f_F(P - q_j)) \right] \frac{1}{P q_j - \Omega_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Плотность электрического тока вычисляется по формуле:

$$j = e \int f v \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поскольку электрический ток в нулевом приближении равно нулю. Тогда его плотность в квантовой плазме равняется:

$$j = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int (f_1 + f_2) \left[P - \frac{e(A_1 + A_2 + \dots + A_N)}{mcv_T} \right] d^3 P.$$

Электрический представим и в другом виде:

$$j = j^{\text{linear}} + j^{\text{quadr}},$$

где

$$j^{\text{linear}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 \mathbf{P} d^3P,$$

$$j^{\text{quadr}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \left[f_2 \mathbf{P} - \frac{e(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_n)}{mcv_T} f_1 \right] d^3P.$$

Запишем линейную часть плотности тока в явном виде:

$$j^{\text{linear}} = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \sum_{j=1}^N \int \mathbf{P} (\mathbf{P} \mathbf{A}_j) \frac{f_F(\mathbf{P} + \frac{\mathbf{q}_j}{2}) - f_F(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{q}_j}{2})}{\mathbf{P} \mathbf{q}_j - \Omega_j} d^3P.$$

Однако,

$$j^{\text{linear}} = j_y(0,1,0),$$

где

$$j_y = - \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3 c \hbar k_T} \sum_{j=1}^N A_j \int \frac{f_F(P_x + \frac{q_j}{2}, P_y, P_z) - f_F(P_x - \frac{q_j}{2}, P_y, P_z)}{P_x q_j - \Omega_j} P_y^2 d^3P.$$

Здесь $f_F(P_x \pm \frac{q_j}{2}, P_y, P_z) = \left[1 + \exp((P_x \pm \frac{q_j}{2})^2 + P_y^2 + P_z^2 - \alpha) \right]^{-1}$.

В квантовой плазме продольный ток, генерируемый N электромагнитными полями. Он определяется только вторым приближением функции распределения:

$$j^{\text{quadr}} = j^{\text{long}} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 \mathbf{P} d^3P.$$

Векторное выражение для j^{quadr} имеет единственную ненулевую компоненту: $j^{\text{quadr}} = j_x(1,0,0)$, где

$$j_x = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int f_2 P_x d^3P.$$

Представим продольный ток в следующем виде:

$$j_x = \sum_{l=1}^N j_l + \sum_{\substack{s,m=1 \\ s < m}}^N j_{s,m}. \quad (5)$$

где

$$j_l = A_l^2 \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \psi_l P_x d^3P, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

$$j_{s,m} = A_s A_m \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \xi_{s,m} P_x d^3P. \quad (7)$$

Продольный ток может быть записан в виде суммы трех токов.

Формулу (6) представим в явном виде для токов j_l :

$$j_l = A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \int \left[\left(\frac{f_F(P_x + q_j) - f_F(P)}{q_j P_x - \Omega_j + q_j^2/2} - \frac{f_F(P) - f_F(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - q_j^2/2} \right) P_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{f_F(P_x + q_j) - f_F(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3P}{q_j P_x - \Omega_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Воспользуемся связью между концентрацией (числовой плотностью), тепловым волновым числом и химическим потенциалом:

$$N_0 = \frac{k_T^3 l_0(\alpha)}{2\pi^2}, \quad l_0(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du.$$

Следовательно,

$$C = A_l^2 \frac{e^3 v_T p_T}{(2\pi\hbar)^3 c^2} = A_l^2 \frac{2\pi^2 e^3 v_T N}{8\pi^3 c^2 p_T^2 l_0(\alpha)} = -E_l^2 \frac{e \omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \Omega_l} =$$

$$= -E_l^2 \frac{e \Omega_p^2}{16\pi^2 p_T l_0(\alpha) \Omega_l}, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

$\Omega_p = \frac{\omega_p}{v_T k_T}$ - безразмерная плазменная частота.

Введем продольно-поперечную проводимость $\sigma_{l, tr}$,

$$\sigma_{l, tr} = \frac{e\hbar}{p_T^2} \left(\frac{\hbar \omega_p}{m v_T^2} \right)^2 = \frac{e}{k_T p_T} \left(\frac{\omega_p}{k_T v_T} \right)^2 = \frac{e \Omega_p^2}{k_T p_T}.$$

тогда C имеет вид:

$$C = -\frac{E_j^2 k_T \sigma_{l, tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_1 \Omega_2} = -\frac{E_j^2 k_j \sigma_{l, tr}}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j^2 q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Формула для токов $j_1, j_2, \dots, j_N$ может быть записана как

$$j_k = J_k \sigma_{l, tr} k_k E_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$J_1, J_2, \dots, J_N$ - безразмерные плотности тока, равные

$$J_j = -\frac{1}{16\pi^2 l_0(\alpha) \Omega_j q_j} \int \left[\left(\frac{f_F(P_x + q_j) - f_F(P)}{q_j P_x - \Omega_j + \frac{q_j^2}{2}} - \frac{f_F(P) - f_F(P_x - q_j)}{q_j P_x - \Omega_j - \frac{q_j^2}{2}} \right) P_y^2 \right.$$

$$\left. + \frac{f_F(P_x + q_j) - f_F(P_x - q_j)}{2} \right] \frac{P_x d^3 P}{q_j P_x - \Omega_j}.$$

Полученные выше интегралы можно свести к одномерным:

$$J_j = -\frac{1}{16\pi l_0(\alpha) \Omega_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{L(\tau)}{(q_j \tau - \Omega_j) \left[(q_j \tau - \Omega_j)^2 - \frac{q_j^4}{4} \right]} + \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q_j \tau - \Omega_j)^2 - q_j^4} \right] d\tau.$$

Формулу (7) для перекрестного тока запишем в виде

$$\sum_{\substack{s, m=1 \\ s < m}}^N j_{s, m} = \sum_{\substack{s, m=1 \\ s < m}}^N J_{s, m} \sigma_{l, tr} E_s E_m (k_s + k_m),$$

где $J_{s, m}$ - безразмерная часть перекрестного тока,

$$\sum_{j=1}^N J_{s, m} = \sum_{j=1}^N (J_j^+ - J_j^-) + \sum_{\substack{s, m=1 \\ s < m}}^N J_{s, m}.$$

Здесь

$$J_j^\pm = \int \frac{f_F(P_x + q^\pm) - f_F(P_x - q^\mp)}{q_j P_x - \Omega_j \pm q_s q_m / 2} \frac{P_y^2 P_x d^3 P}{q P_x - \Omega}.$$

$$J_{k, m} = \int \frac{f_F(P_x + q) - f_F(P_x - q)}{q P_x - \Omega} P_x d^3 P.$$

и введены обозначения $q^\pm = (q_s \pm q_m)/2$, $\Omega = (\Omega_s + \Omega_m)/2$.

Выше полученные интегралы сведем к одномерным. Следовательно, получим:

$$J_j^\pm = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_1(\tau, q^\pm)}{q_j \tau - \Omega_j \pm \frac{q_s q_m}{2} \frac{q_s \pm q_m}{2} \tau - \frac{\Omega_s + \Omega_m}{2}} \tau d\tau$$

$$J_{s,m} = 2\pi q \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - u^2}) du}{(qu - \Omega)^2 - q^4}.$$

Здесь

$$l_j(\tau, q^\pm) = \int_0^\infty \rho \ln \left(\frac{1 + e^{\alpha - (\tau + q^\pm)^2 - \rho^2}}{1 + e^{\alpha - (\tau - q^\pm)^2 - \rho^2}} \right) d\rho.$$

В итоге, продольный ток, записанный в формуле (5) равен:

$$j_x = \sigma_{l, tr} \left[\sum_{j=1}^N E_j^2 k_j J_j + \sum_{\substack{s,m=1 \\ s < m}}^N E_s E_m (k_s + k_m) J_{s,m} \right]. \quad (8)$$

Равенство (8) может быть переписано в инвариантной форме:

$$j^{\text{long}} = \sigma_{l, tr} \left[\sum_{j=1}^N (\mathbf{E}_j^{\text{tr}})^2 \mathbf{k}_j J_j + \sum_{\substack{s,m=1 \\ k < m}}^N \mathbf{E}_s^{\text{tr}} \mathbf{E}_m^{\text{tr}} (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_m) J_{s,m} \right].$$

Здесь $\mathbf{E}_j^{\text{tr}}$ – поперечные электромагнитные поля

$$\mathbf{E}_j^{\text{tr}} = \mathbf{E}_j - \frac{\mathbf{k}_j (\mathbf{E}_j \mathbf{k}_j)}{k_j^2} = \mathbf{E}_j - \frac{q_j (\mathbf{E}_j q_j)}{q_j^2}.$$

При малых волновых значениях плотности перекрестного тока имеем

$$\sum_{\substack{s,m=1 \\ s < m}}^N j_{k,m} = - \sum_{\substack{s,m=1 \\ s < m}}^N \frac{\sigma_{l, tr} E_s E_m (k_s + k_m)}{4\pi \Omega_s \Omega_m (\Omega_s + \Omega_m)}, \quad q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow 0.$$

При малых значениях волновых чисел для плотности продольного тока имеем:

$$j^{\text{long}} = - \frac{\sigma_{l, tr}}{8\pi} \left[\sum_{j=1}^N (\mathbf{E}_j^{\text{tr}})^2 \frac{\mathbf{k}_j}{\Omega_j^3} + 2 \sum_{k < m} \frac{\mathbf{E}_s^{\text{tr}} \mathbf{E}_m^{\text{tr}} (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_m)}{\Omega_s \Omega_m (\Omega_s + \Omega_m)} \right] \quad q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow 0.$$

Литература

1. Латышев А. В., Юшканов А. А. Нелинейный продольный ток в классической и квантовой плазме, генерируемый двумя поперечными электромагнитными волнами // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. №. 4. С. 44-62.

2. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А., Квантовые эффекты взаимодействия электромагнитного поля с плазмой. М.: МГОУ, 2016. 385 с.
4. Bezhanov S.G., Urupin S.A. Generation of nonlinear currents and low-frequency radiation upon interaction of a laser pulse with a metal// Quantum Electronics(2013),43(11):1048.
5. Latyshev A. V., Askerova V. I. The occurrence of transverse and longitudinal electric currents in the classical plasma under the action of N transverse electromagnetic waves //arXiv preprint arXiv:1701.03048. 2017.
6. Latyshev A. V., Yushkanov A. A., Algazin O.D., Kopaev A.V., Popov V.S. Nonlinear longitudinal current, generated by two transversal electromagnetic waves in collisionless plasma// arXiv: 1505.06796v1 [physics.plasm-ph] 26 May 2015, 22 p.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Сулейманова С.Ш., Юшканов А.А.

Московский государственный областной университет

Аннотация

Аналитически решена граничная задача о поведении (колебаниях) электронной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в полупространстве с зеркальными граничными условиями. Функция распределения электронов и электрическое поле внутри плазмы получены в виде разложений по собственным решениям исходной системы уравнений. Коэффициенты этих разложений найдены с помощью граничных условий.

Ключевые слова: уравнение Власова-Больцмана, частота столкновений, электрическое поле, дисперсионная функция.

Характер экранированного электрического поля вблизи поверхности проводника имеет существенное значение для рассмотрения различных проблем физики поверхности [1], [2]. К ним в частности относится проблема распространения поверхностных плазменных колебаний [3], [4].

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи о поведении плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в полупространстве во внешнем переменном продольном электрическом поле. Такой случай реализуется, например, при рассмотрении полупроводниковой твердотельной плазмы.

Пусть невырожденная плазма Ферми-Дирака занимает полупространство $x > 0$. Будем использовать τ - модельное уравнение Власова-Больцмана. Пусть внешнее электрическое поле вне плазмы перпендикулярно границе плазмы и меняется по закону $\mathbf{E}_{\text{ext}}(t) = E_0 e^{-i\omega t} (1, 0, 0)$. Будем предполагать, что напряженность электрического поля достаточно мала для возможности проведения линеаризации. При этом для аналитического решения задачи о колебаниях плазмы необходимо рассмотреть следующую систему уравнений [5] (см. также [6]):

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x_1} + w_0 H(x_1, \mu) = \mu e(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (1)$$

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \kappa^2(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu'. \quad (2)$$

где

$$x_1 = \frac{xv}{v_T}$$

В дальнейшем индекс "1" у безразмерной координаты x_1 будем опускать.

В уравнениях (1) и (2)

$$\begin{aligned} H(x, \mu) &= \frac{vkT}{eE_0 v_T} h(x, \mu) = \frac{vp_T}{2eE_0} h(x, \mu), \\ e(x) &= \frac{E(x)}{E_0}, \quad s_n(\alpha) = \int_0^{\infty} P^n f_0(P, \alpha) dP, \\ f_0(P, \alpha) &= (1 + e^{P^2 - \alpha})^{-1}, \\ \kappa^2(\alpha) &= \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)}, \quad w_0 = 1 - i \frac{\Omega}{\varepsilon}, \quad r(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)}. \end{aligned}$$

f_0 – невозмущенная функция распределения Ферми – Дирака, $\Omega = \omega/\omega_p$, $\varepsilon = v/\omega_p$, ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$, m – масса электрона, T – температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче. Здесь N – числовая плотность (концентрация) электронов в равновесном состоянии, безразмерный (приведенный) химический потенциал $\alpha = \mu/kT$, $h(x, \mu)$ – неизвестная функция, которая получается при линеаризации функции распределения электронов

$$f(x, \mathbf{P}, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha) h(x, \mu) e^{-i\omega t},$$

где

$$g(P, \alpha) = e^{P^2 - \alpha} (1 + e^{P^2 - \alpha})^{-2}.$$

Здесь $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T = m\mathbf{v}/(mv_T) = \mathbf{v}/v_T$ – безразмерный импульс электрона, $v_T = \sqrt{2kT/m}$ – тепловая скорость электрона.

Принятые обозначения соответствуют обозначениям статьи [5].

В данной задаче ищется величина $H(x, \mu)$.

Рассмотрим условие зеркального отражения электронов от границы полупространства:

$$f(x=0, v_x, v_y, v_z, t) = f(x=0, -v_x, v_y, v_z, t), \quad v_x > 0.$$

Отсюда для функции $H(x, \mu)$ получаем зеркальные граничные условия:

$$H(0, \mu) = H(0, -\mu), \quad 0 < \mu < 1. \quad (3)$$

Граничное условие для поля на поверхности плазмы имеет вид:

$$e(0) = 1, \quad (4)$$

а вдали от поверхности поле предполагается ограниченным:

$$e(+\infty) = e_{\infty}, \quad |e_{\infty}| < +\infty. \quad (5)$$

Разделение переменных согласно общему методу Фурье приводит к следующей подстановке:

$$H_{\eta}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad e_{\eta}(x) = \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) E(\eta).$$

где η – спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря, комплексный.

В работе [5] получено семейство собственных функций характеристического уравнения в виде

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} \left[P \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - w_0 \eta_1^2 \frac{\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta, \alpha)} \delta(\eta - \mu) \right]$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании выражения x^{-1} ,

$$\Lambda(z) = \Lambda(z, \Omega, \varepsilon, \alpha) = 1 + \frac{z}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^2 - \mu z}{\mu - z} k(\mu, \alpha) d\mu,$$

$$\eta_1^2 \equiv \eta_1(\alpha) = \varepsilon(\varepsilon - i\Omega) r(\alpha), \quad k(\mu, \alpha) = f_0(\mu, \alpha) / 2s_0(\alpha).$$

Семейство собственных функций $\Phi(\eta, \mu)$ характеристического уравнения отвечает непрерывному спектру. Их часто называют «моды Ван Кампена».

Граничные значения сверху и снизу на действительной оси дисперсионной функции задачи можно представить следующим образом:

$$\Lambda^{\pm}(\mu) = \Lambda(\mu) \pm i \frac{\pi}{w_0 \eta_1^2} \mu k(\mu, \alpha) (\eta_1^2 - \mu^2), \quad \frac{\Lambda^+(\mu) + \Lambda^-(\mu)}{2} = \Lambda(\mu).$$

Значение дисперсионной функции в бесконечно удаленной точке равно

$$\Lambda_\infty = \Lambda(\infty) = 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_0^2 \varepsilon^2} = \frac{-i\nu\omega + \omega_p^2 - \omega^2}{(\nu - i\omega)^2} \neq 0$$

при любых $\nu \neq 0$, т.е. в любой столкновительной плазме.

Точке $z_i = \infty$ является нулем дисперсионного уравнения. Можно считать, что эта точка принадлежит спектру, присоединенному к непрерывному спектру, составляющему открытую часть числовой оси $(-\infty, +\infty)$. Точке $z_i = \infty$ отвечает следующее решение исходной системы уравнений:

$$H_\infty(x, \mu) = \frac{E_\infty}{w_0} \cdot \mu, \quad e_\infty = E_\infty. \quad (6)$$

Здесь E_∞ - произвольная постоянная. Решение (6) называют модой Друде.

В окрестности бесконечно удаленной точки существуют два нуля $\pm\eta_0$ дисперсионной функции $\Lambda(z)$. В силу четности дисперсионной функции ее нули различаются лишь знаком:

$$\eta_0 = \eta_0(\alpha, \Omega, \varepsilon) \approx \sqrt{\frac{(\Omega + i\varepsilon)^2 [\eta_1^2 s_2(\alpha) - s_4(\alpha)]}{w_0 \eta_1^2 s_0(\alpha) (\Omega^2 - 1 + i\varepsilon\Omega)}}.$$

Вблизи плазменного резонанса, т.е. при $\Omega \approx 1$, модуль нуля $|\eta_0(\alpha, \Omega, \varepsilon)|$ становится неограниченным при любых значениях безразмерного химического потенциала α в случае $\varepsilon \rightarrow 0$. Ноль η_0 является функцией параметров $(\alpha, \Omega, \varepsilon)$.

Множество физически значимых параметров (Ω, ε) заполняет четверть-плоскость $\mathbb{R}_+^2 = \{(\Omega, \varepsilon) : \Omega \geq 0, \varepsilon \geq 0\}$.

Возьмем контур $\Gamma_\rho = C_\rho^+ \cup C_\rho^-$, состоящий из двух замкнутых полуокружностей C_ρ^+ и C_ρ^- радиуса $R = 1/\rho$, лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; ρ - достаточно малое действительное положительное число, $C_\rho^\pm = \{z = x + iy, |z| = 1/\rho, |x \pm iy| \leq 1/\rho\}$. Число R возьмем достаточно большим, чтобы нули дисперсионной функции (если они существуют), лежали внутри области D_ρ , ограниченной контуром Γ_ρ . Заметим, что в пределе при $\rho \rightarrow 0$ область D_ρ переходит в область D_0 , ограниченную контуром $\Gamma_0 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Gamma_\rho$. Эта область совпадает с комплексной плоскостью с разрезом вдоль действительной оси.

В силу принципа аргумента число [6] нулей N дисперсионной функции в области D_ρ при $\rho \rightarrow 0$ равно:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} d \ln \Lambda(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty d \ln \frac{\Lambda^+(\tau)}{\Lambda^-(\tau)} = 2\kappa_{\mathbb{R}_+}(G) \quad (7)$$

Здесь $\varkappa_{\mathbb{R}_+}(G)$ – индекс $G(\tau) = \Lambda^+(\tau)/\Lambda^-(\tau)$, вычисленный вдоль положительной действительной полуоси.

Рассмотрим в комплексной плоскости кривую $\Gamma_\alpha = \Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha): z = G(\tau)$, $0 \leq \tau \leq +\infty$.

Ясно, что $G(0) = 1$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\tau) = 1$. Следовательно, согласно (1.6), число нулей N равно удвоенному числу оборотов кривой $\Gamma(\alpha)$ вокруг начала координат, т.е.

$$N = 2\varkappa(G), \quad \varkappa(G) = \text{ind}_{[0, +\infty]} G(\tau).$$

Выделим на плоскости параметров (Ω, ε) однопараметрическое семейство кривую $L_\alpha = L(\alpha, \Omega, \varepsilon)$, определяемую явными параметрическими уравнениями:

$$L_\alpha: \quad \Omega = \sqrt{L_1(\mu)}, \quad \varepsilon = \sqrt{L_2(\mu)}, \quad 0 \leq \mu \leq +\infty,$$

где

$$L_1(\mu) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2 [\lambda_0(\mu, \alpha)(1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) + s^2(\mu, \alpha)]^2}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)] [(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]}$$

и

$$L_2(\mu) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2 s^2(\mu, \alpha)}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)] [(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]},$$

$$s(\mu, \alpha) = \frac{\pi}{2s_0(\alpha)} \mu f_0(\mu, \alpha).$$

такую, что при переходе через эту кривую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком.

Если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то

$$\varkappa(G) = \text{ind}_{[0, +\infty]} \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} = 1.$$

Это означает, что кривая Γ_α один раз охватывает начало координат. А если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$, то

$$\varkappa(G) = \text{ind}_{[0, +\infty]} \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} = 0.$$

Это означает, что кривая Γ_α не охватывает начало координат.

Плазменная мода $H_{\eta_0}(x_1, \mu)$, $e_{\eta_0}(x_1)$ существует, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, и плазменная мода отсутствует, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$.

Решение задачи, состоящую из уравнений (1) и (2) с граничными условиями (3) – (5), ищем в виде разложений

$$H(x, \mu) = \frac{E_\infty}{w_0} \mu + \frac{E_d \eta_0 \mu - \eta_1^2}{w_0 \eta_0 - \mu} \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) + \frac{1}{w_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta, \quad (8)$$

$$e(x) = E_\infty + E_d \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w_0 x}{\eta}\right) E(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Неизвестными в разложениях (8) и (9) являются коэффициенты дискретного спектра E_d , E_∞ и коэффициент непрерывного спектра $E(\eta)$, причем $E_d = 0$, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$.

Рассмотрим случай $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$. Подставляя разложения (8) и (9) в граничные условия (3) – (5), продолжая функцию $E(\eta)$ в интервал $(-\infty, 0)$ четным образом и подставляя в полученное уравнение собственные функции, получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на всей числовой оси $-\infty < \mu < +\infty$:

$$2E_\infty\mu + E_d \left[\frac{\eta_1^2 - \eta_0\mu}{\mu - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0\mu}{\mu + \eta_0} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - 2\eta_1^2 w_0 s_0(\alpha) \frac{\Lambda(\mu, \alpha)}{\mu f_0(\mu, \alpha)} = 0. \quad (10)$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta. \quad (11)$$

Функция $M(z)$ аналитична в комплексной плоскости, за исключением разреза – точек интегрирования всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. Граничные значения функции $M(z)$ сверху и снизу на разрезе определим как пределы

$$M^+(\mu) = \lim_{\substack{z \rightarrow \mu, \\ \text{Im } z > 0}} M(z), \quad M^-(\mu) = \lim_{\substack{z \rightarrow \mu, \\ \text{Im } z < 0}} M(z), \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Граничные значения вспомогательной функции $M(z)$ связаны формулами Сохоцкого:

$$M^\pm(\mu) = \pm \pi i (\mu^2 - \eta_1^2) E(\mu) + M(\mu),$$

где интеграл $M(\mu)$ понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

Из формул Сохоцкого вытекают следующие равенства:

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i (\mu^2 - \eta_1^2) E(\mu), \quad \mu \in (-\infty, +\infty), \quad (12)$$

$$M(\mu) = \frac{M^+(\mu) + M^-(\mu)}{2}, \quad \mu \in (-\infty, +\infty).$$

С помощью (11) и (12) преобразуем сингулярное уравнение (8) к краевой задаче Римана:

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\mu, \alpha) \left[M^+(\mu) + 2E_\infty\mu + E_d \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_0\mu}{\mu - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0\mu}{\mu + \eta_0} \right) \right] = \\ = \Lambda^-(\mu, \alpha) \left[M^-(\mu) + 2E_\infty\mu + E_d \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_0\mu}{\mu - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0\mu}{\mu + \eta_0} \right) \right], \quad \mu \in (-\infty, +\infty), \end{aligned} \quad (13)$$

Задача (13) имеет следующее решение:

$$M(z) = -2E_{\infty}z - E_d \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_0 z}{z - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0 z}{z + \eta_0} \right) + \frac{C_1 z}{\Lambda(z, \alpha)}. \quad (14)$$

Устраняя полюс в бесконечно удаленной точке, получаем:

$$C_1 = 2E_{\infty}\Lambda_{\infty}.$$

Амплитуда Дебая находится при установлении полюса у решения (11) в точках $\pm\eta_0$. В силу четности дисперсионной функции эти полюсы устраняются одним условием:

$$E_d = \frac{C_1 \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2) \Lambda'(\eta_0, \alpha)} = \frac{2E_{\infty} \Lambda_{\infty} \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2) \Lambda'(\eta_0, \alpha)}.$$

Коэффициент непрерывного спектра найдем, если подставим решение (14) в формулу Сохоцкого (12):

$$E(\mu) = \frac{C_1 \mu}{2\pi i (\mu^2 - \eta_1^2)} \left(\frac{1}{\Lambda^+(\mu) - \Lambda^-(\mu)} \right) = \frac{E_{\infty} \Lambda_{\infty} \varepsilon \mu^2 f_0(\mu, \alpha)}{(\varepsilon - i\Omega) \eta_1^2 s_0(\alpha) \Lambda^+(\mu) \Lambda^-(\mu)}$$

Для нахождения E_{∞} воспользуемся уравнением

$$E_{\infty} + E_d + \int_0^{\infty} E(\eta) d\eta = 1.$$

учитывая четность $E(\eta)$ и вычислив интеграл с помощью теории вычетов, получим:

$$E_{\infty} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{\infty}}, \quad C_1 = 2\Lambda_1.$$

Таким образом, структура электрического поля в общем случае такова:

$$e(x) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{\infty}} + \frac{2\Lambda_1 \eta_0 \exp(-w_0 x / \eta_0)}{\Lambda'(\eta_0, \alpha) (\eta_1^2 - \eta_0^2)} + \frac{\Lambda_1}{w_0 \eta_1^2 s_0(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 f_0(\mu, \alpha) \exp(-w_0 x / \eta_0)}{\Lambda^+(\eta, \alpha) \Lambda^-(\eta, \alpha)} d\eta. \quad (15)$$

Формула (15) справедлива при $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$. В случае $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$ нуль η_0 дисперсионной функции не существует, тогда второе слагаемое в (15) пропадает и формула (15) упрощается.

Литература

1. O. Keller. Local fields in the electrodynamics of mesoscopic media// Physics Reports. 1996. Vol. 268. P. 85 – 262.
2. C. Girard, C. Joachim and S. Gauthier. The physics of the near-field// Rep. Prog. Phys. 2000. Vol. 63. P. 893 – 938.
3. J.M. Pitarke, V.M. Silkin, E.V. Chulkov and P.M. Echenique. Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons// Rep. Prog. Phys. 2007. Vol. 70. P. 1 – 87.
4. S.I. Bozhevolnyi. Plasmonics Nanoguides and Circuits – Singapore: Pan Stanford Publishing. 2008. – 452 p.

5. Латышев А.В., Сулейманова С.Ш. Краевая задача Римана в проблеме о колебаниях плазмы с равновесным распределением Ферми-Дирака// Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С.40 – 50.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Плазма в высокочастотном электрическом поле с зеркальным условием на границе// Известия РАН. Сер. МЖГ. 2006. № 1. С. 165 – 177.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЫ ПРИ ОПИСАНИИ СКИН-ЭФФЕКТА С ПОМОЩЬЮ РЯДА НЕЙМАНА

Зарочинцева М.А., Юшканов А.А.

Московский государственный областной университет
zorro-m@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

Аннотация

Рассмотрена постановка задачи о скин-эффекте в металле с использованием ряда Неймана. Рассматривается подход, учитывающий наличие дискретной моды. Проведен анализ влияния учета дискретной моды на структуру ряда, описывающего электрическое поле в металле и импеданс на границе.

Ключевые слова: скин-эффект, коэффициент зеркальности, кинетическое уравнение, дискретная мода

Задача о скин-эффекте привлекает к себе внимание уже значительное время [1 - 3]. Это связано как с практической важностью проблемы, так и с тонкими моментами в ее теоретическом описании. Скин-эффект оказывает определяющее влияние на целый ряд физических процессов, включающих в себя взаимодействие электромагнитных волн с веществом [4]. В последнее время исследуется влияние скин-эффекта на эффект Казимира, учитывающий влияние свойств физического вакуума на взаимодействие макроскопических тел [5].

Будем рассматривать линейно поляризованную электромагнитную волну, падающую перпендикулярно на плоскую границу металла. Направим ось x перпендикулярно поверхности металла по направлению вглубь металла. Начало координат возьмем на поверхности металла. Ось y направим вдоль направления электрического поля электромагнитной волны. Напряженность электрического поля волны обозначим через E .

Будем считать, что величина напряженности электрического поля достаточно мала, что бы было допустимо линейное приближение. Условие линейности соответствует требованию, чтобы за характерное время (то есть время свободного пробега электронов или период электромагнитной волны) энергия, приобретаемая электроном при движении в поле, была много меньше, чем характерная энергия электрона, то есть энергия Ферми (в случае невырожденного Ферми-газа в качестве характерной энергии выступает тепловая энергия электрона).

Будем искать функцию распределения электронов в металле в виде

$$f = f_0(1 + \hbar v_y e^{-i\omega t} \delta(v - v_F)). \quad (1)$$

Здесь f_0 – равновесная функция Ферми-Дирака, $\hbar$ – линейная поправка, ω – частота электромагнитной волны, v – скорость, v_F – скорость Ферми, $\delta(x)$ – дельта-функция. Предполагается, что распределение электронов носит изотропный характер.

Будем предполагать, что электроны рассеиваются на поверхности согласно зеркально-диффузному закону с коэффициентом зеркальности q . Коэффициент зеркальности q соответствует вероятности для электрона при столкновении с поверхностью отразиться зеркально. Коэффициент зеркальности меняется в пределах $0 < q < 1$. Величину $1 - q$ называют коэффициентом диффузности. Она описывает вероятности для электрона отразиться от поверхности металла диффузно. Таким образом на границе металла (при $x=0$) имеет место следующее соотношение

$$f(x=0, v_x, v_y, v_z)_{v_x>0} = (1 - q)f_0 + qf(x=0, -v_x, v_y, v_z)_{v_x<0}. \quad (2)$$

В настоящее время имеются аналитические решения задачи о скин-эффекте для случая зеркального ($q=1$) и диффузного ($q=0$) рассеяния электронов на поверхности металла [1,2]. В то же время реальные значения коэффициента зеркальности q как правило далеки от предельных значений $q=1$ и $q=0$. Для общего случая зеркально-диффузного рассеяния было получено решение в виде ряда Неймана [6].

Линеаризованное кинетическое уравнение на функцию распределения h с учетом граничных условий может быть записано в виде [6]

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = e + \mu(1 - q)h(-\text{sign}(\mu)\epsilon, \mu)\text{sign}(-\mu)\delta(x_1). \quad (3)$$

Здесь $\mu = v_x/v_F$, e – безразмерная напряженность электрического поля ($e(x) = E(x)/E(0)$), $\text{sign}(x)$ – функция Хэвисайда, $z_0 = 1 - i\omega/v$, v – частота столкновений, ϵ – бесконечно малая положительная величина. Величина

$x_1 = x v / v_F$ – безразмерная координата. В дальнейшем индекс 1 у величины x_1 будем опускать.

Уравнение на поле при этом имеет следующий вид

$$\frac{d^2 e}{dx^2} + \left(\frac{\omega v_F}{c v} \right)^2 e = -i \alpha \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) h(x, \mu) d\mu + 2e'(0) \delta(x). \quad (4)$$

Здесь c – скорость света, α – параметр, описывающий степень аномальности скин-эффекта. При малых значениях α скин-эффект называется нормальным. При больших значениях α скин-эффект называется аномальным. Для описания нормального скин-эффекта достаточно использовать уравнения макроскопической электродинамики. В случае аномального скин-эффекта ситуация становится гораздо сложнее. Для его описания необходимо использовать уравнения физической кинетики.

Величина $e'(0)$ – производная электрического поля на поверхности при $x > 0$, то есть

$$e'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} e'(x) \quad (5)$$

Второе слагаемое в уравнении на электрическое поле соответствует току смещения. Часто при рассмотрении проблемы этим слагаемым пренебрегают [2].

Решение приведенных уравнений можно искать методом разложения в ряд Неймана по коэффициенту диффузности $(1-q)$ [6].

Однако данный ряд сходится достаточно медленно. В то же время для других задач кинетической теории с учетом кинетических граничных условий показано, что учет дискретной моды кинетического уравнения позволяет существенно ускорить сходимость ряда Неймана [7]. Далее рассмотрим, как идею учета дискретной моды кинетического уравнения можно использовать при решении задачи о скин-эффекте.

Все частные решения рассмотренной задачи можно представить в виде суммы решений, отвечающих дискретному e_d и непрерывному e_c спектру [3]

$$e(x) = e_c(x) + e_d(x). \quad (6)$$

При этом

$$e_d(x) = A \exp(i k_0 \operatorname{sign}(x) x), \operatorname{Im}(k_0) > 0. \quad (7)$$

Здесь k_0 определяется как корень дисперсионной функции задачи [2]. Знак k_0 определяется требованием затухания решения по мере удаления от поверхности металла (то есть в плюс бесконечности). При этом величина A должна определяться из решения задачи.

Анализ дискретной моды и способов нахождения величины k_0 в задаче о скин-эффекте приведен в [9].

Решению дискретного спектра e_c для поля соответствует решения для функции распределения h_c .

Для определения функций e_c и h_c непрерывного спектра может быть выписана следующая система уравнений, состоящая из кинетического уравнения и уравнения на электрическое поле.

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + z_0 h_c(x, \mu) = e_c + \mu(1-q)h(-\text{sign}(\mu)\epsilon, \mu) \text{sign}(-\mu)\delta(x) - \frac{z_0(1-q) - ik_0|\mu|(1+q)}{z_0^2 + k_0^2 \mu^2} A \delta(x)$$

(8)

$$\frac{d^2 e_c}{dx^2} + \left(\frac{\omega v_F}{cv}\right)^2 e_c = -i\alpha \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) h_c(x, \mu) d\mu + 2(e'(0) - ik_0 A) \delta(x).$$

(9)

Решение данной системы уравнений можно искать в виде разложения в ряд Неймана по коэффициенту диффузности $(1-q)$. Наличие дискретной моды приводит к дополнительному требованию на аналитические свойства полученного решения. Из этого требования возникает дополнительное условие на константу A , которая описывает вклад дискретной моды.

Подобный подход позволяет с самого начала учесть наличие дискретной моды. Разложение ведется только по непрерывному спектру. Например, в случае так называемого нормального скин-эффекта дискретная мода полностью определяет решение задачи и вкладом непрерывного спектра можно пренебречь. В случае аномального скин-эффекта это уже не так, но вклад дискретной моды составляет существенную часть [3] и ее непосредственный учет представляется весьма желательным.

Для получения решения удобно воспользоваться разложением функции распределения h_c и поля e_c в виде интеграла Фурье [6]. При этом слагаемые с дельта-функцией в приведенных уравнениях выступают в качестве неоднородных членов. Так что требуется найти решение системы неоднородных уравнений.

Дельта-функцию $\delta(x)$ можно представить в виде следующего интегрального представления

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk. \quad (10)$$

Конечной целью является определение импеданса Z [2]

$$Z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{E(0)}{E'(0_+)} \quad (11)$$

как функции коэффициента q для различных значений параметра аномальности α .

Именно величина импеданса Z определяет характер взаимодействия электромагнитного излучения с металлической поверхностью.

Литература

1. Reuter G.E.H., Sondheimer E.H. *Theory of the anomalous skin effect in metals*. // Proc. Roy. Soc. v. A 195. 1948.
2. Абрикосов А.А. *Основы теории металла*. // М.: Наука. 1977.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Структура электрического поля в задаче о скин-эффекте*. // Физика Твердого Тела. т.51. No. 4. с. 630 - 636. 2009.
4. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. *Основы электродинамики плазмы*. // М.: Высшая школа. 1978.
5. Esquivel R., Svetovoy V. B. *Correction to the Casimir force due to the anomalous skin effect*. // Phys.Rev. A. v.69. p. 062102. 2004.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Решение задачи о скин-эффекте с произвольным коэффициентом зеркальности*. // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. т.49. No. 9. с. 137 - 151. 2009.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Новый метод решения граничных задач кинетической теории*. // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. т.52. No. 3. с. 539 - 552. 2012.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Аналитические решения в теории скин-эффекта*. // М.: МГОУ. 2008.

СЛОЙ СРЕДЫ С ЗЕРКАЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИМПЕДАНСЫ

Зверев Н.В.

Московский государственный областной университет, г. Москва
zverev_nv@mail.ru

Аннотация

Рассмотрен плоский слой однородной среды с зеркально-симметричной функцией диэлектрического отклика. Исследованы плоские монохроматические электромагнитные Р- и S-волны внутри данного слоя

среды. С помощью разложения величин электромагнитных волн в ряды Фурье вычислены поверхностные импедансы этого слоя среды для чётных и нечётных мод указанных волн.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость, пространственная дисперсия, поверхностный импеданс

В последнее время вследствие большой популярности изучения наноматериалов большой интерес представляет исследование взаимодействия электромагнитного излучения с системами, имеющими размеры порядков от нанометра до микрометра. При изучении веществ обычных размеров часто не принимают во внимание пространственную дисперсию веществ, т.е. зависимость диэлектрической проницаемости от волнового вектора [1]. Это вызвано тем, что отклик среды на излучение отличен от нуля лишь на расстояниях, имеющих порядок размеров атомов или молекул. Однако при исследовании объектов размерами от нанометра до микрометра отклик среды играет существенную роль, и значит, пространственная дисперсия должна быть принята во внимание. Это характерно для тонких металлических плёнок [2 – 4], а также в случае органических макромолекул или полимеров.

Рассмотрим плоский слой тонкой однородной изотропной немагнитной среды толщиной d . Систему координат $OXYZ$ выберем так, что данный слой находится внутри области $0 < z < d$. Тогда внутри этой области электрическое смещение $\mathbf{D}$ в координатном виде выглядит в системе СИ следующим образом (см. также [1]):

$$\begin{aligned} D_\alpha(x, y, z, t) = & \varepsilon_0 E_\alpha(x, y, z, t) + \\ & + \varepsilon_0 \int_0^d \int_{-\infty}^t \sum_\beta f_{\alpha\beta}(x - x', y - y'; z, z'; t - t') \times \\ & \times E_\beta(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt'. \end{aligned} \quad (1)$$

При наличии тока проводимости этот ток учтён в смещении $\mathbf{D}$. В данной формуле ε_0 – электрическая постоянная в системе СИ. Интегрирование по координатам x' и y' выполняется от $-\infty$ до $+\infty$, а индексы α и β принимают значения x, y, z .

В формуле (1) функция $f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t)$ – функция диэлектрического отклика среды в плоском слое $0 < z < d$. Эта функция обладает зеркальной симметрией относительно границ слоя $z = 0$ и $z = d$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ g_{\alpha\beta}(x, y, z - z' + 2md, t) + \\ & + g_{\alpha\beta}(x, y, z + z' + 2md, t) \}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ – функция диэлектрического отклика однородной среды во всём бесконечном пространстве. Зеркальная симметрия представляет собой всевозможные отражения точки с координатой z' относительно

плоскостей $z = 0$ и $z = d$, приводящие к координатам $\pm z' - 2md$. Такая симметрия возникает вследствие зеркальных отражений от границ слоя электронов и ионов среды [2 – 5], или упругих волн и возбуждений атомов.

Фурье-образ функции $g_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$ приводит к тензору диэлектрической проницаемости среды во всём пространстве [1]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \iiint \int_0^{+\infty} g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} dx dy dz dt, \quad (3)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, а интегрирование по координатам x, y, z выполняется от $-\infty$ до $+\infty$. Данный тензор соответствует монохроматической волне с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. В случае изотропной и не оптически активной среды этот тензор имеет структуру [1, 5]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \varepsilon_{tr}(\omega, k) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \varepsilon_l(\omega, k), \quad (4)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, а функции $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_{tr}(\omega, k)$ – продольная и поперечная диэлектрические проницаемости среды соответственно.

Уравнения Максвелла и материальное уравнение для магнитного поля внутри рассматриваемого слоя среды $0 < z < d$ имеют вид:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (5)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная в СИ, а ток проводимости в случае проводящей среды вынесен в электрическое смещение $\mathbf{D}$.

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну. Считаем, что данная волна распространяется в плоскости XZ . В случае Р-волны (напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ лежит в плоскости распространения XZ) внутри слоя среды $0 < z < d$ справедливы соотношения:

$$E_x = e^{i(k_x x - \omega t)} E_x^{(j)}(z), \quad E_z = e^{i(k_x x - \omega t)} E_z^{(j)}(z), \quad H_y = e^{i(k_x x - \omega t)} H_y^{(j)}(z). \quad (6)$$

А для S-волны (напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$ лежит в плоскости распространения XZ) в области слоя $0 < z < d$ имеют место формулы:

$$H_x = e^{i(k_x x - \omega t)} H_x^{(j)}(z), \quad H_z = e^{i(k_x x - \omega t)} H_z^{(j)}(z), \quad E_y = e^{i(k_x x - \omega t)} E_y^{(j)}(z). \quad (7)$$

Здесь индекс j обозначает чётную или нечётную моды.

Подставляя (6) или (7) в (1) и (5), получим внутри слоя $0 < z < d$ систему уравнений в случае Р-волны:

$$\begin{cases} \frac{dE_x^{(j)}}{dz} - ik_x E_z^{(j)} = i\omega\mu_0 H_y^{(j)}, \\ ik_x H_y^{(j)} = -i\omega D_z^{(j)}, \\ -\frac{dH_y^{(j)}}{dz} = -i\omega D_x^{(j)}, \end{cases} \quad (8)$$

а в случае S-волны – систему уравнений

$$\begin{cases} ik_x E_y^{(j)} = i\omega\mu_0 H_z^{(j)}, \\ \frac{dE_y^{(j)}}{dz} = -i\omega\mu_0 H_x^{(j)}, \\ \frac{dH_x^{(j)}}{dz} - ik_x H_z^{(j)} = -i\omega D_y^{(j)}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь в случае Р-волны ($\alpha = x, z$)

$$D_\alpha^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_\alpha^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d \sum_{\beta=x,z} F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') E_\beta^{(j)}(z') dz', \quad (10)$$

а для S-волны:

$$D_y^{(j)}(z) = \varepsilon_0 E_y^{(j)}(z) + \varepsilon_0 \int_0^d F_{yy}(\omega, k_x, z, z') E_y^{(j)}(z') dz'. \quad (11)$$

В данных формулах введена функция:

$$F_{\alpha\beta}(\omega, k_x, z, z') = \iint_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{\alpha\beta}(x, y; z, z'; t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dy dt. \quad (12)$$

При этом интегрирование по x и y выполняется от $-\infty$ до $+\infty$.

В силу зеркальной симметрии (2) функции $f_{\alpha\beta}$, удобно продолжить функции $E_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ следующим образом:

$$E_\alpha^{(j)}(-z) = E_\alpha^{(j)}(z), \quad (13)$$

где $0 < z < d$, и $\alpha = x, z$ для Р-волны, а для S-волны $\alpha = y$. Тогда функции $H_\alpha^{(j)}(z)$ и $D_\alpha^{(j)}(z)$ также продолжены на область $-d < z < 0$ по формулам (8) и (10) в случае Р-волны или (9) и (11) для S-волны.

После продолжения функций $E_\alpha^{(j)}(z)$, $H_\alpha^{(j)}(z)$ и $D_\alpha^{(j)}(z)$ на область $-d < z < 0$ разложим эти функции в ряд Фурье в области $-d < z < d$:

$$A_\alpha^{(j)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} e^{i\pi n z / d}. \quad (14)$$

Здесь коэффициенты Фурье

$$\tilde{A}_{\alpha n}^{(j)} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d A_\alpha^{(j)}(z) e^{-i\pi n z / d} dz, \quad (15)$$

а A обозначает функции E , D или H . Кроме того, рассмотрим чётные и нечётные моды электромагнитной волны внутри слоя $0 < z < d$, согласующиеся с уравнениями систем (8) и (9). Для Р-волны эти моды задаются соотношениями ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_x^{(j)}(z), \\ E_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} E_z^{(j)}(z), \\ H_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_y^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (16)$$

А для S-волны эти моды выглядят так ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} E_y^{(j)}(d-z) &= (-1)^j E_y^{(j)}(z), \\ H_x^{(j)}(d-z) &= (-1)^{j+1} H_x^{(j)}(z), \\ H_z^{(j)}(d-z) &= (-1)^j H_z^{(j)}(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда системы уравнений (8) и (9), записанные в коэффициентах Фурье (15), после вычислений с учётом (13), (16) и (17) принимают вид для Р-волны:

$$\begin{cases} \frac{i\pi}{d} \tilde{E}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{E}_{zn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{yn}^{(j)}, \\ ik_x \tilde{H}_{yn}^{(j)} = -i\omega \tilde{D}_{zn}^{(j)}, \\ -\frac{i\pi}{d} \tilde{H}_{yn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{xn}^{(j)}, \end{cases} \quad (18)$$

и для S-волны:

$$\begin{cases} ik_x \tilde{E}_{yn}^{(j)} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_{zn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi}{d} \tilde{E}_{yn}^{(j)} = -i\omega\mu_0 \tilde{H}_{xn}^{(j)}, \\ \frac{i\pi}{d} \tilde{H}_{xn}^{(j)} - ik_x \tilde{H}_{zn}^{(j)} + \frac{(-1)^{n+j} + 1}{i\omega\mu_0 d} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0) = -i\omega \tilde{D}_{yn}^{(j)}. \end{cases} \quad (19)$$

Далее, подставим разложение Фурье (14) для E и функцию (12) в формулы (10) и (11). Затем найдём коэффициенты Фурье левых частей этих формул согласно (15) для D и учтём формулы (2) и (3). В результате после получим для Р-волны:

$$\tilde{D}_{\alpha n}^{(j)} = \varepsilon_0 \sum_{\beta=x,z} \varepsilon_{\alpha\beta n} \tilde{E}_{\beta n}^{(j)} \quad (\alpha = x, z), \quad (20)$$

и для S-волны:

$$\tilde{D}_{yn}^{(j)} = \varepsilon_0 \varepsilon_{yy n} \tilde{E}_{yn}^{(j)}. \quad (21)$$

Здесь обозначено:

$$\varepsilon_{\alpha\beta n} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k_x, 0, \pi/d). \quad (22)$$

Поверхностный импеданс моды плоской монохроматической волны на поверхности слоя $z = 0$, предполагаемой нами поверхностью падения волны, определяем в случае Р-волны и S-волны формулой

$$Z_P^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_x^{(j)}(+0)}{H_y^{(j)}(+0)}, \quad Z_S^{(j)} = \frac{1}{Z_0} \frac{E_y^{(j)}(+0)}{H_x^{(j)}(+0)}. \quad (23)$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – импеданс вакуума в системе СИ.

Подставим (20) в (18), а (21) – в (19) и выполним вычисления, учитывая обозначения (22) и структуру (4) тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ диэлектрической проницаемости. Также используем формулу

$$E_\alpha^{(j)}(+0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{\alpha n}^{(j)}, \quad (24)$$

следующую из разложения E в ряд Фурье (14), и следующие из (8) или (9) формулы для Р-волны и для S-волны:

$$H_y^{(j)}(+0) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_x^{(j)}}{dz} (+0), \quad H_x^{(j)}(+0) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_y^{(j)}}{dz} (+0). \quad (25)$$

В результате из системы (18) или (19) по формуле (24) вычислим значения $E_x^{(j)}(+0)$ или $E_y^{(j)}(+0)$. Подставляя эти значения и формулы (25) в определения импедансов (23), получим окончательные выражения для поверхностных импедансов плоской монохроматической Р- или S-волны:

$$\begin{aligned} Z_P^{(j)} &= \frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{k_n^2} \left\{ \frac{k_x^2}{\omega^2 \varepsilon_l(\omega, k_n)} + \frac{(\pi n/d)^2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2} \right\}, \\ Z_S^{(j)} &= -\frac{2ic\omega}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+j} + 1]/2}{\omega^2 \varepsilon_{tr}(\omega, k_n) - c^2 k_n^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $j=1, 2$; $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света в вакууме, и $k_n = \sqrt{k_x^2 + (\pi n/d)^2}$.

Формулы (26) для поверхностных импедансов совпадают с формулами для импедансов, полученными в работах [2 – 4] для плоского слоя электронной плазмы в случае зеркального отражения электронов от поверхностей слоя. Из этих формул видно, что для нечётной моды ($j=1$) суммирование ведётся по всем нечётным $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, а в случае чётной моды ($j=2$) – по всем чётным $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$.

Формулы (26) справедливы и для однородной изотропной среды без пространственной дисперсии, когда в (2) функция

$$g_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \delta_{\alpha\beta} g(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Полученные выражения для поверхностных импедансов стоит использовать для исследования взаимодействия электромагнитных волн с плоскими тонкими слоями веществ, обладающих пространственной дисперсией и имеющих зеркально-симметричную диэлектрическую функцию отклика относительно границ слоя. Данные выражения пригодны и для изучения задач возникновения и распространения излучения в таких слоях.

Автор благодарен профессору Юшканову А.А. за плодотворные обсуждения и активную поддержку. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ МК-7359-2016-9 и РФФИ № 14-07-90009 Бел_а, 14-47-03608 р_центр_а.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика в 10 томах. Том 8. Электродинамика сплошных сред. Учебное пособие. 4-е изд., стереотипное.* М.: Физматлит, 2005. 652 с.
2. Kliever K.L. and Fuchs R. *Anomalous Skin Effect for Specular Electron Scattering and Optical Experiments at Non-Normal Angles of Incidence.* // Phys. Rev. 1968. V. 172. No. 3. P. 607–624.
3. Jones W.E., Kliever K.L. and Fuchs R. *Nonlocal Theory of the Optical Properties of Thin Metallic Films.* // Phys. Rev. 1969. V. 178. No. 3. P. 1201–1203.

4. Kliewer K.L. and Fuchs R. *Surface Plasmons in a Semi-Infinite Free Electron gas.* // Phys. Rev. B. 1971. V. 3. No. 7. P. 2270–2278.
5. Кондратенко А.Н. *Проникновение поля в плазму.* М.: Атомиздат, 1979.232с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Парёнкина В.И.

Московский государственный областной университет
v.paryonkina@gmail.com

Аннотация

На практике достаточно часто приходится иметь дело с нестационарными уравнениями с частными производными, то есть уравнениями, которые описывают нестационарные (зависящие от времени) процессы (уравнение теплопроводности, уравнение диффузии, волновое уравнение и другие). При применении операционного метода к дифференциальным уравнениям с частными производными мы получаем изображающее уравнение, представляющее собой обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение такого уравнения является более простой задачей, по сравнению с решением уравнения с частными производными. Так же мы встречаемся еще с одним преимуществом: начальные условия входят в изображающее уравнение сами собой и поэтому учитываются автоматически. Более того, преобразование Лапласа обладает очень важным свойством: изображения, получаемые в результате этого преобразования, представляют собой аналитические функции, к которым можно применить методы теории функций комплексного переменного. В данной статье рассмотрим решение дифференциального уравнения теплопроводности для случая полуограниченного тела с помощью преобразования Лапласа

Ключевые слова: преобразование Лапласа, оригинал, изображение, уравнение теплопроводности

Во многих процессах теплообмена внутри тела действуют источники тепла. Эти источники могут быть положительными (например, нагревание тела электрическим током, выделение теплоты испарения при увлажнении тела паром) или отрицательными (испарение влаги во влажном теле при его нагревании). Поэтому задач теплопроводности при наличии источников тепла очень много.

Рассмотрим полуограниченное тело. Пусть имеется тонкий полуограниченный стержень с тепловой изоляцией боковой поверхности при температуре T_0 . В начальный момент времени неизолитованный конец принимает температуру $T_c > T_0$, которая остается постоянной на протяжении всего процесса теплообмена (граничное условие первого рода). Внутри стержня действует источник тепла, удельная мощность которого ω (Вт/м³). Найдем распределение температуры по длине стержня и удельный расход тепла в любой момент времени [2].

Поставленную задачу математически можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega}{c\rho}, \quad (\tau > 0; 0 < x < \infty); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\infty, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$T(0, \tau) = T_c = \text{const}. \quad (4)$$

Решение задачи при $\omega = \text{const}$. Применив преобразование Лапласа, получим:

$$T_L''(x, s) - \frac{s}{a} T_L(x, s) + \frac{T_0}{a} + \frac{\omega}{sac\rho} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$T_L''(x, s) - \frac{s}{a} [T_L(x, s) - \frac{T_0}{s} - \frac{\omega}{s^2c\rho}] = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) можно записать в двух видах:

$$T_L(x, s) - \frac{T_0}{s} - \frac{\omega}{s^2c\rho} = A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x = A_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x}. \quad (7)$$

Граничные условия (3) и (4) для изображения можем переписать в виде:

$$T_L'(\infty, s) = 0, \quad (8)$$

$$T_L(0, s) = \frac{T_c}{s}. \quad (9)$$

Из условия (8) следует $A_1 = 0$. Найдем постоянную B_1 из граничного условия (9):

$$\frac{T_c}{s} - \frac{T_0}{s} - \frac{\omega}{s^2c\rho} = B_1. \quad (10)$$

Решение (7) принимает вид

$$T_L(x, s) - \frac{T_0}{s} = \frac{\omega}{s^2c\rho} + \frac{(T_c - T_0)}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x} - \frac{\omega}{s^2c\rho} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x}. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что оно состоит из трех слагаемых, каждое из которых является табличным изображением с соответствующим оригиналом.

Окончательно решение нашей задачи запишем в виде

$$\theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{\omega}{c\rho(T_c - T_0)} \tau - \frac{\omega}{c\rho(T_c - T_0)} 4\pi^2 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}. \quad (12)$$

Величина $\frac{\omega\tau}{c\rho(T_c - T_0)}$ является безразмерной величиной; она показывает отношение количества тепла, выделяемого источником тепла за данный промежуток времени в единице объема, к тому количеству тепла, которое необходимо сообщить единице объема тела при нагревании его от начальной температуры до температуры среды. Эту величину можно представить как произведение числа Фурье и нового критерия, названного нами критерием Померанцева:

$$\frac{\omega\tau}{c\rho(T_c - T_0)} = Fo_x \frac{\omega x^2}{\lambda(T_c - T_0)} = Fo_x Po_x, \quad (13)$$

где $Fo_x = \frac{a\tau}{x^2}$ - число Фурье для координаты x , $Po_x = \frac{\omega x^2}{\lambda(T_c - T_0)}$ - критерий

Померанцева. Физический смысл критерия Померанцева состоит в том, что он показывает отношение количества тепла, выделяемого источником в единицу времени в объеме x (объем параллелепипеда, основание которого 1 м^2 , а высота x), к максимально возможному количеству тепла, передаваемого теплопроводностью через единицу площади в единицу времени на расстоянии x от конца стержня (при условии, что температура в данной точке равна начальной, а распределение температуры происходит по линейному закону) [5].

Если источник тепла отсутствует ($Po_x = 0$), то из решения (12) получаем обычное решение для полуограниченного тела при граничном условии первого рода [8].

Плотность теплового потока q через поверхность тела найдем по соотношению

$$q = -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x}. \quad (14)$$

Из соотношения (11) имеем

$$L[q(\tau)] = \frac{\lambda(T_c - T_0)}{\sqrt{as}} - \frac{\lambda\omega}{c\rho s\sqrt{as}}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим

$$q = (T_c - T_0) \sqrt{\frac{\lambda c \rho}{\pi \tau}} - 2\omega \sqrt{\frac{a \tau}{\pi}}. \quad (15)$$

Из соотношения (15) видно, что при малых значениях времени нагревание происходит в основном путем теплопроводности через изолированный конец стержня. Для больших значений времени нагревание происходит за счет источника тепла, а с открытого конца при этом наблюдаются теплотери в окружающую среду (второй член соотношения (15) становится больше первого).

Решение задачи при $\omega = \omega_0 e^{-kx}$. Источник тепла является экспоненциальной функцией координаты $\omega_0 e^{-kx}$, где ω_0 - максимальная удельная мощность источника, k - постоянная. Начальные и граничные условия остаются прежними. Для упрощения расчета положим $T_0 = 0$.

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$T_L''(x, s) - \frac{s}{a} T_L(x, s) + \frac{\omega_0}{sc\rho a} e^{-kx} = 0. \quad (16)$$

Это неоднородное уравнение может быть легко решено так как известно его общее решение и легко определить одно частное решение вида Ae^{-kx} . Однако, имея ввиду решение более сложных задач, применим к уравнению (16) синус-преобразование Фурье [5].

Обозначая

$$T_{Ls}(s, p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_L(s, x) \sin pxdx \quad (17)$$

и используя граничные условия уравнения (16)

$$T_{Ls}(s, 0) = \frac{T_c}{s}; \quad T_L'(s, \infty) = 0, \quad (18)$$

Получим решение уравнения (16) в виде

$$T_{Ls}(s, p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{p^2 + \frac{s}{a}} \left\{ \frac{T_c}{s} + \frac{\omega_0}{\lambda s} \frac{1}{p^2 + k^2} \right\}. \quad (19)$$

С помощью таблиц определенных интегралов и выполнения обратного синус-преобразования Фурье получим

$$T_L(s, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_{Ls}(s, p) \sin pxdx = \frac{T_c}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} + \frac{\omega_0}{\lambda s} \frac{e^{-kx} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}}{k^2 - \frac{s}{a}}. \quad (20)$$

Отсюда, используя таблицы изображений, окончательно имеем

$$\theta = \frac{T(x, \tau)}{T_c} = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\omega_0}{\lambda k^2 T_c} \left[\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - e^{-kx} - \frac{1}{2} e^{k^2 a \tau - kx} \operatorname{erfc}(k\sqrt{a\tau} - \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{k^2 a \tau + kx} \operatorname{erfc}(k\sqrt{a\tau} + \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}) \right] \quad (21)$$

Литература

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1969. - 288 с.
2. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Наука, 1985. - 312 с.
3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1965. - 288 с.

4. Зайцев В. Ф. Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности.- М.: Высшая школа, 1967.- 600 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2.- М.: Наука, 1985.- 560 с.
7. Эйдерман В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления.- М.: Физматлит, 2002.- 256 с.
8. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена.- М.: Госэнергоиздат, 1961.- 680 с.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ГЕОМЕТРИИ

Балабанова И.А., Кузьмин М.К., Серегина Л.С.

Московский государственный областной университет
darksy5758@yandex.ru, lesir179@infoline.su, seregina.lyudmila.97@mail.ru

Аннотация

В данной статье исследуются условные экстремумы, рассмотрены необходимые и достаточные условия, продемонстрировано применение полученных результатов для решения различных задач. Данная тема является актуальной и используется в частности в нелинейном программировании, например, при решении задач по экономике, и в оптимизации качества кодирования аудио и видеоинформации, в физике и геометрии.

Ключевые слова: условный экстремум, необходимое и достаточное условия, метод множителей Лагранжа, экстремальная задача, задача Аполлония.

Пусть необходимо найти экстремум функции

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

зависящей от двух переменных, где они связаны уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Пусть функция $y = y(x)$ определяется уравнением (2). Тогда, подставляя ее в (1), найдем следующую функцию

$$z = f(x, y(x)), \tag{3}$$

зависящую от переменной x . Таким образом, отыскание экстремума функции двух переменных сводится к отысканию экстремума функции одной переменной.

Рассмотрим необходимое условие. Предположим, что $F(x, y)$ дифференцируема и $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Тогда $y'_x = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$.

Дифференцируя как сложную функцию (3) и приравнявая ее к нулю, получаем $y'_x = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$.

Сравнивая выражения для y'_x , введем вспомогательную неизвестную

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} \text{ или } \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{F'_x}{F'_y} = -\lambda$$

и получим систему

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) и уравнение (2) образуют вместе систему трех уравнений, зависящих от переменных x, y, z .

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Данная система уравнений – необходимое условие.

Введем вспомогательную функцию – функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Далее рассмотрим достаточное условие. Допустим, что функция (3) определена и в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка.

$$\Delta(M_0, \lambda_0) = - \begin{vmatrix} 0 & F'_x(M_0) & F'_y(M_0) \\ F'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0) & L''_{xy}(M_0) \\ F'_y(M_0) & L''_{yx}(M_0) & L''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \quad (6)$$

Если $\Delta(M_0, \lambda_0) < 0$, то функция $z = f(x, y(x))$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум.

Если $\Delta(M_0, \lambda_0) > 0$, то функция $z = f(x, y(x))$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный минимум.

Если $\Delta(M_0, \lambda_0) = 0$, то функция $z = f(x, y(x))$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ может иметь условный экстремум, а может не иметь.

Продифференцируем $F(x, y)$ по соответствующим переменным в точке M_0 . В соответствии с формулой полного дифференциала и уравнением связи $F'(M_0) = 0$ из $F'_x(M_0)dx + F'_y(M_0)dy = 0$ следует $dy = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}dx$.

Заметим, что $L''_{xy}(M_0) = L''_{yx}(M_0)$, и найдем двойной дифференциал функции $L(x, y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} d^2L &= [L'(M_0)]^2 = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2 \cdot L''_{xy}(M_0)dx dy + L''_{yy}(M_0)dy^2 = \\ &= \left[[F'_x(M_0)]^2 \cdot L''_{xy}(M_0) - 2 \cdot F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0)dy \cdot L''_{xy}(M_0) + \right. \\ &\quad \left. + [F'_y(M_0)]^2 \cdot L''_{xx}(M_0) \right] \frac{dx^2}{d^2F_y} \end{aligned}$$

Обозначим

$$[F'_x(M_0)]^2 \cdot L''_{xy}(M_0) - 2 \cdot F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0) dy \cdot L''_{xy}(M_0) + [F'_y(M_0)]^2 \cdot L''_{xx}(M_0). \quad (7)$$

Разложим определитель (6) по первой строке

$$\begin{aligned} \Delta(M_0, \lambda_0) &= - \begin{vmatrix} 0 & F'_x(M_0) & F'_y(M_0) \\ F'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0) & L''_{xy}(M_0) \\ F'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0) & L''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \\ &= F'_x(M_0) \begin{vmatrix} F'_x(M_0) & L''_{xy}(M_0) \\ F'_y(M_0) & L''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} - F'_y(M_0) \begin{vmatrix} F'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0) \\ F'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0) \end{vmatrix} = \\ &= [F'_x(M_0)]^2 \cdot L''_{xy}(M_0) - F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0) dy \cdot L''_{xy}(M_0) - \\ &- F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0) dy \cdot L''_{xy}(M_0) + [F'_y(M_0)]^2 \cdot L''_{xx}(M_0) = \\ &= [F'_x(M_0)]^2 \cdot L''_{xy}(M_0) - 2 \cdot F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0) dy \cdot L''_{xy}(M_0) + [F'_y(M_0)]^2 \cdot L''_{xx}(M_0) \end{aligned}$$

и обозначим

$$[F'_x(M_0)]^2 \cdot L''_{xy}(M_0) - 2 \cdot F'_x(M_0) \cdot F'_y(M_0) dy \cdot L''_{xy}(M_0) + [F'_y(M_0)]^2 \cdot L''_{xx}(M_0). \quad (8)$$

Сравним формулы (7) и (8) и заметим, что знак второго дифференциала совпадает со знаком определителя.

Задача вариационного исчисления на условный экстремум, в которой предлагается вычислить функции, доставляющие экстремум функционала, была поставлена Лагранжем. Для решения такой задачи Лагранж использовал правило множителей, в соответствии с которым составляется функция Лагранжа. На основе функции Лагранжа можно получить численно-аналитическое решение задачи.

Аналитический метод решения экстремальных задач предполагает их формализацию, состоящую в осуществлении перевода задачи с «содержательного» языка на формальный язык анализа.

Введем некоторые обозначения. В теории экстремальных задач числовые функции часто называют функционалами. Через $\bar{\mathbb{R}}$ обозначается совокупность всех вещественных чисел, пополненная значениями « $-\infty$ » и « $+\infty$ », то есть $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Назовем множество X классом допустимых элементов, имеющим подмножество C . Тогда точки $x \in C$ будут считаться допустимыми по ограничению.

Точно поставленная экстремальная задача включает в себя следующие элементы: функционал $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, определенный на некотором множестве X , и ограничение, т. е. некоторое подмножество $C \subseteq X$.

Тогда задача формулируется так: найти экстремум (т. е. нижнюю или верхнюю грань) функционала f при условии, что $x \in C$. Для такой задачи будет употребляться стандартная запись:

$$f(x) \rightarrow \inf(\sup), \quad x \in C. \quad (9)$$

Таким образом, для точной постановки задачи нужно описать X, f и C .

Если $X = C$, то задача (9) называется задачей без ограничений. Точку x_0 будем называть решением задачи (9), абсолютным минимумом (максимумом), если $f(x) \geq f(x_0)$ (соответственно $f(x) \leq f(x_0)$) для всех $x \in C$.

Заметим, что множество X может быть наделено топологией, т.е. в нем имеет смысл понятие близости элементов. Если X – топологическое пространство, то x_0 называется локальным минимумом, если существует такая окрестность U точки x_0 , что x_0 – решение задачи $f(x) \rightarrow \inf, x \in C \cap U$. Аналогично определяется локальный максимум.

Решение экстремальной задачи будем рассматривать по схеме, диктуемой принципом Лагранжа. Данная схема состоит из шести этапов:

1. Запись формализованной задачи и обсуждение проблемы существования и единственности решения.
2. Составление функции Лагранжа.
3. Применение принципа Лагранжа.
4. Исследование возможности $\lambda_0 = 0$.
5. Нахождение стационарных точек, т.е. решение уравнений, вытекающих из принципа Лагранжа.
6. Исследование стационарных точек, выбор решения и запись ответа.

Рассмотрим по данной схеме задачу Аполлония.

Найти кратчайшее расстояние от точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ до эллипса, задаваемого уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение.

1. Запишем формализацию задачи Аполлония:

$$f_0(x, y) = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 \rightarrow \inf, \quad f_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\left(X = \mathbb{R}^2, \quad C = \left\{ x, y \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right. \right\} \right)$$

Обсудим проблему существования и единственности решения.

Эллипс – ограниченное и замкнутое множество, функция f_0 непрерывна. По свойству функций, непрерывных на замкнутом

ограниченном множестве, решение $M_0 = (x_0, y_0)$ существует. Функции f_0 и f_1 – непрерывно дифференцируемые.

2. Составим функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0((x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2) + \lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

3. Применим принцип Лагранжа:

$$L'_x = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_0(x_0 - \xi_1) + \hat{\lambda}_1 \frac{x_0}{a^2} = 0.$$

$$L'_y = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_0(y_0 - \xi_2) + \hat{\lambda}_1 \frac{y_0}{b^2} = 0.$$

4. Исследуем возможности $\hat{\lambda}_0 = 0$.

Пусть $\hat{\lambda}_0 = 0$, тогда $\hat{\lambda}_1 \neq 0$, так как множители Лагранжа не равны нулю одновременно. Подставим $\hat{\lambda}_0 = 0$ в $L'_x = 0$ и $L'_y = 0$:

$$L'_x = \hat{\lambda}_1 \frac{x_0}{a^2} = 0.$$

$$L'_y = \hat{\lambda}_1 \frac{y_0}{b^2} = 0.$$

Так как $\hat{\lambda}_1 \neq 0$, $a^2 \neq 0$, $b^2 \neq 0$, получим $x_0 = y_0 = 0$. Отсюда $f_1(x_0, y_0) = f_1(0, 0) = \frac{0}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 0 \neq 1$, т.е. точка не лежит на эллипсе и не является искомым решением. Следовательно, $\hat{\lambda}_0 \neq 0$.

Предположим, что $\hat{\lambda}_0 = 1$, и обозначим $\hat{\lambda}_1 = \lambda$.

5. Найдем стационарные точки.

$$(x_0 - \xi_1) + \lambda \frac{x_0}{a^2} = 0, \Leftrightarrow \frac{x_0(a^2 + \lambda)}{a^2} = \xi_1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\xi_1 a^2}{a^2 + \lambda};$$

$$(y_0 - \xi_2) + \lambda \frac{y_0}{b^2} = 0, \Leftrightarrow \frac{y_0(b^2 + \lambda)}{b^2} = \xi_2 \Leftrightarrow y_0 = \frac{\xi_2 b^2}{b^2 + \lambda}.$$

Подставим в уравнения эллипса

$$f_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

найденные x_0, y_0 , получим:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\xi_1^2 a^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{\xi_2^2 b^2}{(b^2 + \lambda)^2} = 1.$$

6. Относительно λ мы получили алгебраическое уравнение четвертой степени. Поэтому число действительных корней уравнения не более четырех, и, значит, число стационарных точек задачи не более четырех.

Для полного решения задачи необходимо решить последнее полученное уравнение, найти λ_1 и соответствующие точки $x(\lambda_1)$, затем подставить эти точки в f_0 и найти наименьшее из полученных чисел.

Рассмотрим по этой же схеме другую оптимизационную задачу из геометрии: вписать в круг прямоугольник наибольшей площади.

Решение.

1. Запишем формализацию задачи.

Пусть радиус заданной окружности равен r , а p – произвольный прямоугольник, вписанный в эту окружность. Изобразим данные фигуры в декартовой прямоугольной системе координат Oxy так, чтобы координатные оси были параллельны сторонам прямоугольника. Обозначим через x и y координаты вершины прямоугольника, лежащей в первом квадранте. Тогда площадь прямоугольника p будет равна $4xy$, а окружность будет задана уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

Запишем математическую модель задачи оптимизации:

$$f_0(x, y) = 4xy \rightarrow \sup, \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2 = r^2,$$

$$(X = \mathbb{R}^2, \quad C = \{x, y | x^2 + y^2 = r^2\}).$$

Обсудим проблему существования и единственности решения.

Круг – ограниченное и замкнутое множество, функция f_0 непрерывна. По свойству функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве, решение $M_0 = (x_0, y_0)$ существует. Функции f_0 и f_1 – непрерывно дифференцируемые.

2. Составим функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 \cdot 4xy + \lambda_1(x^2 + y^2 - r^2).$$

3. Применим принцип Лагранжа:

$$L'_x = 0 \Rightarrow \lambda_0 \cdot 4y_0 + \lambda_1 \cdot 2x_0 = 0,$$

$$L'_y = 0 \Rightarrow \lambda_0 \cdot 4x_0 + \lambda_1 \cdot 2y_0 = 0.$$

4. Исследуем возможности $\lambda_0 = 0$.

Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 \neq 0$, так как множители Лагранжа не равны нулю одновременно. Подставим $\lambda_0 = 0$ в $L'_x = 0$ и $L'_y = 0$:

$$L'_x = \lambda_1 \cdot 2x_0 = 0,$$

$$L'_y = \lambda_1 \cdot 2y_0 = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq 0$, получим $x_0 = y_0 = 0$. Тогда $f_1(x_0, y_0) = f_1(0, 0) = 0 + 0 = 0 = r^2$, т.е. точка лежит внутри круга. При этом точка $M_0 = (0, 0)$ не является искомым решением в связи с тем, что в

окружность нулевого радиуса невозможно вписать прямоугольник. Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$.

Предположим, что $\lambda_0 = 1$, и обозначим $\lambda_1 = \lambda$.

5. Найдем стационарные точки.

$$\begin{cases} L'_x = 4y_0 + \lambda \cdot 2x_0 = 0, \\ L'_y = 4x_0 + \lambda \cdot 2y_0 = 0, \\ L'_\lambda = x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2y_0}{x_0}, \\ \lambda = -\frac{2x_0}{y_0}, \\ x_0^2 + y_0^2 = r^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = y_0^2, \\ x_0^2 = \frac{r^2}{2}, \\ y_0^2 = \frac{r^2}{2}. \end{cases}$$

Из системы получаем четыре стационарные точки:

$$M_1\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right), \lambda_1 = -2 \quad \text{и} \quad M_2\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \lambda_2 = -2, \\ M_3\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right), \lambda_3 = 2 \quad \text{и} \quad M_4\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \lambda_4 = 2.$$

6. Исследование стационарных точек, выбор решения и запись ответа.

Найдем следующие частные производные:

$$f'_{1x} = 2x \quad \text{и} \quad f'_{1y} = 2y, \\ L''_{xx} = L''_{yy} = 2\lambda \quad \text{и} \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 4.$$

Вычислим значения найденных частных производных в стационарных точках:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f'_{1x}(M_1) = r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad f'_{1y}(M_1) = r\sqrt{2}, \\ & L''_{xx}(M_1) = L''_{yy}(M_1) = -4 \quad \text{и} \quad L''_{xy}(M_1) = L''_{yx}(M_1) = 4. \\ 2) \quad & f'_{1x}(M_2) = -r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad f'_{1y}(M_2) = -r\sqrt{2}, \\ & L''_{xx}(M_2) = L''_{yy}(M_2) = -4 \quad \text{и} \quad L''_{xy}(M_2) = L''_{yx}(M_2) = 4. \\ 3) \quad & f'_{1x}(M_3) = -r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad f'_{1y}(M_3) = r\sqrt{2}, \\ & L''_{xx}(M_3) = L''_{yy}(M_3) = 4 \quad \text{и} \quad L''_{xy}(M_3) = L''_{yx}(M_3) = 4. \\ 4) \quad & f'_{1x}(M_4) = r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad f'_{1y}(M_4) = -r\sqrt{2}, \\ & L''_{xx}(M_4) = L''_{yy}(M_4) = 4 \quad \text{и} \quad L''_{xy}(M_4) = L''_{yx}(M_4) = 4. \end{aligned}$$

Вычислим определители по правилу треугольников:

$$\begin{aligned} \Delta(M_1, \lambda_1) &= - \begin{vmatrix} 0 & r\sqrt{2} & r\sqrt{2} \\ r\sqrt{2} & -4 & 4 \\ r\sqrt{2} & 4 & -4 \end{vmatrix} = -(0 + 8r^2 + 8r^2 + 8r^2 - 0 + 8r^2) = -32r^2 < 0 \\ \Delta(M_2, \lambda_2) &= - \begin{vmatrix} 0 & -r\sqrt{2} & -r\sqrt{2} \\ -r\sqrt{2} & 4 & 4 \\ -r\sqrt{2} & 4 & 4 \end{vmatrix} = -(0 + 8r^2 + 8r^2 - 8r^2 - 0 - 8r^2) = 0 \\ \Delta(M_3, \lambda_3) &= - \begin{vmatrix} 0 & -r\sqrt{2} & r\sqrt{2} \\ -r\sqrt{2} & 4 & 4 \\ r\sqrt{2} & 4 & 4 \end{vmatrix} = -(0 - 8r^2 - 8r^2 - 8r^2 - 0 - 8r^2) = 32r^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\Delta(M_4, \lambda_4) = - \begin{vmatrix} 0 & r\sqrt{2} & -r\sqrt{2} \\ r\sqrt{2} & 4 & 4 \\ -r\sqrt{2} & 4 & 4 \end{vmatrix} = -(0 - 8r^2 - 8r^2 - 8r^2 - 0 - 8r^2) = 32r^2 > 0$$

Заметим, что $\Delta(M_3, \lambda_3)$ можно было свести к $\Delta(M_4, \lambda_4)$ по свойству умножения всех элементов одного столбца (строки) определителя на одно и то же число, отличное от нуля.

Согласно теореме, функция $f_0(x, y) = 4xy$ имеет условный максимум в точке M_1, λ_1 и условный минимум в точках M_3, λ_3 и M_4, λ_4 . В точке M_2, λ_2 функция $f_0(x, y)$ может иметь условный экстремум, а может не иметь.

Для решения задачи подставим координаты точки $M_1 \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$ в функцию $f_0(x, y) = 4xy$ и получим, что наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса r , равна $2r^2$.

Заключение

Методы нахождения множителей Лагранжа (с помощью двойного дифференциала и разложения определителя) являются рабочими и взаимозаменяемыми, что было теоретически доказано и рассмотрено посредством примеров. На основе аналитического метода решения экстремальной геометрической задачи был приведен пример решения такой задачи, демонстрирующий применение метода множителей Лагранжа к задачам данного типа.

Литература

1. Долгих В.Я. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и многих переменных. Часть 1. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 559 с.
2. Ильин В.А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1: учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. – 4-е изд. – М.: Издательство ЮРАЙТ, 2016. – 660с. – Серия: Бакалавр. Углубленный курс.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное уравнение. – 2-е изд.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384с.

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Казаков Р.В., Графов Д.А.

Московский государственный областной университет

Аннотация

В работе мы хотим рассказать о некоторых результатах, связанных с представлением функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных.

Ключевые слова: суперпозиция функций, непрерывная функция.

1. Одна из задач знаменитого задачника по анализу Г. Поля, Г. Сеге (см. [1; с.86]) начинается так:

«Существуют ли вообще функции от трех переменных?»

Смысл данного вопроса заключается в следующем. Пусть есть две функции двух переменных $f(x, y)$ и $g(y, z)$. Рассмотрим новую функцию двух переменных $\varphi(f, g)$ и подставим в нее вместо аргументов f и g данные функции. Тогда функция $\varphi[f(x, y), g(y, z)]$ будет зависеть от трех переменных x, y и z . Так, подставляя вместо аргументов f и g функции двух переменных $\varphi(f, g)$ новые функции двух переменных, мы получаем функцию трех переменных. Эта функция называется *однократной суперпозицией*, составленной из функций двух переменных f, g и φ . Естественно, что все свойства этой функции определяются нашими тремя функциями двух переменных. Т.е. вопрос из книги Г. Поля и Г. Сеге заключается как раз в том, можно ли все функции трех переменных свести к подобной или более сложным суперпозициям функций двух переменных или же существуют функции от трех переменных, которые не сводятся к функциям двух переменных. Заметим, что если использовать также и разрывные функции, то ответ на данный вопрос будет отрицательным. Таким образом представляет интерес лишь вопрос о том, представимы или не представимы все непрерывные функции трех переменных в виде суперпозиций непрерывных функций двух переменных.

2. В 1900 г. знаменитый немецкий математик Д. Гильберт [2] поставил в своем докладе на математическом конгрессе в Париже 23 проблемы. Тринадцатую из них Гильберт сформулировал так:

Представляется ли корень уравнения

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

суперпозицией каких-либо непрерывных функций двух переменных?

Гильберт предполагал, что ответ на этот вопрос окажется отрицательным; в таком случае одновременно был бы решен и более общий во-

прос о том, все ли функции трех переменных являются суперпозициями непрерывных функций двух переменных.

Первые результаты, примыкающие к 13-й проблеме Гильберта, были получены в предположениях, что суперпозиция имеет какой-либо специальный вид, например, в условиях ограничения однократной суперпозицией. Простейшие примеры такого рода имеются уже в книге Г. Поля и Г. Сеге, а ряд других примеров приведен в книге А.Г. Витушкина [3]. Наиболее сильный здесь является результат А.Г. Витушкина. Он построил такой многочлен, что ни сам этот многочлен, ни любая из достаточно близких к нему (в смысле равномерной сходимости) функций ни на какой области и ни в какой системе координат не разлагаются в однократную суперпозицию непрерывных функций двух переменных.

Дальнейшие результаты связаны с ограничениями, наложенными на входящие в суперпозиции функции. Ещё Гильберт указал, что невозможно получить все аналитические функции трех переменных в виде суперпозиций аналитических функций двух переменных. Важные общие результаты в этом направлении были получены А.Г. Витушкиным [4] (см. также его работу [3]), который, пользуясь созданной им теорией многомерных вариаций функций и множеств, показал, что все l раз непрерывно дифференцируемые функции трех переменных нельзя представить в виде суперпозиций дифференцируемых $[\frac{2l}{3}]$ (здесь $[x]$ -целая часть числа x) раз функций двух переменных, все частные производные порядка $[\frac{2l}{3}]$ от каждой из которых удовлетворяют условиям Липшица.

3. Однако в области всех непрерывных функций гипотеза Гильберта оказалась неверной.

Весной 1956г. А.Н. Колмогорову [5] удалось показать, что всякая определенная на n -мерном кубе непрерывная функция n переменных, где $n \geq 4$, является суперпозицией непрерывных функций трех переменных. Основным орудием в его конструкции является введенное А.С. Кронродом [6] одномерное дерево компонент множеств уровня функции. А в 1957 г. В.И. Арнольду [7] удалось улучшить результат А.Н. Колмогорова: любая непрерывная функция n переменных может быть представлена как сумма $3n$ функций, каждая из которых представляет собой суперпозицию, получаемую путем подстановки в функцию двух переменных вместо одного из аргументов функции $n-1$ переменных. В частности, в применении к функциям трех переменных мы получаем, что каждая непрерывная функция трех переменных представляет собой сумму 9 функций, каждая из которых является однократной суперпозицией функций двух переменных. А это и является ответом на поставленный Гильбертом вопрос.

Стремясь упростить методы, которыми были получены результаты из работ [5] и [7] А.Н. Колмогоров [8] доказал следующий потрясающий результат:

Теорема. При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0,1]$ непрерывные действительные функции $\psi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right], \quad (1)$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны, а функции $\psi^{pq}(x_p)$, кроме того, еще стандартные, т.е. не зависят от выбора функции f .

Сам А.Н. Колмогоров считал этот результат самым трудным в смысле преодоления технических трудностей в его творческой деятельности (см. по этому поводу интересные воспоминания С.М. Никольского в книге [9])!

4. В заключение заметим, что представление (1) имеет чисто теоретический характер, поскольку оно использует существенно негладкие функции. Поэтому для практических целей это представление, по-видимому, бесполезно. Таким образом, полученные результаты не снимают задачу о поисках удобных представлений, скажем, корней уравнений 7-й степени.

Неясно также, в какой мере разложение (1) далее не улучшаемо; не решен, например, вопрос об единственности выбора функций χ . Нет также никаких способов, позволяющих представить данную гладкую функцию в виде суперпозиций также относительно гладких функций. Самыми сильными результатами в этом направлении остаются чисто отрицательные результаты А.Г. Витушкина. Положительные результаты такого рода представляли бы чрезвычайно большой интерес.

Литература

1. Г. Полия, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч.1, Наука, М., 1978.
2. D. Hilbert, Mathematische Problemen, Gesammelte Abhandlungen, t.3, 1935, №17.
3. А. Г. Витушкин, О многомерных вариациях, ГИТТЛ, М., 1955.
4. А.Г. Витушкин, К 13-й проблеме Гильберта, ДАН, **95**, №4, 1954.
5. А.Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН, **108**, №2, 1956.

6. А.С. Кронрод, О функциях двух переменных, УМН, **5**, №1 (35), 1950.
7. В.И. Арнольд, О функциях трех переменных, ДАН, **114**, №4, 1957.
8. А.Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения, ДАН, **114**, №5, 1957.
9. С.М. Никольский, Великий Колмогоров, Математические события в 20 веке, ФАЗИС, М., 2003.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОПЫТ РАЗВИТИЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СОВРЕМЕННОЙ МОДЕРНИЗАЦИИ ШКОЛЫ

Кондратьева Г.В.

Московский государственный областной университет

Аннотация

В статье рассмотрена проблема использования исторического опыта для построения стратегических ориентиров развития содержания школьного математического образования. В качестве базы для построения историко-педагогической экспертизы взято время пореформенной России.

Ключевые слова школьное математическое образование, исторический опыт, пореформенная Россия

Модернизация современной школы актуализирует внимание к историческому опыту, причем не к фактологическим деталям, а к общим закономерностям процесса развития образовательных систем. Создание прочной, современной системы математического образования, выработка оптимальной стратегии ее развития на ближайшую и отдалённую перспективы должны опираться на имеющийся огромный опыт реформирования как отечественного образования в целом, так и его математической составляющей. Эффективно совершенствовать школу невозможно, руководствуясь только сиюминутными потребностями, вносящими определенный элемент случайности в силу возможной аберрации близости. Для определения долгосрочных стратегических перспектив требуется опора на исторический опыт модернизации отечественного образования, учет соответствующих параллелей в развитии, проведение историко-педагогических экспертиз.

Обращение к опыту пореформенной России 1861-1905 гг. особенно актуально именно в контексте широких модернизационных процессов, которые проходили тогда в образовании. В пореформенной России была реа-

лизована одна из крупнейших школьных реформ, призванная ответить на вызовы социального развития. Пореформенная Россия осуществила целый ряд качественных преобразований, позволивших перейти от аграрной в целом страны к государству с мощной индустриальной основой и высокой концентрацией капитала. Закономерно, что для реализации подобных масштабных преобразований требовалось привлечение значительного кадрового потенциала, причем как грамотных рабочих, так и среднетехнического персонала и специалистов с высшим образованием. Кадровый потенциал для развивающейся экономики должно было обеспечить отечественное образование в целом и школьное математическое образование в частности.

Необходимость ответа на социальные вызовы привела к переосмыслению целевых установок в образовании: от понимания гимназии как главного источника формирования кадров чиновников, пришли к рассмотрению средних учебных заведений в качестве основы, обеспечивающей возрастающие многообразные потребности экономики страны. При этом математическому образованию удалось не скатиться на наглядно-прикладной уровень, а сохранить традиционную систематичность и доказательность. И если в начале 1900-х гг. ряд школьных предметов (латынь, древнегреческий) вытеснялось из школы, а в 1910-х целесообразность других (новые языки) ставилась под сомнение, то положение математики в школе лишь укреплялось.

Однако успешность развития школьного математического образования в пореформенной России заключалась не только в построении системы, эффективно обеспечивающей настоящие требования социума, но и в том, что построенная система несла мощнейший потенциал, направленный в будущее.

Советская школа 1930-х гг. взяла за основу гимназическое образование, даже заимствовав напрямую конкретные носители педагогической практики прошлого (учебники А.П. Киселева, задачки Н.А. Шапошникова, Н.К. Вальцова, Н.А. Рыбкина). В результате чего смогла стать мировой сверхдержавой в области математического образования. Как известно, высокий уровень школьного математического образования в СССР в конце 1950-х гг. был признан даже противниками нашей страны (доклад адмирала Х.Рикова конгрессу США). А между тем, основа этого образования создавалась и апробировалась именно в пореформенной России.

Однако опыт развития школьного математического образования в пореформенной России остается недооцененным, слабо изученным и мало востребованным. Обсуждение вопросов использования исторического опыта нередко подменяется дискуссией о возврате к учебнику геометрии А.П. Киселева, что уводит в сторону от сути проблемы и, можно сказать, даже отрицает развитие математического образования в целом и методики обучения математике в частности. Объективное исследование наследия

прошлого тормозится и сохранившимися еще штампами советского времени, затушевывавшими по идеологическим причинам положительные достижения дореволюционной школы. Кроме того, приоритетом большинства исторических исследований является обращение к педагогическому прошлому ради познания самого прошлого, в то же время рассмотрение историко-педагогического знания как стратегического инструментария модернизации школьного математического образования отходит на второй план.

Но привлечение исторического опыта для стратегической прогностики требует корректировки методологических приоритетов. Как подчеркивает М.В. Богуславский «важен перенос внимания с внешних факторов (потребности общества в тех или иных специалистах, количественные параметры образовательной инфраструктуры) на внутренние – собственно педагогические»[5]. Нередко выгодные и даже первоначально эффективные проекты на небольших временных промежутках дают существенный проигрыш в долгосрочной перспективе. И происходит это потому, что в погоне за сиюминутной выгодой, за реагированием на ситуацию, попыткой трансформироваться в соответствии с внешними факторами теряются действительно приоритетные стратегические ориентиры. Последнее в свою очередь предусматривает, прежде всего, целостный анализ тенденций развития педагогических процессов, рефлексирования релевантных явлений прошлого, корректное построение исторических параллелей.

Продemonстрируем это на примере подхода к проблеме содержания образования.

Модернизация современного школьного математического образования сегодня требует переосмысления подходов к содержанию школьного курса математики. В Концепции развития математического образования в Российской Федерации говорится: «Выбор содержания математического образования на всех уровнях образования продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни, нарушена его преемственность между уровнями образования»[1].

Действительно, с одной стороны, «математика – единственный предмет, снабжающий учеников сведениями на уровне «старины седой». Между тем, бесконечные тоскливые упражнения в решении логарифмических уравнений и в вычислении объема пирамид имеют несоизмеримо меньшую ценность для развития интеллектуального уровня и житейской приспособленности будущих рядовых членов общества, чем знакомство с некоторыми фундаментальными понятиями математики, с многообразием геометрических форм, с опытом анализа простейших математических моделей реальных процессов». Таким образом, «нам придется придумать, как ввести в школу те математические идеи, которые имеют общекультурное, общеобразовательное значение, но остаются сегодня за рамками программы» (Н.Х. Розов)[6].

Но существует и противоположная позиция. «Я бы вернулся к Киселеву», -- отмечал академик В.И. Арнольд[2], эту идею сегодня активно пропагандирует И.П. Костенко, пытаясь обосновать непреходящую, по его мнению, ценность учебников А.П. Киселева. В 2009 г. министр образования А.А. Фурсенко предложил исключить из школьной программы высшую математику, мотивировав это тем, что перегрузка вредит здоровью учащихся. В поддержку этой идеи выступил и ректор МГУ В.А. Садовничий.

Анализируя разноплановость существующих мнений о содержании курса математики, можно выделить два кардинально противоположных направления. 1. Содержание математического образования устарело и его нужно обновлять, 2. Содержание курса математики – это сложившаяся традиция, которая должна быть неизменна. Данные направления являются в целом проектированием на математическое образования давно известных общих педагогических подходов к отбору содержания образования, а именно энциклопедизма и дидактического формализма.

Утверждать бесспорную приоритетность одного направления перед другим нет оснований. Вопрос о ценностной значимости данных подходов должен быть уточнен конкретно исторически. Не просто, какое из направлений более эффективно, а какое из направлений наиболее эффективно на современном этапе.

Для вскрытия приоритетов современного этапа, проведем сравнительный анализ содержания математического образования в современной школе и пореформенной России рассмотрим содержание образования.

Сравнительный анализ содержания курса математики российской полной школы начала XXI века (2009 г.)/базовые уровень/, и старших классов классической гимназии конца XIX века (1892 г.) позволит наглядно представить построенная диаграмма. Поясним подробнее особенности ее построения.

Представленная диаграмма (рис.1) показывает, что за примерно одинаковое учебное время учащиеся старших классов современной школы должны овладеть значительно большим содержательно материалом. В 10-11-ом классе современной школы изучаются элементы математического анализа, декартовы координаты и вектора, элементы теории вероятностей, алгебра, функции, стереометрия, тригонометрия. Кроме того, в 11-ом классе имеет место итоговое повторение. В 6-7-х классах пореформенной гимназии изучались только алгебра, стереометрия, тригонометрия. Восьмой класс не рассматривается, т.к. он отводился полностью на повторение. Сравнение учебных курсов гимназий и современной школы является корректным: оба курса рассчитаны на получение полного среднего образования. Профильный уровень современной школы представляется оправданным сопоставлять с кадетскими корпусами или реальными училищами.

Как удастся современной школе справиться со столь обширной программой? Большой объем содержания в современной школе, к сожалению, обеспечивается не всегда только за счет совершенства методик и отсева устаревшего содержания, но и за счет обучения на уровне распознаваний и понятий. Это четко просматривается уже в программном компоненте. Так, в программе классических гимназий превалировали понятия: исследование, измерение, свойства, решение задач, встречается формулировка «решение несложных задач». В базовом обязательном минимуме современной школы они заменены понятиями: формулы, понятия, решение простейших уравнений (систем и т.д.).



Рис 1. Содержание курса математики в старших классах (XIX и XXI века)

Имеет место не столько усложнение содержания, сколько увеличение числа изучаемых тем. Происходит явное расширение ядра курса, а не только корректировка вспомогательных тем. При дальнейшем движении в данном направлении возникает риск утраты целостности курса математики, подмене изучения согласованных разделов знакомством с изолированными дидактическими единицами, что порождает угрозу постепенной утраты четкой структуры предмета математики, превращению его в мозаичный набор, достаточно слабо связанных между собой элементов, изучаемых ознакомительно.

Особая опасность состоит в том, что движение в этом направлении продолжается. Так, в настоящее время (2015-2016) в школьный курс алгебры внесено достаточно обширное содержание по теории вероятностей и статистике, превышающее объём материала по числам и буквенным выражениям. Это расширение проведено без должной экспериментальной проверки и с неизвестным теоретическим обоснованием. Оно выглядит скорее как реагирование, нежели стратегическая реализация научно обоснованного подхода. Расширение материала по теории вероятностей и статистике сопровождается исключением понятия действительного числа в 7-9 классах.

Явная тенденция к увеличению числа тем курса резко контрастирует с образовательной практикой прошлого. Педагоги прошлого считали, что «состав учебного курса и объём преподаваемого предмета определяется не принципом полезности и пригодности знаний в жизни, а требованиями общего образования..., которое достигается не «возможно широким» развитием преподаваемых знаний, хотя бы и самых полезных в жизни, а постепенным приучением детей к сосредоточенному, основательному и сознательному труду. ...при такой постановке ... учащиеся будут предохранены от поверхностного многознания» [3, с.446]¹.

Нельзя сказать, что педагоги прошлого не стремились вводить в курс новые темы. Такие попытки были и весьма интересные. Например, К.Д. Краевич в «Курс начальной алгебры» (1866) для средних учебных заведений ввел элементы теории вероятностей. В данную статью вошли следующие пункты: Вероятность, правдоподобие, достоверность. Явление простое и сложное. Математическая выгода. О лотереях. О вероятностях человеческой жизни. Страхование. Отметим, что статья небольшая (10 страниц) достаточно мелкого шрифта. В курсе Ф.И. Симашко «Начальные основания алгебры» (1866) целый раздел посвящен функциям, которые тогда не входили в распределение гимназического курса. Здесь изучались и производные. В 1883 г. М.Е. Ващенко-Захарченко выпустил гимназический учебник для старших классов «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса», где сделал первую попытку познакомить учащихся с элементами геометрии Лобачевского.

Но, сразу отметим, что данные попытки расширить курс математики не были введены в массовую практику, т.к. стратегическими приоритетами пореформенной школы являлись «не многочисленные, а основательные знания» [4, с.242]². Причем указывалось, что погоня за количеством сообщаемого материала – это обычная ошибка начинающих учителей: стремление сообщить учащимся как можно больше сведений. В результате име-

¹Боголюбов, Н. Цель и средства нравственного воспитания/ Н.Боголюбов// Педагогический Сборник. – 1868. – №4. – С.414-450

² Русский начальный учитель. – 1890. – № 6-7. – С. 242-245

ет место обычное верхоглядство, и знания выходят поверхностными. Учащийся не должен быть подавлен информацией, а получить представление об изучаемой дисциплине как о единой науке со своим предметом и методом. Это была принципиальная позиция педагогов XIX века, которые стремились четко провести содержательные линии, выстроить систему определений и доказательств.

Возвращаясь к современной тенденции дополнения курса математики новыми тематическими разделами отметим, что, конечно, современная школа не может оставаться на уровне XIX в. Стагнация содержания сводит на нет саму суть образования. Однако серьезные риски связаны и с дальнейшим движением по пути расширения числа тематических линий курса. Существует реальная опасность утраты логически-целостных построений, потери доказательности, схематичности изложения курса или его информационной перегруженности.

Избежать этих рисков с позиций исторического опыта отечественной школы можно, если решать вопрос о дальнейшем расширении тем современного курса исключительно взвешенно-критически с тщательной оценкой положительных и, главное, отрицательных сторон вводимых новаций.

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. N 2506-р) // <http://минобрнауки.рф/документы.3894>
2. Арнольд В.И. Нужна ли в школе математика? Стенограмма пленарного доклада. Дубна 21 сентября 2000 г. М. Изд-во МЦНМО 2004 -- 32 с.
3. Боголюбов, Н. Цель и средства нравственного воспитания/ Н.Боголюбов// Педагогический Сборник. – 1868. – №4. – С.414-450
4. Русский начальный учитель. – 1890. – № 6-7. – С. 242-245

Электронные источники

1. Богуславский М.В. Моделирование развития отечественной педагогики XX века // http://library.udpu.org.ua/library_files/istoruk_ped_almanax/2009/2009_1_1.pdf С
2. Розов Н.Х. Математика для обывателя // <http://lib.teacher.msu.ru/pub/2306>

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК О ВОЗНИКНОВЕНИИ И СТАНОВЛЕНИИ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Матвеев О.А., Птицына И.В.

Московский государственный областной университет

Аннотация

Рассматриваются некоторые отдельные исторические проблемы возникновения, становления и развития проективной геометрии, начиная с V века до нашей эры и до наших дней. Обсуждается значение проективной геометрии, её связь с другими геометрическими дисциплинами. Перечисляются некоторые основоположники и идейные вдохновители, ярко проявившие себя при построении стройной классической теории проективной геометрии.

Ключевые слова: проективная геометрия, теоремы Паппа и Дезарга, принцип двойственности, проективные преобразования.

Проективная геометрия, часто посещаемая, ухоженная область математики, своими корнями уходит в глубокие, древние временные периоды. Сейчас мы имеем документальные подтверждения о том, что древнегреческая математическая культура уже включала в себя некоторые проективные элементы, из которых вполне возможно было бы построить содержательные геометрические модели, отражающие те или иные явления мироздания. Греческая геометрическая школа проделала большую собирательную работу, явно опираясь на научные результаты предшествующих цивилизаций, совершила широкий шаг обобщения накопленных математических фактов и представила стройную геометрическую систему, мощь которой недооценивают те, кто считает, будто всё современное, даже в руках несведущего человека, превосходит любое достижение древних. И все же мы напрасно стали бы искать *общие* полностью завершённые теории в греческой древней геометрии: их там нет, но некоторое множество важных предпосылок проективного характера уже имелось, был установлен и письменно зафиксировано. В знаменитом труде Аполлония (III век до н.э.) «Конические сечения» рассматриваются и описываются некоторые проективные свойства эллипса, гиперболы и параболы. Так, например, совсем в другую историческую эпоху геометрические свойства точек пересечения двух касательных к эллипсу послужили для Жерара Дезарга исходным пунктом при создании теории полюсов и поляр.

В III веке н.э., когда эллинская математика давно миновала высшую точку своего развития, в «Математическом собрании» (в 8 книгах) Паппа Александрийского приводятся леммы, многие из которых носят проективный характер: эквивалент двойного отношения четырех точек прямой, гармонические свойства четырехугольника (в терминологии того времени; сейчас в проективной геометрии принят термин «четырёхвершинник»), свойство шести точек пересечения сторон полного четырехугольника и некоторые другие. Доказываются они в основном многократным применением теоремы Менелая (I век н.э.). Приведём формулировку замечательной теоремы Паппа, являющейся частным случаем теоремы Блеза Паскаля (1623–1662).

Теорема Паппа. Пусть даны попарно различные три точки A, B, C , лежащие на одной прямой d и три попарно различные точки A', B', C' , лежащие на прямой d' , причем $d \neq d'$, и эти две прямые принадлежат одной проективной плоскости.

Тогда три точки $A'' = (BC') \cap (B'C)$, $B'' = (A'C) \cap (C'A)$, $C'' = (AB') \cap (A'B)$ принадлежат одной прямой d'' .

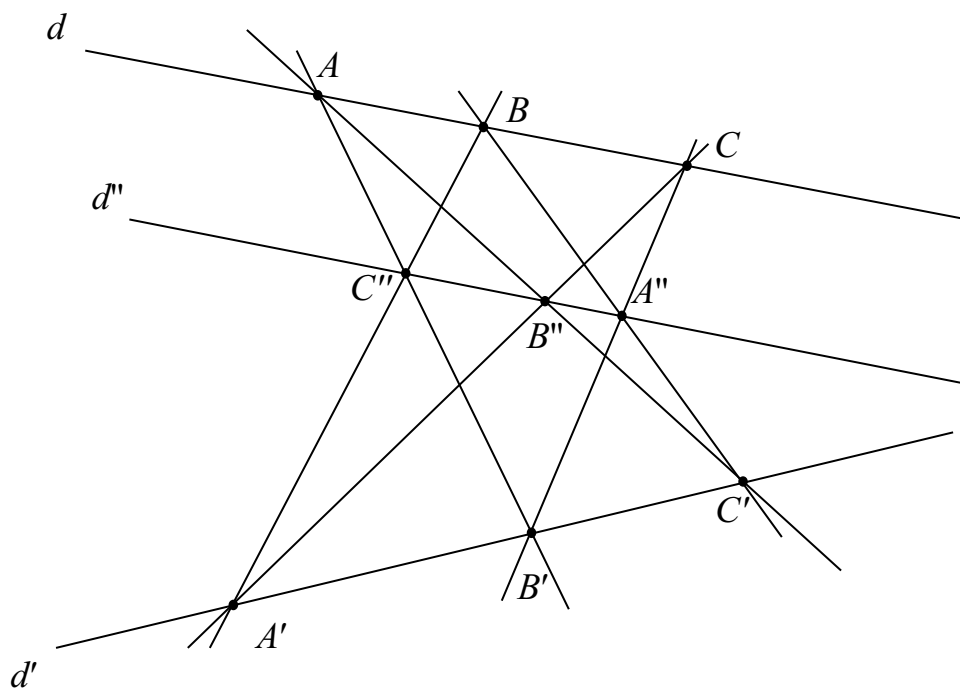


Рис.1

До XV века прогресс в области проективной геометрии был весьма незначителен. В XV веке в эпоху Возрождения из потребностей живописи и архитектуры разрабатывается теория перспективы (Филиппо Брунеллески (1377–1446), Леон Баттиста Альберти (1404–1472), Леонардо да

Винчи (1452–1519) в Италии, Альбрехт Дюрер (1471–1528) в Германии). В их работах теория имеет еще эмпирический характер.

В XVI веке трудами Жерара Дезарга (1591–1661) во Франции достигнуто усовершенствование методов изображений. В научной деятельности Жерара Дезарга (1591–1661) отчетливо проявилась непосредственная связь между теорией изображений и изучением проективных свойств фигур. Дезарг был математиком, инженером и архитектором. Его исследования по перспективе послужили отправным пунктом при создании основополагающего для проективной геометрии произведения «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при пересечении конуса с плоскостью». Основным методом в нем является применение перспективного отображения плоскостей. Путем центрального проектирования свойства окружности переносятся на все виды конических сечений. В то же время перспективное изображение окружности представляет большой интерес из-за разнообразия возникающих кривых, представляющих собой различные конические сечения. Вид кривой зависит от положения окружности относительно горизонта. Вписанная в квадрат окружность переходила в эллипс. Если же изображаемая окружность *касается* линии горизонта, то при проектировании возникает *парабола*.

Строится теория инволюций. Дезарг устанавливает проективный характер инволюции шести точек. Важной заслугой Дезарга является систематическое использование бесконечно удаленных точек и прямых, теории полюсов и поляр. Теоремы Дезарга, сыгравшие огромную роль в дальнейшем развитии проективной геометрии, были найдены им в связи с исследованиями по теории изображений.

Отметим, что Рене Декарт (1596–1650) развивал свои замечательные идеи, составившие целую эпоху в истории математики, приблизительно в то же время, когда Жерар Дезарг прилежно разрабатывал проективную геометрию, являющуюся в известном смысле даже более фундаментальным обобщением геометрии, чем аналитическая геометрия Декарта.

Одна из фундаментальных теорем Дезарга детализирует свойства перспективного расположения трехвершинников. Жерар Дезарг сформулировал свою замечательную теорему в 1636 году в работе, объемом в 12 страниц. Приведём необходимую современную терминологию и формулировку этих (прямой и обратной) теорем.

Трехвершинником называется фигура, составленная из трех точек, не лежащих на одной прямой (вершин треугольника), и трех прямых, проходящих попарно через эти точки (сторон трехвершинника). (Двойственным понятием является *трехсторонник*, состоящий из трех прямых, не проходящих через одну точку (сторон трехсторонника) и трех точек (вершин трехсторонника) попарных пересечений сторон.) Говорят, что трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют центр перспективы Q , если вершины A и A' , B и B' , C и C' лежат на прямых, проходящих через одну точку Q . Трех-

вершинники ABC и $A'B'C'$ имеют ось перспективы q , если стороны (AB) и $(A'B')$, (BC) и $(B'C')$, (AC) и $(A'C')$ пересекаются в точках, лежащих на одной прямой q .

Теорема Дезарга. Трехвершинники имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.

Рассматривая рисунок 2, замечаем, что невырожденная конфигурация Дезарга состоит из десяти точек $(A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', Q)$ и де-

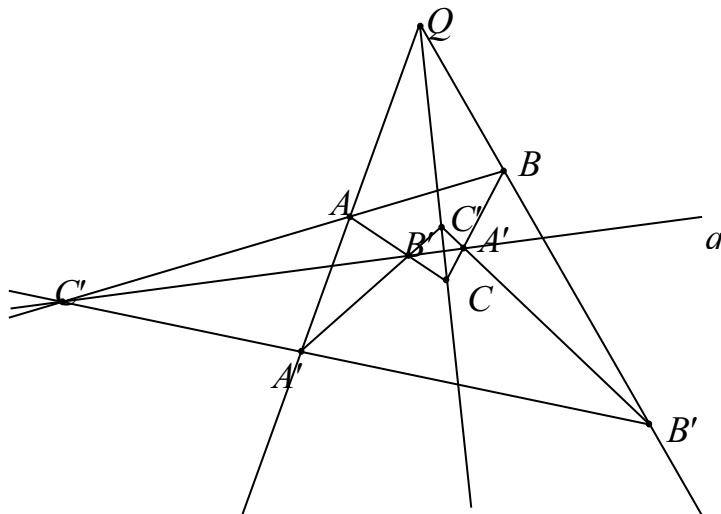


Рис. 2

сяти прямых $((AA'), (BB'), (CC'), (AB), (AC), (BC), (A'B'), (A'C'), (B'C'), q)$.

Проективную плоскость можно рассматривать не только над полем, но и над некоторым телом и даже кольцом. (При этом необходимо дать «внутреннее» определение проективной плоскости, не вкладывая плоскость в трехмерное пространство). Доказано [8], что при этом кольцо является телом тогда и только тогда, когда на проективной плоскости замыкается конфигурация Дезарга. Дезарговость проективной плоскости равносильна возможности её вложения в трехмерное пространство.

Если на проективной плоскости замыкается конфигурация Паппа, то замыкается и конфигурация Дезарга; обратное, вообще говоря, неверно, если мы рассматриваем проективную геометрию над телом. Если на проективной плоскости над телом замыкается конфигурация Паппа, то тело является полем.

Теорема Дезарга верна и в случае, когда перспективные трехвершинники расположены в разных плоскостях трехмерного проективного пространства.

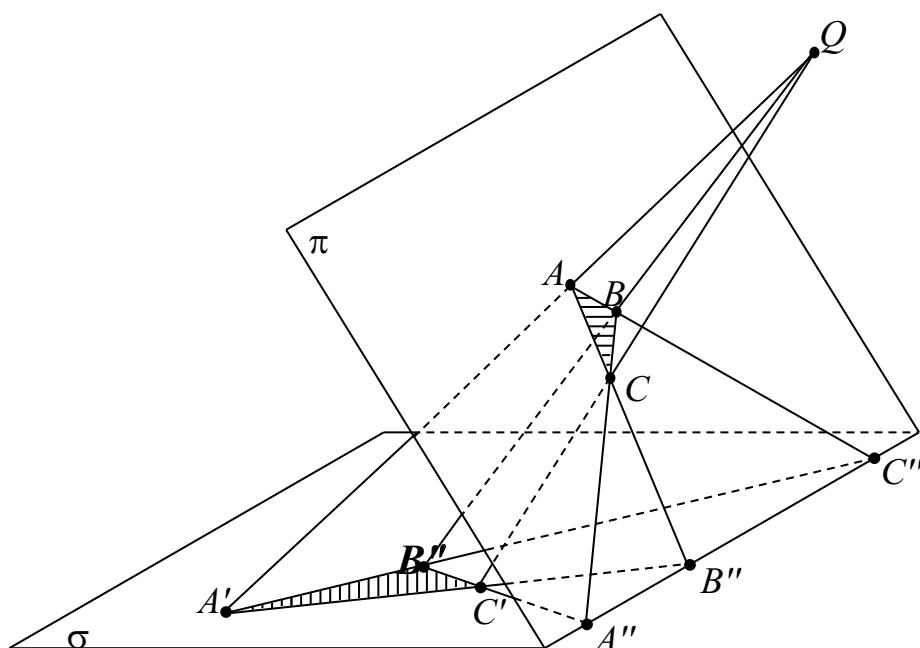


Рис. 3

В трехмерном проективном пространстве прямая и обратная теоремы Дезарга не двойственны.

История публикаций Дезарга интересна и весьма печальна. Его стиль необычайно сжат и труден для понимания. Для описания новых идей Дезаргу пришлось постоянно изобретать новые термины. О собственных работах он отзывался как о «набросках результатов» и предоставлял другим развивать свои идеи. Этим занимался его друг, гравер Боссе, чья манера изложения была настолько же многословной, насколько лаконичен был стиль Дезарга. В итоге за распространение идей Дезарга Боссе вынужден был оставить работу в Школе изящных искусств. У Дезарга были враги. Во время одной из перипетий борьбы с ними Дезарг расклеил по Парижу афишки, в которых подверг ожесточенным нападкам теорию перспективы, приписываемую отцу Дюбрейлю, и предлагал денежную награду каждому, кто сможет доказать, что теория Дезарга не самая лучшая! Яростные споры между математиками не были редкостью.

Работа Жерара Дезарга, удостоенная похвал Рене Декарта, Блеза Паскаля (1623–1662) и других математиков, на протяжении столетий оставалась забытой, пока в 1822 году военный инженер Жан-Виктор Понселе, (1788–1867) не возродил теорию Дезарга в своем великом трактате о проективной геометрии.

Хотя своего яркого расцвета проективная геометрия достигла лишь в XIX веке, Дезарг, несомненно, по праву считается одним из отцов проективной геометрии. Дезарг работал над теорией перспективы, и, как мы убедились при рассмотрении этой теории, представление о том, что параллельные можно считать проходящими через одну *бесконечно удаленную точку*, допустимо считать естественным развитием перспективы, а также понятий конуса зрения и *линии горизонта*. Позднее многие выдающиеся математики разрабатывали эту идею более подробно, тем не менее, в трудах Дезарга она высказана со всей возможной для того времени отчетливостью. Но коль скоро такая мысль сформулирована, она с необходимостью приводит к *расширению* евклидовой плоскости — пополнению ее бесконечно удаленными точками, лежащими по определению на одной прямой — *бесконечно удаленной прямой*.

Если мы «демократизируем» расширенную плоскость и будем считать *все* ее точки равноправными, то природа нашей плоскости подвергнется коренным изменениям. Бесконечно удаленные точки, называемые иногда *идеальными*, становятся обычными точками.

Идеальная (бесконечно удаленная) прямая также превращается в обычную, заурядную прямую, которую садовник, разбивая клумбу, провешивает при помощи туго натянутой веревки. Поведением точек и прямых на расширенной плоскости управляют две теоремы или аксиомы (в зависимости от того, какую точку зрения мы предпочтем).

1. Две различные точки на расширенной плоскости определяют прямую и притом только одну, которой они обе принадлежат;

2. Две различные прямые на расширенной плоскости определяют точку и притом только одну, через которую они обе проходят.

Никаких упоминаний о том, что две прямые могут быть параллельны, более не существует. Геометрия расширенной плоскости — это геометрия точек, прямых и их пересечений. Любая теорема о точках, прямых и пересечениях, выполняющаяся на расширенной плоскости, останется верной, если всю конфигурацию мы спроектируем из некоторого центра на «картинную плоскость». Отсюда и название *проективная геометрия*.

Быть может, утверждение о том, что эта геометрия, не использующая никаких измерений, содержит в себе всю евклидову геометрию, вызовет у читателя недоумение, и он спросит: «Но разве в евклидовой геометрии есть хоть какие-нибудь теоремы, в которых бы никак не использовались измерения углов и расстояний?». Ответ на этот вопрос положителен: «Конечно, такие теоремы существуют».

Основной метод Дезарга был воспринят и развит Блезом Паскалем (1623–1662). (Не нужно путать с французским математиком Этьеном Паскалем (1588 – 1651), отцом Блеза). Теорема Паппа в наши дни приобрела фундаментальное значение и рассматривается в любом курсе по основам геометрии. Через тысячу лет после Паппа Блез Паскаль в возрасте

шестнадцати лет сформулировал теорему, также носящую ярко выраженный проективный характер. Теорему Паскаля можно считать своего рода обобщением теоремы Паппа. Замечательную теорему о вписанном шестиугольнике Блез Паскаль доказывает сначала для окружности, основываясь на теореме Менелая, а затем перспективным отображением устанавливает ее истинность для произвольного конического сечения.

Теорема Блеза Паскаля. Пусть шесть точек $A_1, A_2, \dots, A_6$ принадлежат некоторому коническому сечению. Тогда три точки пересечения прямых (A_1, A_5) и (A_2, A_4) , (A_3, A_4) и (A_1, A_6) , (A_2, A_6) и (A_3, A_5) лежат на одной прямой.

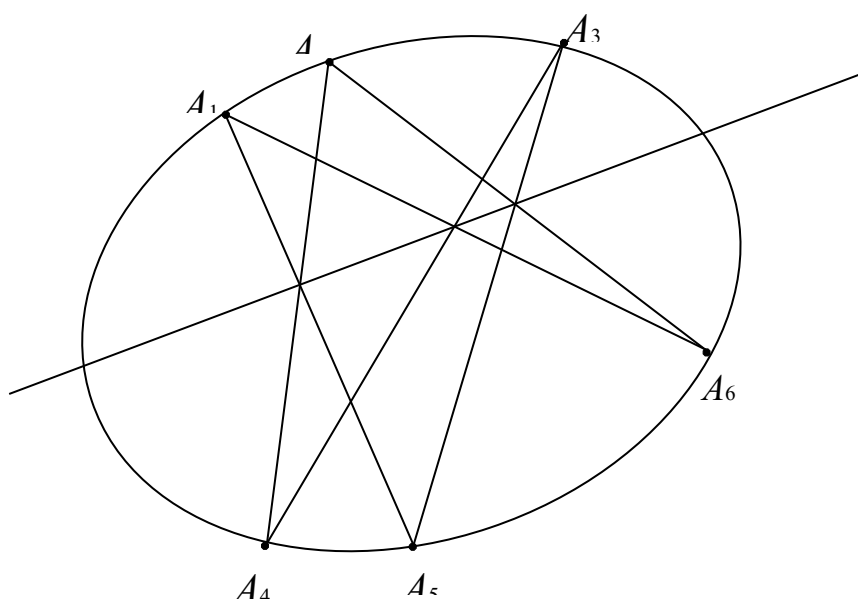


Рис.4

Заметим, что теорема Паскаля выполняется для любого конического сечения: для окружности, эллипса, параболы и гиперболы, поскольку все эти кривые можно получить как сечения кругового конуса.

При разумном определении *касательной* в точке конического сечения (обычно пользуются определением касательной, как предела секущей при неограниченном стремлении точек пересечения прямой и кривой друг к другу) теорема Паскаля будет выполняться и в том случае, если не все из наших шести точек различны.

Блез Паскаль был последователем Жерара Дезарга и, в отличие от него, великолепно владел пером. Его «Мысли» перечитываются и в наши

дни и имеют немалую известность, однако некоторые из геометрических работ Паскаля были утеряны. Рассказывают, что одну из доказанных им теорем Паскаль сопровождал более чем тремястами *королляриями* – следствиями из основной теоремы.

К середине XVII столетия стали известны многие предложения проективной геометрии, которые оставались еще разрозненными. В конце XVII – начале XVIII века продолжавшееся изучение проективных свойств фигур синтетическими методами не изменило указанного положения. Под влиянием блестящих аналитиков Леонарда Эйлера (1707–1783) и Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) господствующее положение в геометрии заняли аналитические методы. Синтетические методы и проблемы проективной геометрии оказались полностью заброшенными в течение более полутора столетия.

В XVIII-XIX веках возрождение *синтетических методов* проективной геометрии связаны с именами Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777), Якоба Штейнера (1796–1863), Карл Георг фон Штаудт (1798–1867) в Германии и Гаспара Монжа (1746–1818) с его знаменитыми последователями, учениками высшей Политехнической школы, во Франции.

Гаспар Монж, инженер по образованию, один из основателей Политехнической школы, является создателем новой технической науки – *начертательной геометрии*, которая стала одним из методов изучения свойств пространственных фигур.

Его последователи Жан-Виктор Понселе (1788–1867) и Мишель Шаль (1793–1880) успешно разрабатывали синтетические методы в проективной геометрии. Основной труд Понселе «Трактат о проективных свойствах фигур» (1822) был задуман в основном в 1813–1814 в России в Саратове, куда он был отправлен как пленный офицер наполеоновской армии. В самом начале «Трактата» дано определение проективного свойства плоской фигуры, как сохраняющегося при центральном проектировании. Этим самым было определено содержание проективной геометрии как отдельной дисциплины внутри евклидовой геометрии. В «Трактате» строится теория проективных свойств прямолинейных фигур и конических сечений, формулируются предложения о полюсах и полях. Эти результаты затем обобщаются на пространственные фигуры. Понселе принадлежат и первые примеры проективных преобразований, таких как гомология и полярное преобразование. Детальному изучению полярных преобразований посвящен и другой научный труд Понселе «Теория взаимных поляр». Полярные преобразования привели Понселе к принципу двойственности. Понселе также полностью решил проблему о построениях на плоскости одной линейкой при задании окружности и ее центра. Независимо от Понселе к принципу двойственности пришел Жозеф Диас Жергонн (1771–1859), благодаря чему Шарль Жюльен Брианшон (1783–1864) получил тео-

рему, названную его именем. Теорема Брианшона является двойственной к теореме Паскаля.

Теорема Брианшона. Шестиугольник описан около некоторого конического сечения тогда и только тогда, когда его большие диагонали пересекаются в одной точке.

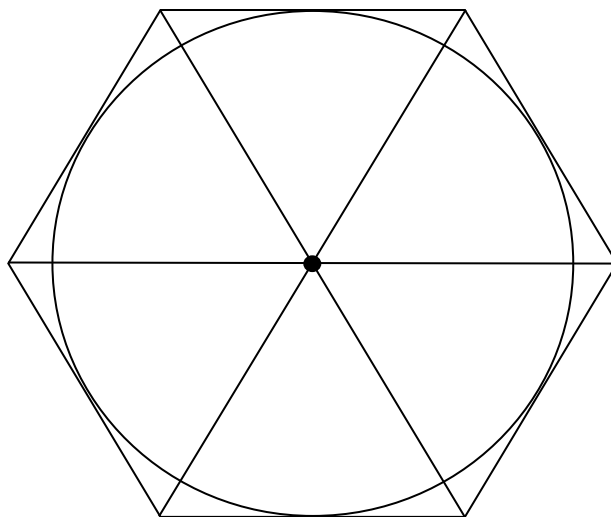


Рис. 5

Прежде чем приступать к обсуждению принципа двойственности, хотелось бы заметить, что в истории проективной геометрии, так же как и в истории других точных наук, проявилось явление, называемое *повторные открытия*. Причины повторных открытий многообразны. Например, по мнению английского психолога Фрэнсиса Гальтона (1822–1911), повторные научные открытия делаются тогда, когда приходит время для этих открытий: «Когда яблоки созрели, они готовы упасть». С другой стороны, по словам Эвариста Галуа (1811–1832): «Часто кажется, что одни и те же идеи рождаются у нескольких людей, подобно откровению. Если поискать причину этого, то легко найти ее в трудах тех, которые им предшествовали». И, наконец, из «Критики чистого разума» Иммануила Канта (1724–1804): «Нередко и в обычной речи, и в сочинениях путем сравнения мыслей, высказанных автором о своем предмете, мы понимаем его лучше, чем он себя».

В основе принципа двойственности лежит замечание о том, что две основные аксиомы проективной геометрии на плоскости обнаруживают *двойственность*, то есть переходят друг в друга, если поменять местами

слова *точки* и *прямые*, *лежат* и *проходят* и, разумеется, *на* и *через*. Если, говоря о точке, лежащей на прямой, или о прямой, проходящей через точку, мы воспользуемся более общим термином и скажем, что точка и прямая *инцидентны*, то аксиомы проективной геометрии на плоскости можно сформулировать следующим образом:

- 1) две различные точки на расширенной плоскости определяют прямую и притом только одну, которой они обе инцидентны;
- 2) две различные прямые на расширенной плоскости определяют точку и притом только одну, которой они обе инцидентны.

Предположим теперь, что наш словарь взаимозаменяемых терминов пополнился такими парами слов, как *прямая, проходящая через две точки*, и *точка пересечения двух прямых*, *трехвершинник* (три неколлинеарные точки, то есть точки, не принадлежащие одной прямой) и *трехсторонник* (три неконкурентные прямые, то есть три прямые, не проходящие через одну точку), а также *коллинеарные* точки (так называются точки, лежащие на одной прямой) и *конкурентные* прямые (так называются прямые, проходящие через одну точку). Располагая таким запасом слов, мы уже можем применять принцип двойственности к теоремам, в которых говорится лишь о точках, прямых, пересечениях; прямых, проходящих через две заданные точки; тройках прямых и точек.

Принцип двойственности утверждает, что у каждой такой теоремы имеется тень, своего рода математический двойник — двойственная теорема, для получения которой достаточно воспользоваться нашим словарем и *автоматически произвести* попарную замену терминов: *точка* и *прямая*; *пересечение двух прямых* и *прямая, проходящая через две точки*; *коллинеарные* и *конкурентные*; *трехвершинник* и *трехсторонник*.

Применив принцип двойственности на плоскости к теореме Дезарга, мы получим теорему, *обратную* теореме Дезарга. Чтобы убедиться в этом, запишем теорему Дезарга в следующем виде: «Если имеются два трехвершинника, таких, что прямые, проходящие через соответственные вершины, *конкурентны*, то пересечения соответственных сторон *коллинеарны*».

Раскрыв наш словарь и переставив термины *вершины* и *стороны*, приходим к теореме: «Если имеются два трехсторонника, таких, что пересечения сходственных сторон инцидентны одной прямой, то прямые, проходящие через соответственные вершины, инцидентны одной точке».

Это теорема, обратная теореме Дезарга. Математика стремится в своем развитии по возможности избегать введения каких-либо принципов, и в наши дни принцип двойственности не догма, а теорема, доказываемая особенно легко и просто с привлечением алгебраических методов в геометрию.

В основном труде Якоба Штейнера (1796–1863) «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (1832), где

руководящей является идея проективного соответствия между формами первой степени, систематически используется принцип двойственности.

Многие результаты Якоба Штейнера одновременно были получены также и Мишелем Шалем. Шалю принадлежит также большое число исследований по теории линий и поверхностей второго порядка. В частности, им впервые было введено понятие проективного соответствия точек на кривой второго порядка.

После работ Понселе, Штейнера, Шаля и других их современников проективная геометрия стала наукой с богатым и определенным содержанием. Однако она оставалась зависимой от метрической геометрии, поскольку основное ее понятие – двойное отношение определялось через метрические понятия – длину отрезка и величину угла. Карл Георг фон Штаудт впервые поставил и в основном решил проблему построения проективной геометрии независимо от метрики. Это важное достижение Штаудт осуществил в работах «Геометрия положения» (1847) и «Дополнительные исследования по геометрии положения» (1856–1860).

Указанные успехи проективной геометрии были достигнуты почти исключительно синтетическими методами, одновременно с этим были созданы и *аналитические методы*, получившие в проективной геометрии плодотворное применение. Наиболее важные в этом направлении работы принадлежат Августу Мебиусу (1790–1868) и Юлиусу Плюккеру (1801–1868).

В работе «Барицентрическое исчисление» (1827) Мебиус впервые вводит барицентрические однородные координаты, на основе которых он дает аналитическое определение аффинных и проективных преобразований плоскости и пространства. Таким образом, аналитический подход к коллинеациям и корреляциям предшествовал синтетическому. Мебиус указал способ конструктивного описания коллинеаций. Им были открыты пространственные кривые третьего порядка.

Следующий шаг был сделан Плюккером. Введенные им координаты (1835) точек плоскости не отличаются от проективных. Позднее (1846) такие же координаты были даны им и для точек пространства.

Аналитические методы проективной геометрии получили большое содействие в теории алгебраических инвариантов, создателями которой являются Артур Кэли (1821–1895) и Джеймс Сильвестр (1814–1897), Англия. Эта теория оказала существенное влияние на теорию групп преобразования Софуса Ли (1842–1899), Норвегия. В своем «Шестом мемуаре об алгебраических формах» Кэли впервые отчетливо высказал проективную точку зрения на евклидову геометрию: «метрическая геометрия является частью проективной геометрии, и проективная геометрия есть вся геометрия». В ходе исторического развития соотношение между евклидовой и проективной геометриями изменилось на обратное.

В связи с указанными исследованиями Феликс Клейн (1849–1925) указал на основополагающее значение для геометрии понятия группы преобразований. Так возникла групповая точка зрения на геометрию – «Эрлангенская программа» Клейна (1872).

Создание современной геометрической аксиоматики в решающей степени стимулировалось открытием геометрии Н. И. Лобачевского. К концу XIX века в рамках проективной геометрии была создана глубокая и содержательная теория, включающая в единую схему геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Развитие проективной геометрии в XX веке шло в нескольких направлениях. Продолжалась разработка аксиоматики проективной геометрии. Большое и плодотворное развитие получило направление проективной дифференциальной геометрии. К этому направлению относятся работы Эрнеста Вильчинского (1876–1932), Гвидо Фубини (1879–1943), Эдуарда Чеха (1893–1960), Эли Картана (1869–1951), Сергея Павловича Финикова (1883–1964), Петра Константиновича Рашевского (1907–1983), Вениамина Федоровича Кагана (1869–1953), Германа Федоровича Лаптева (1909–1972), Александра Петровича Нордена (1904–1993), Петра Алексеевича Широкова (1895–1944), Макса Айзиковича Акивиса (1923–2015), Бориса Абрамовича Розенфельда (1917–2008) и многих других математиков.

Как и раньше, в наше время можно выделить (условно) три основных подхода к проективной геометрии:

1) *синтетический*, берущий своё начало в достаточно полном объёме, от древней греческой математической школы, впитавшей в себя элементарные геометрические наработки древнего Вавилона, древней цивилизации Междуречья, древнего Египта. Промежуточный (казавшийся совершенным и окончательным) итог тесно связан с «Началами» Евклида. И, наконец, как разрешение кризиса в геометрии в середине и конце XVIII века синтетический подход был строго обоснован Давидом Гильбертом («Основания геометрии», 1900). Здесь мы предполагаем, что в построенной аксиоматике евклидовой геометрии нужно «стереть» все понятия и конструкции, связанные с расстояниями и углами, а также добавить бесконечно удаленные (идеальные) элементы.

2) *аналитический подход* состоит в систематическом применении проективного репера и проективных координат, что позволяет при решении геометрических задач регулярным образом применять методы математического анализа и алгебры. Действительно, положение точки, например, на проективной плоскости с выбранным репером однозначно задается упорядоченной тройкой чисел, одновременно не равных нулю, положение прямой описывается линейными уравнениями, уравнение кривой второго порядка записывается некоторой квадратичной формой. Задача нахождения координат точки пересечения двух прямых сводится к решению системы линейных уравнений и так далее.

3) *групповой подход* предполагает, что проективная геометрия изучает инварианты группы проективных преобразований. Развитие геометрии от Эрлангенской программы (1872) Феликса Клейна и работы Софуса Ли, Эли Жозефа Картана (1869–1951) и многих других геометров показывают, что при таком подходе очень важное значение имеет теория групп и алгебр Ли. Предмет проективной геометрии и область её применения существенно расширились. В проективной геометрии одним из основных предметов изучения являлись сами проективные преобразования многомерного проективного пространства (в современных обозначениях это группы $\text{PGL}(n, \mathbf{R})$, или $\text{PGL}(n, \mathbf{C})$ и их подгруппы, здесь $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ – соответственно поля вещественных и комплексных чисел, n – размерность проективного пространства). В частности, детально были исследованы свойства гомологии дезарговой действительной проективной плоскости.

Итак, геометрия, возраст которой превышает три тысячи лет, обязана своим существованием, с одной стороны, таким первоначальным до конца непонятым феноменам нашего мира, как пространство и время, с другой стороны, – потребностям практической деятельности человечества. Это определяет ее поразительную жизнеспособность и возможности неограниченного развития. Естественно, каждая новая эпоха привносит в геометрию новые методы, понятия и идеологию, и всякая попытка провозгласить какие-то принципы окончательными в живой науке абсурдна. Сейчас уже становится ясно, что дискретные (квантовые) аспекты структуры мироздания явно не вписываются в непрерывные и гладкие модели топологии и дифференциальной геометрии. Таким образом, мы в наше время приходим к необходимости рассматривать различные геометрии над конечными полями, телами, кольцами. Теория квазигрупп активно завоёвывает передовые позиции и в дифференциальной, и в проективной геометриях. Актуальны исследования «конечных» геометрий (F. Kartessi, *Introduction to Finite Geometries*, Akademiai Kiado, Budapest, 1976 ([7])). Мощный импульс развитию теории конечных проективных недезарговых плоскостей в наше время обусловлен запросами теории кодирования и криптографии, задачами сохранения и защиты информации, проблемами в теории машинного зрения и цифровой обработки изображений. Наступает время рождения компьютерной проективной геометрии.

Невозможно объять необъятное. В этих авторы просто хотели донести до современного читателя незначительную часть основной нити становления классических конструкций, которые в наше непростое время вдруг начинают прорывать темноту незнания сильным светом, прожекторами действительно новых, а забытых старых идей, подходов, результатов. Дифференциальная геометрия и топология, флагманы современной геометрии, в приложениях к возделыванию, казалось бы, давно разработанных и закрытых участках науки вдруг, совсем

неожиданно дают здоровые, мощные, явно полезные всходы. Здесь мы имеем ввиду прежде всего «Дифференциальную проективную геометрию». Сейчас важно, опираясь на классику, вспоминая (как талисман) хотя бы некоторые имена выдающихся учёных, кто принимал участие в разработке этого колоссального пласта математики, просто предложить читателю небольшой этюд, памятку, эссе. Мы обращаемся прежде всего к любознательным школьникам, бакалаврам, магистрам, аспирантам, учителям и преподавателям математики, ко всем, кто способен наслаждаться поэзией математики. Надеемся, что каждый читатель найдет что-то интересное, полезное, нужное при чтении этих страниц.

Литература

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
2. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. - 283 с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.2 - М.: Просвещение, 1987. -352 с.
4. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Ч.2. - М.: Просвещение, 1975. – 367 с.
5. Буземан Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. – М.: Издательство ин лит. -1957 -410 с.
6. Гильберт Д., Кон – Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
7. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М.: Наука, 1980. -320 с.
8. Овсиенко В.Ю., Табачников С.Л. Проективная дифференциальная геометрия. М.: МЦНМО, 2008. -280 с.
9. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
10. Понарин Я.П. Аффинная и проективная геометрия. – М.: МЦНМО, 2009. -288 с.
11. Рыбкин Г.Ф., Юшкевич А.П. Историко-математические исследования. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948 -384 с.
12. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. Москва – Ленинград: Главная редакция технико – теоретической литературы, 1937- 263 с.
13. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. – М.: Мир, 1970. -160 с.
14. Юшкевич А.П. История математики//Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948 -1044 с.; С.993-1022.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Казаков Н.А., Солдатенков Р.М.

*Московский государственный областной университет
rm.soldatenkov@mgou.ru, alphan95@mail.ru*

Аннотация

Использование интерактивных геометрических сред в обучении математике является современной возможностью решения многих методических проблем и повышения качества образовательного процесса.

Ключевые слова: интерактивная геометрическая среда, математическая модель, GeoGebra.

Использование современных средств ИКТ является мощным инструментом педагога для повышения качества образовательного процесса. Перспективным направлением при обучении математике является использование интерактивных геометрических сред (ИГС).

Интерактивная геометрическая среда представляет собой программу для визуализации математической информации и получения её наглядного представления. Более широким направлением является использование математических пакетов, однако, обладая более сложной структурой и требуя знания контекстного языка программирования, они менее применимы в школьной среде.

Современные ИГС дают возможность работы с элементами различных математических дисциплин: алгебры, геометрии, теории вероятностей. Применение ИГС целесообразно при решении таких задач, которые требуют построения математической модели [3]. Система операций ИГС совпадает системой операций самой математики. При этом при изменении одной из составных компонентов модели, изменяются и остальные, но отношения между компонентами сохраняется.

При привнесении ИГС в урочную деятельность педагог не только демонстрирует межпредметную связь «математика-информатика», но и отвечает требованиям по формированию и развитию компетентности в области использования ИКТ как со своей стороны, так и со стороны обучающихся [5; 6].

Наиболее простыми и часто используемыми в практике обучения математике ИГС являются «1С: Математический конструктор», «Живая геометрия» и GeoGebra. Последняя из них имеет онлайн версию, более широкие возможности, а также, при авторизации предоставляет доступ к облач-

ному хранилищу и библиотеке [2; 4]. Облачная среда является перспективным направлением использования средств ИКТ. Педагог может заранее подготовить модели и ему не обязательно иметь особое программное обеспечение или хранить модели на внешних носителях: вся информация будет доступна через личный кабинет педагога в среде. Кроме того, облегчается организация распространения моделей среди обучающихся: достаточно лишь организовать доступ по ссылке [6].

Так можем выделить основные преимущества использования среды GeoGebra:

- наличие облачного хранилища;
- бесплатный доступ к различным ресурсам среды;
- наличие русскоязычной версии.
- простота использования и высокий уровень наглядности;
- широкие возможности математизации различного предметного материала школьного курса;
- кроссплатформенность.

Рассматривая возможности использования пакета GeoGebra при решении математических задач можно выделить следующие направления [2]:

- использование в качестве средства визуализации математических объектов;
- использование для эмпирического исследования свойств объектов;
- использование в качестве инструментально-измерительного комплекса.

Решение задач проходит в несколько этапов: визуализация условия (построение модели), выявление свойств (исследование модели) и поиск необходимых геометрических отношений, построение выводов и их математическое обоснование (перенос свойств модели на исходную задачу), подсчёт математических величин и отношений.

Примером эффективного использования GeoGebra является построение пространственных тел и решение задач стереометрии. Современной проблемой обучения математики является проблема развития пространственного мышления. Поскольку построенные модели являются динамическими, то у педагога появляется возможность наглядно продемонстрировать справедливость отношений, изменяя положение фигуры в пространстве геометрической среды. Такой когнитивно-визуальный подход помогает обучающимся развить образность мышления в математической предметной области.

С использованием GeoGebra упрощается процесс решения сложных стереометрических задач. Для решения конкретной задачи при уже построенной модели необходимо осуществить:

- поиск необходимых геометрических соотношений между объектами (прямыми, углами, отрезками, фигурами и плоскостями);

- поиск необходимых числовых соотношений (выражение мер углов, площадей на основе использования планиметрических теорем и свойств).

Рассмотрим пример конкретной задачи [1].

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .

б) Найдите угол между плоскостью $A_1 BD$ и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , $B_1 C_1$, AD .

Работа над задачей происходит следующим образом. Педагог, реализуя проблемное обучение даёт время для самостоятельного осмысления задачи. Через некоторое время демонстрирует первую модель задачи, отвечающую на первый вопрос. На первой модели дан лишь куб и сами точки. Педагог демонстрирует возможность среды по построению плоскости, проходящей через три заданные точки, а затем, строит линию пересечения куба и получившейся плоскости. В сечении получается шестиугольник, исследование двумерного вида которого следует провести с обучающимися (Рис. 1).

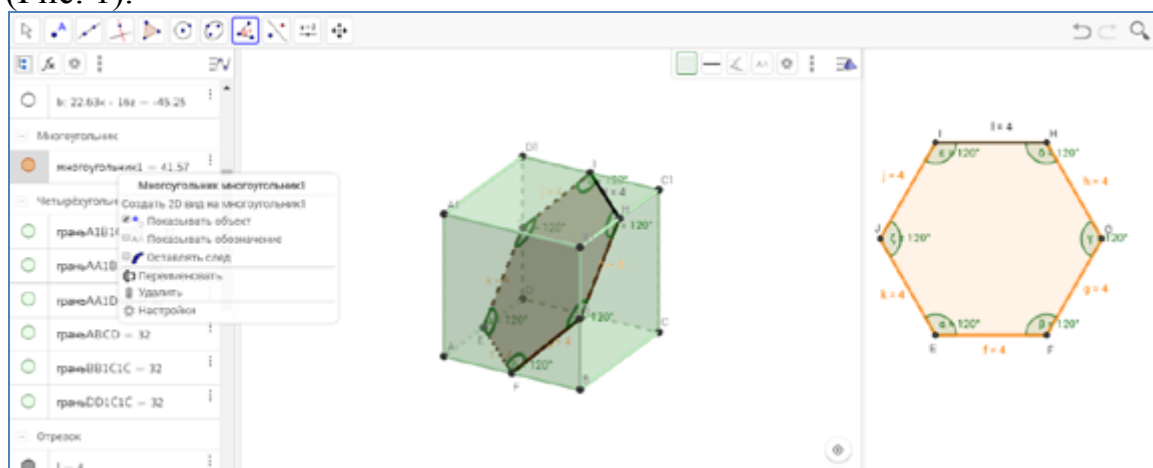


Рис. 1. Исследование сечения

Для ответа на второй вопрос задачи также используется модель. Цель – построение искомого угла. Ход построения проводится аналогично вместе с обучающимися по методу проблемного задания (при этом педагог задаёт наводящие вопросы, приводя школьников к верному решению). После построения угла проводится уже поиск метрических соотношений, чтобы определить его численное выражение.

Так, использование ИГС GeoGebra оказывает помощь педагогу в решении методической проблемы наглядности преподаваемого материала. Кроме того, школьники иной раз убеждаются в справедливости известных геометрических отношений и аксиом, наблюдая свойства динамической модели задачи. Наглядно демонстрируется межпредметная связь математики и информатики.

Необходимо отметить, что использование средств ИКТ и ИГС в частности не является целью урока, но является великолепным средством в арсенале современного педагога для повышения качества образовательного процесса.

Литература

1. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2017. – 256 с.
2. Пикалова В.В. Сотрудничество с Международным институтом GeoGebra как инструмент совершенствования математической подготовки будущего педагога. [Электронный ресурс]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/sotrudnichestvo-s-mezhdunarodnym-institutom-geogebra-kakinstrument-sovershenstvovaniya-matematicheskoy-podgotovki-buduschego> (дата обращения 16.12.2017).
3. Саранцев Г.И. Методика обучения математике: методология и теория. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.twirpx.com/file/583820/> (дата обращения: 24.12.2017).
4. Страница сети Интернет математического пакета GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата обращения: 16.12.2017).
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования/ М-во образования и науки Рос. Федерации. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 48 с.
6. Шевченко В.Г. Облачные технологии как средство формирования ИКТ-компетентности будущих учителей информатики: Автореф. ... канд. пед. наук. — Москва, 2016. — 27 с.

МАТЕМАТИКА В ЖИЗНИ ЧЕЛОВЕКА

Бедрикова Е.А, Ищенко О.С., Марченко Т.А.

*Московский государственный областной университет
mospretty@gmail.com, tatian96@rambler.ru*

Аннотация

В данной статье исследуется вопрос о необходимости изучения математики, рассматриваются способности, которые позволяет развить математика. Анализируется момент потери интереса к изучаемому предмету и помощь со стороны родителей. Сделан вывод о том, что способности и

умения, полученные в ходе изучения математики, будут актуальны в любой сфере деятельности.

Ключевые слова: математика, обучающиеся, знания, способности и умения.

«Математику только затем учить надо,
что она ум в порядок приводит»
Ломоносов М.В.

В мире чисел человек оказывается с рождения: в первые минуты жизни у него измеряют частоту сердечных сокращений, вес и рост. Взрослея, человек не перестанет сталкиваться с математическими моделями, которые применяются как при составлении прогноза погоды, так и при освоении космоса.

«Зачем нужна математика в жизни человека?» - данный вопрос довольно часто можем услышать от обучающихся различных возрастов, например, в школах и в высших учебных заведениях. В мире большое количество людей убеждено, что математика совсем не пригодилась им в жизни. И проблема заключается в том, что при усвоении базовых знаний арифметики, учителя не разъясняют для чего мы делаем это. Судя по всему, главное – это выучить, а вот с какой целью, обучающиеся догадываются сами. Но, к сожалению, задумываются об этом отнюдь не все учащиеся. А когда нет осознания, для чего учить, исчезает не только интерес, но и мотивация выполнять задания и изучать данный предмет. Возможно, что мотивацией для обучающегося будут только оценки, получить которые довольно просто по данному предмету, достаточно неглубоких знаний в математике.

Экзамены, которые сданы на хорошо и отлично, становятся важной целью обучения, по мнению многих учителей. Поэтому заинтересованность в математике возникает при подготовке к ним. Учителя начинают вспоминать с учениками всю школьную программу для решения типовых заданий за короткий период времени. В связи с этим у учеников складывается мнение, что они изучают математику с целью сдать ОГЭ и ЕГЭ, а после эти знания нигде не пригодятся. Лишь малая часть выпускников задумывается о том, что их ждет в будущем. Давайте выясним, зачем нужна математика в жизни человека?

Математика является фундаментальной наукой, ее методы используются, например, в химии, биологии, астрономии, физике. Именно она подталкивает нас строить умозаключения, логически рассуждать, анализировать, обобщать, тренирует память, развивает способность прогнозировать. Данные способности и умения будут актуальны всегда, какую бы сферу деятельности не выбрал для себя человек. Ведь с помощью них мы

можем прогнозировать последствия наших действий, учимся действовать нестандартно, тем самым вызывая интерес со стороны окружающих и добиваясь успехов в жизни.

Повод, по которому вынуждают решать надоедливые задачи, таится не в заучивании различных теорем, например, таких как теоремы Виета, Лагранжа и Пифагора. Это необходимо, чтобы мы научились рассуждать, планировать, прогнозировать, то есть приобрели те качества, которые пригодятся на практике в нашей жизни.

Рассмотрим более подробно способности, которые позволяет развить математика[3]:

- Умение обобщать;
- Способность анализировать;
- Умение выявлять закономерности (выделение существенных связей и структурирование отношений между объектами);
- Умение рассуждать, грамотно формулировать свои мысли, строить умозаключения;
- Способность концентрировать свое внимание при решении различных задач;
- Умение прогнозировать, планировать наперед;
- Навыки абстрактного мышления (последовательное и логичное выстраивание сложных концепций и операций).

Значит, математика состоит не только из теорем, формул, расчетов, это совокупность определенных функций и правил, которые в свою очередь преобразуют наше мышление. Это отображается на способности рассуждать, фиксировать в памяти сложные концепции, четко излагать мысли и создавать определенные взаимосвязи.

Благодаря математике отсутствует потребность в проведении дорогостоящих и опасных экспериментов для реализации какого-либо проекта, например, связанного с освоением космоса. Можно заранее рассчитать необходимые параметры космического аппарата, который будет запущен с земли для доставки космонавтов или продовольствия на орбитальную станцию. Достаточно сложные математические расчеты позволяют не подвергать жизни людей опасностям и обеспечивают точные прогнозы и безопасный полет. Иначе говоря, благодаря математике мы развиваем культуру страны, разрабатываем инновационные технологии, строим города, расширяем возможности для освоения космоса!

Осталось разобраться, когда мы «упускаем из виду» наших детей? Ведь было всё замечательно: первоклассник, стремясь получить новые знания, с удовольствием садился за выполнение различных уроков, по какой причине сейчас нет возможности обязать его это делать? В какой момент его одолело разочарование? Дети в начальных классах весьма любознательные, проявляют интерес ко всему, задают множество вопросов, а когда они справляются с чем-то - вдвойне занимательно и интересно. Тем

самым, у обучающихся порождается стремление учиться новому. В основном, в первых четырех классах с математикой трудностей не возникает, так как еще в детском саду подготавливается фундамент для адаптации в школе.

При переходе в среднюю школу начинается новый период адаптации учащихся, ведь учителей становится больше. В 5 классе они начинают изучать новую тему «Дробные числа», а она не самая простая для понимания и велика вероятность появления недопонимания между обучающимися и математикой. Следовательно, может потребоваться помощь родителей, которые помогут не упустить момент и заинтересовать ученика. Сделав это вовремя, у обучающихся не возникнет проблем с освоением материала. Следующий кризисный период - это 6 класс, в котором появляется тема «Положительные и отрицательные числа». Аналогично, у обучающегося, не разобравшегося с темой до конца, возникнут сложности с последующим усвоением материала. Ведь и эта тема является основой для дальнейшего обучения. С каждым годом учебная программа по математике будет усложняться, и эти основополагающие темы не будут объяснять заново, на их основе будут давать более сложные задачи и разбирать более сложные темы по математике.

В пятом и шестом классах важно ненавязчиво наблюдать за достижениями обучающихся и усвоением ими материала, ведь они приобретают базовые знания, которые в дальнейшем пригодятся при изучении нового материала и начинают осознавать, интересен ли им данный предмет или же нет. На данном этапе необходимо оказать поддержку своему ребенку, разъяснить, зачем изучать математику и какую роль она занимает в жизни.

Отношение к предмету возможно изменить вплоть до девятого класса, позже – это сложнее. Как правило, в старших классах у обучающихся сформировано собственное мнение на то, что их окружает, и вероятнее всего оно непоколебимо. Давайте представим, что математика – многогранный город, впечатляющий своей необъятностью наше воображение. Изучая каждый уголок старинного города, жители приобретают способность последовательно мыслить, находить нужную дорогу, расставлять по своим местам полученные знания и навыки – по-другому его не изведать. И эти бесценные знания и навыки лежат на поверхности, и необходимо всего лишь прийти и приобрести их! Но как действуем мы?

А мы задаем вопрос: «Зачем нам изучать город? Ведь я и так смогу попасть на работу, что ещё мне нужно?» А затем в течение длительного времени странствуем по закоулкам города, чтобы нанести визит родственникам. Вследствие этого необходимо вернуться, посетить неизведанные закоулки, вдруг там осталось что-то интересное, занимательное, важное [1]?

Многие обосновывают отношение к точным наукам так: «Я - гуманитарий, для чего мне нужно это знать?» Задумайтесь, стали бы вы читать

книгу, начинающуюся с середины, продолжающуюся концом повести, заканчивающуюся несвязанными между собой обрывками текста? Недостаток последовательности изложения текста может испортить даже одни из лучших произведений. Вовремя не выявив, что является второстепенным, а что действительно важным, мы способны испортить свои «лучшие произведения» - наши жизни. Знания по математике, которые с каждым годом совершенствуются из простых способов вычислений в сложную многостороннюю систему, сказывающуюся на каждую из возможных областей знаний и систематизирующую различные факты в полную картину мира, являются для нас первостепенными. Другими словами, изучение такой науки, как математика, это один из главных навыков, которые обучающиеся получают в школе, позволяющий им приспособиться к постоянно изменяющейся среде и занять достойное место в социуме.

Литература

1. Прудинский, Г.А., Юсупова К.В. Роль математики в жизни человека //Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. М.: Институт стратегических исследований, 2016. – № 5-4. – С. 75-77.
2. Шикин, Е.В. Гуманитариям о математике [Текст]/ Е.В. Шикин. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 272с.
3. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов/ Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1975. – 462с.

ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ» (1886 - 1917) ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Попова Л. Н. Черепенина А. Е.
popovalili94@mail.ru

Московский государственный областной университет

Аннотация

В настоящей работе проводится анализ одного из журналов, издаваемых в Дореволюционной России. Рассмотрена содержательная часть журнала. Выделены основные части журналов, проанализированы статьи

наиболее интересных выпусков. В большей степени рассмотрены выпуски журнала, издаваемые с 1912 по 1917 годы.

Ключевые слова: Вестник опытной физики и элементарной математики.

Журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики» является одним из старинных журналов, который издавался с 1886 по 1917 годы. Основной целью журнала служит исследование роли математики и математического образования в истории человечества. Данный журнал предназначался, в большей степени, для учителей, а также мог быть полезен студентам.

Всего, за 31 год существования журнала, было выпущено 674 номера. В нем публиковались не только статьи и заметки, но даже задачи. Иногда задача давалась с решением. Среди авторов, чьи статьи публиковались в журнале, были и достаточно известные математики, физики, методисты: Вениамин Фёдорович Каган, Иван Иванович Александров, Мари Кюри, Александр Иванович Гольденберг и другие.

Рассматривая содержательную часть журнала, можно выделить некоторые основные части, из которых состоит журнал:

- 1) Статьи. Широкий спектр статей по алгебре, геометрии и физике.
- 2) Опыты. В некоторых выпусках описываются интересные опыты по различным темам.
- 3) Теория. В каждом выпуске внимание уделяется теоретический материал по алгебре, геометрии или физике. Даются основные понятия, доказательства теорем с обоснованиями. Данный раздел мог бы быть полезен как учителям, так и студентам.
- 4) История математики. Редактор, понимая необходимость развития этого вопроса, открыл раздел, имеющий название «Из прошлого». В нем рассматривались вопросы преподавания математики. На страницах журнала были отражены дискуссии по поводу экзаменов по физике и математики, результатом дискуссии стала необходимость сохранения экзаменов по математике.
- 5) Методика преподавания. Немаловажная роль в журнале была отведена статьям, касающимся методики преподавания геометрии и тригонометрии, а также рецензиям на учебники по геометрии.
- 6) Рецензии к учебникам и книгам.
- 7) Задачи. В данном разделе представлены задачи, которые предлагаются для самостоятельного решения читателям.
- 8) Упражнения. Здесь рассматривались решения задач, которые были представлены в предыдущем выпуске.

В первых номерах журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» в статьях по геометрии весомую часть занимали разработки для педагогов. Разработка и разбор тем являлись хорошим помощником для людей, интересующихся математикой. Очень часто рассматриваются статьи по геометрии, содержащие какие-либо сведения о треугольниках. Особое внимание уделялось геометрии Н. И. Лобачевского. Статьи по геометрии публиковались в больших объемах, нежели чем статьи по алгебре. Это обусловлено тем, что в большинстве статей по алгебре рассматривался традиционный материал, то есть материал, не выходящий за рамки школьной программы. Однако, особое внимание было уделено исследованию функции (нахождение экстремума функции), теории приближенных вычислений.

В последние пять лет существования журнала, журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» дал возможность читателям познакомиться с проблемами общей теории функций, хотя ранее исследования анализа бесконечно малых публиковались в некоторых статьях по определенным вопросам. Основная цель этих выпусков – помочь учителю дать более глубокие знания относительно школьной программы.

При анализе одного из журналов 1886 года, можно заметить, что первоначально вводится понятие «гармонический четырехугольник». Затем представлены теоремы и доказательства, а также выводятся свойства гармонического четырехугольника. В конце данного раздела представлено примечание, в котором говорится о том, что если радиус описанного круга обращается в бесконечность, то вершины гармонического четырехугольника обращаются в четыре гармонические точки, расположенные на одной прямой линии.

Далее читателю предлагается провести исследования по вопросу о гармоническом четырехугольнике.

В следующем разделе журнала дана рецензия на книгу Г. Тенишева, которая носит громкое название, не оправдывая своего содержание. По мнению рецензента, книга трудная к восприятию. Автор пытается убедить читателя в том, что преподавание математики дается очень легко и просто, но читая книгу, читатель начинает понимать, что автор книги не педагог.

Также выпуск содержит 6 задач по геометрии на доказательства теорем, несколько задач на построение и 4 задачи по алгебре.

В разделе «Решение задач» представлен полный разбор задач из журнала «Элементарная математика».

В выпуске 1890 года №85 есть раздел «Взаимные точки треугольника», в котором содержится разбор происхождения данных точек, даны определения, 6 теорем с подробным доказательством. Также представлены лекционные опыты из гидростатики и гидродинамики (опыт, доказывающий существования давление внутри жидкости. Несколько опытов над

скоростью течения жидкости по трубам). Данные опыты способны донести трудную информацию, путем несложных действий.

В разделе «Научная хроника» рассматривается небольшая статья, связанная с периодом вращения Меркурия вокруг своей оси. Представлены задачи (2 физические задачи, 2 задачи по алгебре и 3 задачи геометрического характера). Затем даются геометрические задачи более сложного уровня, а ниже идет разбор решения задач как по алгебре, так и по геометрии.

Проанализировав выпуски №109 - №132 журнала за 1891 год можно отметить, что 109 номер журнала начинается с небольшой теории по физике, а именно о сгустительном гигрометре. Автор представляет задачу, в которой дает объяснение вопроса: почему при охлаждении воздуха упругость пара, находящаяся в нем, не изменяется.

На следующих страницах данного выпуска рассматривается статья «Синтез и анализ в математике». Автор пытается убедить читателей в том, что данный вопрос не имеет никаких трудностей, но он заслуживает особого внимания для педагогов математики.

Следующий блок, рассматриваемый в журнале автор это - механическое превращение умножения в сложение. Представлены два опыта, которые читатель может проделать, читая данный раздел. Первый - механическое превращение умножения в сложение с записью частных произведений. Для исследования данного опыта читателю предлагается заготовить несколько одинаковых по размеру полос, а дальше следовать инструкции. Второй - механическое превращение умножения в сложение без записи цифр частных произведений. Для проведения этого опыта рекомендуется изготовить сетку, с полосами из предыдущего опыта.

Как и в предыдущих выпусках рассматривается научная хроника, а именно статьи: «Кажущееся перемещение земных полюсов», «Недостаток фонографа Эдисона» и «Электризация воздуха водою».

В разделе «Разные известия», говорится о выпуске первого журнала под названием «Метеорологический Вестник».

Раздел «Задачи» включает в себя одну задачу на доказательство тригонометрического тождества, шесть задач по геометрии. В разделе «Упражнения для учеников» предлагаются десять задач по теме: «Осевая симметрия» и прилагается теория.

Рассматриваются решения задач из предыдущих выпусков. Первая геометрическая задача на нахождении хорды. Вторая задача также связана с темой окружности, но на доказательства.

В выпуске №110 первый раздел носит название «Эллипс», а именно полная элементарная теория, которая предназначена для преподавателей. В данном разделе рассмотрены подробно основные понятия, доказательства теорем, леммы, задачи по следующим темам:

- 1) форма эллипса;

- 2) касательная;
- 3) диаметры;
- 4) директрисы.

В данном выпуске продолжается рассуждения, которые были в выпуске №109, на тему синтез и анализ в математике. С этой темой читатель будет встречать и в следующих выпусках вплоть до №113. Приведены отчеты о заседании ученых обществ.

В выпуске №110 в разделе «Задачи» предлагается читателю решить одну задачу по алгебре, шесть задач по геометрии.

В разделе «Решение задач» приведён подробный разбор двух задач по алгебре и одной задачи по геометрии.

Последние страницы данного выпуска посвящены опечатке, которая была сделана в выпуске №104.

Разобрав данный выпуск, можно сделать следующий вывод: данный номер посвящен полностью теории по геометрии, но при этом представлены задачи в большей степени по алгебре, чем по геометрии.

Рассмотрим журнал за 1892 год, где было издано 23 выпуска (№ 133-156).

Выпуск №133 начинается с изучения об атомах, а именно о построения гипотез атомистического старения материи. Рассматривается поверхностное знакомство с одной стороны с формальными законами химических соединений, а с другой - с кинетической теорией газов. Следующий раздел посвящен педагогам, а именно рассматривается вопрос: «Как следует начинать преподавание геометрии». Автор предлагает изменить начало изучения геометрии, отводя большее значение задачам на построение, так как путем построения обучающийся знакомятся с новыми геометрическими объектами. Задачи на построения будут предшествовать теоремам, тем самым указывая обучающимся путь на доказательства. Автор статьи отмечает, что такое изучение геометрии, дает возможность обучающимся закрепить пройденный материал и излагать его математическим языком. Продолжение встречается в выпусках №134 (стр. 27-36), №141 (стр. 193-203)

Далее все разделы в данном выпуске физического содержания. Затрагиваются такие темы как: летательные машины, изготовление и усовершенствование постоянных магнитов, и многое другое.

В выпуске №133 представлено пять задач по алгебре, из них две решены и одиннадцать задач по геометрии, из них шесть решенных на страницах 20-24.

В выпуске №135 на первых страницах размещена историческая заметка о некоторых формулах прямолинейной тригонометрии. Автор отмечает, что довольно трудно найти сочинения, посвящённые элементарной математике, особенно те, в которых рассказывается о происхождении формул.

Далее автор приводит исторические сведения о некоторых формулах тригонометрии и представляет их в трех этапах. Первый этап, когда тригонометрические линии служат хордами двойных дуг, то есть, удвоенные синусы. Второй период вошли половины этих дуг, синусы, а затем и производная от этих величин, косинусы, тангенсы и секансы, а так же тригонометрическая таблица. В третьем периоде, в эпоху Ньютона и Лейбница, было выработано понятие о тригонометрических функциях, были сделаны первые попытки систематического приложения алгебры к выражению и приобретению тригонометрический формул.

В одной из статей этого выпуска рассматривается вопрос: нужны ли экзамены по физике и математике. Продолжение обсуждения этого вопроса можно увидеть и в выпусках следующих выпусках.

Выпуск № 136 содержит статью, которая называется «Одно из метрических свойств треугольника», в которой представлены доказательства основных соотношений треугольника. В конце статьи дается задача на отыскание минимума прямой. Так же представлены заметки об учебнике физики Ковалевского.

В следующих разделах рассказывается о некоторых явлениях, вызываемых магнетизмом в стержнях из железа, никеля и других металлов, подвергнутых предварительному закручиванию,

Рассмотрим, какие задачи были приведены в этом выпуске: три задачи по алгебре, одна из которых на доказательства тригонометрического тождества, похожая на задачу, которая упоминалась в выпуске 1890 года №110. Три задачи по геометрии: на нахождении площади ромба по его стороне и острому углу; на определение геометрического места точек; на доказательства гармоничности четырехугольника.

В разделе «Решение задач» представлены три задачи по алгебре, одна из которых по теме «Система счисления», а также представлена одна задача из геометрии из прошлых выпусков.

Вывод по выпуску № 136 можно сделать следующий: данный выпуск основан в больше степени на теории по геометрии, а также представляет интересные факты по физике. В разделе «Задачи» и «Решение задач» преобладают задачи по алгебре.

Проработав над данным журналом, а именно над разделом «Задачи», можно привести некоторую статистику, в которой видно, что задач геометрии в большей степени преобладает чем задач по алгебре.

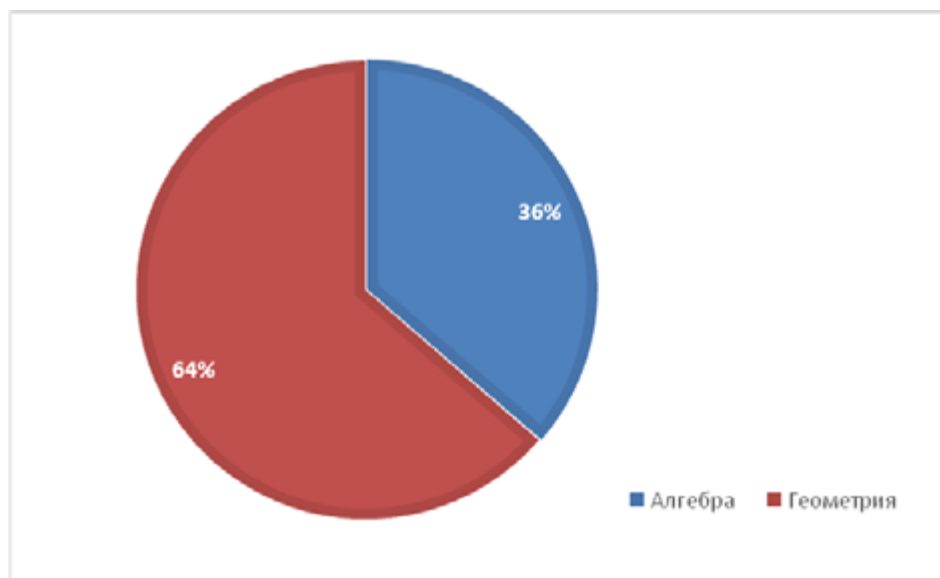


Рис. 1. Процентное соотношение задач в рассматриваемом журнале

Рассмотрев журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», можно сделать следующий вывод о том, что данное издание пользовалось большим спросом в среде студентов и учителей, благодаря тому, что оно позволяло заинтересованным читателям углубиться в знания, узнать, что-то новое. Данный журнал заменял большинство научной литературы, а также помогал узнать научные новости.

Опыт журнала может пригодиться и по сей день, так как многие вопросы, представленные в «Вестнике опытной физики и элементарной математики», до сих пор не освещены в школьной программе.

Литература

1. Кондратьева Г.В. К вопросу о модернизации отечественного школьного математического образования в XIX-XXI веках// Перспективы науки и образования. 2013 № 3 С.55-62
2. Кондратьева Г.В. Из истории частных педагогических журналов второй половины XIX в. // Педагогика. 2002. № 2 .С. 64

Актуальные проблемы математики, физики и математического образования

Подписано к использованию: 20.07.2018 г.

Объём 7,50 Мб.

Тираж 500 экз. (1-й з-д 1–12). Заказ № 2018/05-07.

Изготовлено в Информационно-издательском управлении МГОУ
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А,
(495) 780-09-42 (доб. 1740), iiu@mgou.ru