

ТЕОРИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР

УДК 548.1.515

МЕТОД КОРРЕКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СИНТЕЗА ПРОЕКЦИЙ

© 2000 г. Я. А. Илюшин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет¹

Поступила в редакцию 27.03.98 г.

Рассмотрена задача восстановления двумерного объекта по синтезу его проекций. Исследован подход к решению задачи с помощью разложения по круговым гармоникам. Получены формулы томографической реконструкции в виде разложения по системам ортогональных функций на внешности единичного круга. Проведено численное моделирование реконструкции по выведенным формулам.

Пространственный синтез проекций является широко распространенным методом томографической визуализации исследуемых объектов [1, 2]. Обратное проецирование и суммирование в двумерном пространстве может осуществляться с помощью несложной аппаратуры фотосуммирования. Существуют томографические приборы, непосредственно производящие такое суммирование без явного представления информации о самих проекциях. В ряде практических ситуаций такой подход оказывается единственно возможным [3]. Восстановленное таким образом изображение значительно искажено, поскольку связано с исходным объектом посредством некоторого интегрального преобразования. По этой причине представляют интерес методы коррекции пространственного синтеза проекций [1–3], т.е. восстановления неизвестной функции по пространственному синтезу ее проекций. В данной работе предлагается подход к решению задачи на основе разложений по круговым гармоникам. Такой подход более экономичен и позволяет достаточно просто осуществить регуляризацию. Кроме того, в рамках этого подхода имеется естественная возможность учета симметрии исследуемого объекта, важная для кристаллографических приложений.

Рассмотрим функцию $g(r, \varphi)$, определенную на единичном кругу. Предположим, что для этой функции существует преобразование Радона $f(p, \psi)$ и пространственный синтез проекций $\Sigma(r, \varphi)$. Все эти функции разлагаются в ряды Фурье по круговым гармоникам

$$g(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) g_n(r), \quad (1)$$

$$f(p, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\psi) f_n(p), \quad (2)$$

$$\Sigma(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) \Sigma_n(r). \quad (3)$$

Радиальные составляющие гармоник связаны преобразованием Кормака [4]

$$f_n(p) = 2 \int_p^1 \frac{T_n(p/r)}{\sqrt{r^2 - p^2}} g_n(r) r dr. \quad (4)$$

Пространственный синтез проекций в точке (r, φ) равен сумме интегралов по всем прямым, проходящим через эту точку, т.е.

$$\begin{aligned} \Sigma(r, \varphi) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(p(\delta), \psi(\delta)) d\delta = \\ &= \int_{\varphi - \pi/2}^{\varphi + \pi/2} f(r \cos(\psi - \varphi), (\psi - \varphi)) d\psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Записанный в правой части интеграл представляет собой интеграл по окружности (рис. 1), проходящей через начало координат и определяемой уравнением

$$p = r \cos(\psi - \varphi). \quad (6)$$

Такое интегральное преобразование рассмотрено в [4], где показано, что радиальные составляющие круговых гармоник при этом связаны между собой преобразованием

$$\Sigma_n(r) = 2r \int_0^r \frac{T_n(p/r)}{\sqrt{r^2 - p^2}} f_n(p) dp. \quad (7)$$

Преобразования (4) и (7) являются сопряженными операторами относительно скалярных

¹ E-mail: asi@phys.msu.su

произведений $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \int_0^1 x(p)y(p)dp$ и $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \int_0^1 x(r)y(r)dr$ соответственно. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(r)2r \int_0^r \frac{T_n(p/r)}{\sqrt{r^2-p^2}} x(p)(dp)dr &= \\ = \int_0^1 x(p)2 \int_p^1 \frac{T_n(p/r)}{\sqrt{r^2-p^2}} y(r)rdrdp. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуя интегралы к двойным и меняя порядок интегрирования в (8), убедимся, что обе части равны. Объединяя (4) и (7), получаем связь между исходным объектом и пространственным синтезом

$$\Sigma_n(r) = 4r \int_0^r \frac{T_n(p/r)}{\sqrt{r^2-p^2}} \int_p^1 \frac{T_n(p/r')}{\sqrt{r'^2-p^2}} g_n(r')r'dr'dp. \quad (9)$$

Изменяя порядок интегрирования в правой части, приведем (9) к виду

$$\Sigma_n(r) = \int_0^1 K_n(r, r') g_n(r') dr', \quad (10)$$

где

$$K_n(r, r') = 4r'r' \int_0^{\min(r, r')} \frac{T_n(p/r) T_n(p/r')}{\sqrt{r^2-p^2} \sqrt{r'^2-p^2}} dp. \quad (11)$$

Очевидно, подынтегральное выражение является симметричным, т.е. $K_n(r, r') = K_n(r', r)$. При $r' \rightarrow r$ ядро (11) имеет особенность логарифмического характера. Асимптотику $K_n(r, r')$ при $r' \rightarrow r$ можно исследовать стандартными методами для интегралов со слабыми особенностями [5]. Используя интегральное представление для функций Бесселя [4]

$$J_{2n}(x) = \frac{(-1)^n 2}{\pi} \int_0^1 \frac{T_{2n}(y) \cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad (12)$$

и аналогичное представление для нечетного индекса, можно преобразовать ядро интегрального уравнения $K_n(r, r')$ к виду

$$K_n(r, r') = 2\pi r r' \int_0^\infty J_n(rt) J_n(r't) dt. \quad (13)$$

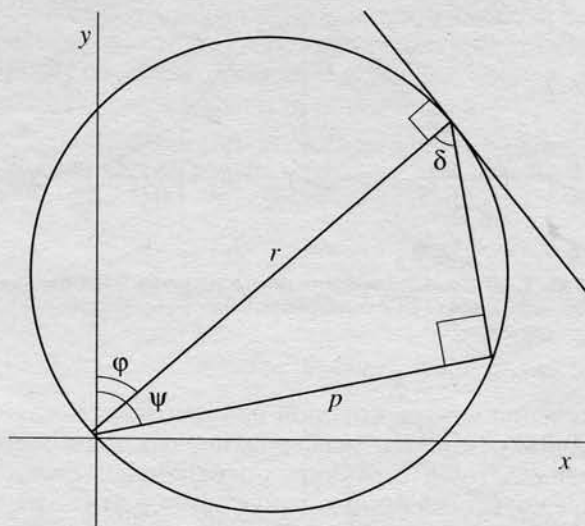


Рис. 1. Геометрия пространственного синтеза проекций.

Этот интеграл может быть выражен через гипергеометрическую функцию [6]

$$\begin{aligned} K_n(r, r') &= 2\pi \left(\frac{r'}{r}\right)^n r' \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)} \times \\ &\times F\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; n+1; \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right) \text{ при } r' < r, \\ K_n(r, r') &= K_n(r', r) \text{ при } r' > r. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, переход от преобразования Радона к пространственному синтезу проекций сводит задачу реконструкции функции $g(r, \varphi)$ к решению системы обыкновенных интегральных уравнений Фредгольма первого рода (10) с симметричным ядром (14). Такое ядро обладает ортонормированной системой собственных функций. На основе разложения по этим функциям можно построить эффективный численный алгоритм решения задачи.

Пространственный синтез проекций является частным случаем оператора, введенного в [7] для исследования пар ортогональных множеств, переводимых друг в друга преобразованием Радона. Согласно доказанной теореме собственные функции ядра (14) переводятся преобразованием Радона во множество функций, ортогональных на единичном круге с единичным весом. Такой вес не соответствует ни одной из известных пар ортогональных множеств, имеющих явное аналитическое представление. Собственные функции можно вычислять приближенными методами на ЭВМ [8].

В ряде случаев возникает необходимость томографической реконструкции вне некоторой замкнутой области, проникновение зондирующего

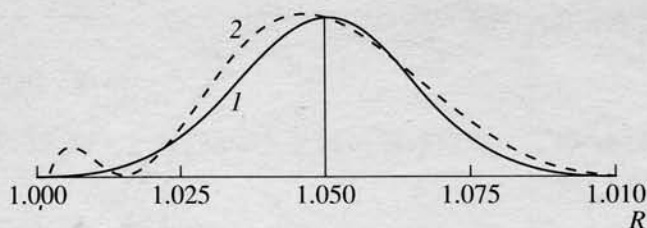


Рис. 2. Исходный профиль распределения плотности тонкого слоя (1). Реконструированное распределение плотности (2).

излучения внутрь которой невозможно. К таким задачам относится исследование всевозможных поверхностных структур, пограничных слоев и т.д., в частности исследование земной атмосферы по данным радиопросвечивания. Ортонормированные функции для круговой области можно получить из известных решений для внутренности единичного круга. Проведем преобразование координат $s = 1/r$, $q = 1/p$. Такое преобразование переводит прямую $r = p/\cos(\varphi - \psi)$ в окружность $s = q\cos(\varphi - \psi)$. Интегральное преобразование (4) при этом имеет вид

$$f_n(q) = 2 \int_0^q \frac{q}{s^2} g_n(s) \frac{T_n(s/q)}{\sqrt{q^2 - s^2}} ds. \quad (15)$$

Умножим обе части на полином Цернике $R_n^l(q)$ [4] и проинтегрируем по q от 0 до 1. Получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(q) R_n^l(q) dq &= \\ &= 2 \int_0^1 R_n^l(q) \int_0^q \frac{q}{s^2} g_n(s) \frac{T_n(s/q)}{\sqrt{q^2 - s^2}} ds dq. \end{aligned} \quad (16)$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{g_n(s)}{s^2} 2 \int_s^1 q R_n^l(q) \frac{T_n(s/q)}{\sqrt{q^2 - s^2}} dq ds &= \\ &= 2 \int_0^1 \frac{g_n(s)}{s^2} \frac{U_{n+2l+1}(s)}{(n+2l+1)} ds, \end{aligned} \quad (17)$$

где $U_m(s) = \sin(\arccos(s))$ — функция Чебышева второго рода. Учитывая свойства ортогональности функций Чебышева и полиномов Цернике, можно показать (возвращаясь к старым переменным), что

$$\begin{aligned} g_n(r) &= \frac{2}{\pi r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_{n+2l+1}(1/r)}{\sqrt{1 - (1/r)^2}} (n+2l+1) \times \\ &\times \int_1^{\infty} f_n(p) R_n^l(1/p) \frac{dp}{p^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Примеры численного моделирования томографической реконструкции тонкого сферически-симметричного слоя по 60 членам ряда (18) приведены на рис. 2 (исходный профиль слоя и реконструкция соответственно). Некоторое ухудшение сходимости ряда наблюдается вблизи самой поверхности, что связано с некорректностью задачи суммирования ряда Фурье с приближенными коэффициентами. Для устранения этих явлений можно применять регуляризацию суммирования ряда или использовать известную информацию о граничных значениях реконструируемой функции на поверхности, которая в ряде случаев бывает доступна из дополнительных измерений, физических соображений и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Вайнштейн Б.К., Михайлов А.М. // Кристаллография. 1972. Т. 17. № 2. С. 258.
2. Вайнштейн Б.К. // УФН. 1973. Т. 109. № 3. С. 455.
3. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
4. Cormack A.M. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 9. P. 2722; 1964. V. 35. № 10. P. 2908.
5. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 6.512.1.
7. Marr R.B. // J. of Math. Anal. and Applicat. 1974. V. 45. P. 357.
8. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 157 с.