

Глава 3

ВЛИЯНИЕ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ МОРЕ

§ 3.1. Гравитационно-капиллярные волны от импульсных возмущений

1. Проанализируем влияние сил поверхностного натяжения на неустановившиеся волны, возникающие в двухслойной жидкости постоянной глубины под действием малых возмущений участка дна бассейна, происходящих с вертикальной скоростью [37]:

$$w = af(x, y) \psi(t), \psi(0) = 0. \quad (3.1)$$

Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний — H_2 и ρ_2 соответственно. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится, а свободная поверхность ζ_1 и поверхность раздела слоев ζ_2 горизонтальны.

Считая движение жидкости потенциальным и учитывая поверхностное натяжение на границе жидкость — воздух, получаем для определения потенциалов возмущенных скоростей соответственно в верхнем ($0 < z < H_1$) и нижнем ($-H_2 < z < 0$) слоях уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} = 0, \quad s = 1, 2 \quad (3.2)$$

с граничными

$$L\zeta_1 + L_1\varphi_1 = 0 \text{ при } z = H_1; \quad L_2(\varphi_2 - \gamma\varphi_1) = 0 \text{ при } z = 0; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = w \text{ при } z = -H_2; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0 \quad (3.3)$$

и начальными

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \zeta_1 = 0 \text{ при } t = 0 \quad (3.4)$$

условиями. Здесь

$$L = \rho_1 g - \mu \Delta_h; \quad L_1 = \rho_1 \frac{\partial}{\partial t}; \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \gamma = \rho_1 / \rho_2;$$

μ_1 — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости; ось z направлена вертикально вверх; начало координат выбрано на невозмущенной границе раздела слоев. Кроме того, φ_1 и φ_2 связаны с ζ_1 и ζ_2 условиями $\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z}$, где $s = 1$ при $z = H_1$

и $s = 2$ при $z = 0$. Применив для решения задачи преобразование Фурье по x, y и преобразование Лапласа по t , найдем [37]:

$$\zeta_s = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(m, n) K_s \exp[i(mx + ny)] dm dn, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{\Delta_s}{\Delta} \bar{\psi}(\alpha) e^{\alpha t} d\alpha; \\ \Delta_1 &= \alpha^3 (\operatorname{ch} rH_1 \operatorname{ch} rH_2)^{-1}; \quad \Delta_2 = \alpha(\alpha^2 + rgD_1 \operatorname{th} rH_1) \operatorname{ch}^{-1} rH_2; \\ \Delta &= b\alpha^4 + \alpha_1 \alpha^2 + b^2; \quad b = 1 + \gamma \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2; \\ b_1 &= rg(\varepsilon \operatorname{th} rH_2 + D_1 l_1); \quad l_1 = \operatorname{th} rH_1 + \gamma \operatorname{th} rH_2; \quad r^2 = m^2 + n^2; \\ b_2 &= \varepsilon r^2 g^2 D_1 \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2; \quad D_1 = 1 + T_1 r^2; \quad T_1 = \mu_1/(\rho_1 g), \quad \varepsilon = 1 - \gamma; \\ \bar{\psi}(\alpha) &= \alpha \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\alpha t} dt; \quad \bar{f}(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \times \\ &\quad \times \exp[-i(mx + ny)] dx dy. \end{aligned}$$

Выражение ζ_s представляет собою точное решение поставленной задачи для произвольной функции $\psi(t)$, порядок роста которой меньше экспоненциального, и функции $f(x, y)$, представимой интегралом Фурье.

Вычислив K_s для

$$\psi(t) = \delta(t - t_0), \quad t_0 > 0, \quad (3.6)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, получим в случае осесимметричных ($f(x, y) = f(R)$, $R^2 = x^2 + y^2$) смещений участка дна бассейна с ошибкой порядка $O(R^{-3/2})$ выражение

$$\zeta_s = (-1)^{(s+1)} \frac{a}{V^{2\pi R}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (F_{s1} e^{iRM_1} - F_{s2} e^{iRM_2}) e^{i\pi/4} dr, \quad s = 1, 2, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1n} &= f_1 \gamma_n; \quad F_{2n} = f_1 (rgD_1 \operatorname{th} rH_1 - \gamma_n) \operatorname{ch} rH_1, \quad n = 1, 2; \\ M_{1,2} &= v\tau_{1,2} - r; \quad f_1 = f_2 [b(\gamma_1 - \gamma_2) \operatorname{ch} rH_1 \operatorname{ch} rH_2]^{-1}; \quad f_2 = V\bar{r} \bar{f}(r); \\ \gamma_{1,2} &= \frac{b_1}{2b} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bb_2}{b_1^2}} \right); \quad v = \frac{t}{R}; \quad \tau_{1,2} = V\gamma_{1,2}. \end{aligned}$$

У $t_1 = t - t_0$ опускаем индекс 1. Отсюда методом стационарных фаз найдем асимптотические выражения ζ_s . Фазовая функция M_1 имеет при $u_1 < v^{-1} < u_1^0$ две стационарные точки $r = r_1$ и $r = r_1^*$ (корни уравнения $M_1'(r) = 0$), а при $u_1^0 < v^{-1}$ — только одну $r = r_1^*$, обусловленную исключительно наличием сил поверхностного натяжения на границе жидкость — воздух. Функция $M_2(r)$ для $v^{-1} <$

$< u_1$ также имеет одну стационарную точку $r = r_2$, а для $v^{-1} > u_2^0$ уравнение $M_2'(r) = 0$ действительных корней не имеет. Здесь

$$u_{1,2}^0 = \sqrt{gH/2} (1 \pm \beta)^{1/2}, \quad \beta = (1 - 4\varepsilon H_1 H_2 / H^2)^{1/2},$$

$$u_1 = \tau_1'(r_1^0), \quad H = H_1 + H_2, \quad (3.8)$$

а r_1^0 — положительный корень уравнения $\tau_1''(r) = 0$. Причем $r_1 < r_1^0 < r_1^*$. Вычисляя интеграл (3.7), находим

$$\xi_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & u_1 t < R < u_2^0 t; \\ \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_1 t, \end{cases} \quad (3.9)$$

если $u_2^0 > u_1$, и

$$\xi_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & u_1 t < R < u_1^0 t; \\ O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1 t; \\ \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_2^0 t, \end{cases} \quad (3.10)$$

если $u_2^0 < u_1$. Здесь

$$\eta_{sk} = a_1 F_{sk}(r_k) [-v \tau_k''(r_k)]^{-1/2} \cos \theta_k(r_k);$$

$$\eta_{s1}^* = (-1)^s a_2 F_{s1}(r_1^*) [v \tau_1''(r_1^*)]^{-1/2} \sin \theta_1(r_1^*);$$

$$\theta_k = rR - \tau_k(r) t; \quad a_2 = a/R; \quad k = 1, 2,$$

при $k = 1$ следует положить $a_1 = (-1)^{s+1} a_2$, а при $k = 2 - a_1 = = (-1)^s a_2$.

В формулах (3.9) и (3.10) выражения η_{s1} представляют собой поверхностные, а η_{s2} — внутренние гравитационные волны. Волны же η_{s1}^* обусловлены исключительно наличием сил поверхностного натяжения. Они приходят в заданный район раньше гравитационных и поэтому выполняют роль их предшественников. Задние фронты поверхностных гравитационных и капиллярных волн перемещаются со скоростью u_1 , а скорости передних фронтов гравитационных поверхностных и внутренних волн равны соответственно u_1^0 и u_2^0 . Причем u_1^0 и u_2^0 не зависят от коэффициента капиллярности (см. формулу (3.8)), в то время как u_1 растет с увеличением μ_1 ($u_1 = 0,137$ м/с при $\mu_1 = 0,026$ Н/м и $u_1 = 0,177$ м/с при $\mu_1 = 0,073$ Н/м).

Численный анализ, проведенный для реальных значений μ_1 показал, что $r_1^0 \gg 1$. В частности, для

$$H_1 = 10^2 \text{ м}, \quad H_2 = 10^3 \text{ м}, \quad \varepsilon = 10^{-2} \quad (3.11)$$

и $\mu_1 = 0,073$ Н/м находим $r_1^0 = 144,1 \text{ м}^{-1}$. Так как $r_1^* > r_1^0$, то при исследовании капиллярных волн и влияния поверхностного натяжения на гравитационные волны с большой степенью точности можно

использовать приближение коротких волн (заменить гиперболические тангенсы единицами). Тогда

$$\gamma_1 = rgD_1, \quad \gamma_2 = rge/(1 + \gamma), \quad r_1^0 = (2 - \sqrt{3})^{1/2}/(\sqrt{3}T_1)^{1/2}, \\ u_1 = c_1 \sqrt{g} \sqrt[4]{T_1}, \quad c_1 = [3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})]^{1/4}. \quad (3.12)$$

Стационарные точки r_1 и r_1^* в данном случае находятся из уравнения

$$g(1 + 3T_1 r^2)/(\tau_1) = v^{-1}, \quad (3.13)$$

а r_2 — из уравнения

$$\left[\frac{eg}{r(1 + \gamma)} \right]^{1/2} = 2v^{-1}. \quad (3.14)$$

Местные значения фазовых скоростей и длин гравитационных волн η_{sk} определяются из формул

$$v_k = \tau_k(r_k)/r_k, \quad \lambda_k = 2\pi/r_k, \quad k = 1, 2. \quad (3.15)$$

Для аналогичных характеристик капиллярных волн справедливы формулы

$$v_k^* = \tau_k(r_k^*)/r_k^*, \quad \lambda_k = 2\pi/r_k, \quad k = 1. \quad (3.16)$$

При фиксированном μ_1 с увеличением v^{-1} растет r_1^* . Значения $r_{1,2}$ при этом убывают. Следовательно, для заданного R длина волны λ_1^* увеличивается, а $\lambda_{1,2}$ уменьшается с течением времени. В фиксированный момент времени величина λ_1^* уменьшается с удалением от заднего фронта волн. Значения местных длин $\lambda_{1,2}$ при этом увеличиваются. Причем

$$\lambda_1 > \lambda_1^0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1^* < \lambda_1^0, \quad \lambda_1^0 = 2\pi/r_1^0 \quad (3.17)$$

и $\lambda_1^0 = 4,4 \cdot 10^{-2}$ м, если $\mu_1 = 0,073$ Н/м.

В случае фиксированного μ_1 значения v_2 и v_1 увеличиваются с уменьшением v . При этом

$$0 < v_2 < u_2^0; \quad v_1^0 < v_1 < u_1^0; \quad v_1^0 = \tau_1(r_1^0)/r_1^0. \quad (3.18)$$

Выражение v_1^0 с учетом соотношений (3.12) примет вид

$$v_1^0 = \sqrt{2g}(\sqrt[8]{3} \sqrt[4]{2 - \sqrt{3}})^{-1} \sqrt[4]{T_1}. \quad (3.19)$$

Отсюда при $\mu_1 = 0,073$ Н/м найдем $v_1^0 = 0,28$ м/с.

Рис. 3.1 иллюстрирует зависимость v_1 , λ_1 , v_2 , λ_2 от v^{-1} . На них $v_1 = 1/(v\mu_1)$, $v_2 = 1/(v\mu_2^0)$, $v_3 = u_1^0 u^{-1} - 1$, сплошные линии (правая шкала) отвечают длинам волн $\lambda_{1,2}$, а штриховые (левая шкала) — фазовым скоростям $v_{1,2}$. Аналогичная зависимость с точностью до 2 % в приведенном диапазоне изменения v будет и при отсутствии сил поверхностного натяжения.

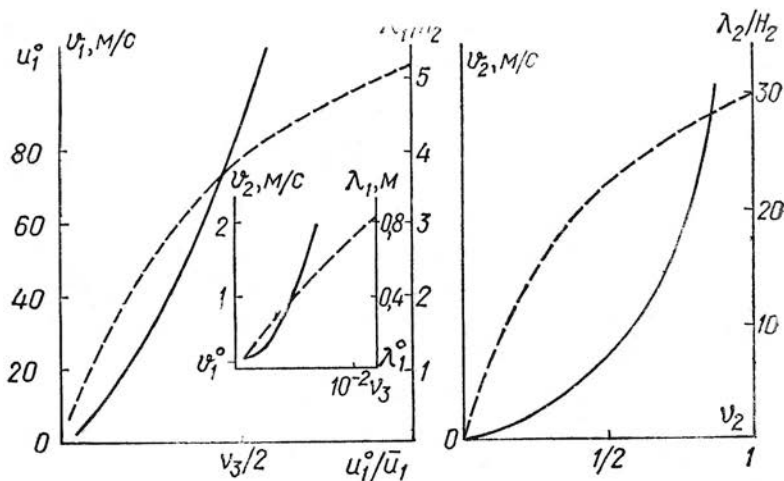


Рис. 3.1

Местная фазовая скорость капиллярных волн имеет при $v^{-1} = \sqrt{2g} \sqrt[4]{T_1}$ минимум, равный $\bar{v}_1 = \sqrt[4]{4g^2 T_1}$. Такому v отвечают

$$r_1^* = 1/\sqrt{T_1}, \quad r_2 = \varepsilon [8(1 + \gamma) \sqrt{T_1}]^{-1}, \quad r_1 = c_0/\sqrt{T_1}, \quad (3.20)$$

где $c_0 \approx 0,139$ — действительный корень уравнения $9c^3 + c^2 + 7c - 1 = 0$. Подставив значения (3.20) в $\gamma_{1,2}$, найдем

$$\gamma_1(r_1^*) = 2g/\sqrt{T_1}, \quad \gamma_1(r_1) = c_0 g (1 + c_0^2)/\sqrt{T_1}, \\ \gamma_2 = \varepsilon^2 g [8(1 + \gamma)^2 \sqrt{T_1}]^{-1}.$$

Если $\mu_1 = 0,073$ Н/м и $v^{-1} = \sqrt{2g} \sqrt[4]{T_1}$, то $\bar{v}_1^* = 0,231$ м/с, $v_1 = 0,433$ м/с, $v_2 = 0,463$ м/с, $\bar{\lambda}_1^* = 17,1 \cdot 10^{-3}$ м, $\lambda_2 = 27,42$ м.

2. Пусть волны генерируются давлениями [25]:

$$p = p_0 f(x, y) \psi(t), \quad \psi(0) = 0, \quad (3.21)$$

действующими над ограниченной областью свободной поверхности в течение малого промежутка времени. Эта задача также сводится к решению уравнений (3.2) с начальными условиями (3.4). На свободной поверхности жидкости и на дне бассейна следует удовлетворить соответственно условиям

$$L\zeta_1 + L_1\varphi_1 = -p \quad \text{при } z = H_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (3.22)$$

а на границе раздела слоев — условиям (3.3). Решая задачу для $\psi(t)$ вида (3.6) так же, как и при импульсных смещениях участка дна, находим в осесимметричном случае для ζ_1 формулы (3.9) и (3.10), где

$$F_{1k} = f_k(r) [\text{erg th } rH_2 \text{ th } rH_1 - \gamma_k (\text{th } rH_1 + \gamma \text{ th } rH_2)]; \\ F_{2k} = f_k(r) \gamma \gamma_k \text{ th } rH_2 \text{ ch}^{-1} rH_1; \quad \theta_k = rR - \tau_k(r) - \pi/2; \quad (3.23) \\ f_k(r) = r^{3/2} g \bar{f}(r) [b(\gamma_1 - \gamma_2) \tau_k]^{-1}; \quad a = p_0/(\rho_1 g); \quad k = 1, 2,$$

а все другие обозначения прежние.

Так как $r_1^* > r_1^0 \gg 1$, то выражение η_{11}^* , представляющее собою капиллярные волны на свободной поверхности, можно записать в виде

$$\eta_{11}^* = \frac{p_0}{R\rho_1} \sqrt{\frac{r_1^*}{g}} r_1^* \bar{f}(r_1^*) \sin [t\tau_1(r_1^*) - r_1^* R - \pi/2].$$

В плоском случае, когда $f(x) = 1$ при $|x| \leq l$ и $f(x) = 0$ при $|x| > l$, для волн с длиной $\bar{\lambda}_1^*$, отвечающей минимуму местной фазовой скорости капиллярных волн, и l , кратных $\pi\sqrt{T_1}/2$, найдем $\eta_{11}^* = -p_0 [2\rho_1 \sqrt{2gx}]^{-1}$. Амплитуда поверхностной волны η_{11} для таких v , $f(x)$ и l определяется из выражения

$$\eta_{11} = -\frac{p_0 \sin(r_1 l)}{\rho_1 \sqrt{gx}} \frac{\sqrt[4]{2c_0(1+c_0^2)}}{\sqrt{3c_0^4+6c_0^2-1}} \cos \left[\frac{x}{\sqrt{T_1}} \left(\sqrt{\frac{c_0}{2}(1+c_0^2)} - c_0 \right) - \pi/4 \right].$$

Амплитуда волн η_{2k} ($k = 1, 2$) и η_{21} при этом благодаря множителю $\text{ch}^{-1} r H_1$ (см. выражение (3.23)) весьма мала для значений (3.11).

3. Пусть в начальный момент $t = 0$ жидкость покоится, а свободная поверхность ζ_1 и поверхность раздела слоев ζ_2 возмущены, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, 0) &= \varphi_2(x, y, z, 0) = \\ &= \zeta_1(x, y, 0) = c_1 \bar{f}_1(x, y), \quad \zeta_2(x, y, 0) = c_2 \bar{f}_2(x, y). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Решая уравнения (3.2) и удовлетворяя условиям (3.3) на свободной поверхности ($z = H_1$) и поверхности раздела ($z = 0$), условию (3.22) на дне ($z = -H$), а также начальным условиям (3.24), получаем методом интегральных преобразований для ζ_s в случае осесимметричных относительно оси z начальных возмущений формулы (3.9), (3.10), где

$$\begin{aligned} F_{1k} &= -f_3 [c_1 \bar{f}_1(r) (\text{erg th } r H_2 - \gamma_k b) - c_2 \bar{f}_2(r) \text{erg th } r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1]; \\ F_{2k} &= f_3 [c_1 \bar{f}_1(r) r g \gamma D_1 \text{th } r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1 - c_2 \bar{f}_2(r) (r g D_1 l_1 - \gamma_k b)]; \\ t_1 &= t; \quad f_3 = \sqrt{r} [b(\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}; \quad a = 1; \quad k = 1, 2; \end{aligned}$$

$\bar{f}_1(r)$, $\bar{f}_2(r)$ — преобразования Фурье функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$.

Анализ полученных формул показывает, что начальные возвышения (3.24) при учете сил поверхностного натяжения генерируют в двухслойной жидкости как гравитационные поверхностные η_{s1} и внутренние η_{s2} , так и чисто капиллярные η_{s1}^* волны. Они отличаются от волн, возникающих под действием импульсных смещений участка дна бассейна и импульсных давлений, только амплитудами.

Таким образом, учет сил поверхностного натяжения при возмущениях вида (3.1), (3.21), (3.24) приводит к образованию в двухслойной жидкости капиллярных волн, выполняющих роль предшественников волн гравитационных.

4. Рассмотрим теперь развитие волн, генерируемых в двухслойной жидкости давлениями (3.21), при учете сил поверхностного натяжения

на границе жидкость — воздух и границе раздела слоев жидкости [47]. Для этого решим уравнения (3.2) с граничными

$$\begin{aligned} L_2 \varphi_1 - \frac{1}{\rho_1} \mu_1 \Delta_h \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{при } z = H_1; \\ L_2 (\varphi_2 - \gamma \varphi_1) - \frac{1}{\rho_2} \mu_2 \Delta_h \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = -H_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

и начальными (3.4) условиями. Здесь μ_1 и μ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения на свободной поверхности и поверхности раздела; L_2 и Δ_h имеют тот же вид, что и в выражении (3.3). Применяя для решения задачи (3.2), (3.4), (3.25) преобразование Фурье по x , y , Лапласа по t и вычисляя интегралы Меллина, найдем в случае импульсных ($\psi(t)$ — дельта-функция) осесимметрично распределенных давлений (3.21) интегральное выражение, описывающее с ошибкой порядка $O(R^{-1/2})$ возвышение свободной поверхности и поверхности раздела:

$$\begin{aligned} \zeta_s &= (-1)^{s+1} \frac{a}{\rho_1 \sqrt{2\pi R}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \bar{f}(r) (F_{s1} e^{iRM_1} - F_{s2} e^{iRM_2}) e^{i\pi/4} dr; \quad (3.26) \\ F_{s1} &= l \frac{l_1 \gamma_s - l_2}{\tau_s}; \quad F_{s2} = l \tau_s \frac{\operatorname{th} r H_2}{\operatorname{ch} r H_1}; \\ l &= b^{-1} (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1} r^{3/2}; \quad l_1 = \operatorname{th} r H_1 + \gamma \operatorname{th} r H_2; \\ l_2 &= r g D_2 \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2; \\ b &= 1 + \gamma \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2, \end{aligned}$$

$M_{1,2}$ и $\tau_{1,2}$ определяются по формулам (3.7), где b_1 и b_2 следует заменить на

$$\begin{aligned} b_1 &= r g (l_1 D_1 + D_2 \operatorname{th} r H_2), \quad b_2 = r g l_2 D_1; \\ D_1 &= 1 + T_1 r^2, \quad D_2 = \varepsilon + T_2 r^2; \quad T_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1 g}, \quad T_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2 g}; \\ \varepsilon &= 1 - \gamma, \quad \gamma = \rho_1 / \rho_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из интеграла (3.26) методом стационарных фаз найдем при условии $\gamma |\mu_2 - \mu_1| < \mu_1$ асимптотические выражения ζ_1 и ζ_2 .

Поверхностное натяжение на разделе слоев вносит лишь незначительные количественные изменения в поведение фазовой функции $M_1(r)$, имеющей, как и в случае $\mu_2 = 0$, две $r = r_1$, $r = r_1^*$ или одну $r = r_1^*$ стационарные точки, если $u_1 < v^{-1} < u_1^0$ или $v^{-1} > u_1^0$ соответственно. Если $v^{-1} < u_1$, то функция $M_1(r)$ стационарных точек не имеет.

Зависимость же M_2 от r при отсутствии сил поверхностного натяжения на разделе слоев качественно иная, чем для $\mu_2 \neq 0$. В первом случае ($\mu_2 = 0$) уравнение $M_2^1(r) = 0$ или вообще не имеет действительных корней, если $v^{-1} > u_2^0$, или имеет только один положительный корень $r = r_2$ при $v^{-1} < u_2^0$. Если же $\mu_2 \neq 0$, то фазовая функ-

ция $M_2(r)$ при $v^{-1} < u_2$ не имеет стационарных точек, а при $u_2 < v^{-1} < u_2^0$ и $v^{-1} > u_2^0$ имеет две $r = r_2$, $r = r_1^*$ и одну $r = r_2^*$ стационарные точки соответственно. Здесь

$$u_2 = \tau_2'(r_2^0), \quad r_2 < r_2^0 < r_2^*, \quad (3.28)$$

r_2^0 — положительный корень уравнения $\tau_2'(r) = 0$; u_2^0 определяется выражением (3.8)

Отметим, что стационарные точки $r = r_1^*$ и $r = r_2^*$ обусловлены соответственно поверхностным натяжением на границе жидкость — воздух и на разделе слоев.

Вычислив интегралы (3.26) методом стационарных фаз, найдем

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s2} = \eta_{s1}^* + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_1^0 t < R < u_2^0 t; \\ \eta_{s2} + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_2 t < R < u_1 t; \\ O(R^{-3/2}), & R < u_2 t \end{cases} \quad (3.29)$$

при $u_2^0 > u_1$ и

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_1 t < R < u_1^0 t; \\ \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1 t; \\ \eta_{s2} + \eta_{s2}^* + O(R^{-3/2}), & u_2 t < R < u_2^0 t; \\ O(R^{-3/2}), & R < u_2 t \end{cases} \quad (3.30)$$

при $u_2^0 < u_1$, где

$$\eta_{sk} = A_{sk}(r_k) \sin \theta_k(r_k), \quad \eta_{sk}^* = -A_{sk}(r_k^*) \cos \theta_k(r_k^*); \\ A_{sk} = (-1)^k \frac{a F_{sk} \bar{f}(r)}{R \rho_s \sqrt{|\tau_k''(r)|} v}, \quad \theta_k(r) = rR - \tau_k(r)t. \quad (3.31)$$

В случае

$$r_1 H_3 \gg 1, \quad H_3 = \min(H_1, H_2) \quad (3.32)$$

справедливы формулы

$$\tau_1 = (rgD_1)^{1/2}; \quad \tau_2 = [rgD_2(1+\gamma)^{-1}]^{1/2}; \\ r_2^0 = \left(\varepsilon \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}T_2} \right)^{1/2}; \quad u_2 = c_1 \sqrt{\frac{eg}{1+\gamma}} \sqrt{T_2}; \quad (3.33)$$

r_1^0 , u_1 определяются выражением (3.12), стационарные точки r_1 и r_1^* находятся из уравнения (3.13), стационарные точки r_2 и r_2^* — из уравнения

$$g \frac{(\varepsilon + 3T_2 r_2^2)}{2(1+\gamma)\tau_2} = v^{-1}, \quad (3.34)$$

а условие $u_2^0 = u_1$ выполняется только при толщине верхнего слоя

$$H_1^0 = \frac{u_1^2 (gH_2 - u_1^2)}{g(gH_2 - u_1^2)}.$$

Для параметров

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,03 \text{ Н/м}, \quad \mu_2 = 0,05 \text{ Н/м}; \quad \rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 &= 1004 \text{ кг/м}^3, \end{aligned} \quad (3.35)$$

отвечающих слою нефти, плавающему на слое воды, при $H_2 = 10^3$ м и $H_1 = 10^{-2}$ м получим $r_1^0 = 209,8 \text{ м}^{-1}$, $r_2^0 = 75,1 \text{ м}^{-1}$, $u_1 = 0,147 \text{ м/с}$, $u_2 = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$, $u_1^0 = 99,05 \text{ м/с}$, $u_2^0 = 0,111 \text{ м/с}$.

Из выражений (3.29) и (3.30) видно, что волновое движение на заданном расстоянии от эпицентра возмущений может формироваться под воздействием одной, двух, трех или четырех волн вида (3.31). Четыре волны возможны в области $u_1 t < R < u_2^0 t$ при условии $u_2^0 > u_1$, выполняющемся только для $H_1 < H_1^0$. Величина H_1^0 при значениях (3.35) равна $1,6 \cdot 10^{-1}$ м.

Капиллярные волны η_{s1}^* и η_{s2}^* , обусловленные соответственно поверхностным натяжением на границе жидкость — воздух и границе раздела слоев, не имеют выраженного переднего фронта. Каждая из волн η_{sk}^* ($k = 1, 2$) покрывает область $R > u_k t$. Их задние фронты, движущиеся со скоростями u_k , совпадают с задними фронтами соответствующих гравитационных волн η_{sk} , из которых η_{s1} — поверхностные, а η_{s2} — внутренние. Причем $u_1 > u_2$. Волновое движение в области $R < u_2 t$ (после прохождения заднего фронта волн η_{s2} и η_{s2}^*) складывается из волн с большим порядком затухания, чем у η_{sk} , η_{sk}^* ($k = 1, 2$).

Отметим, что при $\mu_2 = 0$ волна η_{s2}^* не генерируется, а η_{s2} , не имея заднего фронта, покрывает область $R < u_2^0 t$. Нет заднего фронта и у η_{s1} , если $\mu_{1,2} = 0$. В этом случае нет и η_{s1}^* [194].

Передний фронт гравитационной волны η_{sk} перемещается со скоростью u_k^0 , не зависящей от сил поверхностного натяжения (см. выражение (3.8)).

Местные фазовые скорости гравитационных и капиллярных волн вычисляются по формулам $v_k = \tau_k(r_k)/r_k$, $v_k^* = \tau_k(r_k^*)/r_k^*$, а групповые — по формулам $V_k = \tau_1'(r_k)$, $V_k^* = \tau_k'(r_k^*)$. При этом

$$\begin{aligned} v_2^0 < v_2 < u_2^0, \quad v_1^0 < v_1 < u_1^0, \quad v_1^0 = \tau_1(r_1^0)/r_1^0, \quad v_2^0 = \tau_2(r_2^0)/r_2^0, \\ v_2^0 &= \sqrt{\frac{2g\varepsilon}{1 + \gamma^8 \sqrt[4]{\frac{T_2}{\varepsilon}} \sqrt[4]{\varepsilon(2 - \sqrt[4]{\varepsilon}}}}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

В фиксированный момент групповая скорость генерируемых волн увеличивается прямо пропорционально расстоянию от эпицентра возмущений. В точках же на заданном удалении от области возмущений зависимость мгновенной групповой скорости и гравитационных, и ка-

пиллярных волн от времени обратно пропорциональная. Качественно аналогичный характер зависимости от времени (при заданном R) и расстояния (при заданном t) имеют и местные фазовые скорости. Фазовые скорости для наблюдателя в неподвижной системе координат уменьшаются с течением времени, а при фиксированном t увеличиваются с удалением от области давлений. Пренебрегая массовыми силами, найдем, что фазовые скорости поверхностных и внутренних волн составляют $2/3$ от значений соответствующих групповых скоростей.

Местные значения длин гравитационных и капиллярных волн определяются соответственно по формулам $\lambda_{1,2} = 2\pi/r_{1,2}$, $\lambda_{1,2}^* = 2\pi/r_{1,2}^*$. При этом $\lambda_{1,2} > \lambda_{1,2}^0$, $\lambda_{1,2}^* < \lambda_{1,2}^0$, где $\lambda_{1,2}^0 = 2\pi/r_{1,2}^0$. Для $H_1 = 10^{-2}$ м, $H_2 = 10^3$ м и значений (3.35) величины λ_1^0 и λ_2^0 равны $2,9 \cdot 10^{-2}$ и $8,4 \cdot 10^{-2}$ м. В случае слоев воды с такими толщинами $\lambda_1^0 = 4,4 \cdot 10^{-2}$ м, $\lambda_2^0 = 4,1$ м при $\mu_1 = 0,074$ Н/м и $\mu_2 = 0,08$ Н/м. Местные длины капиллярных волн на заданном удалении растут со временем, а при фиксированном t уменьшаются по мере увеличения расстояния. Что касается гравитационных волн, то их местные длины при фиксированном R убывают с ростом t , а при фиксированном t растут с увеличением R .

Количественный анализ зависимости волнового движения от сил поверхностного натяжения проводился для распределенных по закону $f(R) = 1$ при $R \leq l$ и $f(R) = 0$ при $R > l$ импульсных давлений (3.21) в случае нефтяного слоя ($\rho_1 = 870$ кг/м³), плавающего на слое воды, и в случае двух слоев воды разной плотности ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$). При нефтяном слое на его верхней и нижней границах коэффициенты поверхностного натяжения принимались равными (в Н/м):

$$\mu_1 = 0,04, \quad \mu_2 = 0,06; \quad (3.37)$$

$$\mu_1 = 0,03, \quad \mu_2 = 0,06; \quad (3.38)$$

$$\mu_1 = 0,04, \quad \mu_2 = 0,05; \quad (3.39)$$

$$\mu_1 = 0,03, \quad \mu_2 = 0,05. \quad (3.40)$$

В случае двух слоев воды разной плотности коэффициенты поверхностного натяжения на границах верхнего слоя равнялись (в Н/м):

$$\mu_1 = 0,074, \quad \mu_2 = 0,08; \quad (3.41)$$

$$\mu_1 = 0,05, \quad \mu_2 = 0,08; \quad (3.42)$$

$$\mu_1 = 0,05, \quad \mu_2 = 0,1; \quad (3.43)$$

$$\mu_1 = 0,074, \quad \mu_2 = 0,1. \quad (3.44)$$

Расчеты проводились для $l = 1$ м, толщины верхнего слоя 10^{-2} и $5 \cdot 10^{-3}$ м при H , равном 10^3 и 10^2 м.

Анализ результатов показал, что при рассматриваемых значениях параметров скорость заднего фронта поверхностных волн практически не зависит от H_2 , H_1 и μ_2 , а определяется лишь коэффициентом поверхностного натяжения на свободной поверхности верхнего слоя. Величина u_1 с хорошим приближением может быть определена по формуле (3.12).

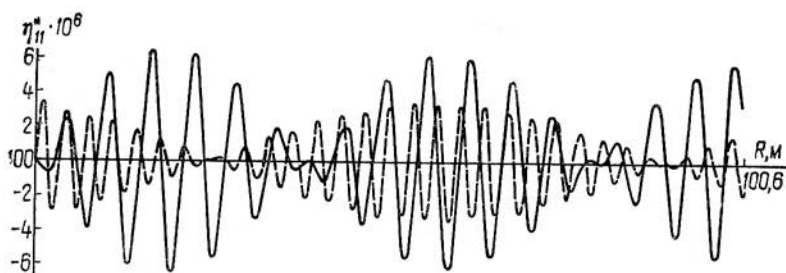


Рис. 3.2

Изменение толщины нижнего слоя и коэффициента поверхностного натяжения на свободной поверхности практически не оказывает влияния на скорость заднего фронта внутренних волн. Числовое значение этой скорости зависит главным образом от толщины верхнего слоя, перепада плотности и поверхностного натяжения на границе раздела слоев. Причем величина u_2 с уменьшением H_1 убывает, а с увеличением μ_2 растет. В частности, при $\mu_2 = 0,05$ Н/м скорость u_2 равна $8,4 \cdot 10^{-2}$ м/с и $7,4 \cdot 10^{-2}$ м/с для H_1 , равного 10^{-2} и $5 \cdot 10^{-3}$ м соответственно. Если же $\mu_2 = 0,06$ Н/м, то значению $H_1 = 10^{-2}$ м отвечает $u_2 = 8,7 \cdot 10^{-2}$ м/с.

На свободной поверхности и поверхности раздела слоев волны распространяются в виде волновых пакетов (цугов), характеризующихся законом пространственного распределения возмущений (3.21). Для принятого $f(R)$ длина цуга гравитационных (капиллярных) поверхностных волн в фиксированный момент $t = t_1$ увеличивается с удалением от эпицентра возмущений при $R < c_1 t_1$ ($R < c_2 t_1$) и уменьшается, если $R > c_1 t_1$ ($R > c_2 t_1$). Например, для $t_1 = 556,78$ с в случае двух слоев воды при $H_1 = 10^{-2}$ м и значениях (3.41) длина первого в областях $R > 100$, $R > 102$, $R > 150$ цуга волн η_{s1}^* равна соответственно 0,23; 0,32; 0,13. Для гравитационных (капиллярных) внутренних волн длины цугов увеличиваются в областях $R < c_3 t_1$ ($R < c_4 t_1$) и уменьшаются при $R > c_3 t_1$ ($R > c_4 t_1$). Здесь

$$c_{1,2} = \tau_1'(\bar{r}_{1,2}), \quad c_{3,4} = \tau_2'(\bar{r}_{3,4}), \quad \bar{r}_1 < \bar{r}_2, \quad \bar{r}_3 < \bar{r}_4;$$

$\bar{r}_{1,2}$ — положительные корни уравнения $\tau_1'''(\tau) = 0$; $\bar{r}_{3,4}$ — положительные корни уравнения $\tau_2'''(\tau) = 0$.

Длина цугов поверхностных капиллярных волн практически не зависит от коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела слоев. А с увеличением μ_1 она растет. Это иллюстрируется рис. 3.2, где приведена с точностью до множителя a зависимость $\eta_{11}^*(R)$ в области $100,15 \text{ м} \leq R \leq 100,6 \text{ м}$ при $t_1 = 556,78$ с. Сплошная кривая отвечает значениям (3.41), а штриховая — значениям (3.43). В одной и той же области в заданный момент длина цуга капиллярных волн для верхнего нефтяного слоя меньше, чем для слоя воды. В частности, при $H_1 = 10^{-2}$ м, $H_2 = 10^3$ м и $R > 150$ м длина первого цуга равна 0,08 м для значений (3.37) и 0,13 м для значений (3.41). Длина цугов внутренних капиллярных волн, увеличивающаяся

с ростом μ_2 , при рассмотренных значениях параметров не зависит от поверхностного натяжения на границе жидкость — воздух. Причем она существенно больше, чем длина поверхностных волновых пакетов. Например, длина первого в области $R > 150$ м внутреннего цуга для нефтяного слоя равна 0,9 и 0,8 м, если μ_2 принимает значения 0,06 и 0,05 Н/м. Для слоя воды такой же толщины длина соответствующего волнового пакета 1,4 и 1,2 м, если μ_2 равно 0,1 и 0,08 Н/м. С уменьшением толщины верхнего слоя длина волнового пакета незначительно возрастает. В частности, для верхнего слоя воды толщиной $5 \cdot 10^{-3}$ и 10^{-2} м при значениях (3.41) длина первого внутреннего волнового пакета при $R > 150$ м равна 1,3 и 1,2 м соответственно.

Расстояние между соседними нулями функций $\eta_{sk}^*(R)$ мало меняется в пределах цуга, в то время как с ростом μ_k оно увеличивается (см. рис. 3.2 при $k = 1$). Причем практически μ_2 не влияет на расстояния между нулями для поверхностных волн, а μ_1 — на расстояния для внутренних волн. Для слоя нефти расстояния между нулями $\eta_{sk}^*(R)$ в пределах соответствующего цуга из заданной области меньше, чем в случае двух слоев воды. Например, при $R > 100$ м, $H_1 = 10^{-2}$ м и t_1 , отвечающем рис. 3.2, это расстояние для $k = 1$ в первом цуге равно $1,8 \cdot 10^{-2}$ м, если в верхнем слое вода ($\mu_1 = 0,074$ Н/м), и $0,9 \cdot 10^{-2}$ м, если в верхнем слое нефть ($\mu_1 = 0,04$ Н/м).

Кроме того, результаты численного счета показали, что μ_2 , толщина верхнего слоя жидкости и общая глубина ее почти не влияют на амплитуду поверхностных капиллярных волн η_{s1}^* . Основные изменения амплитуды этих волн происходят за счет μ_1 . Причем уменьшение μ_2 приводит к уменьшению средней амплитуды в цуге. Это справедливо и для слоя нефти, и для слоя воды. Однако количественная зависимость от μ_1 разная для волн η_{11}^* и η_{21}^* , что иллюстрируется рис. 3.3. На нем представлены с точностью до множителя a огибающие A волновых пакетов поверхностных капиллярных волн на свободной поверхности (рис. 3.3, а) и на поверхности раздела (рис. 3.3, б) при $H_1 = 10^{-2}$ м, $H_2 = 10^3$ м, $100 \text{ м} \leq R \leq 102 \text{ м}$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям (3.40), (3.39), (3.41), (3.42). Момент времени принимался равным 556,78 с. Огибающие цугов нефтяного слоя изображены сплошными линиями, а волны на слое воды — штриховыми.

Видно, что для слоя воды увеличение коэффициента μ_1 от 0,05 до 0,074 Н/м приводит к росту амплитуды огибающей первого в области $R > 100$ м цуга волн η_{11}^* в 1,9 раз, а волн η_{21}^* в 6,3 раза. В случае же нефти амплитуда первого цуга для η_{11}^* возросла в 1,15 раз, а для η_{21}^* — в 3,75 раза при изменении μ_1 от 0,03 до 0,04 Н/м. Это свидетельствует о том, что с уменьшением μ_1 усиливается затухание амплитуды поверхностных капиллярных волн с глубиной. Аналогичное явление в фиксированный момент времени для заданного μ_1 имеет место при удалении от эпицентра возмущений. Например, на слое нефти ($\mu_1 = 0,04$ Н/м) толщиной $H_1 = 10^{-2}$ м отношение амплитуд первого из области $R > 100$ м цуга поверхностных капиллярных волн на свободной поверхности к амплитуде первого цуга на границе раздела равно 73. Это же отношение для амплитуд первого цуга из области $R > 150$ м равно 8500.

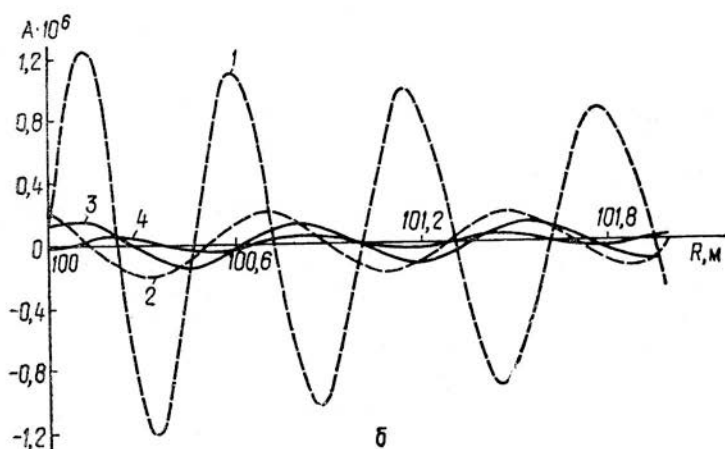
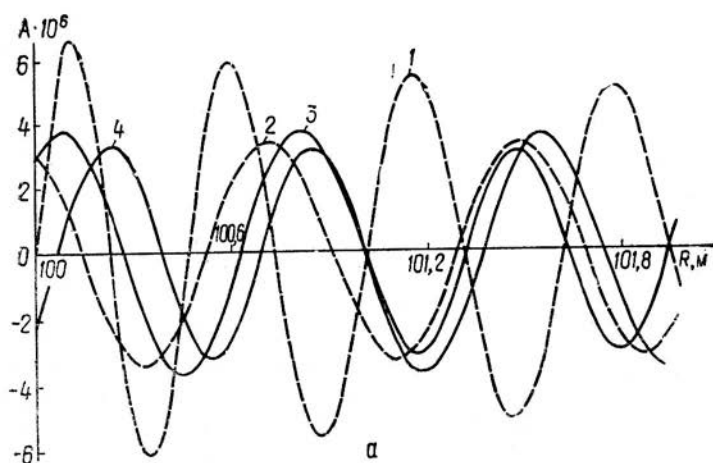


Рис. 3.3

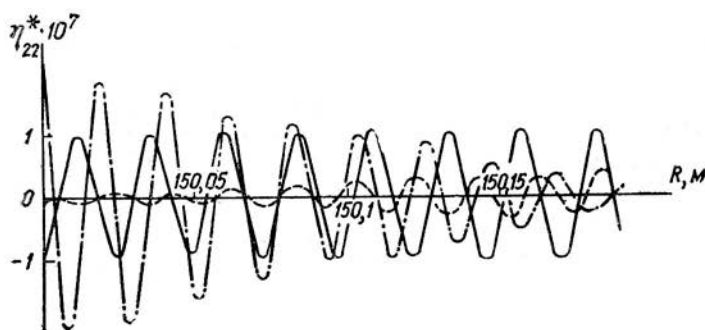


Рис. 3.4

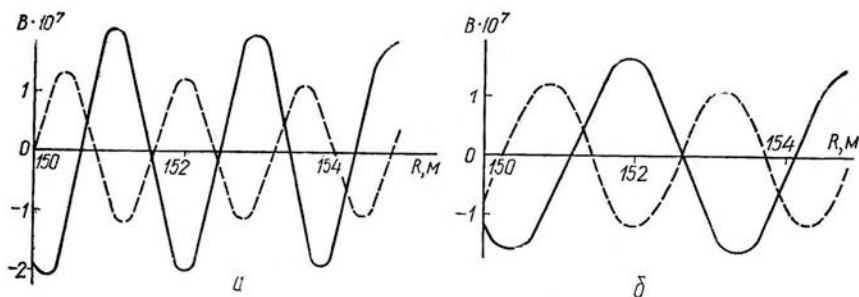


Рис. 3.5

Зависимость амплитуд внутренних капиллярных волн от μ_2 качественно такая же, как и волн η_{s1}^* от μ_1 . Однако на амплитуды внутренних капиллярных волн в отличие от поверхностных влияет и толщина верхнего слоя. Это иллюстрируется рис. 3.4, где с точностью до множителя a представлена зависимость $\eta_{22}^*(R)$ для $t = 1133$ с и $150 \text{ м} \leq R \leq 150,2 \text{ м}$. Сплошная и штриховая кривые здесь отвечают значениям (3.38) и (3.40) при $H_1 = 10^{-2}$ м, а штрихпунктирная — значениям (3.40) при толщине верхнего нефтяного слоя $5 \cdot 10^{-3}$ м. Видно, что большему μ_2 отвечает и большая амплитуда η_{22}^* . Изменение же толщины верхнего слоя сказывается как на амплитуде, так и на распределении η_{22}^* по R . Внутренние капиллярные волны на разделе слоев и их проявления на свободной поверхности находятся в противоположных фазах.

Распределение огибающей B внутренних волновых пакетов на границе раздела слоев по R изображено с точностью до множителя a на рис. 3.5. Верхнему слою воды толщиной 10^{-2} соответствует рис. 3.5, а, а нефтяному слою такой же толщины — рис. 3.5, б. В случае слоя воды $\mu_1 = 0,074$ Н/м, а μ_2 принималось равным 0,1 Н/м (сплошная кривая) и 0,08 Н/м (штриховая кривая). На нефтяном же слое $\mu_1 = 0,03$ Н/м, а μ_2 принималось равным 0,06 Н/м (сплошная кривая) и 0,05 Н/м (штриховая кривая). Видно, что увеличение μ_2 приводит к росту амплитуды огибающей внутренних волновых пакетов. Это относится и к амплитуде цугов внутренних волн, проявившихся на свободной поверхности. Они здесь существенно меньше, чем на границе раздела. Например, при нефтяном слое (рис. 3.5, б) отношение амплитуды первого в области $R > 150$ м цуга на разделе к амплитуде на свободной поверхности равно 20,5 и 34 при $\mu_2 = 0,06$ Н/м и $\mu_2 = 0,05$ Н/м соответственно. Аналогичное отношение в случае слоя воды (рис. 3.5, а) при $\mu_2 = 0,08$ Н/м равно 25 и при $\mu_2 = 0,1$ Н/м — 21.

Значения амплитуд A и B цугов поверхностных η_{s1}^* и внутренних η_{s2}^* волн на расстоянии $R = R_2$ от эпицентра возмущений в момент времени $t = t_2$ можно вычислить по их значениям при $R = R_1$, $t = t_1$ (см. рис. 3.2 и 3.4) из формул $A(R_2, t_2) = R_1 R_2^{-1} A(R_1, t_1)$, $B(R_2, t_2) = R_1 R_2^{-1} B(R_1, t_1)$, если $t_2 = R_2 t_1 / R_1$.

§ 3.2. Волны от импульсных возмущений в потоке неоднородной жидкости

1. Проведем анализ влияния сил поверхностного натяжения на развитие волнового движения в плоском потоке двухслойной несжимаемой идеальной жидкости, возникающего под действием малых вертикальных смещений участка дна бассейна. Жидкость течет в положительном направлении оси x с постоянной скоростью u . В начальный момент времени поток жидкости не возмущен, а свободная поверхность ζ_1 и поверхность раздела ζ_2 горизонтальны. Начиная с момента $t = 0$, участок дна бассейна совершает вертикальное смещение с заданной скоростью,

$$w = af(x) \psi(t), \psi(0) = 0. \quad (3.45)$$

Считая движение жидкости потенциальным, а возмущения малыми, получим с учетом поверхностного натяжения на свободной поверхности для определения потенциалов возмущенных скоростей соответственно в верхнем ($0 < z < H_1$) и нижнем ($-H_2 < z < 0$) слоях уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} = 0, s = 1, 2 \quad (3.46)$$

с граничными (3.3) и начальными (3.4) условиями, где L, L_1, L_2 следует заменить на

$$\begin{aligned} L &= \rho_1 g - \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad L_1 = \rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right); \\ L_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Кинематические условия, связывающие φ_s и ζ_s , при $z = H_1 (s = 1)$ и при $z = 0 (s = 2)$ принимают вид

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} - u \frac{\partial \zeta_s}{\partial x}. \quad (3.48)$$

Применяя для решения задачи преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по времени t , найдем [37]:

$$\zeta_s = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(r) K_s e^{irx} dr; \quad K_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \frac{\Delta_s}{\Delta} \bar{\psi}(\alpha) e^{\alpha t} d\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F^3 (\operatorname{ch} rH_1 \operatorname{ch} rH_2)^{-1}; \quad \Delta_2 = F(F^2 + rgD_1 \operatorname{th} rH_1) \operatorname{ch}^{-1} rH_2; \\ \Delta &= bF^4 + b_1 F^2 + b_2; \quad F = \alpha + iur; \end{aligned}$$

$\bar{f}(r), \bar{\psi}(\alpha)$ — преобразования Фурье и Лапласа функций $f(x)$ и $\psi(t)$ соответственно; b, b_1, b_2, D_1 те же, что и в интеграле (3.5).

Вычислим интегралы Меллина K_s для случая импульсного смещения участка дна бассейна, т. е. для $\psi(t)$ вида (3.6). Тогда

$$\zeta_s = (-1)^{(s+1)} \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 I_{sk};$$

$$I_{sk} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{s1} \exp(i|x|M_k) dr, \quad k=1,2;$$

$$I_{sk} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{s2} \exp(i|x|M_k) dr, \quad k=3,4.$$

Здесь

$$M_{1,2} = \pm [\tau_1(r) \mp ur] v + r \operatorname{sign} x; \quad M_{3,4} = \pm [\tau_2(r) \mp ur] v + r \operatorname{sign} x;$$

$$F_{1n} = f_1 \gamma_n; \quad F_{2n} = f_1 (rg D_1 \operatorname{th} r H_1 - \gamma_n) \operatorname{ch} r H_1, \quad n=1,2;$$

$$f_1 = \bar{f}(r) [b(\gamma_1 - \gamma_2) \operatorname{ch} r H_1 \operatorname{ch} r H_2]^{-1}, \quad v = t/|x|,$$

а $\tau_{1,2}$ те же, что и в интеграле (3.7).

Отсюда методом стационарных фаз найдем асимптотические выражения ζ_s , справедливые на достаточно большом удалении от эпицентра возмущений вверх ($x < 0$) и вниз ($x > 0$) по потоку.

Пусть $x > 0$. В этом случае функция $M_1(r)$ при $u > u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1^0)$ имеет одну $r = r_1^*$, а при $u > u_1^0$, $(u - u_1^0) < v^{-1} < (u - u_1)$ и при $u_1 < u < u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1)$ — две $r = r_1$, $r = r_1^*$ стационарные точки. Две стационарные точки $r = -r_1$ и $r = -r_1^*$, корни уравнения $\tau_1' = u - v^{-1}$, эта функция имеет и при $u \geq 0$, $(u + u_1) < v^{-1} < (u + u_1^0)$, а если $u \geq 0$, $v^{-1} > (u + u_1^0)$, то есть только одна стационарная точка $r = -r_1^*$. Одну стационарную точку $r = r_3$, корень уравнения $\tau_2' = u - v^{-1}$, имеет и $M_3(r)$ для $u > u_2^0$, $(u - u_2^0) < v^{-1} < u$ или $u < u_2^0$, $v^{-1} < u$. Если $u \geq 0$, $u < v^{-1} < u + u_2^0$, то стационарной точкой для $M_3(r)$ будет $r = -r_3$. Условия существования стационарных точек у функций $M_2(r)$, $M_4(r)$ такие же, как и для функций $M_1(r)$, $M_3(r)$ соответственно. Отличаются стационарные точки для $M_2(r)$ от стационарных точек для $M_1(r)$ и стационарные точки для $M_4(r)$ от стационарных точек для $M_3(r)$ только знаками.

Для $x < 0$ функция $M_1(r)$ при $u_1^0 > u$, $v^{-1} > (u_1^0 - u)$ имеет одну стационарную точку $r = r_1^*$. Если $u < u_1$, $(u_1 - u) < v^{-1} < (u_1^0 - u)$ или $u_1 < u < u_1^0$, $v^{-1} < (u_1^0 - u)$, то у нее имеется две стационарные точки $r = r_1^*$ и $r = r_1$ — корни уравнения $\tau_1' = u + v^{-1}$. При аналогичных условиях и функция $M_2(r)$ имеет стационарные точки, отличающиеся от стационарных точек для $M_1(r)$ только знаками. Одну стационарную точку $r = r_3$, корень уравнения $\tau_2' = u + v^{-1}$, имеет и функция $M_3(r)$, если $u < u_2^0$, $v^{-1} < u_2^0 - u$. При таком же условии стационарной точкой для $M_4(r)$ будет $r = -r_3$. Для других u и v стационарных точек функции $M_k(r)$, $k=1-4$, не имеют.

ТАБЛИЦА 3.1

Скорость потока		Волны					
		поверхностные		внутренние		капиллярные	
		$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$	$x < 0$
$u_1 > u_2^0$	$u > u_1^0$	η_{s1}, η_{s2}	—	η_{s3}, η_{s4}	—	η_{s1}^*, η_{s2}^*	—
	$u_1 < u < u_1^0$	η_{s1}, η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	—	η_{s1}^*, η_{s2}^*	η_{s1}^*
	$u_2^0 < u < u_1$	η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	—	η_{s2}^*	η_{s1}^*
	$u < u_2^0$	η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	η_{s3}	η_{s2}^*	η_{s1}^*
$u_1 < u_2^0$	$u > u_1^0$	η_{s1}, η_{s2}	—	η_{s3}, η_{s4}	—	η_{s1}^*, η_{s2}^*	—
	$u_2^0 < u < u_1$	η_{s1}, η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	—	η_{s1}^*, η_{s2}^*	η_{s1}^*
	$u_1 < u < u_2^0$	η_{s1}, η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	η_{s3}	η_{s1}^*, η_{s2}^*	η_{s1}^*
	$u < u_1$	η_{s2}	η_{s1}	η_{s3}, η_{s4}	η_{s3}	η_{s2}^*	η_{s1}^*

Отметим, что стационарные точки $\pm r_1^*$ обусловлены поверхностным натяжением на границе жидкость — воздух.

2. После применения метода стационарной фазы получим, что вид свободной поверхности и поверхности раздела слоев жидкости вверх ($x < 0$) и вниз ($x > 0$) по потоку формируется из нескольких волн затухающих с расстоянием от эпицентра возмущений как $1/\sqrt{|x'|}$,

$$\eta_{sk} = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} F_{s1}(r_1) [-v\tau_1''(r_1)]^{-1/2} \cos \theta_k, \quad k = 1, 2;$$

$$\eta_{sk} = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} F_{s2}(r_3) [-v\tau_2(r_3)]^{-1/2} \cos \theta_k, \quad k = 3, 4; \quad (3.49)$$

$$\eta_{sk}^* = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} F_{s1}(r_1^*) [v\tau_1(r_1^*)]^{-1/2} \cos \theta_k^*, \quad k = 1, 2;$$

$$\theta_k = |x| M_k(r_1) + (-1)^k \pi/4; \quad \theta_k^* = |x| M_k(r_1^*) - (-1)^k \pi/4, \quad k = 1, 2;$$

$$\theta_k = |x| M_k(r_3) + (-1)^k \pi/4, \quad k = 3, 4.$$

Волны η_{sk} — обычные гравитационные поверхностные η_{s1}, η_{s2} и внутренние η_{s3}, η_{s4} , незначительно деформированные за счет капиллярности, а η_{sk}^* — чисто капиллярные волны. При $\mu_1 = 0$ волны η_{sk}^* не генерируются.

Число и характер волн, формирующих волновое возмущение потока вверх ($x < 0$) и вниз ($x > 0$) по нему, определяются скоростью потока. Это иллюстрируется табл. 3.1. Видно, что кроме гравитационных волн в области $x < 0$ (вверх по потоку) находится одна (η_{s1}^*), а для $x > 0$ (вниз по потоку) одна (η_{s2}^*) или две (η_{s1}^*, η_{s2}^*) системы капиллярных волн. Причем вверх по потоку от эпицентра возмущений капиллярные волны η_{s1}^* существуют только при условии $u < u_1^0$. Отметим, что хотя η_{s1}^* образуются за счет поверхностного натяжения, их существование в области $x > 0$ возможно только

в условиях потока при определенной его скорости. В этой же области благодаря наличию потока находятся и волны η_{s1} , η_{s3} . Местные фазовые скорости u_k и v_k^* волн η_{sk} и η_{sk}^* определяются из выражений

$$v_k = u + (-1)^k \frac{\tau_1(r_k)}{r_k}, \quad k = 1, 2; \quad v_k = u + (-1)^k \frac{\tau_2(r_k)}{r_k}, \quad k = 3, 4;$$

$$v_k^* = u + (-1)^k \frac{\tau_1(r_k^*)}{r_k^*}, \quad k = 1, 2,$$

где

$\tau_1(r_k)/r_k$ ($k = 1, 2$); $\tau_2(r_k)/r_k$ ($k = 3, 4$); $\tau_1(r_k^*)/r_k^*$ ($k = 1, 2$) — местные фазовые скорости соответствующих волн при отсутствии потока.

Передние фронты волн η_{s2} , η_{s3} , η_{s4} в области $x > 0$ перемещаются вниз по потоку со скоростями $u + u_1^0$, $u + u_2^0$, u , а капиллярные волны η_{s2}^* не имеют выраженного переднего фронта. Если при $x > 0$ образуются η_{s1} , η_{s1}^* , обусловленные в этой области наличием потока, то их передние фронты, движущиеся вниз по потоку, имеют скорость $(u - u_1)$ ($u > u_1$).

В области $x < 0$ передние фронты волн η_{s1} , η_{s3} перемещаются вверх по потоку со скоростями $u_1^0 - u$, $u_2^0 - u$ ($u_1^0 > u$, $u_2^0 > u$), а у волн η_{s1}^* переднего фронта нет.

При $x > 0$ волны η_{s2} , η_{s2}^* имеют задние фронты. Они движутся вниз по потоку с одинаковой скоростью $u + u_1$. Задний фронт внутренних волн η_{s4} перемещается здесь в том же направлении со скоростью u , а η_{s3} имеют задний фронт лишь при $u > u_2^0$. Его скорость перемещения $u - u_2^0$. У капиллярных волн η_{s1}^* в этой области нет заднего фронта, а у η_{s1} он есть только при $u > u_1^0$ и имеет скорость $u - u_1^0$. При $x < 0$ задний фронт имеется лишь у волн η_{s1}^* , η_{s1} и только для $u < u_1$. Скорость его перемещения вверх по потоку равна $u_1 - u$.

Напомним, что величины u_1^0 , u_1 , u_2^0 определяются из формул (3.8).

§ 3.3. Гравитационно-капиллярные волны от периодических давлений, действующих в ограниченной области свободной поверхности

1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ двухслойная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины покоится, а ее свободная поверхность ζ_1 и поверхность раздела слоев ζ_2 горизонтальны. С момента $t = 0$ над ограниченной областью свободной поверхности начинает действовать периодическая система давлений

$$p = p_0 f(x, y) \exp(i\sigma t). \quad (3.50)$$

Проанализируем развитие волнового движения с учетом поверхностного натяжения на границе вода — воздух и на разделе слоев жидкости.

Потенциалы возмущенных скоростей φ_1 и φ_2 верхней ($0 < z < H_1$) и нижней ($-H_2 < z < 0$) жидкостей определим из уравнений (3.2), граничных (3.25) и начальных (3.4) условий путем применения преобразований Фурье по x , y и Лапласа по t . Для нахождения $\zeta_{1,2}$ используем кинематические соотношения

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \text{ при } z = H_1, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0. \quad (3.51)$$

В результате получим [41]:

$$\zeta_s = \frac{a}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} r \bar{f}(m, n) K_s \exp[i(mx + ny)] dm dn, \quad s = 1, 2; \quad (3.52)$$

$$K_s = a_s \sum_{k=1}^5 p_{sk} \alpha_k, \quad a_1 = b^{-1}, \quad a_2 = b^{-1} \gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1;$$

$$p_{1k} = \begin{cases} (l_2 - \sigma^2 l_1) / \Delta_1, & k = 1; \\ (-1)^{k+1} (l_2 - \gamma l_1) / \Delta_k, & k = 2, 3; \\ (-1)^k (l_2 - \gamma_2 l_1) / \Delta_k, & k = 4, 5; \end{cases} \quad p_{2k} = \begin{cases} -\sigma^2 / \Delta_1, & k = 1; \\ (-1)^k \gamma_1 / \Delta_k, & k = 2, 3; \\ (-1)^{k+1} \gamma_2 / \Delta_k, & k = 4, 5; \end{cases}$$

$$\Delta_1 = (\sigma^2 - \gamma_1)(\sigma^2 - \gamma_2), \quad \Delta_{2,3} = 2\tau_1(r)(\gamma_1 - \gamma_2)(\sigma \mp \tau_1);$$

$$\Delta_{4,5} = 2\tau_2(r)(\gamma_1 - \gamma_2)(\sigma \mp \tau_2); \quad \alpha_1 = \exp(i\sigma t); \quad a = p_0 / \rho_1;$$

$$\alpha_{2,3} = \exp(\pm i\tau_1 t); \quad \alpha_{4,5} = \exp(\pm i\tau_2 t); \quad r^2 = m^2 + n^2,$$

где l , l_2 , b определяются из формул (3.26), а $\gamma_{1,2}$ и $\tau_{1,2}(r)$ — из (3.7), (3.27). В случае осесимметричного ($f(x, y) = f(R)$) распределения возмущений (3.50) выражение (3.52) для больших R с ошибкой порядка не ниже $R^{-3/2}$ принимает вид

$$\zeta_s = a \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_0^{\infty} f_1 K_s \cos(rR - \pi/4) dr, \quad f_1 = r^{3/2} \bar{f}(r). \quad (3.53)$$

Если $\mu_1 > \gamma | \mu_2 - \mu_1 |$, то $\gamma_1 > \gamma_2$. Подынтегральные выражения в формуле (3.53) представляют собой при этом аналитические функции в окрестности положительной действительной полуоси, так как особенности типа простых полюсов (корни уравнений $\sigma = \tau_1(r)$ и $\sigma = \tau_2(r)$), имеющиеся у отдельных слагаемых, взаимно погашаются. Поэтому исходный путь интегрирования можно деформировать в путь L_1 , идущий вдоль указанной полуоси и обходящий эти особенности. Уравнения $\sigma = \tau_1$ и $\sigma = \tau_2$ имеют только по одному положительному корню $r = r_1$ и $r = r_2$ соответственно ($r_2 > r_1$). Будем обходить точки $r = r_{1,2}$ по малым полуокружностям в верхней полуплоскости. При таком обходе полюсов на контуре L_1 выполняются условия $\operatorname{Re}(i\tau_{1,2}) \leq \leq 0$. Запишем теперь выражение (3.53) так:

$$\zeta_s = \sum_{k=1}^5 \eta_k^s;$$

$$\eta_k^s = \frac{a}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{L_k} a_s f_1 p_{sk} \alpha_k \cos(rR - \pi/4) dr, \quad s = 1, 2. \quad (3.54)$$

Путь L_2 обходит только точку $r = r_1$, путь L_4 — только точку $r = r_2$, а контуры L_3 и L_5 совпадают с положительной полуосью. Выполнение условий $\operatorname{Re}(i\tau_{1,2}) \leq 0$ обеспечивает стремление к нулю интегралов η_k^s ($k = 2, \dots, 5$; $s = 1, 2$) при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного R . Следовательно, η_k^s ($s = 1, 2$) — установившиеся периодические колебания свободной поверхности ($s = 1$) и поверхности раздела ($s = 2$). Выражения η_k^s ($k = 2, \dots, 5$; $s = 1, 2$) характеризуют процесс развития и установления волн. Вычисляя η_1^s методом контурного интегрирования, находим

$$\begin{aligned}\eta_1^s &= \eta_{s1} + \eta_{s2}, \quad s = 1, 2; \\ \eta_{sk} &= (-1)^k a \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \frac{M(r_k)}{V_k} N_s(r_k) \sin \theta_k; \\ N_1 &= f_1(l_2 - \sigma^2 l_1) \sigma^{-1}; \quad N_2 = -f_1 \gamma \sigma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1; \\ M &= [b(\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}; \quad V_k = \tau'_k(r_k); \quad \theta_k = r_k R - \sigma t - \pi/4; \\ \gamma &= \rho_1/\rho_2, \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

где штрих — производная по r . Это выражение при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ описывает периодический по времени волновой процесс, генерируемый возмущениями (3.50) в двухслойной жидкости без учета поверхностного натяжения [183, 194].

Асимптотические выражения неустановившихся волн для больших значений R найдем методом стационарных фаз, представив их для удобства дальнейших исследований в виде

$$\begin{aligned}\eta_k^s &= \sum_{j=1}^2 I_{kj}^s, \quad k = 2, \dots, 5, \quad s = 1, 2; \\ I_{kj}^s &= \frac{a}{\sqrt{2\pi R}} \exp[(-1)^j i\pi/4] \int_{L_k} a_s f_1 p_{sk} \exp[iRM_{kj}(r)] dr; \\ M_{kj} &= \begin{cases} (-1)^{j+1} r + (-1)^k v\tau_1(r), & k = 2, 3; \\ (-1)^{j+1} r + (-1)^k v\tau_2(r), & k = 4, 5, \end{cases}\end{aligned}$$

где $v = t/R$.

Фазовые функции M_{21} , M_{32} , M_{41} , M_{52} не имеют стационарных точек при $r > 0$, а на контурах L_k ($k = 2, \dots, 5$) выполняются условия $\operatorname{Re}(iM_{k1}) \leq 0$ при k , равных 2 и 4, и $\operatorname{Re}(iM_{k2}) = 0$ при k , равных 3 и 5. Поэтому для всех значений v интегрированием по частям находим, что интегралы I_{k1}^s при k , равных 2 и 4, и I_{k2}^s при k , равных 3 и 5, стремятся к нулю, по крайней мере, как $R^{-3/2}$.

Фазовая функция M_{22} для $u_1 > 1$ также не имеет стационарных точек. При $u_1^0 v < 1$ она имеет одну $r = r_{12}$, а при $u_1 < v^{-1} < u_1^0$ — две $r = r_{11}$ и $r = r_{12}$ стационарные точки, являющиеся корнями уравнения $v\tau'_1(r) - 1 = 0$. Эти же стационарные точки имеет и фазовая функция M_{31} , так как $M_{22} = -M_{31}$. Фазовые функции M_{42} и M_{51} ($M_{42} = -M_{51}$) при $u_2 v < 1$ имеют по одной $r = r_{22}$, а при $u_2^0 < v^{-1} < u_2$ — по две $r = r_{21}$ и $r = r_{22}$ стационарные точки. Эти точки —

корни уравнения $v\tau'_2(\tau) - 1 = 0$. Здесь u_1^0, u_2^0, u_1 определяются из выражения (3.8), а u_2 — из формул (3.28).

Отметим, что стационарная точка r_{12} обусловлена поверхностным натяжением на границе вода — воздух, а r_{22} — поверхностным натяжением на границе раздела слоев. Так как на контуре L_k (k равно 3 и 5) выполняется условие $\text{Re}(iM_{k1}) = 0$, то интеграл I_{k1}^s (s равно 1 и 2) затухает с удалением от области возмущений не медленнее, чем R^{-1} . Порядок затухания определяется наличием стационарных точек у фазовой функции M_{k1} . Условие

$$\text{Re}(iM_{k2}(r)) \leq 0 \quad (3.55)$$

выполняется на контуре L_2 только при $vV_1 > 1$, а на контуре L_4 только при $vV_2 > 1$. Для $vV_1 < 1$ (при $k = 2$) и $vV_2 < 1$ (при $k = 4$) условие (3.55) выполняется на контуре L_k^* , совпадающем с L_k везде, кроме окрестности полюса $r = r_k$. Заменяя в I_{k2}^s интегрирование по L_k интегрированием по L_k^* (k равно 2 и 4) с добавлением соответствующего вычета и подставляя найденные выражения η_k^s ($k = 1, \dots, 5$) в (3.54), получим

$$\text{при } V_1 > V_2 \quad (3.56)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_2 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(R^{-1}), & u_2 t < R < V_2 t; \\ \eta_{s1} + O(R^{-1}), & V_2 t < R < V_1 t; \\ O(R^{-1}), & R > V_1 t, \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\text{при } V_1 < V_2 \quad (3.58)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_2 t; \\ \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(R^{-1}), & u_2 t < R < V_1 t; \\ \eta_{s2} + O(R^{-1}), & V_1 t < R < V_2 t; \\ O(R^{-1}), & R > V_2 t. \end{cases} \quad (3.59)$$

Отсюда видно, что на свободной поверхности и поверхности раздела генерируется по две системы цилиндрических волн, бегущих в радиальном направлении и затухающих с расстоянием как $R^{-1/2}$. Волны η_{s1} поверхностные, а η_{s2} внутренние. Их длины и фазовые скорости

$$\lambda_{1,2} = 2\pi/r_{1,2} \text{ и } v_{1,2} = \sigma/r_{1,2}. \quad (3.60)$$

При этом основные возмущения, амплитуды которых убывают с ростом R как $R^{-1/2}$, сосредоточены в области $R < V_2 t$, если $V_2 > V_1$, и в области $R < V_1 t$, если $V_2 < V_1$. Характер волнового процесса в фиксированной точке $R = R_0$ также зависит от соотношения скоростей передних фронтов V_1 поверхностных и V_2 внутренних волн.

В случае (3.56) в заданную точку приходят сначала поверхностные волны η_{s1} , а через $R_0(V_1 - V_2)/(V_1 V_2)$ секунд после них придут внутренние волны η_{s2} .

Если выполняется условие (3.58), то первыми приходят в точку $R = R_0$ внутренние волны, а через $R_0(V_2 - V_1)/(V_1 V_2)$ секунд — поверхностные. Вся область впереди фронта основных возмущений по-

крыта капиллярными и гравитационными волнами, затухающими с ростом R не медленнее, чем R^{-1} и $R^{-3/2}$ соответственно. При этом капиллярные волны возникают как в случае $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, так и при учете поверхностного натяжения только на границе жидкость — воздух ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$) или только на границе раздела слоев ($\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$). Отметим, что наличие сил поверхностного натяжения на границе раздела слоев жидкости ($\mu_2 > 0$) является необходимым условием выполнения неравенства (3.58). При $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$ это неравенство выполняется для $\sigma > \tau_1(r_3)$, а для $\sigma < \tau_1(r_3)$ справедливо неравенство (3.56). Здесь $r = r_3 > 0$ — единственная точка пересечения функций $\tau'_1(r)$ и $\tau'_2(r)$, т. е. единственный положительный корень уравнения

$$\tau'_1(r) - \tau'_2(r) = 0. \quad (3.61)$$

Если $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, то уравнение (3.61) либо вообще не имеет действительных корней, либо имеет один $r = r_5$ (точка касания функций τ'_1 и τ'_2) или два $r = r_3$, $r = r_4$ ($r_4 > r_3$) положительных корни. Неравенство (3.58) выполняется только при наличии двух корней и только в диапазоне $\tau_1(r_3) < \sigma < \tau_1(r_4)$. При $\sigma < \tau_1(r_3)$ и $\sigma > \tau_1(r_4)$ выполняется условие (3.56) и, следовательно, ξ_s определяется из формулы (3.57). Для фиксированных H_1 и μ_1 интервал частот, где выполняется условие (3.58), сужается с уменьшением μ_2 . Например, для

$$H_2 = 10^3 \text{ м}, \rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \mu_1 = 0,074 \text{ Н/м}, \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4} \quad (3.62)$$

и $H_1 = 10^{-2}$ м формула (3.59) при $\mu_2 = 0,1$ Н/м верна для $35 \text{ с}^{-1} < \sigma < 112 \text{ с}^{-1}$, а при $\mu_2 = 0,08$ Н/м — для $42 \text{ с}^{-1} < \sigma < 71 \text{ с}^{-1}$. В случае фиксированных μ_2 , H_1 указанный интервал частот увеличивается с уменьшением μ_1 . Если же $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$, а уравнение (3.61) не имеет действительных корней (для $\mu_2 = 0,08$ Н/м и параметров (3.62) это будет при $H_1 \leq 2 \cdot 10^{-3}$ м), или $\mu_2 = 0$ (независимо от μ_1), то $V_1 > V_2$ при любых σ .

2. Пусть выполняется условие (3.32). Тогда $\tau_1(r)$ и $\tau_2(r)$ имеют вид (3.33). Принимая это во внимание, из уравнений $\sigma = \tau_1(r)$, $\sigma = \tau_2(r)$ находим

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad r_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22}; \\ \alpha_{1k} &= \left[\frac{\sigma^2}{2T_2g} \left(1 + (-1)^k \sqrt{1 + \frac{4g^2}{27T_1\sigma^4}} \right) \right]^{1/3}; \\ \alpha_{2k} &= \left[\frac{(1+\gamma)\sigma^2}{2T_2g} \left(1 + (-1)^k \sqrt{1 + \frac{4g^2\varepsilon^3}{27T_2\sigma^4(1+\gamma)^2}} \right) \right]^{1/3}; \\ V_1 &= \frac{g}{2\sigma} (1 + 3T_1r_1^2), \quad V_2 = \frac{g}{2\sigma(1+\gamma)} (\varepsilon + 3T_2r_2^2). \quad \varepsilon = 1 - \gamma. \end{aligned}$$

Причем V_k связаны с v_k соотношениями

$$V_1 = \frac{v_1}{2} \frac{1 + 3T_1r_1^2}{1 + T_1r_1^2}, \quad V_2 = \frac{v_2}{2} \frac{\varepsilon + 3T_2r_2^2}{\varepsilon + T_2r_2^2}.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае длина λ_1 , фазовая скорость v_1 и скорость переднего фронта V_1 поверхностных волн не зави-

сят от поверхностного натяжения между слоями жидкости, а поверхностное натяжение на границе воздух — жидкость не влияет на длину λ_2 , фазовую скорость v_2 и скорость переднего фронта V_2 внутренних волн.

Фазовая скорость поверхностных волн как функция частоты колебаний σ при $\sigma = \sigma_1$ достигает минимума. При этом

$$v_1(\sigma_1) = \bar{v}_1 = \sqrt[4]{2gT_1}, \quad \lambda_1(\sigma_1) = \bar{\lambda}_1 = 2\pi\sqrt{T_1}, \quad V_1(\sigma_1) = v_1, \\ \sigma_1 = \sqrt[4]{2gT_1}^{1/4}. \quad (3.63)$$

Скорость переднего фронта поверхностных волн как функция σ принимает минимальное значение при $\sigma = \sigma_2$. Причем

$$V_1(\sigma_2) = c_2\bar{v}_1, \quad v_1(\sigma_2) = c_4\bar{v}_1, \quad \lambda_1(\sigma_2) = c_3\bar{\lambda}_1, \quad \sigma_2 = c_1\sigma_1; \\ c_1 = 4,74 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 7,68 \cdot 10^{-1}, \quad c_3 = 2,542, \quad c_4 = 1,212. \quad (3.64)$$

Фазовая скорость внутренних волн принимает минимальное значение при $\sigma = \sigma_3$. В этом случае

$$v_2(\sigma_3) = \bar{v}_2 = \kappa\sqrt[4]{T_2/\epsilon}, \quad \lambda_2(\sigma_3) = \bar{\lambda}_2 = 2\pi\sqrt{T_2/\epsilon}; \\ V_2(\sigma_3) = v_2, \quad \sigma_3 = \kappa\sqrt[4]{\epsilon/T_2}, \quad \kappa = [2g\epsilon/(1 + \gamma)]^{1/2}. \quad (3.65)$$

При $\sigma = \sigma_4$ достигается минимальное значение скорости переднего фронта внутренних волн V_2 . Причем

$$V_2(\sigma_4) = c_2v_2, \quad v_2(\sigma_4) = c_4\bar{v}_2, \quad \lambda_2(\sigma_4) = c_3\bar{\lambda}_2, \quad \sigma_4 = c_1\sigma_3. \quad (3.66)$$

Отсюда видно, что минимумы фазовой скорости и скорости переднего фронта для поверхностных волн достигаются на частотах в $[T_2(1 + \gamma)^2/(\epsilon^3 T_1)]^{1/4}$ раз больших, чем для волн внутренних. При этом минимальные значения фазовых скоростей и скоростей передних фронтов поверхностных волн в $[T_1(1 + \gamma)^2/(\epsilon T_2)]^{1/4}$ раз больше, чем соответствующие значения для внутренних волн. Из формул (3.63)—(3.66) также следует, что

$$\frac{v_1(\sigma_1)}{v_1(\sigma_2)} = \frac{v_2(\sigma_3)}{v_2(\sigma_4)} = \frac{1}{c_4}, \quad \frac{V_1(\sigma_2)}{V_1(\sigma_1)} = \frac{V_2(\sigma_4)}{V_2(\sigma_3)} = c_2,$$

т. е. отношение минимального значения фазовой скорости к ее значению в точке минимума скорости переднего фронта не зависит от параметров задачи и одинаково для поверхностных и внутренних волн. Таким же свойством обладает и отношение минимального значения скорости переднего фронта к ее значению в точке минимума фазовой скорости.

В точках минимума фазовых скоростей фазовая скорость равна скорости переднего фронта как для поверхностных ($\sigma = \sigma_1$), так и для внутренних ($\sigma = \sigma_3$) волн. Для $\sigma < \sigma_k$ основное влияние в формировании поверхностных ($k = 1$) или внутренних ($k = 3$) волновых движений оказывают силы тяжести, а при $\sigma > \sigma_k$ — силы поверхностного натяжения на свободной поверхности или границе раздела слоев. При $\mu_1 > 0$ ($\mu_2 > 0$) для $\sigma < \sigma_1$ ($\sigma < \sigma_3$) выполняется неравен-

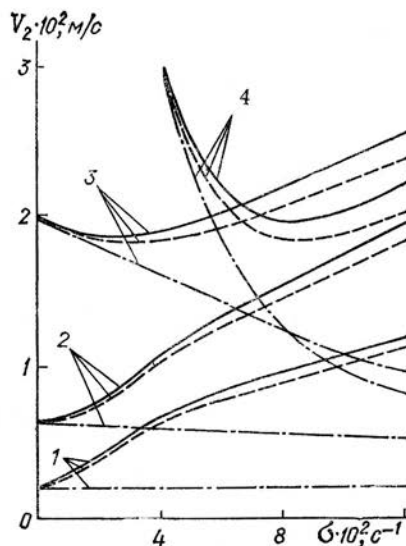


Рис. 3.6

воды справедливы при условии (3.32), т. е. для коротких волн.

3. Для выяснения количественной зависимости характеристик генерируемых волн от поверхностного натяжения между слоями жидкости проводились расчеты для μ_2 , равных 0; 0,08; 0,1 Н/м. Значения $\rho_{1,2}$ и H_2 брались из выражения (3.62), толщина верхнего слоя H_1 менялась от 10^{-3} до 1 м, а μ_1 принималось равным $7,4 \cdot 10^{-2}$; 5×10^{-2} Н/м. Анализ результатов расчетов показал, что при $H_1 = 1$ м и $\sigma \geq 4 \cdot 10^{-2}$ с $^{-1}$ волновой процесс, генерируемый возмущениями (3.51), с хорошим приближением можно описать формулами, полученными в предыдущем пункте при условии (3.32). Для больших H_1 эти формулы справедливы на более низких частотах. Оказалось, что длина, фазовая скорость и скорость переднего фронта внутренних волн практически не зависят от поверхностного натяжения на границе жидкость — воздух. Влияние μ_2 на аналогичные характеристики поверхностных волн также не существенно, в то время как фазовая скорость, длина и скорость переднего фронта внутренних волн увеличиваются с ростом μ_2 . Зависимость элементов внутренних волн от μ_2 начинает проявляться при меньших σ , чем зависимость поверхностных волн от μ_1 .

На рис. 3.6 приведена функция $V_2(\sigma)$ при значениях параметров (3.62) и $\mu_1 = 0,074$ Н/м. Номера кривых 1, 2, 3 и 4 соответствуют H_1 , равным 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} и 1 м. Сплошные линии отвечают μ_2 , равному 0,1 Н/м, штриховые — 0,08 Н/м, штрихпунктирные — нулю. Отсюда видно, что $V_2(\sigma)$ при $\mu_2 > 0$ и $H_1 < 10^{-2}$ м монотонно возрастает, а при $\mu_2 > 0$ и $H_1 \geq 10^{-2}$ м имеет минимум. Положение точки минимума зависит от значений μ_2 и H_1 . При фиксированном μ_2 уменьшение H_2 приводит к перемещению точки минимума в сторону мень-

ство $v_1 > V_1(v_2 > V_2)$, а для $\sigma > \sigma_1(\sigma > \sigma_3)$ — неравенство $v_1 < V_1(v_2 < V_2)$. В случае же $\mu_1 = 0$ ($\mu_2 = 0$) при всех σ выполняется условие $v_1 > V_1(v_2 > V_2)$.

Приведем для примера величины $\bar{\lambda}_k$, $\bar{v}_k$, $\bar{\sigma}_k$ при значениях параметров (3.62):

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \bar{v}_1 = 2,32 \times \\ &\times 10^{-1} \text{ м/с}, \quad \sigma_1 = 84,519 \text{ с}^{-1}; \\ \bar{\lambda}_2 &= 8,97 \cdot 10^{-1} \text{ м}, \quad \bar{v}_2 = 2,4 \times \\ &\times 10^{-2} \text{ м/с}, \quad \sigma_3 = 0,166 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

С ростом $\mu_{1,2}$ величины $\bar{\lambda}_{1,2}$ и $\bar{v}_{1,2}$ увеличиваются, а $\sigma_{1,3}$ уменьшаются. В частности, при $\mu_2 = 0,1$ Н/м и ρ_2 из условия (3.62) находим $\bar{\lambda}_2 = 1,003$ м, $\bar{v}_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\sigma_3 = 1,57 \cdot 10^{-1}$ с $^{-1}$. Напомним, что полученные в этом пункте вы-

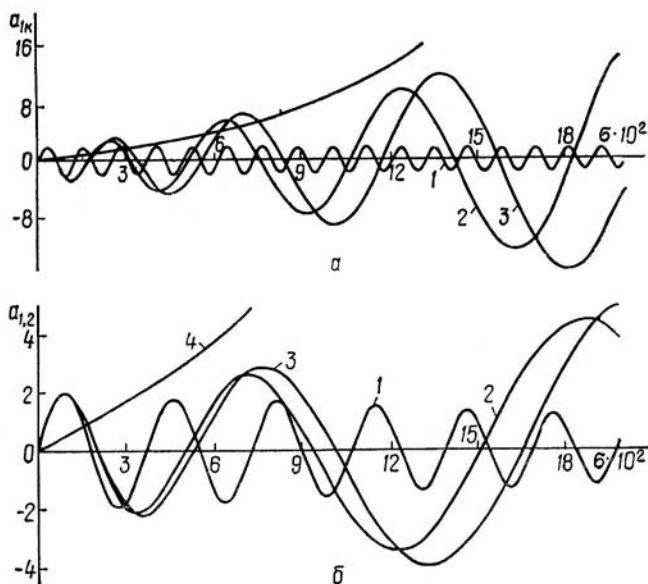


Рис. 3.7

ших частот. Аналогичное перемещение происходит при увеличении μ_2 в случае фиксированных H_1 .

Для фиксированных H_1 и σ увеличение μ_2 приводит к росту V_2 , причем меньшему значению H_1 отвечает меньшее значение σ , начиная с которого заметно проявляется влияние μ_2 . Качественно похожа и зависимость v_2 от μ_2 , H_1 , σ . При этом $\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_1 = u_2^0$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_2 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} v_2 = \infty$. Для $H_1 < 10^{-2}$ м неравенство $V_2 > v_2$ выполняется при $\sigma > 0$, а для $H_1 > 10^{-2}$ м — только при $\sigma > \sigma_3$. На частотах же $\sigma < \sigma_3$ фазовая скорость внутренних волн больше скорости их переднего фронта, т. е. $v_2 > V_2$. Здесь $\sigma = \sigma_3$ — частота, на которой достигается минимум $v_2(\sigma)$. Функция $\lambda_2(\sigma)$ монотонно убывающая для любых H_1 и $\mu_{1,2}$. При этом $\lambda_{1,2} \rightarrow 0$, когда $\sigma \rightarrow \infty$.

3. В плоском случае возмущений (3.50) для

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq h; \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad (3.67)$$

$\sigma \leq 0,2 \text{ с}^{-1}$, $h = 1$ м и значений параметров (3.62) проводились еще и расчеты амплитуд генерируемых волн. На рис. 3.7, а для $H_1 = 10^{-3}$ м и на рис. 3.7, б для $H_1 = 10^{-2}$ м приведена зависимость амплитуды a_{11} поверхностной η_{11} и амплитуды a_{12} внутренней η_{12} волн на свободной поверхности для частоты колебаний. Кривые 1, 2 и 3 представляют функцию $a_{12}(\sigma)$ при μ_2 , равном 0; 0,08 и 0,1 Н/м соответственно, а кривые 4 — $a_{11}(\sigma)$.

Отсюда следует, что при таких значениях толщины верхнего слоя внутренние волны оказывают заметное влияние на вид свободной по-

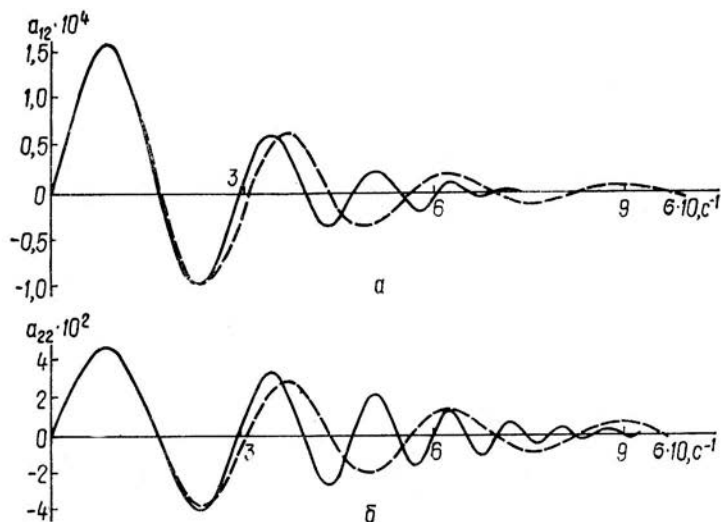


Рис. 3.8

поверхности, так как их амплитуда здесь для $\sigma < 0,035 \text{ с}^{-1}$ может превышать амплитуду поверхностных волн даже при $\mu_2 = 0$. Поверхностное натяжение между слоями приводит к значительному увеличению амплитудных значений функции $a_{12}(\sigma)$. Так, при $\sigma = 0,135 \text{ с}^{-1}$ величина a_{12} для $\mu_2 = 0,1 \text{ Н/м}$ больше, чем для $\mu_2 = 0$, в 6,5 раза, если $H_1 = 10^{-3} \text{ м}$, и в 3,6 раза, если $H_1 = 10^{-2} \text{ м}$.

С увеличением частоты в рассматриваемом диапазоне амплитуда функции $a_{12}(\sigma)$ для $\mu_2 = 0$ затухает, а при $\mu_2 > 0$ возрастает, что хорошо видно на рис. 3.7, б.

Отметим, что диапазон частот, где амплитуда внутренних волн может быть больше амплитуды волн поверхностных, увеличивается с ростом μ_2 . В частности, при $H_1 = 10^{-2} \text{ м}$ и $\mu_2 = 0,1 \text{ Н/м}$ это условие выполняется для $\sigma < 0,1 \text{ с}^{-1}$, в то время как при $\mu_2 = 0$ — только для $\sigma < 0,035 \text{ с}^{-1}$ (рис. 3.7, б).

При фиксированном σ изменение H_2 в пределах $0,001$ — $1,0 \text{ м}$ практически не сказывается на $a_{11}(\sigma)$. Амплитуда a_{12} при этом с увеличением H_1 может в зависимости от μ_2 как увеличиваться, так и уменьшаться. Например, для $\sigma = 0,2 \text{ с}^{-1}$ отношение значения a_{12} при $H_1 = 10^{-3} \text{ м}$ к ее значению при $H_1 = 10^{-2} \text{ м}$ равно $0,8$; $4,1$ и $0,8$ при μ_2 , равных соответственно 0 ; $0,08$ и $0,1 \text{ Н/м}$.

4. Приведем результаты численного анализа влияния поверхностного натяжения на распределение по частоте колебаний амплитуд поверхностных и внутренних волн на свободной поверхности и на границе раздела, выполненного [44] для функции (3.67) и значений

$$H_2 = 1 \text{ м}, \quad \rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}, \quad h = 1 \text{ м} \quad (3.68)$$

при H_1 , равном 10^{-1} и 10^{-2} м . Коэффициент μ_1 принимался равным 0 и $0,074 \text{ Н/м}$, а μ_2 — 0 и $0,1 \text{ Н/м}$. Рис. 3.8 и 3.9 иллюстрируют с точ-

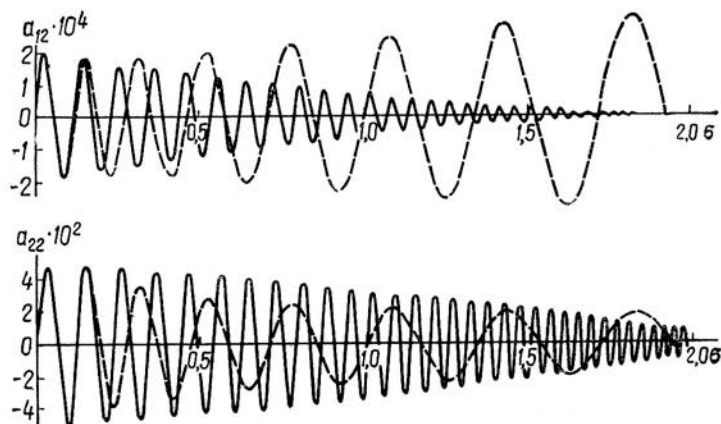


Рис. 3.9

ностью до множителя $(-1)^{k+1} \rho_0 / \rho k$ зависимость амплитуд a_{12} и a_{22} внутренних волн η_{12} и η_{22} от частоты колебаний при $\mu_1 = 0,074$ Н/м, $H_1 = 10^{-1}$ м (рис. 3.8) и $H_1 = 10^{-2}$ м (рис. 3.9). Сплошные линии отвечают $\mu_2 = 0$, а штриховые — $\mu_2 = 0,1$ Н/м. На рис. 3.8 видно, что при $H_1 = 10^{-1}$ м поверхностное натяжение на границе раздела слоев может существенным образом изменить распределение a_{12} и a_{22} по σ . С ростом σ амплитуды функций $a_{12}(\sigma)$ и $a_{22}(\sigma)$ для $\mu_2 = 0$ и $\mu_2 \neq 0$ затухают. Однако $a_{12}(\sigma)$, представляющая амплитуду внутренних волн на свободной поверхности, затухает быстрее, чем $a_{22}(\sigma)$. Действительно, при $\mu_2 = 0$ отношение первого максимума $a_{12}(\sigma)$ к четвертому составляет $d_1 = 15,4$. Аналогичное отношение для $a_{22}(\sigma)$ равно $d_2 = 3,8$. Учет поверхностного натяжения на границе раздела уменьшает затухание и $a_{12}(\sigma)$, и $a_{22}(\sigma)$. В этом случае $d_1 = 7,7$ и $d_2 = 3,3$ для $\mu_2 = 0,1$ Н/м. Кроме того, расстояние между нулями функций $a_{12}(\sigma)$ и $a_{22}(\sigma)$ для $\mu_2 = 0$ уменьшается с ростом σ , в то время как при $\mu_2 \neq 0$ в области $\sigma > \sigma_4$ это расстояние увеличивается. Здесь σ_4 — частота, при которой достигается минимум скорости переднего фронта внутренних волн. Для значений параметров, соответствующих рис. 3.8, $\sigma_4 = 0,46$ с $^{-1}$, $\min V_2 = 3,96 \cdot 10^{-2}$ м/с. Минимум фазовой скорости внутренних волн $\bar{v}_2 = 4,39 \cdot 10^{-2}$ м/с достигается при этом на частоте $\sigma_3 = 0,79$ с $^{-1}$. Отметим, что и для $\mu_2 = 0$ и для $\mu_2 \neq 0$ функция $a_{12}(\sigma)$ имеет те же нули, что и $a_{22}(\sigma)$. Амплитуда внутренних волн на свободной поверхности при фиксированном σ во много раз меньше, чем на границе раздела, а отношение a_{22}/a_{12} в точках экстремума рассматриваемых функций растет с увеличением частоты. В частности, для $\mu_2 = 0$ это отношение примерно равно 300 при $\sigma = 0,09$ с $^{-1}$ и 1200 при $\sigma = 0,625$ с $^{-1}$. Учет μ_2 приводит к уменьшению рассматриваемого отношения, т. е. уменьшает затухание амплитуды внутренней волны с удалением от границы раздела слоев к свободной поверхности. Например, для $\sigma = 0,626$ с $^{-1}$ и $\mu_2 = 0,1$ Н/м отношение a_{22}/a_{12} равно уже 700.

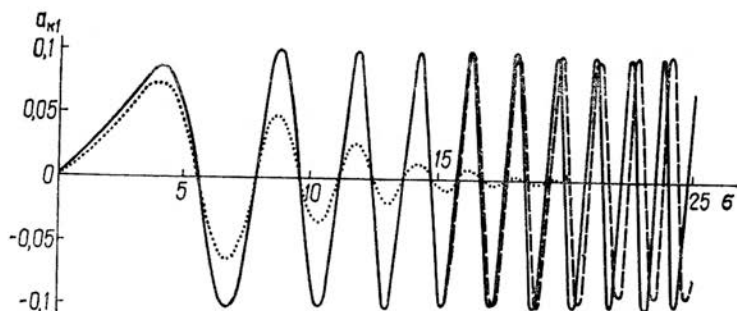


Рис. 3.10

Сравнение рис. 3.8 и 3.9 показывает, что при $H_1 = 10^{-2}$ м влияние μ_2 на распределение a_{22} по σ (рис. 3.9) качественно такое же, как и для $H_1 = 10^{-1}$ м (рис. 3.8, б). В случае $\mu_2 = 0$ уменьшение H_1 привело лишь к количественным изменениям и в поведении функции $a_{12}(\sigma)$. С увеличением σ амплитуда $a_{12}(\sigma)$ для $\mu_2 = 0$ и $H_1 = 10^{-2}$ м уменьшается и уже при $\sigma \approx 1,7$ с $^{-1}$ мала по сравнению с первым экстремальным значением. Расстояние между соответствующими нулями функции $a_{12}(\sigma)$ существенно сократилось, а ее экстремумы в порядке возрастания номера увеличились. В случае же $\mu_2 \neq 0$ и $H_2 = 1$ м зависимость $a_{12}(\sigma)$ при $H_1 = 10^{-2}$ м качественно иная, чем при $H_1 = 10^{-1}$ м. Если $H_1 = 10^{-1}$ м и $\mu_2 \neq 0$, то амплитуда функции $a_{12}(\sigma)$ с увеличением σ в интервале $0 < \sigma < 6$ с $^{-1}$ монотонно возрастает, а при $\sigma > 6$ с $^{-1}$ убывает. Начиная с $\sigma \approx 1,7$ с $^{-1}$, проявление внутренних волн на свободной поверхности обусловлено исключительно поверхностным натяжением. Отметим, что при значениях параметров, отвечающих рис. 3.9, минимум фазовой скорости и скорости переднего фронта внутренних волн достигается на частоте $\sigma_3 \approx 3 \cdot 10^{-2}$ с $^{-1}$ и $\sigma_4 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ с $^{-1}$ соответственно. При этом $\bar{v}_2 = 1,967 \cdot 10^{-2}$ м/с, $V_2(\sigma_4) = 1,966 \cdot 10^{-2}$ м/с.

На рис. 3.10 показана зависимость амплитуд a_{11} , a_{21} поверхностных волн η_{11} и η_{21} от σ при $H_1 = 0,1$ м и $\sigma \leq 25$ с $^{-1}$. Функция a_{11} изображена с точностью до множителя ρ_0/ρ_1 для $\mu_2 = \mu_1 = 0$ (сплошная кривая) и $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 0,074$ Н/м (штриховая кривая). Зависимость $a_{21}(\sigma)$ при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ иллюстрируется пунктирной кривой. Поведение $a_{21}(\sigma)$ для $\mu_1 = 0,074$ Н/м, $\mu_2 = 0$ и $\mu_1 = 0,074$ Н/м, $\mu_2 = 0,1$ Н/м примерно такое же, так как изменение μ_2 практически не сказывается на $a_{21}(\sigma)$, если $\mu_1 \neq 0$, а влияние μ_1 существенно проявляется лишь при частотах, где амплитуда $a_{21}(\sigma)$ близка к нулю.

Видно, что расстояние между нулями функций $a_{11}(\sigma)$ и $a_{21}(\sigma)$ в указанном диапазоне частоты уменьшается с ростом σ . Однако если при $\mu_1 = 0$ оно уменьшается для любых σ , то при $\mu_1 = 0,074$ Н/м — только для $\sigma < \sigma_2$, где σ_2 отвечает минимуму скорости переднего фронта поверхностных волн. На частотах же $\sigma > \sigma_2$ это расстояние увеличивается. Особенно существенное увеличение наблюдается с частоты $\sigma = \sigma_1$ минимума фазовой скорости поверхностных волн.

При $H_1 = 10^{-2}$ м и $H_2 = 1$ м величины σ_1 и σ_2 примерно равны 84,5 и 40,1 с⁻¹, а $v_1(\sigma_1) = 0,232$ м/с; $V_1(\sigma_2) = 0,178$ м/с. Такие же значения вытекают и из формул (3.63) и (3.64), полученных для глубокой жидкости.

Сравнение рис. 3.8 и 3.10 показывает, что на границе раздела слоев ($H_1 = 0,1$ м, $H_2 = 1$ м) амплитуда внутренних волн с учетом μ_2 может превышать амплитуду поверхностных волн при $\sigma < 0,1$ с⁻¹, а без учета μ_2 — только при $\sigma < 0,75$ с⁻¹.

5. Пусть

$$\begin{aligned} H_1 &= 10^{-2} \text{ м; } \mu = 0,03 \text{ Н/м; } \mu_2 = 0,05 \text{ Н/м; } \rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3; \\ H_2 &= 1 \text{ м; } \rho_2 = 1004 \text{ кг/м}^3, \end{aligned} \quad (3.69)$$

что соответствует случаю, когда на воде плавает слой нефти толщиной 0,01 м. При таких значениях параметров для одного и того же вида (3.67) распределения периодических возмущений зависимость элементов генерируемых волн от частоты колебаний может быть существенно иной, чем при отсутствии нефтяного слоя.

Если есть нефтяной слой, то с ростом частоты колебаний расстояние между нулями (между экстремумами) каждой из функций $a_{k1}(\sigma)$ ($k = 1, 2$) уменьшается при $\sigma < \sigma_2$ и увеличивается при $\sigma > \sigma_2$, где $\sigma = \sigma_2$ отвечает минимуму скорости переднего фронта поверхностных волн. Для функций $a_{k2}(\sigma)$ ($k = 1, 2$) такой частотой, разграничивающей области уменьшения и увеличения указанного расстояния, является частота $\sigma = \sigma_4$. Аналогичный характер зависимости амплитуды волн от частоты при учете сил поверхностного натяжения наблюдается и для значений параметров (3.62), т. е. когда в верхнем слое вода с меньшей плотностью, чем в нижнем (рис. 3.8—3.10). Однако величины σ_2 и σ_4 для нефти и воды разные. При $H_1 = 10^{-2}$ м в первом случае $\sigma_2 \approx 48,3$ с⁻¹, $\sigma_4 \approx 10$ с⁻¹, а во втором $\sigma_2 \approx 40,1$ с⁻¹, $\sigma_4 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ с⁻¹. Минимальные значения V_1 и V_2 , достигаемые на этих частотах, примерно равны 0,149 и $9,46 \cdot 10^{-2}$ м/с, если в верхнем слое нефть, и 0,178 и $1,966 \cdot 10^{-2}$ м/с, если в верхнем слое вода. При этом предполагается учет поверхностного натяжения на разделе слоев, когда речь идет о внутренних волнах.

На рис. 3.11 приведены огибающие к амплитудам волн, т. е. линии, соединяющие положительные экстремумы (локальные максимумы) функций $a_{k1}(\sigma)$ и $a_{k2}(\sigma)$ в диапазоне частот $\bar{\sigma}_1 < \sigma < 100$ с⁻¹ для поверхностных и $\bar{\sigma}_2 < \sigma < 20$ с⁻¹ для внутренних волн. Здесь $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ — частоты, при которых достигаются первые экстремальные значения $a_{k1}(\sigma)$ и $a_{k2}(\sigma)$, k равно 1 и 2. Функции $\bar{a}_{k1}(\sigma)$ характеризуют поверхностные, а $\bar{a}_{k2}(\sigma)$ — внутренние волны на свободной поверхности ($k = 1$) и границе раздела слоев ($k = 2$). Сплошные кривые отвечают случаю, когда в верхнем слое нефть, а штриховые — когда вода. Линии 1 иллюстрируют зависимости $\bar{a}_{k1}(\sigma)$ и $\bar{a}_{k2}(\sigma)$ при учете сил поверхностного натяжения на обеих границах верхнего слоя ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$). Что касается линий 2, то для поверхностных волн (рис. 3.11, а, в) они отвечают случаю $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, а для внутренних (рис. 3.11, б, г) — случаю $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$. Отметим, что и для нефти, и для воды зависимость $\bar{a}_{11}(\sigma)$ и $\bar{a}_{21}(\sigma)$ при $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$

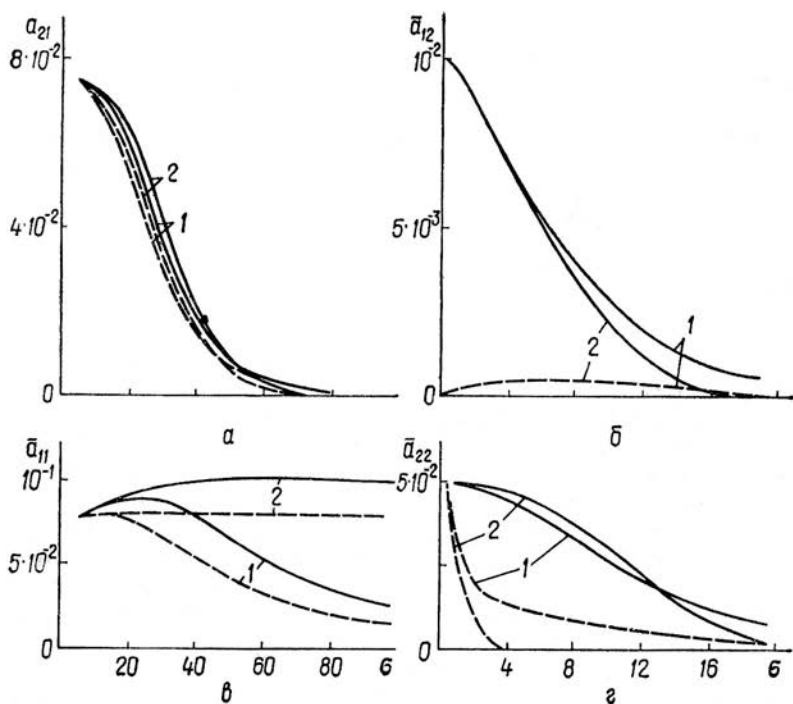


Рис. 3.11

примерно такая же, как и при $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$. Это свидетельствует о слабом влиянии μ_2 на поверхностные волны.

Из рис. 3.11 видно, что распределение амплитуд поверхностных волн на свободной поверхности и внутренних волн на обеих границах верхнего слоя по частоте колебаний для нефти существенно иное, чем для воды. Особенно заметны отличия для внутренних волн. Амплитуда функции $\bar{a}_{12}(\sigma)$, характеризующей внутренние волны, проявляющиеся на свободной поверхности нефтяного слоя, монотонно затухает с частотой, в то время как в случае воды при $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ функция $\bar{a}_{12}$ имеет максимум. Существенно разный характер затухания с частотой в рассматриваемых случаях и у функции $\bar{a}_{22}(\sigma)$. При фиксированных σ значения $\bar{a}_{12}(\sigma)$ и $\bar{a}_{22}(\sigma)$ для нефти больше, чем для воды. В частности, для $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$ и $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ величина $\bar{a}_{12}(\sigma)$ в первом случае больше, чем во втором в 21,5 раза, а $\bar{a}_{22}$ — в 2,5 раза. Зависимость $\bar{a}_{11}(\sigma)$ для нефтяного слоя качественно такая же, как и для воды. Однако величина $\bar{a}_{11}$ при заданном σ для воды меньше (при $\sigma = 40 \text{ с}^{-1}$ примерно в 1,4 раза), чем для нефти.

Влияние поверхностного натяжения на нижней границе нефтяного слоя на $\bar{a}_{22}(\sigma)$ начинает сказываться с меньшей частоты $\sigma = \sigma_3$, чем на $\bar{a}_{12}(\sigma)$. Для фиксированного $\sigma > \sigma_3$ учет μ_2 может приводить как к увеличению, так и к уменьшению значения $\bar{a}_{22}$; амплитуда $\bar{a}_{12}$ при этом уменьшается.

ТАБЛИЦА 3.2

$\sigma, \text{с}^{-1}$	Вода		Нефть	
	$\mu_1 = \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 0,074 \text{ Н/м};$ $\mu_2 = 0,1 \text{ Н/м}$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 0,03 \text{ Н/м};$ $\mu_2 = 0,05 \text{ Н/м}$
10	61,7 (98,2)	61,7 (98,2)	61,7 (98,2)	61,7 (98,2)
30	6,9 (32,7)	7,3 (34,6)	6,9 (32,7)	7,1 (33,9)
60	1,7 (16,3)	2,5 (24,0)	1,7 (16,3)	2,2 (21,3)
80	0,96 (12,3)	1,8 (23,2)	0,96 (12,3)	1,6 (19,8)
100	0,62 (9,8)	1,5 (23,4)	0,62 (9,8)	1,2 (9,5)
150	0,27 (6,5)	1,1 (24,7)	0,27 (6,5)	0,85 (20,3)
200	0,15 (4,9)	0,83 (26,3)	0,15 (4,9)	0,56 (22,0)

ТАБЛИЦА 3.3

$\sigma, \text{с}^{-1}$	Вода		Нефть	
	$\mu_1 = \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 0,074 \text{ Н/м};$ $\mu_2 = 0,1 \text{ Н/м}$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 0,03 \text{ Н/м};$ $\mu_2 = 0,05 \text{ Н/м}$
0,6	17,1 (1,7)	28,0 (2,7)	145 (13,9)	145 (13,9)
1	9,2 (1,5)	20,0 (3,2)	86 (13,7)	86 (13,7)
10	0,12 (0,2)	4,9 (7,7)	6,0 (9,6)	6,9 (11,0)
15	$6 \cdot 10^{-2}$ (0,1)	3,8 (9,0)	3,0 (7,3)	4,4 (10,5)
20	$3 \cdot 10^{-2}$ ($9 \cdot 10^{-2}$)	3,1 (9,9)	1,7 (5,5)	3,2 (10,4)
40	$8 \cdot 10^{-3}$ ($5 \cdot 10^{-2}$)	2,2 (13,1)	0,4 (2,8)	2,3 (11,4)
60	$3 \cdot 10^{-3}$ ($3 \cdot 10^{-2}$)	1,5 (14,0)	0,2 (1,8)	1,3 (12,5)

Количественные отличия для слоя нефти и воды наблюдаются и в распределении длин и фазовых скоростей генерируемых волн по частоте. Фазовые скорости поверхностных и внутренних волн в случае нефти принимают минимальные значения на частотах $\sigma_1 \approx 102 \text{ с}^{-1}$ и $\sigma_3 \approx 18,5 \text{ с}^{-1}$. Причем $\bar{v}_1 = 0,195 \text{ м/с}$, $\bar{v}_2 = 0,104 \text{ м/с}$. В случае же воды $\sigma_1 \approx 84,5 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_3 \approx 0,03 \text{ с}^{-1}$, а $\bar{v}_1 = 0,232 \text{ м/с}$, $\bar{v}_2 = 1,967 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$. В табл. 3.2 наглядно иллюстрируется зависимость λ_1 , v_1 , а в табл. 3.3 — зависимость λ_2 , v_2 от σ и μ_1 , μ_2 для слоя воды и нефти. Значения фазовых скоростей (в м/с), приведенные в скобках, и длины волн (в м) увеличены в 100 раз. Отметим, что для воды и нефти величины λ_1 , v_1 при $\mu_1 \neq 0$ в случае $\mu_2 = 0$ примерно такие же, как и при $\mu_2 \neq 0$. Если $\mu_2 = 0$, то фазовые скорости и длины внутренних волн для $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 \neq 0$ примерно одинаковы.

Из таблиц видно, что при учете сил поверхностного натяжения на обеих границах верхнего слоя λ_2 и v_2 на фиксированной частоте $\sigma < 60 \text{ с}^{-1}$ для нефти могут быть как больше, так и меньше, чем для воды. Длины же и фазовые скорости поверхностных волн на частотах $10 \text{ с}^{-1} < \sigma < 200 \text{ с}^{-1}$ для нефтяного слоя меньше, чем для слоя воды. На частотах $\sigma < 10 \text{ с}^{-1}$ элементы поверхностных волн для нефтяного и водяного слоев примерно одинаковы.

6. В заключение этого параграфа отметим, что длина, фазовая скорость и скорость переднего фронта поверхностных (или внутрен-

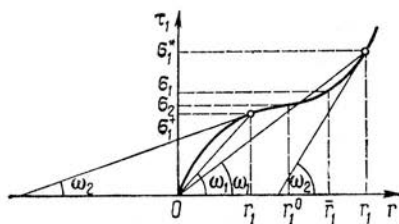


Рис. 3.12

вой коэффициент $\operatorname{tg} \omega_1$ прямой, проходящей через начало координат и точку (σ_1^*, r_1) , где $\sigma_1^* = \tau_1(r_1)$, равен фазовой скорости σ_1^*/r_1 , а угловой коэффициент $\operatorname{tg} \omega_2$ касательной к кривой $\tau_1(r)$ в точке (σ_1^*, r_1) — скорости переднего фронта $V_1 = \tau_1'(r_1)$. Из рис. 3.12, кроме того, видно, что $\operatorname{tg} \omega_1 > \operatorname{tg} \omega_2$ для $\sigma < \sigma_1$ и $\operatorname{tg} \omega_1 < \operatorname{tg} \omega_2$ для $\sigma > \sigma_1$. При $\sigma = \sigma_1$ угловой коэффициент $\operatorname{tg} \omega_1$ равен $\operatorname{tg} \omega_2$. Здесь σ_1 и σ_2 — частоты, на которых достигаются минимумы фазовой скорости и скорости переднего фронта поверхностных волн, $\sigma_1 = \sigma_1(\bar{r}_1)$.

Аналогичным образом, заменяя $\tau_1(r)$ на $\tau_2(r)$, определяем соответствующие характеристики внутренних волн.

§ 3.4. Волны от периодических перемещающихся возмущений

1. Пусть к свободной поверхности двухслойной идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, прикладываются, начиная с момента времени $t = 0$, периодические перемещающиеся давления

$$p = p_0 f(y) \exp[i(mx - \sigma t)]. \quad (3.70)$$

Напомним, что верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний — толщину H_2 и плотность ρ_2 .

Проведем анализ зависимости генерируемого волнового движения от поверхностного натяжения, толщины верхнего слоя жидкости, длины волны и скорости перемещения давлений (3.70). Потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 возмущенных скоростей верхней и нижней жидкостей с учетом поверхностного натяжения на границе жидкость — воздух ($\mu_1 \neq 0$) и границе раздела слоев ($\mu_2 \neq 0$) определим из уравнений (3.2) при граничных (3.25) и начальных (3.4) условиях, а для нахождения вида свободной поверхности ξ_1 и поверхности раздела ξ_2 используем кинематические условия (3.51). Представив ϕ_s и ξ_s в виде

$$\phi_s = \bar{\phi}_s(y, z, t) \exp(imx), \quad \xi_s = \bar{\xi}_s(y, z, t) \exp(imx), \quad s = 1, 2$$

и применив преобразование Фурье по y и преобразование Лапласа по t , получим [43] после вычисления интегралов Меллина для ξ_s выражение

$$\xi_s = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \int_{-\infty}^{\infty} r \bar{f}(n) K_s(r) e^{in y} dn, \quad s = 1, 2, \quad (3.71)$$

где

$$K_s(r) = a_s \sum_{k=1}^5 p_{sk} \alpha_k, \quad \alpha_1 = \exp(-i\sigma t), \quad \alpha_{2,3} = \exp(\mp i\tau_1 t), \\ \alpha_{4,5} = \exp(\mp i\tau_2 t), \quad a = -p_0/p_1, \quad r = n^2 + m^2,$$

$\bar{f}(n)$ — преобразование Фурье функции $f(y)$, а p_{sk} , a_s , $\tau_{1,2}$ определяются формулами (3.52).

Первое из слагаемых K_s имеет особенности типа простых полюсов при $\sigma > \sigma_1^0$ в точках $n = \pm n_1$ и $n = \pm n_2$, а при $\sigma_2^0 < \sigma < \sigma_1^0$ — только в точках $n = \pm n_2$. В случае $\sigma > \sigma_2^0$ это слагаемое особенностей не имеет. Здесь $\sigma_{1,2}^0 = \tau_{1,2}|_{n=0}$, $n_{1,2}$ — положительные корни уравнений $\sigma - \tau_{1,2} = 0$, $n_2 > n_1$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{1,2}^0 = \infty$.

При условии $|\mu_2 - \mu_1|/\gamma < \mu_1$, где $\gamma = \rho_1/\rho_2$, второе слагаемое K_s имеет особенности в точках $n = \pm n_1$, если $\sigma > \sigma_1^0$, четвертое — в точках $n = \pm n_2$, если $\sigma > \sigma_2^0$, а третье и пятое слагаемые особенностей не имеют для любых σ . Однако подынтегральные выражения в формуле (3.71) представляют собой аналитические функции в окрестности действительной оси, так как указанные особенности отмеченных слагаемых взаимно погашаются. Поэтому исходный путь интегрирования можно деформировать в путь L_1 , идущий вдоль действительной оси и обходящий указанные полюса по малым полуокружностям.

2. Пусть $\sigma > \sigma_1^0$. Будем обходить точки $n = -n_{1,2}$ сверху, а точки $n = n_{1,2}$ снизу. При таком обходе полюсов на контуре L_1 выполняется условие $\operatorname{Re}[-i\tau_{1,2}(n)] \leq 0$. Перепишем теперь выражение (3.71) так:

$$\zeta_s = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^5 \eta_k^s \exp(imx), \quad s = 1, 2; \quad (3.72)$$

$$\eta_1^s = \int_{L_1} f_1 p_{s1} \exp[i(ny - \sigma t)] dn; \quad f_1 = a_s r \bar{f}(n);$$

$$\eta_k^s = \int_{L_k} f_1 p_{sk} \exp[i|y| M_k(n)] dn, \quad k = 2, \dots, 5;$$

$$M_{2,3} = n \operatorname{sign} y \mp v\tau_1; \quad M_{4,5} = n \operatorname{sign} y \mp v\tau_2, \quad v = t/|y|,$$

где путь L_2 обходит точки $n = \pm n_1$, путь L_4 — точки $n = \pm n_2$, а L_3 и L_5 совпадают с действительной осью. Выполнение условий $\operatorname{Re}(-i\tau_{1,2}) \leq 0$ на L_k обеспечивает стремление к нулю интегралов η_k^s ($k = 2 \div 5$, $s = 1, 2$) при $t \rightarrow \infty$ для фиксированного значения y . Следовательно, η_1^s представляют установившиеся колебания свободной поверхности ($s = 1$) и поверхности раздела слоев ($s = 2$), а η_k^s ($k = 2 \div 5$) характеризуют процесс развития волн. Вычисляя η_1^s методом контурного интегрирования, находим

$$\eta_1^s = \eta_{s1} + \eta_{s2}, \quad s = 1, 2; \quad (3.73)$$

$$\eta_{sk} = (-1)^k a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f(n_k) N_s(r_k)}{b(\gamma_1 - \gamma_2) V_k^0} \sin(r_k x_k - \sigma t), \quad k = 1, 2;$$

$$N_1 = -(l_2 - \sigma^2 l_1) \sigma^{-1}, \quad N_2 = \sigma \gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1, \quad V_k^0 = n_k r_k^{-1} V_k;$$

$$V_k = \tau'_k(r_k), \quad r_k = (m^2 + n_k^2)^{1/2},$$

штрих означает производную по r ; l_1, l_2 определяются формулами (3.26); направление x_k составляет с осью x угол $\theta_k = \operatorname{arctg}(n_k/m)$.

Формулы (3.73) в случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$ описывают установившееся волновое движение, возникающее под действием периодических давлений, перемещающихся с заданной скоростью в полосе свободной поверхности двухслойной жидкости без учета сил поверхностного натяжения [62, 162].

Проведем теперь методом стационарных фаз асимптотический анализ неустановившихся волн η_k^s ($k = 2, \dots, 5$) на больших удалениях от полосы давлений. Каждая из фазовых функций M_k ($k = 2, \dots, 5$) при любых v имеет по крайней мере одну стационарную точку. Кроме того, $\operatorname{Re}[iM_k(n)] = 0$ на L_k при k , равных 3 и 5. Поэтому

$$\eta_3^s = O(|y|^{1/2}), \quad \eta_5^s = O(|y|^{1/2}).$$

При k , равных 2 и 4, условие $\operatorname{Re}[iM_k(n)] \leq 0$ на L_k выполняется только для $v^{-1} < V_1^0$ ($k = 2$) и для $v^{-1} < V_2^0$ ($k = 4$). Если же $v^{-1} > V_1^0$ ($k = 2$) и $v^{-1} > V_2^0$ ($k = 4$), то это условие выполняется на L_k^* , совпадающем с L_k везде, кроме окрестности полюса $n = -n_1$ ($k = 2$) или $n = -n_2$ ($k = 4$) в случае $y < 0$ и полюса $n = n_1$ ($k = 2$) или $n = n_2$ ($k = 4$) в случае $y > 0$. Заменяя в $\eta_{2,4}^s$ интегрирование по $L_{2,4}$ интегрированием по $L_{2,4}^*$ с добавлением соответствующего вычета и подставляя найденные выражения η_k^s в формулу (3.72), получим при $V_1^0 > V_2^0$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(|y|^{-1/2}), & |y| < V_1^0 t; \\ \eta_{s1} + O(|y|^{-1/2}), & V_2^0 t < |y| < V_1^0 t; \\ O(|y|^{-1/2}), & |y| > V_1^0 t, \end{cases} \quad (3.74)$$

при $V_1^0 < V_2^0$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(|y|^{-1/2}), & |y| < V_1^0 t; \\ \eta_{s2} + O(|y|^{-1/2}), & V_1^0 t < |y| < V_2^0 t; \\ O(|y|^{-1/2}), & |y| > V_2^0 t. \end{cases} \quad (3.75)$$

Для $\sigma > \sigma_1^0$ (за исключением малой окрестности частоты $\sigma = \sigma_1^0$) неравенство $V_1^0 < V_2^0$ может выполняться только при наличии сил поверхностного натяжения на границе раздела слоев ($\mu_2 > 0$). Условия, когда это неравенство имеет место, те же, что и в случае периодических возмущений (3.50), действующих в ограниченной области свободной поверхности.

Из выражений (3.73) — (3.75) видно, что на свободной поверхности и поверхности раздела слоев генерируется по две системы не

затухающих с удалением от полосы давлений волн η_{s1} , η_{s2} . Волны η_{s1} поверхностные, а η_{s2} внутренние. Их передние фронты перемещаются со скоростями V_1^0 , V_2^0 , а фазовые скорости и длины волн равны соответственно $v_{1,2} = \sigma/r_{1,2}$ и $\lambda_{1,2} = 2\pi/r_{1,2}$. Причем $v_{1,2} < v_0$, $\lambda_{1,2} < \lambda_0$, где $v_0 = \sigma/m$ — скорость перемещения, а $\lambda_0 = 2\pi/m$ — длина волны давлений.

Поверхностные волны распространяются под углом θ_1 , а внутренние — под углом θ_2 к направлению перемещения давлений. Углы θ_1 и θ_2 увеличиваются, если увеличивается σ для фиксированного m , и уменьшаются с уменьшением длины волны давлений при фиксированной частоте. Причем $0 < \theta_1 < \pi/2$, $\theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Угол распространения волн с длиной, близкой к длине волны давлений, близок к нулю. Гребни поверхностных и внутренних волн расположены соответственно на прямых, перпендикулярных к направлению распространения волн. Основные возмущения, амплитуда которых не затухает с удалением от полосы давлений, сосредоточены в области $|y| < V_1^0 t$, если $V_1^0 > V_2^0$, и в области $|y| < V_2^0 t$, если $V_1^0 < V_2^0$.

При выполнении условия (3.32), отвечающего коротким волнам, найдем

$$V_k = \frac{g}{2\sigma} \frac{n_k}{r_k} (1 + 3T_k r_k^2) \quad \text{или} \quad V_k^0 = \frac{n_k V_k (1 + 3T_k r_k^2)}{2r_k (1 + T_k r_k^2)}, \quad (3.76)$$

где

$$n_k = (r_k^2 - m^2)^{1/2}, \quad T_k = \mu_k / (\rho_k g), \quad k = 1, 2.$$

Если $\sigma_2^0 < \sigma < \sigma_1^0$, то

$$\xi_s = \eta_{s2} + O(1/\sqrt{|y|}), \quad |y| < V_2^0 t,$$

т. е. от полосы давлений под углом θ_2 к ней отходят только внутренние не затухающие с расстоянием волны. Причем $0 < \theta_2 < \pi/2$.

При $\sigma < \sigma_2$ под действием давлений (3.70) не затухающие с удалением от полосы волны не генерируются, а $\xi_s = O(1/\sqrt{|y|})$. Отметим, что $n_{1,2} = 0$ при $\sigma = \sigma_{1,2}^0$. Следовательно, $\sigma = \sigma_1^0$ — резонансная частота для поверхностных, а $\sigma = \sigma_2^0$ — для внутренних волн. Поведение $v_1(\sigma)$ для $\sigma > \sigma_1^0$ и $v_2(\sigma)$ для $\sigma > \sigma_2^0$ такое же, как и в случае периодических давлений (3.50). При $mH_3 \gg 1$, $H_3 = \min(H_1, H_2)$ найдем

$$\sigma_1^0 = [mg(1 + T_1 m^2)]^{1/2}, \quad \sigma_2^0 = [mg(\epsilon + T_2 m^2)(1 + \gamma)^{-1}]^{1/2}. \quad (3.77)$$

3. Для количественной оценки влияния поверхностного натяжения на $\sigma_{1,2}^0$ и элементы генерируемых волн проводились расчеты при значениях параметров $H_2 = 10^3$ м, $\rho = 10^3$ кг/м³, $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$. Толщина верхнего слоя H_1 менялась от 10^{-2} до 1 м, μ_1 принималось равным 0, 0,074 и 0,05 Н/м, а μ_2 — равным 0; 0,08 и 0,1 Н/м.

Результаты расчетов показали, что изменения H_1 и μ_2 практически не сказываются на $\sigma_1^0(m)$ при любых m . Мало и влияние μ_1 на σ_2^0 . Влияние же μ_1 на σ_1^0 существенно сказывается лишь начиная

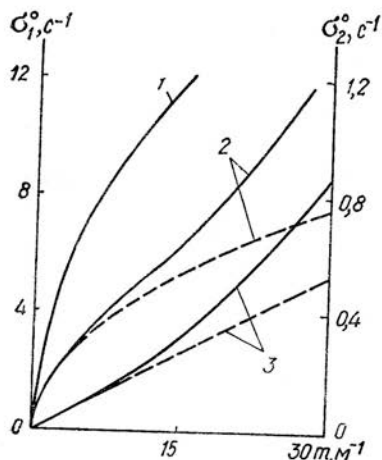


Рис. 3.13

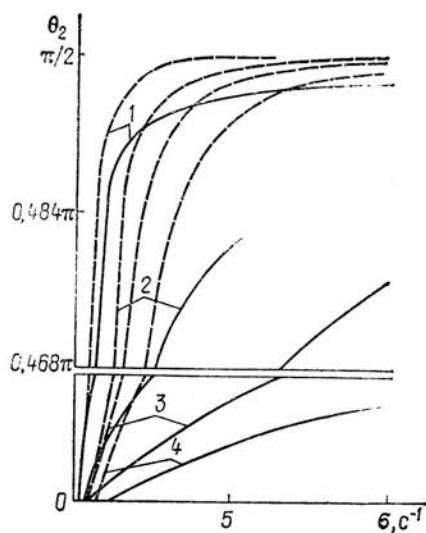


Рис. 3.14

с тех значений m , когда $r_1 H_3 \gg 1$. При фиксированных H_1 влияние μ_2 на σ_2^0 начинает проявляться при больших длинах волн давлений, чем влияние μ на σ_1^0 . Большему H_1 отвечает меньшее значение m , с которого заметно влияние μ_2 на σ_2^0 . Рис. 3.13 иллюстрирует зависимость σ_1^0 (кривая 1) и σ_2^0 (кривые 2, 3) от m для $H_1 = 10^{-2}$ м (кривые 3) и $H_1 = 1$ м (кривые 2) при $\mu_1 = 0,074$ Н/м. Сплошные линии на этом рисунке соответствуют $\mu_2 = 0,08$ Н/м, а штриховые — $\mu_2 = 0$. Зависимости $\sigma_1^0(m)$ и $\sigma_2^0(m)$ для фиксированного $m = m_0$ устанавливают такие значения скорости перемещения фазы давлений $v = v_1^+ = \sigma_1^0/m_0$ и $v = v_2^+ = \sigma_2^0/m_0$, что при $v < v_1^+$ не генерируются поверхностные, а при $v < v_2^+$ — внутренние незатухающие волны. Если на рис. 3.13 по оси m откладывать r_1 (или r_2), а по оси σ_1^0 (или σ_2^0) значение частоты колебаний σ , то кривые $\sigma(r_1)$ совпадут с $\sigma_1^0(m)$, а $\sigma(r_2)$ — с $\sigma_2^0(m)$. Следовательно, рис. 3.13 характеризует и зависимость фазовых скоростей и длин генерируемых волн от поверхностного натяжения и толщины верхнего слоя.

На рис. 3.14 дана зависимость угла θ_2 от σ для $\mu_1 = 0,074$ Н/м, $H_1 = 1$ м. Кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют значения m , равные 1, 5, 10, 25 м⁻¹. Сплошные линии отвечают $\mu_2 = 0,08$ Н/м, а штриховые — $\mu_2 = 0$. Кривые 1 так же, как и кривые 2, выходят из одних и тех же точек на оси σ . Это следует и из рис. 3.13, на котором функции $\sigma_2^0(m)$ для $m < 10$ практически совпадают. Кривые 3 выходят из разных, но близких друг к другу точек. Что касается линий 4, то сплошная выходит из точки $\sigma = 0,88$ с⁻¹, а штриховая — из точки $\sigma = 0,64$ с⁻¹.

Видно, что для фиксированных σ и μ_2 увеличение m приводит к уменьшению θ_2 . Причем чем меньше σ , тем влияние изменения m

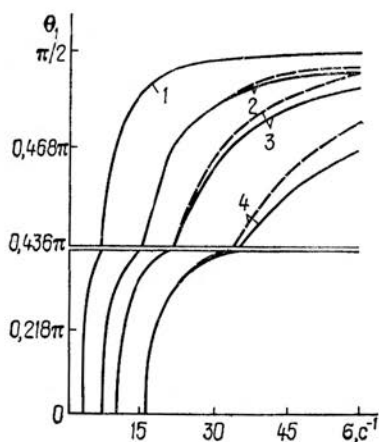


Рис. 3.15

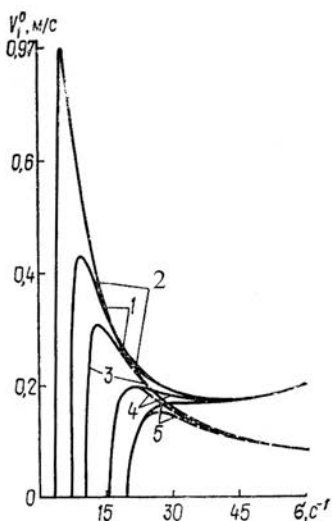


Рис. 3.16

сказывается сильнее. Например, в случае $\mu_2 = 0,08$ Н/м с изменением m от 1 до 25 угол θ_2 уменьшился от $87,9$ до $7,45^\circ$ при $\sigma = 1$ с $^{-1}$, от $88,3$ до $29,2^\circ$ при $\sigma = 1,5$ с $^{-1}$ и от $89,9$ до $86,5^\circ$ при $\sigma = 50$ с $^{-1}$. С увеличением σ все кривые на этом рисунке приближаются к $\pi/2$, т. е. угол θ_2 увеличивается до 90° . Это увеличение тем быстрее, чем больше длина волны давлений. Влияние μ_2 на θ_2 для фиксированного σ также растет с увеличением m . В частности, при σ , равном 1 и 1,5 с $^{-1}$, угол θ_2 с увеличением μ_2 от 0 до 0,08 Н/м уменьшился соответственно на 24 и 63 % для $m = 25$ и на 5,8 и 7,5 % для $m = 5$.

Зависимость угла θ_1 от σ для $H_1 = 1$ м и $\mu_2 = 0,08$ Н/м приведена на рис. 3.15. Сплошная линия здесь отвечает $\mu_1 = 0,074$ Н/м, а штриховая — $\mu_1 = 0$. Кривые 1—4 соответствуют тем же значениям $m = m_i$, что и на рис. 3.14. Для каждого $m = m_i$ кривая $\theta_1(\sigma)$ выходит из точки $\sigma = \sigma_1^0(m_i)$. При $\sigma < \sigma_1^0(m_i)$ периодические давления с длиной волны, большей $2\pi/m_i$, не генерируют не затухающие с удалением от полосы их действия поверхностные волны. Видно, что влияние μ_1 на θ_1 растет с уменьшением длины волны давлений и с увеличением частоты колебаний. Однако оно заметно проявляется при существенно больших значениях σ , чем влияние изменения μ_2 на θ_2 . В случае $\mu_1 = 0$ угол θ_1 при увеличении σ быстрее достигает прямого, чем при $\mu_1 \neq 0$. При фиксированных μ_1 и σ увеличение m приводит к уменьшению угла θ_1 . В частности, для $\sigma = 30$ с $^{-1}$ изменение m от 1 до 25 отвечает уменьшению θ_1 от $89,4$ до $74,2^\circ$ при $\mu_1 = 0$ и от $89,7$ до $73,8^\circ$ при $\mu_1 = 0,074$ Н/м.

Зависимость скорости переднего фронта V_1^0 поверхностных волн от частоты колебаний и длины волны давлений иллюстрируется рис. 3.16 при $\mu_2 = 0,08$ Н/м и $H_1 = 1$ м. Здесь кривым 1, 2, 3, 4 и 5 отвечают значения m , равные 1, 5, 10, 25 и 40 м $^{-1}$. Сплошные линии соот-

ветствуют $\mu_1 = 0,074$, а штриховые — $\mu_1 = 0$. Функция $V_1^0(\sigma)$ для каждого m_i выходит из той же точки, что и $\theta_1(\sigma)$ (см. рис. 3.15). Видно, что $V_1^0(\sigma)$ при фиксированном m в случае $\mu_1 = 0$ имеет максимум, а $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_1^0(\sigma) = 0$. Максимум и значение $\sigma = \sigma_5$, при котором он достигается, зависят от длины волны давлений и при $r_1 H_3 \gg 1$ могут быть определены по приближенным формулам

$$\sigma_5 = \sqrt[4]{3} \sqrt{V \overline{mg}}, \quad V_1^0(\sigma_5) = \sqrt{g} (\sqrt[4]{27} \sqrt{2m})^{-1}.$$

Если же $\mu_1 > 0$, то $V_1^0(\sigma)$ для m , меньших некоторого m_1 , имеет экстремумы (локальные максимум и минимум), а для $m > m_1$ увеличивается с ростом σ . При этом $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_1^0(\sigma) = \infty$, а m_1 в случае $r_1 H_3 \gg 1$ примерно равно

$$m_1 = 3,15 \cdot 10^{-2} T_1^{-1/2}.$$

Отсюда для $\mu_1 = 0,074$ Н/м найдем $m_1 = 29,6$ м⁻¹.

Локальный максимум $V_1^0(\sigma)$ при $\mu_1 > 0$ тот же, что и в случае $\mu_1 = 0$, а локальный минимум для всех $m < m_1$ примерно одинаковый. Достигается он на частоте $\sigma_2 = c_1 \sigma_1$ и равен $V_1^0(\sigma_2) = c_2 \bar{v}_1$, где σ_1 и $\bar{v}_1$ определяются из формул (3.63), а значения $c_{1,2}$ приведены в выражении (3.64).

Поведение $V_2^0(\sigma)$ качественно похоже на $V_1^0(\sigma)$. Если $\mu_2 = 0$, то $V_2^0(\sigma)$ для всех m_i имеет один максимум. Его величина и значение $\sigma = \sigma_6$, при котором он достигается в случае $r_1 H_3 \gg 1$, равны

$$\sigma_6 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\gamma}} \sigma_5, \quad V_2^0(\sigma_6) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\gamma}} V_1^0(\sigma_5), \quad (3.78)$$

а $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_2^0(\sigma) = 0$. При $\mu_2 > 0$ скорость $V_2^0(\sigma)$ для $m < m_2$ имеет два экстремума, а при $m > m_2$ монотонно возрастает с увеличением σ . Значение m_2 в случае $r_1 H_3 \gg 1$ определяется приближенной формулой

$$m_2 = 8,15 \cdot 10^{-2} (\varepsilon/T_2)^{1/2},$$

а $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_2^0(\sigma) = \infty$. Отсюда для $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ и $\mu_2 = 0,08$ Н/м найдем $m_2 = 1,83$ м⁻¹.

При $\mu_2 > 0$ локальный максимум $V_2^0(\sigma)$ тот же, что и при $\mu_2 = 0$, а локальный минимум, примерно одинаковый для всех $m < m_2$, достигается на частоте $\sigma_4 = c_1 \sigma_3$ и соответствует $V_2^0(\sigma_4) = c_2 \bar{v}_2$, где σ_3 и $\bar{v}_2$ определяются из выражения (3.65). Если $\mu_2 = 0,08$ Н/м, $\varepsilon = 4 \times 10^{-3}$, то $\sigma_4 = 0,44$ с⁻¹, $V_2^0(\sigma_4) = 3,22 \cdot 10^{-2}$ м/с. Значения $v_2(\sigma_1^0)$ и $V_2^0(\sigma_1^0)$ при $r_1 H_3 \gg 1$ можно определить по формулам (3.76) и (3.77). В частности, при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ находим

$$v_2(\sigma_1^0) = \frac{\varepsilon}{1+\gamma} \sqrt{\frac{g}{m}}, \quad V_2^0(\sigma_1^0) = \frac{\varepsilon \sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)^2} \sqrt{\frac{g}{m}}.$$

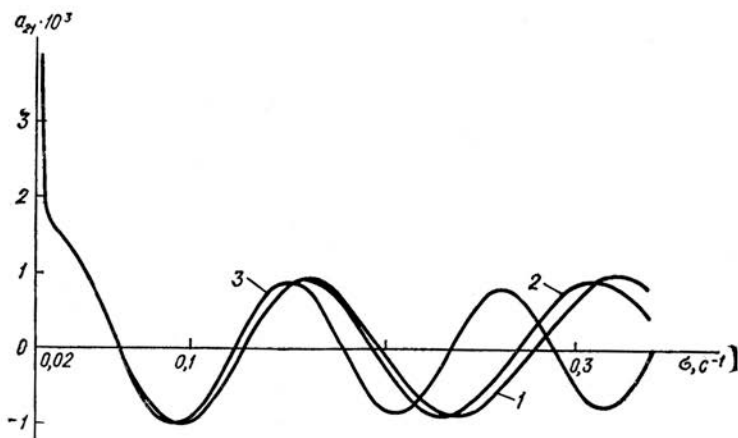


Рис. 3.17

Кроме того, численный анализ, проведенный для указанных выше значений параметров, показал, что влияние μ_1 на элементы внутренних волн, так же как и влияние μ_2 на элементы поверхностных волн, мало.

На рис. 3.17 с точностью до множителя $\rho_0/(\rho_1 g)$ изображено распределение амплитуды a_{12} внутренних волн η_{12} на свободной поверхности по частоте колебаний для

$$f(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq h; \\ 0, & |y| > h, \end{cases}$$

$H_1 = 10^{-2}$ м, $h = 1$ м, $m = 1$ м $^{-1}$, $\mu_1 = 0,074$ Н/м. При этом μ_2 принималось равным 0,1; 0,08 и 0 Н/м (кривые 1, 2 и 3 соответственно), а σ изменялось в пределах $\sigma_2^0 < \sigma < 0,34$ с $^{-1}$, где $\sigma_2^0 \approx 0,02$ с $^{-1}$. В этом диапазоне σ не затухающие с удалением от полосы поверхностные волны не генерируются, так как $\sigma_1^0 > 0,34$ с $^{-1}$. Аналогичная зависимость $A_2(\sigma)$ будет и при ширине полосы $h_1 = h + k\pi/n_2$, $k = 1, 2, \dots$. Видно, что при $\mu_1 \geq 0$ имеются такие значения $\sigma > \sigma_2$, при которых амплитуды внутренних волн равны нулю. Так как при этом незатухающие поверхностные волны вообще не генерируются, то на таких частотах возвышение свободной поверхности будет формироваться под воздействием только затухающих волн. Изменение μ_2 от 0 до 0,1 Н/м приводит к незначительному увеличению экстремумов $a_{12}(\sigma)$, но существенно сдвигает их в сторону больших частот. Амплитуда внутренних волн a_{12} в окрестности частоты $\sigma = \sigma_2^0$ может быть достаточно большой. Это же характерно и для амплитуды поверхностных волн в окрестности $\sigma = \sigma_1^0$.

Таким образом, для $\sigma_2^0 < \sigma < \sigma_1^0$ незатухающие колебания свободной поверхности деформируются только под воздействием внутренних волн. При этом поверхностное натяжение может оказывать значительное влияние как на величину a_{12} , так и на длину интервала

§ 3.5. Влияние скорости потока на развитие волн от периодических возмущений

1. Пусть двухслойная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины течет с постоянной скоростью u в положительном направлении оси x . Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний — толщину H_2 и плотность ρ_2 . Начиная с момента времени $t = 0$, к ограниченной области свободной поверхности жидкости прикладываются давления

$$p = p_0 f(x) \exp(i\sigma t). \quad (3.79)$$

Рассмотрим зависимость процесса развития волнового движения и элементов генерируемых волн от поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости, частоты колебаний, скорости потока, предполагая, что в начальный момент времени поток не возмущен, а свободная поверхность ξ_1 и поверхность раздела слоев жидкости горизонтальны.

Потенциалы φ_1 и φ_2 возмущенных скоростей для верхнего ($0 < z < H_1$) и нижнего ($-H_2 < z < 0$) слоев жидкости определим из уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} = 0, \quad s = 1, 2,$$

с граничными

$$\begin{aligned} \xi_1 + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - T_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} &= -\frac{p}{\rho_1 g} \text{ при } z = H_1; \\ L_2 (\varphi_2 - \gamma \varphi_1) &= 0; \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \text{ при } z = 0; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H_2 \end{aligned}$$

и начальными

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0 \text{ при } t = 0$$

условиями, имея в виду при этом кинематические соотношения

$$\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} - u \frac{\partial \xi_s}{\partial x},$$

выполняющиеся при $z = H_1$ для $s = 1$ и при $z = 0$ для $s = 2$.

Здесь $T_1 = \mu_1 / (\rho_1 g)$; μ_1 — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности.

Применяя для решения поставленной задачи преобразование Фурье по x , преобразование Лапласа по t и вычисляя интегралы Меллина, получаем [38]:

$$\begin{aligned} \xi_s &= \sum_{k=1}^5 I_{sk}, \quad I_{s5} = a_2 \int_{L_s} \frac{F_{s5}}{\Delta} r \bar{f}(r) e^{irx} dr e^{i\sigma t}; \\ I_{sk} &= a_2 \int_{L_k} \frac{f_1 F_{st}}{2\tau_1 \Delta_k} e^{t|x|M_k} dr, \quad k = 1, 2; \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$I_{sk} = a_2 \int_{L_k} \frac{f_1 F_{s2}}{2\tau_2 \Delta_k} e^{i|x|Mk} dr, \quad k = 3, 4;$$

$$M_{1,2} = -(ur \mp \tau_1) v + r \operatorname{sign} x; \quad M_{3,4} = -(ur \mp \tau_2) v + r \operatorname{sign} x;$$

$$f_1 = \bar{r} \bar{f}(r) / (\gamma_1 - \gamma_2); \quad v = t/|x|; \quad \Delta = \prod_{k=1}^4 \Delta_k;$$

$$\Delta_{1,2} = \sigma + ur \mp \tau_1; \quad \Delta_{3,4} = \sigma + ur \mp \tau_2; \quad \tau_{1,2} = \sqrt{\gamma_{1,2}};$$

$$F_{1k} = l_2 - \gamma_1 l_1, \quad F_{2k} = \gamma \gamma_1 l_3, \quad k = 1, 2;$$

$$F_{1k} = l_2 - \gamma_2 l_1, \quad F_{2k} = \gamma \gamma_2 l_3, \quad k = 3, 4;$$

$$F_{15} = l_2 - (\sigma + ur)^2 l_1, \quad F_{25} = (\sigma + ur)^2 l_3, \quad l_3 = \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1;$$

$$l_1 = \operatorname{th} r H_1 + \gamma \operatorname{th} r H_2, \quad l_2 = \varepsilon r g \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2, \quad \varepsilon = 1 - \gamma, \quad \gamma = \rho_1 / \rho_2;$$

$$a_2 = (-1)^s j a_1 / \sqrt{2\pi}, \quad a_1 = -\rho_0 / \rho_1,$$

где $\gamma_{1,2}$ те же, что и в выражении (3.7); $\bar{f}(r)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$; $j = -1$ при k , равных 2, 3, 5 и $j = 1$ при k , равных 1, 4. В I_{s5} контур интегрирования идет вдоль действительной оси, обходя вещественные корни уравнений $\Delta_k = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_k) > 0$. Каждый из контуров интегрирования L_k ($k = 1, \dots, 4$) обходит только точки, где $\Delta_k = 0$. Такой обход простых полюсов подынтегральных функций обеспечивает стремление к нулю I_{s5} ($k = 1 \div 4$) при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x . Интегралы I представляют поэтому решение рассматриваемой задачи для установившегося движения.

Число полюсов подынтегральных функций определяется частотой колебаний, скоростью потока, поверхностным натяжением и неоднородностью жидкости. При любых значениях σ и u уравнение $\Delta_4 = 0$ имеет только один отрицательный корень $r = -r_{10}$. Уравнение $\Delta_3 = 0$ для любых σ имеет три действительных корня $r = r_7$, $r = r_8$, $r = -r_9$ при $u < u_4$, а при $u > u_4$ — только один $r = -r_9$. Не зависит от частоты и число вещественных корней уравнения $\Delta_2 = 0$. Если $u < u_3$, то у этого уравнения вещественных корней нет, а для $u > u_3$ есть два отрицательных $r = -r_3$, $r = -r_2$. Число же корней уравнения $\Delta_1 = 0$ зависит как от скорости потока, так и от частоты колебаний. Для $\sigma > \sigma_0$ это уравнение при любых скоростях потока имеет только один отрицательный корень и только один положительный. Обозначим их при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ через $r = -r_1$, $r = r_6$, если $u < u_0^*$ и $r = -r_1$, $r = r_4$, если $u > u_0^*$, а при $\sigma > \sigma_0^*$ — через $r = r_4$, $r = -r_1$. Если же $\sigma < \sigma_0$, то корнями уравнения $\Delta_1 = 0$ будут r_4 , $-r_1$ при $u > u_1$, r_6 , r_5 , r_4 , $-r_1$ при $u_2 < u < u_1$ и r_6 , $-r_1$ при $u < u_2$. Здесь

$$u_k = \psi_1(\beta_k), \quad k = 1, 2; \quad u_k = \psi_k(\beta_k), \quad k = 3, 4;$$

$$\psi_{1,3} = (\tau_1 \mp \sigma) r^{-1}, \quad \psi_4 = (\tau_2 - \sigma) r^{-1}, \quad \sigma_0 = \sigma_0^* - u_0 r_0;$$

$$\sigma_0^* = \tau_1(r_0), \quad u_0 = \tau_1'(r_0), \quad u_0^* = (\sigma^* - \sigma) r_0^{-1};$$

$$r_4 > r_5 > r_7 > r_8 > r_6 > r_1 > 0, \quad r_2 > r_5;$$

$$r_4 > r_3 > r_2 > r_{10} > r_9 > r_1, \quad r_{10} > r_7 > r_8 > r_9,$$

r_0, β_3, β_4 — положительные корни уравнений $\tau_1'(r) = 0$, $\psi_3'(r) = 0$, $\psi_4'(r) = 0$

ТАБЛИЦА 3.4

$\mu_1, \text{Н/м}$	$\sigma, \text{с}^{-1}$	k				$\mu_1, \text{Н/м}$	$\sigma, \text{с}^{-1}$	k			
		1	2	3	4			1	2	3	4
0,073	1	245,2	22,8	23,3	1,23	0,73		61,50	37,2	44,1	0,308
0,73		245,2	40,1	41,8	1,23	0,073	6	40,94	21,3	24,5	0,205
0,073	2	122,6	22,5	23,6	0,616	0,73		41,54	34,9	45,5	0,205
0,73		122,6	39,2	42,6	0,616	0,073	8	30,81	20,6	25,0	0,154
0,073	4	61,33	21,9	24,1	0,308	0,73		32,40	32,1	46,9	0,154

соответственно; $\beta_{1,2}$ — положительные корни уравнения $\psi'_1(r) = 0$, причем $\beta_2 > r_0 > \beta_1$, а штрих означает производную по r . Корни r_3, r_4 обусловлены исключительно поверхностным натяжением, а r_k ($k = 7, \dots, 10$) — плотностной стратификацией жидкости.

Таким образом, распределение корней уравнений $\Delta_k = 0$ по частоте и скорости потока, а следовательно, и характер волнового движения определяются соотношением величин u_k ($k = 1, \dots, 4$) и u_0^* . Анализ показал, что $u_1 > u_2, u_3 > u_2, u_1 > u_4$. Влияние поверхностного натяжения ($\mu_1 \neq 0$) на u_4 несущественно. Эта величина зависит главным образом от перепада плотности жидкости. Изменение μ_1 при фиксированных $\sigma < \sigma_0$ мало отражается и на u_1 , а u_2 и u_3 повышаются с увеличением μ_1 . Зависимость u_4 от σ примерно такая же, как и при отсутствии поверхностного натяжения [1, 161]. С ростом σ значение u_2 уменьшается, а u_3 увеличивается для фиксированного μ_1 . При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_{1,4} &= u_{1,4}^0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_3 = \tau_1(\beta_5)/\beta_5; \\ \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} u_0 &= \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} u_2 = \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} u_3 = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} u_1 = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} u_2 = u_0; \\ \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \sigma_0 &= \infty, \quad u_{1,4}^0 = \sqrt{\frac{gH}{2}} [1 \pm (1 - 4\varepsilon H_1 H_2 / H^2)^{1/2}]^{1/2}, \\ H &= H_1 + H_2, \end{aligned}$$

β_5 — положительный корень уравнения $\tau'_1 r - \tau_1 = 0$.

Зависимость $10^2 u_k$ от μ_1 и σ при $H_1 = 10^2 \text{ м}$, $H_2 = 10^3 \text{ м}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ представлена табл. 3.4.

Для принятых H_1, H_2 и реальных значений μ_1 выполняется соотношение $r_4 > r_3 > r_0 \gg 1$, где $r_0 = [(2 - \sqrt{3}) / (\sqrt{3} T_1)]^{1/2}$. Это дает основание переписать τ_1 и τ_2 в виде $\tau_1 = \sqrt{rg(1 + T_1 r^2)}$, $\tau^2 = \sqrt{\varepsilon rg / (1 + \gamma)}$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0,247 \sqrt{g} \sqrt[4]{T_1}, \quad u_0 = 1,086 \sqrt{g} \sqrt[4]{T_1}, \quad \beta_5 = 1/\sqrt{T_1}, \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_3 &= \bar{v} = \sqrt{2g} \sqrt[4]{T_1}. \end{aligned}$$

Видно, что u_0 увеличивается, а σ_0 уменьшается с ростом μ_1 . В частности, значениям μ_1 , равным 0,026; 0,073 и 0,73 Н/м, отвечают u_0 , равные 0,137; 0,177 и 0,314 м/с, и σ_0 , равные 19,24; 14,86 и 8,36 с^{-1} соответственно.

В зависимости от значений μ_1 и ε выполняется одно из условий

ТАБЛИЦА 3.5

u		$x > 0$				$x < 0$			
$u_3 > u_4$	$u < u_3$	1	2	9	10		4	3	
	$u_4 < u < u_3$	1	9	10			4		
	$u < u_4$	1	7	9	10		4	8	
$u_3 < u_4$	$u > u_4$	1	2	9	10		4	3	
	$u_3 < u < u_4$	1	2	7	9	10	4	3	
	$u < u_3$	1	7	9	10		4	8	8

$u_3 > u_4$, $u_4 > u_3$ при $\sigma > \sigma_0$ и $u_2 < u_3 < u_4 < u_1$, $u_2 < u_4 < u_3 < u_1$, $u_2 < u_4 < u_1 < u_3$, $u_4 < u_2 < u_3 < u_1$ при $\sigma < \sigma_0$. Поэтому вычислим интегралы (3.80) в каждом конкретном случае отдельно. Вычисление проведем методом контурного интегрирования с учетом расположения стационарных точек (корней уравнений $M'_k(r) = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций (корней уравнений $\Delta_k = 0$). При этом будем иметь в виду, что условие $\text{Re}(i\Delta_k) \geq 0$ выполняется на контуре, идущем вдоль действительной оси, но обходящем точки $r = -r_k$ (k равно 1, 2, 9 и 10) и $r = r_k$ (k равно 5 и 7) по малым полуокружностям в нижней полуплоскости, а точки $r = -r_3$ и $r = r_k$ (k равно 4, 6 и 8) — в верхней. В результате получим, что не затухающие с расстоянием колебания свободной поверхности и поверхности раздела слоев жидкости формируются из нескольких волн вида

$$\eta_{sk} = \begin{cases} (-1)^{k+s} A(-r_k) B_{s1}(-r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 1-3; \\ (-1)^{k+s} A(r_k) B_{s1}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 4-6; \\ -(-1)^{k+s} A(r_k) B_{s2}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 7-8; \\ -(-1)^{k+s} A(-r_k) B_{s2}(-r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 9, 10; \end{cases}$$

$$\theta_k = r_k x - \sigma t, \quad k = 1, 2, 9, 10; \quad \theta_3 = -(r_3 x - \sigma t);$$

$$\theta_k = r_k x + \sigma t, \quad k = 4, 6, 8; \quad \theta_{5,7} = -(r_{5,7} x + \sigma t);$$

$$V_1 = u + \tau'_1(r_1), \quad V_{2,5} = u - \tau'_1(r_{2,5}), \quad V_8 = \tau'_2(r_8) - u;$$

$$V_{7,8} = u - \tau'_2(r_{7,10}), \quad V_9 = u + \tau'_2(r_9), \quad V_k = \tau'_1(\alpha_k) - u, \quad k = 3, 4, 6;$$

$$V_4 > V_3, \quad V_1 > V_9 > V_{10} > V_7 > 0, \quad V_1 > V_2 > V_5 > 0, \quad V_9 > V_2;$$

$$V_6 > V_8 > 0, \quad A = a_1 \sqrt{\pi/2} f_1(r), \quad B_{s1} = F_{s1}/\tau_1, \quad B_{s2} = F_{s2}/\tau_2.$$

Число волн при заданном σ определяется как скоростью потока, так и соотношением величин u_k ($k = 1, \dots, 4$). Для $\sigma > \sigma_0^*$ это иллюстрируется табл. 3.5, а при $\sigma < \sigma_0^*$ — табл. 3.6, где приведены значения индекса k возникающих волн η_{sk} ($k = 1, \dots, 10$).

На частотах $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ волновое движение вниз по потоку формируется из тех же волн, что и для $\sigma > \sigma_0^*$ (табл. 3.5 при $x > 0$). Волновое движение вверх по потоку ($x < 0$) при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ характеризуется табл. 3.5 для $u > u_0^*$, а для $u < u_0^*$ в графе $x < 0$ этой

ТАБЛИЦА 3.6

u		$x > 0$						$x < 0$			
$u_3 < u_4 < u_1$	$u > u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_3 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4	6	
	$u_4 < u < u_3$	1	5	9	10			4	6		
	$u_2 < u < u_4$	1	5	7	9	10		4	6	8	
	$u < u_2$	1	9	7	10			6	8		
$u_3 < u_2 < u_1$	$u < u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_4 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4	6	8
	$u_3 < u < u_4$	1	2	5	7	9	10	3	4		
	$u_2 < u < u_3$	1	5	7	9	10		4	6		
	$u < u_2$	1	7	9	10			6	8		
$u_4 < u_2 < u_1$	$u > u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_3 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4		
	$u_2 < u < u_3$	1	5	9	10			4	6		
	$u_4 < u < u_2$	1	9	10				6			
	$u < u_4$	1	7	9	10			8			
$u_4 < u_1 < u_3$	$u > u_3$	1	2	9	10			3	4		
	$u_1 < u < u_3$	1	9	10				4			
	$u_2 < u < u_1$	1	5	9	10			4	6		
	$u_4 < u < u_2$	1	9	10				6			
	$u < u_4$	1	7	9	10			8			
$u_3 < u_1 < u_4$	$u > u_3$	1	2	9	10			3	4		
	$u_1 < u < u_3$	1	9	10				4			
	$u_4 < u < u_1$	1	5	9	10			4	6		
	$u_2 < u < u_4$	1	5	7	9	10		4	6		
	$u < u_2$	1	7	9	10			6	8		

таблицы следует заменить 4 на 6, так как при данных условиях генерируется волна η_{s6} .

Таким образом, на свободной поверхности ($s = 1$) и поверхности раздела слоев ($s = 2$) вниз по потоку ($x > 0$) от области приложения возмущений в зависимости от σ и u может генерироваться от трех до шести не затухающих с расстоянием волн. Из них η_{s1} , η_{s2} , η_{s5} — гравитационные поверхностные волны, а η_{s7} , η_{s9} , η_{s10} — внутренние, обусловленные плотностной стратификацией жидкости.

Вверх по потоку ($x < 0$) может возникать от одной до четырех незатухающих волн, из которых η_{s3} , η_{s4} капиллярные, а η_{s6} и η_{s8} гравитационные поверхностные и внутренние.

Каждая из генерируемых волн занимает область $x < V_k t$ при k , равном 1, 2, 5, 7, 9 и 10, и $x > -V_k t$ при k , равном 3, 4, 6 и 8. Волны η_{sk} (k равно 1, 2, 3, 9 и 10) бегут вниз, а η_{sk} (k равно 4 и 8) — вверх по потоку. Границы областей, покрытых волнами η_{sk} , перемещаются вниз по потоку при k , равном 1, 2, 5, 7, 9 и 10, и вверх при k , равном 3, 4, 6 и 8. Скорости их перемещения (скорости передних фронтов волн η_{sk}) равны V_k . Фазовые скорости и длины волн η_{sk} определяются формулами $v_k = \sigma/r_k$ и $\lambda_k = 2\pi/r_k$. Элементы внутренних волн ($k = 7, \dots, 10$) практически не зависят от поверхностного натяжения μ_1 .

Для фиксированных значений σ и μ_1 величины u и λ_k поверхностных волн с увеличением скорости потока растут при k , равном 1, 2 и 5, и убывают при k , равном 3, 4 и 6. При этом

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \lambda_k, v_k = \begin{cases} 0, & k = 3, 4; \\ \infty, & k = 1, 2, 9, 10. \end{cases}$$

Кроме того, длины и фазовые скорости капиллярных волн η_{s3} , η_{s4} удовлетворяют неравенствам $\lambda_3 < 2\pi/\beta_3$, $\lambda_4 < 2\pi/\beta_2$, $v_3 < \sigma/\beta_3$, $v_4 < \sigma/\beta_2$. В частности, при $\mu_1 = 0,073$ Н/м, соответствующем поверхностному натяжению на границе вода — воздух при температуре 20 °С, и $\sigma = 1$ с⁻¹ величины β_2 и β_3 принимают значения 364,1 и 381,5 м⁻¹. Следовательно, в этом случае длины $\lambda_{3,4}$ волн η_{s3} и η_{s4} не могут быть больше $16,4 \cdot 10^{-3}$ и $17,2 \cdot 10^{-3}$ м соответственно. Если фиксированы σ и u , то с ростом μ_1 увеличиваются длины и фазовые скорости капиллярных волн.

В случае заданных u и μ_1 меньшей частоте отвечают большие $\lambda_{3,4}$. При этом

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lambda_{3,4} = 2\pi/\beta_5 = 2\pi\sqrt{T_1}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} v_{3,4} = \sigma/\beta_5 = \sigma\sqrt{T_1};$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lambda_{3,4} = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} v_{3,4} = \infty.$$

Фазовые скорости капиллярных η_{s4} и обусловленных потоком гравитационных волн η_{s2} могут иметь при этом по минимуму. Если $u < \bar{v}$, то минимум имеет v_4 на частоте $\bar{\sigma} = (\bar{v} - u)/\sqrt{T_1}$. Он равен $\bar{v}_4 = \bar{v} - u$. При $u > \bar{v}$ имеется минимум у v_2 . Этот минимум достигается на частоте $\bar{\sigma} = (u - \bar{v})/\sqrt{T_1}$ и равен $\bar{v}_2 = u - \bar{v}$. Длины волн, отвечающие минимальным значениям фазовых скоростей $\bar{v}_{4,2}$, определяются из выражения $\bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_2 = 2\pi/\bar{\sigma}$, а их передние фронты движутся со скоростями, равными фазовым. Отметим, что η_{sk} для k , равного 2, 3, 4, 5, 7 и 10, генерируются только в условиях потока. Если $u = 0$, то они отсутствуют, а $\lambda_1 = \lambda_6$, $v_1 = v_6$, $\lambda_9 = \lambda_8$, $v_9 = v_8$, $V_1 = V_6$, $V_9 = V_8$.

2. Рассмотрим теперь в качестве генератора волн источник интенсивности $Q \cos \sigma t$, начинающий действовать с момента $t = 0$ на задан-

ной глубине текущей с постоянной скоростью двухслойной жидкости. Решая задачу аналогично предыдущему, получим для ξ_1 и ξ_2 те же выражения, что и в случае возмущений (3.79). Отличие состоит только в том, что

$$\eta_{sk} = \begin{cases} A_{sk}(-r_k) B_{s1}(-r_k) \cos \theta_k, & k = 1-3; \\ A_{sk}(r_k) B_{s1}(r_k) \cos \theta_k, & k = 4-6; \\ -A_{sk}(-r_k) B_{s2}(-r_k) \cos \theta_k, & k = 1-7; \\ -A_{sk}(r_k) B_{s2}(r_k) \cos \theta_k, & k = 9, 10; \end{cases}$$

$$A_{sk} = Q f_s(r) [2 \sqrt{2\pi} V_k (\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1},$$

где

$$f_1 = \operatorname{ch} r H_1 / \operatorname{ch} r H_1, \quad f_2 = -\gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch} r (H_1 - h_1) \operatorname{ch}^{-1} r H_1;$$

$$B_{1k} = \varepsilon r g \operatorname{th} r H_2 - \gamma_k (1 + \gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{th} r H_1);$$

$$B_{2k} = r g D_1 - \gamma_k \operatorname{th} r (H_1 - h_1), \quad k = 1, 2$$

для источника в верхнем слое и

$$f_1 = -\operatorname{ch} r (H_2 - h_1) / (\operatorname{ch} r H_2 \operatorname{ch} r H_1), \quad f_2 = \operatorname{ch} r (H_2 - h_1) / \operatorname{ch} r H_2;$$

$$B_{1k} = \gamma_k, \quad B_{2k} = r g D_1 \operatorname{th} r H_1 - \gamma_k, \quad k = 1, 2$$

для источника в нижнем слое; h_1 — расстояние от источника до поверхности раздела слоев жидкости.

Если в формулах для источника в нижнем слое положить

$$f_1 = \bar{f}(r) (\operatorname{ch} r H_1 \operatorname{ch} r H_2)^{-1}, \quad f_2 = \bar{f}(r) \operatorname{ch}^{-1} r H_2, \quad Q = -a \sqrt{2\pi},$$

то получим выражение вида волн, генерируемых периодическими колебаниями участка дна бассейна, происходящими с вертикальной скоростью $w = a f(x) \cos \sigma t$. Здесь $\bar{f}(r)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Таким образом, процесс развития волн, возбуждаемых периодическими возмущениями в неоднородной жидкости, определяется главным образом скоростью потока, перепадом плотности, поверхностным натяжением и частотой колебаний. Причем поверхностные и внутренние гравитационные волны образуются как при $x > 0$, так и при $x < 0$, а капиллярные возникают только вверх по потоку от области действия возмущений и только при определенных скоростях потока.

В заключение отметим, что периодические по времени возмущения (нормальные давления, колебания участка дна, источник, действующий в жидкости на заданной глубине) генерируют в потоке двухслойной жидкости такие же волны, что и перемещающаяся с постоянной скоростью u область периодических возмущений (поверхностных давлений, колебаний дна, источник, движущийся на заданной глубине) при отсутствии потока.