С. И. Гуров

КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ И ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК:
приложения в теории кодирования и комбинаторике

МОСКВА

2018

Оглавление

Предисловие

> *... а иногда потому так пространно писали, что если тебе не разъяснить, то от тебя и ответа не получишь.*
>
> *Иван Грозный.* Из послания шведскому королю Юхану III.

Данная книжка есть конспект лекций курса «Прикладная алгебра», который читается автором в 5-м семестре бакалаврам III («программистского») потока факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Отметим, что стиль изложения в учебнике и конспекте лекций различен. Последний, во-первых, более неформальный, «разговорный». Во-вторых он более сжатый и содержит, в основном, лишь формулировки определений, часто без каких-либо пояснений и формулировки теорем, часто без доказательства. Многие обозначения, считающиеся известными читателю или вводимые и понятные из контекста, не определяются. С другой стороны — специфика лекций: некоторые понятия, обозначения и т. д. для напоминания повторяются там, где их возможно было опустить.

Особенности преподавания курса потребовали включить в текст достаточное количество примеров и задач с решениями. Эти задачи частично общеизвестны и кочуют из пособия в пособие, частично оригинальны и либо взяты из новейших источников, либо составлены автором.

Полноценным соавтором главы 3 (с соответствующими задачами) является Д. А. Кропотов. Автор искренне признателен рецензенту Д. А. Жукову, который внимательно просмотрел текст и дал ценные советы по его улучшению.

Глава 1

Группы, кольца, поля: компендиум

1.1 Группы

Определение 1.1. *Группой* называется тройка $\langle G, \circ, e \rangle$, где G — непустое множество (*носитель*), $e \in G$ — *нейтральный элемент группы*, а $\circ$ — такая бинарная операция на носителе, что для любых его элементов x, y, z выполняются следующие *законы* или *аксиомы группы*:

$\boxed{0)}$ $x \circ y \in G$ — *устойчивость* носителя;

1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ — *ассоциативность*;

2) $e \circ x = x \circ e = x$ — *свойство нейтрального элемента*;

3) $\forall x \exists ! y : y \circ x = x \circ y = e$ — *существование обратного элемента* к x.

При отсутствии неясностей, группы обозначают $\langle G, \circ \rangle$ или просто символом носителя G.

Вместо $\circ$ часто пишут $\cdot$ или просто этот символ опускают (*мультипликативная запись* групповой операции) и нейтральный элемент называют единицей, а обратный к x — x^{-1}.

Степень элемента при мультипликативной записи:

$$a^0 = e,\ a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ символов } a},\ n \in \mathbb{N},$$

при которой справедливы обычные свойства степени:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,\ (a^m)^n = a^{mn},\ a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}.$$

Если $|G| = n$, то G — *конечная группа* и n — её *порядок*. В конечной группе небольшого порядка операцию $\circ$ удобно задавать *таблицей умножения* (*таблицей Кэли*).

Пример 1.1 (*Таблица умножения группы Клейна* V_4).

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

— четверная группа Клейна

$$V_4 = \{\, e,\, a,\, b,\, c \,\}$$

Группы со свойством $x \circ y = y \circ x$ называются *коммутативными* или *абелевыми*. Для них используют *аддитивную запись* $x + y$ групповой операции, нейтральный элемент называют *нулем* (0), а обратный к элементу x — *противоположным* ($-x$).

Пример 1.2. 1. Четверная группа Клейна абелева.

2. *Числовые группы* — все они абелевы:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *сложения*.
- *Ненулевые* элементы множеств $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — группы относительно *умножения*.

3. *Бинарные наборы* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ (единичный куб) относительно покомпонентной суммы по $\bmod 2$: $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$ — абелева группа, её нуль — $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$.

3. *Симметрическая группа* S_n: все перестановки n-элементного множества $X = \{\, 1, \ldots, n \,\}$ относительно их композиции $*$. Нейтральный элемент симметрической группы — единичная перестановка 1_X. Ясно, что $|S_n| = n!$ и S_n *не абелева при* $n \geqslant 3$.

Перестановки можно записывать в виде:

а) таблицы —

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_i & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

б) разложения на циклы —

$$\pi \;=\; \left(t_1^1 t_2^1 t_3^1 \dots t_{k_1}^1\right)\left(t_1^2 t_2^2 t_3^2 \dots t_{k_2}^2\right)\dots\left(t_1^m t_2^m t_3^m \dots t_{k_m}^m\right).$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически: $\pi(t_1) = t_2,\ \pi(t_2) = t_3,\ \dots,\ \pi(t_k) = t_1$ и перестановка π содержит m циклов.

Циклы длины 1, то есть вида (t), обычно опускают:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (154)(26)$$

Каноническое представление цикла $(t_1 t_2 \dots t_k)$:
t_1 — наименьшее из чисел $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$.
Например, для композиции перестановок:

$$(123) * (23) \;=\; (12) \;\neq\; (13) \;=\; (23) * (123).$$

4. *Группы симметрии (самосовмещений) объекта — совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой.*

4.1. Группы *симметрии* правильного n-угольника — *группы диэдра* D_n

а) *У группы* D_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$ — *две* образующих: (1) вращение вокруг центра на $\frac{360^\circ}{2k+1}$ в выбранном направлении,
(2) симметрия относительно оси, проходящей через данную вершину и центр многоугольника.

Например: группа симметрии правильного треугольника — перестановка его вершин A, B и C

$$D_3 \;=\; \langle\, t,\, r \,\rangle \;=\; \{\, e,\, (ABC),\, (ACB),\\ (A)(BC),\, (B)(AC),\, (C)(AB) \,\} \;=\; S_3.$$

t — вращение на 120° вокруг центра в выбранном направлении (по или против часовой стрелки),

r — осевая симметрия относительно выбранной оси.

б) *У группы* D_{2k}, $k \in \mathbb{N}$ — *три* образующих:
(1) вращение вокруг центра (в выбранном направлении) на $\frac{360^\circ}{2k}$ и две осевых симметрий — относительно фиксированных осей, проходящих через середины противоположных (2) сторон и (3) вершин.

Пример: группа симметрии квадрата с вершинами A, B, C и C.

$$D_4 = \langle\, t,\, r,\, f \,\rangle.$$

t — вращение на 90° вокруг центра в выбранном направлении,
r — симметрия относительно некоторой оси, проходящей через центры противоположных сторон,
f — симметрия относительно некоторой оси, проходящей противоположные вершины.

Легко видеть, что $|D_n| = 2n$.

4.2. Группы *вращений* правильных многогранников — это не все симметрии многогранника, а только повороты, т. е. зеркальные отражения исключены.

Пять *платоновых тел* и соответствующие группы их вращений: T — группа *вращения тетраэдра*, $|T| = 12$; O — группа *октаэдра*, вращения октаэдра и куба, $|O| = 24$; Y группа *икосаэдра*, вращения икосаэдра и додекаэдра, $|T| = 60$.

Подгруппы и смежные классы. Если $\langle\, G,\, \circ,\, e \,\rangle$ — группа, а H — подмножество G, само являющееся группой относительно $\circ$, то $\langle\, H,\, \circ,\, e \,\rangle$ — *подгруппа* G, символически $H \leqslant G$.

Единичная $E = \{e\}$ и вся группа — *тривиальные* подгруппы любой группы. Ясно, что нейтральный элемент e входит в любую группу.

Определение левого xH и правого Hx *смежных классов по подгруппе* H *(с представителем* x*)* соответственно:

$$H \leqslant G,\ x \in G \ \Rightarrow xH = \{\, xh \mid h \in H \,\},$$
$$Hx = \{\, hx \mid h \in H \,\}.$$

Утверждение 1.1 (*о смежных классах*). *Левые смежные классы с разными представителями либо не пересекаются, либо совпадают и вместе составляют всю группу.*

То же справедливо и для правых смежных классов.

Если $\forall x \in G : xH = Hx$, то подгруппа H — *нормальная*. Нормальность — ослабленное условие коммутативности: *в абелевой группе все подгруппы нормальны*.

Определение 1.2. Множество смежных классов группы $\langle G, \circ \rangle$ по её нормальной подгруппе H снабжённое операцией $\bullet$:

$$(aH) \bullet (bH) = (a \circ b)H.$$

называется *факторгруппой*, символически G/H.

Легко видеть, что результат $x \circ y$ находится в abH независимо от выбора элементов $x \in aH$ и $y \in bH$.

Определение 1.3. Для групп $\langle G, \circ, e \rangle$ и $\langle G', \cdot, e' \rangle$ отображение $\varphi : G \to G'$ называется *изоморфизмом*, если оно

1) взаимно-однозначно (биективно);
2) сохраняет групповую операцию: для любых $a, b \in G$ справедливо $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,

а такие группы — *изоморфными*, символически $G \cong G'$.

Из определения следует, что для изоморфизма φ имеет место $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ и $\varphi(e) = e'$.

Иногда, когда это не приводит к недоразумениям, вместо $G \cong G'$ пишут просто $G = G'$.

Теорема 1.1 (*Кэли*). *Любая группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.*

Если в определении изоморфизма снять требование биективности φ, то получим определение *гомоморфизма групп*. *Например*, всегда существует гомоморфизм произвольной группы в единичную E.

Циклические группы. В *циклических группах* имеется *порождающий элемент* (*образующий элемент, генератор*) c такой, что каждый элемент группы может быть получен многократным (с учётом $c^0 = e$) применением к нему или к c^{-1} групповой операции, то есть C — циклическая группа, если

$$\underset{C}{\exists}\, c \ \underset{C}{\forall}\, x \ \underset{\mathbb{Z}}{\exists}\, k \,:\, c^k = x, \quad \text{символически } \langle c \rangle = C.$$

Ясно, что циклическая группа абелева и любая её подгруппа — циклическая и абелева.

Пример циклической группы: группа $\left\langle \frac{2\pi}{n} \right\rangle$ поворотов n-угольника вокруг центра на указанный угол с совпадающими исходным и полученным положениями.

Для циклических групп возможны два случая.

1. *Все степени порождающего элемента различны* — тогда группа бесконечна и состоит из элементов

$$\ldots,\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ \ldots,$$

то есть она изоморфна группе $\langle\, \mathbb{Z},\, +,\, 0 \,\rangle$ целых чисел *по сложению*. Ясно, что это единственная с точностью до изоморфизма бесконечная циклическая группа.

Сколько в ней генераторов? Два: -1 и $+1$.

2. *Две различные степени порождающего элемента совпадают*: $a^{k+n} = a^k a^n = a^k \ \Rightarrow\ a^n = e$.

Определение 1.4. Порядком элемента a циклической группы C, символически $\operatorname{ord} a$, называют число

$$\operatorname{ord} a \;=\; \arg\min_{m \,\in\, \mathbb{N}} \{a^m = e\}.$$

В рассматриваемом случае получаем конечную группу

$$\mathbb{Z}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, +_{\bmod n}, 0 \rangle, \; n = \operatorname{ord} a$$

(подробнее см. далее).

Любая циклическая группа является гомоморфным образом группы $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_6 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$. Её нетривиальные подгруппы суть

$$\{0, 2, 4\} \cong \mathbb{Z}_3, \quad \{0, 3\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

а порождающие элементы — 1 и 5, взаимно простые с 6, не входящие ни в одну из них.

Определение 1.5. Значение *функции Эйлера* $\varphi(n)$ — количество чисел из интервала $[\,1, \ldots, n-1\,]$, взаимно простых с n и, по определению $\varphi(1) = 1$.

Например, $\varphi(6) = \big|\{1, 5\}\big| = 2$.

Свойства функции Эйлера (p — простое):

- $\varphi(p) = p - 1$;
- $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$, откуда $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$,
- если m и n *взаимно просты*, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
- $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Иллюстрация свойств:

$$\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^1 \cdot 1 \cdot 2 = 4,$$
$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8,$$
$$\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot 1 = 8,$$

$n = 12$, $D(12) = \{\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 6,\, 12 \,\}$,

$$\underbrace{\varphi(1)}_{=1} + \underbrace{\varphi(2)}_{=1} + \underbrace{\varphi(3)}_{=2} + \underbrace{\varphi(4)}_{=2} + \underbrace{\varphi(6)}_{=2} + \underbrace{\varphi(12)}_{=4} = 12.$$

Ясно, что циклическая группа порядка n имеет ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов.

Теорема Лагранжа и следствия из неё

Теорема 1.2 (*Лагранж*). *Порядок подгруппы конечной группы делит порядок самой группы:*

$$|\,G\,| \;=\; |\,H\,| \cdot [\,G : H\,]\,.$$

Число $[G : H]$ называется *индексом подгруппы* H *по группе* G.

Следствие. *Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.*

Например, для $\mathbb{Z}_6$: $\operatorname{ord} 0 = 1$, $\operatorname{ord} 1 = \operatorname{ord} 5 = 6$, $\operatorname{ord} 2 = \operatorname{ord} 4 = 3$, $\operatorname{ord} 3 = 2$ и порядки всех элементов делят 6.

1.2 Кольца и поля

Кольца: определение, основные свойства

Определение 1.6. Абелева группа $\langle\, R, +, 0\,\rangle$ называется *кольцом*, символически $\langle\, R, +, \cdot, 0\,\rangle$, если на ней определена бинарная операция *умножения* $\cdot$, связанная со сложением $+$ *дистрибутивными законами*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \;\text{ и }\; (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

- Обычно рассматривают *ассоциативные кольца* с ассоциативной операцией умножения.
- Важный случай — *коммутативные кольца* с коммутативной операцией умножения.
- Если в кольце имеется единичный элемент 1 по умножению ($x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$), то кольцо называется *кольцом с единицей* или *унитальным*, символически $\langle\, R, +, \cdot, 0, 1\,\rangle$.

- *Тривиальное кольцо* — $\{0\}$, в нём и только в нём $0 = 1$.
- Кольцо R *без делителей нуля*, если для любых a, $b \in R$ из $a \cdot b = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$.

Определение 1.7. *Целостным кольцом* (*областью целостности*) называют нетривиальное унитальное ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля.

Пример 1.3. 1. Классический пример кольца — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения. Это кольцо целостно и имеет два обратимых элемента: $+1$ и -1.

2. Кольцо чётных $2\mathbb{Z}$ — кольцо без единицы.

3. $\mathbb{Z}_n$ — *кольцо классов вычетов*[1)] *по модулю* n, результаты операций $(+)$ и $(\cdot)$ по $\bmod\ n$.

   Целые числа a и b *сравнимы по модулю натурального* n, символически $a = b \pmod n$ или $a \equiv_n b$, если при делении на n они имеют одинаковые остатки, или, что то же, $a - b$ делится на n.

   Класс вычетов числа a по модулю n — множество всех целых чисел, сравнимых с a по модулю n, символически $[a]$ или $\overline{a}$ (число n считается заданным):

   $$[a] = \{\, b \in \mathbb{Z} : a \equiv_n b \,\} = \{\, a,\ a \pm n,\ a \pm 2n,\ \dots \,\}.$$

   Если нет опасности разночтений, вместо $[a]$ или $\overline{a}$ пишут просто a.

   Сложение и умножение классов вычетов определяется формулами

   $$[a] + [b] \ = \ [a + b], \quad [a] \cdot [b] \ = \ [a \cdot b].$$

[1)] вычет (лат. residum) — остаток

Кольцо $\mathbb{Z}_n$ содержит ровно n элементов:

$$[0],\ [1],\ \ldots,\ [n-1] \ \text{ или просто } \ \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Это кольцо нецелостно при составном n: например в $\mathbb{Z}_6$ получим $3 \cdot 2 = 0$.

Элемент a *унитального* кольца называется *обратимым*, если существует элемент b такой, что

$$a \cdot b \,=\, b \cdot a \,=\, 1$$

(ясно, что тогда и элемент b обратим).

Например, в кольце Z_6 обратимы элементы 1 и 5: $1 \cdot 1 \,=\, 5 \cdot 5 \,=\, 1$. Если p — простое число, то все ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}_p$ обратимы: например, в $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$: $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 3 \equiv_5 1$, $4 \cdot 4 \equiv_5 1$.

Элемент $p \neq 0$ *целостного* кольца называется *неприводимым* или *неразложимым*, если он не является произведением двух необратимых элементов.

Например, в кольце $\mathbb{Z}$ обратимы только элементы ± 1, а неразложимы — простые числа и противоположные к ним.

Определение 1.8. Целостное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент либо обратим, либо однозначно с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимый элемент представляется в виде произведения *неразложимых* элементов, называется *факториальным* или *гауссовым*.

- $\mathbb{Z}$ — факториальное кольцо: для любого целого n справедливо *примарное разложение* (по простым) — $n = \pm 1 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.
- Кольцо $\left\{ a \pm i\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ не факториально, т. к., например, число 4 имеет два представления в виде произведения неразложимых:

$$4 \,=\, 2 \cdot 2 \,=\, \left(1 + i\sqrt{3}\right) \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right).$$

Определение 1.9. Непустое подмножество S носителя R кольца $\langle\, R, +, \cdot, 0 \,\rangle$ называется его *подкольцом*, если оно само является кольцом, относительно операций $+$ и $\cdot$.

Подкольцо *собственное*[2], если $S \neq R$.

При $n < m$ кольцо $\mathbb{Z}_n$ не есть подкольцо $\mathbb{Z}_m$: например, в $\mathbb{Z}_5$ — $3 \cdot 3 = 4$ и $3 + 3 = 1$, а в $\mathbb{Z}_8$ — $3 \cdot 3 = 1$ и $3 + 3 = 6$.

Идеалы колец и факторкóльца

Определение 1.10. Подкольцо I коммутативного[3] кольца $\langle\, R, +, \cdot, 0 \,\rangle$ называется его *(двусторонним) идеалом*, символически $I \lhd R$, если оно устойчиво относительно относительно умножения на элементы R, т. е. для любых $i \in I$ и $r \in R$ справедливо $i \cdot r \in I$.

Пример идеала в кольце целых: все чётные числа.

Само кольцо и его нуль 0 — *тривиальные идеалы* кольца. Идеалы, не совпадающие со всем кольцом — *собственные*; 0 принадлежит любому идеалу.

Можно определить сумму и произведение идеалов и работать с ними как с «идеальными числами».

Определение 1.11. Идеал I унитального коммутативного кольца R называется *главным порождённым элементом* $a \in R$, если

$$I = \{\, a \cdot r \mid r \in R \,\} = (a).$$

Целостные кольца, в которых все идеалы главные, называются *кольцами главных идеалов КГИ*.

---

[2] Кстати, термин *собственный* — неудачный перевод английского слова *proper*; следовало бы говорить *правильный* или *настоящий*, но так уж исторически сложилось и не исправить...

[3] Для некоммутативного кольца вводят понятия *правых* и *левых идеалов*, но они нам не понадобятся. Пример правого неглавного идеала в кольце матриц порядка n: совокупность матриц, у которых все столбцы, кроме первого — нулевые.

Примеры КГИ:

- кольцо целых $\mathbb{Z}$ — все его идеалы имеют вид $(n) = n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \ldots\}$.
- кольцо $\mathbb{Z}_n$ — так как вместе с любыми элементами идеал всегда содержит их НОД.
  Например, для $\mathbb{Z}_6$: $(0) = 0$, $(1) = (5) = \mathbb{Z}_6$,
  $(2) = (4) = \{0, 2, 4\}$, $(3) = \{0, 3\}$.

Все КГИ факториальны.

Определение 1.12. *Классом вычетов по модулю идеала I кольца* $\langle R, +, \cdot, 0 \rangle$ с представителем $r \in R$, называют множество

$$\overline{r}_I = \{ r + i \mid i \in I \}.$$

Если идеал фиксирован, пишут просто $\overline{r}$. Классы вычетов разных представителей по модулю данного идеала —

- либо совпадают, либо не пересекаются;
- в объединении дают R;
- порождаются любым своим элементом:

$$a \in \overline{r} \Rightarrow \overline{a} = \overline{r}.$$

В кольце целых $\mathbb{Z}$ класс вычетов по идеалу (n) с представителем $0 \leqslant r \leqslant n - 1$ есть

$$\overline{r} = \{ r, r \pm n, r \pm 2n, \ldots \}$$

— все целые, дающие при делении на n остаток r. Далее, как правило, будем опускать черту над символом представителем класса.

На классах вычетов естественным образом определены операции сложения и умножения, индуцированные операциями над представителями. При этом совокупность всех классов вычетов кольца R по модулю идеала I образуют *факторкольцо*, символически R/I.

Понятно, что ранее рассмотренное кольцо $\mathbb{Z}_n$ есть факторкольцо $\mathbb{Z}$ по идеалу (n): $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/(n)$.

Пример 1.4. $I = (6) \lhd \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(6) \cong \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, \ldots, 5\}$,
$$2 + 5 = 1, \quad 2 \cdot 3 = 0, \quad 2 \cdot 5 = 4 \text{ и т. д.}$$

Определение 1.13. *Максимальным идеалом* коммутативного кольца называется всякий его собственный идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном идеале.

В нетривиальном коммутативном кольце всегда существует максимальный идеал.

Пример 1.5. В кольце $\mathbb{Z}$

- идеалы (2) и (3) максимальны;
- идеал (6) не максимален, т. к. он содержится и в идеале (2), и в идеале (3): любое число, делящееся на 6 делится также и на 2, и на 3.
- максимальные идеалы имеют вид (p), где p — простое число.

Евклидовы кольца

Определение 1.14. Целостное кольцо $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ называется *евклидовым*, если для каждого его элемента $x \neq 0$ определена норма $N(x) \in \mathbb{N}_0$ со свойствами для любых элементов a и $b \neq 0$:

1) существуют такие его элементы q и r, что
$$a = q \cdot b + r \quad \text{и либо } r = 0, \quad \text{либо } N(r) < N(b);$$
2) $N(a) \leqslant N(ab)$.

Наличие нормы даёт возможность производить деление элементов кольца друг на друга с остатком.

Пример 1.6.

- Классический пример евклидова кольца — *кольцо целых чисел* $\mathbb{Z}$; норма — абсолютная величина числа.
- Кольцо $\mathbb{R}[x]$ многочленов с действительными коэффициентами евклидово, норма — степень многочлена.

Все евклидовы кольца — КГИ.

Поле

Определение 1.15. Целостное кольцо $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, в котором все элементы, кроме 0, обратимы, называется *полем*.

Поле также можно определить как такую пятёрку $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, что $\langle K, +, 0 \rangle$ — абелева группа по сложению, $\langle \{K \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ — абелева группа по умножению, связанные дистрибутивным законом $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ для всех $x, y, z \in K$.

Для нас важны следующие свойства поля:

1) ненулевые элементы поля образуют группу относительно *умножения*, её называют *мультипликативной группой* данного поля;
2) факторкольцо R/I является полем если и только если идеал I кольца R *максимальный*.

Подмножество поля K, само являющееся полем и устойчивое относительно сужения на него операций из K, называется *подполем*. *Примеры бесконечных полей и их подполей*: числовые поля $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Поле K, не обладающее никаким собственным подполем, называется *простым*. Например, поле $\mathbb{Q}$ — простое.

Взаимнооднозначное отображение φ поля K на поле K' называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом*, если для любых a, b из K

1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
2) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Утверждение 1.2. *В каждом поле содержится только одно простое подполе, которое изморфно либо* $\mathbb{Q}$, *либо* $\mathbb{Z}_p$, p — *простое.*

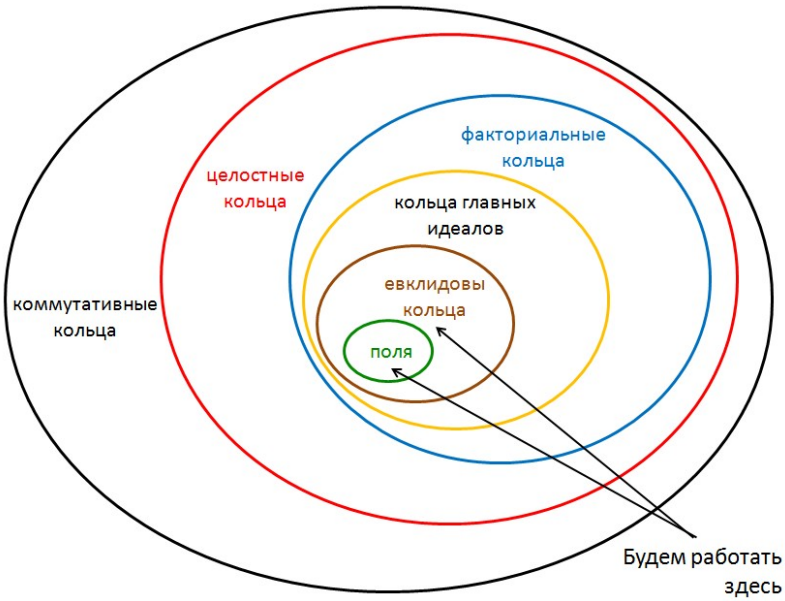


Рис. 1.1. От ассоциативных колец к полям

1.3 Задачи

1.1. Выяснить, образуют ли группы следующие множества при указанной операции над элементами:

1) Целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения?
2) Неотрицательные целые числа относительно сложения?
3) Нечетные целые числа относительно сложения?
4) Целые числа относительно вычитания?
5) Рациональные числа относительно умножения?
6) Рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения?
7) Положительные рациональные числа относительно умножения?

8) Положительные рациональные числа относительно деления?
9) Корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения?
10) Матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения?
11) Невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения?
12) Перестановки чисел 1, 2, ..., n относительно композиции перестановок?
13) Преобразования множества M, то есть взаимнооднозначные отображения этого множества на себя, относительно композиции отображений?
14) Элементы n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно сложения?
15) Параллельные переносы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ относительно композиции движений?
16) Повороты трехмерного пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг прямых, проходящих через данную точку O относительно композиции движений?

1.2. Найти степени и порядки всех элементов циклической группы 6-го порядка. Какие из них являются порождающими?

1.3. Найти все подгруппы и порождающие элементы циклической группы порядка 24.

1.4. Показать, что если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — примарное разложение $n \in \mathbb{N}$, то

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

1.5. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами, а какие полями относительно естественных операций на них.

1) Квадратные матрицы данного порядка с *действительными* элементами относительно сложения и умножения матриц?
2) Многочлены одного неизвестного с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения?
3) Многочлены одного неизвестного с действительными коэффициентами относительно обычных операций?

1.6. Пусть $\langle R, +, \cdot \rangle$ и $\langle R', \oplus, \otimes \rangle$ — кольца. Отображение $\varphi : R \to R'$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) \oplus \varphi(r_2),\ \varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \otimes \varphi(r_2).$$

Взаимно-однозначный гомоморфизм колец называется их *изоморфизмом*, символически $R \cong R'$.

Является ли отображение $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ гомоморфизмом колец?

1.7. Показать, что множество векторов V пространства с операциями сложения и векторного умножения является кольцом. Является ли оно ассоциативным? коммутативным?

1.8. Указать классы вычетов кольца $\mathbb{Z}_6$ по идеалу (3).

1.9. Является ли 2-элементное поле подполем 5-элементного?

Глава 2

Конечные поля

2.1 Поля Галуа

Простые поля Галуа — поля вычетов

- $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.
- p — простое число.
- $(p) = p\mathbb{Z} = \{\, 0,\, \pm p,\, \pm 2p,\, \ldots \}$ — идеал, порождённый числом p.
- $\mathbb{Z}/(p) = \left\{\, \overline{0},\, \overline{1},\, \ldots,\, \overline{p-1} \,\right\}$ — p-элементное кольцо вычетов по модулю этого идеала, то есть классы остатков от деления целых чисел на p:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{0} & = 0 + (p)\,, \\ \overline{1} & = 1 + (p)\,, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{p-1} & = p - 1 + (p) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{p-1}.$$

Черту над символами классов вычетов часто не ставят, заменяя класс его представителем — наименьшим по модулю положительным элементом.

Поскольку p — простое, то идеал (p) — максимальный и $\mathbb{Z}/(p)$ — *поле*. Его называют *простым полем Галуа* и обозначают $\mathbb{F}_p$ или $GF(p)$[1)]. Любое конечное поле называют также полем Галуа.

Примеры: таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_3$ и факторкольце $\mathbb{Z}/(4)$ —

[1)] В честь Эвариста Галуа (1811–1832); первым обозначением обычно пользуются математики, а вторым — специалисты по информатике.

$\mathbb{F}_3$:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}/(4)$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

В факторкольце $\mathbb{Z}/(4) \cong \mathbb{Z}_2 :\ 2 \times 2 = 0$ (!)
Однако поле из 4-х элементов существует...

Характеристика поля. Пусть K — произвольное поле. Будем складывать его единицы: $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$, ...

В конечном поле всегда найдётся первое k такое, что

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k \text{ единиц}} = 0.$$

Это значение k — порядок аддитивной группы поля K называют *характеристикой поля*, символически $\operatorname{char} K$.

Ясно, что $\operatorname{char} K$ — простое число: иначе, если $\operatorname{char} K = u \cdot v$, то получим $(u \cdot 1) \cdot v = 0$, т. е. наличие в K делителей нуля.

Если все суммы вида $1+\ldots+1$ различны, то полагают $\operatorname{char} K = 0$ (а не ∞). Числовые поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — нулевой характеристики.

$\{0, 1, \ldots, \operatorname{char} K - 1\} \cong \mathbb{Z}_{\operatorname{char} K}$ — минимальное *подполе* любого поля K положительной характеристики.

Существуют и бесконечные поля положительной характеристики. Таким будет, например, поле $K(x)$ *рациональных функций* над конечном полем K, элементами которого являются "дроби" P/Q (если $Q \neq 0$), где P и Q —

многочлены от формальной переменной x с коэффициентами из K. На множестве данных "дробей" вводятся отношение эквивалентности, операции сложения, умножения и деления, аналогично как это делается для рациональных чисел в форме простых дробей.

В конечном поле возможно сильное упрощение вычисления степеней сумм.

Лемма 2.1 (тождество Фробениуса). *В поле характеристики $p > 0$ выполнено тождество*

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Доказательство. В любом коммутативном кольце верна формула для степени бинома

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{C_p^1 a^{p-1}b + \ldots + C_p^{p-1}ab^{p-1}}_{=0} + b^p,$$

в которой при $i = 1, \ldots, p-1$ числитель коэффициента $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ делится на p, а знаменатель — нет, откуда $C_p^i \equiv_p 0$. □

Следствие. *В поле характеристики $p > 0$ для любого натурального n справедливо*

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Мультипликативная группа и примитивный элемент конечного поля.

Обозначим $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ мультипликативную группу q-элементного поля Галуа $\mathbb{F}_q$.

Утверждение 2.1. *$\mathbb{F}_q^*$ — циклическая по умножению группа порядка $q-1$.*

Порождающие элементы мультипликативной группы поля называют его *примитивными элементами*. Если

α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_q$, то $\operatorname{ord}\alpha = q-1$ и справедливо представление

$$\mathbb{F}_q = \{\, 0, \underbrace{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{q-2}, \alpha^{q-1}=1}_{\mathbb{F}_p^*} \,\}.$$

Пример. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{11}$. Его мультипликативная группа есть $\mathbb{F}_{11}^* \cong \langle \{1, 2 \ldots, 10\}, \cdot, 1 \rangle$ и она имеет $\varphi(10) = 4$ примитивных элементов.

Попробуем их найти. Проверяем элемент 2:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^k	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

— т. е. элемент 2 — примитивный. Проверяем 3:

k	1	2	3	4	5
3^k	3	9	5	4	1

— то есть $\operatorname{ord} 3 = 5$ и 3 — не примитивный, и т. д.

Как ускорить процесс?
Если примарное разложение числа $p-1$

— *известно* $\Rightarrow$ элемент $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ примитивен если и только если

$$\alpha^{\frac{p-1}{q}} \neq 1 \text{ для каждого } \textit{простого } q \mid (p-1).$$

Примеры: 1) $p = 11$ (наш случай), $p-1 = 10 = 2 \cdot 5$, проверяем степени q из множества $\{2, 5\}$:

$$2^2 = 4 \neq 1,\ 2^5 = 10 \neq 1 \Rightarrow 2 \text{ — } \textit{примитивный},$$
$$3^2 = 9 \neq 1,\ 3^5 = 1 \Rightarrow 3 \text{ — не примитивный.}$$

2) Для $GF(37)$, $p-1 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$. Находим: $\frac{36}{2} = 18$, $\frac{36}{3} = 12$; поэтому для выяснения, является ли элемент α примитивным, нужно проверить не более двух равенств: $\alpha^{12} = 1$ и $\alpha^{18} = 1$.

— *неизвестно* $\Rightarrow$ эффективного алгоритма не найдено; используют таблицы, вероятностные алгоритмы...

Если найден один примитивный элемент α поля $\mathbb{F}_p$, то любой другой его примитивный элемент может быть получен как степень α^k, где k — взаимно просто с $p-1$. В нашем примере 2 — примитивный элемент $\mathbb{F}_{11}$, $k \in \{1, 3, 7, 9\}$ — взаимно простые с 10, получим, что 6, 7 и 8 — также примитивные элементы $\mathbb{F}_{11}$:

$$2^1 = 2, \;\; 2^3 = 8, \;\; 2^7 = 7, \;\; 2^9 = 6.$$

Деление в кольце многочленов. Поскольку кольцо многочленов над полем евклидово, то многочлены можно делить друг на друга с остатком.

Пример 2.1. В кольце $\mathbb{Z}_2[x]$ разделим «уголком» $f(x) = x^7+x^4+x^2+1$ на $g(x) = x^3+x+1$ с остатком (см. рис. 2.1):

$$\begin{array}{l|l}
-x^7+\quad x^4+x^2+1 & x^3+x+1 \\
\underline{x^7+x^5+x^4} & x^4+x^2+1 \\
\quad -x^5+\quad x^2+1 & \\
\quad \underline{x^5+x^3+x^2} & \\
\quad\quad -x^3+\quad 1 & \\
\quad\quad \underline{x^3+x+1} & \\
\quad\quad\quad x &
\end{array}$$

Рис. 2.1. Деление многочленов «уголком»

Получили частное $x^4 + x^2 + 1$ и остаток x.

Неприводимые многочлены. Многочлен над некоторым полем называется *неприводимым*, если он не является произведением двух многочленов ненулевой степени.

Поскольку евклидовы кольца факториальны, любой многочлен над любым полем однозначно с точностью до перестановок разлагается в произведение неприводимых или сам является таковым.

В кольце многочленов над:

$\mathbb{Q}$ — существуют неприводимые многочлены произвольной степени;

$\mathbb{R}$ — неприводимы линейные многочлены и квадратные с отрицательным дискриминантом;

$\mathbb{C}$ — неприводимы только линейные многочлены.

Далее нас будут интересовать неприводимые многочлены в кольцах $\mathbb{F}_p[x]$ (над простыми полями Галуа), т. е. вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{F}_p, \; i = \overline{0, n-1}.$$

Неприводимые многочлены из $\mathbb{F}_2[x]$ степеней $2 \ldots 5$.

Вторая степень: $x^2 + ax + b$.

Ясно, что $b = 1$, иначе $x^2 + ax = x(x + a) \;\Rightarrow$ ищем неприводимый многочлен в виде $x^2 + ax + 1$.

Если $a = 0$, то $x^2 + 1 = (x + 1)^2$; поэтому $a = 1$ и получаем *единственный* неприводимый многочлен степени 2 над $\mathbb{F}_2$: $x^2 + x + 1$.

Третья степень: $x^3 + ax^2 + bx + 1$.

Исключая, как сделано ранее, делимость на $x + 1$, получаем условие $a + b = 1$, то есть

$$\text{либо } a = 0,\, b = 1, \quad \text{либо } a = 1,\, b = 0.$$

Следовательно над $\mathbb{F}_2$ существует два неприводимых многочлена степени 3:

$$x^3 + x^2 + 1 \quad \text{и} \quad x^3 + x + 1\,.$$

Четвёртая степень: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$.

Исключение делимости на $x + 1$ приводит к условию $a + b + c = 1$, то есть остаются к рассмотрению 4 варианта, которые дают 3 неприводимых многочлена:

a	b	c	многочлен
0	0	1	x^4+x+1
0	1	0	$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)^2$ — *приводимый*
1	0	0	x^4+x^3+1
1	1	1	$x^4+x^3+x^2+x+1$

Пятая степень: $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$. Исключение делимости на $x+1$ приводит к условию $a+b+c+d=1$ — 8 вариантов. Далее необходимо исключить делимость на многочлены 2 и 3-й степеней; их один и два соответственно и их произведения дают два многочлена. Приведём 6 неприводимых многочленов 5-й степени:

$$x^5+x^2+1, \qquad x^5+x^3+1,$$
$$x^5+x^3+x^2+x+1, \qquad x^5+x^4+x^2+x+1,$$
$$x^5+x^4+x^3+x+1, \qquad x^5+x^4+x^3+x^2+1.$$

Теорема 2.1 (о существовании неприводимых многочленов). *Для любых простого p и натурального n в $\mathbb{F}_p[x]$ существует неприводимый многочлен степени n.*

— докажем позже.

Итак, в кольцах $\mathbb{F}_p[x]$ есть неприводимые многочлены любой степени, но как их найти?

Для этого *нет эффективных алгоритмов*; известные неприводимые многочлены приводят в таблицах.

Расширения простых полей. С помощью неприводимых многочленов можно строить *новые конечные поля — расширения* простых полей аналогично построению самого простого поля:

1) выбирая простое p, фиксируем поле $\mathbb{F}_p$ и рассматриваем кольцо $\mathbb{F}_p[x]$ многочленов над $\mathbb{F}_p$;
2) выбираем натуральное n и *неприводимый многочлен* над $\mathbb{F}_p$ —
$$a(x) = a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 \in \mathbb{F}_p[x],\ a_n\neq 0;$$

3) идеал $(a(x))$ порождает факторкольцо $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, элементы которого суть совокупности $\overline{r(x)}$ многочленов, дающих при делении на $a(x)$ остаток $r(x)$; множество всех таких остатков $\{r(x)\}$ есть совокупность всех многочленов из $\mathbb{F}_p[x]$ степеней от 0 до $n-1$.

Утверждение 2.2. *Множество* $\left\{ \overline{r(x)} \right\}$ *является полем Галуа* $GF\,(p^n)$ *относительно сложения и умножения вычетов.*

Действительно, кольцо многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ евклидово, многочлен $a(x)$ неприводим, следовательно идеал $(a(x))$ — максимальный и $\left\{ \overline{r(x)} \right\}$ — поле. Данное поле, изоморфное $\mathbb{F}_p^n = GF(p^n)$, называют *расширением n-й степени* простого поля $\mathbb{F}_p$.

Теорема 2.2. *Любое конечное поле изоморфно какому-нибудь полю Галуа* $\mathbb{F}_p^n$, p *— простое,* n *— натуральное.*

Пример 2.2. Построим поле $\mathbb{F}_3^2$. Для этого выберем в $\mathbb{F}_3[x]$ неприводимый многочлен: пусть это будет x^2+1. Тогда искомое поле 9-элементное поле есть

$$\mathbb{F}_3^2 \cong \mathbb{F}_3[x]/\left(x^2+1\right) = \\ = \left\{ \overline{0},\, \overline{1},\, \overline{2},\, \overline{x},\, \overline{x+1},\, \overline{x+2},\, \overline{2x},\, \overline{2x+1},\, \overline{2x+2} \right\}.$$

Можно составить таблицы сложения и умножения в этом поле с учётом $x^2 = -1 \equiv_3 2$. Например:

$$\overline{x+1} + \overline{x+2} = \overline{2x}, \qquad \overline{x} \cdot \overline{2x} = \overline{1},$$
$$\overline{2x+1} + \overline{x} = \overline{1}, \qquad \overline{2x+1} \cdot \overline{x} = \overline{x+1}, \quad \text{и т. д.}$$

Черту над элементами поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ обычно не ставят и называют их просто «многочленами». Но надо помнить, что это суть *бесконечные совокупности* многочленов, дающих при делении на $a(x)$ один и тот же данный остаток.

А что будет, если при построении поля вместо x^2+1 взять другой неприводимый в $\mathbb{F}_3[x]$ многочлен? Получится поле, *изоморфное построенному*.

Вопрос от студента: я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы? Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...

Ответ: это — разные вещи.

- *Неприводимые многочлены* ищут в *кольце многочленов* $\mathbb{F}_p[x]$ над простым полем $\mathbb{F}_p$ — например, чтобы построить расширение последнего.
- *Примитивные элементы* ищут в *мультипликативной группе* поля — например, чтобы иметь удобное представление её элементов через степени примитивного.

Примитивные многочлены. В примере 2.2 построено поле $F = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$. Определим в F^* порядок корня x неприводимого многочлена $a(x) = (x^2+1)$: имеем $x^2 = -1 \equiv_3 2$ и $x^4 = 4 \equiv_3 1$, т. е. $\operatorname{ord} x = 4 \neq 3^2-1 = 8$. Это означает, что x не является примитивным элементом построенного поля.

Когда же корень x неприводимого многочлена $a(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, $\deg a(x) = n$ будет примитивным элементом поля $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$?

Ясно, что в понятиях построенного поля для этого нужно, чтобы $\operatorname{ord} x = p^n - 1$.

В понятиях $\mathbb{F}_p[x]$ это эквивалентно требованию, чтобы многочлен $a(x)$ был *примитивным* для x, т. е. когда $t = p^n - 1$ — наименьший показатель, при котором $a(x)$ делит бином $x^t - 1$.

Например, неприводимый над $\mathbb{F}_2$ многочлен x^3+x+1 *примитивен*:

$$x^{2^3-1} - 1 = x^7 + 1 = (x^3+x+1)\cdot(x^4+x^2+x+1)$$

и легко показать, что $(x^t+1) \not\vdots (x^3+x+1)$ ни при каком $t<7$.

Также и $\operatorname{ord} x = 7$:

$$\big(\mathbb{F}_2[x]/\big(x^3+x+1\big)\big)^* = \big\{\, x^0=1,\, x^1,\, x^2,\, x^3=x+1,\\ x^4=x^2+x,\, x^5=x^2+x+1,\, x^6=x^2+1 \,\big\}$$

— все *многочлены* из $\mathbb{F}_2[x]$ степени не выше 2.

А для поля $F=\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ примера 2.2 показано, что элемент x не примитивен и также многочлен (x^2+1) не примитивен: он делит, например, бином x^4-1.

2.2 Вычисления в конечных кольцах и полях

Алгоритм Евклида — применяют для нахождения НОД(a,b) *натуральных* чисел a и b (рассматриваем простейший случай — вычисления в кольце $\mathbb{Z}$).

Поскольку общий делитель пары чисел (a,b) остаётся им и для пары $(a-kb,b)$, $a-kb\geqslant 0$, то вместо $a-kb$ можно взять остаток от деления нацело a на b, и затем, переставив числа в паре, повторить процедуру; она закончится, т. к. числа в паре уменьшаются, но остаются неотрицательными. В результате образуется пара $(r,0)$, и ясно, что НОД$(a,b)=r$.

Алгоритм Евклида[2)] *нахождения НОД* (a,b), $a\geqslant b$, $a,b\in\mathbb{N}$:

1) вычислить r — остаток от деления a на b: $a=bq+r$, $0\leqslant r<b$;
2) если $r=0$, то b — искомое значение;

[2)] дважды описан в «Началах» Евклида, но не был им открыт (упоминается в «Топике» Аристотеля)

3) иначе заменить пару чисел (a, b) парой (b, r) и перейти к шагу 1.

Пример 2.3. Найдём НОД $(252, 105)$ по алгоритму Евклида.

(1) $252 = 105 \cdot 2 + 42 \quad \Rightarrow \ (105, 42)$;
(2) $105 = 42 \cdot 2 + 21 \quad \Rightarrow \ (42, 21)$;
(3) $42 = 21 \cdot 2 + 0 \quad \Rightarrow$ НОД $(252, 105) = 21$.

Ясно, что НОД $(a, b, c) =$ НОД $(a,$ (НОД $(b, c))$.

Утверждение 2.3 (соотношение Безу[3]). *Для любых натуральных a, b и $d =$ НОД (a, b) найдутся целые коэффициенты Безу x, y такие, что $d = ax + by$.*

Доказательство. По алгоритму Евклида $d =$ НОД (a, b) есть остаток от деления некоторых чисел, которые в свою очередь суть тоже остатки отделения и т. д., так, что процесс заканчивается на числах a и b. Учитывая, что остаток от деления числа u на v представляется в виде $u + (-q)v$, получаем представление $d = ax + by$, где целые коэффициенты x и y — целые. □

Замечание. Коэффициенты Безу могут быть выбраны неоднозначно, например

НОД $(12, 30) = 6 = 3 \cdot 12 + (-1) \cdot 30 = (-2) \cdot 12 + 1 \cdot 30$.

Расширенный алгоритм Евклида находит по двум *натуральным числам* a *и* b, $a \geqslant b$, их *натуральный* НОД d и два *целых* x, y коэффициента Безу таких, что $|x| < |b/d|$, $|y| < |a/d|$.

Расширенный алгоритм Евклида решения соотношения Безу $ax + by = d$ в кольце $\mathbb{Z}$.

[3] Открыто Клодом Гаспаром Баше за 106 лет до рождения Этьена Безу. Онлайн-калькулятор коэффициентов соотношения Безу доступен по адресу *http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi*.

0. Зададим матрицу $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и положим $r = b$.
1. Перевычислим r как остаток от деления числа a на b: $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$.
2. Если $r = 0$, то второй столбец матрицы E дает вектор $(\ x \quad y\ )^T$ решений заданного соотношения, а d есть последнее ненулевое значение r.
3. Иначе заменим матрицу E матрицей
$$E \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}.$$
4. Заменим пару чисел (a, b) парой (b, r) и перейдем к шагу 1.

Пример 2.4. Расширенным алгоритмом Евклида найдём натуральное d и целые x и y такие, что
$$d = \text{НОД}(252, 105) = 252x + 105y.$$

(0) Определим матрицу $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и положим $r = 105$.

(1) Перевычисляем $r = 252 - 105 \cdot 2 = 42 \neq 0$.

(2) Заменяем матрицу E матрицей
$$E \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3) Заменяем пару чисел $(252, 105)$ парой $(105, 42)$ и перейдем к шагу 1.

(4) Вычисляем $r = 252 - 105 \cdot 2 = 21 \neq 0$.

(5) Заменяем матрицу E матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(6) Заменям пару чисел $(252, 105)$ парой $(42, 21)$ и перейдём к шагу 1.

(7) Вычисляем $r = 42 - 21 \cdot 2 = 0$. Значения $x = -2$ и $y = 5$ найдены, как и $d = 21$.

Алгоритм Евклида и его расширенная версия остаются справедливыми в любом евклидовом кольце.

Пример 2.5. В поле $\mathbb{Z}/(101)$ решить уравнение

$$4x = 1. \qquad (*)$$

Решение. Поскольку $101y \equiv_{101} 0$, вместо $(*)$ можно расширенным алгоритмом Евклида решать соотношение

$$4x + 101y = 1\,.$$

В результате работы алгоритма получим

$$4 \cdot (-25) + 101 \cdot (+1) = 1.$$

и далее: $x = -25 \equiv_{101} = 76 = 4^{-1}$.

Аналогично решаются уравнения $ax = c$ и $ax + by = c$ (a, b и c надо вначале поделить на их общий НОД).

Расширенный алгоритма Евклида позволяет вычислить НОД двух любых элементов произвольного евклидова кольца. Нас будет интересовать случай конечного кольца многочленов $R = \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$, где $g(x)$ — многочлен над $\mathbb{F}_p$:

$$a(x) \cdot \chi(x) + b(x) \cdot y(x) = c(x) \mod g(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены из R, $c(x)$ — их НОД.

В случае неприводимого многочлена $g(x) = a(x)$ в качестве R получаем конечное поле, и появляется возможность вычислить обратный к элементу $b(x) \neq 0$ элемент $y(x)$, определяемый соотношением

$$\underbrace{a(x) \cdot \chi(x)}_{=0} + b(x) \cdot y(x) = 1 \mod a(x).$$

Ясно, что при итерациях алгоритма нет необходимости вычислять $\chi_i(x)$, т. к. нас интересует только значения

$y_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$. Для этого удобна следующая форма расширенного алгоритма Евклида.

Расширенный алгоритм Евклида нахождения элемента $y(x)$, обратного к $b(x)$ по модулю многочлена $a(x)$.

Шаг 0. Задаём начальные значения:
$r_{-2}(x) = a(x),\ r_{-1}(x) = b(x),$
$y_{-2}(x) = 0,\ y_{-1}(x) = 1.$

Шаг 1. Делим $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$ и находим частное $q_0(x)$ и остаток $r_0(x)$:

$$r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$$

вычисляем

$$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = -q_0(x).$$

При $\deg r_0(x) > 0$ — переход к следующему шагу.

...

Шаг i. Делим $r_{i-3}(x)$ на $r_{i-2}(x)$, находим частное $q_{i-1}(x)$ и остаток $r_{i-1}(x)$:

$$r_{i-3}(x) = r_{i-2}(x)q_{i-1}(x) + r_{i-1}(x),$$

вычисляем

$$y_{i-1}(x) = y_{i-3}(x) - y_{i-2}(x)q_{i-1}(x);$$

$\deg r_0(x) > 0$.

...

Шаг n. Делим $r_{n-3}(x)$ на $r_{n-2}(x)$, находим частное $q_{n-1}(x)$, остаток $r_{n-1}(x)$:

$$r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),$$

вычисляем

$$y_{n-1}(x) = y_{n-3}(x) - y_{n-2}(x)q_{n-1}(x).$$

При $\deg r_0(x) = 0$ (то есть $r_0(x)$ — константа) — *ОСТАНОВ*.

Шаг $n+1$. Если $r_0(x) = c \neq 1$, многочлен y_{n-1} умножаем на константу c^{-1}.

Пример 2.6. Найдём $(x^2+x+3)^{-1}$ в поле

$$\mathbb{F}_7[x]/\big(x^4+x^3+x^2+3\big).$$

Для этого расширенным алгоритмом Евклида решим соотношение Безу

$$(x^4+x^3+x^2+3)\cdot\chi(x) \,+\, (x^2+x+3)\cdot y(x) \,=\, 1. \qquad (*)$$

Шаг 0: // *Задание начальных значений*
$r_{-2}(x) = x^4+x^3+x^2+3,$
$r_{-1}(x) = x^2+x+3,$
$y_{-2}(x) = 0,$
$y_{-1}(x) = 1.$

Шаг 1: $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$
$q_0(x) = x^2+5,$
$r_0(x) = 2x+2, \quad \deg r_0(x) \,=\, 1,$
$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) =$
$= -q_0(x) = -x^2-5.$

Шаг 2: $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$
$q_1(x) = 4x,$
$r_1(x) = 3, \quad \deg r_1(x) \,=\, 0,$
$y_1(x) = y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) =$
$= 1 + 4x(x^2+5) = 4x^3+6x+1.$

Шаг 3: Остаток $r_1(x) = 3$ отличается от 1 на множитель-константу.
Для получения решения $(*)$, вычисляем элемент $3^{-1} \equiv_7 5$ и домножаем на него y_1 : $5y_1(x) =$
$= 5(4x^3+6x+1) \,\equiv_7\, 6x^3+2x+5.$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_7[x]/(x^4+x^3+x^2+3)$ имеем

$$(x^2+x+3)^{-1} \,=\, 6x^3+2x+5.$$

2.3 Алгебра векторов над конечным полем

Векторное пространство

Определение 2.1. *Абстрактным векторным пространством* над полем $K = \{1, \alpha, \beta, \dots\}$ называется двухосновная алгебраическая система $\langle V,\ K; +, \cdot \rangle$, где

- $V = \{0, v, \dots\}$ — множество *векторов*, являющееся коммутативной группой по сложению $(+)$ с нулевым элементом 0;
- $\cdot$ — бинарная операция *умножения элемента* («числá») *из* K *на вектор из* V: $K \times V \dot{\to} V$,

причём операции $+$ и $\cdot$ удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2,\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v$;
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$;
3) $1 \cdot v = v$.

Пример 2.7. Пусть $V = K^n$ — *множество конечных последовательностей длины* n элементов поля K. Сложение и умножение на число из K элементов из V определим покомпонентно.

Получившаяся структура есть векторное пространство, которое называют *n-мерным координатным пространством* над полем K. Ясно, что если K — конечное поле, то V содержит $|K|^n$ элементов.

Утверждение 2.4. *Поле $GF(q)$ характеристики простого p есть векторное пространство над $GF(p)$.*

Доказательство. В поле $GF(q),\ q \geqslant p$:
сложение — наследуется из поля $GF(p)$;

умножение — поскольку

$$GF(p) \;=\; \big\{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, p-1 \,\big\} \;\subseteq\; GF(q),$$

то при умножении «чисел» из поля $GF(p)$ на векторы из $GF(q)$ можно заменять на умножение элементов $GF(q)$;

аксиомы векторного пространства выполняются в силу свойств арифметических поля $GF(q)$. □

Следствие. *Поле Галуа $GF(q)$ характеристики p состоит из p^n элементов: $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Представление элементов конечных полей. Поле $\mathbb{F}_p^n$ с элементами

$$M_{p,n}(x) \;= \\ = \big\{\, b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} \mid b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_{n-1} \in \mathbb{F}_p \,\big\}$$

можно рассматривать как

- *факторкольцо* $\mathbb{F}_p[x]/\big(a(x)\big)$ вычетов $\mathbb{F}_p[x]$ по идеалу некоторого неприводимого многочлена

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\; a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{F}_p$$

или как

- *n-мерное координатное пространство* над $\mathbb{F}_p$:

$$\langle\, M_{p,n}(x),\, \mathbb{F}_p;\, +,\, \cdot \,\rangle, \quad \text{все операции — по } \bmod p.$$

Теорема 2.3. *Базис $\mathbb{F}_p^n$ образуют элементы*

$$\overline{1},\, \overline{x},\, \ldots,\, \overline{x^{n-1}}.$$

Доказательство. 1. Любой элемент $\mathbb{F}_p^n$ представим в виде линейной комбинации указанных векторов:

$$\overline{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}} \;=\; b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}}.$$

2. Пусть

$$c(x) = c_0\overline{1} + c_1\overline{x} + \ldots + c_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0}.$$

Это означает, что многочлен $c(x)$ степени $n-1$ делится на некоторый многочлен n-й степени, что возможно лишь при $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, то есть система $\left\{ \overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}} \right\}$ *линейно независима.* □

Замечание. Построение поля с помощью вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена и аналоги доказанных теорем справедливы *не только в случае конечных полей.*

Например:

1) рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ над ним;

2) в $\mathbb{R}[x]$ возьмём неприводимый многочлен $x^2 + 1$;

3) построим поле F как факторкольцо
$$F = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1);$$

4) F также и векторное пространство над $\mathbb{R}$; его базис — $\left\{ \overline{1}, \overline{x} \right\}$ и каждый его элемент z можно представить в виде $z = a\overline{1} + b\overline{x},\ a, b \in \mathbb{R}$.

Поле F изоморфно полю *комплексных чисел*

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1 \right\}.$$

Лемма 2.2. *Поле* $\mathbb{F}_p^n$ *содержит подполе* $\mathbb{F}_p^k$ *если и только если* $k \mid n$.

Доказательство. Если поле K_1 содержится в поле K_2, то элементы K_2 можно умножать на элементы из K_1, а результаты складывать.

В конечном случае поле K_2 является векторным пространством над полем K_1 некоторой размерности d —

значит, в нём $|K_1|^d$ элементов. В условиях теоремы : $p^n = (p^k)^d$, что и означает $k \mid n$.

Обратное следует из существования и единственности (с точностью до изоморфизма) полей Галуа. □

Используются два представления элементов конечного поля $F = \mathbb{F}_p^n$:

векторное — каждый элемент F записывается как вектор в базисе $\{1, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ (вместо $\overline{x}$ пишем просто x).

степенное — каждый ненулевой элемент F записывается как некоторая степень генератора мультипликативной группы F^*.

При этом $\overline{x}$ можно понимать как

- совокупность всех многочленов из $\mathbb{F}_p[x]$, дающих при делении на $a(x)$ остаток x;
- вектор $(0, 1, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{F}_p)^n$.

Переход от степенного представления к векторному достаточно прост, а обратный переход — очень сложен, т. к. связан с вычислением *дискретного логорифма.*

2.4 Корни многочленов над конечным полем

Минимальный многочлен. Рассмотрим элемент β некоторого конечного поля и будем интересоваться многочленами, для которых он является корнем.

Определение 2.2. *Минимальным многочленом (м. м.)* элемента $\beta \in GF(p^n)$ называется *приведённый* многочлен $m_\beta(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ наименьшей степени, для которого β является корнем.

Сразу заметим, что минимальный многочлен для $\overline{x}$ можно получить из порождающего поле неприводимого.

Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$, порождаемое неприводимым многочленом

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

и убедимся, что многочлен $a_n^{-1}a(x)$ — минимальный для элемента $\overline{x} = (\,0,\,1,\,0,\,\ldots,\,0\,) \in F$.

Ясно, что

$$\overline{x}^2 = \overline{x^2} = (0,0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \overline{x^{n-1}} = (0,\ldots,0,1)$$

Далее, с одной стороны $\overline{x}$ — корень $a(x)$, т. к.

$$a_0 + a_1\overline{x} + \ldots + a_n(\overline{x})^n = \overline{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n} = \overline{0},$$

а значит и $a_n^{-1}a(x)$.

С другой —

если $\exists\, b(x) = b_0 + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}(\overline{x})^{n-1} = \overline{0}$,

то $b_0\overline{1} + b_1\overline{x} + \ldots + b_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \overline{0}$,

то есть имеем линейную зависимость между элементами $\left\{\overline{1},\,\overline{x},\,\ldots,\,\overline{x^{n-1}}\right\}$ — базиса поля F как векторного пространства над $\mathbb{F}_p$, что возможно только при $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

Ясно, что минимальные многочлены не обязательно являются примитивными (см. с. 30).

Дадим эквивалентное данному ранее

Определение 2.3. Минимальный многочлен примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом.*

Свойства минимальных многочленов. Мы докажем далее, что м. м. для каждого элемента β конечного поля: (а) существует, (б) единственен и (в) неприводим. Эти свойства позволят указать простой алгоритм нахождения м. м. для любого β.

Утверждение 2.5. *Минимальные многочлены неприводимы.*

Доказательство. Пусть $m_\beta(x)$ — м. м. степени m для β и $m_\beta(x) = m_1(x) \cdot m_2(x)$.

Тогда
$$m_\beta(\beta) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1(\beta) = 0 \\ m_2(\beta) = 0 \end{array} \right. ,$$
но степени многочленов $m_1(x)$ и $m_2(x)$ меньше m, и поэтому β не может быть их корнем. □

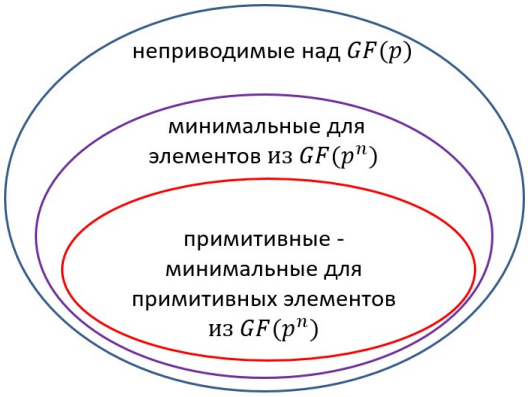


Рис. 2.2. Соотношение множеств неприводимых, минимальных и примитивных многочленов

Утверждение 2.6. *Пусть в некотором поле Галуа $m_\beta(x)$ — м. м. для элемента β, а $f(x)$ — многочлен такой, что $f(\beta) = 0$. Тогда $f(x)$ делится на $m_\beta(x)$ без остатка.*

Доказательство. Разделим $f(x)$ на $m_\beta(x)$ с остатком:
$$f(x) = u(x) \cdot m_\beta(x) + v(x), \quad 0 \leqslant \deg v < \deg m_\beta(x).$$

Подставляя в это равенство β вместо x, получаем
$$0 = f(\beta) = u(\beta) \cdot \underbrace{m_\beta(\beta)}_{=0} + v(\beta) = v(\beta),$$

то есть β — корень $v(x)$, что противоречит минимальности $m_\beta(x)$ и поэтому $v(x) \equiv 0$. □

Следствие. *Для каждого элемента поля существует не более одного м.м.*

Действительно, пусть минимальных многочленов два. Они взаимно делят друг друга, а значит, различаются на обратимый множитель-константу. Поскольку минимальный многочлен приведён, эта константа равна 1, т. е. данные многочлены совпадают.

Утверждение 2.7. *Для каждого элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$ существует м. м. $m_\beta(x)$ и его степень не превосходит n:* $\deg m_\beta(x) = d \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим элементы 1, β, β^2, …, β^n поля $\mathbb{F}_p^n$. Их $n+1$ штук, а размерность $\mathbb{F}_p^n$ как векторного пространства равна n $\Rightarrow$ эти элементы линейно зависимы, то есть существуют такие не все равные 0 коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$, что

$$c_0 1 + c_1\beta + \ldots + c_n\beta^n = 0,$$

$\Rightarrow$ β — корень многочлена $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$.

Минимальным многочленом для β будет некоторый приведённый неприводимый делитель $f(x)$. □

Далее будут доказаны ещё два свойства м. м. $m_\beta(x)$ элемента β поля $\mathbb{F}_p^n$, $\deg m_\beta(x) = d$:

1) $m_\beta(x) \mid \left(x^{p^n} - x\right)$;

2) $m_\beta(x)$ минимален также и для *сопряжённых* с β элементов β^p, β^{p^2}, …, $\beta^{p^{d-1}}$.

Свойства многочленов над конечным полем. *Поле разложения многочлена* $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ — наименьшее по n расширение $\mathbb{F}_p^n$ поля $\mathbb{F}_p$, над которым $f(x)$ разлагается в *произведение линейных множителей.*

Теорема 2.4 (о поле разложения бинома $x^{p^n-1}-1$). *Любой ненулевой элемент поля* $F = \mathbb{F}_p^n$ *является корнем бинома* $x^{p^n-1}-1$*:*

$$x^{p^n-1} - 1 \;=\; (x-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_{p^n-1})$$

где $\{\,\beta_1,\,\ldots,\,\beta_{p^n-1}\,\} = F^*$*, то есть* F *— поле разложения данного бинома.*

Доказательство. F^* — циклическая группа по умножению порядка p^n-1.

Порядок $\operatorname{ord}\alpha$ любого её элемента α (= порядок циклической подгруппы $\langle\alpha\rangle$ — по теореме Лагранжа) делит порядок группы.

Поэтому $p^n - 1 = q\cdot\operatorname{ord}\alpha$ и

$$\alpha^{p^n-1} - 1 \;=\; \alpha^{q\operatorname{ord}\alpha} - 1 \;=\; (\alpha^{\operatorname{ord}\alpha})^q - 1 \;=\; 1^q - 1 \;=\; 0,$$

то есть α — корень $x^{p^n-1}-1$. □

Следствие (теорема Ферма). *Все элементы поля* $\mathbb{F}_p^n$*, не исключая нуля, являются корнями бинома* $x^{p^n} - x$*.*

Доказательство. Вынесем x за скобку:

$$x^{p^n} - x \;=\; x\cdot\left(x^{p^n-1}-1\right).$$

У второго сомножителя корнями будут все ненулевые элементы поля, а у первого — 0. □

Теорема 2.5. *В кольце многочленов*

$$(x^n-1)\,\vdots\,(x^m-1) \;\Leftrightarrow\; n\,\vdots\,m.$$

Доказательство.

- Пусть $n = mk$. Сделаем замену $x^m = y$, тогда $x^n - 1 = y^k - 1$ и $x^m - 1 = y - 1$.
  Делимость очевидна, т. к. 1 — корень $y^k - 1$.

- Предположим, что $n \vdots\!\!\!/\, m$, то есть $n = km + r$, $0 < r < m$, тогда

$$x^n - 1 = \frac{x^r(x^{mk} - 1)}{x^m - 1} \cdot (x^m - 1) + x^r - 1.$$

Это выражение задает результат деления $x^n - 1$ на $x^m - 1$ с остатком, поскольку $x^{mk} - 1$ делится на $x^m - 1$ по доказанному выше. Остаток $x^r - 1 \neq 0$ в силу $r > 0$.

Следовательно $x^n - 1$ *не делится* на $x^m - 1$. □

Теорема даёт возможность раскладывать биномы $x^n - 1$ при *составных* n на (возможно разложимые далее) многочлены над $\mathbb{F}_p$.

Пример 2.8. Многочлен $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ должен делиться на $x^3 + 1$ и на $x^5 + 1$.

Действительно, имеем $-1 = +1$ и

$$\begin{aligned} x^{15} + 1 &= (x^3 + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = \\ &= (x^5 + 1)(x^{10} + x^5 + 1). \end{aligned}$$

Возможность раскладывать биномы *специального вида* на *неприводимые* даёт следующая

Теорема 2.6. *Бином $x^{p^n} - x$ делят все неприводимые многочлены n-й степени над $\mathbb{F}_p$.*

Доказательство.

$n = 1$. Убеждаемся, что $(x - a) \mid (x^p - x)$, где $a \in \mathbb{F}_p$: поскольку $a^p = a$, оба бинома имеют корень a.

$n > 1$. Выбираем неприводимый приведённый многочлен $f(x)$ степени n из $\mathbb{F}_p[n]$ (*пока не доказано!*) и строим поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(f(x)\big)$.
В нём x — корень и своего м. м. $f(x) = m_x(x)$, и бинома $x^{p^n-1} - 1$.
По свойствам м. м. (Утверждение (2.6)) $x^{p^n-1} - 1$ делится на $f(x)$.
□

Пример 2.8 (продолжение). Продолжаем разложение $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Поскольку $15 = 2^4 - 1$, все неприводимые многочлены 4-й степени над $\mathbb{F}_2$ будут делителями $x^{16} - x$ и, следовательно, $x^{15} + 1$. Таких многочленов три:

$$x^4 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Имеем

$$x^{15}+1 \;=\; (x^3+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Замечаем, что $3 = 2^2 - 1$, и поэтому все неприводимые многочлены 2-й степени над $\mathbb{F}_2$ будут делителями $x^4 - x$ и, следовательно, $x^3 + 1$. Такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

Окончательно получаем разложение $x^{15} + 1$ на неразложимые над $\mathbb{F}_2$ многочлены:

$$\begin{aligned} x^{15} + 1 \;=\; & (x+1)(x^2+x+1)\cdot \\ & \cdot (x^4+x+1)\cdot(x^4+x^3+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1). \end{aligned}$$

Теорема 2.7. *Любой неприводимый многочлен, делящий бином $x^{p^n} - x$, имеет степень, не превосходящую n.*

Доказательство. Пусть φ — неприводимый делитель бинома $x^{p^n} - x$ степени k.

Тогда $F = \mathbb{F}_p/(\varphi)$ — поле, которое рассмотрим как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ с базисом $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{k-1}}\right\}$.

Обозначим $\overline{x} = \alpha$. Поскольку $(x^{p^n} - x) \vdots \varphi$, то в F имеем $\alpha^{p^n} - \alpha = 0$.

Любой элемент F выражается через базис:

$$\beta = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i.$$

Возведя обе части этого равенства в степень p^n, получим

$$\beta^{p^n} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i\right)^{p^n} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i = \beta,$$

то есть β — корень уравнения

$$x^{p^n} - x = 0 \qquad (*)$$

Итак, каждый элемент поля F является корнем $(*)$, но у $(*)$ не более p^n различных корней, а $|F| = p^k$; поэтому $n \geqslant k$. □

Вывод. Бином $x^{p^n} - x$ делится на следующие неприводимые многочлены из $\mathbb{F}_p[x]$: любые степени n и, возможно, некоторые степени $< n$.

Следующая теорема позволяет находить все корни неприводимого многочлена по одному известному.

Теорема 2.8 (свойство корней неприводимого многочлена). *Если $\beta \in \mathbb{F}_p^n$ — корень неприводимого многочлена $f(x)$ над $\mathbb{F}_p$ степени n, то элементы β, β^p, β^{p^2}, $\ldots$, $\beta^{p^{n-1}}$ все различны и исчерпывают список всех n его корней.*

Доказательство. 1. Покажем, что если β — корень $f(x)$, то β^p — тоже корень.

Поскольку $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$, то справедливо

$$\begin{aligned}\bigl(a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k\bigr)^p &= \\ &= a_0^p + a_1^p x^p + a_2^p x^{2p} + \ldots + a_k^p x^{kp} = \\ &= a_0 + a_1(x^p) + a_2(x^p)^2 + \ldots + a_k(x^p)^k,\end{aligned}$$

то есть для любого многочлена $\varphi(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ выполняется равенство

$$(\varphi(x))^p = \varphi(x^p). \qquad (*)$$

Отсюда $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow (f(\beta))^p = 0 \Leftrightarrow f(\beta^p) = 0$ и $\beta, \beta^p, \ldots, \beta^{p^{n-1}}$ — корни многочлена $f(x)$.

2. Осталось доказать, что все $\beta, \beta^p, \ldots, \beta^{p^{n-1}}$ различны, и тогда (многочлен степени n имеет не более n корней) можно утверждать, что найдены *все* корни многочлена $f(x)$.

Предположим, что $\beta^{p^l} = \beta^{p^k}$, считая $l \leqslant k$. Далее, поскольку

$$\beta = \beta^{p^n} = \beta^{p^k \cdot p^{n-k}} = \left(\beta^{p^k}\right)^{p^{n-k}} = \left(\beta^{p^l}\right)^{p^{n-k}} = \beta^{p^{n-k+l}},$$

то β — корень уравнения $x^{p^{n-k+l}-1} - 1 = 0$.

По *Теореме* 2.7 получаем $n - k + l \geqslant n \Rightarrow l \geqslant k$, то есть $l = k$ и все вышеописанные корни различны. □

Корни $\beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \ldots, \beta^{p^{n-1}}$ неприводимого многочлена $f(x)$ степени n называют *сопряжёнными* и ясно, что они лежат в поле $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$.

Нахождение корней неприводимого многочлена. Для нахождения всех корней неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ нужно построить поле $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$. Первый искомый корень есть x, а остальные получаются применением теоремы 2.8.

Пример 2.9. 1. Найти корни неприводимого над $\mathbb{F}_2$ многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1.$$

Решение. Один корень получаем немедленно — это x, а остальные корни в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ суть

$$\begin{aligned} &x^2, \quad x^4 = x^3 + 1, \\ &x^8 = x^6 + 1 = (x^5 + x^2) + 1 = \\ &= (x^4 + x) + x^2 + 1 = x^3 + 1 + x + x^2 + 1 = \\ &= x^3 + x^2 + x. \end{aligned}$$

Покажем, что, например, x^2 — действительно корень $f(x)$: поскольку

$$f(x^2) = x^4 + x^3 + 1\big|_{x \mapsto x^2} = x^8 + x^6 + 1$$

и $x^8 = x^6 + 1$, то $f(x^2) = 0$.

2. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

Решение. Убеждаемся, что многочлен $f(x)$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$. Поэтому один его корень — x, а остальные в поле $\mathbb{F}_2[x]/(f(x))$ суть

$$x^2,\ x^4 = x^3 + x^2 + x + 1,\ x^8 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = \ldots = x^3.$$

Покажите самостоятельно, что x^3 — действительно корень $f(x)$, то есть что

$$f(x^3) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_3[x].$$

Решение. Перебором элементов $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ убеждаемся $f(x)$ — неприводимый многочлен. Но тогда в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ он имеет корни x, x^3.

Поскольку $x^2 = -2x + 1 = x + 1$, то

$$x^3 = x^2 + x = 2x + 1.$$

Убедимся, что $2x + 1$ — корень $f(x)$:

$$f(x^2 + x) = (2x + 1)^2 + x + 1 = \\ = x^2 + x + 1 + x + 1 = 3 \cdot (x + 1) = 0.$$

Ответ: многочлен $f(x) = x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ имеет корни x и $2x + 1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$.

Для нахождения корней приводимого многочлена можно предварительно разложить его на неприводимые множители.

Нахождение минимальных многочленов. Для нахождения м. м. $m_\beta(x)$ элемента $\beta \in \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ вычисляем сопряжённые элементы β^p, β^{p^2}, ..., пока на некотором шаге d окажется, что

1) $\beta^{p^d} = \beta$, тогда
$$m_\beta(x) = (x - \beta) \cdot (x - \beta^p) \cdot \ldots \cdot \left(x - \beta^{p^{d-1}}\right).$$

2) $\beta^{p^d} = x$, тогда $m_\beta(x)$ есть многочлен $a(x)$ после нормировки; то же для случая $\beta = x$.

Пример 2.10. Найдём минимальные многочлены для элементов $x^2 + x$ и $x + 1$ поля $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$.

В этом поле $x^4 = x + 1$.

1. $\underline{\beta = x^2 + x.}$ Вычисляем элементы, сопряжённые с β:

$$\beta^2 = (x^2 + x)^2 = x^4 + x^2 = x^2 + x + 1,$$
$$\beta^4 = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 = x + \not{1} + x^2 + \not{1} = \\ = x^2 + x = \beta.$$

Таким образом $m_\beta(x)$ — квадратный многочлен и

$$m_\beta(x) \;=\; (x-\beta)(x-\beta^2) \;=\; x^2 + (\beta^2+\beta)\,x + \beta^3.$$

Вычисляем коэффициенты многочлена:

$$\begin{aligned}\beta^2+\beta \;&=(x^2+x+1)+(x^2+x) \;=\; 1,\\ \beta^3 \;&=(x^2+x+1)(x^2+x) \;=\; \ldots\\ &=(x+1)+x \;=\; 1\,,\end{aligned}$$

и окончательно $m_\beta(x) = x^2+x+1$.

Заметим, что в данном случае вычислений коэффициентов можно было не проводить, поскольку x^2+x+1 — единственный неприводимый многочлен 2-й степени над $\mathbb{F}_2$.

2. $\underline{\beta = x+1.}$ Элементы, сопряжённые с β:

$$\beta^2 = x^2+1, \quad \beta^4 = x^4+1 = x+1+1 = x,$$

поэтому $m_\beta(x) = m_x(x) = a(x) = x^4+x+1$.

2.5 Существование и единственность поля $GF(p^n)$

Вычисления в мультипликативной группе расширения поля. Построим поле $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2/(a(x))$, взяв $a(x) = x^4+x+1$. Будем задавать элементы поля наборами коэффициентов соответствующего многочлена, записывая их в порядке возрастания степеней. Порождающим является элемент $\alpha = x$, который записывается как $(0,1,0,0)$. Вычислим степени α, сведя результаты в таблицу антилогарифмов.

$\alpha^4 = \alpha + 1$ степень α	1	x	x^2	x^3
α	(0,	1,	0,	0)
α^2	(0,	0,	1,	0)
α^3	(0,	0,	0,	1)
$1 + \alpha = \alpha^4$	(1,	1,	0,	0)
$\alpha + \alpha^2 = \alpha^5$	(0,	1,	1,	0)
$\alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^6$	(0,	0,	1,	1)
$\alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^3\alpha^4 = \alpha^7$	(1,	1,	0,	1)
$1 + \alpha^2 = \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^8$	(1,	0,	1,	0)
$\alpha + \alpha^3 = \alpha^9$	(0,	1,	0,	1)
$\alpha^2 + 1 + \alpha = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^{10}$	(1,	1,	1,	0)
$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^{11}$	(0,	1,	1,	1)
$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{12}$	(1,	1,	1,	1)
$1 + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{13}$	(1,	0,	1,	1)
$1 + \alpha^3 = \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^{14}$	(1,	0,	0,	1)
$1 = \alpha + \alpha^4 = \alpha^{15}$	(1,	0,	0,	0)

Имея такую таблицу, можно очень просто производить умножение.

Пусть, например, требуется найти $(x^3 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$. С помощью таблицы это сделать значительно легче, чем прямым перемножением:

$$(x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1) = \alpha^7\alpha^{10} = \alpha^{17} \overset{\alpha^{15}=1}{=} \alpha^2 = x^2.$$

Существование полей $GF(p^n)$ для всех n. Установим наличие неприводимого нормированного многочлена f степени n над $GF(p)$, откуда последует существование поля из $GF(p^n)$ как факторкольца по идеалу, им образованному.

Символом $((n))$ обозначим число нормированных неприводимых многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$.

Лемма 2.3. $\sum\limits_{d|n} d \cdot ((d)) = p^n$.

Следствием этого результата является существование неприводимых многочленов любой степени: из

$$n \cdot ((n)) = p^n - \sum_{k|n,\, k<n} k \cdot ((k)) \geqslant p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^k = \\ = p^n - \frac{p^n - 1}{p - 1} > 0,$$

следует, что $((n)) > 0$, то есть для любых простого p и натурального n над полем $\mathbb{F}_p$ существует *хотя бы один* неприводимый нормированный многочлен степени n.

Приведём ещё одну формулу для $((n))$.

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ определяется для всех $n \in \mathbb{N}$: $\mu(n) = 1$ и для $n > 1$ —

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит} \\ & \quad \text{из } \textit{чётного числа различных} \\ & \quad \text{сомножителей;} \\ -1, & \text{если примарное разложение } n \text{ состоит} \\ & \quad \text{из } \textit{нечётного числа различных} \\ & \quad \text{сомножителей;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Например: $\mu(p) = -1$, если p — простое,
$\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = 1$, $\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = -1$,
$\mu(4) = \mu(2^2) = 0$.

Основное свойство функции Мёбиуса:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}.$$

Теорема 2.9 (формула Гаусса).

$$((n)) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\,p^{\frac{n}{d}}.$$

Например:

$$p=2,\ ((4)) \;=\; \tfrac{1}{4}\,[\,\mu(1)2^4+\mu(2)2^2+\mu(4)2\,] \;= \\ =\; \tfrac{1}{4}\,[\,2^4-2^2+0\,] \;=\; 3;$$

$$p=3,\ ((6)) \;=\; \tfrac{1}{6}\,[\,\mu(1)3^6+\mu(2)3^3+\mu(3)3^2+\mu(6)3\,] = 116.$$

Без доказательства укажем теорему, откуда следует изоморфизм *любых двух полей с одинаковым числом элементов*.

Теорема 2.10. *Пусть $m_\alpha(x)$ — м. м. элемента $\alpha\in\mathbb{F}_p^n$ и d — его степень. Тогда поле $\mathbb{F}_p[x]/\big(m_\alpha(x)\big)$ изоморфно подполю $\mathbb{F}_p^d$, порожденному степенями α.*

2.6 Циклические подпространства колец вычетов

Далее будем рассматривать кольцо многочленов $R=\mathbb{F}_p[x]/(f)$ по модулю главного идеала (f) *возможно приводимого* многочлена f над $\mathbb{F}_p$.

Идеалы в кольцах классов вычетов. Если f неприводим, то R — поле и этот случай уже рассмотрен. Но в любом случае R — векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, совокупность всех многочленов степени меньшей $\deg f$.

Теорема 2.11. *Пусть $f,\varphi\in\mathbb{F}_p[x]$, $\varphi\mid f$, а φ — неприводимый нормированный многочлен. Тогда*

1) *совокупность всех многочленов, кратных φ, образует идеал (φ) в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(f)$;*

2) φ *— единственный в* (φ) *нормированный многочлен минимальной степени;*

3) идеал (φ) *— векторное пространство размерности* $\deg f - \deg \varphi$.

Доказательство. $u, v, \varphi \in \mathbb{F}_p[x], \quad k = \deg \varphi \leqslant \deg f,$

$$\varphi = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k, \quad f = \psi\varphi.$$

1. Проверим, что (φ) — идеал в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(f)$.
Во-первых,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{g} \in (\varphi) \\ \overline{h} \in \mathbb{F}_p[x]/(f),\ \overline{h} \subseteq \overline{g} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = vg = vu\varphi \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{h} \in (\varphi).$$

И, во-вторых,

$$\overline{g}, \overline{h} \in (\varphi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{g} = u\varphi \\ \overline{h} = v\varphi \end{array} \right. \Rightarrow \overline{g} + \overline{h} = (u+v)\varphi \in (\varphi).$$

2. Покажем, что в (φ) нет других, кроме

$$\varphi = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$$

нормированных многочленов степени, меньшей $k = \deg \varphi$.
Пусть $g = b_0 + b_1 x + \ldots + x^m$. Тогда

$$\overline{g} \in (\varphi) \Leftrightarrow g = u\varphi \Rightarrow \deg g = m \geqslant \deg \varphi = k.$$

3. Без доказательства. □

Циклическое пространство. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем F. При фиксировании некоторого базиса получаем

$$V \cong F^n = \left\{ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid a_i \in F,\ i = \overline{0, n-1} \right\}$$

— координатное пространство.

Определение 2.4. Подпространство координатного пространства F^n называется *циклическим*, если вместе с набором $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ оно содержит его циклический сдвиг вправо (то есть $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2})$, а следовательно и все циклические сдвиги на произвольное число позиций влево и вправо).

Конкретно, в кольце $\mathbb{F}_p[x]/(x^n-1)$, рассматриваемом как векторное пространство имеется естественный базис $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}$.

Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$:

$$\overline{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}} \cdot \overline{x} = \\ = \overline{a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1} + a_{n-1}\underbrace{x^n}_{=1}} = \\ = \overline{a_{n-1} + a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-1}}.$$

Теорема 2.12. *В кольце классов вычетов по модулю многочлена $x^n - 1$ подпространство является циклическим если и только если оно идеал.*

Доказательство. Если подпространство I — идеал, то оно замкнуто относительно умножения на $\overline{x}$, а это умножение и есть циклический сдвиг $\Rightarrow$ I — циклическое.

И в обратную сторону, пусть I — циклическое подпространство кольца $\mathbb{F}_p/(x^n-1)$ и $g \in I$.
Тогда $g \cdot \overline{x}$, $g \cdot \overline{x^2}$, ... — циклические сдвиги, то есть также принадлежат I. Значит, $g \cdot \overline{f} \in I$ для любого многочлена f, поэтому I — идеал. □

Разложение бинома $x^n - 1$ на неприводимые множители. Легко показать, что корни бинома $x^n - 1 = 0$ (корни из 1) образуют *циклическую группу.*

Вопрос: какие корни из единицы будут порождать в неприводимый делитель $f(x)$ бинома $x^n - 1$?

Пусть бином $x^n - 1$ разлагается в произведение k неприводимых многочленов степеней $d_1, \ldots, d_k$. Если β — корень неприводимого многочлена $f(x)$ степени d, то β^p, β^{p^2}, $\ldots$ $\beta^{p^{d-1}}$ — также его корни.

Подгруппа в циклической группе существует если и только если её порядок делит порядок циклической группы. Поэтому все степени $d_1, \ldots, d_k$ должны быть делителями $p^n - 1$ (и F_p^n — поле разложения $x^n - 1$) и количество и степени многочленов-неприводимых делителей $x^n - 1$ можно найти, разбив $\mathbb{F}_p$ на *орбиты* отображения

$$t \mapsto pt \mod n.$$

Пример 2.11. 1. Рассмотрим ещё раз разложение многочлена $x^{15}-1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 15 — $\{0, 1, \ldots, 14\}$ — разбиваются на орбиты:

$$\{\overline{0}\}, \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}\}, \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{9}\}, \{\overline{5}, \overline{10}\},$$
$$\{\overline{7}, \overline{14}, \overline{13}, \overline{11}\}$$

Поэтому $x^{15} - 1$ разлагается в произведение

- одного неприводимого многочлена степени 1,
- одного неприводимого многочлена степени 2,
- трех неприводимых многочленов степени 4.

Конкретное разложение было найдено ранее.

2. Рассмотрим разложение многочлена $x^{23} - 1$ над $\mathbb{F}_2$. Относительно умножения на 2 вычеты по модулю 23 разбиваются на три орбиты:

$$\{\overline{0}\}, \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{13}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{12}\},$$
$$\{\overline{5}, \overline{10}, \overline{20}, \overline{17}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{21}, \overline{19}, \overline{15}, \overline{7}, \overline{14}\}$$

Поэтому $x^{23} - 1$ разлагается в произведение одного неприводимого многочлена степени 1 и двух неприводимых многочленов степени 11.

2.7 Задачи

2.1. Найти

а) $3^{-1} \pmod 5$;

б) $9^{-1} \pmod{14}$;

в) $1^{-1} \pmod{118}$;

г) $3 \cdot 4^{-1} \pmod 7$;

д) $(-3)^{-1} \pmod 7$;

е) $6^{-2} \pmod{11}$;

ж) $3^{-3} \pmod 8$.

2.2. Решите сравнение

а) $7x = 11 \pmod{25}$;

б) $9x = 3 \pmod{10}$;

в) $6x + 2 = 3 \pmod 7$;

г) $6x + 2 = 3 \pmod 9$;

д) $6x + 2 = 4 \pmod 9$;

е) $6x + 1 = 4 \pmod 9$.

2.3. В поле $F = \mathbb{F}_2^2$ вычислить произведение

$$P = \prod_{i=1}^{3}(x - \beta_i),$$

где β_1, β_2, β_3 — все ненулевые элементы поля.

2.4. Найти сумму ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_p$.

2.5 (Теорема Вильсона). Доказать, что

$$(p-1)! \equiv_p -1, \quad p \text{ — простое.}$$

2.6. Построить поле из 4-х элементов.

2.7. Доказать, что если производная ненулевого многочлена над полем характеристики p тождественно равна 0, то он приводим.

2.8. Найти над $\mathbb{Z}_2[x]$

$$\text{НОД}\left(x^5+x^2+x+1,\ x^3+x^2+x+1\right).$$

2.9. В расширении F простого поля $\mathbb{F}_2$, построенного с помощью образующего полинома

$$a(x)=x^3+x+1$$

1) построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов;
2) построить таблицу умножения элементов;
3) для каждого элемента поля указать обратные;
4) найти порождающие элементы поля;
5) найти минимальные многочлены всех элементов поля.

2.10. Перечислить все подполя поля $GF\left(2^{30}\right)$.

2.11. Многочлен $f(x)=x^5+x^3+x^2+1\in\mathbb{F}_2[x]$ разложить на неприводимые множители.

2.12. Многочлен $f(x)=x^3+2x^2+4x+1\in\mathbb{F}_5[x]$ разложить на неприводимые множители.

2.13. Многочлен $f(x)=x^4+x^3+x+2\in\mathbb{F}_3[x]$ разложить на неприводимые множители.

2.14. Многочлен

$$f(x)\ =\ x^4+3x^3+2x^2+x+4\in\mathbb{F}_5[x]$$

разложить на неприводимые множители.

2.15. Разложить на неприводимые множители все нормированные многочлены 3-й степени из $\mathbb{F}_2[x]$.

2.16. Найти все нормированные неприводимые многочлены 2-й степени над $GF(3)$.

2.17. Найти все нормированные многочлены третьей степени, неприводимые над $GF(3)$.

2.18. Определить, является ли:

1) Многочлен $a(x) = x^2 + 2x + 4 \in \mathbb{F}_5[x]$ — неприводимым?
2) Элемент $4x^2 + 2$ — корнем $a(x)$ в факторкольце/поле $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + 2x + 4)$?

2.19. 1) Проверить, что факторкольцо $F = \mathbb{F}_7[x]/(x^2 + x - 1)$ является полем.

2) В F найти обратный элемент к $1 - x$.

2.20. Найти порядок элемента $\beta = x + x^2$ в мультипликативной группе

1) поля $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$;
2) поля $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$.

2.21. Определить, является ли неприводимый многочлен $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ примитивным?

2.22. Найти количество нормированных неприводимых многочленов

1) степени 7 над полем $\mathbb{F}_2$;
2) степени 6 над полем $\mathbb{F}_5$.

2.23. Для поля $F = \mathbb{F}_3[x]/(-2x^2 + x + 2)$ построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов.

С её помощью вычислить выражение

$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{2(2x)^7}{(x)^9(x+2)}.$$

2.24. Для поля $F = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{F}_3^2$ построить таблицу соответствий между полиномиальным и степенным представлением для всех ненулевых элементов поля.

2.25. В факторкольце $R = \mathbb{F}_3[x]/(x^4+1)$ найти все элементы главного идеала (x^2+x+2).

2.26. В поле $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^2+3x+3)$ найти обратную к матрице

$$M = \begin{pmatrix} 3x+4 & x+2 \\ x+3 & 3x+2 \end{pmatrix}.$$

2.27. Разложить на неприводимые множители многочлен

$$f(x) = x^{11}+x^9+x^8+x^4+x^3+x^2+1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

2.28. Найти поле характеристики 3, в котором многочлен $f(x) = x^3+x+2 \in \mathbb{F}_3[x]$ раскладывается на линейные множители и найти в нём все корни данного многочлена.

2.29. Найти м. м. для всех элементов β поля

$$F = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1).$$

2.30. Найти минимальный многочлен элемента α^3, где α — примитивный элемент поля

$$F = \mathbb{F}_5[x]/\left(x^2+x+2\right).$$

2.31. Примитивен ли элемент x в полях

1) $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1) = F_1$?
2) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+x^2+x+1) = F_2$?

2.32. Найти корни многочлена

$$f(x) = x^3+3x^2+4x+4 \in \mathbb{F}_5[x].$$

2.33. Является ли многочлен

$$f(x) = x^2+x+2 \in \mathbb{F}_5[x]$$

примитивным?

2.34. Для бинома $x^{40}-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ определить количество и степени неприводимых сомножителей. В каком минимальном поле расширения $\mathbb{F}_5[x]$ данный бином раскладывается на линейные множители?

2.35. Найти корни $f(x) = x^2 + x + 1 = 0$, если

(1) $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$; (2) $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$; (3) $f(x) \in \mathbb{F}_5[x]$.

2.36. Решить уравнение

$$f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_5[x].$$

2.37. Решить уравнение

$$f(x) = x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 = 0, \text{ где } f(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

2.38. Найти корень многочлена

$$f(x) = x^4 + 2x + 2 \in \mathbb{F}_3[x].$$

2.39. Решить уравнение $f(x) = x^5 + x^2 + 1 = 0$ для $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$.

Глава 3

Коды, исправляющие ошибки

3.1 Блоковое кодирование. Коды Хэмминга

Задача помехоустойчивого кодирования. По каналу с шумом проходит поток *битовой* информации, вследствие чего возникают ошибки (или хранимая информация искажается).

- *Модель ошибок*: биты случайно, независимо и с равными вероятностями могут оказаться инвертированными, вставки/выпадения битов нет (т. н. *двоичный симметричный канал, ДСК*).
- *Задача*: обеспечить автоматическое исправление ошибок.

Подход к решению (один из возможных!):

1) входной поток информации разбить на *сообщения* — непересекающиеся блоки фиксированной длины k;
2) каждый блок *кодировать* (модифицировать) —
   а) независимо от других — *блоковое кодирование*;
   б) в зависимости от предыдущих — *свёрточное* или *потоковое кодирование* (турбо-коды).

Далее рассматривается исключительно *блоковое кодирование*:

- есть набор *сообщений* $S_1, \ldots, S_{2^k}$, длины k каждое, которые нужно передать по каналу связи с шумом;

- для обеспечения помехозащищённости вместо этих сообщений передают *кодовые слова*, каждое длины $n = k + m$, $m > 0$, то есть вводят *избыточность* при передаче информации.
- *кодирование* — инъективное отображение $\varphi : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$, $k < n$;
- множество *кодовых слов* — область значений $C = Im\,\varphi \subset \{0,1\}^n$ кода; ясно, что $k = \log|C|$. Часто C обозначает и код.
- $R = k/n$ — *скорость*, m/n — *избыточность кода*.

Чем меньше избыточность и чем больше число ошибок, которые может исправить код, тем он лучше. Ясно, что эти требования противоречивы и одно достигается за счёт другого.

Кодовое расстояние. Напомним понятия, связанные с единичным (булевым) кубом $B^n = \{0,1\}^n$:

- *норма* или *вес* $\|\widetilde{\gamma}\|$ = число единичных координат в наборе $\widetilde{\gamma} \in B^n$;
- *метрика* на множестве бинарных наборов — *хэммингово расстояние* (HD) ($+$ — сумма по mod 2):
$$\rho(\widetilde{\alpha},\, \widetilde{\beta}) \;=\; \left\|\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}\right\|;$$
- *шар Хэмминга с центром в* $\widetilde{\alpha}$ *и радиусом* $r > 0$:
$$S_r(\widetilde{\alpha}) \;=\; \left\{\, \widetilde{\beta} \in B^n \;\mid\; \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant r \,\right\}.$$

Определение 3.1. Минимальное расстояние между парами слова кода C называется его *кодовым расстоянием*, символически $d(C)$ или просто d.

Утверждение 3.1. *Множество C образует код с исправлением не менее r ошибок, если*

$$\forall\, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C : \ \widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta} \ \Rightarrow \ S_r(\widetilde{\alpha}) \cap S_r(\widetilde{\beta}) = \varnothing.$$

Доказательство. Если в векторе $\widetilde{\alpha}$ искажено не более r бит, то набор останется в шаре $S_r(\widetilde{\alpha})$. Если шары не пересекаются, то искомое кодовое слово — ближайший к полученному набору центр шара. □

Следствие. *У кода, исправляющего r ошибок, кодовое расстояние d должно быть не менее $2r + 1$.*

Определение кодового расстояния произвольного кода C — *трудоёмкая задача*: показано, что эта задача NP-трудна. В общем случае для нахождения $d(C)$ требуется перебрать все $\frac{2^k(2^k-1)}{2}$ пар кодовых слов, что практически невозможно уже начиная с $k = 50$.

Поэтому важной задачей является построение *кодов с заданным кодовым расстоянием*. Она решается при использовании, например, БЧХ-кодов, которые будут рассмотрены далее.

Блоковое кодирование и декодирование. *Блоковое кодирование* — взаимно-однозначное преобразование сообщений длины k в кодовые слова длины $n > k$.

Декодирование — восстановление сообщения по принятому, возможно искажённому, слову.

Пример 3.1 (тривиальный код-повторение). Информация разбивается на блоки по $k = 1$ бит, то есть передаются два сообщения: $S_0 = 0$ и $S_1 = 1$.

Кодирование $0 \mapsto 000, \quad 1 \mapsto 111$
исправляет одну ошибку. Однако такое кодирование крайне неэффективно: длина сообщения *утраивается*.

Код-повторение $a \mapsto \underbrace{a \ldots a}_{2r+1 \text{ раз}}$, очевидно, исправит r ошибок. Этот и другие *тривиальные* n*-коды* (с $k = 0$, или $n = k$) не рассматриваем.

Кодирование. Обозначения:

- сообщение — вектор-столбец

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{bmatrix};$$

- кодовое слово — вектор-столбец[1)] $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^n$;
- множество всех кодовых слов — (n,k)-*код*, или, с кодовым расстоянием — (n,k,d)-*код*.

Блоковое кодирование всегда можно осуществить с использованием таблицы размера $2^k \times n$. Однако такое «табличное» кодирование весьма неэффективно: значения n и k могут достигать *десятков и сотен тысяч*.

При передаче по каналу с шумом кодовое слово $\boldsymbol{v}$ превращается в *принятое слово* $\boldsymbol{w}$ той же длины n,

$$\boldsymbol{v} \;\to\; \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e} \in \{0,1\}^n$ — *вектор ошибок*:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом бите произошла ошибка.} \\ 0, & \text{если } i\text{-й бит верен.} \end{cases}$$

Декодирование (n,k,d)-кода *обычно значительно сложнее* кодирования. Оно основано на разбиении единичного куба B^n на k областей, содержащих шары радиуса $r =$

[1)] некоторые авторы используют векторы-строки — будьте внимательны!

$\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ с центрами в кодовых словах и предположении, что произошло $\leqslant r$ ошибок.

Декодирование блокового разделимого (n, k, d)-кода проводится в два этапа:

1-й этап: Определение кодового слова $\widehat{\boldsymbol{v}}$ как ближайшего в метрике Хэмминга слову к $\boldsymbol{w}$, т. е. нахождение центра соответствующего шара (*декодирование в ближайшее кодовое слово* или *по максимуму правдоподобия*). Если произошло не более $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок, то $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$.

2-й этап: Удаление избыточности и восстановление исходного сообщения по найденному кодовому слову.

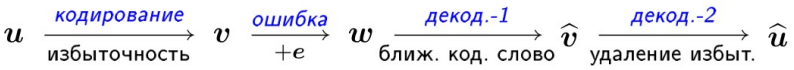


Рис. 3.1. Схема кодирования/декодирования блоковым кодом

Ясно, что в общем случае при выполнении 1-го этапа надо перебрать все 2^n строк в $(2^n \times k)$-таблице кодовых слов. Поэтому декодирование блокового (n, k)-кода *общего вида* является крайне ресурсоёмким процессом, и использование таких кодов возможно лишь при небольших значениях n и k.

Однако, приняв дополнительные ограничения на множество кодовых слов, можно перейти от *экспоненциальных* требований по памяти и по сложности алгоритмов кодирования/декодирования к *линейным* по n и k. Эти ограничения приводят к использованию блоковых кодов специального вида: *групповых*, а из групповых — *циклических*.

Плотная упаковка шаров в единичный куб. Чтобы построить код минимальной избыточности, исправляющий данное количество r ошибок, нужно вложить в единичный куб B^n максимально возможное число непересекающихся шаров радиуса r — это *задача плотной упаковки.*

Вопрос: При каких n и r в куб B^n можно уложить непересекающиеся шары радиуса r «плотно», «без зазоров»?

Ответ: Такое удаётся только в двух нетривиальных[2)] случаях, когда получаются *совершенные* или *экстремальные коды*:

1) $n = 2^q - 1$, $r = 1$ — *коды Хэмминга*; у них $m = q$ и $k = 2^m - 1 - m$;
2) $n = 23$, $r = 3$ — *код Голея*; к него $m = 11$ и $k = 12$.

Теорема 3.1 (Хэмминга). *При $2r < n$ максимальное число t кодовых слов находится в пределах*

$$\frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}} \leqslant t \leqslant \underbrace{\frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^r}}_{\text{граница Хэмминга}}.$$

Доказательство. Для получения *верхней оценки* числа непересекающихся шаров радиуса r разделим объём булева куба на объём шара. Шар радиуса r содержит: центр + все точки с одной, двумя, ..., r измененными координатами.

Для *оценки снизу* построим негрупповой код:

1) берем произвольную точку B^n и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;
2) берем произвольную точку вне построенного шара и строим вокруг неё шар радиуса $2r$;

[2)] для групповых кодов, см. ниже

3) и т. д., каждая новая точка выбирается вне построенных шаров.

В результате:

- шары, возможно, пересекаются, но каждый шар занимает $v = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{2r}$ точек $\Rightarrow$ шаров не менее $2^n/v$;
- шары радиуса r с центрами в выбранных точках не пересекаются.

□

Построим конкретный код Хэмминга длины $2^m - 1$ и покажем, что для него граница Хэмминга достигается.

Рассмотрим таблицу:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{ll} 100\ldots000 & 1100\ldots000 \\ 010\ldots000 & 1010\ldots000 \\ 001\ldots000 & 1001\ldots000 \\ \ldots & \ldots \\ 000\ldots100 & 1111\ldots101 \\ 000\ldots010 & 1111\ldots110 \\ 000\ldots001 & 1111\ldots111 \end{array}\right.}_{k=2^m-(m+1)} \quad \begin{array}{l} \underbrace{}_{k=2^m-(m+1)} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \underbrace{}_{m} \\ \end{array}$$

Слева — единичная матрица порядка $2^m - 1 - m$,
справа — все бинарные наборы длины m, содержащие *не менее двух* единиц.

Просуммировав всевозможные совокупности строк таблицы, получим $|C| = 2^k = 2^{2^m-(m+1)}$ различных кодовых слов, но

$$2^{2^m-(m+1)} = \frac{2^{2^m-1}}{2^m} = \frac{2^n}{1+n}.$$

Найдём кодовое расстояние построенного кода:

- в каждой строке таблицы — не менее трёх единиц;

- если сложить

  две строки — в левой части будет две единицы, а в правой — хотя бы одна,

  не менее трёх строк — в левой части будет не менее трёх единиц.

  То есть всегда $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3$ и шары единичного радиуса с центрами в полученных наборах не пересекаются.

Заметим, что при таком кодировании исходное сообщение окажется в первых k позициях кодового слова.

Пример 3.2 (код Хэмминга $(7, 4)$).

Для $m = 3$ $(2^3 - 1 = 7)$ составим таблицу

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Складывая по mod 2 все, включая пустую, совокупности строк полученной таблицы, получаем $2^4 = 16$ различных бинарных слов длины 7.

Код Голея — (23, 12, 7)-код. М.Голей обнаружил, что

$$\underbrace{C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3}_{\text{объём шара радиуса 3}} = 2^{11}.$$

Это позволило предположить, что существует содержащий $2^{23}/2^{11} = 2^{12} = 4096$ кодовых слов совершенный (23, 12, 7)-код, исправляющий до 3-х ошибок, и М.Голей в своей статье указал такой код.

Доказано, что других пар (n, r), удовлетворяющих условию $\dfrac{2^n}{C_n^0 + \ldots + C_n^r}$ — целое, кроме кодов Хэмминга и тривиальных, не существует.

3.2 Линейные коды

Линейные коды: определение, свойства. Бóльшая часть теории блокового кодирования построена на *линейных* кодах, позволяющих в ряде случаев реализовывать алгоритмы кодирования/декодирования, примлемые по эффективности. В двоичном случае их называют *групповыми*, т. к. они образуют *группу относительно операции «сумма по* $\bmod 2$*»* $(+)$.

Утверждение 3.2. *Устойчивая относительно операции суммы по* $\bmod 2$ *совокупность кодовых слов* C *образует группу.*

Доказательство.
Устойчивость (*предполагается*): для любых кодовых слов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C$ выполняется $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} \in C$;
Ассоциативность: свойство операции $+$;
Существование 0: $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0) = \widetilde{0} \in C$;
Противоположные элементы: $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}$. □

Теорема 3.2 (кодовое расстояние группового кода). *Кодовое расстояние* d *группового кода равно*

$$d = \min_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \min_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|,$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ *и* $\widetilde{\gamma}$ *— кодовые слова из* C.

Доказательство. Для произвольных кодовых слов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ всегда существует их сумма — кодовое слово γ:

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \left\| \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} \right\| = \|\widetilde{\gamma}\|,$$

причем $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}$ при $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$.

Отсюда получаем оценку $\min\limits_{\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant \min\limits_{\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{0}} \|\widetilde{\gamma}\|$, которая достигается, например, при $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$. □

Следствие. *Для вычисления кодового расстояния группового кода достаточно перебрать* $2^k - 1$ *кодовых слов.*

Единичный куб $B^n = \{0,1\}^n$ можно рассматривать как n-мерное координатное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

Определение 3.2. Блоковый (n,k)-код называется *линейным*, если он образует *векторное подпространство* размерности k координатного пространства B^n.

Это означает, что в *линейном* коде C:

1) сумма любых кодовых слов — кодовое слово, то есть это *групповой* код;
2) кодовое расстояние $d(C) = \min\limits_{\widetilde{\gamma} \in C} \|\widetilde{\gamma}\|$;
3) существует базис $\{\, \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_{k-1} \,\}$ из k векторов-столбцов $\boldsymbol{g}_i \in B^n$, $i = 0, \ldots, k-1$, и любой вектор $\boldsymbol{v} \in C$ может быть представлен как
$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \, \boldsymbol{g}_i, \quad u_i \in \{0,1\}.$$
4) значение $k < n$, вообще говоря, произвольно.

Порождающая матрица. Систематическое кодирование

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \boldsymbol{g}_i = G\boldsymbol{u}, \qquad \text{где } G_{n\times k} = [\, \boldsymbol{g}_0 \, \boldsymbol{g}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{g}_{k-1} \,]$$

— *порождающая матрица* линейного кода.

Ясно, что все кодовые слова суть линейные комбинации столбцов порождающей матрицы G, а сама она определена с точностью до *элементарных преобразований*

столбцов (их перестановкам и сложению по $\bmod 2$ данного столбца с любым другим). Данные преобразования эквивалентны переходу к другому базису *этого же* кода.

Пусть линейный код задан порождающей матрицей $G_{n,k}$. Из неё с помощью элементарных преобразований столбцов может быть получена матрица $\widetilde{G}$, у которой *первые* k строк образуют единичную подматрицу I_k. Тогда при кодировании $\boldsymbol{v} = \widetilde{G}\boldsymbol{u}$ первые k бит сообщения перейдут в первые биты кодового слова.

Кодирование, при котором информационные биты переходят в фиксированные позиции сообщения, называют *систематическим* или *разделимым*. Остальные (избыточные) биты сообщения называют *проверочными*. Систематическое кодирование делает тривиальным 2-й этап декодирования: исходное сообщение есть результат удаления из кодового слова проверочных бит.

Ясно, что любой линейный код можно преобразовать в эквивалентный ему систематический.

Пример 3.2 (продолжение — (7, 4)-код Хэмминга).

Ранее была получена таблица, сложением различных групп строк которой получаются все кодовые слова данного кода Хэмминга. Порождающая матрица кода получается транспонированием этой таблицы:

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

— порождающая матрица в систематической форме: при кодировании исходные сообщения помещаются в первые 4 бита кодового слова

Историческая справка. Первой ЭВМ, в которой использовался код Хэмминга, была IBM 7030, построенная в 1960 г.,

через 10 лет после появления кода Хэмминга. До этого применялся лишь простейший способ повышения надежности — проверка векторов *на чётность*.

Ортогональное дополнение к коду и проверочная матрица. Итак, линейный код C есть k-мерное подпространство n-мерного линейного пространства $\{0,1\}^n = B^n$. Элементы B^n, ортогональные ко всем кодовым словам C, образуют *ортогональное подпространство* $C^\perp$:

$$\underset{C}{\forall}\boldsymbol{v}\ \ \underset{C^\perp}{\forall}\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{v}^T\times\boldsymbol{w}\ =\ 0.$$

Замечания:

- $\dim B^n = n = \underbrace{\dim C}_{=k} + \underbrace{\dim C^\perp}_{=n-k}$;
- $C\cup C^\perp\ \neq\ B^n$, то есть B^n — *не есть прямая сумма* подпространств C и $C^\perp$;
- произвольный вектор из B^n может либо не разлагаться, либо разлагаться неоднозначно в сумму векторов из C и $C^\perp$.

Пусть $\{\,\boldsymbol{h}_0,\,\ldots,\,\boldsymbol{h}_{m-1}\,\}$ — базис $C^\perp$, $\boldsymbol{h}_i$ — векторы-столбцы из B^n, $i=0,\,\ldots,\,m-1$. Тогда матрица

$$H_{m\times n}\ =\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_0^T\\ \boldsymbol{h}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{h}_{m-1}^T\end{bmatrix}$$

называется *проверочной матрицей* кода C.

Ясно, что

- $\forall\,\boldsymbol{v}\in C\colon\ H\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ — нулевой m-мерный вектор;
- $HG = O_{m\times k}$ — нулевая матрица;

- проверочная матрица определена с точностью до элементарных преобразований *строк*.

Пусть I_k и I_m — единичные матрицы порядков k и m соответственно. Тогда если порождающая матрица имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} I_k \\ P_{m\times k} \end{bmatrix},$$

то матрица $H = \begin{bmatrix} P_{m\times k} & I_m \end{bmatrix}$ будет проверочной. Действительно, в этом случае

$$H\boldsymbol{v} = HG\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} P & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = (P+P)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Проверочную матрицу называют также *матрицей проверки на чётность*, а строки — *правилами проверки на чётность*.

Пример 3.2 (продолжение — $(7,4)$-код Хэмминга). Для построенной порождающей матрицы $G_{7\times 4}$ проверочной будет

$$H_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что столбцами проверочной матрицы кода кода Хэмминга являются все ненулевые векторы длины m (в нашем примере $m = 3$).

Задание линейного кода. Пример кодирования. Резюмируем: линейный код C для сообщений длины k имеет длину $n = k + m$, m — число избыточных (при систематическом кодировании — проверочных) символов, и задаётся

– либо порождающей матрицей $H_{n\times k}$,
– либо проверочной матрицей $G_{m\times n}$.

Эти матрицы определены с точностью до элементарных преобразований столбцов и строк соответственно, что отвечает выбору различных базисов в пространствах C и $C^{\perp}$. Однако *фиксирование позиций информационных бит при систематическом кодировании* задаёт H и G *однозначно*.

Увеличение m ведёт к увеличению кодового расстояния d (как конкретно — очень трудный вопрос) и, следовательно, к увеличению количества ошибок, которые может исправить код.

Пример 3.3 (кодирования блоковым линейным кодом). Пусть линейный $(6,3)$-код задан порождающей матрицей

$$G_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1) с использованием данного кода осуществить (а) несистематическое и (б) систематическое кодирование векторов $\boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$;
2) построить проверочную матрицу H;
3) определить кодовое расстояние d данного кода.

1 (а). Несистематическое кодирование находим непосредственно:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^n\,\boldsymbol{v}_2^n\,] = G \times [\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 (б). Для систематического кодирования с помощью элементарных преобразований *столбцов* выделим в матрице G единичную подматрицу порядка 3 (над стрелкой указано проводимое преобразование столбцов):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \widetilde{G}.$$

В полученной матрице в строках 3, 5 и 1 стоит единичная подматрица — это приведёт к тому, что 1, 2 и 3-й биты сообщения последовательно перейдут в 3, 5 и 1-й биты кодового слова.

Найдём систематическое кодирование $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$:

$$[\,\boldsymbol{v}_1^s\,\boldsymbol{v}_2^s\,] = \widetilde{G} \times [\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Находим проверочную матрицу H, формируя матрицу $P_{3\times 3}$ из строк $\widetilde{G}$, отличных от строк единичной подматрицы:

$$P_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для построения проверочной матрицы H нужно

- последовательно разместить *столбцы* P в 3, 5 и 1-м её столбцах соответственно,

- остальные 2, 4 и 6-й столбцы H должны образовывать единичную подматрицу.

В итоге получим проверочную матрицу

$$H_{3\times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предлагается самостоятельно проверить, что $HG = H\widetilde{G} = \mathbf{0}$ — нулевая (3×3)-матрица.

Проверим, что в результате как систематического, так и несистематического кодирований были действительно найдены кодовые слова:

$$H \times [\, \boldsymbol{v}_1^n \, \boldsymbol{v}_2^n \, \boldsymbol{v}_1^s \, \boldsymbol{v}_2^s \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Найдем кодовое расстояние d. Для этого закодируем все $2^3 = 8$ сообщений и найдем минимальный ненулевой хэммингов вес кодового слова:

$$C = [\boldsymbol{v}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{v}_8] = \widetilde{G} \times [\boldsymbol{u}_1 \, \ldots \, \boldsymbol{u}_8] =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_8$ — все 8 возможных сообщений, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_8$ — все 8 возможных кодовых слов. Оказалось $d = 3$.

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Декодирование линейных кодов

Рассмотрим методы декодирования линейных кодов, основанные на вычислении вектора, который принято называть синдромом[3)].

Синдром

Определение 3.3. *Синдромом слова* $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^n$, принятого при передаче сообщения, закодированного линейным (n,k)-кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём m-вектор $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w}$, где H — проверочная матрица кода, $m = n - k$.

Свойства синдрома:

- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}$ — кодовое слово, ошибок нет.

  Точнее, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ означает отсутствие *ошибок определённого типа*, а не их отсутствие вообще; это замечание относится и к декодированию всех рассматриваемых здесь и далее кодов.

- $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} = H(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}) = \underbrace{H\boldsymbol{v}}_{=0} + H\boldsymbol{e} = H\boldsymbol{e}$.

  Отсюда ясно, что синдром при линейном кодировании есть сумма по mod 2 столбцов проверочной матрицы, номера которых суть позиции ошибок.

[3)] *Синдром* — совокупность явлений, вызванных отклонением от нормы.

Из вышеприведённого следует, что вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ удовлетворяет неоднородной недоопределенной СЛАУ

$$H\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s}, \qquad (*)$$

а кодовые слова являются решениями соответствующей однородной системы

$$H\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{e}$ может быть представлен как частное решение $\widehat{\boldsymbol{e}}$ неоднородной системы $(*)$ и общее решение $\boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u}$ соответствующей однородной —

$$\boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u}.$$

и среди всех возможных векторов $\boldsymbol{e}$ для всех сообщений $\boldsymbol{u}$ необходимо выбрать имеющий минимальный вес (т. н. декодирование по *максимуму правдоподобия*).

$$\boldsymbol{w} \longrightarrow \boldsymbol{s} = H\boldsymbol{w} \xrightarrow[H\boldsymbol{e}=\boldsymbol{s}]{} \boldsymbol{e} = \widehat{\boldsymbol{e}} + G\boldsymbol{u} \xrightarrow[\|\boldsymbol{e}\|\to\min]{} \widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}$$

Рис. 3.2. Схема декодирования по синдрому. $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$ при числе ошибок $\leqslant r$.

Декодирование по синдрому. Поскольку и принятый вектор $\boldsymbol{w}$, и соответствующий ему вектор ошибок $\boldsymbol{e}$ имеют одинаковые синдромы, можно попытаться восстановить неизвестный вектор $\boldsymbol{e}$, используя тот факт, что он является решением системы $(*)$.

Для этого нужно составить *словарь синдромов* — таблицу, строки которой соответствуют всем возможным синдромам $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{2^m}$, а каждая строка содержит *наиболее вероятный вектор ошибок*, данному синдрому соответствующий. Этот вектор должен иметь наименьший вес среди возможных решений системы $(*)$ для данного $\boldsymbol{s}$, и его называют *лидером* класса векторов ошибок, имеющих общий синдром $\boldsymbol{s}$. Если таких векторов минимального веса

несколько, то в качестве лидера может быть выбран любой из них.

Таким образом, данный метод потребует хранения проверочной матрицы размера $m \times n$, словаря синдромов размера $2^m \times n$, но не требует нахождения векторов ошибок минимального веса (они уже найдены на этапе проектирования декодирующего устройства).

Однако в любом случае алгоритм декодирования остаётся *экспоненциально трудоёмким* и по памяти, и по числу операций.

Пример 3.4 (декодирования линейного кода). Рассмотрим линейный $(6, 3)$-код из *Примера* 3.3.

1. Закодируем сообщения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 = [0\ 1\ 1]^T$.

Систематическое кодирование для него было уже получено: $\boldsymbol{v} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Пусть при передаче происходит ошибка во 2-м бите, то есть принят вектор $\boldsymbol{w} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

Найдём синдром принятого слова $\boldsymbol{w}$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s}\,.$$

Заранее, при проектировании устройства декодирования, должны быть найдены лидеры классов ошибок для всех возможных синдромов.

Для полученного синдрома этот класс составляют столбцы матрицы всех кодовых слов C (уже полученной в п. 3 *Примера* 3.3), сложенные, например, с вектором $\boldsymbol{w}$. В этом случае для синдрома $\boldsymbol{s} = [1\ 0\ 0]^T$ был получен класс

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Наименьший вес в этой матрице имеет 4-й столбец, и, таким образом, лидером интересующего нас класса является вектор $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Он-то и помещается в словарь синдромов.

Складывая найденный по словарю синдромов данный лидер с принятым словом, получаем

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{e} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T + [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T = \\ = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]^T = \boldsymbol{v},$$

и переданное кодовое слово восстановлено верно.

Пусть передаётся сообщение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$; оно кодируется словом $\boldsymbol{v} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$. Пусть также ошибка опять возникла во втором разряде.

Вычисляем синдром принятого слова $\boldsymbol{w} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$:

$$H\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{s},$$

то есть синдром остаётся прежним. Ему соответствует тот же лидер $\boldsymbol{e} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ и кодовое слово также верно восстанавливается.

Декодирование кода Хэмминга. В случае кода Хэмминга декодирование можно существенно упростить.

Особенностью проверочной матрицы $H_{m\times n}$ кода Хэмминга является то, что её столбцы представляют собой двоичные коды чисел от 1 до $n = 2^m - 1$.

Например, в *Примере* 3.2 получена матрица

$$H_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Хэмминг предложил использовать коды, у которых расположение столбцов проверочной матрицы H было такое, чтобы *синдром являлся двоичным представлением позиции ошибки в принятом сообщении.*

Для этого столбцы H должны быть двоичными представлениями чисел от 1 до $2^m - 1$ *последовательно.* Тогда любой синдром есть соответствующий столбец H, то есть двоичное представление своего номера = позиция ошибки.

Заметим, что единичную подматрицу такой матрицы будут образовывать столбцы с номерами, являющимися степенью 2: 1, 2, ..., 2^{m-1}.

Пример 3.5.

Для рассматриваемого $(7, 4)$-кода Хэмминга получаем матрицу

$$\widetilde{H}_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & 3 & \underline{4} & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

Тогда порождающая матрица есть

$$G_{7\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она помещает сообщение последовательно в 3, 5, 6 и 7-ю позиции кодового слова, а остальные биты являются проверочными: подматрица образованная 1, 2 и 4-й строками является подматрицей H^T, оставшейся после удаления единичной подматрицы. Ясно, что H осуществляет систематическое кодирование.

Закодируем этим кодом сообщение $\boldsymbol{u} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$:

$$\boldsymbol{v} = G\boldsymbol{u} = [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T.$$

Пусть при передаче ошибка произошла в 2-м бите, то есть получено слово $\boldsymbol{w} = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$. Тогда синдром

$$\boldsymbol{s} = \widetilde{H}\boldsymbol{w} = [0\ 1\ 0]^T$$

указывает позицию ошибки.

3.4 Циклические коды

Теория циклических кодов основана на изоморфизме пространства двоичных n-последовательностей пространству полиномов степени не выше $n-1$, позволяя применять более простые, чем в общем случае, алгоритмы кодирования и декодирования линейных кодов.

Определение и построение циклических кодов

Определение 3.4. Код C называется *циклическим (сдвиговым)*, если он инвариантен относительно циклических сдвигов, то есть для любого $0 \leqslant s \leqslant n-1$ справедливо

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}) \in C.$$

Ранее было показано:

- В кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, рассматриваемом как n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$, имеется базис $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}\right\}$.

  Циклический сдвиг координат в этом базисе равносилен умножению на $\overline{x}$.

- Векторное подпространство I кольца R является циклическим если и только если $I \lhd R$.

- R — КГИ, любой идеал порождается некоторым полиномом-элементом R.

Поэтому построить циклический (n, k)-код длины можно следующим образом.

1) Задаёмся значением n и выбираем любой делитель $g(x)$ бинома $x^n - 1$. Многочлен $g(x)$ называют *порождающим* или *образующим*.

   Тогда $m = \deg g(x)$ и $k = n - m$, т. е. значение k уже не произвольно, как у линейных кодов общего вида.

2) Найденный полином порождает идеал $(g(x))$ в кольце $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n - 1)$, а *коэффициенты многочленов из этого идеала* будут кодовыми словами.

При удачном выборе порождающего полинома будет получен код с приемлемым значением d. Однако известны

только несколько конструкций циклических кодов с хорошими параметрами, а определение кодового расстояния циклического кода в общем случае является чрезвычайно трудоёмкой задачей.

Из всех линейных (n, k)-кодов будем далее рассматривать циклические.

Полиномиальное представление слов. Установим соответствие векторов сообщения $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^k$ и кодового слова $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^n$ с их полиномиальными представлениями $u(x), v(x) \in \mathbb{F}_2[x]$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= [\, u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_{k-1} \,]^T \;\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow\; u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_{k-1} x^{k-1}, \\ \boldsymbol{v} &= [\, v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_{n-1} \,]^T \;\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow\; v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_{n-1} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Любое кодовое слово $v(x)$ есть элемент идеала

$$(g(x)) \;=\; \{\, g(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{F}_2[x],\; x^n = 1 \,\},$$
$$g(x) \mid (x^n - 1).$$

Указанное представление сообщений и кодовых слов в виде многочлена изоморфно их представлению как элементов линейного векторного пространства.

Код, представляемый порождающим полиномом называется *полиномиальным*.

Коды Хэмминга могут быть циклическими. Построенная в *Примере* 3.2 таблица 4×7 для кода Хэмминга *не порождает циклического кода.*

Однако если переставить 3-элементные окончания некоторых строк, то полученная таблица

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

уже порождает циклический код (проверьте!).

Пример 3.6 (построения циклического кода). Построим циклический код длины $n = 23$.

Для определения порождающего полинома кода находим разложение бинома $x^{23} - 1$ на неприводимые многочлены:

$$f(x) = (x+1)(\underbrace{x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1}_{g_1(x)})\times \\ \times (\underbrace{x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1}_{g_2(x)}).$$

Поскольку степени полиномов $g_1(x)$ и $g_2(x)$ оказались равными, любой из них может быть выбран порождающим для построения $(23, 12)$-кода с $m = 11$[4)].

Можно показать, что в обоих случаях кодовое расстояние оказывается равным 7. Например, при выборе порождающим полинома $g_2(x)$ и несистематическом кодировании сообщения $[1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0]^T$ получаем кодовое слово $[1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,]^T$ веса 7.

Ясно, что построен код Голея; и, заметим, делители бинома $x^{23} - 1$ пришлось искать перебором.

Кодирование циклическими кодами. Пусть определён порождающий полином $g(x)$, делящий бином $x^n - 1$, $\deg g(x) = m < n$, задающий код C.

Несистематическое кодирование осуществляется путём умножения кодируемого полинома на порождающий:

$$u(x) \mapsto v(x) = g(x)u(x).$$

[4)] При выборе $g(x) = x + 1$ получим код с *проверкой на чётность* ($m = 1$, $d = 2$), при $g(x) = (x + 1)g_1(x)$ или $g(x) = (x + 1)g_2(x)$ получим *расширенный* код Голея с $m = 12$.

Столбцы соответствующей порождающей матрицы — базисные векторы кода — соответствуют полиномам $x^i g(x)$, $i = \overline{0, k-1}$.

Систематическое кодирование осуществляется приписыванием к кодовому слову *слева (в младшие разряды)* остатка $r(x)$ от деления $x^m u(x)$ на $g(x)$.

Действительно, умножение $u(x)$ на x^m помещает сообщение в старшие разряды n-битного слова.

Поделим $x^m u(x)$ на $g(x)$ с остатком:

$$x^m u(x) \;=\; g(x)q(x) \;+\; r(x), \quad \deg r(x) < m,$$

откуда

$$x^m u(x) + r(x) \;=\; g(x)q(x) \;\in C,$$

а это означает, что кодирование

$$u(x) \;\mapsto\; v(x) \;=\; x^m u(x) + r(x).$$

будет систематическим.

Столбцы соответствующей порождающей матрицы соответствуют полиномам

$$x^{m+i} + r_i(x), \quad \text{где} \;\; r_i(x) \equiv_{g(x)} x^{m+i}, \; i = \overline{0, k-1}.$$

Пример 3.7. 1. Построим циклический код длины $n = 7$.

Сначала нужно найти какой-либо делитель бинома $x^7 - 1$, для чего необходимо разложить его на неприводимые множители.

Заметим, что $7 = 2^3 - 1$. Но $F = \mathbb{F}_2^3$ — поле разложения бинома $x^{2^3-1} - 1$, и поэтому его корнями являются все ненулевые элементы поля F.

Делаем вывод: *выбор длины кода* $n = 2^q - 1$ *очень удобен, т. к. легко определяются число и степени неприводимых делителей бинома* $x^n - 1 = x^{2^q-1} - 1$.

Пусть α — произвольный примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^3$. Тогда с учетом $\alpha^7 = 1$ находим разбиение корней $x^7 - 1$ (= всех элементов F^*) на орбиты:

$$\{\,1\,\},\ \{\,\alpha,\,\alpha^2,\,\alpha^4\,\},\ \{\,\alpha^3,\,\alpha^6,\,\alpha^5\,\}.$$

Таким образом, многочлен x^7+1 имеет один неприводимый делитель 1-й степени и два неприводимых делителя 3-й степени (их вообще всего два).

В результате получаем разложение

$$x^7 - 1 \;=\; x^7 + 1 \;=\; (x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1).$$

В качестве порождающего полинома $g(x)$ можно выбрать любой из вышеуказанных полиномов 3-й степени. Тогда $m = 3$, $k = 4$ и будет построен циклический $(7,4)$-код[5)]*.*

Выберем конкретно

$$g(x) = x^3 + x + 1.$$

2. Закодируем несистематическим и систематическим кодами сообщение

$$\boldsymbol{u} = [0\ 0\ 1\ 1]^T \;\leftrightarrow\; u(x) = x^3 + x^2.$$

Несистематическое кодирование.

$$v(x) \;=\; u(x)g(x) \;=\; (x^3+x^2)(x^3+x+1) \;=$$
$$=\; x^6 + x^5 + x^4 + x^2 \;\leftrightarrow\; [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1]^T = \boldsymbol{v}.$$

Систематическое кодирование. Находим остаток $r(x)$ от деления многочлена $x^3u(x)$ на $g(x)$:

$$x^3(x^3+x^2) \;=\; x^6 + x^5 \;=\; (x^3+x^2+x)(x^3+x+1) + \underline{x},$$

поэтому

$$v(x) = x^3u(x) + r(x) = x^6 + x^5 + x \;\leftrightarrow\; [0\ 1\ 0\ \underbrace{0\ 0\ 1\ 1}_{\boldsymbol{u}}]^T = \boldsymbol{v}.$$

[5)] Ясно, это код Хэмминга!

Декодирование циклических кодов

Определение 3.5. *Синдромом* $s(x)$ *полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения закодированного циклическим кодом и, возможно, содержащего ошибки, назовём *остаток от деления* $w(x)$ *на порождающий код многочлен* $g(x)$.

Свойства синдрома $s(x)$:

- $0 \leqslant \deg s(x) < m = n - k$;
- $s(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x)$ — кодовое слово;
- $s(x) \equiv_{g(x)} w(x) \equiv_{g(x)} (v(x) + e(x)) \equiv_{g(x)} e(x)$.

Схема декодирования циклического кода:

1) *вычисляется синдром* $s(x)$ принятого слова $w(x)$;
2) вычисляются полиномы $e(x) = s(x) + g(x)u(x)$ для всех 2^k возможных сообщений $u(x)$;
3) определяется *полином ошибок* $e_0(x)$ как полином с минимальным числом мономов;
4) восстанавливается *переданное сообщение* $u(x) = w(x) + e_0(x)$.

Примеры декодирования циклических кодов будут даны при рассмотрении БЧХ-кодов[6)].

3.5 Коды БЧХ

Определение и основные свойства БЧХ-кодов. *Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема* (*BCH, БЧХ*) — подкласс

[6)] Существуют и альтернативные методы декодирования циклических кодов общего вида (декодеры Меггита, Касами-Рудольфа, пороговый, мажоритарный, ...), также экспоненциальной по k трудоёмкости.

циклических кодов, исправляющих *не менее заранее заданного* числа ошибок[7)].

Основные свойства минимальных многочленов (напоминание):

1) $\forall\, \beta \in \mathbb{F}_p^n\ \exists!\, m_\beta(x)$, м. м. $m_\beta(x)$ неприводим и его степень $\leqslant n$;
2) если β — корень некоторого полинома $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, то $m_\beta(x) \mid f(x)$;
3) м. м. примитивного элемента поля называется *примитивным многочленом*.

Циклотомический класс элемента поля. В теории кодирования рассматривают коды общего вида и вводят понятие циклотомического класса (или класса сопряжённости), элемента α поля $\mathbb{F}_2^{tl}$ над своим подполем $\mathbb{F}_2^l$. Для бинарных кодов $l = 1$, и это понятие фактически совпадает с понятием орбиты отображения $t \mapsto 2t \mod q$ (см. с. 57).

Определение 3.6 (для поля $\mathbb{F}_2$). *Циклотомическим классом* элемента $\alpha \neq 0$ поля $\mathbb{F}_2^t$ над своим простым подполем $\mathbb{F}_2$ называется множество всех *различных* элементов α, α^2, α^4, … из $\mathbb{F}_2^t$.

Ясно, что если C — некоторый циклотомический класс поля $\mathbb{F}_2^t$ над $\mathbb{F}_2$, то $|C|$ делит q, и циклотомический класс 1 всегда $\{1\}$.

Свойства циклотомических классов.

1. Циклотомические классы различных элементов либо совпадают, либо не пересекаются, и в совокупности

[7)] предложены Раджем Чандра Боузом и Двайджендра Камар Рей-Чоудхури в 1960 г. независимо от опубликованной на год ранее работы Алексиса Хоквингема

они образуют *разбиение* мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_2^t$, или, как говорят, её *разложение на классы*.

2. Если α — *примитивный элемент* поля $\mathbb{F}_2^t$, то его циклотомический класс (поскольку $2^t = 1$) *содержит ровно t элементов*, то есть данный класс есть
$$\left\{ \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2^{t-1}} \right\}.$$
3. Минимальный многочлен некоторого элемента циклотомического класса является общим для *всех элементов этого класса*.

Пример 3.8. 1. Пусть $t = 3$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^3 = F$. Тогда $\alpha^7 = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть
$$\{1\},\ \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12} = \alpha^5\}.$$

2. Пусть $t = 4$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = F$. Тогда $\alpha^{15} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть
$$\{1\},\ \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\},\ \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5, \alpha^{10}\},\ \{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^{11}\}.$$

БЧХ-коды: определение (простейший случай) и основное свойство. Пусть выбраны параметр t, определяющий длину кода $n = 2^t - 1$ и *конструктивное расстояние* $d_c < n$. Далее рассматривается поле $\mathbb{F}_2^t$ разложения бинома $x^n - 1$ и некоторый примитивный элемент α этого поля.

Код БЧХ есть циклический (n, k, d)-код, в котором делящий бином $x^n - 1$ порождающий многочлен $g(x)$ является полиномом минимальной степени, имеющим корнями *нули кода* $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{d_c - 1}$.

Для построенного кода $\deg g(x) = m > d_c - 1$, $k = n - m$. При этом кодовое расстояние d оказывается не менее выбранного конструктивного расстояния d_c; это *важнейшее свойство БЧХ-кодов*.

Коды БЧХ: синдромы. Поскольку все кодовые слова циклического кода C делятся на полином $g(x)$ с корнями α, α^2, …, α^{d-1}, то эти корни — одновременно и корни любого кодового слова:

$$v(x) \in C \;\Leftrightarrow\; v(\alpha^i) = 0, \quad i = 1, \ldots, d-1.$$

Определение 3.7. *Синдромами полинома* $w(x)$, принятого при передаче сообщения, закодированного БЧХ-кодом с нулями α^i, $i = \overline{1, d-1}$ и, возможно, содержащего ошибки, назовём набор значений $w(x)$ в нулях кода: $s_i = w(\alpha^i)$.

Определение синдрома для БЧХ-кода, очевидно, есть *перефразировка в терминах нулей кода* синдрома для циклического кода. Далее, поскольку

$$w(x) = v(x) + e(x), \quad \text{то} \quad s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i),$$

и «*все синдромы равны нулю*» если и только если $w(x)$ — кодовое слово.

Алгоритм построения БЧХ-кода. БЧХ (n, k)-код, как и любой циклический, задаётся порождающим полиномом $g(x)$ — делителем бинома $x^n - 1$, $\deg g(x) = m$, $k = n - m$.

Для построения кода БЧХ нужно:

1) задать величину t, определяющую длину кода $n = 2^t - 1$;
2) задать величину конструктивного расстояния $d_c = 2r+1 < n$, если предполагается исправлять до r ошибок;
3) выбрав неприводимый полином $a(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ степени t определить поле $\mathbb{F}_2^t = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$ и его примитивный элемент α;
4) определить циклотомические классы α над полем $\mathbb{F}_2$, в которые попадают нули кода α, α^2, …, α^{d_c-1}; пусть таких классов h;

5) найти минимальные многочлены $g_1(x)$, ..., $g_h(x)$ каждого циклотомического класса;
6) вычислить порождающий полином
$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_h(x).$$

Пример 3.9 (построения кодов БЧХ). Выберем $t = 3$ и построим различные БЧХ-коды длины $n = 2^3 - 1 = 7$.

Возьмём многочлен $a(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$, степени $t = 3$ и образуем поле
$$F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^3.$$

Поскольку многочлен $a(x)$ — примитивный, то элемент $\alpha = x$ примитивен, и, как показано ранее, F^* разбивается на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$:
$$\{1\},\ \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\},\ \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^5\}.$$
Для построения кодов, исправляющих заданное количество ошибок, необходимо определить соответствующий порождающий полином.

1. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий $r = 1$ ошибку* (код Хэмминга).

В этом случае $d_c - 1 = 2r = 2$ и нули кода α, α^2 попадают в *один* циклотомический класс.

Минимальный многочлен элементов этого класса — $a(x)$, поэтому порождающий полином $g(x) = a(x)$, $m = \deg g(x) = 3$ и в результате получаем уже известный $(7, 4, 3)$-код Хэмминга.

2. *Код БЧХ длины $n = 7$, исправляющий не менее $r = 2$ ошибок.*

Теперь $d_c - 1 = 4$. Нули строящегося кода α, α^2, α^3, α^4 входят в *два* циклотомических класса $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$ и $\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^5\}$, порождаемых α и α^3 соответственно, поэтому

$$g(x) \;=\; g_\alpha(x)\cdot g_{\alpha^3}(x),$$

где $g_\alpha(x)$ и $g_{\alpha^3}(x)$ — м. м. для α и α^3.

М. м. для α известен: $g_\alpha(x) = a(x) \;=\; x^3+x+1$.

Найдем м. м. для $\alpha^3 = \alpha+1$:

$$\begin{aligned} g_{\alpha^3}(x) \;&=\; \left(x-\alpha^3\right)\left(x-\alpha^5\right)\left(x-\alpha^6\right) \;= \\ &=\; x^3+\left(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6\right)x^2+\left(\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{11}\right)x+\alpha^{14}. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты $g_{\alpha^3}(x)$ с учётом $\alpha^7 = 1$ и $\alpha^3 = \alpha+1$:

$$\begin{aligned} \alpha^3+\alpha^5+\alpha^6 \;&=(\alpha+1)+\alpha^2(\alpha+1)+(\alpha+1)^2 \;= \\ &=\alpha+1+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^2+1 \;=\; 1\,, \\ \alpha^8+\alpha^9+\alpha^{11} \;&=\alpha^2+\alpha+\alpha^4 \;=\; \alpha^2+\alpha+\alpha(\alpha+1)=\;0\,, \\ \alpha^{14} \;&=1\,. \end{aligned}$$

Таким образом $g_{\alpha^3}(x) = x^3+x^2+1$[8)] и

$$\begin{aligned} g(x) \;=\; g_\alpha(x)\cdot g_{\alpha^3}(x) \;&=\; (x^3+x+1)(x^3+x^2+1) \;= \\ &=\; x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1. \end{aligned}$$

Получаем $m = \deg g(x) = 6$ и $k = 7-6 = 1$, то есть построен тривиальный код с 7-кратным повторением, исправляющий 3 ошибки и содержащий всего два кодовых слова: $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ и $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$. Хотя этот код и исправляет больше ошибок, чем планировалось, его скорость $R = 1/7$ чрезвычайно мала.

Пример 3.10. Попытаемся построить лучший код для исправления двух ошибок, взяв бóльшую его длину: выберем $t = 4$ и тогда длина кода $n = 2^4-1 = 15$.

Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) \cong \mathbb{F}_2^4$, образованное неприводимым многочленом $a(x)$ степени $t = 4$. Тогда F^*

[8)] что можно было понять сразу: это второй из двух неприводимых многочленов из $\mathbb{F}_2[x]$ степени 3

относительно своего примитивного элемента α разобьётся (см. пример 3.8 2.) на следующие циклотомические классы над $\mathbb{F}_2$:

$$\{1\},\ \{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^9\},$$
$$\{\alpha^5,\ \alpha^{10}\},\ \{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^{11}\}.$$

Конкретно в качестве многочлена, образующего поле возьмём примитивный многочлен

$$a(x) = x^4 + x + 1,$$

который одновременно является м. м. для примитивного элемента $\alpha = x$ и всего класса $\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\}$.

1. *Код БЧХ длины $n = 15$, исправляющий $r = 2$ ошибки.* В этом случае $d_c - 1 = 4$ и нули α, α^2, α^3, α^4 конструируемого кода располагаются в двух циклотомических классах — для элементов α и α^3.

М. м. для (всех) элементов этих классов: первого — $g_\alpha(x) = a(x)$, второго —

$$g_{\alpha^3}(x) = (x - \alpha^3)(x - \alpha^6)(x - \alpha^9)(x - \alpha^{12}) = \ldots$$
$$\ldots = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Тогда порождающий полином кода есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Получено $m = 8$, $k = 7$ и, как можно показать, $d = d_c = 5$, то есть построен БЧХ $(15, 7, 5)$-код со скоростью уже $R = 7/15 > 1/7$.

2. *Код БЧХ длины $n = 15$, исправляющий $r = 3$ ошибки.* Теперь нужно найти полином, являющийся м. м. для нулей α, α^2, $\ldots$, α^6, которые попадают в 3 циклотомических класса:

$$\{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8\},\ \{\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^9,\ \alpha^{12}\},\ \{\alpha^5,\ \alpha^{10}\}.$$

Пусть поле разложения бинома $x^{15}-1$ то же, тогда м. м. для α и α^3 уже найдены.

Очевидно $g_{\alpha^5}(x) = x^2+x+1$ — единственный неприводимый квадратный полином над $\mathbb{F}_2$.

Тогда порождающий полином полученного кода есть

$$g(x) = g_{\alpha}(x)\cdot g_{\alpha^3}(x)\cdot g_{\alpha^5}(x) = \\ = x^{10}+x^8+x^5+x^4+x^2+x+1.$$

Получено $m=10$, $k=5$ и можно показать, что $d = d_c = 7$. Этот $(15,5,7)$-код БЧХ при той же длине, что и предыдущий, исправляет больше ошибок, но имеет меньшую скорость $R = 1/3$.

3.6 Декодирование кодов БЧХ

Декодирование кода Хэмминга как линейного кода с помощью проверочной матрицы и вычисляемого с её помощью вектора-синдрома было уже рассмотрено в разделе 3.3. Опишем ещё один метод декодирования кодов Хэмминга как простейших кодов БЧХ.

В этом случае $d=3$, и поэтому нулями кода являются α и α^2, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^n$, $n = 2^t-1$.

Для декодирования принятого слова $w(x)$ вычисляем синдром $s_1 = w(\alpha) = s$ (синдром $s_2 = w(\alpha^2)$ нам не потребуется).

При $s=0$ считаем, что ошибок не произошло. Если $s \neq 0$, то определяем значение j, для которого $\alpha^j = s$ и считаем, что произошла единичная ошибка в j-м разряде для $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 3.11 (декодирование кода Хэмминга). Рассматриваем $(7,4)$-код Хэмминга, построенный в примере 3.7 для

циклических кодов, где был выбран порождающий полином $g(x) = x^3 + x + 1$ и найдено систематическое кодирование $v(x)$ сообщения $u(x) = x^3 + x^2 \leftrightarrow [0\ 0\ 1\ 1]^T$:

$$v(x) = x^6 + x^5 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 0\ \underline{0\ 0\ 1\ 1}]^T.$$

Пусть при передаче сообщения $u(x)$ произошла ошибка в 5-й позиции, то есть принято слово

$$[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T \leftrightarrow w(x) = x^6 + x.$$

Для декодирования $w(x)$ найдем синдром, учитывая, что $\alpha^3 = \alpha + 1$ и $\alpha^7 = 1$:

$$s = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha = \left(\alpha^3\right)^2 + \alpha = (\alpha+1)^2 + \alpha = \\ = \alpha^2 + 1 + \alpha \neq 0\,.$$

Определим теперь значение $j \in \{\,0, \ldots, 6\,\}$, для которого $\alpha^j = s$:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1, & \alpha^3 &= \alpha + 1, \\ \alpha^1 &= \alpha, & \alpha^4 &= \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha, \\ \alpha^2 &= \alpha^2, & \alpha^5 &= \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 = s. \end{aligned}$$

Таким образом, 5-я позиция ошибки определена верно. Другой способ нахождения позиции ошибки кода Хэмминга см. в Задаче 3.3 на с. 108.

Декодирование кодов БЧХ в общем случае. Рассмотрим (n, k, d)-код БЧХ длины $n = 2^t - 1$ при построении которого для определения порождающего полинома использовалось поле $F = \mathbb{F}_2^t = \mathbb{F}_2[x]/(a(x))$, $\deg a(x) = t$ и α — нуль кода.

Пусть при передаче кодового слова произошло $\nu \leqslant r = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок в позициях $j_1, \ldots, j_\nu$. Тогда полином ошибок есть

$$e(x) = x^{j_1} + x^{j_2} + \cdots + x^{j_\nu}.$$

Отметим, неизвестны не только позиции ошибок, но и их количество ν.

Вычислим синдромы принятого полинома $w(x)$: $s_i = w(\alpha^i) = e(\alpha^i)$, $i = \overline{1, 2r}$. Если все они равны 0, то ошибок не произошло.

Иначе $1 \leqslant \nu$, и с учётом $(\alpha^k)^j = (\alpha^j)^k$ запишем значения синдромов через степени α:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha^{j_1} + \alpha^{j_2} + \ldots + \alpha^{j_\nu}, \\ s_2 = (\alpha^{j_1})^2 + (\alpha^{j_2})^2 + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = (\alpha^{j_1})^{2r} + \ldots + (\alpha^{j_\nu})^{2r}. \end{cases}$$

Эту систему надо решить относительно ν, j_1, …, j_ν.

Введём обозначения $\beta_i = \alpha^{j_i}$, $i = 1, \ldots, \nu$; эти величины называют *локаторами ошибок*.

Перепишем полученную систему:

$$\begin{cases} s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ s_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} = \beta_1^{2r} + \beta_2^{2r} + \ldots + \beta_\nu^{2r}. \end{cases}$$

Определим *полином локаторов ошибок*

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (1 + \beta_i x) = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots + \sigma_\nu x^\nu,$$

считая формально $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_i = 0$ при $i > \nu$. Корнями этого полинома будут величины $\beta_i^{-1} = \alpha^{-j_i}$, $i = \overline{1, \nu}$.

Связь между коэффициентами полинома $\sigma(x)$ и самими локаторами определяет теорема Виета:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu, \\ \sigma_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{\nu-1}\beta_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_\nu. \end{cases}$$

Две последние системы задают величины синдромов и коэффициентов полинома локаторов ошибок как значения *симметрических полиномов*: первая — степенных сумм и вторая — элементарных.

Соотношения между этими двумя типами симметрических полиномов задаются *тождествами Ньютона-Жирара*, последние $2r - \nu$ из которых нашем случае записываются как

$$\begin{cases} s_{\nu+1} + \sigma_1 s_\nu + \cdots + \sigma_{\nu-1} s_2 + \sigma_\nu s_1 = 0, \\ s_{\nu+2} + \sigma_1 s_{\nu+1} + \cdots + \sigma_{\nu-1} s_3 + \sigma_\nu s_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2r} + \sigma_1 s_{2r-1} + \cdots + \sigma_{\nu-1} s_{2r-\nu+1} + \sigma_\nu s_{2r-\nu} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Данные равенства представляют собой СЛАУ относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Стандартными методами эта система не может быть решена, поскольку значение ν неизвестно.

Алгоритмы решения системы $(*)$ называют *декодерами*. Например, *декодер PGZ* (Peterson-Gorenstein-Zierler, Петерсона-Горенштейна-Цирлера) состоит в последовательных попытках решения данных соотношений для $\nu = r, r-1, \ldots$ до тех пор, пока матрица очередной СЛАУ не окажется невырожденной.

Далее будет рассмотрен декодер на основе расширенного алгоритма Евклида.

Результатом работы декодера является полином локаторов ошибок $\sigma(x)$, степень которого есть число произошедших ошибок $\nu = \deg \sigma(x)$.

После нахождения $\sigma(x)$ можно отыскать все ν его корней α^{-j_i}, а по ним — позиции ошибок $j_1, \ldots, j_\nu$.

Алгоритм декодирования (n, k, d)*-кода БЧХ.*

Пусть $n = 2^t - 1$, α — нуль кода, примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2[x]/(a(x)) = \mathbb{F}_2^t$, $\deg a(x) = t$ и принято слово $w(x)$.

1. Найти все синдромы $s_i = w(\alpha^i)$, $i = \overline{1, d-1}$; если все они равны 0, то, считаем, что ошибок нет; иначе — переход к следующему пункту.
2. Составить синдромный полином $s(x)$ и, используя тот или иной декодер, найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$; число произошедших ошибок $\nu = \deg \sigma(x)$.
3. Найти все корни $\sigma(x)$, например, перебором элементов F^*; пусть эти корни суть $\alpha^{k_1}, \ldots, \alpha^{k_\nu}$.
4. Найти позиции ошибок $j_i \equiv_n -k_i$, $i = \overline{1, \nu}$.
5. Определить полином ошибок $e(x) = x^{j_1} + \ldots + x^{j_\nu}$ и восстановить кодовое слово $v(x) = w(x) + e(x)$.
6. По кодовому слову $v(x)$ восстановить переданное сообщение $u(x)$.

Опишем *декодер на основе расширенного алгоритма Евклида*, который будем далее использовать.

Введём вспомогательный *синдромный полином*

$$s(x) = 1 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_{2r} x^{2r},$$

где s_i, $i = \overline{1, 2r}$ — синдромы и, формально, $s_0 = 1$ и $s_i = 0$ при $i > 2r$. Заметим, что это полностью определённый полином с коэффициентами из F.

Перемножив введённые полиномы, получим *полином значений ошибок*:

$$s(x)\sigma(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{2r+\nu}.$$

Его коэффициенты определяются соотношением для произведения многочленов —

$$\lambda_i \;=\; \sum_{j=0}^{i} \sigma_j s_{i-j}, \qquad i = \overline{1, 2r+\nu}.$$

Замечаем, что значения λ_i по данной формуле для $i = \nu+1, \ldots, 2r$ суть левые части соотношений $(*)$, то есть все они равны 0.

Значит, полином значений ошибок имеет нулевую «среднюю часть». Обозначим его начальную часть $\lambda(x)$, а из заключительной вынесем за скобку x^{2r+1}:

$$s(x)\sigma(x) \;=\; \underbrace{1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_\nu x^\nu}_{\lambda(x)} + \\ +\; x^{2r+1}\left(\lambda_{2r+1} + \ldots + \lambda_{2r+\nu} x^{\nu-1}\right), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r.$$

Это означает, что

$$s(x)\sigma(x) \;=\; \lambda(x) \mod x^{2r+1}.$$

Данное соотношение называют *ключевым уравнением*. Доказано, что его решение $\sigma(x)$ при $\nu \leqslant r$ единственно.

Ключевое уравнение может быть записано в виде соотношения Безу

$$s(x)\sigma(x) + x^{2r+1} b(x) \;=\; \lambda(x) \mod x^{2r+1},$$

которое, в свою очередь, может быть решено относительно $\sigma(x)$ расширенным алгоритмом Евклида (см. с. alg:**??**) с условием останова на n-м шаге «*степень остатка* $r_n(x)$ *не более* r» и отсутствием $n+1$-го шага.

Пример 3.12 (декодирования БЧХ-кода).

Рассмотрим БЧХ $(15, 5, 7)$-код, т. е. $q = 4$ и $n = 15$, исправляющий до $r = 3$ ошибок.

Пусть при построении кода в качестве поля разложения бинома $x^{15}-1$ использовалось поле $\mathbb{F}_2^4 \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1) = F$ и α — нуль кода.

Пусть также было передано сообщение

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 1]^T \leftrightarrow u(x) = x^4+x^2+x\,.$$

При систематическом кодировании (опустим этот этап) кодовое слово есть

$$v(x) = x^{14}+x^{12}+x^{11}+x^8+x^4+x^3+x^2+x \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underline{0\ 1\ 1\ 0\ 1}]^T.$$

Пусть ошибки произошли в 0, 6 и 12-й позициях, то есть принято слово

$$w(x) = x^{14}+x^{11}+x^8+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [\underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1]^T.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится представление ненулевых элементов поля F как степеней α, что уже представлено в таблице на с. 52.

1. Найдём все $2r=6$ синдромов:

$$\begin{aligned}
s_1 &= w(\alpha) = \\
&= (\alpha^3+1)+(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)+(\alpha^2+1)+(\alpha^3+\alpha^2)+ \\
&+(\alpha+1)+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = \alpha, \\
s_2 &= w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = s_1^2 = \alpha^2, \\
s_3 &= w(\alpha^3) = \underbrace{\alpha^{42}}_{\alpha^{12}}+\underbrace{\alpha^{33}}_{\alpha^3}+\underbrace{\alpha^{24}}_{\alpha^9}+\underbrace{\alpha^{18}}_{\alpha^3}+\alpha^{12}+\alpha^9+ \\
&+\alpha^6+\alpha^3+1 = \alpha^3+\alpha^6+1 = \not{\alpha}^3+\alpha^2+\not{\alpha}^3+1 = \\
&= \alpha^2+1 = \alpha^8, \\
s_4 &= w(\alpha^4) = s_1^4 = \alpha^4, \\
s_5 &= w(\alpha^5) = \alpha^{70}+\alpha^{55}+\alpha^{40}+\alpha^{30}+\alpha^{20}+\alpha^{15}+ \\
&+\alpha^{10}+\alpha^5+1 = \ldots = 1,
\end{aligned}$$

$$s_6 = w(\alpha^6) = s_3^2 = \alpha^{16} = \alpha.$$

Таким образом, синдромный полином есть

$$s(x) = \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1.$$

2. По декодеру на базе расширенного алгоритма Евклида, зная $a(x)$ и $s(x)$, решаем относительно $\sigma(x)$ соотношение Безу

$$x^7 b(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x).$$

Шаг 0. // *Инициализация*

$$r_{-2}(x) = x^7,$$
$$r_{-1}(x) = s(x) = \alpha x^6 + x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^8 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha x + 1,$$
$$\sigma_{-2}(x) = 0, \quad \sigma_{-1}(x) = 1.$$

Шаг 1. // *Делим с остатком $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$*

$$r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$$
$$q_0(x) = \alpha^{14}x + \alpha^{13},$$
$$r_0(x) = \alpha^8 x^5 + \alpha^{12} x^4 + \alpha^{11} x^3 + \alpha^{13},$$
$$\deg r_0(x) = 5 > 3 = r,$$
$$\sigma_0(x) = \sigma_{-2}(x) + \sigma_{-1}(x)q_0(x) = q_0(x) = \alpha^{14}x + \alpha^{13}.$$

Шаг 2. // *Делим с остатком $r_{-1}(x)$ на $r_0(x)$*

$$r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$$
$$q_1(x) = \alpha^8 x + \alpha^2,$$
$$r_1(x) = \alpha^{14} x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^{11} x,$$
$$\deg r_1(x) = 4 > 3 = r,$$
$$\sigma_1(x) = \sigma_{-1}(x) + \sigma_0(x)q_1(x) = \alpha^7 x^2 + \alpha^{11} x.$$

Шаг 3. // *Делим с остатком* $r_0(x)$ *на* $r_1(x)$

$$\begin{aligned}
r_0(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\\
q_2(x) &= \alpha^9 x,\\
r_2(x) &= \alpha^5 x + \alpha^{13},\\
&\qquad \deg r_2(x) = 1 \leqslant 3 = r,\\
\sigma_2(x) &= \sigma_0(x) + \sigma_1(x)q_2(x) =\\
&= \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14} x + \alpha^{13} = \sigma(x).
\end{aligned}$$

Это последний шаг алгоритма Евклида, т. к. степень остатка $r_2(x)$ не превосходит r. Таким образом, полином локаторов ошибок найден —

$$\sigma(x) = \alpha x^3 + \alpha^5 x^2 + \alpha^{14} x + \alpha^{13}$$

и установлено число ошибок $\nu = \deg \sigma(x) = 3$.

3. Найдём корни $\sigma(x)$ перебором элементов F^*, используя построенную ранее таблицу степеней α:

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4 + \alpha^7 + 1 + \alpha^{13} = \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^2 + \alpha^{13} = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{13} + \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha + 1 + \alpha^4 + \alpha^{13} = \alpha^{13},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2,\\
\sigma(\alpha^7) &= \alpha^7 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^{13} = \alpha^3 + 1,\\
\sigma(\alpha^8) &= \alpha^{10} + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^9) &= \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^8 + \alpha^{13} = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^{10}) &= \alpha + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{13} = \alpha,\\
\sigma(\alpha^{11}) &= \alpha^4 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^{12}) &= \alpha^7 + \alpha^{14} + \alpha^{11} + \alpha^{13} = 1,\\
\sigma(\alpha^{13}) &= \alpha^{10} + \alpha + \alpha^{12} + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha + 1,\\
\sigma(\alpha^{14}) &= \alpha^{13} + \alpha^3 + \alpha^{13} + \alpha^{13} = \alpha^2 + 1,\\
\sigma(\alpha^{15}) &= \alpha + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^{13} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

4. По найденным корням α^3, α^9, α^{15} вычисляем позиции ошибок:

$$\begin{aligned} j_1 &= -3 \equiv_{15} 12, \\ j_2 &= -9 \equiv_{15} 6, \\ j_3 &= -15 \equiv_{15} 0. \end{aligned}$$

5. Таким образом полином ошибок

$$e(x) = x^{12} + x^6 + 1$$

определён и переданное кодовое слово есть

$$v(x) = w(x) + e(x) \leftrightarrow [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underline{0\ 1\ 1\ 0\ 1}]^T.$$

Заметим, что проверка $v(\alpha) = v(\alpha^2) = \ldots = v(\alpha^6) = 0$ говорит от том, что восстановление верное (или же произошло $r \gg 3$ ошибок, что маловероятно).

6. Поскольку применялось систематическое кодирование, исходное сообщение восстанавливается элементарно.

Справка. В системах передачи данных широко используется двоичный $(255, 231, 7)$-код БЧХ, для которого $q = 8$ и степень порождающего код многочлена $g(x)$ есть $m = n - k = 24$. При этом в общем количестве слов длины $255 = 2^8 - 1$ доля кодовых есть $2^{-24} \approx 17 \cdot 10^{-6}$, а все шары радиуса 3 с центрами в кодовых словах занимают $\approx 16{,}5\%$ объёма куба B^{255}. В течении многих лет не было случая, чтобы ошибка передачи прошла незамеченной.

Помехоустойчивое кодирование применяется:

- Для получения *надежной связи*, когда мощность принимаемого сигнала близка к мощности тепловых шумов.

- Для *защиты против шума, намеренно организованного противником* в военных приложениях.

- При передаче данных *в вычислительных системах*, чрезвычайно чувствительных к ошибкам.

  Типичное значение вероятности ошибки на бит без кодирования в вычислительных сетях составляет 10^{-6}. Использование простейших кодов с небольшой избыточностью позволяет понизить эту вероятность более, чем на 3 порядка.

- Для защиты данных во внутренних и внешних ЗУ: ленты, SSD диски, flash-память — коды БЧХ, Хэмминга.

- При *синтезе отказоустойчивых дискретных устройств* (например, БИС).

- Для получения *устойчивых признаков из биометрических характеристик* (сетчатка глаза, отпечатки пальцев, ...).

Коррекция ошибок может требоваться не всегда: многие современные каналы связи обладают хорошими характеристиками, и принимающей стороне часто достаточно лишь проверить, успешно ли прошла передача и в случае наличия ошибок повторить её. Также при синтезе сбоеустойчивых ИМС часто требуется лишь определить факт ошибки, которая исчезает при повторном вычислении. В этих случаях применяются коды, специально предназначенные для *обнаружения ошибок*, а не для их исправления.

3.7 Задачи

3.1. Для линейного кода, заданного своей проверочной матрицей

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

требуется

1) построить *порождающую* матрицу G кода для систематического кодирования, при котором биты исходного сообщения переходят в *последние* биты кодового слова;

2) найти такое кодирование для сообщений

$$\boldsymbol{u}_1 = [1\ 1\ 0\ 1]^T,\ \boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 0\ 1]^T.$$

3.2. Циклический $(9, 3)$-код задан своим порождающим полиномом

$$g(x) = x^6 + x^3 + 1.$$

Требуется определить его кодовое расстояние d, а также осуществить систематическое кодирование полинома

$$u(x) = x^2 + x \leftrightarrow [0\ 1\ 1]^T.$$

3.3. Рассмотрим код Хэмминга систематического кодирования с порождающим примитивным полиномом $a(x) = x^3 + x + 1$.

Требуется декодировать полиномы

1) $w_1(x) = x^6 + x^2 + x$,
2) $w_2(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x$,
3) $w_3(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$.

3.4. Пусть $n = 5$ и α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^5 = F$. Найти разложение F^* над $\mathbb{F}_2$.

3.5. Пусть α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1)$. Для кода БЧХ с нулями α, α^2, α^3 и α^4 и принятого слова

$$w(x) = x^{14} + x^{10} + x^5 + x^4.$$

найти полином локаторов ошибок $\sigma(x)$.

3.6. Рассмотрим код БЧХ, нули которого определяются степенями α, где α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1)$.

Пусть для некоторого принятого слова $w(x)$ полином локаторов ошибок есть

$$\sigma(x) = \alpha^2 x^2 + \alpha^6 x + 1.$$

Требуется определить *позиции ошибок* в $w(x)$.

3.7. Построить 31-разрядный БЧХ-код для исправления не менее $r = 3$ ошибок.

3.8. Рассмотрим БЧХ-код, нули которого есть степени примитивного элемента α поля
$F = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1)$.

Пусть для некоторого принятого слова найден полином локаторов ошибок: $\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15}$. Определить позиции ошибок в данном слове.

Глава 4

Теория перечислений Пойа

4.1 Действие группы на множестве

- Группа $\langle\, G, \circ, e \,\rangle$, $|G| = n$.
- Множество T, $|T| = N > 0$.
  - $Bij(T)$ — множество всех перестановок элементов T или *биекций* на T.
  - S_T — симметрическая группа множества T:

$$S_T \;=\; \langle\, Bij(T), *, 1_T \,\rangle.$$

Действие α группы G на множестве T символически записывают $G \underset{\alpha}{:} T$.

Определение 4.1. $\alpha = \langle\, G, T; \circ, \triangleright, e, 1_T \,\rangle$ — двухосновная алгебра с носителями G и T, где

$G \times G \xrightarrow{\circ} G$ — групповая операция;

$G \times T \xrightarrow{\triangleright} T$ — новая некоммутативная операция.

Аксиомы для операций:

$$1.\ e \triangleright t \;=\; t; \qquad 2.\ (g \circ h) \triangleright t \;=\; h \triangleright (g \triangleright t).$$

Запись операции $\triangleright$: $g(t) = t'$.
Тогда аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Элементы g группы G порождают перестановки на T, обладающие указанными свойствами.

Для данной перестановки g:

Введём отношение эквивалентности $\sim_g$ на T —

$$t \sim_g t' \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : g^k(t) \;=\; t'$$

Рефлексивность (R), *симметричность* (S) и *транзитивность* (T) отношения $\sim_g$ легко показываются.

Смежные классы эквивалентности $\sim_g$ называются *g-циклами*: элементы этих классов образуют циклы:

$$t \xrightarrow{g} t' \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} t, \qquad \textit{и у каждого элемента —}$$

по единственной входящей и исходящей стрелке.

Обозначения:

- $\langle\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N \,\rangle = Type(g)$ — *тип перестановки* g — упорядоченная совокупность числа циклов длины $1, 2, \ldots, N$ соответственно;
- $C(g)$ — число всех g-циклов.

Понятно, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \nu_k(g) = C(g)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} k \cdot \nu_k(g) = N$.

Пример 4.1. Пусть $T = \{\, 1, \ldots, 10 \,\}$ и

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 7 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,9,3)(2,6)(4,8,10)(5)(7) \;=\; (2,6)(1,9,3)(4,8,10).$$

Тогда $Type(g) = \langle\, 2, 1, 2, 0, \ldots, 0 \,\rangle$ и

$$C(g) = 2 + 1 + 2 = 5, \quad \big|\, T \,\big| = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10.$$

По всей группе G:

Отношение эквивалентности $\sim_G$ на T —

$$t \sim_G t' \;\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G : g(t) \,=\, t'.$$

Свойства (R), (S) и (T) отношения $\sim_G$ очевидны.

- Классы этой эквивалентности называют *орбитами*; они образуют разбиение множества T.
- Класс эквивалентности, в которую попадает элемент t обозначаем $\mathrm{Orb}\,(t)$.
- Число получившихся орбит — $C(G)$.

Если $C(G) = 1$ (любой элемент T может быть переведён в любой), то действие $\underset{\alpha}{G : T}$ называют *транзитивным*.

Фиксатор перестановки и стабилизатор элемента множества. Выясним, когда выполняется равенство

$$g(t) \,=\, t.$$

Для этого рассмотрим два случая, в которых полагаем заданным либо t, либо g.

1. Фиксируем g, т. е. находим все элементы множества T, которые данная перестановка оставляет на месте — это *фиксатор перестановки* $g \in G$:

$$\left\{\, t \in T \mid g(t) = t \,\right\} \,=\, \mathrm{Fix}\,(g) \,\subseteq\, T.$$

2. Считаем данным t, т. е. находим все перестановки g, которые оставляют этот элемент неподвижным — это *стабилизатор элемента* $t \in T$:

$$\left\{\, g \in G \mid g(t) = t \,\right\} \,=\, \mathrm{Stab}\,(t) \,\subseteq\, G.$$

Очевидно $\forall\, t \in T :\; e \in \mathrm{Stab}\,(t)$, т. е. $\mathrm{Stab}\,(t) \,\neq\, \varnothing$.
Более того, стабилизатор есть подгруппа группы G:

Утверждение 4.1. $\mathrm{Stab}\,(t) \,\leqslant\, G.$

Доказательство. Для $t \in T$ рассмотрим $g,\, h \in \mathrm{Stab}\,(t)$. Тогда $g(t) = h(t) = t$ и $h^{-1}(t) = t$. Следовательно

$$(g \circ h^{-1}) \triangleright t \,=\, t \;\Rightarrow\; g \circ h^{-1} \in \mathrm{Stab}\,(t)\,. \qquad \square$$

Поэтому стабилизатор $\mathrm{Stab}\,(t)$ называют ещё *стационарной подгруппой*[1)] *элемента* t и обозначают иногда G_t.

Утверждение 4.2. *При действии группы G на множество T между множеством левых смежных классов G по стационарной подгруппе G_t элемента $t \in T$ и его орбитой* $\mathrm{Orb}\,(t)$ *существует взаимно однозначное соответствие.*

[1)] или *изотопической подгруппой*

Доказательство. Левые смежные классы G по G_t обозначаем gG_t, $g \in G$, считая при этом, что на элементы T сначала действует некоторая перестановка из G_t, а затем — фиксированная перестановка g.

Но тогда любая перестановка $h \in gG_t$ одинаково подействует на $t \in T$: $h(t) = g(t) = t' \in \operatorname{Orb}(t)$ (т. к. все элементы G_t оставляют t на месте). С учётом того, что смежные классы либо совпадают, либо не пересекаются, утверждение доказано. □

Из этого утверждения вытекает важное

Следствие. *Длина орбиты* $\operatorname{Orb}(t)$ *равна индексу стационарной подгруппы* $\operatorname{Stab}(t)$ *в группе* G*:*

$$\big|\operatorname{Orb}(t)\big| = \frac{\big|G\big|}{\big|\operatorname{Stab}(t)\big|} = [\,G : \operatorname{Stab}(t)\,].$$

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$H \leqslant G \;\Rightarrow\; \big|\,G\,\big| = \big|\,H\,\big| \cdot [\,G : H\,]$$

число смежных классов группы G по её подгруппе $H \leqslant G$ равно индексу $[\,G : H\,]$. □

4.2 Лемма Бёрнсайда

Лемма 4.1 (Бёрнсайда[2)]). *Если группа* G *действует на множестве* T*, то*

$$C(G) = \frac{1}{|\,G\,|}\sum_{g\in G}\Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| = \frac{1}{|\,G\,|}\sum_{t\in T}\Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|;$$

[2)] Уильям Бёрнсайд сформулировал и доказал эту лемму в 1897 г., однако Огюстену Коши в 1845 г. и Фердинанду Фробениусу в 1887 г. также была известна эта формула. Поэтому эта лемма иногда называется *леммой не Бёрнсайда*.

при этом первое равенство называется леммой Бёрнсайда.

Доказательство. Пусть $|G| = n$, $|T| = N$ и действие $G : T$ задаётся $n \times N$ матрицей $A = \|g_i(t_j)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$.

Подсчитаем двумя различными способами мощность множества $M = \{\, (g,t) \in G \times T \mid g(t) = t \,\}$: по столбцам и по строкам матрицы A. Получим

$$\sum_{g \in G} \Big|\operatorname{Fix}(g)\Big| \;=\; \big|M\big| \;=\; \sum_{t \in T} \Big|\operatorname{Stab}(t)\Big|.$$

Если x и y принадлежат одному классу эквивалентности по $\sim_G$, то $\operatorname{Orb}(x) = \operatorname{Orb}(y)$ и их стационарные подгруппы имеют одинаковую мощность:

$$|\,G_x\,| \;=\; \frac{|\,G\,|}{|\,\operatorname{Orb}(x)\,|} \;=\; \frac{|\,G\,|}{|\,\operatorname{Orb}(y)\,|} \;=\; |\,G_y\,|\,.$$

Выберем по представителю $t_1, \ldots, t_{C_G}$ из всех $C(G)$ орбит. Тогда

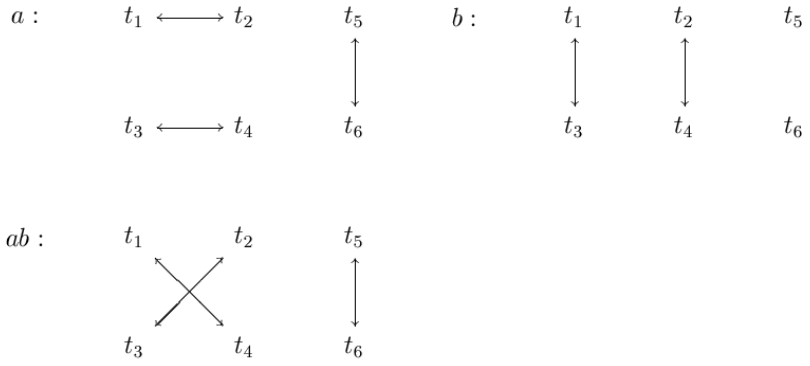
$$\begin{aligned} |M| \;=\; \sum_{t \in T} |G_t| \;&=\; \sum_{i=1}^{C(G)} |G_{t_i}| \cdot \Big|\operatorname{Orb}(t_i)\Big| \;= \\ &=\; \sum_{i=1}^{C(G)} \frac{|G|}{\big|\operatorname{Orb}(t_i)\big|} \cdot \Big|\operatorname{Orb}(t_i)\Big| \;=\; |G| \cdot C(G). \end{aligned}$$

□

Пример 4.2. Действие четверной группы Клейна V_4 на множестве $T = \{\, t_1, \ldots, t_6 \,\}$:

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$\triangleright$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
e	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	t_2	t_1	t_4	t_3	t_6	t_5
b	t_3	t_4	t_1	t_2	t_5	t_6
ab	t_4	t_3	t_2	t_1	t_6	t_5



$$Type(e) = \langle 6,0,0,0,0,0\rangle, \quad Type(a) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle,$$
$$Type(b) = \langle 2,2,0,0,0,0\rangle, \quad Type(ab) = \langle 0,3,0,0,0,0\rangle.$$
$$C(e) = 6,\ C(a) = C(ab) = 3,\ C(b) = 4.$$
$$\mathrm{Stab}\,(t_1) = \mathrm{Stab}\,(t_2) = \mathrm{Stab}\,(t_3) = \mathrm{Stab}\,(t_4) = e \leqslant V_4,$$
$$\mathrm{Stab}\,(t_5) = \mathrm{Stab}\,(t_6) = \langle e, b\rangle \leqslant V_4.$$
$$\mathrm{Fix}\,(a) = \mathrm{Fix}\,(ab) = \varnothing,\ \mathrm{Fix}\,(b) = \{t_5, t_6\},\ \mathrm{Fix}\,(e) = T.$$
$$\big|\,\mathrm{Orb}\,(t_1)\big| = \frac{4}{1} = 4, \quad \big|\,\mathrm{Orb}\,(t_5)\big| = \frac{4}{2} = 2.$$
$$\frac{1}{4}\sum_{g\in G}\big|\,\mathrm{Fix}\,(g)\big| = \frac{6+2}{4} = 2,$$
$$\frac{1}{4}\sum_{t\in T}\big|\,\mathrm{Stab}\,(t)\big| = \frac{4\cdot 1 + 2\cdot 2}{4} = 2.$$

Как применять лемму Бёрнсайда? Для определения числа классов эквивалентности надо представить *отождествляемые элементы множества T как классы эквивалентности* действия некоторой группы G на T и по лемме Бёрнсайда определить $C(G)$.

Задача 4.1 (про слова). *Составляются слова длины $l \geqslant 2$ из алфавита $A = \{ a_1, \ldots, a_q \}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число W неэквивалентных слов.*

Решение (прямым использованием леммы Бёрнсайда). Пусть T — множество слов длины l в алфавите A, $|T| = N = q^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T.

Очевидно, двукратная перестановка не меняет ничего, и поэтому подходит $G \cong \mathbb{Z}_2 = \{ e, f \}$. Действие f: переставляет в слове крайние буквы.

Число неэквивалентных слов = число классов эквивалентности действия $\mathbb{Z}_2 \underset{\alpha}{:} T$ —

$$\big|\operatorname{Fix}(e)\big| = \big|T\big| = q^l, \qquad \big|\operatorname{Fix}(f)\big| = q^{l-2} \cdot q = q^{l-1}.$$

$$W = C(\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} \big|\operatorname{Fix}(g)\big| = \frac{q^l + q^{l-1}}{2} = \frac{q^{l-1}(q+1)}{2}\,.$$

Для $l = 3$, $q = 2$ имеем $|T| = 8$ и $W = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Пусть $A = \{a, b\}$, тогда слова и классы —

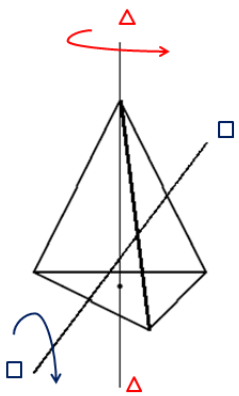
	aaa		(1)
aab		baa	(2)
	aba		(3)
abb		bba	(4)
	bab		(5)
	bbb		(6)

Платоновы тела — правильные 3-мерные многогранники. Рассматриваем их группы вращений (самосовмещений).

Платоновы тела	*Группа* вращения	*Порядок* группы
тетраэдр	T (тетраэдра)	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O (октаэдра)	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y (икосаэдра)	$12 \cdot 5 = 60$

Икосаэдр имеет 20 граней, 30 рёбер и 12 вершин.

T — группа вращения тетраэдра



$T = \langle\, t,\, f \,\rangle$, $t^3 = f^2 = e$, где:

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр тетраэдра (△—△); таких осей 4.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных рёбер (□—□); таких осей 3.

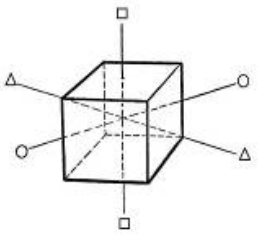
$|T| = (3-1) \cdot 4 + (2-1) \cdot 3 + 1 = 12$.

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок

$$\square: \; Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$$
$$\triangle: \; Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$ действие на грани = действие на вершины.

O — группа вращения октаэдра (= куба)



$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:
t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□), таких осей 3;
f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○), таких осей 6;
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины (△—△) таких осей 4.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Пример 4.3 (Действие O на вершины куба: типы перестановок).

$$\begin{aligned} \square: \ Type(t) &= Type(t^3) = \langle 0,0,0,2,0,\ldots\rangle; \\ Type(t^2) &= \langle 0,4,0,\ldots\rangle; \\ \circ: \ Type(f) &= \langle 0,4,0,\ldots\rangle; \\ \triangle: \ Type(r) &= Type(r^2) = \langle 2,0,2,0,\ldots\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$, то число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $\big|E_0\big| \cdot \big|V\big|$, где $\big|E_0\big|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины и $\big|V\big|$ — число вершин многогранника.

Цикловой индекс. Существует универсальный способ вычисления числа $C(G)$ — количества классов эквивалентности (= орбит).

Сопоставим каждой перестановке $g \in G$ вес $w(g)$ по правилу:

$$Type(g) = \langle \nu_1, \ldots, \nu_N \rangle \ \Rightarrow \ w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{моном}}.$$

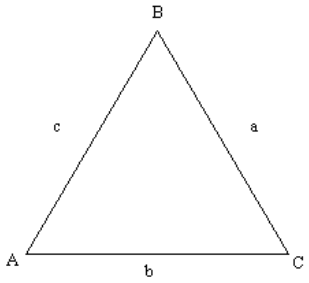
Определение 4.2. Средний вес подстановок в группе называется *цикловым индексом* действия $G \underset{\alpha}{:} T$:

$$P(G \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \\ = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

Будем также использовать обозначения $P_G(x_1, \ldots, x_N)$ и P_G, $P(G)$.

Пример 4.4. Вычислим цикловой индекс действия группы всех преобразований правильного треугольника в себя (т. е. оставляющих его неподвижным), на его стороны.

Решение. T — стороны треугольника, $N = 3$.
$G \cong S_3$ — все перестановки сторон, $n = 3! = 6$.



$G \underset{\alpha}{:} T$ — самодействие группы S_3
Треугольник — самодвойственная фигура $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ действие на стороны $=$
$=$ действие на вершины

$$G \underset{\alpha}{:} T = \langle t, f \rangle = \\ = \{ e, \underbrace{(abc)}_{t}, \underbrace{(acb)}_{t^2}, \underbrace{((a)(bc))}_{f}, \underbrace{((b)(ac))}_{tf}, \underbrace{((c)(ab))}_{t^2 f} \}.$$

$g \in S_3$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
$e = (a)(b)(c)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
t, t^2	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3^1	2
f, tf, $t^2 f$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

$$P(S_3) = \frac{1}{6}\big[\, x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1 \,\big],$$

— цикловой индекс *самодействия группы* S_3, или, что то же, *группы симметрии треугольника*.

Зачем нужен цикловой индекс?
Пусть заданы множество T, группа G и действие $G \underset{\alpha}{:} T$.

1. Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего, очевидно, имеется r^N раскрасок.

2. *Не будем различать раскраски*, если элементы t и $t' = g(t)$ раскрашены одинаково.

Вопрос: Сколько существует *неэквивалентных раскрасок = классов эквивалентности*?
Ответ: Это значение вычисляется через цикловой индекс. Имеем —

1. Каждый класс эквивалентности — это g-цикл; их $C(g) = \nu_1 + \ldots + \nu_N$ штук.

2. Каждая перестановка $g \in G$ с типом $\langle\, \nu_1, \ldots, \nu_N \,\rangle$ будет иметь $|\operatorname{Fix}(g)| = r^{C(g)}$ неподвижных точек: каждый класс эквивалентности это g-цикл, их $C(g)$ и

$$\big|\operatorname{Fix}(g)\big| \;=\; x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu_N}\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r} \;=\; r^{C(g)}.$$

Отсюда, по лемме Бёрнсайда, число полученных классов эквивалентности = неэквивалентных раскрасок:

Теорема 4.1.

$$C(G \underset{\alpha}{:} T) \;=\; P(G \underset{\alpha}{:} T,\, x_1,\, \ldots,\, x_N)\Big|_{x_1=\ldots=x_N=r}.$$

Например, $P_G(1, \ldots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок одна.

Задачи на применение циклового индекса

Задача 4.1 (про слова). *Определить число W неэквивалентных слов длины $l \geqslant 2$ в q-буквенном алфавите, если эквивалентными считаются слова, получающиеся друг из друга перестановкой крайних букв.*

Было решение: $\quad W = \dfrac{q^l + q^{l-1}}{2}$.

Решение (новое, использующее цикловой индекс):

$G = \{\, e,\, g \,\} \cong \mathbb{Z}_2; \quad T$: $\underbrace{\bigcirc\overbrace{\bigcirc\ldots\bigcirc}^{l-2}\bigcirc}_{l}$.

$g \in G$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, l,\, 0,\, \ldots,\, 0 \,\rangle$	x_1^l	1
g	$\langle\, l-2,\, 1,\, 0, \ldots,\, 0 \,\rangle$	$x_1^{l-2}x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1,\, \ldots,\, x_l) = \dfrac{1}{2}\left[x_1^l + x_1^{l-2}x_2^1\right]$.

$$W \;=\; P(q,\, \ldots,\, q) \;=\; \frac{q^l + q^{l-1}}{2}.$$

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

- *Ожерелье* — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге (в вершинах правильного многоугольника) располагаются «бусины».
- *Задача об ожерельях*: сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?
- Какие ожерелья считать неразличимыми? *Варианты*: если одно ожерелье получается из другого *самосовмещением* —
  1) только *поворотом* в плоскости вокруг центра ожерелья[3)] — самодействие группы $\mathbb{Z}_N$;

[3)] т.н. *карусель*

2) и *поворотом*, и *переворотом в пространстве* — самодействие *группы диэдра*[4] D_N.

Задача 4.2 (об ожерельях $N = 5, r = 3$; 1-й вариант). *Сколько разных ожерелий можно составить из* 5 *бусин* 3 *цветов?*

1. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом*.

Решение. $G \cong \mathbb{Z}_5 = \langle t \rangle$, $t^5 = e$, $n = 5$.

Элемент $\mathbb{Z}_5$	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, 5,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^5	1
$t,\, t^2,\, t^3,\, t^4$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_5	4

Цикловой индекс: $P(x_1, \ldots, x_5) = \dfrac{1}{5}\left[\, x_1^5 + 4x_5 \,\right]$.

$$\#Col(3) \;=\; P(3,\, \ldots,\, 3) \;=\; \frac{1}{5}\left(3^5 + 4 \cdot 3\right) \;=\; 51.$$

Задача 4.3 (Олимпиады «*Покори Воробьёвы горы – 2009*»). *Для* 50 *детей детского сада закуплены* 50 *одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено* 5 *белых кружочков. Воспитатели хотят закрасить какие-либо из этих кружочков в другие цвета так, чтобы все тарелки стали различными.*

Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?

Как должны были решать школьники. Пусть требуется r цветов. Отбросим r вариантов раскраски в один цвет.

Число остальных вариантов —

без учёта возможности поворота тарелки: $r^5 - r$;

[4] двойной пирамиды

с учётом поворота: $\dfrac{r^5 - r}{5}$, т. к. каждый вариант повторяется 5 раз.

Итого: $\#Col(r) = \dfrac{r^5 - r}{5} + r = \dfrac{r^5 + 4r}{5}$

и при 2 дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Задача 4.3 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$; 2-й вариант).

2. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого *поворотом и/или переворотом*.

Решение. G — *группа диэдра* $D_5 = \langle t, f \rangle$, $t^5 = f^2 = e$, $n = |D_5| = 10$.

Элемент D_5	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle\, 5,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_5	4
f, tf, …, $t^4 f$	$\langle\, 1,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	$x_1 x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{10}\left[\, x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2 \,\right]$.

$$\#Col(3) \;=\; P(x_1, \ldots, x_5)\Big|_{x_1 = \ldots = x_5 = 3} = \\ = \frac{3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3}{10} \;=\; 39.$$

Задача 4.5 (о раскраске сторон квадрата). *Сколько существует различно окрашенных квадратов, если их стороны раскрашивают в r цветов?*

Решение. Группа самосовмещения квадрата в пространстве — группа диэдра $D_4 = \langle\, t,\, f,\, s \,\rangle$, $|D_4| = 8$, которая порождается тремя образующими:

t : вращение на 90° вокруг центра в выбранном направлении;

f : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *сторон* — 2 оси;

s : симметрия относительно оси, проходящей через середины противоположных *вершин* — 2 оси.

При самодействии группы D_4 ($N = 4$) её элементы будут иметь следующие веса:

e : единичная перестановка оставит все стороны на месте, т. е. имеются 4 цикла длины 1, вес x_1^4 (одна перестановка);

t, t^3 : стороны циклически переходят друг в друга по и против часовой стрелке, длина цикла 4, вес x_4^1 (две перестановки);

t^2 : стороны переходят в противоположные, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (одна перестановка);

f : две противоположные стороны на месте, остальные две меняются местами, т. е. имеются два единичных цикла и один длины 2, вес — $x_1^2 x_2^1$ (одна перестановка, 2 оси);

s : в двух парах смежных сторон элементы меняются местами, что даёт два цикла длины 2, вес — x_2^2 (одна перестановка, 2 оси).

Итого:

Элемент D_5	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^4	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_4	2
t^2	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	1
f	$\langle 2, 1, 0, 0 \rangle$	$x_1^2 x_2$	$1 \times 2 = 2$
s	$\langle 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_2^2	$1 \times 2 = 2$
Всего			8

Цикловой индекс самодействия D_4:

$$P_{D_4}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2\right].$$

Число раскрасок квадрата в r цветов:

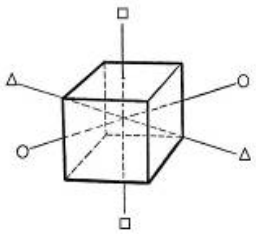
$$P_{D_4}(r, \ldots, r) = \frac{1}{8}\left[r^4 + 2r + 3r^2 + 2r^3\right].$$

В частности, в три цвета:

$$\#Col(3) = \frac{3^4 + 2 \cdot 3 + 3^4}{8} = \frac{81 + 6 + 81}{8} = 21.$$

Задача 4.6. *Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета. Сколько существует различно окрашенных кубов?*

Решение. Напоминание: $G = O$, $|O| = 24$. $O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e$, где:



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней (□—□), таких осей 3;

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер (○—○), таких осей 6;

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины (△—△) таких осей 4.

Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$. Выберем некоторую грань куба (квадрат) и обозначим её ①, а параллельную ей — ②.
Перенумеруем последовательно вершины грани ① числами $1, \ldots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \ldots, 8$ так, что вершина с номером i смежна с вершиной с номером $i+4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

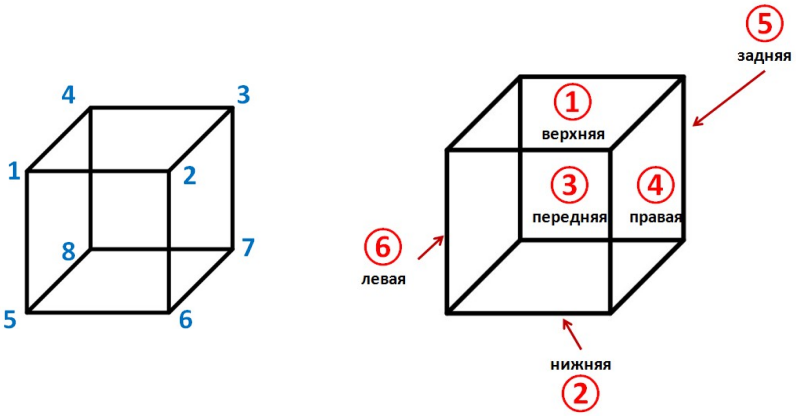
Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

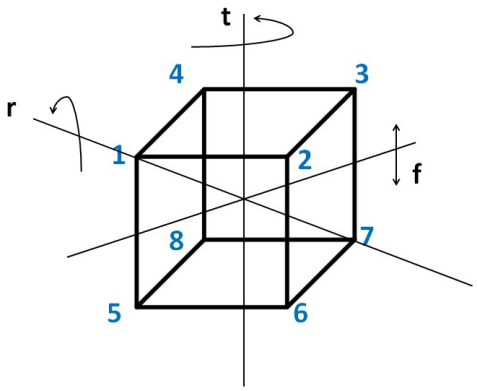
$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,

$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),

$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

а грани обозначены: (1-2-6-5) через ③, параллельная ей грань — ⑤, грань (2-3-7-6) — через ④, параллельная ей грань — ⑥.





$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	(①)…(⑥)	$\langle 6,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \rangle$	$x_1^2 x_4$	6
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle 2,\ 2,\ 0,\ \ldots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①②)(③⑥)(④⑤)	$\langle 0,\ 3,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ \ldots \rangle$	x_3^2	8
Всего				24

$$P(x_1,\ \ldots,\ x_6) \ =\ \frac{1}{24}\left[\, x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \,\right].$$

$$\#Col(2) \ =\ \frac{1}{24}\left[2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 8\cdot 2^2\right] \ =\ 10,$$
$$\#Col(3) \ =\ \frac{1}{24}\left[3^6 + 12\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + 8\cdot 3^2\right] \ =\ 48.$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 12,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_1^{12}	1
t, t^3	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 3,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle\, 0,\, 6,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_2^6	3
f	$\langle\, 2,\, 5,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle\, 0,\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) \;=\; \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4 \,\right].$$

Цикловой индекс действия группы октаэдра на множестве V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 8,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_2^4	3
f	$\langle\, 0,\, 4,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle\, 2,\, 0,\, 2,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) \;=\; \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2 \,\right].$$

Цикловые индексы самодействия S_n, $\mathbb{Z}_n$, D_n и действия O на элементы куба

$$P(S_n) \;=\; \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\,\in\,\mathbb{N}_0^n \\ 1j_1+2j_2+\ldots+nj_n\,=\,n}} \frac{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}}{(1^{j_1} j_1!)(2^{j_2} j_2!) \ldots (n^{j_n} j_n!)}\,,$$

$$P(\mathbb{Z}_n) \;= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\, x_d^{n/d}\,, \quad \varphi \text{ — функция Эйлера,}$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2}P(\mathbb{Z}_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}\, x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1} \right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2 \right],$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} E) = \frac{1}{24}\left[x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_1^2 x_2^5 + 6x_4^3 \right],$$

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2 \right].$$

4.3 Теорема Пойа. Решение комбинаторных задач

К множеству T, $|T| = N$, группе G, $|G| = n$ и действию $G \underset{\alpha}{:} T$ добавим множество $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T.

G, действуя на T, действует и на R^T.Придадим вес элементам R: $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1,r}$.

Теорема 4.2 (Редфилда-Пойа; 1927, 1937[5]). *Цикловой индекс действия группы G на R^T есть*

$$P(G \underset{\alpha}{:} R^T, y_1, \ldots, y_r) = \\ = P(G \underset{\alpha}{:} T, x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_k = y_1^k + \ldots + y_r^k,\, k = \overline{1,N}}.$$

Следствие. *Если все веса выбраны одинаковыми, т. е. $y_1 = \ldots = y_r = 1$, то $x_1 = \ldots = x_N = r$ и число классов эквивалентности*

[5] Теорема впервые опубликована Джоном Говардом Редфилдом в 1927 г., но его работа осталась незамеченной. Независимо доказана Дьердем Пойа в 1937 г. с демонстрацией применимости результата к перечислению химических соединений.

$$W(F) = P(G \underset{\alpha}{:} T, r, \ldots, r)$$

— *лемма Бёрнсайда.*

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — *общее число* неэквивалентных разметок (раскрасок);

теоремы Редфилда-Пойа — число разметок *данного типа*, т. е. содержащих данное количество элементов конкретного цвета (метки).

Усложним задачу об ожерельях:

Задача 4.2 (об ожерельях $N = 5$, $r = 3$, продолжение, более сложный вариант). *Цвета — красный, синий, зелёный. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и переворотом. Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно* 2 *красные бусины?*

Решение. Было: $G = D_5$, цикловой индекс

$$P(x_1, \ldots, x_5) = \frac{1}{10}\left[x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2\right],$$

всего ожерелий $P(3, \ldots, 3) = 39$ («карусель» — 51). Подстановка:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \ldots, \quad x_5 = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} w(\textit{красный}) & = y_1, \\ w(\textit{синий}) & = y_2, \\ w(\textit{зелёный}) & = y_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = y + 2, \\ x_2 & = y^2 + 2, \\ \ldots & \\ x_5 & = y^5 + 2. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x_k \mapsto y^k + 2,\ k = \overline{1,5}; \\ P(y) = \sum\limits_{i=1}^{5} u_i y^i; \\ \boxed{u_2 = ?} \end{array}$$

$$P(y) = \frac{1}{10}\left[\, u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_5 y^5 \,\right] =$$
$$= \frac{1}{10}\left[\, (y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2 \,\right] =$$
$$= \frac{1}{10}\left[\, \ldots + C_5^2 2^3 y^2 + \ldots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4) \,\right] =$$
$$= \frac{1}{10}\left[\, \ldots + (10\cdot 8 + 5\cdot 2\cdot 4)\, y^2 + \ldots \,\right].$$

$u_2 = 8 + 4 = 12.$

Задача 4.7 (о раскраске куба). *Вершины куба помечают красными и синим цветами. Сколько существует*

1) *разнопомеченных кубов* — $\#Col(2)$*?*
2) *кубов, у которых половина вершины красные* — $\#Col(4,4)$*?*
3) *кубов, у которых не более* 2 *красных вершин* — $\#Col(\leqslant 2, *)$*?*

Решение.
Цикловой индекс действия O на вершины куба —

$$P(O \underset{\alpha}{:} V;\, x_1, \ldots\, x_8) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2 \,\right].$$

1) $\#Col(2) = P(x_1, \ldots, x_8)\Big|_{x_1=\ldots=x_8=2} =$
$$= \frac{2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 8\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 2^3} = \frac{32+3+18+16}{3} = 23.$$

2) $w(\text{красный}) = y$, $w(\text{синий}) = 1$,
$x_k = y^k + 1$, $k = \overline{1,8}$:
$$\#Col(4,4) = \frac{1}{24}\left[\, (y+1)^8 + 9\cdot(y^2+1)^4 + 6\cdot(y^4+1)^2 + \right.$$
$$\left. + 8\cdot(y+1)^2(y^3+1)^2 \,\right] =$$

$$= \frac{1}{24}\big[\ldots + C_8^4 y^4 + \ldots + 9(\ldots 4y^2 + 6y^4 + \ldots) +$$
$$6(\ldots + 2y^4 + \ldots) + 8(y^2 + 2y + 1)(\ldots + 2y^3 + \ldots)\big].$$
$$u_4 = \frac{1}{24}\big[70 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 2\big] = \frac{168}{24} = 7.$$

3) $\#Col(\leqslant 2, *) = u_0 + u_1 + u_2$, очевидно $u_0 = u_1 = 1$.

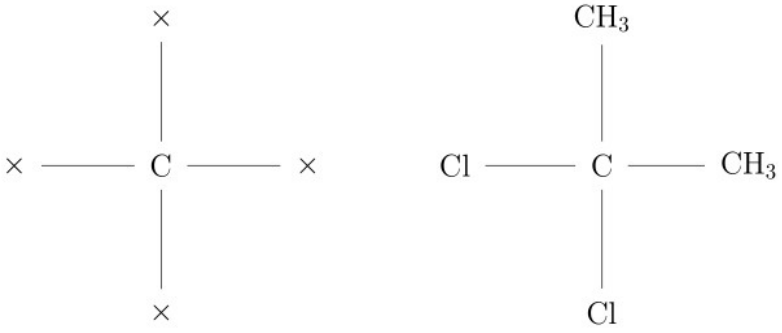
$$u_2 = \frac{1}{24}\big[\ldots + 28y^2 + 9(\ldots + 4y^2 \ldots) + 8(\ldots + y^2 + \ldots)\big] = \frac{28 + 36 + 8}{24} = 3.$$

$$\#Col(\leqslant 2, *) = 1 + 1 + 3 = 5.$$

Задача 4.8 (о числе молекул). *Рассмотрим молекулы 4-валентного углерода* C*: где на на месте* $\times$ *могут находится* CH_3 *(метил),* C_2H_5 *(этил),* H *(водород) или* Cl *(хлор). Например — дихлорбутан.*

Найти

1) *общее число* M *всех молекул;*
2) *число молекул с* $H = 0, 1, 2, 3, 4$ *атомами водорода.*



Решение. Какая группа действует и на каком множестве? T на множестве вершин тетраэдра.
Находим цикловой индекс:

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,0,0,0 \,\rangle$	x_1^4	1
$t,\ t^2$	$\langle\, 1,0,1,0 \,\rangle$	x_1x_3	$4 \cdot 2 = 8$
f	$\langle\, 0,2,0,0 \,\rangle$	x_2^2	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right]$$

1. Всего M молекул (4 радикала, $x_1 = \ldots = x_4 = 4$):

$$M \;=\; P(x_1,\, \ldots,\, x_4) \;=\; \frac{4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 4} \;=\; 36.$$

2. Веса: $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.
Подстановка в P: $x_k = \mathrm{H}^k + 3,\ k = \overline{1,4}$.

$$\begin{aligned} P(H) \;&= \\ &= \frac{1}{12}\left[\, (\mathrm{H}+3)^4 + 8\,(\mathrm{H}+3)\left(\mathrm{H}^3+3\right) + 3\left(\mathrm{H}^2+3\right)^2 \,\right] \;= \\ &= \frac{1}{12}\left[\, \left(\mathrm{H}^4 + 4\cdot\mathrm{H}^3\cdot 3 + 6\cdot\mathrm{H}^2\cdot 9 + 4\cdot\mathrm{H}\cdot 27 + 81\right) + \right. \\ &\quad \left. +8\left(\mathrm{H}^4 + 3\mathrm{H}^3 + 3\mathrm{H} + 9\right) + 3\left(\mathrm{H}^4 + 6\mathrm{H}^2 + 9\right) \,\right] \;= \\ &\qquad = 1\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 6\cdot\mathrm{H}^2 + 11\cdot\mathrm{H} + 15. \end{aligned}$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода: с четырьмя — 1 шт., с тремя — 3 шт., с двумя — 6 шт., с одним — 11 шт., без атомов водорода — 15 шт., всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

4.4 Задачи

4.1. Найдите порядок стабилизаторов произвольной (а) вершины, (б) ребра, (в) грани куба при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы. Какие перестановки в них содержатся?

4.2. Найти цикловой индекс для следующим образом определённого самодействия четверной группы Клейна
$V_4 = \{ e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e^2 = e, ab = ba \}$:

1. $e : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}$, $a : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}$,
$b : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ b & ab & e & a \end{pmatrix}$, $ab : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ ab & b & a & e \end{pmatrix}$;

2. $e : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & b & ab \end{pmatrix}$, $a : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & b & ab \end{pmatrix}$,
$b : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ e & a & ab & b \end{pmatrix}$, $ab : \begin{pmatrix} e & a & b & ab \\ a & e & ab & b \end{pmatrix}$.

4.3. Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы $\mathbb{Z}_6$.

4.4. На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их *стороны* в r цветов. Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников? Конкретно, при $r = 2$?

4.5. На стеклянных пластинах рисуют одинаковые прямоугольники (не квадраты) и раскрашивают их *вершины* в 3 цвета. Сколько можно нарисовать таких различных прямоугольников?

4.6. Квадратная стеклянная пластина разделена на 9 равных квадратов, которые раскрашиваются в один из 2 цветов.
Сколько существует разноокрашенных пластин?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4.7 (о компостере). *Компостером* назовём квадратную таблицу 4×4, в которой каждая клетка может быть либо пустой, либо содержать в центре символ $\bullet$.

Сколько существует различных компостеров, если не различать те, которые могут быть получены один из другого самосовмещениями в пространстве?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

4.8. Найти число различных вариантов раскраски *граней* куба в 2 и 3 цвета.

4.9. Определить число различных раскрасок всех граней правильной 4-угольной пирамиды П в 3 цвета.

4.10. Найти число раскрасок всех граней усечённой правильной 4-угольной пирамиды в 3 цвета.

4.11. Найти число различных вариантов раскраски *граней* тетраэдра в 2 и 3 цвета.

4.12. Найти число различных вариантов раскраски *рёбер* тетраэдра в 2 и 3 цвета.

4.13. Найти число различных вариантов раскраски *рёбер* куба в 2 цвета.

4.14. Найти число различных вариантов раскраски *вершин* куба в 2 и 3 цвета.

4.15. Назовём две булевы функции f_1 и f_2 от n переменных *подобными*, если при подходящей перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$ окажется, что

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$$

для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$. Определить, сколько имеется существенно различных (т. е. неподобных) таких функций[6)].

4.16. Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

4.17. Боковые грани правильной 6-угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить

(а) число различных 2- и 3-цветных пирамид;

(б) число пирамид с одной красной гранью;

(в) число пирамид, у которых не менее трёх красных граней.

4.18. Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по 8 в равноотстоящих точках окружности. Определить

а) число различных 3-цветных ожерелий;

б) число ожерелий, у которых не менее трёх красных бусин?

4.19. Грани куба раскрашивают в два цвета — красный и синий. Сколько существует кубов

1) различно окрашенных?

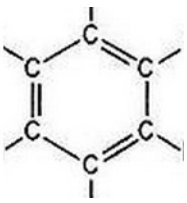
2) у которых не менее 4 граней красные – $\#Col(\geqslant 4)$?

[6)] Эта задача для $n = 4$ была решена численно в 1951 г. с помощью компьютерной программы, осуществившей перебор $2^{2^4} = 65\,536$ функций. Задача, однако, допускает аналитическое решение.

4.20. Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют 3 цвета — красный, синий и зелёный. Сколько можно получить

1) разнораскрашенных квадратов?
2) квадратов с 1 красным ребром и не более 2 синих?

4.21. Присоединяя к свободным связям углерода бензольного кольца атомы водорода H или метил CH_3, можно получить молекулы разных веществ (ксилол, бензол и др.).



1) Сколько химически разных молекул можно получить таким путём?
2) Сколько из них молекул с присоединёнными 0, ..., 6 атомами водорода?

4.22. Сколько существует ожерелий из 6 красных и 12 синих бусин?

Решения задач

1. Группы, кольца, поля

1.1. (1) Да, (2) нет (противоположного элемента), (3) нет (устойчивости), (4) нет (ассоциативности), (5) нет (обратного у 0), (6) да, (7) да, (8) нет (ассоциативности), (9) да, (10) нет (обратных у всех), (11)–(16) да.

1.2. Любая циклическая 6-элементная группа изоморфна $\mathbb{Z}_6 = \langle \{ 0, 1 \ldots, 5 \}, +, 0 \rangle$.

$\operatorname{ord} 0 = 1;$

$1, 1+1 = 2, \ldots = 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 1 = 6;$

$2, 2+2 = 4, 4+2 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 2 = 3;$

$3, 3+3 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 3 = 2;$

$4, 4+4 = 2, 2+4 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 4 = 3;$

$5, 5+5 = 4, 4+5 = 3, \ldots, 6 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \operatorname{ord} 5 = 6.$

Порождающие элементы — 1 и 5, их порядок — 6.

1.3. Любая циклическая 24-элементная группа изоморфна $\mathbb{Z}_{24} = \langle \{ 0, 1, \ldots, 23 \}, +, 0 \rangle$.

1. Все подгруппы циклической группы — циклические. Порождающими элементами *подгрупп* $\mathbb{Z}_{24}$ будут делители m порядка группы 24: то есть $m = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \equiv 0$.
Порядок соответствующей подгруппы — $24/m$.

$m = 1 : \{ 1, 2, \ldots, 23, 0 \} = \langle 1 \rangle = C \cong \mathbb{Z}_{24};$

$m = 2 : \{ 2, 4, 6, \ldots, 22, 0 \} = \langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_{12};$

$m = 3 : \{ 3, 6, 9, \ldots, 21, 0 \} = \langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_8;$

$m = 4 : \{\, 4,\, 8,\, 12,\, \ldots,\, 20,\, 0 \,\} = \langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_6;$

$m = 6 : \{\, 6,\, 12,\, 18,\, 0 \,\} = \langle 6 \rangle \cong \mathbb{Z}_4;$

$m = 8 : \{\, 8,\, 16,\, 0 \,\} = \langle 8 \rangle \cong \mathbb{Z}_3;$

$m = 12 : \{\, 12,\, 0 \,\} = \langle 12 \rangle \cong \mathbb{Z}_2;$

$m = 24 : \{\, 0 \,\} = \langle 0 \rangle \cong E$ — единичная.

2. Циклическая группа $\mathbb{Z}_{24}$ имеет $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = 2^2 \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ генераторов m, взаимно простых с 24, то есть $m = 1,\, 5,\, 7,\, 11,\, 13,\, 17,\, 19,\, 23$.

1.4. $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_k^{\alpha_k}\right) =$

$$= p_1^{\alpha_1 - 1} \varphi(p_1) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1} \varphi(p_k) =$$
$$= p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1} \varphi(p_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_k) =$$
$$= \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k} (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) =$$
$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

1.5. (1) Кольцо (обратной матрицы может не быть), (2) кольцо (многочлены $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы), (3) кольцо (многочлены $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ в случае $a_0 = 0$ необратимы.

1.6. Нет! Хотя $f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$, но $f(xy) = 2xy \neq (2x) \cdot (2y) = f(x) \cdot f(y)$.

1.7. Множество векторов V содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$ и является, очевидно, абелевой группой по сложению, а операция $\times$ векторного умножения связана со сложением дистрибутивными законами

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z},\ (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}.$$

Кольцо $\langle V, +, \times, \mathbf{0} \rangle$ некоммутативно: $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$ и неассоциативно: $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \neq (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z}$.

Однако в рассматриваемом кольце выполняются тождества, заменяющие, в некотором смысле коммутативность и ассоциативность:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} \ \text{(антикоммутативность)}, \\ &(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + \\ &\qquad + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \ \text{(тождество Якоби)}. \end{aligned}$$

1.8. В кольце $\mathbb{Z}_6$ классы вычетов по идеалу $(3) = \{0, 3\}$ суть

$$\begin{aligned} 0 + (3) &= 3 + (3) = (0, 3), \\ 1 + (3) &= 4 + (3) = (1, 4), \\ 2 + (3) &= 5 + (3) = (2, 5). \end{aligned}$$

1.9. Нет! В $\mathbb{Z}_2 : 1 + 1 = 0$, а в $\mathbb{Z}_5$: $1 + 1 = 2$, то есть операция сложения в $\mathbb{Z}_5$ неустойчива при переходе к своему подмножеству $\{0, 1\}$.

2. Конечные кольца и поля

2.1. Вычислять x^{-1} в кольцах $\mathbb{Z}_n$ можно используя соотношение Безу (подбором коэффициентов или расширенным алгоритмом Евклида). В некоторых очевидных случаях (напр. в пункте в)) можно обойтись без вычислений.

а) $1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 = 1 + 1 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \equiv_5 1,\ 3^{-1} \equiv_5 2;$

б) $1 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9,\ (-3) \cdot 9 = 1 - 2 \cdot 14,$
$(-3) \cdot 9 \equiv_{14},\ 9^{-1} = -3 = 11 \pmod{14};$

в) $x \cdot 1 \equiv 1 \Rightarrow 1^{-1} = 1$ по любому модулю;
$1^{-1} \equiv_{118} 1;$

г) $1 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7,\ 2 \cdot 4 = 1 + 1 \cdot 7,\ 2 \cdot 4 \equiv_7 1,$
$4^{-1} \equiv_7 2,\ 3 \cdot 4^{-1} = 3 \cdot 2 = 6 \pmod 7;$

д) $-3 \equiv_7 4$, в пункте г) вычислено $4^{-1} \equiv_7 2$, значит, $(-3)^{-1} = 4^{-1} = 2 \pmod 7$;

е) $1 = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 11,\ 2 \cdot 6 = 1 + 1 \cdot 11,\ 2 \cdot 6 \equiv_{11} 1,$
$6^{-1} \equiv_{11} 2,\ 6^{-2} = (6^{-1})^2 = 2^2 = 4 \pmod{11}$;

ж) $1 = 3 \cdot 3 - 8,\ 3 \cdot 3 = 1 + 8,\ 3 \cdot 3 \equiv_8 1,$
$3^{-1} \equiv_8 3,\ 3^{-3} = (3^{-1})^3 = 3^3 = 27 = 3 \pmod 8$.

2.2. а) $x = 7^{-1} \cdot 11 = 18 \cdot 11 = 198 = 23 \pmod{25}$;

б) $x = 9^{-1} \cdot 3 = (-1)^{-1} = 3 = -3 = 7 \pmod{10}$;

в) $6x \equiv_7 1,\ x = 6^{-1} = -1 = 6 \pmod 7$;

г) $6x \equiv_9 1$ решений нет: элемент 6 не обратим в $\mathbb{Z}_9$;

д) $6x \equiv_9 2$; решений нет: сравнение можно сократить — $3x \equiv_9$, но элемент 3 не обратим в $\mathbb{Z}_9$;

е) $6x \equiv_9 3$. Такое равенство можно сократить на 3 вместе с модулем: $2x \equiv_3 1$, откуда $x = 2^{-1} = 2 \pmod 3$. Множество решений — $\{2, 5, 8\} \pmod 9$.

2.3. Имеем

$$F = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1) = \{\, 0,\ 1 = \alpha^3,\ \alpha,\ \alpha + 1 = \alpha^2 \,\},$$

где α — порождающий элемент мультипликативной группы F^*. Поэтому

$$\begin{aligned} P = \prod_{i=1}^{3}(x - \beta_i) &= (x+1)(x+\alpha)(x+\alpha+1) = \\ &= (x+1)\left(x^2 + \alpha x + x + \alpha x + \alpha^2 + \alpha\right) = \\ &= (x+1)\left(x^2 + x + \alpha^2 + \alpha\right) = \\ &= \left(x^3 + (\alpha+1)x^2 + (\alpha+1)x^2 + (\alpha^2+\alpha+1)x + \right. \\ &\qquad \left. + \alpha^2 + \alpha\right) = x^3 + 1, \end{aligned}$$

как и следует по теореме 2.4 о поле разложения:

$$(x - \beta_1) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_{p^n - 1}) = x^{p^n - 1} - 1.$$

2.4. Все элементы $\mathbb{F}_p^*$ суть корни уравнения

$$x^{p-1} - 1 \,=\, 0,$$

их *сумма* по теореме Виета есть коэффициент при x^{p-2} в этом уравнении, то есть 0.

2.5. При $p = 2$ утверждение тривиально.

При $p > 2$ порядки всех элементов мультипликативной циклической группы $\mathbb{F}_p^* = \{\,1,\,\ldots,\,p-1\,\}$ делят её порядок то есть все они являются корнями уравнения

$$x^{p-1} - 1 \,=\, 0. \qquad (*)$$

Других корней у этого уравнения нет (многочлен степени $p-1$ имеет не больше $p-1$ корней). По теореме Виета их произведение равно свободному члену многочлена $(*)$, то есть -1.

Ещё одно Решение. Для $p = 2,\,3$ утверждение тривиально. При $p \geqslant 5$ обозначим

$$P \,=\, 1 \cdot \underbrace{\overbrace{2 \cdot \ldots \cdot (p-2)}^{=\,\pi}}_{\text{чётное число сомножителей}} \cdot (p-1) = (p-1)!$$

и заметим, что $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv_p 1$.

Легко видеть, что $\pi = 1$: каждый из элементов $2,\,\ldots,\,p-2$ поля $\mathbb{F}_p$ имеет единственный обратный, но это не $p-1$, т. к. он обратен сам к себе.

Отсюда $P = p - 1$, или, что то же, $(p-1)! \equiv_p -1$.

2.6. Это поле $\mathbb{F}_2^2$, оно может быть построено как факторкольцо $\mathbb{F}_2[x]/\,(a(x))$, где $a(x)$ — неприводимый многочлен из $\mathbb{F}_2[x]$ степени 2. Но такой многочлен только один: $x^2 + x + 1$.

Следовательно, $\mathbb{F}_2^2 = \{\,0,\,1,\,x,\,x+1\,\}$ и $x^2 = x + 1$ (черту над элементами не пишем).

Таблицы сложения и умножения в построенном поле (операции с 0 опускаем):

$+$	1	x	$x+1$
1	0	$x+1$	x
x	$x+1$	0	1
$x+1$	x	1	0

$\times$	1	x	$x+1$
1	1	x	$x+1$
x	x	$x+1$	1
$x+1$	$x+1$	1	x

2.7. Имеем:

- производная монома $(x^k)' = kx^{k-1}$ тождественно равна 0 если и только если $k \equiv_p 0 \Leftrightarrow p \mid k$;
- $f' \equiv 0 \Rightarrow$ показатели степеней всех мономов многочлена f делятся на p;
- поэтому $f(x) = g(x^p) = g^p(x)$.

2.8. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$x^5 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x)(x^3 + x^2 + x + 1) + \underline{(x^2 + 1)},$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)\underline{(x^2 + 1)}.$$

Ответ: $x^2 + 1$.

2.9. Поле $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ содержит 8 элементов: 0 и степени $1, \ldots, 7$ порождающего элемента α. Можно полагать $x = \alpha$, т. к. $a(x)$ — примитивный многочлен.

1. Таблица соответствий между полиномиальным и степенным представлением его ненулевых элементов:

$x^3 = x + 1$ степень x	1	x	x^2
x	(0,	1,	0)
x^2	(0,	0,	1)
$x^3 = x + 1$	(1,	1,	0)
$x^4 = x^2 + x$	(0,	1,	1)
$x^5 = x^2 + x + 1$	(1,	1,	1)
$x^6 = x^2 + 1$	(1,	0,	1)
$x^7 = 1$	(1,	0,	0)

2. Таблица умножения:

$\times$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1
x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x
x^3	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2
x^4	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$
x^5	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x
x^6	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1

3. Обратные элементы:

x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
x^2+1	x^2+x+1	x^2+x	$x+1$	x^2	x

4. Поле F имеет $\varphi(7) = 6$ порождающих элементов: все кроме 0 и 1.

5. Находим м. м. элементов поля. Ясно, что

   - $m_0(x) = x$;
   - $m_1(x) = x + 1$;

- остальные элементы F суть порождающие его мультипликативной группы, и их м. м. будут совпадать с $a(x)$.

2.10. Поле $\mathbb{F}_p^n$ содержит подполе $\mathbb{F}_p^k$ если и только если $k \mid n$, поэтому подполями $GF(2^{30})$ будут поля $GF\left(2^k\right)$, $k \in D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $GF(2)$ — *простейшее* и $GF(2^{30})$ — *несобственное* подполя.

2.11. В поле $\mathbb{F}_2$ имеем $x - 1 = x + 1$.

1. $f(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f.
2. Делим $f(x)$ на $x + 1$, получаем

$$x^4 + x^3 + x + 1 = f_1(x).$$

3. $f_1(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_1; $\frac{f_1}{x+1} = x^3 + 1 = f_2(x)$.
4. $f_2(1) = 0 \Rightarrow 1$ — корень f_2; $\frac{f_2}{x+1} = x^2 + x + 1$.
5. Многочлен $x^2 + x + 1$ неприводим.

Ответ: $x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)$.

2.12. 1. $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 + 1 = 25 \equiv_5 0$,
$(x - 2) \equiv_5 (x + 3)$

2.

$$\begin{array}{rl|r}
x^3 + 2x^2 + 4x + 1 & & x + 3 \\
\cline{3-3}
x^3 + 3x^2 & & x^2 + 4x + 2 \\
\cline{1-1}
\quad 4x^2 + 4x & & \\
\quad 4x^2 + 2x & & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x + 1 & & \\
\qquad\quad 2x + 1 & & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 & &
\end{array}$$

3. Перебором убеждаемся, что многочлен $x^2 + 4x + 2$ неприводим в $\mathbb{F}_5$.

Ответ: $x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = (x + 3)(x^2 + 4x + 2)$.

2.13. 1. 0, 1, 2 — не корни $f(x) \Rightarrow f(x)$ линейных делителей не содержит.

2. Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_3$ степени 2:

$$x^2 + 1, \quad x^2 + x + 2, \quad x^2 + 2x + 2.$$

3. Подбором получаем

Ответ: $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$.

2.14. 1. $f(x) \neq 0$ ни при каком $x = 0, 1, 2, 3, 4$, то есть $f(x)$ не имеет линейных делителей.

2. Перебирая неприводимые многочлены степени 2 над $\mathbb{F}_5$, получаем

Ответ: $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$.

2.15. Вычисляя значения при $x = 0, 1$ всех нормированных многочленов 3-й степени из $\mathbb{F}_2[x]$, определяем их линейные делители и получаем, что

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^3 = x \cdot x \cdot x,\\
f_2(x) &= x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1),\\
f_3(x) &= x^3 + x = x(x + 1)^2,\\
f_4(x) &= x^3 + x^2 = x^2(x + 1),\\
f_5(x) &= x^3 + x + 1 \text{ — неприводим},\\
f_6(x) &= x^3 + x^2 + 1 \text{ — неприводим},\\
f_7(x) &= x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1),\\
f_8(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3.
\end{aligned}$$

2.16. Должно быть: $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, $f(2) \neq 0$.

Перебором коэффициентов $b, c \in \{\, 0,\ 1,\ 2 \,\}$ в выражении $x^2 + bx + c$, находим подходящие многочлены:

$$f_1(x)= x^2+1,$$
$$f_2(x)= x^2+x+2,$$
$$f_3(x)= x^2+2x+2.$$

2.17. Должно быть: $f(0)\neq 0,\ f(1)\neq 0,\ f(2)\neq 0$.

$$f_1(x) = x^3+2x+1,$$
$$f_2(x) = x^3+2x+2,$$
$$f_3(x) = x^3+x^2+2,$$
$$f_4(x) = x^3+2x^2+1,$$
$$f_5(x) = x^3+x^2+x+2,$$
$$f_6(x) = x^3+x^2+2x+1,$$
$$f_7(x) = x^3+2x^2+x+1,$$
$$f_8(x) = x^3+2x^2+2x+2.$$

2.18. 1. Перебором элементов из $\mathbb{F}_5$ —

$$a(0)=4,\ a(1)=2,\ a(2)=1,\ a(3)=2,\ a(4)=1,$$

убеждаемся, что квадратный многочлен $a(x)$ неприводим.

Следовательно, факторкольцо $\mathbb{F}_5[x]/(x^2+2x+4)$ *является полем*; в нём $x^2=-2x-4=3x+1$.

2. $a(4x^2+1) = (2(2x^2+1))^3+2\cdot 2(2x^2+1)+4 =$
$= 3(3x^6+2x^4+x^2+1)+3x^2+3 = 4x^6+x^4+x^2+1 =$
$= 4(3x+1)^2+3x^2+x+x^2+1 = x^2+4x+4+3x^2+x+x^2+1 =$
0 — да, является.

2.19. 1. $a(x)=x^2+x-1$, $a(0)=6$, $a(1)=1$, $a(2)=5$, $a(3)=4$, $a(4)=6$, $a(5)=1$, $a(6)=6$, то есть многочлен $a(x)$ — *неприводим* в $\mathbb{F}_7$ и F — поле ($\cong \mathbb{F}_7^2$).

2. $\mathbb{F}_7^2=\{\, ax+b \mid a,b\in\mathbb{F}_7,\ x^2=1-x=6x+1\,\}$
$(ax+b)\cdot(6x+1) = \ldots = (2a+6b)x+(6a+b) = 1$

$$\left\{\begin{array}{ll} 6a+b & =1\\ a+3b & =0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=2\end{array}\right.$$

Ответ: $(1-x)^{-1}=x+2$ в F.

2.20. $\beta = x + x^2 = x(x+1)$.

Мультипликативная группа указанных полей состоит из $2^4 - 1 = 15$ элементов.

Примарное разложение 15: $15 = 3 \cdot 5$, поэтому равенство $\beta^d = 1$ нужно проверить для $d = \frac{15}{5} = 3$ и $d = \frac{15}{3} = 5$.

1. $\underline{x^4 = x + 1}$

$$\begin{aligned}\beta^2 &= x^2(x+1)^2 = x^4 + x^2 = x^2 + x + 1,\\ \beta^3 &= x(x+1)(x^2+x+1) = x(x^3+1) =\\ &= x^4 + x = x + 1 + x = 1.\end{aligned}$$

Ответ: В поле F_1 $\operatorname{ord}\beta = 3$.

2. $\underline{x^4 = x^3 + 1}$

$$\begin{aligned}\beta^2 &= x^4 + x^2 = x^3 + x^2 + 1,\\ \beta^3 &= x(x+1)(x^3+x^2+1) =\\ &= x(x^4 + x^2 + x + 1) = x(x^3 + x^2 + x) =\\ &= x^4 + x^3 + x^2 = x^2 + 1 \neq 1,\\ \beta^5 &= x^2x^3 = (x^3+x^2+1)(x^2+1) =\\ &= (x^5 + x^4 + x^2 + x^3 + x^2 + 1) = \ldots\\ \ldots &= (x^3+1)\,x = x^4 + x = x^3 + x + 1 \neq 1.\end{aligned}$$

Ответ: В поле F_2 $\operatorname{ord}\beta = 15$.

2.21. Мультипликативная группа поля

$$\mathbb{F}_2[x]/\big(x^6 + x^3 + 1\big)$$

состоит из $2^6 - 1 = 63$ элементов.

Простые делители $63 = 3^2 \cdot 7$ суть 3 и 7, поэтому равенство $x^d = 1$ нужно проверить только для $d = 21 = \frac{63}{3}$ и $d = 9 = \frac{63}{7}$.

В рассматриваемом поле $x^6 = x^3 + 1$ и

$$x^9 = x^6x^3 = (x^3+1)x^3 = x^6 + x^3 = \not{x}^3 + 1 + \not{x}^3 = 1.$$

Т.о. $\operatorname{ord} x = 9 \neq 63$ и многочлен $f(x)$ *не примитивен.*

2.22.

$$\sum_{d|n} d \cdot ((d)) \;=\; p^n.$$

1. $\underline{((7)) \text{ над } \mathbb{F}_2}$

$$\sum_{d|7} \cdot d((d)) \;=\; 2^7 \;=\; 1 \cdot ((1)) + 7 \cdot ((7)) \;=\; 128.$$

$((1)) = 2$: это x и $x+1$, отсюда $((7)) = \frac{128-2}{7} = 18$.

2. $\underline{((6)) \text{ над } \mathbb{F}_5}$

$$((6)) \;=\; \frac{1}{6} \sum_{d|6} \mu(d)\, 5^{\frac{6}{d}} \;=\; \frac{1}{6} \big[\, \mu(1)5^6 + \mu(2)5^3 +$$

$$+\mu(3)5^2 + \mu(6)5 \,\big] \;=\; \frac{15625 - 125 - 25 + 5}{6} \;=\; 2\,580.$$

2.23. $\operatorname{char} F = 3$, поэтому $-2x^2 + x + 2 \equiv_3 x^2 + x + 2 = a(x)$.

$F = \mathbb{F}_3^2$, F^* содержит $3^2 - 1 = 8$ элементов и все они могут быть представлены как степени $\alpha^i, i = \overline{1,8}$ примитивного элемента α.

Если элемент x окажется примитивным, то положим $\alpha = x$ и, поскольку вычисления в $\mathbb{F}_3^2$ проводятся по $\bmod a(x)$, будем иметь

$$x^2 + x + 2 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; x^2 \;=\; -x - 2 \;=\; 2x + 1.$$

Найдём порядок элемента x: т. к. $8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$, проверим равенство $x^4 = 1$:

$$x^4 \;=\; (x^2)^2 \;=\; (2x+1)^2 \;=\; x^2 + x + 1 \;=\; \cancel{2}x + 1 + \cancel{x} + 1 \;=$$
$$2 \neq 1,$$

то есть x — примитивный элемент F: $\operatorname{ord} x = 8$, $x^8 = 1$.

Повезло: $a(x) = x^2 + x + 2$ оказался примитивным многочленом над $\mathbb{F}_3$, иначе примитивный элемент поля F пришлось бы искать.

Теперь вычислим значение заданного выражения. Имеем $2^8 = 256 \equiv_3 1$, $x + 2 = -x^2$, $x^4 = 2$ и далее:

$$S = \frac{1}{2x+1} - \frac{(2x)^7(2)}{(x)^9(x+2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{x^7}{x^9x^2} = \frac{x^8}{x^2} + \frac{x^7x^8}{x^{11}} =$$
$$= x^6 + x^4 = (x^2)^3 + 2 = (2x+1)^3 + 2 = 2x^3 + \not{1} + \not{2} =$$
$$= 2x(2x+1) = x^2 + 2x = 2x + 1 + 2x = x + 1.$$

2.24. В данном 9-элементном поле

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \equiv_3 2.$$

1. Найдём порядок элемента x, для чего проверим равенство $x^4 = 1$ (т. к. $9 - 1 = 8 = 2^3$, $\frac{8}{2} = 4$):

$$x^4 = (x^2)^2 = 4 \equiv_3 1.$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 4$ и элемент x не является генератором группы F^* (и $x^2 + 1$ — не есть примитивный многочлен над $\mathbb{F}_3$:
$x^4 - 1 = x^4 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$).

2. Проверим на примитивность элемент $x + 1$:

$$(x+1)^4 = (x+1)(x+1)^3 = (x+1)(x^3+1) =$$
$$= (x+1)(2x+1) = 2x^2 + \not{x} + \not{2}x + 1 = 4 + 1 = 2 \neq 1$$

то есть $\alpha = x + 1$ оказался примитивным элементом. Его степени:

$$\alpha^1 = x + 1, \qquad \alpha^5 = 2(x+1) = 2x + 2,$$
$$\alpha^2 = x^2 + 2x + 1 = 2x, \qquad \alpha^6 = \alpha^2 \cdot \alpha^4 = 4x = x,$$
$$\alpha^3 = 2x(x+1) = 2x + 1, \qquad \alpha^7 = x(x+1) = x + 2,$$
$$\alpha^4 = 4x^2 = x^2 = 2, \qquad \alpha^8 = (\alpha^4)^2 = 4 = 1.$$

Замечание: вычисление очередной степени α^{i+j} часто бывает удобным провести как $\alpha^i \cdot \alpha^j$, а не как $\alpha \cdot \alpha^{i+j-1}$.

2.25. 1. Сначала проверим, является ли многочлен $f(x) = x^2 + x + 2$ делителем $x^4 + 1$?

$$x^4 + 1 \;=\; (x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 2) \qquad \text{— да, является}$$

Поэтому искомый идеал составят многочлены из R, кратные $f(x)$:

$$\big(x^2 + x + 2\big) = \left\{ (x^2 + x + 2)(ax + b) \mid a, b \in \mathbb{F}_3, x^4 = 1 \right\}.$$

2. Проведём умножение:

$$(x^2 + x + 2)(ax + b) \;=\; ax^3 + (a + b)\, x^2 + (2a + b)\, x + 2b.$$

Теперь, перебирая все возможные значения $a, b \in \mathbb{F}_3$, найдём все элементы идеала $(x^2 + x + 2)$:

a	b	$ax^3 + (a+b)x^2 + (2a+b)x + 2b$
0	0	0
0	1	$x^2 + x + 2$
0	2	$2x^2 + 2x + 1$
1	0	$x^3 + x^2 + 2x$
1	1	$x^3 + 2x^2 + 2$
1	2	$x^3 + x + 1$
2	0	$2x^3 + 2x^2 + x$
2	1	$2x^3 + 2x + 2$
2	2	$2x^3 + x^2 + 1$

А если бы $f(x) \not| a(x)$? Тогда в R существует идеал, порождённый элементом НОД$\,(f(x), a(x))$.

2.26. Для матриц размера 2×2 обратная матрица записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Сначала вычислим $\det M = ad - bc$ с учётом $x^2 = 2x + 2$:

$$\begin{aligned}\det M &= (3x+4)(3x+2) - (x+2)(x+3) = \\ &= 4x^2 + 3x + 3 - x^2 - 1 = \\ &= 3x^2 + 3x + 2 = 3(2x+2) + 3x + 2 = 4x + 3.\end{aligned}$$

2. Найдём обратный к $4x+3$ элемент, решая соотношение Безу

$$(x^2 + 3x + 3)a(x) + (4x+3)b(x) = 1$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. // *Инициализация*

$r_{-2}(x) = x^2 + 3x + 3,$
$r_{-1}(x) = 4x + 3,$
$y_{-2}(x) = 0,$
$y_{-1}(x) = 1.$

Шаг 1. // *Делим $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$ с остатком*

$r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$
$q_0(x) = 4x + 4,$
$r_0(x) = 1,$ // $\deg r = 0 \Rightarrow$ *ОСТАНОВ*
$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) =$
$= -q_0(x) = -4x - 4 = x + 1.$

3. Вычислим обратную матрицу

$$M^{-1} = (x+1)\begin{pmatrix} 3x+2 & 4x+3 \\ 4x+2 & 3x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 & 1 \\ 4x & 3x \end{pmatrix}.$$

2.27. 1. $f(0) = f(1) = 1$, и значит $f(x)$ не имеет корней в $\mathbb{F}_2$ то есть не имеет линейных множителей.

2. Далее ищем делители $f(x)$ среди неприводимых многочленов степени 2.

Таковых над $\mathbb{F}_2$ только один — $x^2 + x + 1$.

При делении $f(x)$ на $x^2 + x + 1$, получаем

$$f(x) = (x^2+x+1)\times \\ \times (\underbrace{x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1}_{g(x)}).$$

Делим частное $g(x)$ на x^2+x+1:

$$g(x) = x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 = \\ = (x^2+x+1)\cdot(x^7+x^4+x^3+x^2+x+1)+x$$

— не делится нацело, то есть x^2+x+1 — делитель $f(x)$ кратности 1.

3. Неприводимых многочленов 3-й степени над $\mathbb{F}_2$ только два: x^3+x+1 и x^3+x^2+1.
Пробуем поделить $g(x)$ на x^3+x+1:

$$x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 = \\ = (x^3+x+1)(\underbrace{x^6+x^5+x^3+x^2+1}_{h(x)}) \quad \text{— делится!}$$

Производя далее попытки деления $h(x)$ на неприводимые многочлены 3-й степени, получаем

$$x^6+x^5+x^3+x^2+1 = \\ = (x^3+x+1)\cdot(x^3+x^2+x+1)+x^2, \\ x^6+x^5+x^3+x^2+1 = (x^3+x^2+1)\cdot x^3+x^2+1.$$

Поскольку многочлен $h(x)$ 6-й степени не имеет делителей 3-й и меньших степеней, то он является неприводимым.

Ответ: В $\mathbb{F}_2[x]$ справедливо разложение

$$f(x) = x^{11}+x^9+x^8+x^4+x^3+x^2+1 = \\ (x^2+x+1)(x^3+x+1)(x^6+x^5+x^3+x^2+1).$$

2.28. 1. Найдём разложение многочлена $f(x)$ на *неприводимые* множители над $\mathbb{F}_3$.

- Ищем корни: $f(0) = 2,\ f(1) = 1,\ f(2) = 0$.
  Поскольку $x-2 \equiv_3 x+1$, то $f(x) = (x+1)(x^2+2x+2)$.
- Пробуем разложить многочлен $g(x) = x^2 + 2x + 2$: он не имеет корней в $\mathbb{F}_3$, его степень $= 2 \Rightarrow$ он неприводим.
- Окончательно: $f(x) = (x+1)(x^2+2x+2) \in \mathbb{F}_3[x]$.

2. Известно, что если $g(x)$ — неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{F}_p$, то он:

- в поле своего расширения $F = \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$ раскладывается на n линейных множителей —
  $$g(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\alpha^p)\cdot\left(x-\alpha^{p^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha^{p^{n-1}}\right),$$
  где α – произвольный корень $g(x)$ в F;
- не имеет корней ни в каком конечном поле, содержащим менее, чем p^n элементов.

3. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/(g(x))$ расширения многочлена $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

В этом поле если α — корень $g(x)$, то и α^3 — тоже его корень. Вычисляем:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= -2\alpha - 2 = \alpha + 1,\\ \alpha^3 &= \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1\end{aligned}$$

Построенное поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2x+2)$ содержит найденный ранее корень 2, поэтому многочлен $f(x)$ в этом поле раскладывается на следующие линейные множители:

$$f(x) = x^3 + x + 2 = (x-2)(x-\alpha)(x-2\alpha-1) = (x+1)(x+2\alpha)(x+\alpha+2).$$

4. Определить корни многочлена

$$g(x) = (x-\alpha)(x-2\alpha-1)$$

в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2x+2)$ легко: всегда можно взять $\alpha = x$, откуда второй корень $\alpha^3 = 2\alpha + 1 = 2x + 1$.

Ответ: многочлен $f(x) = x^3 + x + 2$ имеет корни 2, x, $2x+1$ в поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2x+2) = GF(3^2)$.

2.29. $\beta \in \{\, 0,\, 1,\, \alpha,\, \ldots,\, \alpha^{14} \,\} = F, \quad x^4 = x + 1.$

$\beta = 0$: $m_0(x) = x$.

$\beta = 1$: $m_1(x) = x + 1$.

$\beta = \alpha$: сопряжённые с α элементы — α^2, α^4, α^8 и

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8) = \ldots$$
$$\ldots = x^4 + x + 1 = 0.$$

Это означает, что $x^4 + x + 1$ — примитивный многочлен и $m_\alpha(x) = x^4 + x + 1$.

$\beta = \alpha^3$: сопряжённые с α^3 элементы суть α^6, α^{12}, $\alpha^{24} = \alpha^9$, их м. м. —

$$\begin{aligned} m_{\alpha^3}(x) &= (x-\alpha^3)(x-\alpha^6)(x-\alpha^9)(x-\alpha^{12}) = \\ &= x^4 + \left(\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12}\right) x^3 + \\ &+ \left(\alpha^3\alpha^6 + \alpha^3\alpha^9 + \alpha^3\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9 + \alpha^6\alpha^{12} + \alpha^9\alpha^{12}\right) x^2 + \\ &+ \left(\alpha^3\alpha^6\alpha^9 + \alpha^3\alpha^6\alpha^{12} + \alpha^3\alpha^9\alpha^{12} + \alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\right) x + \\ &+ \left(\alpha^3\alpha^6\alpha^9\alpha^{12}\right) = x^4 + \left(\alpha^3 + (\alpha^3 + \alpha^2) + (\alpha^3 + \alpha) + \right. \\ &+ \left. (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)\right) x^3 + (\ldots)\, x^2 + (\ldots)\, x + \alpha^{30} = \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

$\beta = \alpha^5$: единственный сопряжённый с α^5 элемент — α^{10} (т. к. $\alpha^{20} = \alpha^5$), их м. м. —

$$m_{\alpha^5}(x) = (x-\alpha^5)(x-\alpha^{10}) = x^2 + x + 1.$$

$\beta = \alpha^7$: сопряжённые с α^7 элементы — α^{14}, $\alpha^{28} = \alpha^{13}$, $\alpha^{56} = \alpha^{11}$, их м. м. —

$$\begin{aligned} m_{\alpha^7}(x) &= (x-\alpha^7)(x-\alpha^{11})(x-\alpha^{13})(x-\alpha^{14}) = \\ &= x^4 + x^3 + 1. \end{aligned}$$

2.30. 1. Любой многочлен в поле характеристики 5 вместе с корнем α^3 содержит все сопряжённые с ним $(\alpha^3)^5 = \alpha^{15}$, $(\alpha^3)^{5^2} = \alpha^{75}$, $(\alpha^3)^{5^3} = \alpha^{375}$ и т. д.

2. В поле F имеем $\alpha^{5^2-1} = \alpha^{24} = 1$, и сопряжённым с α^3 будет только элемент α^{15}, т. к. $\alpha^{75} = \alpha^3$. Поэтому минимальный многочлен элемента α^3 — квадратный:

$$m_{\alpha^3}(x) = (x - \alpha^3)(x - \alpha^{15}) = x^2 - (\alpha^3 + \alpha^{15})x + \alpha^{18}.$$

3. Найдём коэффициенты данного многочлена, учитывая $\alpha^2 = -\alpha - 2 = 4\alpha + 3$:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(4\alpha + 3) = 4\alpha^2 + 3\alpha = \\
&= 4(4\alpha + 3) + 3\alpha = 4\alpha + 2, \\
\alpha^{15} &= (\alpha^3)^5 = (4\alpha + 2)^5 = 4\alpha^5 + 2 = \\
&= 4\alpha^2\alpha^3 + 2 = 4(4\alpha + 3)(4\alpha + 2) + 2 = \\
&= 4(\alpha^2 + 1) + 2 = 4(4\alpha + 4) + 2 = \alpha + 3, \\
\alpha^3 + \alpha^{15} &= 4\alpha + 2 + \alpha + 3 = 0, \\
\alpha^{18} &= \alpha^3\alpha^{15} = (4\alpha + 2)(\alpha + 3) = \\
&= 4(4\alpha + 3) + 4\alpha + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Ответ: $m(x) = x^2 + 3$.

2.31. 1) Поскольку $|F_1^*| = 2^3 - 1 = 7$ — простое число, то каждый неединичный элемент мультипликативной группы F^* — её генератор, в т. ч. и x. Это означает, что x — *примитивный элемент* поля F и м.м. многочлен $a(x)$ примитивен.

2) Поскольку $|F_2^*| = 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$, то для определения значения $\operatorname{ord} x$ нужно проверить на равенства $x^3 = 1$ и $x^5 = 1$.

Первое равенство явно не имеет места, поэтому вычисляем с учётом $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$:

$$x^5 = x \cdot x^4 = x \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) =$$
$$= x^4 + x^3 + x^2 + x = (x^3 + x^2 + x + 1) + x^3 + x^2 + x = 1.$$

Это означает, что $\operatorname{ord} x = 5 \neq 15$, x — *не есть примитивный элемент* F, а м.м. $a(x)$ не примитивен.

2.32. Вычисляем значения $f(x)$ для $x \in GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$f(0) = 4, \ f(1) = 2, \ f(2) = 1, \ f(3) = 0.$$

Таким образом, $x = 3$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 3$ (или на $x + 2$), получим $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x - 3) \cdot (x^2 + x + 2)$.

Перебором элементов $x \in GF(5)$ убеждаемся, что $f_2(x) = x^2 + x + 2$ — неприводимый многочлен.

В поле $\mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 2)$ корни многочлена $f_2(x) = 0$ суть $\{x, x^5\}$ и $x^2 = -x - 2 = 4x + 3$.

Вычисляем:

$$x^5 = \left(x^2\right)^2 x = x(4x + 3)^2 = x(x^2 + 4x + 4) =$$
$$= x(4x + 3 + 4x + 4) = x(3x + 2) = 3x^2 + 2x =$$
$$= 2x + 4 + 2x = 4x + 4.$$

Ответ: $\{3, x, 4x + 4\}$.

2.33. Подстановкой в $f(x)$ всех элементов $0, \ldots, 4$ поля $\mathbb{F}_5$ убеждаемся, что данный многочлен 2-й степени не имеет линейных делителей и, следовательно, *неприводим*.

Порядок мультипликативной группы $GF(5^2)$ есть $24 = 2^3 \cdot 3$. Определим порядок элемента её x, для которого $x^2 = -x - 2 = 4x + 3$.

Поскольку простые делители 24 суть 2 и 3, проверим равенство $x^d = 1$ для
$d \in \left\{ \frac{24}{2} = 12, \frac{24}{3} = 8 \right\}$.
Имеем:

$$x^4 = (x^2)^2 = (4x + 3)^2 = x^2 + 4x + 4 = \ldots$$

$$\begin{aligned} &\ldots = 3x+2 \neq 1,\\ x^8 =&(x^4)^2 = (3x+2)^2 = -x^2+2x+4 = \ldots\\ &\ldots = 3x+1 \neq 1.\\ x^{12} =&x^8x^4 = (3x+1)(3x+2) = -x^2+4x+2 = \ldots\\ &\ldots = 4 \neq 1. \end{aligned}$$

Следовательно $\operatorname{ord} x = 24$ и рассматриваемый многочлен *примитивен* в поле $\mathbb{F}_5[x]/\big(x^2+x+2\big)$.

2.34. Поскольку $n = 40 = 5 \times 8$, то корни бинома $x^{40}-1$ суть все[7)] корни x^8-1, но 5-й кратности.

Рассмотрим разложение многочлена x^8-1 над $\mathbb{F}_5$. Относительно умножения на 5 вычеты по модулю 8 $\{\,\overline{0},\,\overline{1},\,\ldots,\,\overline{7}\,\}$ разбиваются на орбиты:

$$\{\,\overline{0}\,\},\ \{\,\overline{1},\,\overline{5}\,\},\ \{\,\overline{2}\,\},\ \{\,\overline{3},\,\overline{7}\,\},\ \{\,\overline{4}\,\},\ \{\,\overline{6}\,\}.$$

Пояснение: $5\cdot 5 = 25 \equiv_8 1$, $2\cdot 5 = 10 \equiv_8 2$ и т. д.

Поэтому:

- бином $x^8-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ разлагается в произведение четырёх линейных и двух неприводимых квадратных многочленов;
- бином $x^{40}-1$ разлагается в произведение двадцати многочленов степени 1 (четырёх кратности 5 каждый) и десяти неприводимых многочленов степени 2 (двух кратности 5 каждый);
- максимальная степень неприводимых делителей-многочленов есть 2, следовательно полем расширения данного бинома будет $\mathbb{F}_5^2$.

Замечание. В данном случае разложение бинома $x^8-1 \in \mathbb{F}_5[x]$ на неприводимые множители легко находится (первые три равенства справедливы в любом кольце):

[7)] они все различны

$$
\begin{aligned}
x^8 - 1 &= (x^4 - 1)(x^4 + 1),\\
x^4 - 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1),\\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1),\\
x^2 + 1 &\equiv_5 x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),\\
x^4 + 1 &\equiv_5 x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2).
\end{aligned}
$$

Итого в $\mathbb{F}_5[x]$:

$$x^8 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2).$$

И далее

$$x^{40} - 1 = (x + 1)^5(x - 1)^5(x + 2)^5(x - 2)^5(x^2 + 2)^5(x^2 - 2)^5.$$

2.35. $\deg f(x) = 2$ и поэтому $f(x)$ имеет 2 корня.

(1) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_2$ $\Rightarrow$ его корни суть x и x^2.

(2) Полином $f(x)$ приводим над $\mathbb{F}_3$:

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

поэтому $f(x)$ над $\mathbb{F}_3$ имеет корень 1 степени 2.

(3) Полином $f(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_5$ $\Rightarrow$ его корни x и x^5.

2.36. Вычисляем значения $f(x)$ для всех x из $\mathbb{F}_5 = \{\,0, 1, 2, 3, 4\,\}$: $f(0) = 4$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ и т. о. $x = 2$ — корень $f(x)$.

Деля «уголком» $f(x)$ на $f_1(x) = x - 2 = x + 3$, получим $2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = (x + 3) \cdot (2x^3 + 4x + 3)$.

Для удобства нормируем частное $2x^3 + 4x + 3$: т. к. $2^{-1} = 3$, то вместо уравнения $2x^3 + 4x + 3 = 0$ можно решать уравнение

$$f_2(x) = 3 \cdot (2x^3 + 4x + 3) = x^3 + 2x + 4 = 0.$$

Перебором элементов $x \in \mathbb{F}_5$ —

$$f(0) = 4,\ f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 1,$$

убеждаемся, что $f_2(x) = x^3 + 2x + 4$ — неприводимый многочлен[8)].

В поле $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + 2x + 4)$ корнями многочлена $f_2(x) = 0$ будут $x,\ x^5,\ x^{25}$.

Вычисляем — с учётом $x^3 = -2x - 4 = 3x + 1$:

$$\begin{aligned} x^5 &= x^2(3x+1) = 3x^3 + x^2 = 4x + 3 + x^2 = \\ &= x^2 + 4x + 3; \\ x^{25} &= \left(x^5\right)^5 = \left(x^2 + 4x + 3\right)^5 = x^{10} + 4^5 x^5 + 3^5 = \\ &= x^{10} + 4(x^2 + 4x + 3) + 3 = x^{10} + 4x^2 + x. \end{aligned}$$

(поскольку $4^5 = 2^{10} = 102\underline{4}$ и $3^5 = 81 \cdot 3 = 24\underline{3}$).

Найдём отдельно x^{10}:

$$\begin{aligned} x^{10} &= \left(x^5\right)^2 = \left(x^2 + 4x + 3\right)^2 = \\ &= x^4 + x^2 + 3^2 + 3x^3 + 4x + x^2 = \\ &= x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = \\ &= 3x^2 + \not{x} + \not{4}x + 3 + \not{2}x^2 + 4x + 4 = 4x + 2. \end{aligned}$$

Продолжаем:

$$x^{25} = x^{10} + 4x^2 + x = \not{4}x + 2 + 4x^2 + \not{x} = 4x^2 + 2.$$

Ответ: уравнение $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4 = 0$, где $f(x) \in \mathbb{F}_5[x]$ имеет корни $2,\ x,\ x^2 + 4x + 3,\ 4x^2 + 2$ в поле $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^3 + 2x + 4)$ (поскольку корень $2 \in F$).

2.37. В таблицах неприводимых многочленов данный многочлен отсутствует.

Подбором находим, что $f(x)$ разлагается в произведение двух неприводимых над $\mathbb{F}_2$ многочленов:

[8)] а если бы это был многочлен 4-й степени?

$$x^8+x^4+x^2+x+1=\underbrace{(x^4+x^3+1)}_{f_1(x)}\cdot\underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{f_2(x)}.$$

Уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ ранее были решены: их корни соответственно суть

x, x^2, x^3+1, x^3+x^2+x в поле $F_1=\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+1)$

и

x, x^2, x^3, x^3+x^2+x+1

в поле $F_2=\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Степени обоих расширений поля $GF(2)$ совпадают ($=4$) и поля F_1 и F_2 изморфны, т. о. все 8 корней уравне-ния $f(x)=0$ лежат в поле $GF(2^4)$.

Для записи данных корней выберем представление F_1 поля $GF(2^4)$. Тогда запись корней $f_1(x)$ останется без изменений, а корни $f_2(x)$ надо представить как элементы F_1.

Приравнивая многочлены, порождающие данные поля, получим

$$x^4+x^3+1=x^4+x^3+x^2+x+1\ \Rightarrow\ x^2+x=x(x+1)=0.$$

Ясно, что при подстановке $x\mapsto x+1$ полученное равенство останется справедливым. Применим данную подстановку для изоморфного преобразования полей $F_1\leftrightarrow F_2$.

Находим представления корней многочлена $f_2(x)$ в поле F_1:

$$\begin{aligned}x&\mapsto x+1,\\ x^2&\mapsto (x+1)^2=x^2+1,\\ x^3&\mapsto (x+1)^3=x^3+x^2+x+1,\\ x^3+x^2+x+1&\mapsto (x^3+x^2+x+1)+(x^2+1)+\\ &\quad+(x+1)+1=x^3.\end{aligned}$$

Удостоверимся, что, например, x^2+1 — корень $f(x)$:

$$f(x^2+1)\ =\ (x^2+1)^8+(x^2+1)^4+(x^2+1)^2+(x^2+1)+1\ =$$

$$= (x^{16}+1)+(x^8+1)+(x^4+1)+x^2.$$

Очевидно $x^{16}=x$, $x^4=x^3+1$ и $x^8=(x^3+1)^2=x^6+1$. Поскольку $x^5=x^4+x=x^3+x+1$, то
$x^6=x^4+x^2+x=x^3+x^2+x+1$ и $x^8=x^3+x^2+x$.

Подставляя в выражение для $f(x^2+1)$ полученные полиномиальные представления степеней x, получим

$$f(x^2+1) = (x+1)+(x^3+x^2+x+1)+x^3+x^2 = 0.$$

Ответ: многочлен $f(x)=x^8+x^4+x^2+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$ имеет в поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+1)$ корни x, x^2, x^2+1, x^3, x^3+1, x^3+x^2+x, $x+1$, x^3+x^2+x+1.

2.38. Поскольку $f(0)=f(1)=2$, $f(2)=1$, то $f(x)$ линейных делителей не имеет.

Проверим существование квадратичных:

$$f(x) = x^4+2x+2 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) =$$
$$= x^4+cx^3+dx^2x+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd =$$
$$= x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Отсюда

1) $c=-a$ и коэффициент при x^2 есть $b-a^2+d=0$;
2) из $bd=2$ следует, что либо $b=1$ и $d=2$, либо $b=2$ и $d=1$, то есть в любом случае $b+d=3=0$;
3) но тогда из п. (1) $a^2=0$, то есть $a=c=0$ и коэффициент при x равен $0\Rightarrow$ противоречие.

Т.о. полином $f(x)$ над $\mathbb{F}_3$ *неприводим*.

Теперь рассмотрим поле $\mathbb{F}_3[x]/(x^4+2x+2)$.

В нём $f(x)=x^4+2x+2=0$, то есть $x^4=x+1=0$, и корни $f(x)$ суть x, x^3, x^{3^2}, x^{3^3}.

Вычислим x^9 и x^{27}:

$$x^9 = \left(x^4\right)^2 x = (x+1)^2x = x^3+2x^2+x;$$

$$x^{27} = \left(x^9\right)^3 = (x^3+2x^2+x)^3 = x^9+2x^6+x^3 = \\ = \ldots = x^3+x^2+x.$$

Ответ: полином $f(x)=x^4+2x+2$ имеет корни x, x^3, x^3+2x^2+x, x^3+x^2+x в поле $\mathbb{F}_3[x]/(f)$.

2.39. Поскольку $f(0)=f(1)=1$, полином $f(x)$ линейных делителей не имеет. Кроме того,

$$x^5+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^3+x^2)+1,$$

то есть полином $f(x)$ не имеет и (единственного) квадратичного неразложимого делителя и, поскольку его степень равна 5, то он *неприводим*.

Рассмотрим теперь поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^5+x^2+1)$.
В нём $f(x)=x^5+x^2+1=0$, то есть $x^5=x^2+1=0$ и его корни суть x, x^{2^2}, x^{2^3}, x^{2^4}.

Вычислим x^8 и x^{16}:

$$x^8 = x^5x^3 = (x^2+1)x^3 = x^5+x^3 = x^3+x^2+1;$$
$$x^{16} = \left(x^8\right)^2 = (x^3+x^2+1)^2 = x^6+x^4+1 = \\ = x^5x+x^4+1 = (x^3+x)+x^4+1 = \\ = x^4+x^3+x+1.$$

Ответ: в поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^5+x^2+1)$ уравнение

$$f(x)=x^5+x^2+1=0$$

имеет корни x, x^2, x^4, x^3+x^2+1, x^4+x^3+x+1.

3. Коды, исправляющие ошибки

3.1. Проверочная матрица H имеет размерность 3×7, и код при длине $n=7$ содержит $m=3$ проверочных и $k=7-3=4$ информационных бит.

Порождающая матрица кода G, обеспечивающая требуемое систематическое кодирование, должна иметь вид $\begin{bmatrix} P \\ I_4 \end{bmatrix}$.

Матрицу P можно получить, если привести проверочную матрицу H к виду $\begin{bmatrix} I_3 & P \end{bmatrix}$, преобразуя *строки*:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)\mapsto(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь можно построить требуемую порождающую матрицу и осуществить кодирование для $\boldsymbol{u}_1 = [1101]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [1001]^T$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = G \times [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно был задан $(7, 4)$-код Хэмминга.

3.2. Для определения кодового расстояния найдём все кодовые слова:

$$v(x) = g(x)(ax^2 + bx + c) = (x^6 + x^3 + 1)(ax^2 + bx + c) =$$
$$= ax^8 + bx^7 + cx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + ax^2 + bx + c.$$

В векторном виде все кодовые слова представляются как

$$[\,a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c\,].$$

Очевидно, это тривиальный код трёхкратного повторения и $d = 3$.

Проводим систематическое кодирование сообщения $u(x)$:

$$u(x) \;\mapsto\; v(x) = x^6 u(x) + r(x),$$
$$x^6 u(x) \;=\; x^6(x^2 + x) \;=\; x^8 + x^7.$$

Находим остаток $\deg r(x)$ от деления $x^6 u(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^8 + x^7 & x^6 + x^3 + 1 \\
\underline{x^8 \qquad + x^5 \qquad + x^2} & \\
\quad x^7 + x^5 \qquad + x^2 & x^2 + x \\
\quad \underline{x^7 \qquad + x^4 \qquad + x} & \\
\qquad\qquad x^5 + x^4 + x^2 + x &
\end{array}$$

Т.о. $r(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x$ и

$$v(x) \;=\; x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x \;\leftrightarrow\; [0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \underline{0\ 1\ 1}]^T.$$

3.3. Декодирование систематического кода Хэмминга можно провести делением принятого полинома на порождающий: остаток от деления определяет синдром s с учётом таблицы соответствий между полиномиальным и степенным представлением элементов рассматриваемого поля со с. 143):

Находим позицию ошибки j.

1. $x^6 + x^2 + x \;=\; (x^3 + x + 1)^2 + \underline{x + 1},\ j = 3.$

   Действительно,

   $$w(\alpha) \;=\; \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha \;=\; (\alpha^3)^2 + \alpha^2 + \alpha \;=$$
   $$= \alpha^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha \;=\; \alpha + 1.$$

2. $x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x \;=$
   $= (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) + \underline{x^2 + x + 1},\ j = 5;$

Действительно,

$$w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \\ = \alpha^2 + 1 + \alpha^5 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^5.$$

3. $x^6+x^3+x^2+x = (x^3+x)(x^3+x+1)+\underline{0}$, т. е. ошибки не произошло.

3.4. Имеем $\alpha^{31} = 1$ и разложение F^* над $\mathbb{F}_2$ есть

$$\{1\}, \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\, \alpha^{16}\}, \\ \{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{24}, \alpha^{17}\}, \{\alpha^5, \alpha^{10}, \alpha^{20}, \alpha^9, \alpha^{18}\}, \\ \{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{28}, \alpha^{25}, \alpha^{19}\}, \{\alpha^{11}, \alpha^{22}, \alpha^{13}, \alpha^{26}, \alpha^{21}\}, \\ \{\alpha^{15}, \alpha^{30}, \alpha^{29}, \alpha^{27}, \alpha^{23}\}.$$

3.5. Для удобства вычислений воспользуемся таблицей соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов данного поля со с. 52.

С её помощью вычислим синдромы:

$$s_1 = w(\alpha) = \alpha^{14} + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^4 = \\ = (\alpha^3 + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha) + (\alpha + 1) = \\ = \alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^7,$$

$$s_2 = w(\alpha^2) = (w(\alpha))^2 = \alpha^{14},$$

$$s_3 = w(\alpha^3) = \alpha^{12} + 1 + 1 + \alpha^{12} = 0,$$

$$s_4 = w(\alpha^4) = \left(w(\alpha^2)\right)^2 = \alpha^{28} = \alpha^{13}.$$

Синдромный полином —

$$s(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1.$$

Решим удовлетворяет соотношению Безу

$$x^{2r+1}a(x) + s(x)\sigma(x) = \lambda(x), \quad \deg\lambda(x) \leqslant 2.$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида:

Шаг 0. $r_{-2}(x) = x^5$, // *Инициализация*
$r_{-1}(x) = \alpha^{13}x^4 + \alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1$,
$\sigma_{-2}(x) = 0$,
$\sigma_{-1}(x) = 1$.

Шаг 1. $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x)$,
// *Делим* $r_{-2}(x)$ *на* $r_{-1}(x)$ *с остатком*
$q_0(x) = \alpha^2 x$,
$r_0(x) = \alpha x^3 + \alpha^9 x^2 + \alpha^2 x$,
$\sigma_0(x) = \sigma_{-2}(x) - \sigma_{-1}(x)q_0(x) =$
$= -q_0(x) = \alpha^2 x$.

Шаг 2. $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x)$,
// *Делим* $r_{-1}(x)$ *на* $r_0(x)$ *с остатком*
$q_1(x) = \alpha^{12}x + \alpha^5$,
$r_1(x) = \alpha^{14}x^2 + 1$,
$\deg r_1(x) = 2 \leqslant r$,
$\sigma_1(x) = \sigma_{-1}(x) - \sigma_0(x)q_1(x) =$
$= 1 + \alpha^2 x(\alpha^{12}x + \alpha^5) =$
$= \underbrace{\alpha^{14}x^2 + \alpha^7 x + 1}_{\text{полином локаторов ошибок}} = \sigma(x)$.

3.6. Найдём корни (их 2, полином квадратный) полинома локаторов ошибок полным перебором.

Для вычислений удобно пользоваться таблицей соответствий между степенным и полиномиальным представлением элементов поля, вычисленной в предыдущей задаче.

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \alpha^4 + \alpha^7 + 1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^2) &= \alpha^6 + \alpha^8 + 1 = \alpha^3,\\
\sigma(\alpha^3) &= \alpha^8 + \alpha^9 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha,\\
\sigma(\alpha^4) &= \alpha^{10} + \alpha^{10} + 1 = 1,\\
\sigma(\alpha^5) &= \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 = \mathbf{0},\\
\sigma(\alpha^6) &= \alpha^{14} + \alpha^{12} + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1,
\end{aligned}$$

$$\sigma(\alpha^7) = \alpha^{16} + \alpha^{13} + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + 1,$$
$$\sigma(\alpha^8) = \alpha^{18} + \alpha^{14} + 1 = \mathbf{0}.$$

Дальше можно не вычислять: оба корня $\sigma(x)$ найдены. Итак, данный полином локаторов ошибок имеет корни α^5 и α^8. Определяем позиции ошибок:

$$-5 \equiv_{15} 10, \qquad -8 \equiv_{15} 7.$$

3.7. Имеем $n = 31 = 2^5 - 1$, $q = 5$, $d_c - 1 = 2r = 6$.

Порождающий многочлен $g(x)$ конструируемого кода должен иметь корни α, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, где α — примитивный элемент поля $F = \mathbb{F}_2^5$.

При разбиении F^* на циклотомические классы всегда будет присутствовать пятиэлементный класс $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}\}$, $\alpha^{31} = 1$.

Остальные рассматриваемые степени α будут входить в циклотомические классы

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \dots\} \quad \text{и} \quad \{\alpha^5, \dots\}.$$

Нетрудно установить, что эти классы также будут пятиэлементными:

$$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{24}, \alpha^{17}\};$$
$$\{\alpha^5, \alpha^{10}, \alpha^{20}, \alpha^9, \alpha^{18}\}$$

На с. 28 были приведены неприводимые многочлены 5-й степени над $\mathbb{F}_2$: их шесть —

1) $x^5 + x^2 + 1$,
2) $x^5 + x^3 + 1$,
3) $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$,
4) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$,
5) $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$,
6) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

Во многих монографиях[9] есть соответствующие таблицы. В этих таблицах указано, что все эти многочлены

[9] например, [2], Том 1, Таблица C.

являются примитивными, то есть все они могут быть выбраны в качестве порождающего поле полинома $a(x)$.

Положим $a(x) = x^5 + x^3 + 1$ (многочлен № 2) и тогда $g_\alpha(x) = a(x)$, $\alpha^5 = \alpha^3 + 1$, $\alpha^{31} = 1$.

Определим, какие из остальных многочленов соответствуют циклотомическим классам для α^3 и α^5.

Имеем:

для многочлена № 3 —

$$(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)\big|_{x=\alpha^3} = \alpha^{15} + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + 1)^3 + \alpha^4(\alpha^3 + 1) + \alpha(\alpha^3 + 1) + \alpha^3 + 1 = \ldots = 0,$$

для многочлена № 5 —

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)\big|_{x=\alpha^5} = \alpha^{25} + \alpha^{20} + \alpha^{15} + \alpha^5 + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + 1)^5 + (\alpha^3 + 1)^4 + (\alpha^3 + 1)^3 + \alpha^5 + 1 = \ldots = 0.$$

Таким образом,
$g_{\alpha^3}(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g_{\alpha^5}(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
и порождающий многочлен для $(31, 16, 7)$-кода БЧХ есть

$$g(x) = g_\alpha(x) \cdot g_{\alpha^3}(x) \cdot g_{\alpha^5}(x) =$$
$$= x^{15} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$\deg g(x) = m = 15,\ k = n - m = 16.$$

3.8. Для вычислений в поле F нам понадобится таблица, уже построенная на с. 52.

Перебором найдём корни полинома ошибок

$$\sigma(x) = \alpha^6 x + \alpha^{15} = (\alpha^3 + \alpha^2)x + 1:$$
$$\sigma(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 + 1 = \alpha + 1 + \alpha^3 \neq 0;$$
$$\sigma(\alpha^2) = \alpha^5 + \alpha^4 + 1 = \alpha^2 + \alpha + \alpha + 1 + 1 = \alpha^2 \neq 0;$$
$$\ldots\ldots$$
$$\sigma(\alpha^9) = \alpha^{12} + \alpha^{11} + 1 =$$
$$= (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha) + 1 = \mathbf{0}.$$

Линейный полином $\sigma(x)$ имеет один корень — α^9, и поэтому позиция единственной ошибки есть $-9 \equiv_{15} 6$.

4. Теория перечисления Пойа

4.1. (а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(v) = \{\, e, s, s^2 \,\} \leqslant O$ — группа вращений $\langle 120^\circ \rangle$ (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину, $\mathrm{Stab}\,(v) \cong \mathbb{Z}_3$.

(б) Пусть O действует на рёбра куба и r — некоторое ребро.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(r) = \{\, e, f \,\} \leqslant O$ — группа вращений $\langle 180^\circ \rangle$ вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба, $\mathrm{Stab}\,(r) \cong \mathbb{Z}_2$.

(в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\mathrm{Stab}\,(f) = \{\, e, t, t^2, t^3 \,\} \leqslant O$ — группа вращений $\langle 90^\circ \rangle$ (в выбранном направлении) вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, $\mathrm{Stab}\,(f) \cong \mathbb{Z}_4$.

4.2. Везде группа Клейна V_4 действует на свои же элементы.

	g	$Type(g)$	$w(g)$	#
1)	e	$\langle \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0 \rangle$	x_1^4	1
	$a,\, b,\, ab$	$\langle 0,\, 2,\, 0,\, 0 \rangle$	x_2^2	3

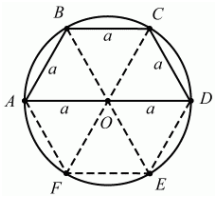
$$P_{V_4} = \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right].$$

2)

g	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, \underline{4},\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^4	1
$a,\, b$	$\langle\, \underline{2},\, 1,\, 0,\, 0 \,\rangle$	$x_1^2 x_2$	2
ab	$\langle\, 0,\, 1,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2	1

$$P'_{V_4} \,=\, \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + x_2 \,\right].$$

4.3. Обозначим последовательно вершины правильного шестиугольника буквами $A, \ldots, F,\ \mathbb{Z}_6 = \langle t \rangle$,
t — поворот на $60°$.



$g \in \mathbb{Z}_6$	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (A)\ldots(F)$	$\langle\, 6,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^6
$g = (ABCDEF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6
$g^2 = (ACE)(BDF)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^3 = (AD)(BE)(CF)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^3
$g^4 = (AEC)(BFD)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_3^2
$g^5 = (AFEDCB)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_6

$$P_{\mathbb{Z}_6} \,=\, \frac{1}{6}\left[\, x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \,\right] \,=\, \frac{1}{6}\sum_{d|6} \varphi(d)\, x_d^{6/d};$$

$$D(6) \,=\, \{\, 1, 2, 3, 6 \,\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(6) = 2.$$

4.4. Найдём цикловой индекс $R \underset{\alpha}{:} S$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его стороны. Группа $R = \langle\, t,\, f \,\rangle$ порождается образующими: t — вращение вокруг центра симметрии на $180°$, f — отражение вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, 2 оси.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^4	1
t	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	1
f	$\langle\, 2,\, 1,\, 0,\, 0 \,\rangle$	$x_1^2 x_2$	2

$$P(\underset{\alpha}{R} : S;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \;=\; \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 \,\right].$$

Число 2-цветных прямоугольников —

$$\#Col(2) \;=\; P(\underset{\alpha}{R} : S; 2, \ldots, 2) \;=\; (16 + 4 + 16)/4 \;=\; 9$$

4.5. Найдём цикловой индекс $P(\underset{\alpha}{R} : V)$ действия группы R самосовмещений прямоугольника в пространстве на его вершины.

$g \in R$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 4,\, 0,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_1^4	1
t	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	1
f	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0 \,\rangle$	x_2^2	2

$$P(\underset{\alpha}{R} : V;\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \;=\; \frac{1}{4}\left[\, x_1^4 + 3x_2^2 \,\right]$$

Число прямоугольников:

$$\#Col(3) \;=\; P(\underset{\alpha}{R} : V; 3, \ldots, 3) \;=\; \frac{81 + 27}{4} \;=\; 27$$

4.6. На множество T из $N = 9$ квадратов стеклянной пластики действует группа $D_4 = \langle\, t,\, f,\, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, где

t — вращение на 90° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон;

s — симметрия относительно прямой, проходящей через противоположные вершины.

Определяем цикловой индекс действия D_4 на T.

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(9)$	$\langle\, 9,\, 0,\, \dots \rangle$	x_1^9	1
t, t^3	$(5)(1397)(2684)$	$\langle\, 1,\, 0,\, 0,\, 2,\, \dots \rangle$	$x_1 x_4^2$	2
t^2	$(5)(19)(37)(28)(79)$	$\langle\, 1,\, 4,\, 0,\, \dots \rangle$	$x_1 x_2^4$	1
$s, f, \dots$	$(2)(5)(8)(13)(48)(79)$	$\langle\, 3,\, 3,\, 0,\, \dots \rangle$	$x_1^3 x_2^3$	4
Всего				8

Цикловой индекс: $P = \dfrac{1}{8}\left[\, x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4 + 4x_1^3x_2^3 \,\right]$.

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^9 + 2\cdot 2^3 + 2^5 + 4\cdot 2^3\cdot 2^3}{2^3} \;=\; 102.$$

4.7. Найдём цикловой индекс действия группы диэдра D_4 на 16 клеток компостера.
$D_4 = \langle\, t, f, s \,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_4| = 8$,

$g \in D_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(16)$	$\langle\, 16, 0, \dots \rangle$	x_1^4	1
$t,\, t^3$	$(1,4,16,13)\dots(6,7,11,10)$	$\langle\, 0, 0, 0, 4, \dots \rangle$	x_4^4	2
t^2	$(1,16)\dots(6,11)$	$\langle\, 0, 8, 0 \dots \rangle$	x_2^8	1
f	$(1,4)\dots(10,11)$	$\langle\, 0, 8, 0, \dots \rangle$	x_2^8	2
s	$(1)\dots(16)(2,5)\dots(12,15)$	$\langle\, 4, 6, 0, \dots \rangle$	$x_1^4 x_2^6$	2

Цикловой индекс действия группы D_4 на элементы компостера:

$$P(x_1,\, \dots,\, x_4) \;=\; \frac{1}{8}\left[\, x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4x_2^6 \,\right].$$

Наличие/отсутствие в клетке символа • описывается их отображением в двухэлементное множество (раскраске в два цвета), поэтому число различных компостеров есть

$$P(2,\,2,\,\ldots) \;=\; \frac{2^{16}+2^5+3\cdot 2^8+2^{11}}{2^3} \;=$$
$$=\; 8192+4+3\cdot 32+256 \;=\; 8196+96+256 \;=\; 8548.$$

К аналогичной задаче сводится задача о числе фотошаблонов рисунков соединений для интегральных схем.

4.8. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) \;=\; \frac{1}{24}\left[\,x_1^6+\underline{6x_1^2x_4}+3x_1^2x_2^2+\underline{6x_2^3}+8x_3^2\,\right].$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^6+12\cdot 2^3+3\cdot 2^4+2^5}{3\cdot 2^3} \;=\; 10.$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^6+12\cdot 3^3+\cdot 3^5+8\cdot 3^2}{3\cdot 8} \;=\; 57.$$

4.9. Занумеруем последовательно боковые грани П числами 1, … 4, а основание — 5.
$G \cong \mathbb{Z}_4 = \langle\, t \,\rangle$, t — вращение на 90°.

$g \in \mathbb{Z}_4$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle\, 5,\,0,\,0,\,0,\,0 \,\rangle$	x_1^5	1
$t, t^3 = (1234)(5)$	$\langle\, 1,\,0,\,0,\,1,\,0 \,\rangle$	x_1x_4	2
$t^2 = (12)(34)(5)$	$\langle\, 1,\,2,\,0,\,0,\,0 \,\rangle$	$x_1x_2^2$	1

$$P(x_1,\,\ldots,\,x_5) = \frac{1}{4}\left[\,x_1^5+2x_1x_4+x_1x_2^2\,\right],$$
$$P(3,\ldots,3) = \frac{3^5+2\cdot 3^2+3^3}{4} = \frac{9\cdot 32}{4} = 72.$$

4.10. Пронумеруем грани П: боковые — с 1 по 4 по часовой стрелке, основания — 5 и 6. Группа, действующая на П — $\mathbb{Z}_4 = \langle\, t \,\rangle$, t — поворот на 90° по часовой стрелке.

$g \in \mathbb{Z}_4$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(6)$	$\langle\, 6,\, 0, \dots \,\rangle$	x_1^6	1
t, t^3	$(1234)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0 \,\rangle$	$x_1^2 x_4$	2
t^2	$(12)(34)(5)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0, \dots \,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	1

Цикловой индекс $P = \dfrac{1}{4}\left[\, x_1^6 + 2x_1^2 x_4 + x_1^2 x_2^2 \,\right]$.

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^6 + 2\cdot 3^2 + 3^4}{4} \;=\; \frac{3^3(27+2+3)}{4} \;=\; 216.$$

4.11. $P(T \underset{\alpha}{:} F, x_1, \dots, x_4) = \dfrac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 \,\right]$.

$$\#Col(2) \;=\; \frac{2^4 + 11\cdot 2^2}{3\cdot 2^2} \;=\; \frac{4+11}{3} \;=\; 5\,.$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{3^4 + 11\cdot 3^2}{3\cdot 4} \;=\; \frac{27+33}{4} \;=\; \frac{60}{4} \;=\; 15.$$

4.12. Группа $T = \langle t, f\rangle$, $t^3 = f^2 = e$, $|T| = 12$, где

t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и центр симметрии, 4 оси;

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, 3 оси.

Обозначим через E множество рёбер тетраэдра — $|E| = 6$ — и обозначим их цифрами от 1 до 6, считая, что рёбра 1, 2 и 3 инцидентны одной вершине, а ось вращения, задаваемого элементом f, проходит через середины рёбер 1 и 6. Найдём цикловой индекс.

$g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	#
$e = (1)\dots(6)$	$\langle\, 6,\, 0, \dots \,\rangle$	x_1^6	1
$t, t^2 = (123)(456)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2,\, 0, \dots \,\rangle$	x_3^2	8
$f = (1)(23)(45)(6)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0, \dots \,\rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3

$$P(T \underset{\alpha}{:} E, x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 \,\right].$$

$$\#Col(2) = \frac{2^6 + 8\cdot 2^2 + 3\cdot 2^4}{3\cdot 2^2} = \frac{15+9+12}{3} = 12,$$
$$\#Col(3) = \frac{3^6 + 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3^4}{3\cdot 4} = 87.$$

4.13. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} R) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4 \,\right].$$
$$\#Col(2) = \frac{2^{12} + 6\cdot 2^3 + 3\cdot 2^6 + 7\cdot 2^7}{3\cdot 2^3} = 218.$$

4.14. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} V) = \frac{1}{24}\left[\, x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 \,\right].$$
$$\#Col(2) = \frac{1}{3\cdot 2^3}\left[\, 2^8 + 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4 + 2^7 \,\right] = 23,$$
$$\#Col(3) = \frac{1}{3\cdot 8}\left[\, 3^8 + 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4 \,\right] = 333.$$

4.15. Здесь $G = S_n$, но она действует не на $\{1, \ldots, n\}$ а на B^n.

Для $n = 4$ результат действия, например, подстановки $g = (1,2)(3,4)$ на четвёрку $(a,b,c,d) \in B^4$ есть (b,a,d,c).

Очевидно, $\operatorname{Fix}(g)$ состоит из тех функций, которые постоянны на области действия каждого цикла из g. В нашем случае, например, для $g = (1,2)(3,4)$ получаем $|\operatorname{Fix}(g)| = 2\cdot 2 = 4$.

Группа S_4 разбивается на следующие классы сопряжённости:

1) id;

2) шесть 2-циклов — $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$;
3) три произведения по два 2-цикла — $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$;
4) восемь 3-циклов — $(1)(2,3,4)$, $(1)(2,4,3)$, ...;
5) шесть 4-циклов — $(1,2,3,4)$, $(1,3,2,4)$, ...

Подстановка id (1) фиксирует все 16 четвёрок (a,b,c,d), $a,b,c,d \in \{0,1\}$, определяя моном x_1^{16} в цикловом индексе.

Далее, (2) даёт $6x_1^8x_2^4$, т. к., например, $(1,2)$ порождает четыре 2-цикла $\big((0,1,c,d),(1,0,c,d)\big)$ на B^4 и фиксирует все четвёрки $(0,0,c,d)$ и $(1,1,c,d)$, порождая восемь 1-циклов, и т. д.

Многочлен цикловых индексов группы G, действующий на B^4, имеет вид

$$P(G) = \frac{1}{24}\left[x_1^{16} + 6x_1^8x_2^4 + 3x_1^4x_2^6 + 8x_1^4x_3^4 + 6x_1^2x_2x_4^3\right].$$

Подставляя $x_1 = \ldots = x_4 = 2$, получаем 3 984 класса подобных булевых функций от 4-х переменных.

Замечание. Если к группе G добавить взятие дополнения как новую симметрию (т. е. считать, что $f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1^{\sigma_1},\ldots,x_n^{\sigma_n}) \Rightarrow f_1 \sim f_2, \sigma_i \in \{0,1\}$), то искомым числом (классов Шеннона-Поварова) вместо 3 984 будет 222.

4.16. Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $\mathbb{Z}_7 = \langle\, t \,\rangle,\ t^7 = e$.

$g \in \mathbb{Z}_7$	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$\langle\, 7,\, 0,\, \ldots \,\rangle$	x_1^7	1
$t,\, t^2,\, \ldots,\, t^6$	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1 \,\rangle$	x_7	6

Цикловой индекс самодействия $\mathbb{Z}_7$:

$$P_{\mathbb{Z}_7}(x_1,\,\ldots,\,x_7) = \frac{1}{7}\left[\,x_1^7 + 6x_7\,\right] = \frac{1}{7}\sum_{d|7}\varphi(d)\,x_d^{7/d}.$$

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3 вершин из 7 есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки
$x_1 \mapsto y+1,\ x_7 \mapsto y^7+1$ в $P_{\mathbb{Z}_7}$:

$$P(y) \,=\, \frac{1}{7}\left[\,(y+1)^7+6(y+1)\,\right] \,=\, \frac{1}{7}\left[\,\ldots + C_7^3 y^3 + \ldots\,\right].$$

$$u_3 \,=\, \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} \,=\, \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3} \,=\, 5.$$

4.17. Имеем транзитивное самодействие $\mathbb{Z}_6$.

(а) *Общее число пирамид.*

$$P(\mathbb{Z}_6) \,=\, \frac{1}{6}\sum_{d|6}\varphi(d)\,x_d^{6/d} \,=\, \frac{1}{6}\left[\,x_1^6+x_2^3+2x_3^2+2x_6\,\right].$$

$$\#Col(2) \,=\frac{1}{2\cdot 3}\left[\,2^6+2^3+2\cdot 2^2+2\cdot 2\,\right] \,=\, \frac{4\cdot 21}{3} \,=\, 14.$$

$$\#Col(3) \,=\frac{1}{6}\left[\,3^6+3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3\,\right] \,=\, \frac{780}{6} \,=\, 130.$$

(б, в) *Число пирамид с* 1 *и* $3\leqslant$ *красными гранями.*
Полагаем $y_1=y,\ y_2=y_3=1$ (следим только за красными гранями), $x_1=y+2,\ x_2=y^2+2,\ x_3=y^3+2$.

$$P(y) \,=\, \frac{1}{6}\left[\,(y+2)^6+(y^2+2)^3+2(y^3+2)^2+\right.$$

$$\left.+2(y^6+2)\,\right] \,=\, \frac{1}{6}\left[u_0+u_1y+u_2y^2+\ldots+u_6y^6\right] \,=$$

$$=\, \frac{1}{6}\left[\left(2^6+2^3+2^3+4\right)+6\cdot 2^5\,y+\right.$$

$$\left.+\,\left(16\cdot 15+2\cdot 3\cdot 2^2\right)\,y^2+\ldots\right].$$

$u_0 \,=\, 84/6 \,=\, 14,\ u_1 \,=\, 2^5 \,=\, 32,\ u_2 \,=\, (240{+}24)/6 \,=\, 44.$

Число пирамид с:

(б) одной красной гранью — $u_1=32$,

(в) не менее, чем 3 красными гранями — $\#Col(3)-(u_0+u_1+u_2)=130-(14+32+44)=130-90=40$.

4.18. Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы $\mathbb{Z}_8$.

$$D(8) = \{1,\, 2,\, 4,\, 8\},\ \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(8) = 4,$$
$$P(\mathbb{Z}_8) \,=\, \frac{1}{8}\sum_{d|8} \varphi(d)\, x_d^{8/d} \,=\, \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right].$$

а) *Общее число ожерелий*:

$$\#Col(3) \,=\, \frac{3^8 + 3^4 + 2\cdot 9 + 4\cdot 3}{8} \,=\, 834.$$

б) Подсчитаем *число X ожерелий, в которых число красных бусин не более* 3 (т. е. 0, 1 и 2) и вычтем полученное количество из 834.

Полагаем $y_1 = y,\ y_2 = y_3 = 1$ (следим только за бусинами красного цвета). Найдём коэффициенты u_0, u_1, u_2 при y_0, y_1, y_2 в производящем многочлене W при подстановке $x_k = y^k + 2,\ k = 1, \ldots, 8$.

$$P(\mathbb{Z}_8) \,=\, \frac{1}{8}\left[\, x_1^8 + x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8 \,\right]$$

$$W \,=\, \frac{1}{8}\left[\, (y+2)^8 + (y^2+2)^4 + 2(y^4+2)^2 + 4(y^8+2) \,\right] \,=$$
$$= u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \ldots + u_8 y^8 \,=$$
$$= \frac{1}{2^3}\left[\, (2^8 + 2^4 + 2\cdot 2^2 + 8) + 8\cdot 2^7 y + \right.$$
$$\left. +(C_8^2 \cdot 2^6 + 4\cdot 2^3)\, y^2 + \ldots \,\right].$$
$$u_0 \,=\, 2^5 + 2 + 1 + 1 \,=\, 36, \qquad u_1 \,=\, 128,$$
$$u_2 \,=\, 28\cdot 8 + 4 \,=\, 224 + 4 \,=\, 228.$$

Отсюда
$\#Col(3 \leqslant) = 834 - (36 + 128 + 228) = 834 - 392 = 442.$

4.19. Цикловой индекс:

$$P(O \underset{\alpha}{:} F) = \frac{1}{3\cdot 2^3}\left[x_1^6 + \underline{6x_1^2x_4} + 3x_1^2x_2^2 + \underline{6x_2^3} + 8x_3^2\right].$$

1) $\#Col(2) = \dfrac{2^6 + 12\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 2^5}{3\cdot 2^3} = \dfrac{30}{3} = 10.$

2) Полагаем
$w(1) = y,\ w(2) = 1,\ x_k = y^k + 1,\ k = \overline{1,6}.$

$$W = \frac{1}{24}\left[(y+1)^6 + 6(y+1)^2(y^4+1) + \right.$$
$$\left. + 3(y+1)^2(y^2+1)^2 + 6(y^2+1)^3 + 8(y^3+1)^2\right].$$

$\#Col(\geqslant 4) = u_4 + u_5 + u_6$ — число кубов с 4, 5 и 6 красными гранями соответственно. Очевидно $u_5 = u_6 = 1$.

Раскрывая W, находим:

$$W = \frac{1}{24}\left[\ldots + C_6^4 y^4 + \ldots + 6(y^2+2y+1)(\underline{y^4}+1) + \right.$$
$$+3(\underline{y^2}+2y+1)(\underline{y^4}+2\underline{y^2}+1) +$$
$$\left. +6(y^6+3\underline{y^4}+3y^2+1) + 8(y^6+2y^3+1)\right].$$

$$u_4 = \frac{15+6+9+18}{3\cdot 8} = \frac{5+2+3+6}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Итого $\#Col(\geqslant 4) = 1+1+2 = 4.$

4.20. Цикловой индекс:

$$P(D_4) = \frac{1}{8}\left[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2\right]$$

1) $\#Col(3) = \dfrac{1}{8}\left[3^4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3^2\cdot 3\right] = 21.$

2) При раскраске в 3 цвета: $x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k,\ k = \overline{1,4}$. Следим только за красным (y_1) и синим (y_2) цветами: $x_k = y_1^k + y_2^k + 1\,,\ k = \overline{1,4}$. Находим $u_{10} + u_{11} + u_{12}$.

$$W = \frac{1}{8}\left[(y_1+(y_2+1))^4 + 2(y_1^4+y_2^4+1) + \right.$$
$$\left. + 3(y_1^2+(y_2^2+1))^2 + 2(y_1+(y_2+1))^2(y_1^2+y_2^2+1)\right] \boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_1^1 (одно красное ребро)

$$\frac{1}{8}\left[y_1^4 + 4y_1^3(y_2+1) + 6y_1^2(y_2+1)^2 + \underline{4y_1(y_2+1)^3} + \right.$$
$$+ (y_2+1) + \ldots$$
$$\left. +2(y_1^2 + \underline{2y_1(y_2+1)} + (y_2+1)^2)(y_1^2+y_2^2+1)\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\ldots + 4y_1(y_2+1)^3 + 4y_1(y_2+1)(y_2^2+1))\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\ldots + 4y_1(y_2^3 + \underline{3y_2^2+3y_2^1+1}) + \right.$$
$$\left. +4y_1(y_2^3 + \underline{y_2+y_2^2+1})\right] \boxed{=}$$

нас интересуют только члены с y_2^0, y_2^1 и y_2^2 при y_1 (синих рёбер — 0, 1, 2)

$$\boxed{=} \frac{1}{8}\left[4\cdot 7 + 4\cdot 3\right] = \frac{4\cdot 10}{8} = 5.$$

4.21. Самодействие группы диэдра D_6.
1) Имеем $D_6 = \langle\, t,\, f,\, s\,\rangle$, $t^4 = f^2 = s^2 = e$, $|D_6| = 12$ — группа диэдра порядка 6, где

t — вращение на 60° вокруг центра квадрата;

f — симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон (3 оси);

s — симметрия относительно прямой, проходящей через противоположные вершины (3 оси).

Пронумеруем последовательно вершины правильного 6-угольника 1, ..., 6.

Перестановки ниже указаны для случая, когда ось f проходит через середины сторон (2-3) и (5-6), а ось s — через вершины 1 и 4.

$g \in D_6$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	#
e	$(1)\dots(6)$	$\langle\, 6,\, 0,\, \dots\, 0\,\rangle$	x_1^6	1
t, t^5	(123456)	$\langle\, 0,\, \dots,\, 0,\, 1\,\rangle$	x_6^1	2
t^2, t^4	$(135)(246)$	$\langle\, 0,\, 0,\, 2, \dots\, 0\,\rangle$	x_3^2	2
t^3	$(14)(25)(36)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0, \dots\, 0\,\rangle$	x_2^3	1
f	$(14)(23)(56)$	$\langle\, 0,\, 3,\, 0,\, \dots\, 0\,\rangle$	x_3^2	3
s	$(1)(4)(26)(35)$	$\langle\, 2,\, 2,\, 0,\, \dots\,\rangle$	$x_1^2x_2^2$	3
Всего				12

$$P(D_6) = \frac{1}{12}\left[\, x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2 \,\right].$$

Всего молекул — подстановка $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ (водород H и метил CH_3):

$$M \;=\; \frac{64 + 4 + 8 + 32 + 3 \cdot 16}{3 \cdot 4} \;=\; \frac{39}{3} \;=\; 13.$$

2) *Число молекул с* $0, \ldots, 6$ *атомами водорода* — обозначение $y_1 = \mathrm{H}$, $y_2 = 1$ и подстановка $x_k = \mathrm{H}^k + 1$, $k = \overline{1,6}$ в P.

$$\begin{aligned} W \;=\; \frac{1}{12}\Big[\, &(\mathrm{H}+1)^6 + 3(\mathrm{H}+1)^2(\mathrm{H}^2+1)^2 + 4(\mathrm{H}^2+1)^3 + \\ &+2(\mathrm{H}^3+1)^2 + 2(\mathrm{H}^6+1)\,\Big] \;= \\ &= \mathrm{H}^6 + \mathrm{H}^5 + 3\cdot\mathrm{H}^4 + 3\cdot\mathrm{H}^3 + 3\cdot\mathrm{H}^2 + \mathrm{H} + 1\,. \end{aligned}$$

Итого: молекул с числом атомов водорода (как радикала) — H = 0, 1, 5 и 6 — по 1 шт., H = 2, 3 и 4 — по 3 шт., всего — 13.

4.22. Цикловой индекс самодействия группы диэдра (было ранее)

$$P(D_n) \;=\; \frac{1}{2n}\sum_{d|n} \varphi(d)\, x_d^{n/d} +$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ нечётно}, \\ \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{n/2-1}\right], & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

$n = 6 + 12 = 18,\ D(18) = \{\,1,\,2,\,3,\,6,\,9,\,18\,\},$

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 1, & \varphi(3) = 2, & \varphi(9) = 6, \\ \varphi(2) = 1, & \varphi(6) = 2, & \varphi(18) = 6. \end{array}$$

По формуле: $P(D_{18}) =$

$$= \frac{1}{36}\left[\,x_1^{18} + x_2^9 + 2x_3^6 + 2x_6^3 + 6x_9^2 + 6x_{18}^1\,\right] + \\ + \frac{1}{4}\left[\,x_2^9 + x_1^2 x_2^8\,\right] = \\ = \frac{1}{36}\left[\,x_1^{18} + 10x_2^9 + 2x_3^6 + 2x_6^3 + 6x_9^2 + 6x_{18}^1 + 9x_1^2 x_2^8\,\right].$$

$x_k = y^k + 1, \quad W = \frac{1}{36}\left[\,(y+1)^{18} + \right.$

$$+ 10(y^2+1)^9 + 2(y^3+1)^6 + 2(y^6+1)^3 + \\ + 6(y^9+1)^2 + 6(y^{18}+1) + 9(y+1)^2(y^8+1)^8\,\Big] = \\ = \frac{1}{36}\Big[\,\ldots + \big(\,C_{18}^6 + 10C_9^3 + 2C_3^1 + 2C_6^2 + 0 + 0 + \\ + \,9(C_8^2 + C_8^3)\,\big)\,y^6\,\Big] = \\ = \frac{1}{36}\left[\,\ldots + (18654 + 840 + 6 + 30 + 756)\,y^6\,\right] = \\ = 561\,y^6. \qquad \textit{Ответ.}\ 561.$$

Список литературы

1. *Журавлёв Ю. И., Флёров Ю. А., Вялый М. Н.* Дискретный анализ. Основы высшей алгебры. — М.: МЗ Пресс, 2007.

   Zhuravlev, Yu. I., Flerov Yu. A., Vjalyj M. N. (2007) Discrete analysis, Fundamentals of Higher Algebra. MZ Press, Moscow.

2. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: В 2-х т. — М.: Мир, 1988.

   Lidl, R., Niederreiter, H. (1997) Finite Fields. Cambridge University Press.

3. *Морелос-Сарагоса Р.* Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. — М.: Техносфера, 2006.

   Morelos-Zaragoza, Robert H. (2002) The Art of Error Correcting Coding. John Wiley & Sons.

4. *Нефёдов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики. — М.: МАИИзд-во МАИ, 1992.

   Neftdov, V. N., Osipova, V. A. (1992) Course of Discrete Mathematics. Publishing house MAI, Moscow.

5. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976.

   Peterson, W. Wesley, Weldon, E. J., Jr. (1972) Error-Correcting Codes. The MIT Press.