

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 532.516.5: 532.526.7: 532.62

Агеев Алексей Игоревич

ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ
СУПЕРГИДРОФОВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. А.Н. Осипцов

Москва – 2015

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	13
1 Течение тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности	31
1.1 Автомоделные режимы растекания тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей	32
1.1.1 Автомоделные решения для степенного закона массоподвода	40
1.1.2 Автомоделные решения для экспоненциального закона массоподвода	45
1.1.3 Приближенное автомоделное решение для слабонеодномерного растекания пленки	48
1.2 Стеkanie ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности	56
1.2.1 Автомоделные решения уравнения поперечного сечения ручейка на наклонной поверхности	60
1.3 Эволюция тонкого слоя вязкой жидкости на поверхности горизонтального цилиндра	65
2 Течение вязкой жидкости в окрестности периодической текстуры супергидрофобной поверхности	72
2.1 Обтекание сдвиговым потоком каверн, полностью занятых жидкостью	78

2.2	Обтекание газовой микрокаверны с плоской межфазной границей	80
2.3	Обтекание сдвиговым потоком каверны с искривленной межфазной границей	82
2.4	Обтекание группы каверн	85
	Заключение	93
	Литература	97
	Приложение: вывод граничных интегральных уравнений	112

Введение

Актуальность исследования течений жидкости вблизи текстурированных супергидрофобных поверхностей обусловлена тем, что такие поверхности имеют целый ряд особых свойств, представляющих интерес для технологических приложений. Как показывают многочисленные эксперименты, при обтекании супергидрофобной поверхности вязкой жидкостью наблюдается макроскопическое проскальзывание и заметное снижение сопротивления трения потока.

Аналогичную природу имеет и осредненное проскальзывание вязкой жидкости при обтекании границы пористой среды, заполненной жидкостью или газом. В этом случае проскальзывание есть результат взаимодействия внешнего потока и фильтрации жидкости внутри пористого тела, однако в таких системах величина проскальзывания, как правило, очень мала. На искусственных текстурированных супергидрофобных поверхностях характерная "длина проскальзывания" (отношение скорости проскальзывания к скорости сдвига) может достигать долей миллиметра, что приводит к существенному (порядка десятка процентов) снижению гидродинамического сопротивления поверхности.

В последние годы, в связи с развитием нанотехнологий, позволяющих создавать контролируемый рельеф текстуры, резко возрос интерес к исследованию гидродинамических характеристик супергидрофобных поверхностей. Такие поверхности начинают активно использоваться не только для снижения сопротивления трения, но и для интенсификации массопереноса в устройствах микрофлюидики, в химической технологии, при созда-

нии покрытий, самоочищающихся от капельных загрязнений, предотвращения обледенения элементов летательных аппаратов и технологических конструкций и др. [22]. Технологическое использование супергидрофобных поверхностей способствовало началу разработки оптимального дизайна промышленных супергидрофобных поверхностей и изучению их гидродинамических свойств. Дизайн супергидрофобной поверхности заключается в создании контролируемой шероховатости (текстуры) поверхности, образованной системой микролунок либо микровыступов, в которых или между которыми находятся газовые пузырьки, удерживаемые силами поверхностного натяжения. При этом образуется устойчивая межфазная граница между жидкостью и поверхностями пузырьков, занимающая заметную часть общей супергидрофобной поверхности. Пониженное трение между газом и жидкостью и создает макроскопическое проскальзывание жидкости на такой поверхности. Характерные линейные размеры микропадин и микропузырьков составляют $\sim 10^{-4} - 10^{-2}$ см, поэтому при описании течения на масштабе элементов текстуры поверхности, как правило, применимо приближение сплошной среды.

С точки зрения гидродинамики течение вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности может описываться как на микромасштабе (масштабе элементов текстуры и микропузырьков), так и на макромасштабе – например, при исследовании течений с характерными линейными размерами, значительно превосходящими размер микрон неоднородностей поверхности. В последнем случае размеры шероховатости поверхности и пузырьков несущественны, и наличие текстуры моделируется заданием эффективного условия скольжения типа условия Навье на гладкой стенке. Коэффициент пропорциональности между осредненным касательным напряжением и осредненной скоростью проскальзывания называется коэффициентом скольжения (в общем случае, когда вектора касательных напряжений и скорости скольжения не коллинеарны, – тензором эффективной длины скольжения). Исследование гидродинамических свойств супер-

гидрофобных поверхностей состоит, прежде всего, в нахождении эффективных характеристик супергидрофобных поверхностей (определении числовых значений компонент тензора эффективной длины скольжения), а также в изучении влияния эффективного проскальзывания на макроскопические характеристики течения. Для практики имеет важное значение и определение зависимости коэффициентов скольжения супергидрофобных поверхностей от геометрических характеристик микротекстуры.

Как правило, коэффициенты скольжения определяют экспериментально, используя при обработке экспериментальных данных решения простых гидродинамических задач, в которых вместо условия прилипания используется условие Навье с неизвестным заранее коэффициентом скольжения. Другой способ определения коэффициентов скольжения – решение гидродинамических задач обтекания элементов текстуры поверхности, содержащих захваченные пузырьки газа (задач микроуровня), при заданных граничных условиях на скорость сдвига потока вдали от поверхности с последующим осреднением решения по масштабу, превосходящему масштаб элементов текстуры.

Подход, основанный на использовании простых решений макроскопических задач с условиями скольжения, удобен для экспериментального определения коэффициентов скольжения поверхности. Так, для некоторых типов супергидрофобных поверхностей разработаны экспериментальные методики, позволяющие определять компоненты тензора скольжения по измерению перепада давления при протекании жидкости через узкий канал с супергидрофобными стенками или гидродинамической силы, действующей на частицу с супергидрофобной поверхностью, оседающую в вязкой жидкости. Однако, такой подход ограничен простейшими супергидрофобными поверхностями, для которых компоненты тензора скольжения постоянны. Для неоднородных супергидрофобных поверхностей, у которых интенсивность проскальзывания может зависеть от точки поверхности, имеющиеся экспериментальные методики не применимы. В литературе совсем немно-

го работ, в которых построены аналитические решения задач обтекания супергидрофобных поверхностей с условием проскальзывания. Для определения компонент тензора скольжения неоднородных супергидрофобных поверхностей требуется построение новых, достаточно простых решений задач о течениях вязкой жидкости вблизи поверхности с условием проскальзывания, легко воспроизводимых в эксперименте.

Как отмечалось выше, компоненты тензора скольжения неоднородных поверхностей могут быть определены и из решения микрогидродинамической задачи обтекания элементов текстуры при заданных профилях скорости вдали от поверхности. Следует отметить, что решение гидродинамической задачи на микроуровне позволяет (для заданной геометрии микротекстуры поверхности и режима течения) вычислить компоненты тензора скольжения один раз, а затем использовать их в эффективном условии проскальзывания в макротечениях, например, при изучении внешнего обтекания тел, покрытых супергидрофобными поверхностями. При решении задачи обтекания элементов микротекстуры возникают математические трудности, связанные с удовлетворением неоднородных (смешанных) граничных условий на границе области течения, состоящей из участков локального прилипания и межфазной границы с нулевым трением. Для периодических текстур с плоской межфазной границей (чередующиеся участки прилипания и проскальзывания) двумерная задача имеет аналитическое решение, а трехмерная задача может быть относительно просто решена известными численными методами. Однако, межфазная граница, как правило, имеет ненулевую кривизну, а ее края могут не совпадать с краями каверны – мениск может быть погружен внутрь каверны. Возникающая задача на микроуровне не поддается аналитическому решению, а ее численное исследование конечно-разностными методами осложняется наличием смешанных граничных условий на границе достаточно сложной формы. Поэтому до сих пор в литературе отсутствовал универсальный метод исследования течений вблизи супергидрофобной поверхности на микроуровне.

В настоящей работе предпринята попытка устранения перечисленных выше пробелов в исследовании гидродинамических свойств супергидрофобных поверхностей. Диссертация состоит из двух частей. В первой части строятся новые приближенные решения задач растекания тонких слоев вязкой жидкости по супергидрофобным поверхностям в поле силы тяжести с использованием условий эффективного проскальзывания. Исследовано влияние проскальзывания на динамику и форму пятна смачивания. Построенные решения могут быть использованы при экспериментальном определении коэффициентов скольжения, в том числе, и для неоднородных супергидрофобных поверхностей.

Вторая часть работы посвящена исследованию течений на микроуровне – рассмотрено двумерное стоксово обтекание периодической текстуры, состоящей из прямоугольных каверн с газовыми пузырьками. Предложен и реализован численный алгоритм, основанный на методе граничных интегральных уравнений, который впервые позволил исследовать наиболее общую ситуацию, когда межфазная граница имеет конечную кривизну, а ее края не совпадают с углами каверны (газовый пузырек лишь частично заполняет каверну).

Цели диссертационной работы состоят в создании и развитии математических моделей и методов определения числовых значений компонент тензора скольжения из решения макро- и микрогидродинамических задач о течении вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей. Для достижения указанных целей были поставлены и решены следующие задачи:

- Об автомоделных режимах нестационарного растекания тонкого слоя вязкой жидкости от локализованного источника вдоль горизонтальной неоднородной супергидрофобной поверхности в поле силы тяжести;
- Об установившемся стекании ручейка тяжелой вязкой жидкости по наклонной неоднородной супергидрофобной плоской поверхности;
- Об эволюции тонкого слоя вязкой жидкости на супергидрофобной

цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна направлению силы тяжести;

- О стоковом обтекании элементов периодической микротекстуры супергидрофобной поверхности (двумерных прямоугольных каверн, частично или полностью заполненных газовой фазой, и групп каверн).

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

- Построены и исследованы автомодельные задачи нестационарного растекания тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости от локализованного линейного и точечного источника на неоднородной горизонтальной супергидрофобной поверхности при степенном и экспоненциальном (по времени) законах массоподвода.

- Исследованы задачи о стекании а) ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной плоской поверхности и б) тонкого слоя вязкой жидкости с цилиндрической супергидрофобной поверхности, ось которой перпендикулярна направлению силы тяжести.

- Разработан численный алгоритм, основанный на методе граничных интегральных уравнений для стоковых течений в окрестности прямоугольной каверны, содержащей газовый пузырек.

- Впервые исследовано обтекание элемента периодической структуры супергидрофобной поверхности сдвиговым потоком в наиболее общей ситуации, когда края искривленной границы пузырька не совпадают с краями каверны. Проведено численное параметрическое исследование структуры течения в окрестности каверны и осредненного коэффициента скольжения для широкого диапазона определяющих параметров.

Практическая значимость полученных результатов. Изложенные в диссертации автомодельные решения для течений стоковой пленки с условиями проскальзывания и найденные закономерности поведения пятна смачивания могут быть использованы для экспериментального определения числовых значений компонент тензора скольжения промышлен-

ных неоднородных супергидрофобных поверхностей. Разработанный численный алгоритм и набор компьютерных программ, реализующих метод граничных интегральных уравнений для двумерных стоксовых течений вблизи искривленных границ со смешанными граничными условиями, могут быть использованы при производстве оптимальных промышленных супергидрофобных поверхностей, на которых достигается максимальное эффективное скольжение.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на следующих конференциях:

– Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, 2011-2015); Международный молодежный научный форум "Ломоносов" (Москва, 2012-2015); Конференция "Ломоносовские чтения" (МГУ, Москва, 2012-2014); Международная конференция "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность" (Звенигород, 2014); XVII школа-семинар, посвященная памяти академика Г.Г. Черного и 55-летию НИИ механики МГУ "Современные проблемы аэрогидродинамики" (Сочи, 2014); XX Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева (Звенигород, 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); XXXII Сибирский теплофизический семинар, посвященный 80-летию академика В.Е. Накорякова (Новосибирск, 2015).

За исследовательский проект "Создание и развитие новых гидродинамических моделей супергидрофобных поверхностей" автор был удостоен звания победителя во "Всероссийском конкурсе инновационных проектов "У.М.Н.И.К.–2014"; за работу "Течение вязкой жидкости над микрокаверной, заполненной газом" автор награжден дипломом 3-ей степени Конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ (2014); за результаты, изложенные в диссертации, и опубликованные работы автору присуждена стипендия Ректора МГУ имени М.В. Ломоносова для молодых

преподавателей и ученых, добившихся значительных результатов в преподавательской и научной деятельности (2014); за работу "Обтекание вязкой жидкостью периодической текстуры супергидрофобной поверхности" автор награжден дипломом 3-ей степени Конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ (2015).

Постановки задач и полученные результаты обсуждались и получили одобрение на специализированных научно-исследовательских семинарах: семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф. В.В. Измоденова, проф. В.Д. Котелкина, проф. К.В. Краснобаева, проф. В.Я. Шкадова (2015); семинаре лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ под руководством проф. А.Н. Осипцова (2012-2015); семинаре по механике сплошных сред НИИ механики МГУ под руководством акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. В.П. Карликова и члена-корр. РАН О.Э. Мельника (2015).

Публикации. Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 18 печатных работах, из них 3 в журналах из списка ВАК [97, 107, 133], 3 в трудах российских конференций [92, 113, 130] и 12 тезисах докладов.

Личный вклад автора и достоверность результатов. Автор принимал непосредственное участие в формулировке постановок задач, обсуждении полученных результатов и написании научных статей. Автором разработаны оригинальные численные алгоритмы для решения сформулированных задач математической физики на ЭВМ и проведены численные расчеты, выполнена обработка полученных результатов и подготовлен графический материал, представленный в диссертации. Автор лично представлял полученные результаты на научных конференциях. Достоверность результатов обеспечена использованием апробированных математических моделей классической гидродинамики, контролем точности используемых численных методов и сравнением полученных численных результатов с имеющимися литературными данными других авторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, двух глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации – 118 стр.

В **первой главе** рассмотрены задачи о растекании тонкого слоя вязкой жидкости вдоль горизонтальной, наклонной и цилиндрической супергидрофобных поверхностей с заданным условием эффективного проскальзывания Навье (Базанта-Виноградовой) на поверхности. Описаны возможные автомодельные режимы растекания жидкости вдоль неоднородной супергидрофобной поверхности. Проведено исследование формообразования поперечного сечения ручейка вязкой жидкости, образующейся при установившемся стекании ручейка по наклонной супергидрофобной поверхности. Получены автомодельные законы движения переднего фронта и формы пятна смачивания на различных супергидрофобных поверхностях. Проведено исследование процесса стекания тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости с цилиндрической супергидрофобной поверхности, ось которой перпендикулярна направлению силы тяжести.

Во **второй главе** методом граничных интегральных уравнений в двумерной постановке решена задача о медленном установившемся течении вязкой жидкости над периодической текстурой супергидрофобной поверхности, содержащей газовые пузырьки с прямой и искривленной межфазной границей. Рассмотрены течение в тонком канале с супергидрофобной стенкой при заданном перепаде давления и обтекание текстуры поверхности сдвиговым потоком. Проведено численное параметрическое исследование зависимости величины эффективного скольжения от определяющих геометрических параметров задачи: доли газового участка, толщины канала, формы и положения межфазной границы относительно стенок микрокаверн. Проведено моделирование обтекания сдвиговым потоком системы микрокаверн, заполненных газом.

Обзор литературы

В последнее десятилетие в литературе наблюдается резкий подъем интереса к супергидрофобным поверхностям [1], обладающим свойствами самоочищающегося листа лотоса (рис. 1), вдоль которого капли жидкости скатываются, испытывая минимальное сопротивление трения [2]. Как пра-



Рис. 1. Капля жидкости на листе лотоса

вило, свойство супергидрофобности достигается за счет сочетания химической гидрофобности и механического текстурирования поверхности. Под текстурированием имеется в виду создание поверхностной шероховатости в виде микролунок либо микровыступов (размерами в единицы и десятки микрон), внутри или между которыми находятся стабильные микропузырьки воздуха. Такое состояние гидрофобной поверхности в литературе принято называть состоянием Касси [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Статические углы смачивания на супергидрофобной поверхности достигают ста двадцати и более градусов, а при течении жидкости вдоль такой поверхности имеет место заметное макроскопическое проскальзывание. Имеются данные о синтетических супергидрофобных поверхностях, на которых статические углы смачивания достигают ста восьмидесяти градусов [10, 11].

Свойство проскальзывания на супергидрофобных поверхностях обусловлено тем, что жидкость, движущаяся вдоль супергидрофобной поверхности, на микроуровне контактирует как с участками твердой поверхности (на которых реализуется условие прилипания), так и с поверхностями пузырьков, на которых трение практически отсутствует. Снижение трения, например, способствует тому, что поверхность капли, лежащей на супергидрофобной поверхности, под действием поверхностного натяжения принимает почти идеально-сферическую форму (рис. 2).

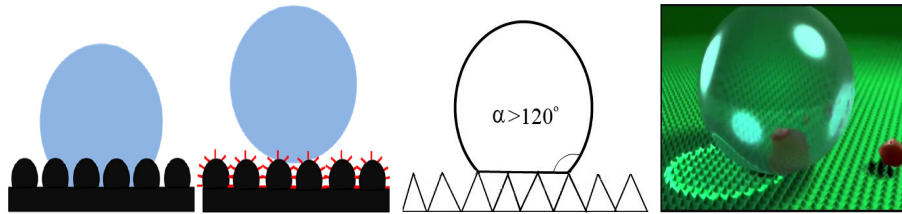


Рис. 2. Состояние Касси на супергидрофобной поверхности

Граничное условие проскальзывания на твердой стенке для вязкой жидкости было предложено Навье еще в 1823 году [12]

$$u_0^* = b^* \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|,$$

где b^* – длина скольжения (рис. 3). В условии Навье скорость проскальзывания u_0^* пропорциональна скорости сдвига (или касательному напряжению) на стенке со стороны жидкости.

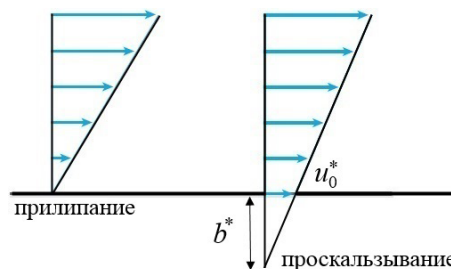


Рис. 3. Схема проскальзывания на межфазной границе

Для газа, движущегося вдоль твердой поверхности, длину скольжения в 1879 году впервые вычислил Максвелл [13] и показал, что b^* по порядку

величины совпадает с длиной свободного пробега молекул газа. Практически для всех макроскопических течений жидкостей и газов вдоль обычных поверхностей длина скольжения имеет порядок нанометров, поэтому при континуальном описании среды проскальзывание можно не учитывать и использовать условие прилипания. Однако, в течениях разреженных газов либо при течениях в микроканалах (когда длина свободного пробега молекулы сопоставима с характерным линейным размером задачи) проскальзывание потока на твердой стенке следует учитывать. В [14] показано, что для разреженных газов или течения вязкой среды в устройствах микрофлюидики, когда числа Кнудсена достигают всего лишь десятых долей единицы, проскальзывание уже становится заметным.

В некоторых ситуациях требуется локальный учет проскальзывания, например, для течений жидкости с подвижной свободной границей и условием прилипания существует неинтегрируемая особенность на линии контакта жидкости с твердой стенкой. Такие особенности возникают, например, при исследовании растекания капли в поле силы тяжести вдоль подложки или при моделировании процесса выдавливания полимеров из тонких капилляров. Использование условия прилипания для описания динамики таких явлений приводит к нефизичным результатам с неинтегрируемой особенностью трения на переднем фронте [15, 16, 17]. Учет локального проскальзывания даже в таких макроскопических течениях позволяет устранить возникающую сингулярность [18].

Активное использование нанотехнологий при производстве текстурированных поверхностей и внедрение в практику устройств микрофлюидики способствовало созданию супергидрофобных поверхностей, на которых длина скольжения b^* достигает макроскопических значений при практически нулевых числах Кнудсена.

Дизайн супергидрофобных поверхностей с гетерогенной текстурой, на которых длина скольжения достигает нескольких десятых миллиметра, и исследование обтекания вязкой жидкостью таких поверхностей привело к

формулировке обобщенного граничного условия Навье. Для осредненного описания течений вдоль таких поверхностей в работе [19] было предложено обобщенное граничное условие Навье в тензорном виде (в западной литературе оно называется условием Базанта-Виноградовой), которое в размерных переменных записывается в виде:

$$u_{\tau i}^*|_w = b_{ij}^* \frac{\partial u_{\tau j}^*}{\partial n^*}|_w, \quad (i, j = 1, 2).$$

Здесь граничное условие записано в локальном ортонормированном базисе, связанном с рассматриваемой точкой супергидрофобной поверхности, $u_{\tau j}^*$ ($j = 1, 2$) – проекции вектора скорости жидкости на направления базисных векторов, лежащих в плоскости поверхности, а направление нормали к поверхности n^* совпадает с направлением третьего базисного вектора; $u_{\tau i}^*|_w$ – компоненты осредненной касательной скорости жидкости на подстилающей супергидрофобной поверхности, индекс w относится к значениям величин на стенке. Коэффициенты пропорциональности b_{ij}^* , называемые компонентами тензора скольжения (коэффициенты скольжения), имеют размерность длины. Они характеризуют эффективные локальные свойства супергидрофобных поверхностей. В общем случае неоднородной супергидрофобной поверхности компоненты тензора скольжения – функции точки поверхности [97, 107]. Данное условие выражает естественное условие линейной пропорциональности вектора осредненной скорости скольжения на стенке вектору осредненных касательных напряжений, а линейность следует из линейности уравнений жидкости на микромасштабе (уравнений Стокса). В подавляющем большинстве исследований, в которых используется модель эффективного проскальзывания в указанном виде, принимается, что тензор скольжения имеет два главных ортогональных направления. Такое предположение для многих применяемых на практике супергидрофобных поверхностей подтверждено экспериментально. Для обычных поверхностей с условием прилипания тензор скольжения нулевой.

Для супергидрофобных поверхностей диагональные компоненты дан-

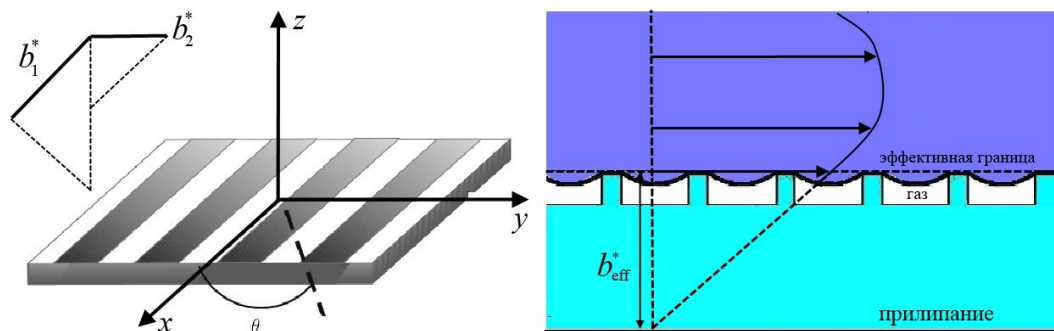


Рис. 4. Схема проскальзывания на супергидрофобной поверхности

ного тензора после приведения к главным осям показывают расстояние внутри твердой поверхности, на которое необходимо мысленно опустить границу раздела фаз, чтобы получить нулевую скорость жидкости (рис. 4). Главные оси тензора указывают направления вдоль супергидрофобной поверхности, соответствующие наибольшему и наименьшему проскальзываниям вдоль поверхности в данной точке.

Рост практического интереса к исследованию гидродинамических свойств супергидрофобных поверхностей связан как с быстрым развитием нанотехнологий [5, 9], позволяющих создавать требуемые микронеоднородности поверхности (рис. 5), так и с расширением области применения микрогидродинамических устройств.

Макроскопическое проскальзывание на супергидрофобных поверхностях увеличивает массоперенос вдоль поверхности и создает эффект самоочищения (рис. 6) – уже при малых углах наклона капли жидкости скатываются по супергидрофобной поверхности, унося частицы загрязнения с поверхности [20, 21]. Особенно перспективным представляется применение самоочищающихся супергидрофобных поверхностей для предотвращения обледенения несущих частей конструкций [22, 23]. В литературе активно обсуждаются возможности использования супергидрофобных материалов в строительстве (покрытия мостов, электропроводов, зданий и пр.), нефтедобывающей промышленности (внутреннее покрытие трубопроводов) и даже в авиации и судостроении. Такие проекты связаны с появлением об-

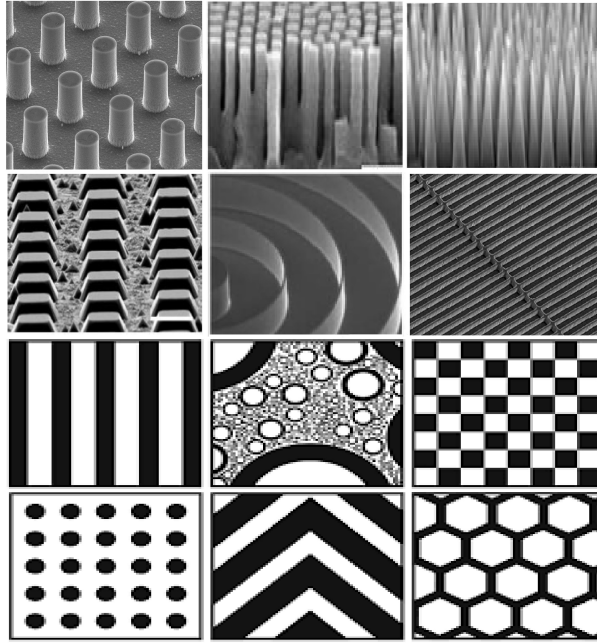


Рис. 5. Микротекстура супергидрофобной поверхности, образованная "лесом нанотрубок".

надеживающих результатов по использованию супергидрофобных поверхностей для снижения сопротивления трения не только в медленных капиллярных течениях, но и в турбулентных режимах течения [24, 25, 26]. В химических технологиях супергидрофобные поверхности также применяются для снижения сопротивления, увеличения массопереноса и интенсивности перемешивания реагентов в устройствах микрофлюидики, в которых эффект проскальзывания наиболее заметен [27]. Как уже отмечалось выше, к настоящему времени разработаны технологии создания супергидрофобных поверхностей, у которых значения коэффициентов b_{ij}^* достигают величин в доли миллиметров [28].

Для наиболее эффективного использования супергидрофобной поверхности необходимо уметь вычислять числовые значения компонент тензора скольжения и находить функциональную связь между величиной проскальзывания и силой сопротивления трения, действующей на поверхность со стороны жидкости. Можно выделить два основных подхода, используемых для теоретического определения компонент тензора скольжения. Пер-

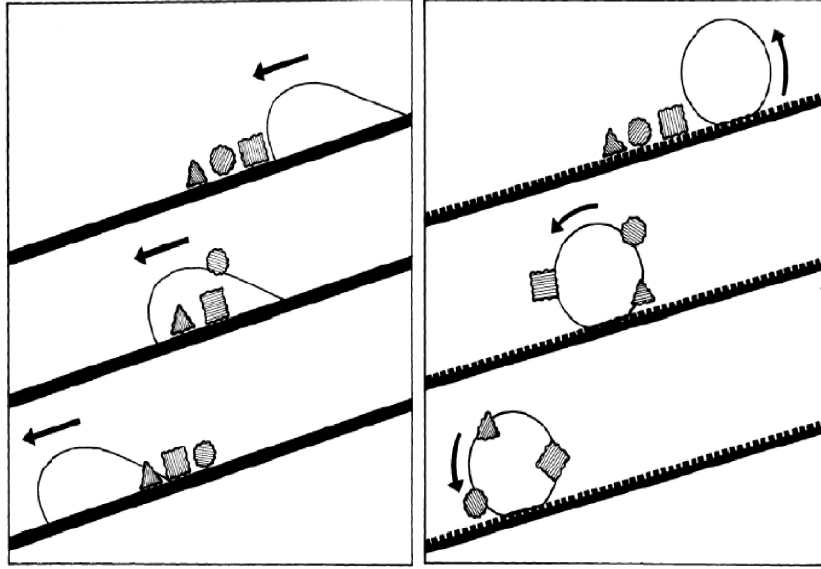


Рис. 6. Самоочистка на супергидрофобной поверхности

вый основывается на осреднении локального поля скорости над текстурой супергидрофобной поверхности и вычисления коэффициента эффективного скольжения из локального условия проскальзывания на стенке

$$\langle u_w^* \rangle = b_{\text{eff}}^* \left\langle \left(\frac{\partial u^*}{\partial n^*} \right)_w \right\rangle,$$

в котором $\langle \rangle$ обозначает осреднение по длине текстуры. Другими словами, параметры эффективного скольжения находятся из решения микрогидродинамической задачи об обтекании вязкой жидкостью с заданным профилем скорости элементов текстуры супергидрофобной поверхности, состоящей из участков твердой стенки (с локальным условием прилипания) и каверны, содержащей газовый пузырек с устойчивой межфазной поверхностью. Второй подход – это решение макроскопической задачи о течении вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности с условием проскальзывания Навье при некоторых неизвестных заранее значениях компонент тензора скольжения. Из решения указанной макроскопической задачи находится функциональная связь между коэффициентом эффективного трения и тензором скольжения. Математическая модель, использованная при решении макроскопической задачи, может указать супергидрофобные поверхности, характеризующиеся рассматриваемым тензо-

ром скольжения, для которых применима предложенная модель. В обзоре [29] подробно описаны экспериментальные методики, основанные на решении различных макроскопических задач о течении вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей и используемые для определения эффективных характеристик таких поверхностей.

Вероятно, одной из пионерских работ, посвященных теоретическому исследованию влияния эффективного макроскопического гидрофобного проскальзывания на снижение механического сопротивления, по праву считается работа [30], в которой в приближении смазочного слоя решена задача о вытеснении вязкой жидкости из зазора между двумя сближающимися сферами произвольного радиуса. В этой работе рассматривалась осесимметричная постановка задачи с граничным условием Навье на поверхности обеих сфер для продольной компоненты скорости. Решение для скорости и давления получено для широкого диапазона значений длин скольжения и радиусов сфер. Результатом решения стал вычисленный поправочный множитель к силе сопротивления, действующей на сферы, зависящий от толщины зазора и длин скольжения на сферических поверхностях. Проведено параметрическое исследование зависимости силы сопротивления как функции отношения величины проскальзывания к толщине зазора между сферами и отношения длин скольжения на сферах. Дальнейшее теоретическое изучение снижения сопротивления трения при течении вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности было выполнено в работах [31, 32]. В [31] решена задача о приближении круглого гидрофильного диска (с условием прилипания) к супергидрофобной поверхности в вязкой жидкости. В проведенном исследовании условие эффективного проскальзывания Навье на супергидрофобной поверхности для двух компонент скорости задавалось в тензорном виде, при этом ненулевыми компонентами тензора длины скольжения были лишь его диагональные элементы. Такое предположение позволило получить аналитическое решение задачи: вычислить поле скорости и распределение давления, действующего на диск, как функцию диаго-

нальных компонент тензора скольжения и толщины зазора между диском и супергидрофобной поверхностью. Затем была вычислена сила, действующая на диск со стороны жидкости, и найден поправочный множитель к силе сопротивления Рейнольдса; проведено параметрическое исследование величины силы сопротивления от геометрических параметров задачи. В результате было установлено, что уменьшение силы сопротивления наиболее заметно в случае, когда зазор мал по сравнению с длинами скольжения. В работе [32] рассмотрено медленное оседание сферической частицы в вязкой жидкости в ситуации, когда нижняя стенка – супергидрофобная с заданным условием эффективного проскальзывания Навье в тензорной форме. В этой работе предполагалось, что супергидрофобная поверхность имеет заданную периодическую текстуру с чередующимися участками прилипания и проскальзывания. Вычислено распределение давления на поверхности частицы и найдена поправка к силе сопротивления Тэйлора, действующей на сферическую частицу; проведено параметрическое исследование силы сопротивления от значений компонент тензора скольжения, геометрии текстуры супергидрофобной поверхности и толщины зазора между супергидрофобной поверхностью и сферой. Показано, что уменьшение силы сопротивления наиболее заметно для небольших значений ширины зазора между сферой и супергидрофобной поверхностью, при этом величина уменьшения сопротивления зависит от доли газового участка и длин скольжения. В указанных работах показано, что наличие эффективного проскальзывания на обтекаемой супергидрофобной поверхности приводит к уменьшению силы сопротивления, действующей со стороны вязкой жидкости на твердую поверхность. Полученные выражения для сил сопротивления зависят от компонент тензора скольжения, поэтому по измеренной в эксперименте гидродинамической силе, действующей на осаждающуюся частицу или диск, определяют тензор скольжения изучаемой супергидрофобной поверхности. Однако такой метод определения компонент тензора скольжения, в основном, используется для однородных периодических су-

пергидрофобных поверхностей, у которых b_{ij}^* – константы.

Супергидрофобные поверхности активно применяются в устройствах микрофлюидики ("лаборатория на чипе"), состоящих из очень тонких каналов, поэтому проводятся экспериментальные и теоретические исследования протекания жидкости через каналы разного сечения с супергидрофобными стенками. Известно, что для прокачки жидкости через канал толщины H с заданным расходом необходимо организовать перепад давления порядка H^{-4} . В устройствах микрофлюидики используются каналы микронной ширины, поэтому необходимо прилагать большие перепады давления. Использование супергидрофобных поверхностей с эффективным проскальзыванием в таких системах позволяет преодолевать гидродинамические сопротивления и увеличивать массоперенос при тех же энергетических затратах. В работах [33–36] экспериментально продемонстрировано снижение трения при ламинарных режимах течения жидкости с заданным перепадом давления через узкий канал с супергидрофобными стенками. В этих работах использовались каналы разной толщины с супергидрофобными стенками, имеющими периодическую текстуру из столбиков или полосок, и изучалось влияние топологии текстуры на динамику течения жидкости через каналы. В проведенных экспериментах для некоторых текстур было достигнуто снижение прилагаемого градиента давления до 40% на поверхностях с длинами скольжения, не превышающими нескольких десятков микрометров; при этом $Kn \ll 1$, то есть, измеренные значения длин скольжения не зависели от эффектов межмолекулярного взаимодействия. После обработки экспериментальных данных, полученных в проведенных исследованиях, было установлено, что эффективное проскальзывание монотонно возрастает при увеличении доли газового участка или уменьшении толщины канала. В работе [37] эффективное условие проскальзывания Навье для продольной компоненты скорости с заданным значением коэффициента скольжения использовано в задаче о ламинарном течении вязкой жидкости в канале с супергидрофобными стенками при заданном перепаде

давления. Получена аналитическая формула для профиля продольной скорости в сечении канала, вычислен расход через поперечное сечение. Показано, что даже при относительно малых значениях коэффициента скольжения на супергидрофобных поверхностях, образующих стенки канала, расход через поперечное сечение может увеличиться на десятки процентов по сравнению с течением жидкости в канале с обычными стенками при том же перепаде давления. В проведенных исследованиях [33–37] также указано, что увеличение массопереноса и снижение сопротивления в каналах с супергидрофобными стенками становится заметным, если масштаб длины b^* скольжения сопоставим с характерной толщиной канала H . Например, для плоского канала с прямыми стенками, у которого нижняя стенка – супергидрофобная с заданным эффективным условием проскальзывания Навье, скорость и расход имеют вид:

$$u^* = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \left(\frac{y^{*2}}{2} - \frac{H^2 y^*}{2(H + b^*)} - \frac{H^2 b^*}{2(H + b^*)} \right),$$

$$Q^* = \frac{H^3}{12\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) \left[1 + \frac{3b^*}{H + b^*} \right].$$

Отсюда следует эффективное увеличение средней скорости и расхода жидкости.

Так как одним из потенциальных применений супергидрофобных поверхностей является снижение сопротивления трения, действующего на макроскопическое тело, обтекаемое вязкой жидкостью, проводятся теоретические и экспериментальные исследования таких течений. В силу трудностей, возникающих при создании супергидрофобных поверхностей сложной формы, такие исследования ограничиваются простейшими телами.

В литературе имеется ряд работ, посвященных изучению обтекания вязкой жидкостью супергидрофобного кругового цилиндра и влияния создаваемого эффективного проскальзывания на структуру потока за цилиндром [38–41]. В [38] на основе решения уравнений Навье-Стокса проведено численное моделирование обтекания супергидрофобного цилиндра, ориен-

тированного поперек потока, при числах Рейнольдса 300 и 3900. В этой работе рассматривался цилиндр с текстурой поверхности, состоящей из чередующихся участков прилипания и проскальзывания, имеющих форму полосок, а также была рассмотрена цилиндрическая поверхность без участков прилипания. На участках пониженного трения задавалось эффективное условие проскальзывания Навье с фиксированным числовым значением коэффициента скольжения. Ширина полос, образующих текстуру, варьировалась от 0.5 до 2 характерных длин волны в следе за цилиндром. Проведенные расчеты для различных типов поверхностей показали, что текстура поверхности и проскальзывание по-разному влияют на характер обтекания цилиндра при различных режимах течения. Например, для $Re = 300$ супергидрофобные поверхности с чередующимися участками проскальзывания и прилипания, равными длине волны за цилиндром, приводят к наибольшему усилению флуктуаций скорости за цилиндром и развитию вихревых структур. Положение точки отрыва и величина полного сопротивления, действующего на цилиндр со стороны жидкости, для данного значения числа Рейнольдса слабо зависят от текстуры супергидрофобной поверхности и практически не отличаются от результатов для обычного цилиндра. Для $Re = 3900$ показано, что структура течения за цилиндром решающим образом определяется текстурой супергидрофобной поверхности, покрывающей цилиндр. Так, увеличение гидрофобности поверхности (доли области с проскальзыванием) приводит к сдвигу точки отрыва вверх по поверхности цилиндра, что приводит к значительному уменьшению полного сопротивления. Проведенные в [38] расчеты показали, что текстурированные супергидрофобные поверхности могут быть использованы для управления потоком при различных режимах обтекания тел вязкой жидкостью. В [39] проведено прямое численное моделирование двумерного обтекания цилиндра при различных значениях числа Рейнольдса и исследовано влияние заданного условия проскальзывания на динамику вихревого следа, образующегося за цилиндром. Численно бы-

ло показано, что проскальзывание на цилиндре значительно задерживает образование зоны возвратного течения и вихрей, приводит к уменьшению полного сопротивления и подъемной силы. Установлено, что интенсивность влияния проскальзывания на структуру вихревой области за цилиндром зависит от значения числа Рейнольдса. В проведенном исследовании также предложена методика для возможного определения числового значения коэффициента скольжения на супергидрофобной поверхности, покрывающей цилиндр, по вихревой картине за цилиндром. В работе [40] выполнено экспериментальное исследование влияния эффективного скольжения, создаваемого супергидрофобной горизонтальной цилиндрической поверхностью, на структуру течения в следе за телом. Рассматривались супергидрофобные поверхности с текстурой из столбиков, а также из полосок, ориентированных вдоль и поперек образующей цилиндра. Проведенные экспериментальные наблюдения и измерения при различных режимах обтекания показали, что имеются существенные различия в образовании и структуре вихревого следа, а также положения точек отрыва на супергидрофобных цилиндрах по сравнению с обычным цилиндром с гладкой поверхностью. Показано, что топология текстуры супергидрофобной поверхности оказывает заметное влияние на характеристики обтекания. Установлено, что на супергидрофобных цилиндрах отрыв потока и образования области возвратного течения происходят при больших числах Рейнольдса, чем на обычном цилиндре. Высказано предположение о том, что при некоторых режимах течения текстура поверхности может оказывать негативное влияние на характеристики обтекания в сравнении с обычным цилиндром с гладкой поверхностью. Таким образом, в [40] экспериментально показана возможность управления обтеканием вязкой жидкостью тела, покрытого текстурированной супергидрофобной поверхностью.

При производстве и практическом применении супергидрофобных поверхностей возникает необходимость прогнозировать, как влияет неоднородность микроструктуры поверхности на ее гидродинамические свойства.

Необходимо знать, как влияет на величину осредненного проскальзывания форма стенок микрокаверны и межфазной границы, положение межфазной поверхности относительно границ каверны, доля газового участка – это требует развития соответствующих математических моделей. Таким образом, возникает целый класс гидродинамических задач о течении вязкой жидкости над микрокавернами различной формы, частично или полностью заполненными газом. Цель решения таких задач – оптимизация текстуры супергидрофобной поверхности для обеспечения максимального осредненного проскальзывания жидкости и снижения сопротивления трения при условии устойчивого удержания пузырька газа в микрокаверне. Достижение этой цели – сложная многопараметрическая задача. На сегодняшний день опубликовано значительное число работ, посвященных различным подходам к определению эффективного скольжения на супергидрофобных поверхностях из решения задачи о течении вязкой жидкости в окрестности текстуры горизонтальной периодической супергидрофобной поверхности.

В основном в литературе рассматриваются задачи о течении вязкой жидкости через узкий канал с супергидрофобными стенками при заданном перепаде давления и обтекание текстуры супергидрофобной поверхности сдвиговым потоком. В абсолютном большинстве таких работ наличие микрокаверн с газовыми пузырьками моделируется участками зон нулевого либо пониженного касательного трения, при этом кривизной межфазной поверхности, как правило, пренебрегается. Рассматриваются, в основном, супергидрофобные поверхности, имеющие периодическую полосчатую структуру [42–59]. Так как характерные линейные размеры неоднородности текстуры супергидрофобной поверхности имеют порядок $10^{-4} - 10^{-2}$ см, течение жидкости на микромасштабе можно описать уравнениями Стокса, решение для которых, чаще всего, ищется в виде суперпозиции основного решения, соответствующего параболическому или сдвиговому профилю скорости, и добавка, обусловленного наличием межфазной поверхности.

Решение для добавка строится в виде рядов Фурье с условием периодичности для скорости, прилипания на твердых участках и локального проскальзывания на межфазной поверхности. Затем с использованием найденного решения вычисляются значения компонент тензора скольжения, входящие в эффективное граничное условие проскальзывания Навье. В указанных выше работах для периодической текстуры поверхности вычислены два главных значения тензора скольжения $b_{\parallel}^*$ и $b_{\perp}^*$, соответствующие течениям вдоль и перпендикулярно текстуре. Коэффициенты скольжения найдены как функции геометрических параметров задачи: отношения линейного размера каверны к толщине канала и доли газового участка. Получены асимптотические выражения для эффективного скольжения при малых и больших значениях доли поверхности, занятой кавернами, а также толщин канала. Найдена математическая связь между двумя главными значениями тензора скольжения (для продольного и поперечного обтекания полосок периодической полосчатой супергидрофобной поверхности с плоской межфазной границей):

$$b_{\parallel}^* = 2b_{\perp}^*.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы определить эффективные характеристики такой поверхности достаточно для заданного режима течения и доли газового участка вычислить только одно главное значение. Полученные в указанных работах зависимости эффективного скольжения от геометрических параметров задачи качественно совпадают с результатами экспериментов [33–36]. В работе [59] рассматривается стоксово обтекание поверхности, покрытой лесом микростолбиков, пространство между которыми занято газовой фазой, при этом условие прилипания на вершине столбика заменяется воздействием сосредоточенной касательной силы. В [60] рассмотрено обтекание периодической системы прямоугольных каверн, на дне которых жидкость проскальзывает, и показано, что с увеличением глубины каверны эффективная скорость скольжения жидкости над системой

каверн заметно снижается.

В работе [61] вычисление коэффициента эффективного скольжения выполнено на основе моделирования трехмерного течения вязкой жидкости в окрестности супергидрофобной поверхности с использованием полных уравнений Навье-Стокса при значениях числа Рейнольдса от 0 до 1000. Рассмотрено течение в тонком канале, нижняя стенка которого образована поверхностью с периодической полосчатой текстурой и текстурой в виде столбиков; кривизна межфазной поверхности не учитывалась. На твердых участках задавалось условие прилипания, а на межфазной границе условия непротекания и отсутствия касательных напряжений. Коэффициент скольжения вычислялся через расход жидкости и перепад давления в канале. В работе проведено параметрическое исследование величины проскальзывания от доли газовой области, ширины канала и числа Рейнольдса. Показано, что величина эффективного скольжения для одного и того же режима течения зависит не только от суммарной доли газовой области, но и от геометрии неоднородности, образующей текстуру супергидрофобной поверхности. Установлено, что при обтекании вязкой жидкостью столбиков и поперечных полос при больших числах Рейнольдса происходит заметное уменьшение эффективного скольжения, по сравнению с другими топологиями неоднородности. Однако для текстуры, составленной из продольных полос, эффективная длина скольжения слабо изменяется при варьировании числа Рейнольдса. Показано, что наибольшее проскальзывание соответствует текстуре из продольных полос. Найдены режимы течения, характеризующиеся одним числом Рейнольдса, когда значения эффективной длины скольжения, вычисленные для разных суммарных долей газовой области или топологий текстур, могут совпадать.

Исследованию влияния кривизны межфазной поверхности (наличия мениска) при обтекании каверны, содержащей пузырек газа, посвящено совсем немного исследований, хотя имеются экспериментальные подтверждения существенного влияния эффектов, связанных с конечной кривизной

поверхности пузырьков, на эффективное проскальзывание жидкости и коэффициенты трения супергидрофобных поверхностей. Так, в экспериментах [62] показано, что для некоторых текстур супергидрофобной поверхности (в частности, для квадратной решетки каверн с закругленными краями) имеет место не снижение, а увеличение эффективного трения. Ослабление эффективного проскальзывания из-за кривизны межфазной поверхности при течении вдоль супергидрофобной поверхности с продольными канавками отмечено также в экспериментах [63, 64]. Теоретическому исследованию роли кривизны межфазной поверхности посвящены работы [65–68], в которых рассмотрена ситуация, когда края межфазной поверхности совпадают с краями каверны, и построены приближенные аналитические решения для задачи продольного и поперечного обтекания сдвиговым потоком разреженной периодической системы двумерных каверн с пузырьками газа, поверхность которых имеет форму сегмента окружности. В этих постановках малым параметром считается доля поверхности, занятая межфазной границей. Наиболее интересным результатом является то, что существует критический угол между твердой стенкой и поверхностью пузырька, выступающего в жидкость, при превышении которого эффективное проскальзывание исчезает и сменяется увеличением трения.

Несмотря на значительное количество опубликованных работ, посвященных проблемам обтекания супергидрофобных поверхностей, до сих пор не было предложено универсального подхода, позволяющего провести детальное параметрическое исследование течения на микроуровне для произвольных каверн, форм межфазной поверхности и ее положений относительно границ каверны. Основная сложность состоит в том, что для определения эффективного скольжения необходимо вычислять поле скорости над элементом текстуры поверхности (имеющим криволинейные границы, на которых выполнены смешанные граничные условия), а затем проводить осреднение по периоду текстуры. Даже для двумерных каверн с прямой межфазной границей определение поля скорости требует трудоемких вы-

числений [61]. При этом использование конечно-разностных методов приводит к известным трудностям, связанным как с дискретизацией уравнений в сложной области (если межфазная граница не прямая линия), так и с разрешением неоднородных граничных условий на составной границе, содержащей участки скольжения и прилипания жидкости.

Кроме того, создание новых типов супергидрофобных поверхностей с неоднородной текстурой поверхности требует, помимо разработки численных методов для предсказания осредненного скольжения, построения новых, достаточно простых решений для легко реализуемых в эксперименте течений, на основе которых возможно совместно с экспериментальными измерениями определять компоненты тензора скольжения без детального изучения локального поля скорости в окрестности текстуры.

Устранению указанных пробелов в исследовании течений вблизи супергидрофобных поверхностей и посвящена настоящая диссертация.

Полученные в диссертации результаты, новые решения гидродинамических задач о течении вязкой жидкости вдоль различных типов супергидрофобных поверхностей, разработанные математические модели и методы расчета важны для фундаментального понимания явления супергидрофобного скольжения, установления связи между величиной проскальзывания на супергидрофобной поверхности и сопротивлением трения, а также для экспериментального определения компонент тензора скольжения и оптимизации текстуры промышленных супергидрофобных поверхностей.

Глава 1

Течение тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности

Помимо перечисленных в обзоре литературы макроскопических гидродинамических задач о течении вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей, решения которых уже используются для экспериментального определения компонент тензора скольжения, еще одним полезным классом течений может быть рассмотрение задач медленного растекания тонкого слоя тяжелой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей различной геометрии: горизонтальной, наклонной или искривленной. Такие течения жидкости достаточно просто реализовать в эксперименте и измерить закон движения переднего фронта пленки, растекающейся вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности, или определить форму пятна смачивания на наклонной супергидрофобной поверхности, а затем на основе сопоставления экспериментальных результатов с расчетами по соответствующей математической модели определить параметры скольжения изучаемой супергидрофобной поверхности. Задачи о растекании тонких стоксовых пленок от локализованных источников в поле силы тяжести по обычным поверхностям (с условием прилипания) имеют известные классы автомоделных решений. При переходе от обычных (с условием прилипания) к супергидрофобным поверхностям в постановке задачи появляется дополнительный параметр, имеющий размерность длины (характерная длина сколь-

жения), что делает проблематичным существование автомодельных решений. Тем не менее, как будет показано ниже, удастся построить некоторые классы автомодельных решений как в задаче о нестационарном растекании стоксовой пленки по горизонтальной супергидрофобной поверхности от заданного источника, так и в задаче о стационарном стекании ручейка жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности с тензором скольжения, специальным образом зависящим от пространственных координат.

Результаты моделирования стекания тонкого слоя жидкости в поле силы тяжести по цилиндрической супергидрофобной поверхности могут быть применены в исследованиях, связанных с изучением свойств самоочищения супергидрофобных поверхностей, необходимых для предотвращения обледенения элементов конструкций и линий электропередач.

1.1 Автомодельные режимы растекания тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей

Рассмотрим нестационарное изотермическое растекание тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости вдоль горизонтальной твердой супергидрофобной поверхности в поле силы тяжести (рис. 1.1). Линейные масштабы течения намного превосходят масштаб микронеоднородности поверхности, поэтому поверхность считается плоской с заданным условием проскальзывания Навье. Предполагается, что масса жидкости непрерывно подводится в слой из локализованного источника, размеры которого пренебрежимо малы. В дальнейшем рассматривается точечный или линейный источник с заданной объемной мощностью, что позволяет считать известным объем жидкости в пленке в каждый момент времени $Q^*(t^*)$ (в случае линейного источника имеется в виду объем, приходящийся на единицу длины по размаху). Для описания течения жидкости вводится декартова (x^*, y^*, z^*)

или цилиндрическая (x^*, φ^*, z^*) системы координат с началом в источнике массоподвода так, чтобы продольная координата x^* была направлена вдоль подстилающей поверхности от источника, а ось z^* – по нормали к ней. Сила тяжести направлена вниз перпендикулярно подстилающей поверхности.

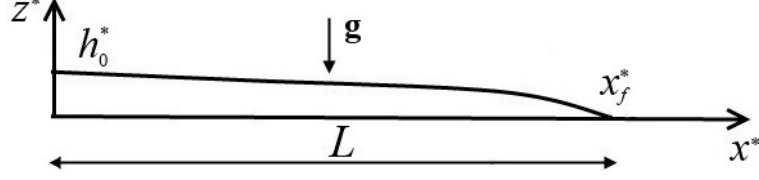


Рис. 1.1: Схема течения и система координат

Рассматриваются супергидрофобные поверхности с двумя ортогональными главными направлениями тензора скольжения, что соответствует, например, линейчатой структуре микронеоднородности поверхности. Ось x^* направим вдоль одного из главных направлений тензора b_{ij}^* , и будем исследовать растекание пленки в направлении оси x^* .

Компоненты скорости жидкости в слое в дальнейшем обозначаются следующим образом: $v_x^* = u^*$, $v_z^* = w^*$. Третья компонента скорости $v_y^* = v^*$ (v_φ^*) в плоском или осесимметричном течении равна нулю. Течение вязкой жидкости описывается уравнениями неразрывности и Навье-Стокса

$$\frac{\partial u^* x^{*j}}{\partial x^*} + \frac{\partial w^* x^{*j}}{\partial z^*} = 0,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + j \left(\frac{1}{x^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{u^*}{x^{*2}} \right) \right),$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} + j \frac{1}{x^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) - g,$$

в которых $j = 0$ соответствует линейному источнику, $j = 1$ – точечному источнику. Введем набор безразмерных переменных

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{h_0^*}, \quad u = \frac{u^*}{U}, \quad w = \frac{w^*}{\varepsilon U}, \quad t = t^* \frac{U}{L}, \quad p = p^* \frac{\varepsilon^2 Re}{\rho^* U^2}, \quad \varepsilon = \frac{h_0^*}{L}.$$

Здесь p^* – давление, ρ^* – плотность, $Re = UL/\nu^*$ – число Рейнольдса, ν^* – кинематическая вязкость жидкости, h_0^* – характерная толщина пленки,

L – заданный характерный продольный масштаб, на котором рассматривается растекание пленки, и U – характерный масштаб продольной компоненты скорости в пленке, смысл которого будет пояснен ниже. Относительная толщина пленки ε предполагается малой величиной, то есть $\varepsilon = h_0^*/L \ll 1$. Масштаб давления выбирается из условия сохранения члена, содержащего продольный градиент давления в уравнении импульса в направлении оси x^* .

В безразмерной форме уравнения неразрывности и Навье-Стокса записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u x^j}{\partial x} + \frac{\partial w x^j}{\partial z} &= 0, \\ \varepsilon^2 \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j \varepsilon^2 \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2} \right), \\ \varepsilon^4 \text{Re} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + j \varepsilon^4 \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon^3 \text{Re}}{\text{Fr}^2}, \end{aligned}$$

где $\text{Fr} = (U^2/gL)^{1/2}$, g – ускорение силы тяжести.

Удобно выразить масштабы толщины и продольной скорости пленки через заданные продольный масштаб течения L и характерный объем жидкости Q_0^* , поступивший в пленку к моменту, когда ее передний фронт достигает расстояния L . Тогда, полагая $\pi^j L^{j+1} h_0^* = Q_0^*$, имеем:

$$h_0^* = \frac{Q_0^*}{\pi^j L^{j+1}}.$$

С другой стороны, из условия равенства единице коэффициента при массовой силе в безразмерных уравнениях пленки масштаб h_0^* должен быть равен $(\nu^* U L / g)^{1/3}$. Отсюда после простых выкладок находим масштаб для продольной скорости:

$$U = \frac{Q_0^{*3} g}{\pi^{3j} L^{3j+4} \nu^*}.$$

После отбрасывания в безразмерных уравнениях членов порядка ε^2 и $\varepsilon^2 \text{Re}$, которые считаются малыми в силу малости относительной толщины пленки, получаем уравнения теории стоксовых пленок (заметим, что при

этом числа Рейнольдса течения в пленке не обязательно малы – достаточно, чтобы была малой относительная толщина пленки):

$$\frac{\partial u x^j}{\partial x} + \frac{\partial w x^j}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -1. \quad (1.1.1)$$

Полученные асимптотические уравнения активно используются для описания динамики медленных течений вязкой жидкости, возникающих в различных технологических и природных процессах [69].

Для полученной системы уравнений (1.1.1) задаются следующие граничные условия, характеризующие физику рассматриваемого явления. На подстилающей супергидрофобной поверхности при $z = 0$ для продольной компоненты скорости u ставится условие проскальзывания Навье, а для нормальной к поверхности компоненты скорости w – условие непротекания:

$$z = 0 : \quad u = b(x) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad w = 0. \quad (1.1.2)$$

Здесь $b(x)$ – безразмерная (отнесенная к h_0^*) эффективная длина скольжения в направлении растекания жидкости.

Рассмотрим семейство неоднородных супергидрофобных поверхностей, для которых $b(x) = Bx^\delta$, где x – безразмерное расстояние до источника массоподвода, $B \geq 0$. В частном случае однородной супергидрофобной поверхности ($\delta = 0$) $b(x) = B = \text{const}$.

На свободной поверхности при $z = h(t, x)$ задается постоянное давление окружающей среды (которое без ограничения общности можно положить равным нулю) и предполагается отсутствие касательных напряжений.

Условие для касательных напряжений в жидкости следует из условия равенства нулю касательных напряжений, вычисленных на внешней границе слоя

$$p_{ij}^* n_j^* \tau_i^* = 0, \quad n_2^* n_1^* (p_{11}^* - p_{22}^*) + p_{12}^* (n_2^{*2} - n_1^{*2}) = 0.$$

Здесь p_{ij}^* – компоненты тензора напряжений в жидкости, n_j^* и τ_i^* – ком-

поненты нормали и касательного вектора к поверхности слоя. Подставляя в последнее равенство выражения для компонент тензора напряжений и нормали, получаем соотношение

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \frac{2h_x^*}{1 - h_x^{*2}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = 0,$$

которое после процедуры обезразмеривания преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2\varepsilon^2 h_x}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Отбросив члены порядка ε^2 , получаем динамическое условие для касательных напряжений на границе слоя.

Условие для нормальных напряжений, учитывающее капиллярное давление p_c^* , получается из

$$p_{ij}^* n_j^* n_i^* = p_c^*, \quad p_{11}^* n_1^{*2} + 2p_{12}^* n_1^* n_2^* + p_{22}^* n_2^{*2} = p_c^*$$

после процедуры обезразмеривания. С учетом малости производной толщины пленки по продольной координате капиллярное давление может быть вычислено по формуле

$$p_c^* = \sigma \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} \right) \approx -\sigma \Delta h^*,$$

где R_i^* – главные радиусы кривизны свободной поверхности, Δ – оператор Лапласа по пространственным координатам в плоскости течения, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Для рассматриваемого класса течений вязкой жидкости в принятых безразмерных переменных капиллярное давление записывается в виде:

$$p_c = -D \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{j}{x} \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\sigma h_0^{*3}}{L^3 \rho^* U \nu^*} = \frac{\sigma}{\rho^* g L^2},$$

а условие для нормальных напряжений на внешней границе слоя приводится к виду $p = p_c$.

Таким образом, динамические граничные условия на внешней границе слоя принимают вид:

$$z = h(t, x) : \quad p = p_c, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.1.3)$$

Для замыкания постановки задачи о течении вязкой жидкости со свободной границей необходимо добавить кинематическое граничное условие, выражающее тот факт, что нормальная скорость свободной поверхности совпадает с нормальной скоростью жидкости:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w.$$

Отметим, что если направить ось x^* вдоль силы тяжести и сохранить в уравнении импульса для продольной компоненты скорости конвективные слагаемые ($\varepsilon^2 \text{Re} \sim 1$), и задать условия (1.1.2 с $b(x) = 0$ и 1.1.3), получаем известную математическую модель для описания капиллярной неустойчивости и волн на внешней границе тонкой пленки, стекающей по стенке под действием силы тяжести [70, 71, 72, 73, 74].

После интегрирования уравнений Стокса (1.1.1) с граничными условиями (1.1.2, 1.1.3) получаем выражения для поля давления p и продольной компоненты скорости u :

$$p = p_c + h - z, \quad u = \left(\frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} - zh - Bx^\delta h \right). \quad (1.1.4)$$

Выражение для w находится из уравнения неразрывности, но так как в дальнейшем оно не используется, здесь оно не приводится.

После интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя и постановки полученного результата в кинематическое условие приходим к соотношению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(t, x)} x^j u(x, z, t) dz = 0.$$

Затем, подставляя в полученное равенство выражение для продольной компоненты скорости u (1.1.4), получаем эволюционное уравнение для неизвестной толщины пленки

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^j \left(\frac{h^3}{3} + Bx^\delta h^2 \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^j \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right) \right] = 0. \quad (1.1.5)$$

Оценим величину параметра D , характеризующего роль капиллярных эффектов в рассматриваемой задаче. Для практических приложений представляют интерес поверхности с характерным линейным размером $L \sim 10$ см. Если организовать принудительное пленочное течение с толщиной $h_0^* \sim 0.1$ см и скоростью $U \sim 1$ см/с, используя жидкость с динамической вязкостью $\mu^* \sim 8.5$ г/(см·с) и поверхностным натяжением $\sigma \sim 64$ г/с² (что соответствует, например, глицерину), то величина D будет очень мала: $D \sim 7.5 \times 10^{-6}$. Заметим, что при тех же линейных масштабах и физических параметрах жидкости, даже при существенно меньших значениях скорости растекания (порядка долей миллиметра в секунду), величина $D \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, и эффектами поверхностного натяжения, по-прежнему, можно пренебречь.

В дальнейшем рассматриваются именно такие течения, что позволяет существенно упростить постановку задачи – пренебречь членом со старшими производными в уравнении и получить уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^j \left(\frac{h^3}{3} + Bx^\delta h^2 \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0. \quad (1.1.6)$$

Упрощенное уравнение (1.1.6) (типа уравнения нелинейной теплопроводности) не описывает детали течения в малой окрестности переднего фронта и вблизи источника массоподвода, но позволяет находить закон распространения пятна смачивания без решения проблемы динамического угла контакта, являющейся камнем преткновения во многих задачах распространения фронта смачивания под действием капиллярных сил. Разрешение известного парадокса, связанного с нефизичной особенностью трения на переднем фронте смачивания, имеющей место в рамках чисто гидродинамических постановок задачи, требует учета на микромасштабах различных дополнительных физико-химических процессов [16, 75, 76, 77]. В рассматриваемом случае принудительного растекания пленки разрешение проблемы динамического угла контакта определяет лишь структуру течения в очень малой окрестности переднего фронта, но не влияет на закон

движения переднего фронта [78, 79], нахождение которого и является основной целью настоящего раздела работы. Подробный обзор литературы по автомоделным задачам растекания пленки вдоль обычных поверхностей, возникающих в различных приложениях, можно найти в [80]. В работе [81], опубликованной позднее работы автора настоящей диссертации, были описаны автомоделные решения задачи о растекании лавы по горизонтальной поверхности, на которой вместо классического условия прилипания использовалось условие частичного проскальзывания – скорость степенным образом зависела от трения. Проведено численное моделирование рассматриваемой задачи в полной постановке. Показано, что численное и асимптотическое решения хорошо согласуются друг с другом. Установлено, что при учете проскальзывания скорость распространения лавы может быть существенно выше, чем при использовании условия прилипания.

Следует отметить, что уравнения теории смазочного слоя (как с учетом, так и в пренебрежении поверхностным натяжением) широко используются в литературе для описания движущихся тонких слоев жидкости [69, 77, 82, 83]. Одновременный учет локального скольжения и так называемого расклинивающего давления проводился ранее при анализе образования разрывов в очень тонких пленках жидкости [84, 85, 86, 87]. Условия скольжения в несколько другом виде использовались также при анализе растекания капель фиксированного объема по границе насыщенной пористой среды [88]. При $B = 0$, что соответствует условию прилипания, уравнение принимает вид, хорошо известный в литературе [78, 89].

Постановка задачи для нахождения формы поверхности $h(t, x)$ завершается заданием интегрального условия, следующего из закона массопотока, и условия равенства нулю толщины пленки на переднем фронте области смачивания

$$(2\pi)^j \int_0^{x_f} h(t, x) x^j dx = Q(t), \quad h(x = x_f) = 0.$$

Здесь $x_f(t)$ – безразмерная координата переднего фронта области смачивания; при обезразмеривании стоящий в правой части уравнения известный объем жидкости в пленке отнесен к Q_0^* . Ниже проведен анализ возможных автомодельных решений поставленной задачи.

1.1.1 Автомодельные решения для степенного закона массоподвода

Пусть массоподвод в пленку задается степенной функцией времени, тогда объем жидкости, ограниченный формой поверхности пленки, вычисляется следующим образом:

$$\int_0^{x_f(t)} x^j h(t, x) dx = At^\gamma, \quad A = \text{const} > 0. \quad (1.1.7)$$

В случае плоской симметрии здесь имеется в виду объем, приходящийся на единицу длины по размаху.

Как и в [78, 79, 90], будем искать автомодельные решения уравнения пленки в виде:

$$h(t, x) = t^\alpha F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{Ct^\beta}, \quad C = \text{const} > 0. \quad (1.1.8)$$

Автомодельные решения такого вида для уравнений типа уравнения нелинейной теплопроводности в литературе называются решениями типа источника и встречаются при моделировании различных технологических и природных процессов [91]. Значение константы C выбирается из условия, чтобы автомодельная координата переднего фронта η_f равнялась единице. После подстановки автомодельной формы решения (1.1.8) в уравнение пленки (1.1.6) и закон массоподвода (1.1.7) получаем условия существования автомодельных решений рассматриваемого вида:

$$\begin{aligned} j = 0 : \quad \alpha &= \frac{2\gamma - 1}{5}, \quad \beta = \frac{3\gamma + 1}{5}, \quad \delta = \frac{2\gamma - 1}{3\gamma + 1}; \\ j = 1 : \quad \alpha &= \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{3\gamma + 1}{8}, \quad \delta = \frac{2\gamma - 2}{3\gamma + 1}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Константа C находится из соотношения, полученного из интегрального условия баланса массы в пленке

$$C = A^{1/(j+1)} \left(\int_0^1 \eta^j F(\eta) d\eta \right)^{-1/(j+1)} \quad (1.1.10)$$

Видно, что для каждого заданного значения показателя степени δ в законе проскальзывания существует единственная комбинация параметров γ , α , β , соответствующая автомодельному режиму растекания. В случае однородной супергидрофобной поверхности ($\delta = 0$) автомодельное решение существует лишь при специальных законах массоподвода: $\gamma = 1/2$ ($j = 0$) и $\gamma = 1$ ($j = 1$), при этом $\alpha = 0$.

В автомодельных переменных уравнение пленки для плоского и осесимметричного течений записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{1-j}\gamma - 1}{5-j} \eta^j F - \frac{(3\gamma + 1)}{3j + 5} \eta^{1+j} F' - \\ & - \frac{1}{3C^2} (\eta^j F^3 F')' - BC^{\delta-2} (\eta^{j+\delta} F^2 F')' = 0. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Значения δ , соответствующие плоскопараллельному ($j = 0$) и осесимметричному ($j = 1$) растеканиям пленки, указаны в (1.1.9).

Полученное дифференциальное уравнение имеет второй порядок, а в постановке задачи имеется лишь одно краевое условие – нулевое значение автомодельной функции F при $\eta \rightarrow 1$ (на переднем фронте). Из вида уравнения (1.1.11) следует, что в точке $\eta = 1$ производные функции F обращаются в бесконечность, то есть эта точка является особой. Поскольку для приложений интересны ограниченные решения, соответствующие сепаратрисе, то одного краевого условия в особой точке оказывается достаточно для нахождения единственного решения. Для нахождения главного (первого) члена асимптотического разложения решения $F(\eta)$ в окрестности особой точки $\eta = 1$ представим решение в виде ряда:

$$F(\eta) \approx k(1 - \eta)^\theta,$$

где k и θ подлежат определению.

После подстановки асимптотического разложения искомого решения в уравнение (1.1.11) для растекания по обычной поверхности ($B = 0$) получаем

$$F(\eta) \approx \left(\frac{9C^2(3\gamma + 1)}{(3j + 5)} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - \eta)^{\frac{1}{3}}.$$

В случае растекания по супергидрофобной поверхности ($B \neq 0$) асимптотика имеет вид:

$$F(\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{B}} \left(\frac{3\gamma + 1}{3j + 5} \right)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{4\gamma + j + 3}{2(3\gamma + 1)}} (1 - \eta)^{\frac{1}{2}}.$$

Данная асимптотика была использована в численных расчетах для того, чтобы снести граничное условие из особой точки на малое расстояние в точку η_0 , удовлетворяющую условию $|1 - \eta_0| \ll 1$. Уравнение (1.1.11) решалось численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Совместно с решением уравнения (1.1.11) значение константы C в законе движения переднего фронта находилось методом стрельбы с использованием итераций, продолжающихся до тех пор, пока с заданной точностью не удовлетворялся интегральный закон сохранения массы в пленке (1.1.10). Для численного решения уравнения (1.1.11) и нахождения значения константы C была написана программа для ЭВМ. Тестирование численного алгоритма проводилось на основе сравнения решений и значений константы C , соответствующих точному аналитическому решению уравнения (1.1.11) при $B = 0$, $\gamma = 0$ [78] и численному решению для тех же значений параметров с использованием найденной асимптотики. Разработанный численный алгоритм удерживает три значащих цифры после запятой. На рис. 1.2 представлены результаты численного решения уравнения (1.1.11) для плоского и осесимметричного случаев при $A = 1$ и различных значений параметров массоподвода γ и проскальзывания B , δ .

Видно, что графики автомобильной формы поверхности пленки, полученные с учетом проскальзывания, располагаются ниже соответствующих

решений без проскальзывания. Поскольку при фиксированном значении времени объем жидкости, подведенный в пленку, растекающуюся по супергидрофобной и обычной поверхностям, должен быть одинаковым, ясно, что за то же время передний фронт пленки проходит по супергидрофобной поверхности большее расстояние, чем по обычной. При этом показатели степени в зависимости координаты переднего фронта от времени для обычной и супергидрофобной поверхностей совпадают, а отличаются лишь множители C .

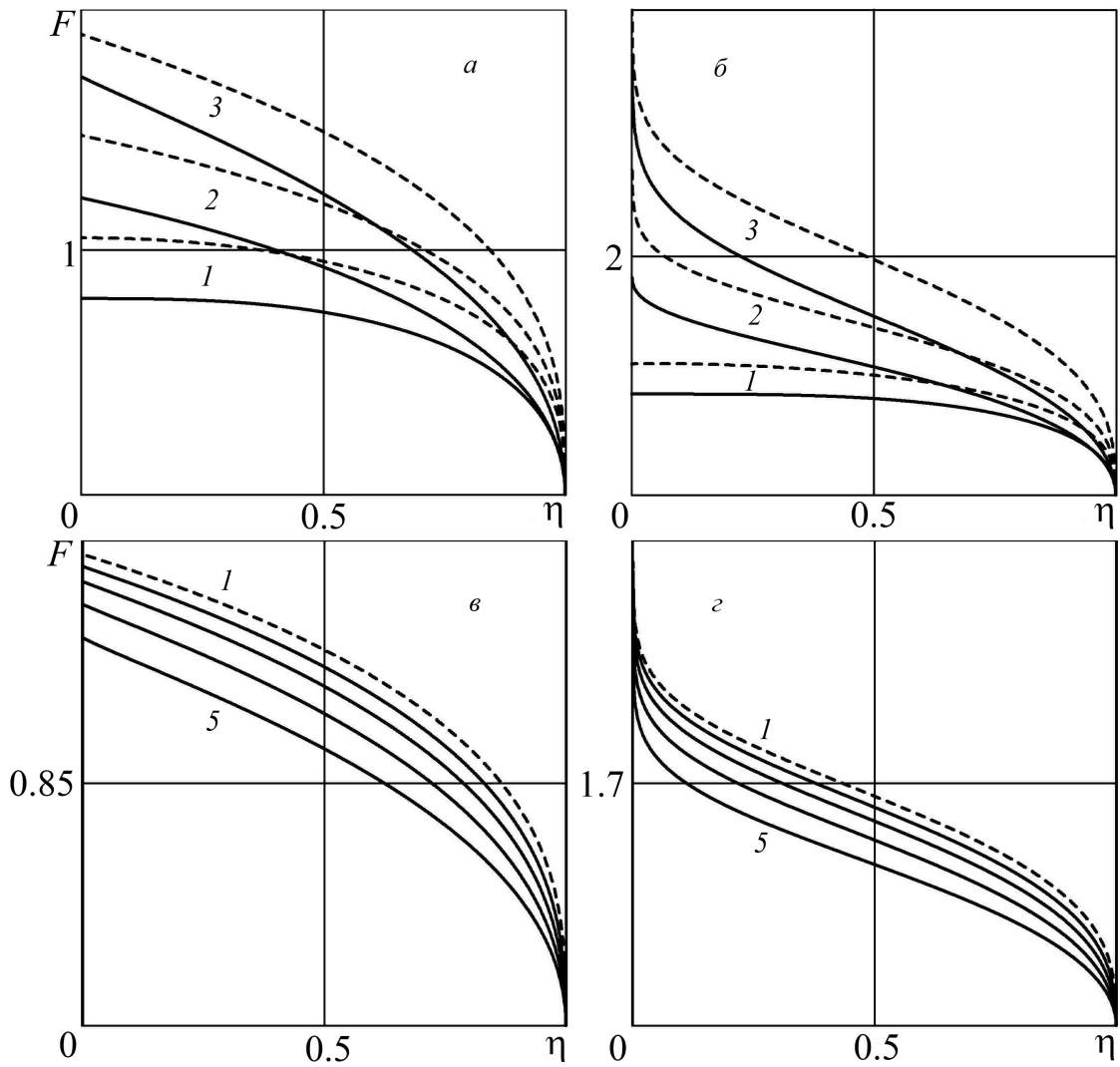


Рис. 1.2: Автомоделная функция $F(\eta)$, *a*, *в* – плоскопараллельное течение, $j = 0$; *б*, *г* – осесимметричное, $j = 1$; *a*, *б*: $B = 0.5$, $\gamma = 0, 0.5, 2$ (1–3); *в*, *г*: $\gamma = 1$, $B = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ (1–5); штриховые линии – случай прилипания

Вычисленные значения множителя C в законе движения переднего фронта пленки для однородной супергидрофобной поверхности, характеризующейся постоянной величиной проскальзывания в направлении растекания пленки $\delta = 0$, представлены в таблице.

B	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
C_{plane}	0.893	0.952	1.014	1.070	1.110	1.150
C_{axisym}	1.243	1.282	1.333	1.374	1.410	1.442

Эти данные могут быть использованы для экспериментального определения параметра проскальзывания однородной супергидрофобной поверхности на основе измеренного закона движения переднего фронта.

Параметрическое исследование показало, что для любой пары значений (γ, B) имеется автомодельное решение рассматриваемого класса, при этом для двух различных наборов указанных параметров соответствующие решения различны. Таким образом, для степенного закона массоподвода в пленку имеется однозначное соответствие между параметрами скольжения супергидрофобной поверхности и законом растекания пленки. Поэтому такое решение может быть использовано при проведении экспериментов с целью определения параметров скольжения супергидрофобной поверхности (аппроксимируемых степенной функцией координаты либо константой) по измеренному закону распространения переднего фронта.

В размерных переменных построенное автомодельное решение уравнения (1.1.6) и закон движения переднего фронта записываются в виде:

$$h^* = \frac{Q_0^*}{\pi^j L^{j+1}} \left(\frac{t^* Q_0^{*3} g}{\pi^{3j} L^{3j+5} \nu^*} \right)^{((2-j)\gamma-1)/(5-j)} F(\eta),$$

$$x^* = LC \left(\frac{t^* Q_0^{*3} g}{\pi^{3j} L^{3j+5} \nu^*} \right)^{(3\gamma+1)/(3j+5)}, \quad b^* = \frac{Q_0^* B x^{*\delta}}{\pi^j L^{\delta+j+1}}.$$

Значение параметра δ для плоского или осесимметричного растекания тонкого слоя определяется из (1.1.9).

1.1.2 Автономные решения для экспоненциального закона массоподвода

Уравнение пленки (1.1.6) имеет еще один класс автономных решений, соответствующий экспоненциальному по времени закону массоподвода в пленку. Пусть изменение объема жидкости, ограниченного формой поверхности пленки, подчиняется закону

$$\int_0^{x_f(t)} x^j h(t, x) dx = A e^{\gamma t}, \quad A = \text{const} > 0. \quad (1.1.12)$$

Автономные решения уравнения пленки (1.1.6), соответствующие такому закону массоподвода, ищем в виде:

$$h(t, x) = e^{\alpha t} F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{C e^{\beta t}}, \quad C = \text{const} > 0. \quad (1.1.13)$$

Ранее такой вид автономного решения уже использовался для исследования эволюции формы слоя магмы на наклонной поверхности [90]. Как и в предыдущем разделе, значение константы C выбирается так, чтобы автономная координата переднего фронта η_f равнялась единице. После подстановки автономного решения (1.1.13) в уравнение пленки (1.1.6) и закон массоподвода (1.1.12) получаем условия существования автономных решений:

$$\begin{aligned} j = 0 : \quad \alpha &= \frac{2\gamma}{5}, \quad \beta = \frac{3\gamma}{5}, \quad \delta = \frac{2}{3}; \\ j = 1 : \quad \alpha &= \frac{\gamma}{4}, \quad \beta = \frac{3\gamma}{8}, \quad \delta = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Константа C находится из соотношения (1.1.10).

Из проведенного анализа следует, что если изменение объема жидкости, ограниченного формой поверхности пленки, задается экспоненциальной функцией времени, то автономный закон растекания по супергидрофобной поверхности возможен лишь для единственного типа поверхности, соответствующего значению $\delta = 2/3$ в законе проскальзывания, при этом необходимо, чтобы $\gamma \neq 0$.

В рассматриваемом случае уравнение (1.1.6) для неизвестной формы поверхности пленки в автомодельных переменных записывается в виде:

$$\frac{2^{1-j}\gamma}{5-j}\eta^j F - \frac{3\gamma}{5+3j}\eta^{1+j}F' - \frac{(\eta^j F^3 F')'}{3C^2} - BC^{-4/3} \left(\eta^{(2+3j)/3} F^2 F' \right)' = 0. \quad (1.1.14)$$

Поскольку для этого уравнения координата переднего фронта $\eta = 1$ также является особой точкой, была использована процедура разложения решения в окрестности этой точки, аналогичная описанной в предыдущем пункте. В случае растекания по обычной поверхности ($B = 0$) получаем:

$$F(\eta) \approx \left(\frac{27C^2\gamma}{3j+5} \right)^{1/3} (1-\eta)^{1/3}.$$

Асимптотика решения в случае супергидрофобной поверхности ($B \neq 0$) имеет вид:

$$F(\eta) \approx C^{2/3} \sqrt{\frac{6\gamma}{(3j+5)B}} (1-\eta)^{1/2}.$$

Полученные асимптотики использовались для численного решения уравнения (1.1.14). Численная процедура, использованная при решении уравнения (1.1.14), аналогична изложенной выше. На рис. 1.3 представлены результаты численного решения уравнения (1.1.14) для $A = 1$.

В таблице представлены значения множителя C в законе движения переднего фронта, вычисленные для $\gamma = 1$.

B	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
C_{plane}	0.838	0.922	0.954	0.979	1.000	1.021
C_{axisym}	1.273	1.334	1.390	1.434	1.474	1.511

Из полученных результатов также следует, что передний фронт пленки за то же время проходит по супергидрофобной поверхности большее расстояние, чем по обычной поверхности без проскальзывания.

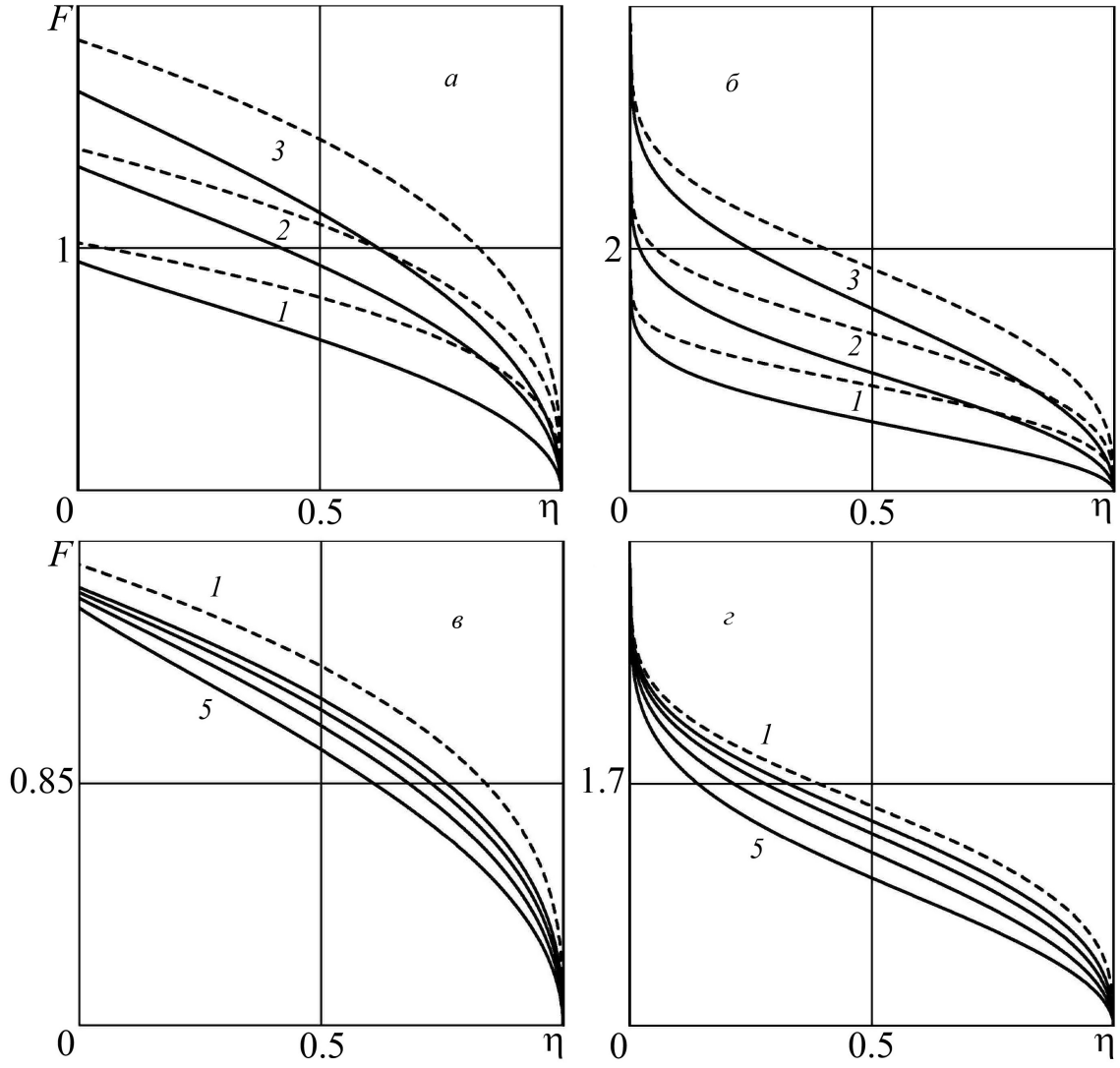


Рис. 1.3: Автомоделная функция $F(\eta)$, *a*, *в* – плоскопараллельное течение, $j = 0$; *б*, *г* – осесимметричное, $j = 1$; *a*, *б*: $B = 0.4$, $\gamma = 0.1, 0.5, 2$ (1–3); *в*, *г*: $\gamma = 1$, $B = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ (1–5); штриховые линии – случай прилипания

В размерных переменных решение уравнения (1.1.14) и закон движения переднего фронта записываются в виде:

$$h^* = \frac{Q_0^*}{\pi^j L^{j+1}} \exp \left(\frac{2\gamma t^* Q_0^{*3} g}{(3j+5) \pi^{3j} L^{3j+5} \nu^*} \right) F(\eta),$$

$$x^* = LC \exp \left(\frac{3\gamma t^* Q_0^{*3} g}{(3j+5) \pi^{3j} L^{3j+5} \nu^*} \right).$$

Появление особенностей формы поверхности на оси симметрии в рассмотренных осесимметричных решениях (рис. 1.2 и 1.3, б, г) связано с уже отмечавшейся выше неприменимостью рассматриваемой модели в малой окрестности источника массоподвода. Поскольку вблизи оси симметрии функция F растет на очень малых расстояниях от оси симметрии ($F \sim \ln^{1/4}(1/\eta)$), в масштабе представленных графиков неограниченного нарастания толщины не видно.

1.1.3 Приближенное автомодельное решение для слабонеоднородного растекания пленки

Полученные автомодельные решения могут быть обобщены на случай слабодвумерного растекания пленки, когда появление неоднородных эффектов вызвано одной из следующих причин: слабой зависимостью коэффициента скольжения (главной компоненты тензора скольжения, соответствующей оси x^*) от второй пространственной координаты y^* , слабой зависимостью мощности источника массы от координаты y^* либо комбинацией указанных причин. Рассмотрим слабонеоднородное растекание пленки от линейного источника в декартовой системе координат. Как и в предыдущих пунктах, рассматриваются супергидрофобные поверхности с двумя ортогональными главными направлениями тензора скольжения, вдоль которых направлены координаты x^* и y^* , в качестве масштаба y^* также выбрана длина L .

В качестве примера рассмотрим случай, когда появление неоднородных эффектов обусловлено слабой зависимостью коэффициента скольжения b_{xx}

от второй координаты y . Пусть $b_{xx} = x^\delta (B_0 + \varepsilon_1 B_1(y))$, где $B_0 = \text{const}$, а $\varepsilon_1 \ll 1$ – малый параметр, выбранный так, что максимум модуля функции B_1 равняется единице. В рамках таких предположений можно расширить класс супергидрофобных поверхностей, рассмотренных в предыдущих разделах.

Проведя рассуждения, полностью аналогичные изложенным ранее, для существенно-двумерного растекания уравнение для безразмерной толщины пленки принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} + x^\delta (B_0 + \varepsilon_1 B_1(y)) h^2 \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{h^3}{3} + b_{yy} h^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Коэффициент скольжения вдоль координаты y (b_{yy}) – произвольная функция координат x и y .

При малых значениях ε_1 реальный масштаб трансверсальной скорости (скорости перетекания вдоль координаты y) в пленке много меньше масштаба продольной скорости U , поэтому последний член в уравнении (1.1.15), учитывающий трансверсальное перетекание жидкости в пленке, также очень мал. Предположим, что для некоторых форм зависимости $B_1(y)$ этим членом можно пренебречь и в первом приближении по малому параметру ε_1 . Такое предположение позволяет строить автомодельные решения для растекания пленки (в которые y входит как параметр) в первом приближении по ε_1 . Ниже приведены примеры таких решений и даны оценки справедливости предположения о возможности пренебречь трансверсальным перетеканием.

В качестве примеров рассмотрены степенной по времени закон массоподвода и случаи линейной, квадратичной или периодической (с периодом 2π) зависимости B_1 от y .

Приближенное решение уравнения (1.1.15) с отброшенным последним

членом ищется в виде:

$$h(t, x, y) = t^\alpha [F_0(\eta) + \varepsilon_1 F_1(\eta, y)], \quad \eta = \frac{x}{Ct^\beta},$$

$$C = C_0 + \varepsilon_1 C_1(y). \quad (1.1.16)$$

Здесь индексом 0 отмечены построенные выше одномерные автомодельные решения.

Интегральное условие подвода массы в пленку при ее двумерном растекании принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{x_f} h(t, x, y) dx dy = At^\gamma, \quad A = \text{const} > 0. \quad (1.1.17)$$

После подстановки решения (1.1.16) в (1.1.15) (с отброшенным последним членом) и в закон массоподвода (1.1.17) в нулевом приближении по малому параметру ε_1 получаем интегральное условие (1.1.10) и уравнение (1.1.11) для нахождения функции $F_0(\eta)$, а также константы C_0 в законе движения переднего фронта.

В первом приближении по ε_1 получается уравнение для поправки к одномерному автомодельному решению:

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma-1}{5} F_1 - \frac{3\gamma+1}{5} \frac{dF_1}{d\eta} \eta - \frac{1}{C_0^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{F_0^3}{3} \frac{dF_1}{d\eta} \right) - \frac{1}{C_0^2} \frac{d}{d\eta} \left(F_1 F_0^2 \frac{dF_0}{d\eta} \right) - \\ & - B_0 C_0^{\delta-2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\delta F_0^2 \frac{dF_1}{d\eta} \right) - 2B_0 C_0^{\delta-2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\delta F_1 F_0 \frac{dF_0}{d\eta} \right) + \\ & + \frac{2C_1(y)}{C_0^3} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{F_0^3}{3} \frac{dF_0}{d\eta} \right) - B_1(y) C_0^{\delta-2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\delta F_0^2 \frac{dF_0}{d\eta} \right) + \\ & + B_0 C_1(y) C_0^{\delta-3} \left(\frac{4\gamma+3}{3\gamma+1} \right) \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\delta F_0^2 \frac{dF_0}{d\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Параметр δ , выраженный через показатель степени в законе массоподвода γ , определяется из (1.1.9).

Пренебрегая трансверсальным перетеканием, из интегрального закона для объема жидкости в пленке в первом приближении по ε_1 получаем урав-

нение для нахождения $C_1(y)$:

$$C_0 \int_0^1 F_1(\eta, y) d\eta + C_1(y) \int_0^1 F_0(\eta) d\eta = 0. \quad (1.1.19)$$

Уравнение (1.1.18) – линейное относительно $F_1(\eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое y входит как параметр. Краевое условие для данного уравнения – нулевое значение F_1 в точке $\eta = 1$. Из уравнения следует, что $\eta = 1$ – особая точка. Выделим главный член асимптотики решения при $\eta \rightarrow 1$. Для этого используем асимптотику $F_0(\eta)$ в окрестности $\eta = 1$ для плоскопараллельного растекания, найденную ранее:

$$F_0(\eta) \approx M (1 - \eta)^{\frac{1}{2}}, \quad M = \sqrt{\frac{6\gamma + 2}{5B}} C^{\frac{4\gamma+3}{2(3\gamma+1)}}.$$

Подставляя в (1.1.18), получаем главный член асимптотики F_1 в окрестности особой точки:

$$F_1(\eta, y) = \frac{M^3 \left(B_1(y) C_0^{\delta-2} - B_0 C_1(y) C_0^{\delta-3} \left(\frac{4\gamma+3}{3\gamma+1} \right) \right)}{0.4(3\gamma+1) - B_0 A_0^2 C_0^{\delta-2} - 2B_0 A_0^2 C_0^{\delta-2}} (1 - \eta)^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное выражение было использовано в численных расчетах, чтобы отступить из особой точки. Для заданного вида функции $B_1(y)$ при каждом выбранном значении y уравнение (1.1.18) решалось итерациями с варьированием значения $C_1(y)$ до тех пор, пока с заданной точностью не удовлетворялся интегральный закон (1.1.19), в результате определялась функция $C_1(y)$. Получаемое на каждом шаге итераций решение F_1 параметрически зависит от y .

На рис. 1.4 представлены графики добавка $F_1(\eta, y)$ для линейного, квадратичного и периодического законов изменения B_1 от второй пространственной координаты. На рис. 1.5 представлены зависимости $C_1(y)$ в законе движения переднего фронта. В данных расчетах $B_0 = 1$, $\gamma = 1/2$, при этом $\alpha = \delta = 0$.

Для оценки справедливости пренебрежения трансверсальным перетеканием в пленке в рассмотренном первом приближении по ε_1 была оценена

величина невязки (т.е. величина отброшенного последнего члена в (1.1.15)) на полученных обобщенных автомодельных решениях. Полагая $b_{yy} = 0$, рассмотрим последнее слагаемое в уравнении (1.1.15). Подставим (1.1.16) в (1.1.15) и отбросим члены более высокого порядка, чем ε_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left((F_0(\eta) + \varepsilon_1 F_1(\eta, y))^3 \frac{\partial}{\partial y} (F_0(\eta) + \varepsilon_1 F_1(\eta, y)) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left((F_0^3(\eta) + 3\varepsilon_1 F_0^2(\eta) F_1(\eta, y)) \frac{\partial}{\partial y} (F_0(\eta) + \varepsilon_1 F_1(\eta, y)) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left((F_0^3(\eta) + 3\varepsilon_1 F_0^2(\eta) F_1(\eta, y)) \left(\frac{\partial F_0(\eta)}{\partial y} + \varepsilon_1 \frac{\partial F_1(\eta, y)}{\partial y} \right) \right) \approx \\ &\approx \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F_0^3(\eta)}{3} \frac{\partial F_0(\eta)}{\partial y} \right) + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F_0^3(\eta)}{3} \frac{\partial F_1(\eta, y)}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(F_0^2(\eta) F_1(\eta, y) \frac{\partial F_0(\eta)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Так как $\partial F_0(\eta)/\partial y = 0$, получаем, что величина отброшенного последнего слагаемого (невязки) имеет порядок:

$$\varepsilon_1 t^{4\alpha} E(\eta, y), \quad E(\eta, y) = \frac{F_0^3}{3} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}.$$

Отметим, что величина полученной невязки пропорциональна $t^{4\alpha}$, поэтому при растекании тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей, на которых автомодельные решения существуют при $\alpha > 0$ достигается момент времени, когда трансверсальным перетеканием пренебречь уже нельзя. Поэтому для таких супергидрофобных поверхностей построенные приближенные автомодельные решения не применимы.

На рис. 1.6 приведена величина $E(\eta, y)$ для степенного и периодического законов $B_1(y)$. Невязка E вычислялась по формуле

$$E(\eta, y) = \frac{F_0^3}{3} \frac{(F_1(\eta, y + \Delta y) - 2F_1(\eta, y) + F_1(\eta, y - \Delta y))}{(\Delta y)^2}.$$

Видно, что для выбранных примеров $B_1(y)$ величина $E \ll 1$. Поэтому величина отброшенного члена в уравнении (1.1.15) может считаться величиной более высокого порядка, чем ε_1 , что подтверждает справедливость

предположения о возможности пренебречь трансверсальным перетеканием в пленке.

Аналогичные решения могут быть построены для источников массы, интенсивность которых слабо зависит от y , а также для случаев, когда одновременно важны зависимости коэффициентов проскальзывания и мощности источников от второй координаты. Ограничением применимости таких приближенных решений является возможность пренебречь трансверсальным перетеканием жидкости в уравнении для формы поверхности пленки и интегральном законе массоподвода.

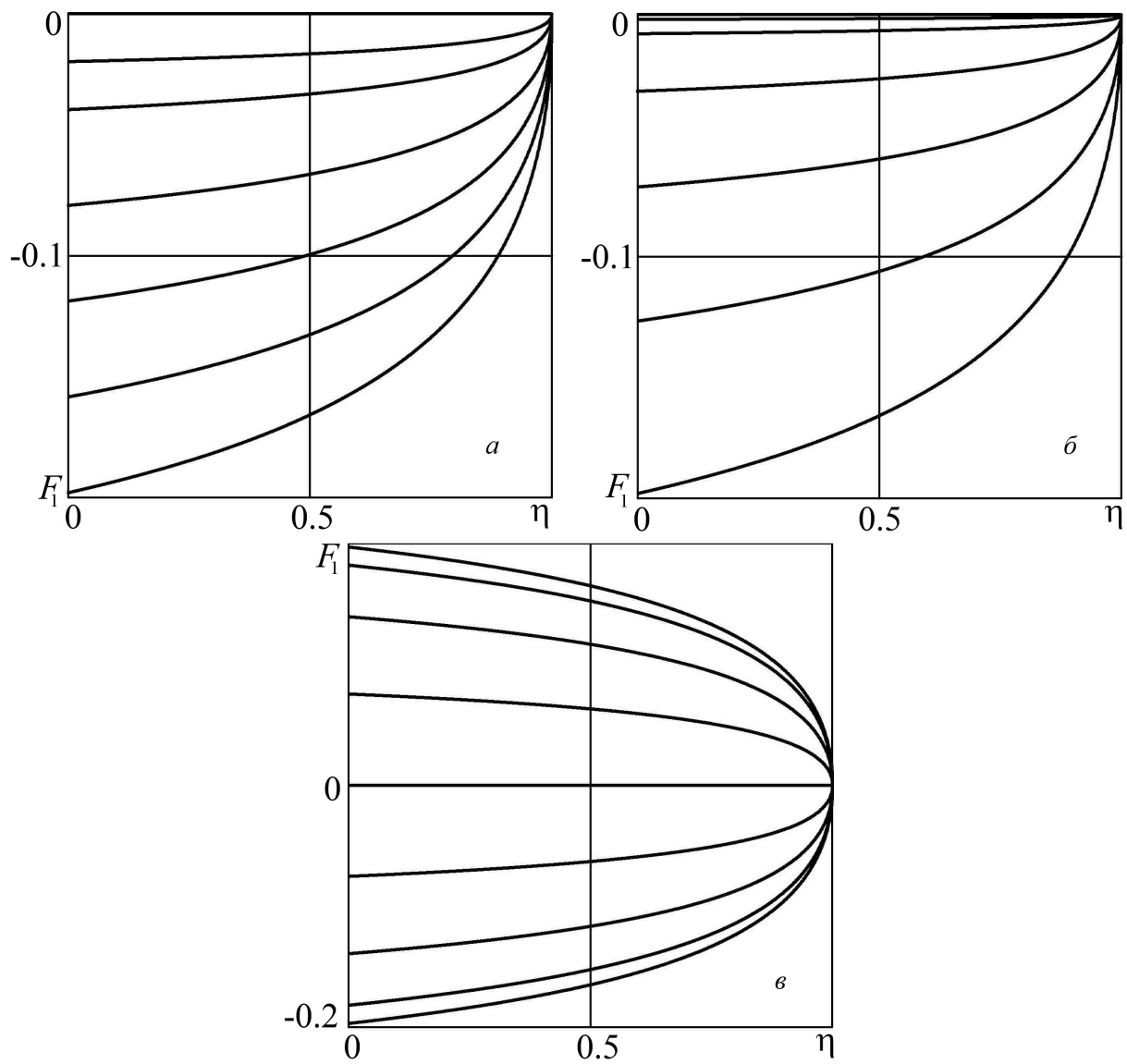


Рис. 1.4: Добавок $F_1(\eta, y)$ к автомодельному решению для $B_1(y)$:
 (*a*, *б*) $y, y^2, y = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, \dots, 1.0$; (*в*) $\cos y, y = 0, \pi/8, 2\pi/8, \dots, \pi$

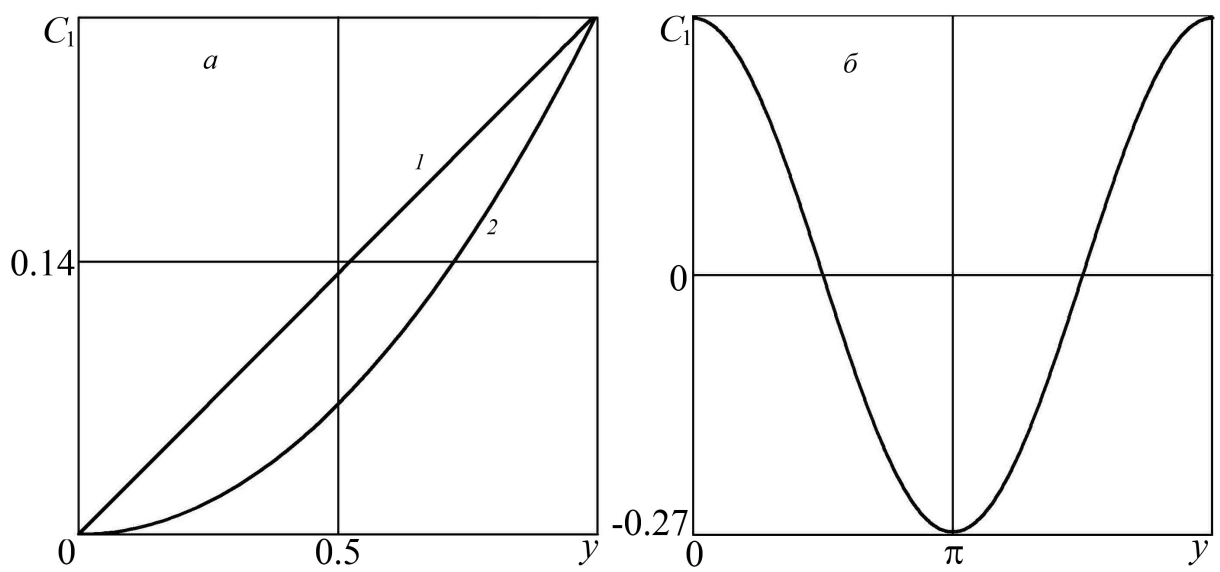


Рис. 1.5: График функции $C_1(y)$ для $B_1(y)$: (а) $y - 1, y^2 - 2$; (б) $\cos y$

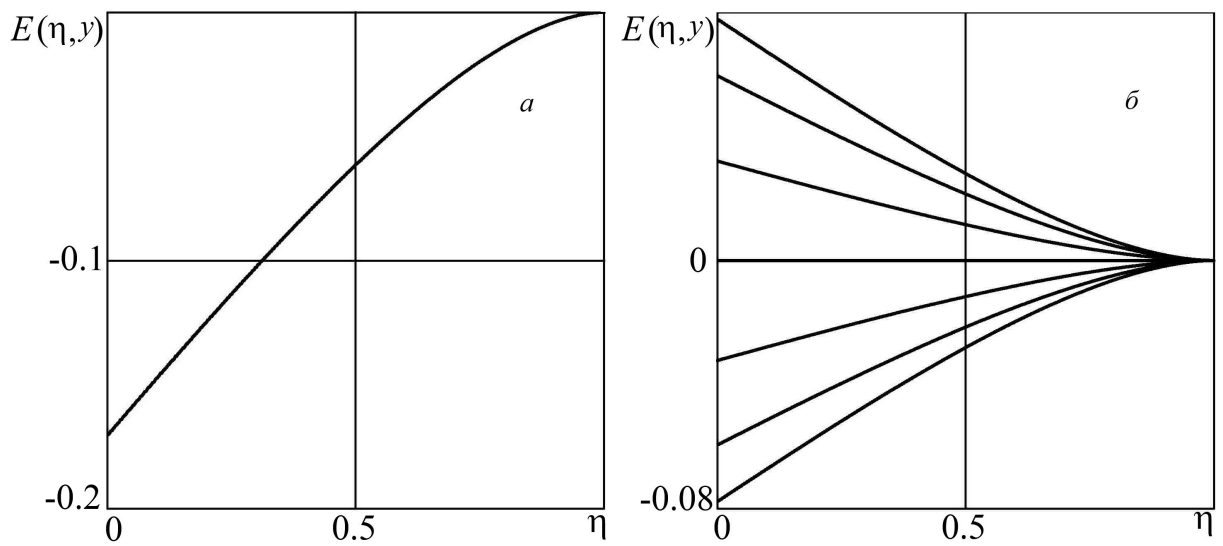


Рис. 1.6: Невязка $E(\eta, y)$ для $B_1(y)$: а — y^2 ; б — $\cos y, y = \pi/8, 2\pi/8, \dots, 7\pi/8$

1.2 Стеkanie ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности

Рассмотрим медленное стационарное стекание ручейка тяжелой ньютоновской жидкости по плоской супергидрофобной поверхности, наклоненной под конечным углом φ к горизонту. Начало декартовой системы координат $0x^*y^*z^*$ связано с локализованным источником массоподвода, имеющим объемную мощность Q^* ; оси $0x^*$ и $0y^*$ направлены вдоль двух главных направлений тензора скольжения b_{ij}^* супергидрофобной поверхности, предполагаемых ортогональными, ось $0y^*$ горизонтальна, ось $0z^*$ направлена по нормали к наклонной поверхности (рис. 1.7).

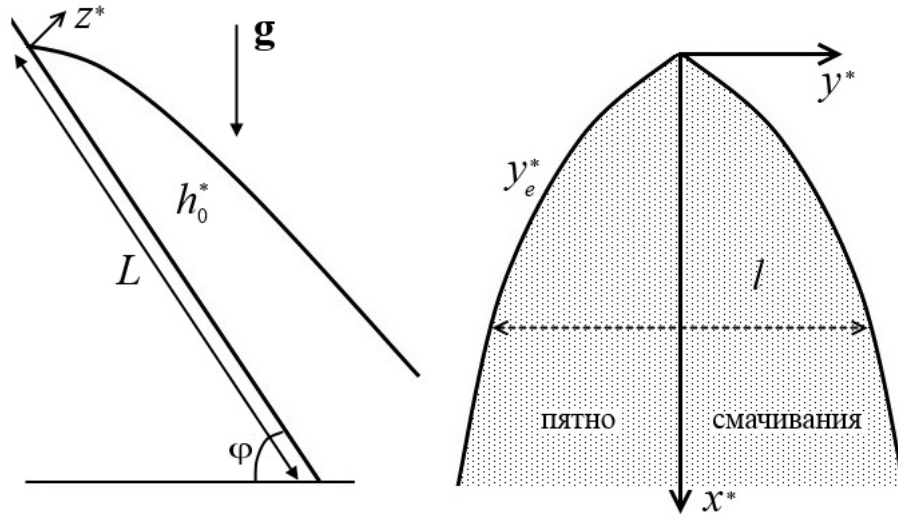


Рис. 1.7: Схема ручейкового стекания жидкости и система координат

Размерные компоненты скорости в выбранной декартовой системе координат обозначим через u^* , v^* и w^* . Уравнения неразрывности и Навье-Стокса, описывающие рассматриваемое течение вязкой жидкости, записанные в декартовой системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0,$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) + g \sin \varphi,$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right),$$

$$u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - g \cos \varphi.$$

Пусть размерные величины L , l и h_0^* задают характерные линейные масштабы длины, ширины и толщины ручейка соответственно. Предполагается, что толщина ручейка много меньше его ширины, а ширина много меньше длины, при этом: $h_0^*/l = l/L = \varepsilon \ll 1$. В дальнейшем ε считается малым параметром. Введем набор безразмерных переменных:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{l}, \quad z = \frac{z^*}{h_0^*}, \quad u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon U}, \quad w = \frac{w^*}{\varepsilon^2 U}, \quad p = p^* \frac{\varepsilon^2 \text{Re}}{\rho^* U^2}.$$

После процедуры обезразмеривания уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon^4 \text{Re} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon^4 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \sin \varphi,$$

$$\varepsilon^4 \text{Re} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\varepsilon^6 \text{Re} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon^4 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \cos \varphi.$$

Числа Re и Fr определяются как в предыдущем разделе. Считая, что объемная мощность источника Q^* задана, и выбирая масштаб длины L , можно выразить U (характерная скорость стекания), l и h_0^* через Q^* , L , а также вязкость жидкости и ускорение силы тяжести:

$$U = \left(\frac{Q^{*4} g^3}{\nu^{*3} L^2} \right)^{1/7}, \quad l = \left(\frac{\nu^* L^3 Q^*}{g} \right)^{1/7}, \quad h_0^* = \left(\frac{\nu^{*2} Q^{*2}}{g^2 L} \right)^{1/7}.$$

Данные соотношения получены из условия $Q^* = h_0^* l U$, а также равенства единице коэффициента при силе тяжести в проекции безразмерного уравнения импульса на ось $0z^*$. После отбрасывания в безразмерных уравнениях членов, стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ (предполагается, что при

этом $\varepsilon^2 \text{Re}$ также стремится к нулю), получаем асимптотические уравнения стоксовой пленки на наклонной плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sin \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\cos \varphi. \quad (1.2.1)$$

Для рассматриваемого течения вязкой жидкости на наклонной супергидрофобной поверхности задаются граничные условия эффективного проскальзывания Навье для компонент скорости u , v на поверхности и непротекания для нормальной к наклонной поверхности компоненты скорости w :

$$z = 0 : \quad u = b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad v = b_2(x, y) \frac{\partial v}{\partial z}, \quad w = 0. \quad (1.2.2)$$

Здесь b_1 и b_2 – главные компоненты тензора скольжения, отнесенные при обезразмеривании к h_0^* . На свободной поверхности ставятся кинематическое и динамические граничные условия:

$$z = h(x, y) : \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = w, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (1.2.3)$$

Капиллярные эффекты не учитываются в силу соображений, изложенных в предыдущем разделе. Условия для касательных напряжений в жидкости следуют из $p_{ij}^* n_j^* \tau_i^* = 0$ после процедуры обезразмеривания.

В работе [98] выполнено исследование стекания ручейка вязкой жидкости по обычной поверхности без проскальзывания применительно к задачам интенсификации теплообмена.

В случае обычной поверхности с условием прилипания ($b_1 = b_2 = 0$) рассматриваемая в данном пункте задача (с учетом или без учета капиллярных эффектов) имеет известный класс автомодельных решений [99–103]. В работе [104] автомодельное решение получено на основе численного решения поставленной задачи. Рассмотрим неоднородные супергидрофобные поверхности, для которых зависимость безразмерных коэффициентов проскальзывания от безразмерных координат описывается произведением степенных функций: $b_{1,2}(x, y) = B_{1,2} x^\gamma y^\delta$, где $B_{1,2}$ – положительные константы, а x и y – безразмерные координаты точки на супергидрофобной поверхности.

Решая уравнения (1.2.1) с граничными условиями (1.2.2, 1.2.3), получаем выражения для давления и компонент скорости u , v :

$$\begin{aligned} p &= (h - z) \cos \varphi, \quad u = \sin \varphi \left(zh - \frac{z^2}{2} + B_1 x^\gamma y^\delta h \right), \\ v &= \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{z^2}{2} - zh - B_2 x^\gamma y^\delta h \right) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Выражение для w может быть найдено из уравнения неразрывности, но так как в дальнейшем оно не используется, здесь оно не приводится.

После интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя и подстановки полученного результата в кинематическое условие на свободной поверхности приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x, y)} u(x, y, z) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h(x, y)} v(x, y, z) dz = 0,$$

затем, подставляя в полученное равенство выражения для компонент скорости u и v (1.2.4), получаем нелинейное уравнение в частных производных для установившейся формы поперечного сечения ручейка:

$$\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} + B_1 x^\gamma y^\delta h^2 \right) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{h^3}{3} + B_2 x^\gamma y^\delta h^2 \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.2.5)$$

При $B_{1,2} = 0$ уравнение (1.2.5) принимает известный в литературе вид [99, 100, 104]. Математическая постановка задачи для нахождения формы поперечного сечения ручейка $h(x, y)$ завершается заданием закона сохранения расхода жидкости через поперечное сечение (который является следствием интегрального закона сохранения массы), а также условий равенства нулю толщины слоя на линиях, ограничивающих область смачивания жидкости, и симметрии формы слоя относительно оси Ox^*

$$\int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \int_0^{h(x, y)} u(x, y, z) dz dy = 1, \quad h(y = y_e(x)) = 0, \quad h_y(x, 0) = 0.$$

Линии $\pm y_e(x)$ – заранее неизвестные боковые границы ручейка (ограничивающие область смачивания), на которых толщина слоя жидкости равняется нулю. Форма этих линий должна определяться в процессе решения

сформулированной математической задачи. Ниже описаны возможные автомодельные решения уравнения поперечного сечения ручейка (1.2.5).

1.2.1 Автомодельные решения уравнения поперечного сечения ручейка на наклонной поверхности

После подстановки в интегральный закон сохранения массы выражения для компоненты скорости u получаем

$$\sin \varphi \int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \left(\frac{h^3}{3} + B_1 x^\gamma y^\delta h^2 \right) dy = 1. \quad (1.2.6)$$

Как и в случае течений вдоль обычных поверхностей [99, 101, 102], будем искать автомодельные решения уравнения (1.2.5) в виде:

$$h(x, y) = x^\alpha F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{Cx^\beta}, \quad C = \text{const} > 0, \quad (1.2.7)$$

где α и β – некоторые константы. Новая переменная η характеризует автомодельный закон расширения области смачивания. Значение константы C должно выбираться из условия $\eta_e = 1$ на боковой границе ручейка. После подстановки автомодельной формы решения (1.2.7) в уравнение для формы ручейка (1.2.5) и закон постоянства расхода (1.2.6) получаем условия существования автомодельных решений и уравнение для нахождения константы C :

$$\alpha = -1/7, \quad \beta = 3/7, \quad \gamma = -(1 + 3\delta)/7, \\ C \sin \varphi \int_{-1}^1 \left(\frac{F^3}{3} + B_1 C^\delta \eta^\delta F^2 \right) d\eta = 1. \quad (1.2.8)$$

Заметим, что рассматриваемый класс супергидрофобных поверхностей содержит поверхность, которая также принадлежит классу поверхностей из предыдущего раздела. Такой супергидрофобной поверхности соответствуют параметры $\delta = 0$, $\gamma = -1/7$.

После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (1.2.5) получаем краевую задачу для автомодельной формы поперечного сечения

ручейка:

$$\frac{1}{3C^2} (F^3 F')' + B_2 C^{\delta-2} (\eta^\delta F^2 F')' + \frac{\text{tg}\varphi}{7} (\eta F^3)' + \frac{3B_1 C^\delta \text{tg}\varphi}{7} (\eta^{\delta+1} F^2)' = 0,$$

$$F'(0) = 0, \quad F(1) = 0.$$

Интегрируя данное уравнение с условием $F'(0) = 0$, получаем задачу:

$$7F'(F + 3B_2 C^\delta \eta^\delta) + 3C^2 F \eta \text{tg}\varphi + 9B_1 C^{\delta+2} \eta^{\delta+1} \text{tg}\varphi = 0, \quad F(1) = 0. \quad (1.2.9)$$

Значение константы C в законе расширения ручейка вычислялось совместно с решением уравнения (1.2.9) с помощью итераций, продолжавшихся до тех пор, пока с заданной точностью не удовлетворялся закон постоянства расхода (1.2.8). Ниже приведены примеры расчетов для различных супергидрофобных поверхностей, характеризуемых значениями параметров $B_{1,2}$ и δ .

Поверхность, у которой коэффициенты скольжения зависят только от одной координаты. Это соответствует случаю $\delta = 0$ и $\gamma = -1/7$ в выражениях для коэффициентов скольжения. Для данных значений параметров уравнение (1.2.9) имеет аналитическое решение, выраженное неявной функцией:

$$F + 3B_2 \ln(F + 3B_1) - 3B_1 \ln(F + 3B_1) = \frac{3C^2 \text{tg}\varphi}{14} (1 - \eta^2) +$$

$$+ 3B_2 \ln(3B_1) - 3B_1 \ln(3B_1).$$

На рис. 1.8 (а) представлены автомодельные формы поперечного сечения ручейка для случая супергидрофобной поверхности, у которой $B_2 = 0$, при различных значениях B_1 . Для супергидрофобных поверхностей, имеющих полосчатую микроструктуру, $B_2 = 2B_1$ (имеется в виду случай, когда направление полос перпендикулярно оси симметрии ручейка). На рис. 1.8 (б) представлены расчеты автомодельного профиля поверхности ручейка именно для такого случая. Видно, что в обоих случаях решение с проскальзыванием при $B_1 \rightarrow 0$ переходит в известный результат работы [99].

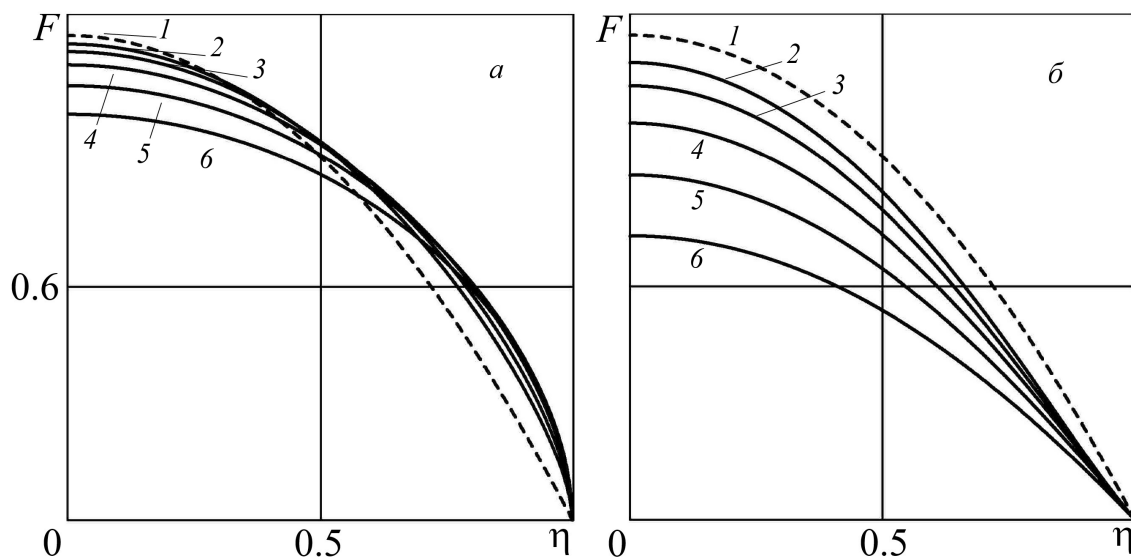


Рис. 1.8: Автомоделная функция $F(\eta)$, $a - B_2 = 0$, $b - B_2 = 2B_1$; $B_1 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ (1–6); штриховые линии – случай прилипания; $\varphi = \pi/4$

На основе анализа проведенных расчетов установлено, что для каждого конечного значения угла наклона φ имеется взаимно-однозначное соответствие между значениями параметров $B_{1,2}$ в законе проскальзывания и формой поперечного сечения ручейка. Ниже в таблице представлены вычисленные значения константы C и $F(0)$, соответствующие решениям, представленным на рис 1.8 (б).

B	0.0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8	1.6
C	2.410	2.647	2.716	2.745	2.688	2.524	2.286
$F(0)$	1.245	1.175	1.115	1.019	0.885	0.729	0.576

Из таблицы видно, что имеется конечный диапазон значений коэффициента скольжения, внутри которого двум различным значениям B_1 соответствует один и тот же закон расширения области смачивания (константа C). Таким образом, по автомоделному закону расширения зоны смачивания, наблюдаемой в эксперименте, нельзя однозначно определить значения коэффициентов скольжения. Помимо формы зоны смачивания необходимо регистрировать еще одну величину, например, толщину ручейка на оси симметрии.

Поверхность, у которой коэффициенты скольжения зависят от двух пространственных координат. Уравнение (1.2.9) для рассматриваемых супергидрофобных поверхностей численно интегрировалось с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. В случае $B_2 = 0$ точка $\eta = 1$ является особой для уравнения (1.2.9), поэтому для численного решения была выделена асимптотика решения в окрестности особой точки. Подставляя $F(\eta) = k(1 - \eta)^\theta$ в (1.2.9), находим главный член асимптотического разложения:

$$F(\eta) = \sqrt{18B_1C^{\delta+2}\text{tg}\varphi/7}(1 - \eta)^{1/2}.$$

На рис. 1.9 представлены результаты численного интегрирования уравнения (1.2.9) для случая $\gamma = -1$, $\delta = 2$. Кривые (а) получены с использованием найденной асимптотики.

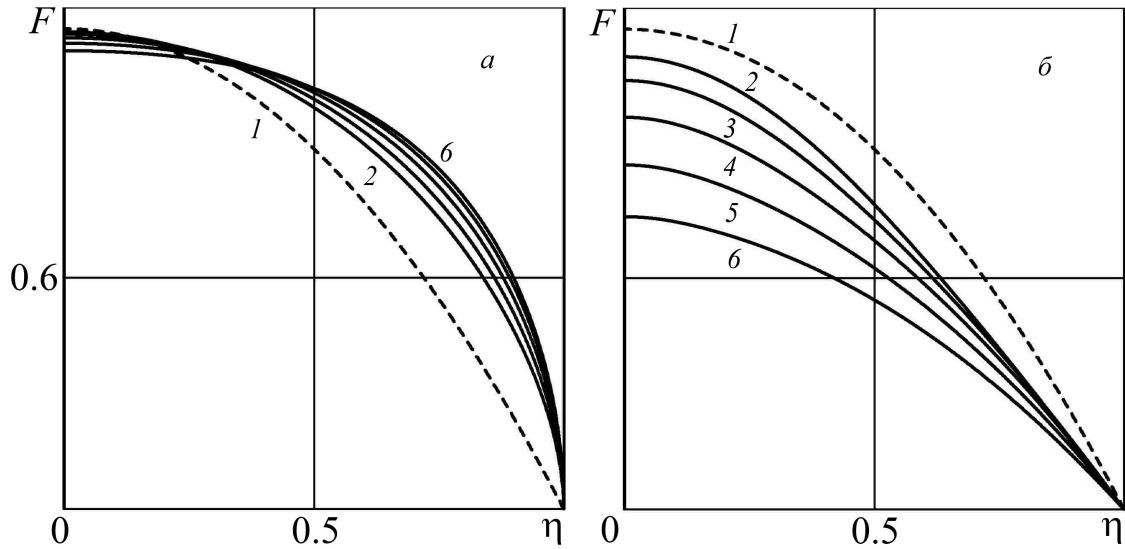


Рис. 1.9: Автомоделная функция $F(\eta)$, а – $B_2 = 0$, б – $B_2 = 2B_1$; $B_1 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ (1–6); штриховые линии – случай прилипания; $\varphi = \pi/4$

Вычисленные значения константы C и $F(0)$ для кривых (б) приведены ниже в таблице.

B	0.0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8	1.6
C	2.410	2.841	2.880	2.850	2.742	2.576	2.381
$F(0)$	1.245	1.173	1.113	1.017	0.894	0.760	0.632

Видно, что для рассматриваемого типа поверхности также имеется неоднозначность значений C в законе расширения зоны смачивания. Поэтому для определения коэффициентов скольжения необходимо также фиксировать толщину ручейка на оси симметрии.

В исходных размерных переменных полученные в данном пункте решения записываются в виде:

$$h^* = \left(\frac{\nu^{*2} Q^{*2}}{x^* g^2} \right)^{1/7} F(\eta), \quad y^* = C \left(\frac{\nu^* Q^* x^{*3}}{g} \right)^{1/7},$$

$$b_{1,2}^* = B_{1,2} \left(\frac{\nu^{*(2-\delta)} Q^{*(2-\delta)} g^{(\delta-2)}}{x^{*(1+3\delta)}} \right)^{1/7} y^{*\delta}.$$

1.3 Эволюция тонкого слоя вязкой жидкости на поверхности горизонтального цилиндра

В двумерной постановке рассматривается нестационарное изотермическое стекание тонкого слоя вязкой жидкости по внешней супергидрофобной поверхности кругового горизонтального цилиндра радиуса R под действием силы тяжести. Рассматриваются супергидрофобные поверхности, для которых компоненты тензора скольжения b_{ij}^* – константы, а направление одной из главных осей тензора скольжения совпадает с образующей цилиндра. Предполагается, что жидкость покрывает подстилающую поверхность сплошным слоем (отсутствуют краевые углы смачивания). Для описания течения жидкости вводится цилиндрическая система координат, связанная с цилиндрической поверхностью. Точки с координатами $r^* = R$ лежат на подстилающей поверхности. Азимутальная координата φ отсчитывается от верхней точки цилиндрической поверхности. Сила тяжести перпендикулярна образующей цилиндра; поверхностное натяжение не учитывается (рис. 1.10).

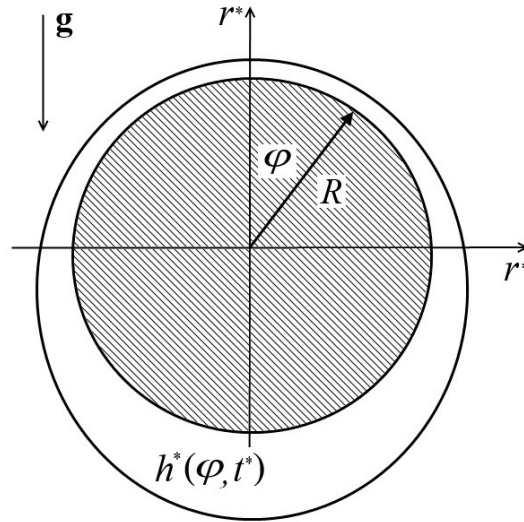


Рис. 1.10: Тонкий слой жидкости на круговом цилиндре

Введем обозначения $v = v_r^*$ и $u = v_\varphi^*$, где v_r^* и v_φ^* – размерные радиальная и азимутальная компоненты скорости жидкости. Уравнения неразрывно-

сти и Навье-Стокса в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial r^* v^*}{\partial r^*} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{u^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{u^{*2}}{r^*} = & -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \nu^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* v^*}{\partial r^*} \right) + \\ & + \nu^* \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right] - g \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{u^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \frac{v^* u^*}{r^*} = & -\frac{1}{\rho^* r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} + \nu^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* u^*}{\partial r^*} \right) + \\ & + \nu^* \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right] + g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Введем набор безразмерных переменных

$$u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon U}, \quad t = \frac{U}{R} t^*, \quad r = \frac{r^* - R}{h_0^*},$$

$$p = p^* \frac{\varepsilon \text{Re}}{\rho^* U^2}, \quad \varepsilon = \frac{h_0^*}{R}, \quad r^* = R(1 + \varepsilon r),$$

где R – размерный радиус цилиндрической поверхности, $\text{Re} = UR/\nu^*$. Размерная величина h_0^* – характерная толщина слоя, покрывающего цилиндрическую поверхность в начальный момент времени, ε – относительная толщина слоя, предполагается малой величиной. После обезразмеривания получаем:

$$\frac{\partial (1 + \varepsilon r) v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \text{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] - \varepsilon^2 \text{Re} \frac{u^2}{1 + \varepsilon r} = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} [(1 + \varepsilon r) v] \right] + & \frac{\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon r)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{2\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon r)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\varepsilon^2 \text{Re}}{\text{Fr}^2} \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \text{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \varepsilon \frac{vu}{1 + \varepsilon r} \right] = & -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} [(1 + \varepsilon r) u] \right] + & \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon r)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon r)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon^2 \text{Re}}{\text{Fr}^2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $\text{Fr} = (U^2/gR)^{1/2}$, g – ускорение силы тяжести. Предполагается, что $\varepsilon \ll 1$, при этом $\varepsilon^2 \text{Re} \rightarrow 0$. Масштаб скорости находим из условия равенства единице слагаемого, содержащего силу тяжести $U = h_0^{*2} g / \nu$. Пренебрегая в безразмерных уравнениях членами, содержащими ε , приходим к уравнениям теории смазки на искривленной поверхности

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \quad (1.3.1)$$

Полученная система уравнений активно используется в литературе для исследования эволюции тонких слоев жидкости на искривленных поверхностях разной геометрии [69, 108, 109, 110].

В данной постановке скорость может быть найдена независимо от давления. Граничные условия для полученной системы уравнений – это условия проскальзывания Навье для азимутальной компоненты скорости u и непротекания для радиальной v на поверхности цилиндра, а также условие отсутствия касательных напряжений на внешней границе слоя и постоянное внешнее давление окружающей среды:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad u &= B \frac{\partial u}{\partial r}, \quad v = 0, \\ r = h(t, \varphi) : \quad p &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Здесь B – безразмерная длина скольжения b^* , отнесенная к h_0^* . Динамическое условие для касательных напряжений получается после обезразмеривания $p_{ij}^* n_j^* \tau_i^* = 0$.

Задача о течении вязкой жидкости со свободной границей завершается заданием кинематического условия на внешней границе слоя. В безразмерной форме при $\varepsilon \rightarrow 0$ кинематическое условие записывается в виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial \varphi} = v.$$

После интегрирования уравнений движения (1.3.1) с граничными условиями (1.3.2) получаем выражение для азимутальной скорости:

$$u = \sin \varphi \left(rh - \frac{r^2}{2} + Bh \right). \quad (1.3.3)$$

Давление p и радиальная компонента скорости v могут быть также найдены из решения уравнений движения, но, так как далее они не используются, выражения для них не приводятся.

После интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя и подстановки полученного результата в кинематическое условие получаем соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{h(t, \varphi)} u(t, \varphi) dr = 0.$$

Подставив в интеграл выражение (1.3.3) для u , получаем эволюционное уравнение в частных производных, в которое входит только неизвестная толщина слоя $h(t, \varphi)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{h^3}{3} + Bh^2 \right) \sin \varphi \right) = 0. \quad (1.3.4)$$

Данное уравнение при $B = 0$ ранее использовалось для изучения процесса утончения тонкого слоя вязкой жидкости, стекающего по цилиндрической поверхности [108, 110]. Начальное условие для полученного уравнения – это заданная толщина слоя в нулевой момент времени: $h(0, \varphi_0) = f(\varphi_0)$, при $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$. Здесь учтена симметрия решения относительно линии, соединяющей верхнюю и нижнюю точки цилиндра.

Уравнение (1.3.4) имеет гиперболический тип. Для удобства исследования его решений перепишем (1.3.4) в виде системы уравнений вдоль характеристических направлений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= (h^2 + 2Bh) \sin \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \\ \frac{dh}{dt} &= - \left(\frac{h^3}{3} + Bh^2 \right) \cos \varphi, \quad h(0) = f(\varphi_0). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Из второго уравнения характеристической системы следует, что при $\varphi < \pi/2$ происходит монотонное утончение слоя, а при $\varphi > \pi/2$ – утолщение. Интегрируя характеристическую систему на интервале $\varphi_0 \leq \varphi < \pi$, получаем закон изменения азимутального угла при стекании слоя по поверхности цилиндра.

Система уравнений (1.3.5) имеет две точки, соответствующие $\varphi_0 = \{0, \pi\}$, в которых не применимы уравнения вдоль характеристик. Второе уравнение характеристической системы в этих точках принимает вид:

$$\frac{dh}{dt} = \mp \left(\frac{h^3}{3} + Bh^2 \right).$$

Например, решение, удовлетворяющее начальному условию равномерного по толщине слоя $h(t=0) = 1$, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 : \quad \ln \left(1 + \frac{3B}{h} \right) - \frac{3B}{h} &= -3B^2t + \ln(1 + 3B) - 3B, \\ \varphi = \pi : \quad \ln \left(1 + \frac{3B}{h} \right) - \frac{3B}{h} &= +3B^2t + \ln(1 + 3B) - 3B. \end{aligned}$$

Если $B \rightarrow 0$, то получаем решение $h(t) = \sqrt{3/(3 \pm 2t)}$, известное в литературе.

Далее представлены результаты численного решения системы уравнений (1.3.5) для различных значений коэффициента скольжения B . На рис. 1.11 показано изменение начального значения азимутального угла точки, лежащей на границе слоя, вдоль характеристики с увеличением времени; на рис. 1.12 показана эволюция толщины слоя на цилиндре. На рис. 1.13 показана эволюция толщины слоя в верхней и нижней точках цилиндра. Из представленных результатов следует, что при наличии гидрофобного скольжения на поверхности цилиндра происходит значительное уменьшение времени утончения слоя жидкости по сравнению с обычным цилиндром без проскальзывания. Таким образом, при наличии гидрофобного скольжения уменьшается время стекания жидкости. Чем больше величина проскальзывания на поверхности супергидрофобного цилиндра, тем быстрее происходит стекание слоя.

Важно заметить, что предложенная упрощенная модель в окрестности верхней и нижней точек цилиндра применима только на начальной стадии стекания слоя. Это следует из того, что толщина слоя в верхней точке цилиндра достигает нуля за бесконечное время, а в нижней точке – становится

бесконечной за конечное время (рис. 1.13). Таким образом, для того чтобы получить математическую модель, адекватно описывающую реальный процесс стекания слоя по поверхности супергидрофобного цилиндра на больших масштабах времени, необходимо учитывать дополнительные факторы, оказывающие влияние на эволюцию толщины слоя, например, поверхностное натяжение и расклинивающее давление, обусловленное межмолекулярными силами Ван-дер-Ваальса.

Однако в силу установленного взаимно-однозначного соответствия между проскальзыванием и временем утончения слоя, предложенная упрощенная модель может быть использована для определения коэффициента скольжения супергидрофобной поверхности с постоянным проскальзыванием.

Результаты **Главы 1** опубликованы в печатных работах [92, 93, 94, 95, 96, 97, 105, 106, 107, 111, 112, 113].

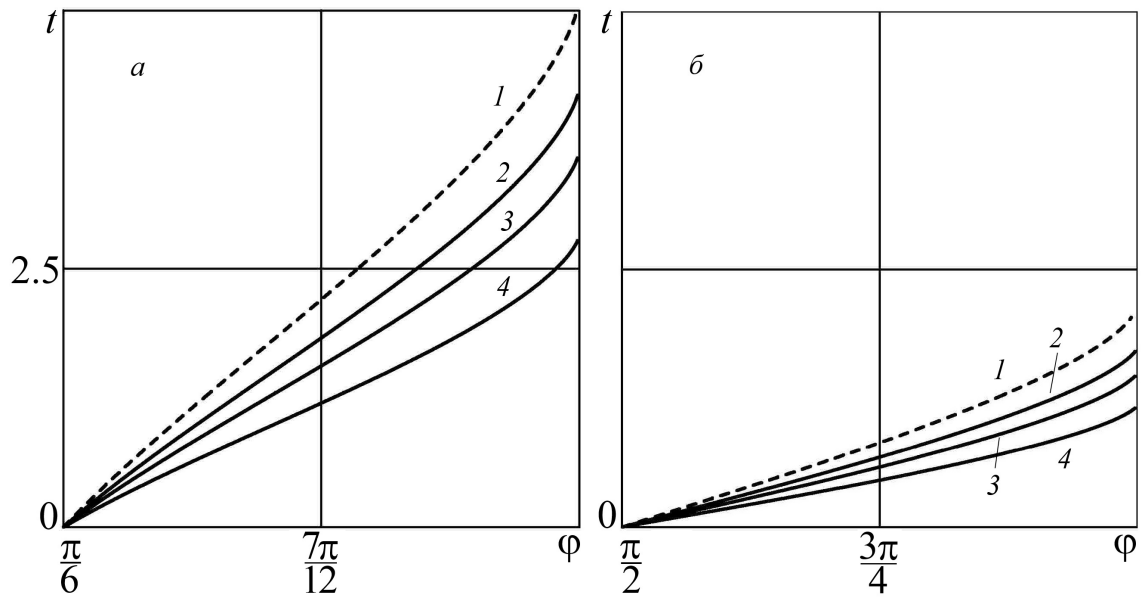


Рис. 1.11: Изменение азимутального угла φ вдоль характеристики, $a - \varphi_0 = \pi/6$, $b - \pi/2$, $B = 0, 0.1, 0.2, 0.4$ (1-4); штриховые линии – случай прилипания

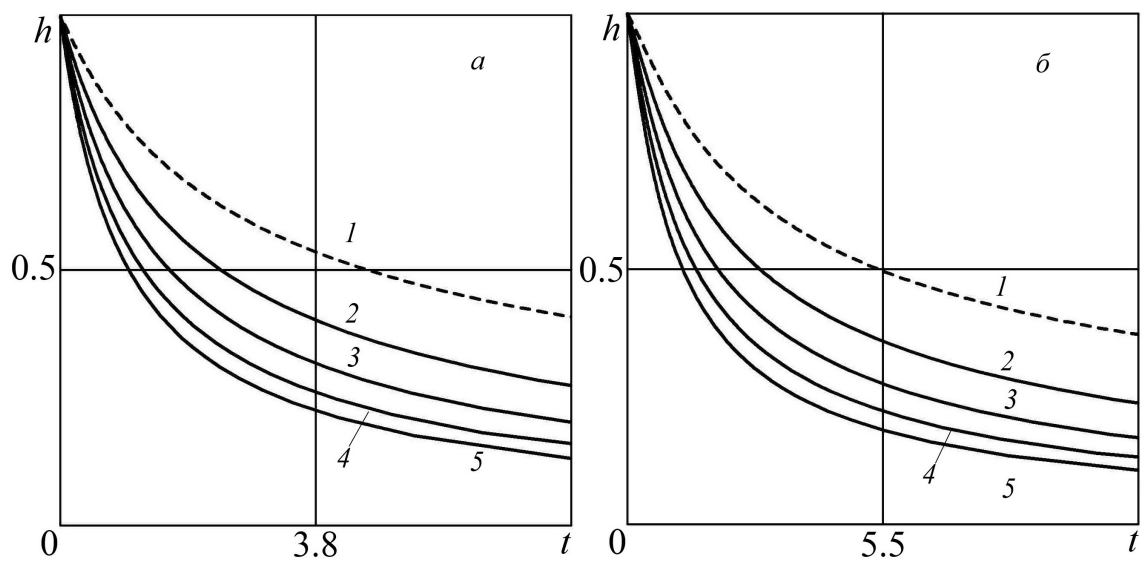


Рис. 1.12: Эволюция толщины слоя на цилиндре, $a - \varphi = \pi/6$, $b - \varphi = \pi/3$,
 $B = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (1–5); штриховые линии – случай прилипания

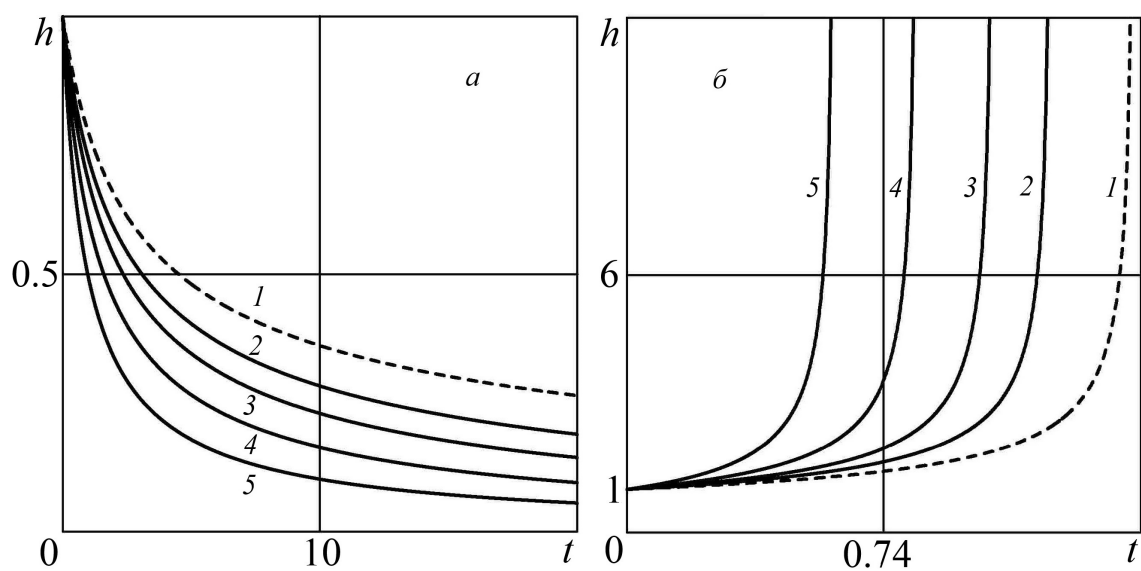


Рис. 1.13: Эволюция толщины слоя $h(t)$ в верхней (а) и нижней (б) точках цилиндрической поверхности, $B = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ (1–5); штриховые линии – случай прилипания

Глава 2

Течение вязкой жидкости в окрестности периодической текстуры супергидрофобной поверхности

В настоящей главе выполнено параметрическое численное исследование эффективной длины скольжения на основе решения микрогидродинамической задачи обтекания вязкой жидкостью текстуры супергидрофобной поверхности с использованием осредненного условия проскальзывания на стенке. Поле скорости в области над текстурой, занятой жидкостью, вычисляется с использованием метода граничных интегральных уравнений, применяемым в задачах стоксовой гидродинамики [114–125]. Преимущество применяемого численного метода состоит в том, что исходные уравнения движения, заданные внутри области со сложной геометрией, сводятся к системе эквивалентных интегральных уравнений на границе для плотностей фундаментальных решений, при этом размерность исходной дифференциальной задачи понижается на единицу. Кроме того, метод граничных интегральных уравнений удобен для решения задач с неоднородными граничными условиями.

Рассматривается двумерное установившееся течение вязкой жидкости в области, состоящей из канала толщины H и микрокаверны, частично или полностью заполненной невязким газом (рис. 2.1). Форма межфазной гра-

ницы считается заданной. Верхняя граница может быть неподвижной либо двигаться с заданной скоростью. Такая геометрия соответствует выделенному элементу текстуры супергидрофобной поверхности.

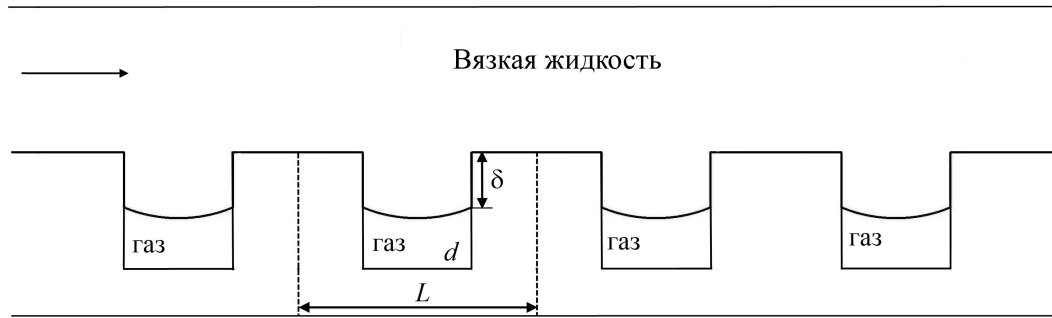


Рис. 2.1: Схема течения жидкости в области над текстурой супергидрофобной поверхности

На масштабе рассматриваемого элемента текстуры L в микрокаверне ширины d между жидкостью и газом образуется межфазная граница, на которой жидкость практически не испытывает трения в силу малости динамической вязкости газа по сравнению с вязкостью жидкости. Ниже рассматриваются лишь ситуации, когда поверхность газовой фазы выпукла в сторону каверны. Вводится декартова система координат $0x^*y^*$, ось $0x^*$ совпадает с направлением течения жидкости, а начало координат лежит на плоскости симметрии рассматриваемого элемента текстуры.

Обозначим через $\mathbf{x}^*$ размерный радиус-вектор рассматриваемой точки относительно выбранной системы координат. При обезразмеривании за характерные длину и скорость течения в рассматриваемой области выберем период L и характерную скорость U на левой и правой границах (выбор конкретных значений U для течения в микроканале с заданным расходом и для течения с заданным сдвигом скорости вдали от нижней стенки пояснен ниже для каждого рассматриваемого течения жидкости), давление отнесено к $\mu U/L$, где μ — динамическая вязкость жидкости. Для используемых на практике супергидрофобных поверхностей с $L \sim 10^{-4} - 10^{-2}$ см, характерные скорости вблизи границы также очень малы, поэтому для рассматриваемого класса течений числа Рейнольдса много меньше едини-

цы, и для описания течения можно использовать уравнения Стокса. После перехода к безразмерным переменным векторные уравнения Стокса принимают вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0. \quad (2.1)$$

Математическая постановка задачи завершается заданием граничных условий на границе области течения жидкости: твердых стенках, входном и выходном сечениях канала, а также межфазной границе. Для компонент вектора скорости $\mathbf{u}$ на твердых стенках ставятся условия прилипания; на входном и выходном сечениях рассматриваемой области течение считается плоскопараллельным и задаются одинаковые профили продольной компоненты скорости $u_0(y)$. На межфазной границе ставятся условия непротекания для скорости $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ и отсутствия касательных напряжений $p_{ij}n_j\tau_i = 0$. Здесь $\mathbf{n}$ – вектор внутренней (направленной в сторону жидкости) нормали к межфазной границе, $\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор к межфазной границе, p_{ij} – компоненты тензора напряжений; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Для построения решения поставленной задачи о стоксовом течении в канале сложной формы со смешанными граничными условиями будем использовать метод граничных интегральных уравнений (теория гидродинамических потенциалов) [114, 115]. Аналогично методам теории потенциала для уравнения Лапласа (где общее решение строится в виде суммы интегралов от распределенных по границе потенциалов простого и двойного слоя), в силу линейности оператора Стокса поле скорости внутри и на границе области течения в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ может быть представлено как сумма интегралов от так называемых "стокслетов" $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и "стресслетов" $T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ (с заранее неизвестными "плотностями"), распределенных по границе области течения

$$\Lambda u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Здесь интегрирование производится по всей границе рассматриваемой области течения Γ , включая входное и выходное сечения; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; $\Lambda = 1$ для точек внутри области и $1/2$ на границе. В (2.2) стокслет $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ есть фундаментальное решение для оператора Стокса, $\mathbf{f} = p_{ij}n_i\mathbf{e}_j$ – вектор напряжений на границе, n_k – компоненты вектора нормали к межфазной поверхности (нормаль направлена внутрь жидкости), а $\mathbf{e}_i$ – единичные базисные векторы. Методика получения фундаментальных решений и вывод уравнения (2.2) изложена в монографиях [114, 115]. Стокслет и стресслет для двумерного течения являются, соответственно, тензорами второго и третьего ранга и имеют вид:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_{ij} \ln r + \frac{\xi_i \xi_j}{r^2}, \quad T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -4 \frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{r^4},$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad r = |\boldsymbol{\xi}|.$$

Здесь δ_{ij} – символы Кронекера. Таким образом, чтобы вычислить поле скорости внутри области течения, необходимо знать компоненты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$, которые являются плотностями распределенных по границе стокслетов и стресслетов. При заданных граничных условиях компоненты указанных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ могут быть найдены из решения векторного интегрального уравнения (2.2), записанного для точек границы ($\Lambda = 1/2$). Первый интеграл, содержащий стокслет с логарифмической особенностью в ядре, может быть вычислен в обычном смысле. Второй интеграл с особенностью $1/r$ понимается в смысле главного значения Коши. Решение векторного интегрального уравнения можно получить только численно. Для этого граница аппроксимируется ломаной линией, и предполагается, что компоненты векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{n}$ – константы в пределах каждого элемента разбиения.

В численной реализации метода граничных интегральных уравнений, использованной в расчетах, рассматривались разбиения, для которых угловые точки границы совпадают с концевыми точками смежных элемен-

тов, образующих угол (рис. 2.2). Элементы разбиения на участках границы с локальным прилипанием, проскальзыванием, а также во входном и выходном сечениях распределялись равномерно. В качестве узловых точек, в которых вычислялись значения искомых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$, выбирались середины элементов (на рис. 2.2 обозначены точками).

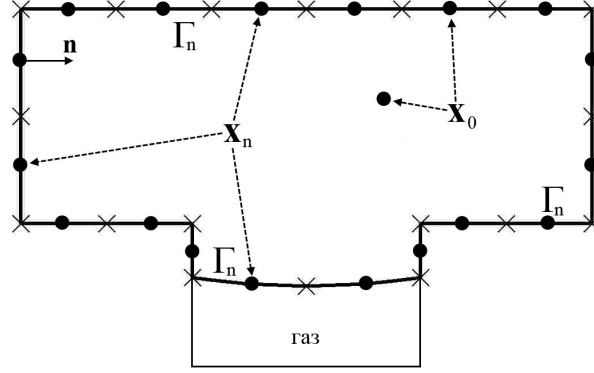


Рис. 2.2: Типичное разбиение границы на элементы, использованное в расчетах

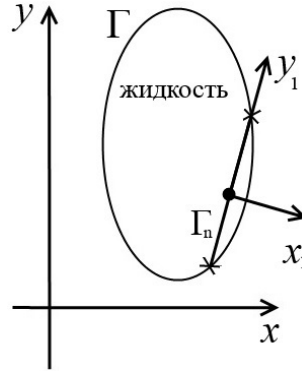


Рис. 2.3: Локальная система координат на элементе

С учетом сказанного интегральные уравнения вдоль Γ для внутренних и граничных точек (2.2) заменяются дискретной суммой интегралов по элементам

$$\begin{aligned} \Lambda u_j(\mathbf{x}_0) = & -\frac{1}{4\pi} \sum_n f_i(\mathbf{x}_n) \int_{\Delta\Gamma_n} G_{ij}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}_n) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_n u_i(\mathbf{x}_n) \left[n_k(\mathbf{x}_n) \int_{\Delta\Gamma_n} T_{ijk}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}_n) \right], \quad \Gamma = \cup \Gamma_n. \end{aligned}$$

Линейные интегралы вдоль элементов при не совпадающих $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ аппроксимировались по квадратурной формуле Симпсона. Количество элементов разбиения, образующих границу области для всех рассматриваемых случаев течения жидкости, удовлетворяет требованию совпадения с заданной точностью значений интегралов, вычисленных аналитически и по формуле Симпсона. Суммарное число элементов разбиения границы, использованных в расчетах, как правило, варьировалось от 800 до 2000 в зависимости от геометрии границы области, что обеспечивает точность вычислений до двух значащих цифр.

Сингулярные линейные интегралы вдоль элементов, на которых $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0$, вычислялись аналитически с использованием перехода из абсолютной декартовой системы координат в локальную ортогональную систему, связанную с серединой элемента (рис. 2.3). Проводя необходимые математические выкладки, получаем значения сингулярных интегралов на границе:

$$\int_{\Delta\Gamma_n} G_{ij}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}_n) = -\Delta\Gamma_n \left[\delta_{ij} \left(\ln \left(\frac{\Delta\Gamma_n}{2} \right) - 1 \right) - e_i e_j \right],$$

$$\int_{\Delta\Gamma_n}^{p.v.} T_{ijk}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}_n) = 0,$$

где $\Delta\Gamma_n$ – длина элемента разбиения, а e_i – направляющие косинусы элемента в исходной абсолютной системе координат. Способ сведения векторного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и способ устранения сингулярностей под интегралами основывается на методике, подробно изложенной в [117].

Для рассматриваемой гидродинамической задачи с межфазной границей к СЛАУ необходимо добавить условия непротекания и отсутствия касательных напряжений на межфазной границе, реализуемых в виде дополнительных уравнений, записанных для точек, лежащих на межфазной

границе. Условие для напряжений удобно представить в виде:

$$\mathbf{f} = p_{ij}n_i\mathbf{e}_j = f_j\mathbf{e}_j, \quad p_{ij}n_i\tau_j = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} = f_j\tau_j = 0.$$

Из решения суммарной СЛАУ, получаемой с учетом указанных граничных условий на межфазной поверхности, находятся плотности стокслетов и стресслетов на всей границе области течения. Затем, с использованием найденных плотностей, рассчитывается величина скорости жидкости в любой точке области. Решение СЛАУ высокого порядка может быть найдено с помощью методов, развитых в [122]. В проведенном исследовании применялся стандартный метод Гаусса с выделением главного элемента.

Заметим, что при рассмотрении течения жидкости вдоль каверн можно получить одномерные аналоги рассматриваемых ниже задач, которые сводятся к уравнению Пуассона для продольной (вдоль каверны) компоненты скорости. Такие задачи также могут быть решены с использованием соответствующих граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа.

Ниже рассмотрен ряд примеров использования изложенной в данном пункте методики и разработанного численного алгоритма для расчета поперечного обтекания каверн с различными формами межфазной границы и ее положения. В качестве модельных задач, на которых тестировался разработанный численный алгоритм, в начале приведены расчеты задач об обтекании каверны, полностью занятой вязкой жидкостью, и каверны с плоской межфазной границей, для которой известно решение сформулированной задачи.

2.1 Обтекание сдвиговым потоком каверн, полностью занятых жидкостью

В качестве первого теста разработанного численного алгоритма и его программной реализации на ЭВМ были проведены расчеты поля скорости для задачи обтекания прямоугольной каверны без газового пузырька сдви-

говым потоком с заданной скоростью сдвига k^* : $u_0^* = k^* y^*$ (звездочками здесь и ниже отмечены размерные величины). Если в качестве масштабов при обезразмеривании длины и скорости взять L и $k^* L$, то в безразмерной формулировке профиль скорости во входном и выходном сечениях имеет вид: $u_0(y) = y$, $v = 0$. В расчетах было принято, что $H = L$, тогда на верхней границе области течения $u = 1$, $v = 0$. На остальных твердых стенках выполнено условие прилипания: $u = v = 0$. Для рассматриваемой постановки задачи на всей границе области течения жидкости задается вектор скорости $\mathbf{u}$, а векторное интегральное уравнение (2.2) для граничных точек сводится к СЛАУ для нахождения неизвестных компонент вектора $\mathbf{f}$, распределенных по границе.

В проведенных тестовых расчетах были рассмотрены квадратная каверна, прямоугольные каверны с различным соотношением сторон, а также каверна в форме дуги окружности. Рассчитанные картины линий тока хорошо согласуются с результатами аналогичных расчетов других авторов. В качестве примера, на рис. 2.4, 2.5 показаны расчеты линий тока для квадратной и прямоугольных каверн с разным соотношением ширины к глубине, совпадающие с расчетами, представленными в [116], и теорией [126, 127]. В хорошем соответствии с известными результатами находятся также количество и форма вихрей для более глубоких каверн. Так, например, в прямоугольной каверне с соотношением сторон 1:4 образуются уже три вихря (рис. 2.5, б). Воспроизводятся и известные мелкомасштабные особенности течения, в частности, несовпадение точки отрыва верхней вихревой зоны с угловой точкой каверны. В углах квадратной каверны воспроизведена последовательность вихрей Моффата. На рис. 2.4 (а) показан лишь наиболее крупный угловой вихрь.

2.2 Обтекание газовой микрокаверны с плоской межфазной границей

В качестве второго теста были проведены расчеты течения в плоском канале конечной толщины, верхняя стенка которого неподвижна, а на нижней супергидрофобной стенке имеются периодически расположенные каверны, полностью заполненные газом, с плоской межфазной границей. Продольный градиент давления для осредненного течения в канале считается фиксированным. Решение аналогичной задачи для одного периода было построено в виде рядов Фурье, например, в работах [51, 52], где, в частности, было показано, что с увеличением d/L профиль скорости между кавернами (который удовлетворяет условию периодичности течения и используется в рассматриваемой постановке в качестве u_0) начинает заметно отличаться от пуазейлевского профиля (здесь скорость отнесена к максимальному значению на оси):

$$u_0(y) = 1 - \left(\frac{2yL}{H} - 1 \right)^2, \quad v = 0. \quad (2.3)$$

На рис. 2.6 (а) показаны профили u_0 , вычисленные по формулам [51, 52] для трех значений доли газового участка d/L . Отличие указанных профилей от пуазейлевского связано с тем, что за каверной возмущенный профиль течения в канале довольно медленно выходит на пуазейлевский даже для стоксовского течения.

Для того, чтобы результаты рассматриваемой задачи о течении вблизи одиночной каверны можно было строго переносить на задачу о периодической системе каверн, в дополнение к условию периодичности профиля скорости $u_0(-0.5, y) = u_0(0.5, y)$ на входе и выходе из рассматриваемой области необходимо потребовать обнуления производных скорости по продольной координате. Именно этим условиям и удовлетворяют профили u_0 из работы [51, 52], представленные на рис. 2.6 (а). В проведенных расчетах обтекания каверны с плоской межфазной границей с использованием

метода граничных интегральных уравнений в качестве $u_0(y)$ использовались профиль Пуазейля (2.3) и периодические профили, показанные на рис. 2.6 (а). На межфазной границе ($-d/2L \leq x \leq d/2L$) задавались условия непротекания и нулевые касательные напряжения, а на остальной части нижней границы и на верхней стенке ставились условия прилипания. Для сравнения с результатами работ [51, 52], кроме поля скорости, был вычислен также эффективный безразмерный (отнесенный к L) коэффициент скольжения b_{eff} , определяемый из осредненного по периоду L безразмерного условия Навье $\langle u_w \rangle = b_{\text{eff}} \langle (\partial u / \partial y)_w \rangle$, где скобки означают осреднение, а индекс w относится к значениям параметров при $y = 0$.

На рис. 2.6 (б, в) представлены сравнения наших расчетов профилей скорости $u(y)$ на плоскости симметрии каверны и $u(x)$ вдоль межфазной границы с решением [51, 52]. Штриховой линией показаны также расчеты, соответствующие пуазейлевскому профилю $u_0(y)$, заданному на входном и выходном сечениях канала. На рис. 2.7 представлены результаты сравнения эффективной длины скольжения, вычисленной для различных значений относительной ширины канала H/L и доли газового участка d/L .

Видно, что характеристики течения жидкости в канале над прямолинейной межфазной границей, вычисленные с использованием метода граничных интегральных уравнений, с высокой точностью совпадают с аналитическими результатами работ [51, 52] для одних и тех же значений входных параметров, что служит подтверждением качества разработанного численного алгоритма и его точности.

Кроме того, важно отметить, что использование пуазейлевского профиля в качестве $u_0(y)$ не позволяет детально описать поля скорости в течении с периодической системой близко расположенных каверн, но обеспечивает вполне удовлетворительную точность для расчета эффективного коэффициента скольжения в узком канале с супергидрофобной стенкой.

2.3 Обтекание сдвиговым потоком каверны с искривленной межфазной границей

При рассматриваемых условиях медленного стационарного обтекания микрокаверны с пузырьком газа форма межфазной границы должна практически совпадать со статической и определяться лишь силами поверхностного натяжения. Справедливость этого утверждения следует из оценки $\mu U/d \ll \sigma/R^*$, где левая часть неравенства есть масштаб отклонения давления над мениском от статического за счет динамики жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а R^* – размерный радиус кривизны мениска. Например, для течения воды с характерной скоростью $U \sim 10^{-2}$ м/с вдоль границы с воздушным пузырьком при $d \sim R^*$ левая часть неравенства на шесть порядков меньше правой части. Таким образом, перепад давления на всей межфазной границе можно считать постоянным, а поскольку разность давлений в жидкости и газе на мениске равна σ/R^* , то форма мениска есть дуга окружности, безразмерное уравнение которой в выбранной системе координат принимает вид:

$$x^2 + \left(y + s - \sqrt{R^2 - c^2}\right)^2 = R^2, \quad -c \leq x \leq c.$$

Здесь $c = d/2L$ – половина ширины каверны, $R = R^*/L$, а $s = \delta/L$ задает положение межфазной границы относительно угловых точек каверны. Радиус кривизны мениска определяется статическим углом смачивания θ . Из уравнения мениска в точке касания с боковой стенкой находим:

$$R = -\frac{c}{\cos \theta}.$$

Минимально возможное значение $R = c$ соответствует границе с радиусом, равным половине ширины каверны.

Следует отметить, что при фиксированном угле смачивания, а также заданных массе и температуре газа в пузырьке, величина смещения угловых точек мениска s вглубь каверны является лишь функцией статического

давления. Для целей параметрического исследования влияния кривизны и положения мениска в расчетах (помимо d/L или c) удобно варьировать два параметра R и s .

При $R \rightarrow \infty$ форма межфазной границы – прямая линия; $s = 0$ соответствует межфазной границе, закрепленной в углах каверны. За начальное удобно принимать положение межфазной границы, при котором точки границы совпадают с угловыми точками каверны. При увеличении давления в жидкости межфазная граница (вследствие сжимаемости газа и в пренебрежении его растворимостью) будет погружаться внутрь каверны.

В качестве профиля скорости на входе и выходе из расчетной области задавался линейный профиль $u_0(y) = y$, $v = 0$. Расчеты проводились при различных значениях H/L . Оказалось, что при увеличении H/L больше единицы результаты практически не меняются, поэтому ниже все расчеты приведены для $H/L = 1$.

На рис. 2.8 показана картина линий тока над межфазной границей для $R/c = 1$, $s = 0$ и трех значений d/L . Видно, что для такой формы межфазной границы (радиус кривизны мениска равен половине ширины каверны) образующийся вихрь занимает все пространство над мениском. На рис. 2.9 показано изменение картины линий тока при увеличении R/c . Для других значений d/L качественная картина линий тока сохраняется.

Следует отметить заметное отличие между картинками линий тока в задаче обтекания полукруглой каверны, полностью занятой жидкостью, рассмотренной выше, и в задаче обтекания каверны с пузырем ($R/c = 1$) при наличии проскальзывания вдоль мениска (рис. 2.8). Из расчетов первой задачи следует, что в каверне, полностью занятой жидкостью, также образуется вихрь, но он имеет гораздо меньший размер, и линии тока внешнего течения "провисают" вглубь каверны почти на треть ее глубины. Наличие локального проскальзывания на искривленной межфазной границе приводит к резкому увеличению образовавшегося вихря.

На рис. 2.10 (а) представлены зависимости $b_{\text{eff}}(R/c)$ для четырех значе-

ний d/L и $s = 0$ (краевые точки межфазной границы совпадают с углами каверны). Эффективный коэффициент скольжения вычислялся по формуле $b_{\text{eff}} = \langle u_w \rangle$, которая получена после обезразмеривания условия Навье с использованием характерных масштабов, введенных ранее для рассматриваемого сдвигового течения жидкости. Из представленных на рис. 2.10 (а) результатов следует, что учет конечной кривизны межфазной границы приводит к заметному уменьшению эффективного (осредненного) скольжения, что качественно согласуется с имеющимися в литературе данными [67, 68]. На рис. 2.10 (б) показана зависимость эффективного скольжения от доли газового участка d/L .

Минимум эффективного скольжения в окрестности $R/c \sim 1$ на рис. 2.10 (а) может быть объяснен перестройкой картины течения (образованием небольшой застойной области при исчезновении крупного вихря) с увеличением радиуса кривизны межфазной границы (рис. 2.9). Серия расчетов показала, что обнаруженный минимум сохраняется и для других значений доли газового участка. Максимальное значение b_{eff} соответствует эффективной длине скольжения для сдвигового потока над прямолинейной межфазной границей. Из представленных результатов следует, что влиянием мениска на эффективную длину скольжения можно пренебречь только в случаях, когда радиус кривизны межфазной границы на порядок больше размера каверны.

Была проведена специальная серия расчетов для исследования влияния положения краевых точек межфазной границы относительно углов каверны (величины s) на величину эффективного скольжения (рис. 2.11). Кривые (а) качественно повторяют результаты, полученные для случая $s = 0$: также наблюдается минимум длины скольжения при $R/c \sim 1$ и ее возрастание с увеличением радиуса кривизны мениска. Расчеты, проведенные для трех значений доли газового участка d/L при фиксированном R/c (б), показали, что с увеличением s , когда межфазная граница сдвигается внутрь каверны, коэффициент эффективного скольжения вначале уменьшается,

что может быть объяснено перестройкой течения жидкости над межфазной границей и образованием областей с противотоками. Затем происходит возрастание эффективного скольжения до некоторого предельного значения, которое, как следует из представленных результатов, определяется долей газового участка и не зависит от формы мениска межфазной границы. Зависимость эффективного скольжения от параметра s для других значений d/L и R/c качественно повторяет представленные кривые.

Из результатов проведенного в данном пункте параметрического исследования зависимости эффективного скольжения от определяющих геометрических параметров текстуры (кривизны мениска и его смещения относительно стенок каверны) следует, что учет этих параметров приводит к значительному уменьшению коэффициента эффективного скольжения. Поэтому в большинстве опубликованных ранее работ, в которых межфазная поверхность считается плоской, эффект осредненного проскальзывания на супергидрофобной поверхности сильно завышен.

2.4 Обтекание группы каверн

Для оценки возможности применения результатов предыдущего раздела к задаче о течении вблизи супергидрофобной поверхности с периодически-ми, близко расположенными кавернами были проведены расчеты обтекания группы каверн с четырьмя и шестью периодами текстуры при различных долях газового участка. В предыдущем разделе в качестве u_0 использовался чисто сдвиговый профиль со скоростью сдвига, заданной вдали от поверхности. Естественно ожидать, что при малых d/L такой профиль будет реализовываться между кавернами, однако с увеличением d/L должно увеличиваться взаимное влияние каверн, и "периодический" профиль u_0 , соответствующий гладкому сопряжению (нулевым производным по x) на границах периодов, должен отклоняться от линейного.

Для оценки данного эффекта была рассмотрена область течения, состо-

ящая из четырех и шести периодов текстуры супергидрофобной поверхности с искривленной межфазной границей, что соответствует наличию трех и пяти внутренних плоских участков с локальным прилипанием. В расчетах для рассматриваемой области течения задавался сдвиговой профиль скорости на входном и выходном сечениях, а также выход на тот же сдвиговой поток вдали от стенки. Для фиксированных доли межфазной границы d/L и отношения R/c вычислялись неизвестные компоненты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$. После этого вычислялся профиль скорости, который формируется в срединном сечении центрального участка с локальным прилипанием (рис. 2.1). Затем вычисленный профиль скорости задавался в качестве $u_0(y)$ при расчетах обтекания одиночной каверны. Была проведена серия расчетов эффективной длины скольжения для различных значений d/L и R/c . Сравнение проведенных расчетов с расчетами для одиночной каверны, в которых в качестве u_0 использовался чисто сдвиговой профиль (как в предыдущем разделе), показали, что при небольших d/L вычисленные величины b_{eff} практически совпадают. С увеличением d/L до $2/3$ относительная погрешность b_{eff} для двух разных профилей u_0 достигает 10%. Таким образом, результаты расчета эффективной длины скольжения, представленные в предыдущем пункте, применимы к описанию обтекания супергидрофобной поверхности с умеренно и сильно разреженными периодическими системами каверн. На рис. 2.12 представлен профиль скорости, вырабатывающийся над системой каверн. Для малых долей газового участка периодический профиль совпадает с заданным сдвиговым. На рис. 2.13 изображена картина линий тока над тремя периодами текстуры супергидрофобной поверхности с искривленной межфазной границей, обтекаемых вычисленным периодическим профилем скорости.

Изложенные в **Главе 2** результаты опубликованы в печатных работах [128, 129, 130, 131, 132, 133].

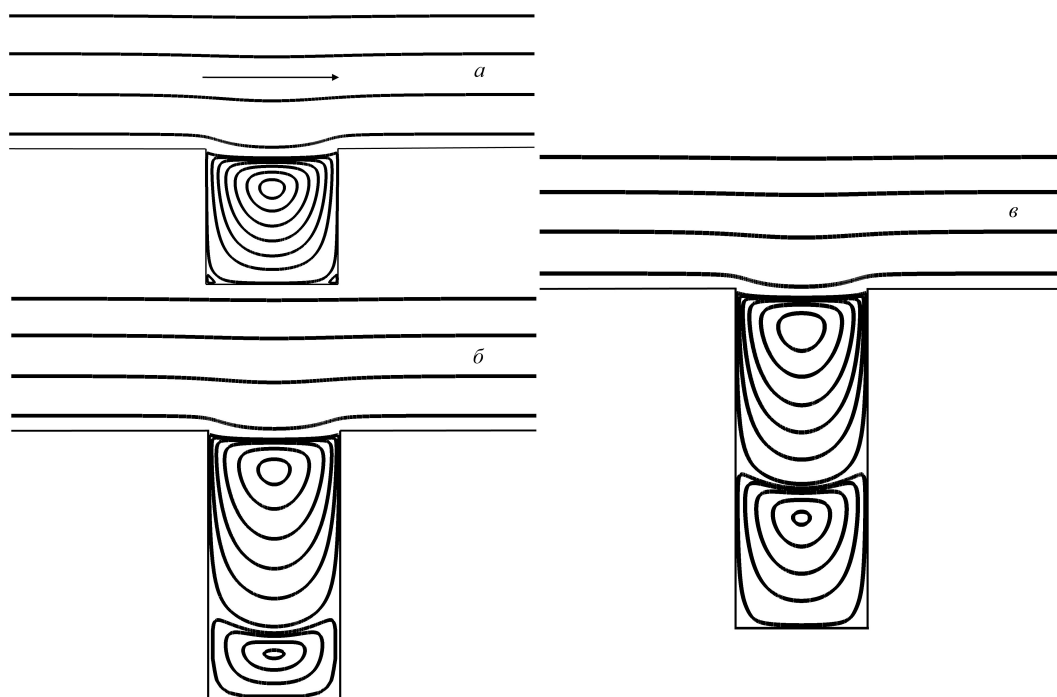


Рис. 2.4: Картина линий тока над прямоугольными кавернами с отношением ширины к глубине: $a - 1:1$, $б - 1:2$, $в - 1:2.5$

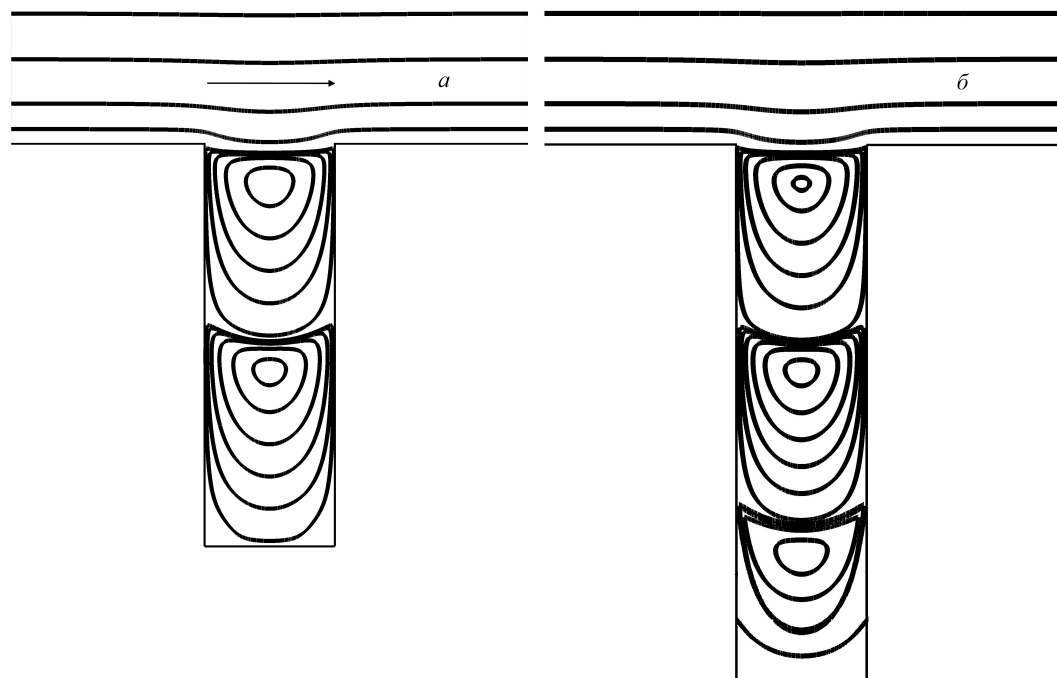


Рис. 2.5: Картина линий тока над прямоугольными кавернами с отношением ширины к глубине: $a - 1:3$, $б - 1:4$

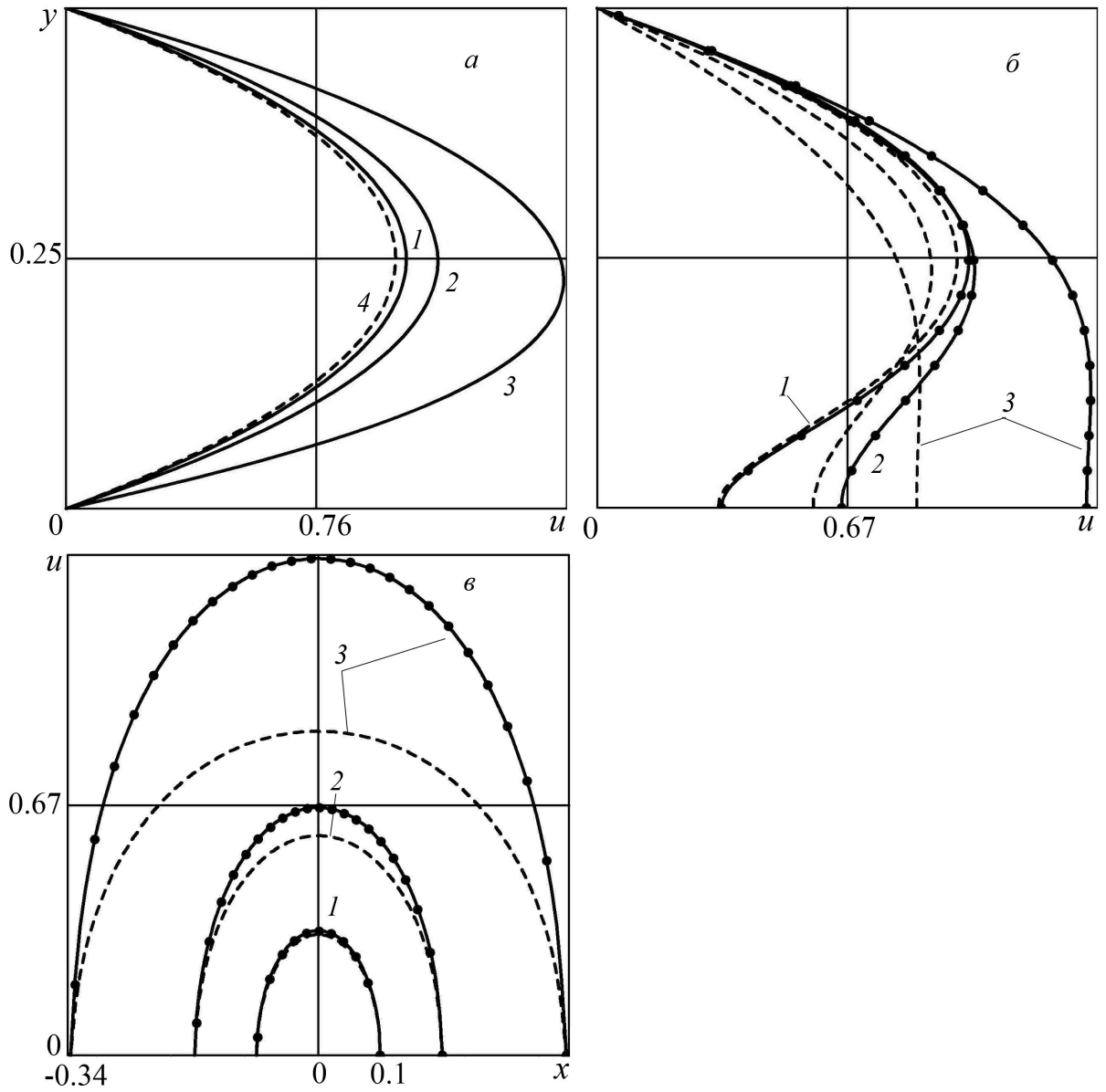


Рис. 2.6: Распределение скорости в плоском канале с супергидрофобной стенкой: *a* – профиль $u_0(y)$ во входном и выходном сечениях периода; *б* – профиль $u(y)$ в плоскости симметрии над каверной; *в* – распределение $u(x)$ вдоль межфазной границы; 1-3 – настоящие расчеты с использованием профилей из [51] для $d/L = 1/6, 1/3, 2/3$ и $H/L = 1/2$; 4 – профиль Пуазейля; точки – аналитическое решение [51], штриховые линии – расчеты, полученные для профиля Пуазейля

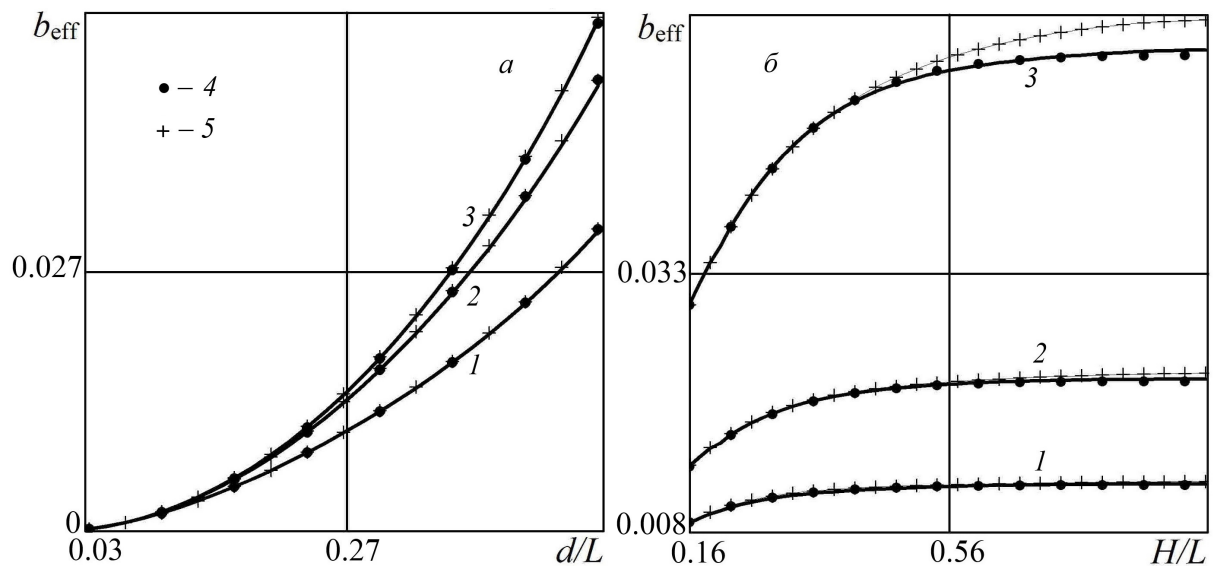


Рис. 2.7: Эффективная длина скольжения для течения в канале при варьировании параметров (а) d/L , 1-3: $H/L = 1/6, 1/3, 1/2$; (б) H/L , 1-3: $d/L = 1/4, 1/3, 1/2$; 4 – аналитическое решение [51], 5 – расчеты с использованием профиля Пуазейля

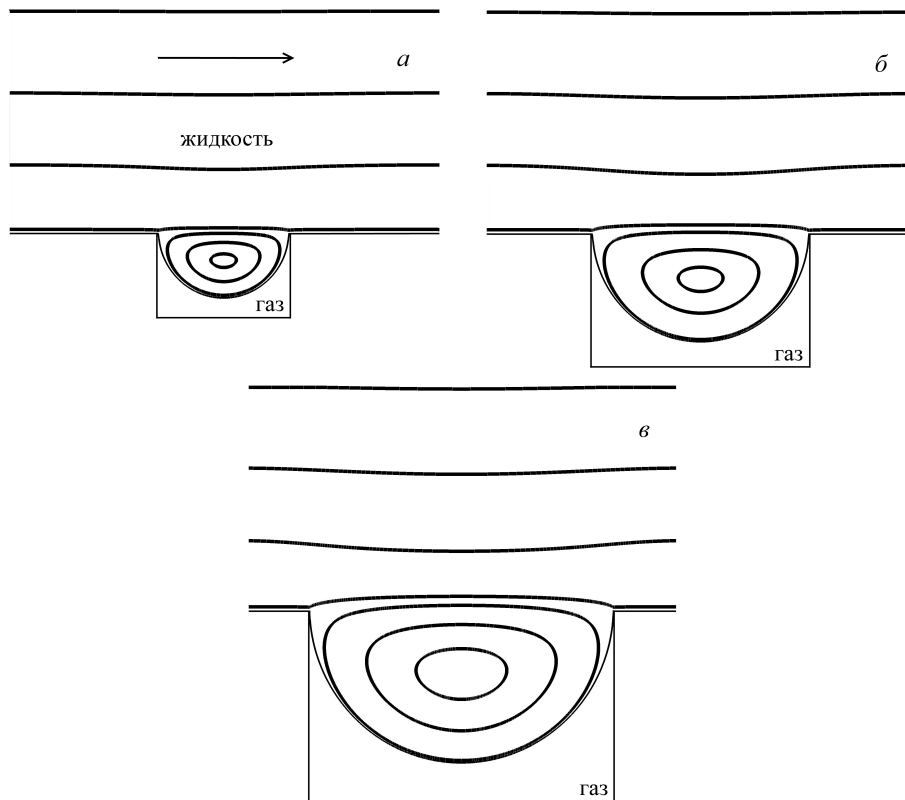


Рис. 2.8: Картина линий тока над искривленной межфазной границей:

a - $в$: $d/L = 0.3, 0.5, 0.7$, $R/c = 1$, $s = 0$

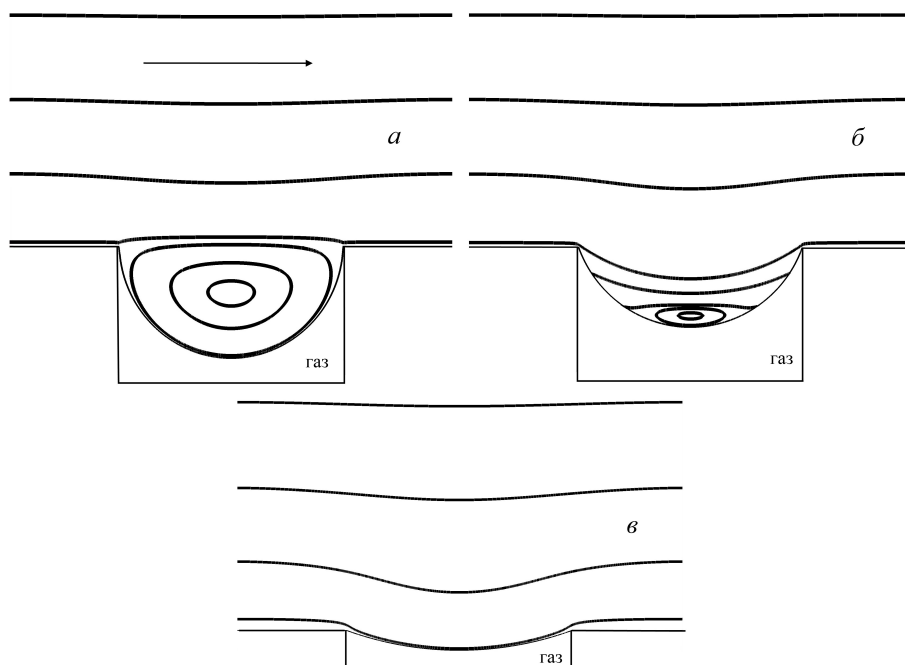


Рис. 2.9: Картина линий тока над мениском разной формы:

a - $в$: $R/c = 1, 1.06, 3$, $d/L = 0.5$, $s = 0$

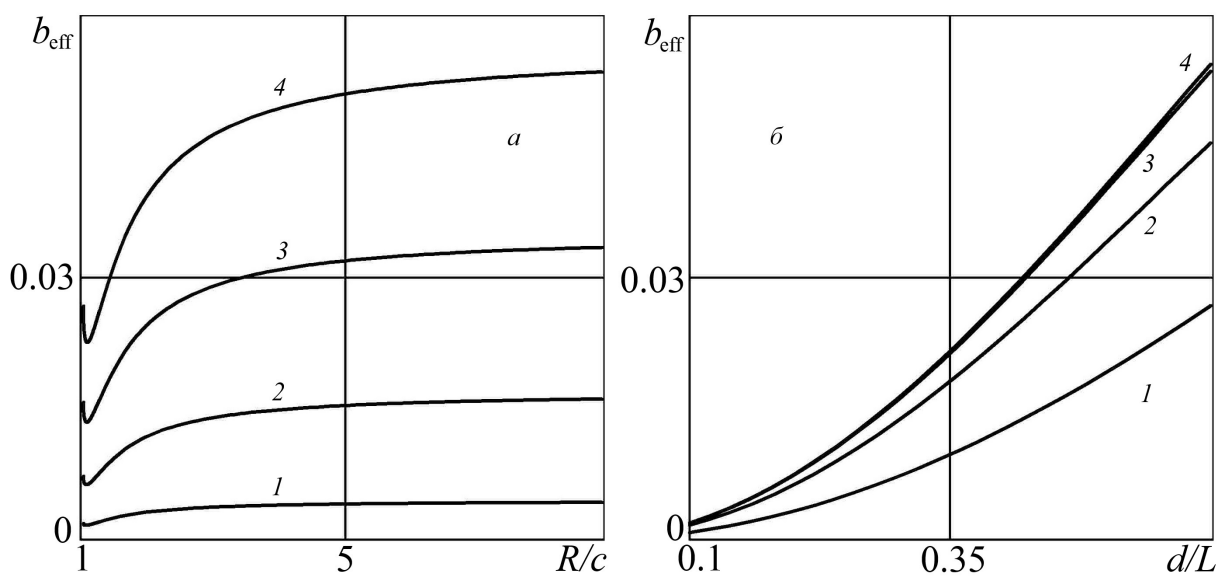


Рис. 2.10: Эффективная длина скольжения в зависимости:

(а) от R/c (1-4 – $d/L = 0.15, 0.3, 0.45, 0.6$)

(б) от d/L (1-4 – $R/c = 1, 3, 10, 30$); $s = 0$

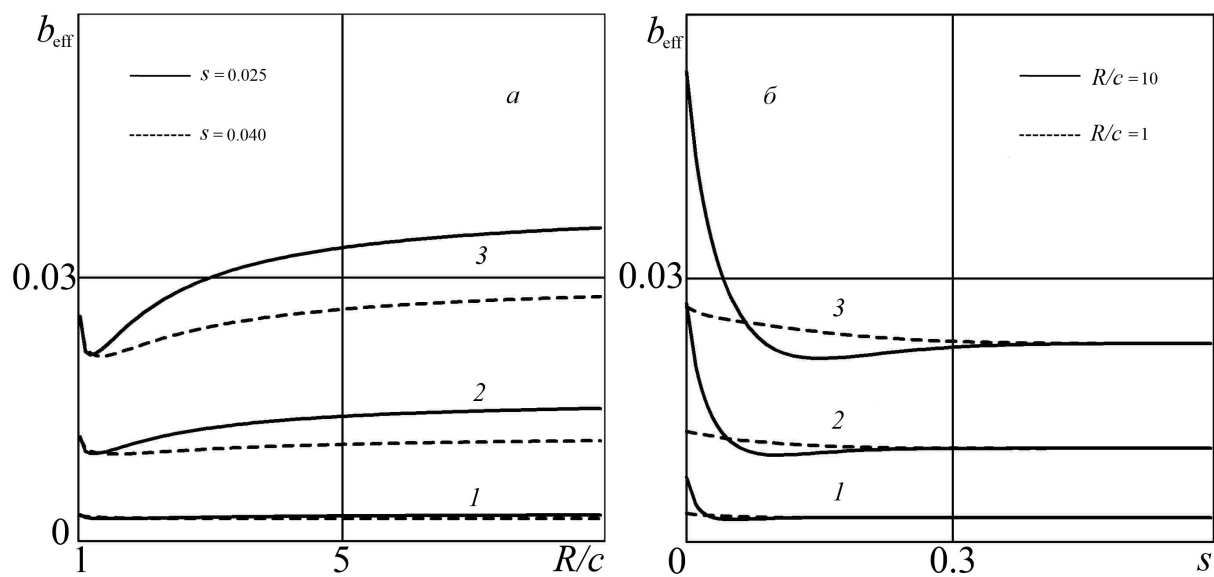


Рис. 2.11: Эффективная длина скольжения в зависимости:

(а) от R/c (1-3 – $d/L = 0.2, 0.4, 0.6$, $s = 0.025, 0.04$)

(б) от s ($R/c = 1, 10$; 1-3 – $d/L = 0.2, 0.4, 0.6$)

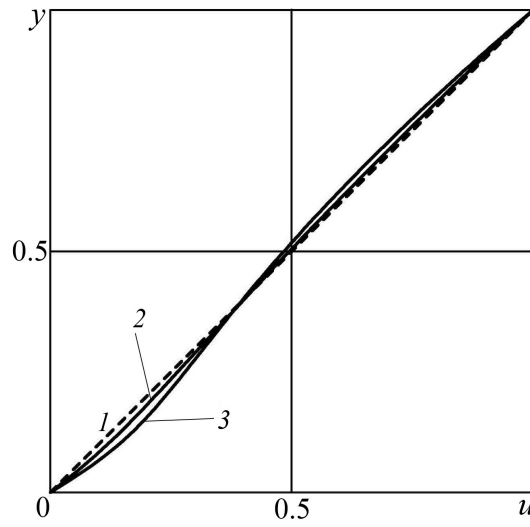


Рис. 2.12: Профиль скорости над системой каверн:

1 – сдвиговой профиль $u = y$; 2, 3 – вырабатывающийся периодический профиль скорости над текстурой с $d/L = 0.75$, $R/c = 1, 10$

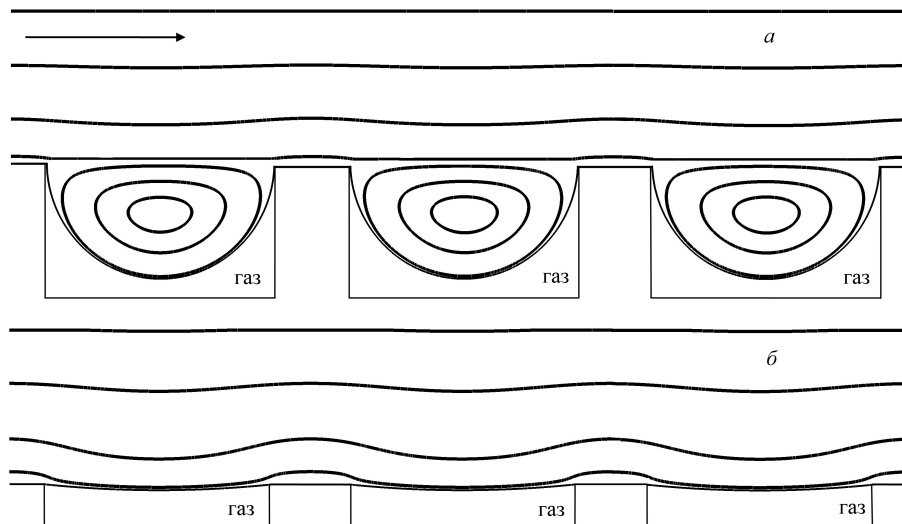


Рис. 2.13: Картина линий тока над кавернами, обтекаемыми вырабатывающимся периодическим профилем скорости, для $d/L = 0.75$, $a - R/c = 1$, $b - R/c = 10$

Заключение

Рассмотрены три различные макроскопические задачи о движении тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей с условием эффективного проскальзывания Навье и заданным тензором скольжения. Найдены неоднородные супергидрофобные поверхности, характеризующиеся тензором скольжения, зависящим от координат точки поверхности, для которых удалось построить семейства автомодельных решений. Установлены критерии существования автомодельных решений для неоднородных супергидрофобных поверхностей. Определены характеристики рассмотренных течений, которые могут быть использованы для экспериментального определения компонент тензора скольжения промышленных супергидрофобных поверхностей.

В задаче о нестационарном растекании тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности от локализованного источника, мощность которого задана степенной либо экспоненциальной функцией времени, исследованы автомодельные законы движения переднего фронта смачивания в зависимости от параметров, задающих величину проскальзывания скорости. Показано, что проскальзывание на поверхности увеличивает расстояние, которое проходит передний фронт слоя при растекании жидкости. Установлено взаимно-однозначное соответствие между параметрами скольжения, характеризующими супергидрофобную поверхность, и законом движения переднего фронта. Из проведенного анализа следует, что этой информации достаточно, чтобы по заданному закону массоподвода и закону движения переднего фронта смачи-

вания определить параметры скольжения супергидрофобной поверхности из эксперимента. Особенно удобным такой метод может быть при определении компонент тензора скольжения супергидрофобных поверхностей, у которых микрорельеф имеет осевую симметрию (например, в форме концентрических окружностей). Проведено обобщение полученных автомоделных решений на случай слабой зависимости решения от второй пространственной координаты, когда можно пренебречь трансверсальным перетеканием жидкости в движущейся пленке.

На основе проведенного параметрического исследования области смачивания, образующейся при установившемся стекании ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности, установлено, что для такой геометрии течения информации только об области смачивания недостаточно, чтобы однозначно определить эффективные характеристики супергидрофобной поверхности. Необходимо также фиксировать толщину слоя на оси симметрии ручейка. Полученные для рассмотренной геометрии результаты приближенно могут быть применены для однородных супергидрофобных поверхностей с постоянным проскальзыванием.

Выполнено математическое моделирование начального этапа стекания тонкого слоя жидкости по супергидрофобной поверхности кругового горизонтального цилиндра. Показано, что проскальзывание на супергидрофобной поверхности значительно уменьшает время стекания слоя по сравнению с обычной цилиндрической поверхностью (без проскальзывания). Таким образом, продемонстрировано, что супергидрофобные поверхности могут быть использованы для интенсификации самоочищения поверхности. Проанализировано взаимно-однозначное соответствие между временем утончения слоя и величиной проскальзывания, что может быть использовано при экспериментальном определении компонент тензора скольжения супергидрофобных поверхностей с постоянным проскальзыванием.

Решена двумерная задача об установившемся стоковом обтекании вязкой жидкостью элементов микротекстуры супергидрофобной поверхности

в наиболее общей постановке, когда угловые точки межфазной границы, образующейся между газовым пузырем и жидкостью, не совпадают с угловыми точками каверны. Рассмотрены текстуры с прямыми стенками; форма мениска найдена из условия статического удержания газового пузырька в каверне. Для вычисления поля скорости жидкости в области над межфазной границей разработан эффективный численный алгоритм, основанный на методе граничных интегральных уравнений. Численный алгоритм протестирован на решениях известных модельных задач. Получено хорошее количественное и качественное совпадение численных расчетов с известными результатами.

Проведено параметрическое численное исследование эффективной длины скольжения над текстурой супергидрофобной поверхности в сдвиговом потоке. Эффективное скольжение вычислялось из осредненного по текстуре локального условия проскальзывания Навье. Получены зависимости эффективного скольжения от различных геометрических параметров текстуры: доли газового участка, формы мениска и его положения относительно стенок каверны. Установлена немонотонная зависимость эффективного скольжения от геометрических параметров текстуры. Качественная зависимость полученных результатов совпадает с расчетами других авторов для текстур с нулевым мениском. Показано, что учет эффектов, обусловленных наличием мениска и его положением, приводит к значительному уменьшению эффективного скольжения по сравнению с текстурами с идеализированной прямой межфазной границей.

Разработанный метод расчета эффективного скольжения из решения задачи обтекания системы каверн может быть использован для получения оценок величины эффективного скольжения над периодической текстурой супергидрофобной поверхности, состоящей из близко расположенных микрокаверн, когда предположение о сдвиговости потока в области между кавернами нарушается. Кроме того, разработанный численный алгоритм применим для вычисления эффективного скольжения для супер-

гидрофобных поверхностей с текстурами, образованных кавернами произвольной формы. Полученные результаты важны для понимания явления эффективного проскальзывания на супергидрофобных поверхностях и могут быть применены для оптимизации периодической текстуры промышленных супергидрофобных поверхностей и достижения максимального эффективного проскальзывания.

Литература

- [1] Lafuma A., Querre D. Superhydrophobic states // Nature Materials. 2003. V. 2. P. 457–463.
- [2] Bhushan B., Jung Y.C. Micro- and nanoscale characterization of hydrophobic and hydrophilic leaf surfaces // Nanotech. 2006. V. 17. P. 2758–2772.
- [3] Cassie A.B.D., Baxter S. Wettability of porous surfaces // Trans. Faraday Soc. 1944. V. 40. P. 546–551.
- [4] Lau K.K.S., Bico J., Teo K.B.K., Chhowalla M., Amaratunga G.A.J., Milne W.I., McKinley G.H., Gleason K.K. Superhydrophobic carbon nanotube forests // Nano Let. 2003. V. 3. N 12. P. 1701–1705.
- [5] Darhuber A.A., Troian S.M. Principles of microfluidic actuation // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. V. 37. P. 425–455.
- [6] Gogte S., Vorobieff P., Truesdell R., Mammoli A., van Swol F., Shah P., Brinker C. J. Effective slip on textured superhydrophobic surfaces // Phys. Fluids. 2005. V. 17. 051701.
- [7] Бойнович Л.Б., Емельяненко А.М. Гидрофобные материалы и покрытия: принципы создания, свойства и применение // Успехи химии. 2008. Т. 77. N 7. С. 619–638.
- [8] Voronov R.S., Papavassiliou D.V. Review of fluid slip over superhydrophobic surfaces and its dependence on the contact angle // Ind. Eng. Chem. Res. 2008. V. 47. P. 2455–2477.

- [9] Rothstein J.P. Slip on superhydrophobic surfaces // Annu. Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 89–102.
- [10] Verplanck N., Coffinier Y., Thomy V., Boukherroub R. Wettability switching techniques on superhydrophobic surfaces // Nan. Res. Let. 2007. V. 2. P. 577–596.
- [11] Querre D. Wetting and roughness // Annu. Rev. Mater. Res. 2008. V. 38. P. 71–99.
- [12] Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois du mouvement des fluides // Mem. Acad. R. Sci. Inst. France. 1823. V. 6. P. 389–440.
- [13] Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // Philos. Trans. R. Soc. London. 1879. V. 170. P. 231–56.
- [14] Karniadakis G., Beskok A., Aluru N. Microfluids and Nanofluidics. New York: Springer. 2005.
- [15] Dussan E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 371–400.
- [16] Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 961–971.
- [17] Denn M.M. Extrusion instabilities and wall slip // Annu. Rev. Fluid Mech. 2001. V. 33. P. 265–287.
- [18] Hocking L.M. A moving fluid interface on a rough surface // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. P. 801–817.
- [19] Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 125–134.
- [20] Furstner R., Barthlott W. Wetting and self-cleaning properties of artificial superhydrophobic surfaces // Langmuir. 2005. V. 21. N 3. P. 956–961.

- [21] Lv C., Yang C., Hao P., He F., Zheng Q. Sliding of water droplets on microstructured hydrophobic surfaces // *Langmuir*. 2010. V. 26. N 11. P. 8704–8708.
- [22] Boinovich L.B., Emelyanenko A.M. Anti-ice potential coatings // *Mendelev Comm.* 2013. V. 23. P. 3–10.
- [23] Бойнович Л.Б., Жевненко С.Н., Емельяненко А.М., Гольдштейн Р.В., Елифанов В.П. Адгезионная прочность контакта льда с супергидрофобным покрытием // *ДАН*. 2013. Т. 448. N 6. С. 675–679.
- [24] Fukagata K., Kasagi N. A theoretical prediction of friction drag reduction in turbulent flow by superhydrophobic surfaces // *Phys. Fluids*. 2005. V. 18. 051703.
- [25] Peguero C., Breuer K. On drag reduction in turbulent channel flow over superhydrophobic surfaces // *Advances in Turbulences XII*. 2009. V. 132. P. 233–236.
- [26] Daniello R.J., Waterhouse N.E., Rothstein J.P. Drag reduction in turbulent flows over superhydrophobic surfaces // *Phys. Rev.* 2009. V. 21. 085103.
- [27] Vinogradova O.I., Dubov A.L. Superhydrophobic textures for microfluidics // *Mendelev Comm.* 2012. V. 22. P. 229–236.
- [28] Lee C., Choi C.-H., Kim C.-J. Structured surfaces for a giant liquid slip // *Phys. Rev. Let.* 2008. V. 101. 064501.
- [29] Maali A., Bhushan B. Measurement of slip length on superhydrophobic surface // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2013. V. 370. P. 2304–2320.
- [30] Vinogradova O.I. Drainage of a thin liquid film between hydrophobic surfaces // *Langmuir*. 1995. V. 11. P. 2213–2220.

- [31] Belyaev A.V., Vinogradova O.I. Hydrodynamic interaction with superhydrophobic surfaces // *Soft Matter*. 2010. V. 6. P. 4563–4570.
- [32] Asmolov E.S., Belyaev A.V., Vinogradova O.I. Drag force on a sphere moving toward an anisotropic superhydrophobic plane // *Phys. Rev. E*. 2011. V. 84. 026330.
- [33] Ou J., Perot B., Rothstein J.P. Laminar drag reduction in microchannels using ultrahydrophobic surface // *Phys. Fluids*. 2004. V. 16. N 12. P. 4635–4643.
- [34] Ou J., Rothstein J.P. Direct velocity measurements of the flow past drag-reducing ultrahydrophobic surfaces // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. 103606.
- [35] Joseph P., Cottin-Bizonne C., Benoit J.-M., Ybert C., Journet C., Tabeling P., Bocquet L. Slippage of water past superhydrophobic carbon nanotube forests in microchannels // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. 156104.
- [36] Ou J., Moss G.R., Rothstein J.P. Enhanced mixing in laminar flows using ultrahydrophobic surfaces // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 76. 016304.
- [37] Lekner J. Flow with slip between coaxial and in an equilateral triangle pipe // *Open App. Phys. J.* 2009. V. 2. P. 27–31.
- [38] You D., Moin P. Effects of hydrophobic surfaces on the drag and lift of a circular cylinder // *Phys. Fluids*. 2007. V. 19. 081701.
- [39] Legendre D., Lauga E., Magnaudet J. Influence of slip on the dynamics of two-dimensional wakes // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 633. P. 437–447.
- [40] Muralidhar P., Ferrer N., Daniello R., Rothstein J. P. Influence of slip on the flow past superhydrophobic circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 680. P. 459–476.

- [41] Mastrokalos M.M., Papadopoulos C.I., Kaiktsis L. Optimal stabilisation of a flow past a partially hydrophobic circular cylinder // *Comp. Fluid.* 2015. V. 107. P. 256–271.
- [42] Philip J.R. Flows satisfying mixed no-slip and no-shear conditions // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*. 1972. V. 23. P. 353–372.
- [43] Lauga E., Stone H.A. Effective slip in pressure-driven Stokes flow // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 489. P. 55–77.
- [44] Priezjev N.V., Darhuber A.A., Troian S.M. Slip behaviour in liquid films on surfaces of patterned wettability: Comparison between continuum and molecular dynamics simulations // *Rhys. Rev. E*. 2005. V. 71. 041608.
- [45] Maynes D., Jeffs K., Woolford B., Webb B.V. Laminar flow in a microchannel with hydrophobic surface patterned microribs oriented parallel to the flow direction // *Phys. Fluids*. 2007. V. 19. 093603.
- [46] Teo C.J., Khoo B.C. Analysis of Stokes flow in microchannels with superhydrophobic surfaces containing a periodic array of micro-grooves // *Microfluidics and Nanofluidics*. 2009. V. 7. P. 353–382.
- [47] Feuillebois F., Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Effective slip on superhydrophobic surfaces in thin channels // *Phys. Rev. Let.* 2009. V. 102. 026001.
- [48] Belyaev A. V., Vinogradova O. I. Effective slip in pressure-driven flow past super-hydrophobic stripes// *J. Fluid Mech.* 2010. V. 652. P. 489–499.
- [49] Ng C.-O., Chu H.C.W., Wang C.Y. On the effects of liquid-gas interfacial shear on slip flow through a parallel-plate channel with superhydrophobic grooved walls // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. 102002.
- [50] Zhou J., Belyaev A.V., Schmid F., Vinogradova O.I. Anisotropic flow in striped superhydrophobic channels // *J. Chem. Phys.* 2012. V. 136. 194706.

- [51] Vinogradova O.I., Belyaev A.V. Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Condens. Matter. 2011. V. 23. 184104.
- [52] Беляев А.В. Гидродинамические и электрокинетические течения вблизи супергидрофобных поверхностей // Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2012.
- [53] Asmolov E.S., Vinogradova O.I. Effective slip boundary condition for arbitrary one-dimensional surfaces // J. Fluid Mech. 2012. V. 706. P. 108–117.
- [54] Schmieschek S., Belyaev A.V., Harting J., Vinogradova O.I. Tensorial slip of superhydrophobic channels // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. 016324.
- [55] Asmolov E.S., Zhou J., Schmid F., Vinogradova O.I. Effective slip-length tensor for a flow over weakly slipping stripes // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. 023004.
- [56] Zhou J., Asmolov E.S., Schmid F., Vinogradova O.I. Effective slippage on superhydrophobic trapezoidal grooves // J. Chem. Phys. 2013. V. 139. 174708.
- [57] Nizkaya T.N., Asmolov E.S., Schmid F., Vinogradova O.I. Gas cushion model and hydrodynamic boundary conditions for superhydrophobic textures // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. 043017.
- [58] Schonecker C., Hardt S. Longitudinal and transverse flow over a cavity containing a second immiscible fluid // J. Fluid Mech. 2013. V. 717. P. 376–394.
- [59] Ng C.-O., Wang C.Y. Stokes shear flow over a grating: implications for superhydrophobic slip // Phys. Fluids. 2009. V. 21. 013602.
- [60] Davis A.M.J., Lauga E. Hydrodynamic friction of fakir-like superhydrophobic surface // J. Fluid Mech. 2010. V. 661. P. 402–411.

- [61] Cheng Y.P., Teo C.J., Khoo B.C. Microchannel flows with superhydrophobic surfaces: effects of Reynolds number and pattern width to channel height ratio // Phys. Rev. 2009. V. 21. 122004.
- [62] Steinberger A., Cottin-Bizonne C., Kleimann P., Charlaix E. High friction on a bubble mattress // Nature Materials. 2007. V. 6. P. 665-668
- [63] Hyvaluoma J., Harting J. Slip flow over structured Surfaces with entrapped microbubbles // Phys. Rev. Let. 2008. V. 100. 246001.
- [64] Bolognesi G., Cottin-Bizonne C., Pirat C. Experimental evidence of slippage breakdown for a superhydrophobic surface in a microfluidic device // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 82004.
- [65] Spragaglia M., Prosperetti A. A note of the effective slip properties for microchannel flows with ultrahydrophobic surfaces // Phys. Fluids. 2007. V. 19. 043603.
- [66] Gao P., Feng J.J. Enhanced slip on a patterned substrate due to depinning of contact line // Phys. Fluids. 2009. V. 21. 102102.
- [67] Davis A.M.J., Lauga E. Geometric transition in friction for flow over a bubble mattress // Phys. Fluids. 2009. V. 21. 011701.
- [68] Crowdy D. Slip length for longitudinal shear flow over a dilute periodic mattress of protruding bubbles // Phys. Fluid. 2010. V. 22. 121703.
- [69] Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin films // Rev. Modern Phys. 1997. V. 69. N 3. P. 931–980.
- [70] Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. N 1. С. 43–51.
- [71] Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. N 2. С. 20–25.

- [72] Шкадов В.Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. N 1. С. 63–66.
- [73] Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. N 3. С. 151–154.
- [74] Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Течения тонких пленок вязкой жидкости по криволинейным вращающимся поверхностям // Изв. РАН. МЖГ. 2009. N 2. С. 18–32.
- [75] De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics // Rev. Modern Phys. 1985. V. 57. P. 827–863.
- [76] Shikmurzaev Y.D. Capillary flows and forming interfaces. New York: Chapman and Hall, 2008. 443 p.
- [77] Barenblatt G.I., Beretta E., Bertsch M. The problem of the spreading of a liquid film along a solid surface: a new mathematical formulation // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1997. V. 94. P. 10024–10030.
- [78] Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58.
- [79] Григорян С.С., Бабкин Я.В. Автомодельные решения уравнений мелководных течений в крупных акваториях // ДАН. 1997. Т. 335. N 5. С. 626–627.
- [80] Осипцов А.А. Асимптотические решения задач о течении лавы по подстилающей поверхности // Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006.
- [81] Веденеева Е.А. Растекание лавы во время вулканических извержений при условии частичного проскальзывания на подстилающей поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2015. N 2. С. 27–40.

- [82] Воинов О.В. Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утончения // ДАН СССР. 1974. Т. 216. N 2. С. 285–288.
- [83] Kopbosynov B.K., Pukhnachev V.V. Thermocapillary flow in thin liquid films // Fluid Mechanics - Soviet Research. 1986. V. 15. N 1. P. 95–106.
- [84] Ajaev V.S. Effect of nanoscale bubbles on a viscous flow and rupture in thin liquid films // Phys. Fluid. 2006. V. 18. 068101.
- [85] Ajaev V.S., Gatapova E.Y., Kabov O.A. Rapture of thin liquid films on structured surfaces // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. 041606.
- [86] Munch A., Wagner B., Witelski T. P. Lubrication models with small to large slip length // J. Eng. Mathem. 2005. V. 53. N 3–4. P. 359–383.
- [87] Baumchen O., Marquant L., Blossey R., Munch A., Wagner B., Jacobs K. Influence of slip on the Rayleigh-Plateau rim instability in dewetting viscous films // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. 014501.
- [88] Колтунов А.А., Чернышев И.В. Растекание капли жидкости по неоднородному насыщенному пористому слою // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2012. N 1. С. 27–35.
- [89] Шапиро Г.И. О растекании вязкой жидкости по горизонтальной поверхности // ПМТФ. 1983. N 3. С. 45–48.
- [90] Осипцов А.А. Трехмерные изотермические течения лавы на неосесимметричной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2006. N 2. С. 31–45.
- [91] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
- [92] Агеев А.И. Растекание пленки жидкости по супергидрофобной поверхности // Тр. конф.-конкурса молодых ученых. 12-14 октября 2011

г. Под ред. акад. РАН Г.Г. Черного, проф. В.А. Самсонова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. С. 90-95.

- [93] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Пленочные течения жидкости по супергидрофобной поверхности // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 16-25 апреля 2012 г., Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во. Моск. ун-та, 2012. 165 с.
- [94] Агеев А.И. Пленочные течения вязкой жидкости по супергидрофобной поверхности // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2012". 2012. URL : [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2012/index.htm](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/index.htm) .
- [95] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания пленки по неоднородным супергидрофобным поверхностям // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 15-23 апреля 2013 г., Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во. Моск. ун-та, 2013, 171 с.
- [96] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Растекание тонкого слоя вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей // Материалы международной конференции "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность". 25 февраля-4 марта 2014 г. Моск. обл., панс. "Звенигородский" РАН. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 2014, 270 с.
- [97] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2014. N 3. С. 37–51.
- [98] Барташевич М.В. Динамика и теплообмен в ручейковых течениях и каплях жидкости // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: СО РАН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, 2010.

- [99] Smith P. C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. Pt 2. P. 275–288.
- [100] Lister J. R. Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 631–653.
- [101] Duffy B.R., Moffatt H.K. A similarity solution for viscous source flow on a vertical plane // Euro. J. Appl. Math. 1997. V. 8. P. 37–47.
- [102] Wilson S.K., Duffy B.R., Davis S.H. On a slender dry patch in a liquid film draining under gravity down an inclined plane // Euro. J. Appl. Math. 2001. V. 12. P. 233–252.
- [103] Yatim Y.M., Duffy B.R., Wilson S.K., Hunt R. Similarity solutions for unsteady gravity-driven slender rivulets // Q. J. Mech. Appl. Math. 2011. P. 37–47.
- [104] Higuera F.J. Steady creeping flow down a slope // Phys. Fluids. 1995. V. 7. 2918.
- [105] Агеев А.И. Стеkanie ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2013". 2013. URL : [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2013/index.htm](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/index.htm) .
- [106] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тезисы докладов XVII школы-семинара, посвященной памяти академика Г.Г. Черного и 55-летию со дня основания НИИ механики МГУ. 20-30 августа 2014 г., Сочи, "Буревестник" МГУ. – М.: Изд. Моск. ун-та, 2014. – 116 с.
- [107] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стеkanie ручейка вязкой жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности // ДАН. 2014. Т. 458. N 6. С. 652–655.

- [108] Reisfeld B., Bankoff S.G. Non-isothermal flow of a liquid film on a horizontal cylinder // J. Fluid Mech. 1992. V. 236. P. 167–196.
- [109] Duffy B.R., Moffatt H.K. Flow of a viscous trickle on a slowly varying incline // Chem. Eng. J. 1995. V. 60. P. 141–146.
- [110] Takagi D., Huppert H.E. Flow and instability of thin films on a cylinder and sphere // J. Fluid Mech. 2010. V. 647. P. 221–238.
- [111] Агеев А.И. Эволюция тонкого слоя тяжелой жидкости на супергидрофобной цилиндрической поверхности // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14-23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. – М.: Изд. Моск. ун-та Москва, 2014, 177 с.
- [112] Агеев А.И. Стеkanie тонкого слоя вязкой жидкости по горизонтальной супергидрофобной цилиндрической поверхности // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2014". 2014. URL : [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2014/index.htm](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2014/index.htm) .
- [113] Агеев А.И. Эволюция тонкого слоя тяжелой жидкости на супергидрофобной цилиндрической поверхности // Тр. конф.-конкурса молодых ученых. 8-9 октября 2013 г. Под ред. акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. В.А. Самсонова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 76–83.
- [114] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука. 1970. 288 с.
- [115] Pozrikidis C. Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow. New York: Cambridge university press. – 1992. – 272 p.
- [116] Higdon J.J.L. Stokes flow in arbitrary two-dimensional domains: shear flow over ridges and cavities // J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 195–226.

- [117] Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. N 10. С. 62–70.
- [118] Якутенок В.А. Численное решение трехмерных задач о ползущем течении вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. 1999. Т. 11. N 10. С. 92–99.
- [119] Пономарева М. А., Якутенок В. А. Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2007. N 1. С. 79–83.
- [120] Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Формирование свободной поверхности объема вязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра // Изв. РАН. МЖГ. 2009. N 2. С. 179–185.
- [121] Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную плоскую стенку // Изв. РАН. МЖГ. 2011. N 1. С. 53–61.
- [122] Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А. Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоксовом режиме методом граничных элементов // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6. N 2. С. 214–223.
- [123] Абрамова О.А. Моделирование стоксовых течений и динамики деформируемых капель масштабируемым методом граничных элементов // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Уфа: ФГБОУ БГУ, 2014.
- [124] Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А., Ахатов И.Ш. Эффективный метод расчета динамики большого количества деформируемых капель в стоксовом режиме // ДАН. 2014. Т. 456. N 2. С. 166–170.

- [125] Pimponi D., Chinappi M., Gualtieri P., Casciola C., M. Mobility tensor of sphere moving on a superhydrophobic wall: application to particle separation // Microfluidics and Nanofluidics. 2014. V. 16. N 3. P. 571–585.
- [126] Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. N 1. P. 1–18.
- [127] Pan F., Acrivos A. Steady flows in rectangular cavities // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. Part 4. P. 643–655.
- [128] Агеев А.И. Гидродинамические течения вязкой жидкости вблизи супергидрофобных поверхностей // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2015". 2015. URL : [http :
//lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2015/index.htm](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/index.htm) .
- [129] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Гидродинамика вязкой жидкости в окрестности супергидрофобной поверхности // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках: Тезисы докладов XX Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. (24-29 мая 2015 г., Звенигород). – М.: Изд-ий дом МЭИ, 2015. – 328 с.
- [130] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Гидродинамика вязкой жидкости в окрестности супергидрофобной поверхности // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках: Труды XX Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева (24-29 мая 2015 г., г. Звенигород). – М.: Изд-ий дом МЭИ, 2015. С. 269–272. (CD).
- [131] Агеев А.И. Гидродинамические течения вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20-24 августа 2015 г.). – Казань: Изд-во АН РТ, 2015. – 319 с.

- [132] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Течение вязкой жидкости вблизи периодической текстуры супергидрофобной поверхности // Материалы XXXII Сибирского теплофизического семинара, посвященного 80-летию акад. В.Е. Накорякова. (19-20 ноября 2015 г., г. Новосибирск). – Новосибирск, 2015. С. 35-36. (CD).
- [133] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стоксово течение над каверной супергидрофобной поверхности, содержащей пузырек газа // Изв. РАН. МЖГ. 2015. N 6. С. 35–49.
- [134] Lorentz H. A. Ein allgemeiner satz, die bewegung einer reibenden flussigkeit betreffend, nebst einigen andwendungen desselben (A general theorem concerning the motion of a viscous fluid and a few consequences derived from it) // Versl. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam. 1896. V. 5. P. 168–175.

Приложение: вывод граничных интегральных уравнений

За основу изложения взята монография [115]. Все выкладки представлены в размерном виде; для удобства изложения звездочки опущены. Рассмотрим уравнения Стокса, записанные в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

которые можно представить в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$ – компоненты тензора напряжений в жидкости в декартовой системе координат. Пусть поля $\mathbf{u}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ удовлетворяют уравнениям Стокса, а $\mathbf{p}$ и $\hat{\mathbf{p}}$, соответствующие им тензоры напряжений. Запишем цепочку равенств

$$\hat{u}_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i p_{ij}) - p_{ij} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i p_{ij}) - \left[-p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \quad (2)$$

Учитывая, что $-p\delta_{ij}\nabla_j \hat{u}_i = -p\nabla_i \hat{u}_i = 0$ в силу уравнения неразрывности, получаем равенство:

$$\hat{u}_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i p_{ij}) - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}.$$

Заменяя $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ на $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}})$ в (2), получаем

$$u_i \frac{\partial \hat{p}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \hat{p}_{ij}) - \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

После вычитания приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i p_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \hat{p}_{ij}) = \hat{u}_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \hat{p}_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3)$$

Если поля $\mathbf{u}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ не имеют особых точек, (3) принимает вид:

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{p}}) = 0. \quad (4)$$

Полученное тождество эквивалентно формуле Грина в теории потенциала для уравнения Лапласа [134]. Интегрируя (4) по объему V , ограниченному замкнутой поверхностью S , получаем

$$\int_S \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} \, dS = \int_S \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, dS, \quad (5)$$

где $\mathbf{f} = p_{ij} n_j \mathbf{e}_i$, $\hat{\mathbf{f}} = \hat{p}_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ суть векторы напряжений на границе, n_j – компоненты единичной нормали к поверхности, ограничивающей объем, $\mathbf{e}_i$ – единичные вектора абсолютной системы координат. Ниже (5) будет использовано при выводе интегральных уравнений эквивалентных уравнениям Стокса. Далее излагается теория, применяемая для двумерных задач, при этом под V понимается двумерная область Ω , занятая жидкостью, а поверхность S заменяется на замкнутую линию Γ .

Получим выражения для функций Грина, которые являются фундаментальными решениями двумерных сингулярных уравнений Стокса и неразрывности:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{g} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6),$$

где $\mathbf{g}$ – некоторый постоянный вектор, $\mathbf{x}_0$ – точка пространства, δ – двумерная дельта-функция. В силу линейности уравнений представим решение для скорости в виде:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\mu} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) g_j, \quad (7)$$

где $\mathbf{G}$ – функции Грина, образующие тензор второго ранга. Поле $\mathbf{u}$ представляет собой течение, создаваемое точечной силой $\mathbf{g}$, расположенной в

точке области $\mathbf{x}_0$. Применяя оператор дивергенции к полю скорости $\mathbf{u}$ и используя уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0.$$

Интегрируя по области Ω , занятой жидкостью, и заменяя поверхностный интеграл на линейный вдоль Γ , получаем

$$\int_{\Gamma} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0,$$

при этом $\mathbf{x}_0$ может лежать внутри, вне области или на границе.

Для того, чтобы вычислить компоненты $\mathbf{G}$ двумерной функции Грина, заменим в (6) дельта-функцию ее выражением:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \ln r.$$

Давление в жидкости удовлетворяет гармоническому уравнению

$$\nabla^2 p = \mathbf{g} \cdot (\nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

которое получается дифференцированием уравнений Стокса по координатам. В силу линейности уравнения решение для давления запишем в виде:

$$p = \frac{1}{2\pi} (\nabla \ln r) \cdot \mathbf{g}.$$

После подстановки выражений для дельта-функции и давления в (6) получаем уравнение для $\mathbf{u}$:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{g} \cdot (\nabla \nabla - \mathbf{I} \nabla^2) \ln r,$$

решение ищем в виде:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{g}}{\mu} \cdot (\nabla \nabla - \mathbf{I} \nabla^2) H. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение для $\mathbf{u}$, получаем уравнение для скалярной функции H

$$\nabla^2 H = \frac{1}{2\pi} \ln r,$$

решение которого имеет вид:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{8\pi} r^2 (\ln r - 1).$$

После подстановки функции $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ в выражение (8) для $\mathbf{u}$ и в представление поля скорости через компоненты G_{ij} функции Грина (7) получаем:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_{ij} \ln r + \frac{\xi_i \xi_j}{r^2}, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad r = |\boldsymbol{\xi}|.$$

В литературе тензор $\mathbf{G}$ называется стокслет.

Вычислим компоненты тензора напряжений, соответствующего полю скорости $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Используя уравнения (6), компоненты стокслета $\mathbf{G}$ и давление p , можно показать, что

$$T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_{ik} p_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial G_{ki}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Подставляя в последнее равенство выражения для $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, получаем вид компонент T_{ijk} :

$$T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -4 \frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{r^4}.$$

Вычисленный тензор третьего ранга в литературе называется стресслет.

Получим теперь интегральное представление решения уравнений Стокса через фундаментальные решения стокслета $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и стресслета $T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Подставим в (4) вместо $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}})$ выражения

$$\hat{u}_i = \frac{1}{4\pi\mu} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) g_j, \quad \hat{p}_{ik} = \frac{1}{4\pi} T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) g_j,$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] = 0.$$

Рассмотрим область Ω , занятую жидкостью и ограниченную замкнутой односвязной (или многосвязной) границей Γ , при этом Γ может быть твердой стенкой, межфазной поверхностью или жидкой линией (рис.). Интегрируя последнее соотношение по Ω и переходя от поверхностного интеграла

к линейному, получаем равенство

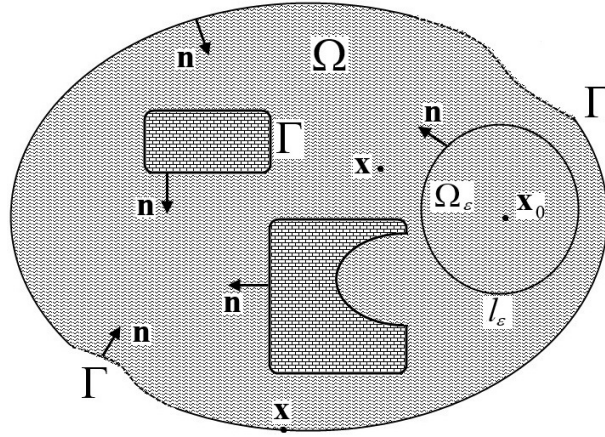
$$\int_{\Gamma} [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0, \quad (9)$$

в котором вектор нормали направлен внутрь области Ω , занятой жидкостью.

Выберем точку $\mathbf{x}_0$ внутри Ω и рассмотрим малую окрестность Ω_ε радиуса ε , содержащую рассматриваемую точку. Функции в квадратных скобках – регулярные в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$. Для области $\Omega - \Omega_\varepsilon$ равенство (9) принимает вид:

$$\int_{\Gamma, l_\varepsilon} [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0, \quad (10)$$

где l_ε – круг, ограничивающий Ω_ε .



К методу граничных интегральных уравнений: контрольная область Ω в жидкости

Устремляя ε к нулю, получаем, что вдоль l_ε , тензора $\mathbf{G}$ и $\mathbf{T}$ принимают вид:

$$G_{ij} \approx -\delta_{ij} \ln \varepsilon + \frac{\xi_i \xi_j}{\varepsilon^2}, \quad T_{ijk} \approx -4 \frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{\varepsilon^4}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Вдоль l_ε , $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}/\varepsilon$, $dl = \varepsilon d\alpha$. Подставляя (11) в (10),

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ = - \int_{l_\varepsilon} \left[\left(-\delta_{ij} \ln \varepsilon + \frac{\xi_i \xi_j}{\varepsilon^2} \right) p_{ik}(\mathbf{x}) + 4\mu u_i(\mathbf{x}) \frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{\varepsilon^4} \right] \xi_k(\mathbf{x}) d\alpha. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ значения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ вдоль l_ε стремятся к своим значениям в центре Ω_ε , то есть к $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{p}(\mathbf{x}_0)$ соответственно. Так как $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, слагаемое в правой части, содержащее p_{ik} , исчезает. Поэтому в пределе получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ = -4\mu u_i(\mathbf{x}_0) \frac{1}{\varepsilon^4} \int_{l_\varepsilon} \xi_i \xi_j \xi_k^2 d\alpha. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\xi_k^2 = \varepsilon^2$, вычислим интеграл в правой части:

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \int_{l_\varepsilon} \xi_i \xi_j \xi_k^2 d\alpha = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{l_\varepsilon} \xi_i \xi_j dl = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{l_\varepsilon} \xi_i n_j dl = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{l_\varepsilon} \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} d\Omega = \pi.$$

В результате приходим к интегральному представлению поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ внутри области, занятой жидкостью:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Gamma} f_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}),$$

где $f_i(\mathbf{x}) = p_{ik}(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x})$, нормаль $\mathbf{n}$ направлена в сторону жидкости. Полученное выражение позволяет вычислить поле скорости, удовлетворяющее уравнениям Стокса, через распределенные по границе стокслеты и стресслеты. Плотности распределений пропорциональны векторам скорости $\mathbf{u}$ и напряжений $\mathbf{f}$, заданным на границе. Тензора $\mathbf{G}$ и $\mathbf{T}$ соответствуют потенциалам простого и двойного слоя в теории интегральных уравнений для

уравнения Лапласа. Плотности распределений находятся из решения интегральных уравнений, записанных для точек на границе так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям:

$$\mathbf{u}(\Gamma), \quad \mathbf{f}(\Gamma), \quad \mathbf{u}(\Gamma_1) \cup \mathbf{f}(\Gamma_2).$$

Для того, чтобы записать интегральные уравнения на границе, рассмотрим интеграл от потенциала двойного слоя T_{ijk} в окрестности границы. Если граница области не имеет особых точек, а вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$ непрерывны вдоль Γ , тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \Gamma} \int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ = \pm 2\pi u_j(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma}^{p.v.} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Выбор знака определяется направлением нормали, указывающей направление в жидкость. С учетом полученного представления потенциала двойного слоя вдоль границы интегральные уравнения для граничных точек записываются в виде:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} f_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma}^{p.v.} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}).$$

При $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0$ под интегралами возникает сингулярность. Первый интеграл с логарифмической особенностью вычисляется в обычном смысле, второй интеграл понимается в смысле главного значения Коши.