1995. Т. 31, № 8. С. 1323 — 1329

УДК 517.984

РАВНОМЕРНАЯ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ ОЦЕНКА ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАВНОМЕРНО ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. А. Ильин, Л. В. Крицков

Рассмотрим произвольный самосопряженный оператор Шредингера $\mathcal{L}$, определяемый на всей действительной прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ дифференциальным выражением

$$lu = -\frac{d^2}{dx^2}u + q(x)u. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы для любого $h > 0$ можно было указать такую положительную постоянную $C(h)$, чтобы равномерно по $x \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$\int_x^{x+h} |q(y)|dy \le C(h). \tag{2}$$

Равномерное условие (2), следуя [1, с. 327], будем называть условием *равномерной локальной суммируемости потенциала* $q(x)$ на $\mathbb{R}$.

В настоящей работе получены равномерные на всей действительной прямой $\mathbb{R}$ оценки для обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{L}$ с потенциалом, удовлетворяющим условию равномерной локальной суммируемости на $\mathbb{R}$. Эти оценки позволяют изучать свойства спектральных разложений, отвечающих оператору Шредингера $\mathcal{L}$, в равномерной на всей действительной прямой метрике.

Приведем несколько важных примеров операторов Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим равномерной оценке (2).

Пример 1. Оператор Хилла, т. е. оператор $\mathcal{L}$ с потенциалом, являющимся непрерывной и периодической на $\mathbb{R}$ функцией [1, с. 303 — 341].

Пример 2. Оператор $\mathcal{L}$ с почти периодическим по Бору потенциалом (см., например,[2,3]).

Пример 3. Оператор $\mathcal{L}$ с потенциалом, представимым в виде суммы $q_1(x) + q_2(x)$, в которой $q_1(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$, $q_2(x) \in L_p(\mathbb{R})$ для некоторого $p \ge 1$ (см., например, [4, с. 333, 365; 5, с. 209]).

Пример 4. Оператор $\mathcal{L}$ с потенциалом $q(x)$, равномерно локально лежащим в $\mathcal{L}_p$ при $p > 1$, т. е. когда конечна величина $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |q(y)|^p dy$ (см. [1, с. 327 — 328]).

Необходимо отметить, что в случае, когда равномерно локально суммируемый на $\mathbb{R}$ потенциал $q(x)$ ограничен снизу, можно так ввести минимальный оператор $\mathcal{L}_0$, отвечающий (1), что $\mathcal{L}_0$ существенно самосопряжен и тем самым определяет единственное самосопряженное расширение $\mathcal{L}$ оператора Шредингера (1) [6]. Это расширение полуограничено [7, с. 709] и его непрерывный спектр непуст [8].

Для формулировки основного результата опишем спектральное разложение оператора $\mathcal{L}$ в терминах упорядоченного спектрального представления пространства $L_2(\mathbb{R})$ [7, с. 384, 499].

Это представление характеризуется мерой $\rho(\lambda)$, кратностью $m \le 2$, множествами кратности e_i, $i = \overline{1,m}$, и обобщенными собственными функциями $u_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,m}$, которые

а) обращаются в нуль при λ, лежащих в дополнении к e_i;

б) при каждом фиксированном значении λ принадлежат классу W_1^2 на каждом замкнутом подмножестве $\mathbb{R}$ и почти всюду на $\mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$lu_i(x,\lambda) = \lambda u_i(x,\lambda). \tag{3}$$

При этом для любой функции $f(x)$ класса $L_2(\mathbb{R})$

а) определен как элемент $L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda))$ обобщенный образ Фурье

$$\hat{f}_i(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)u_i(x,\lambda)dx; \tag{4}$$

б) разложение по обобщенным собственным функциям $\sigma_\lambda(x,f) = \sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}_i(t)u_i(x,t)d\rho(t)$ сходится к разлагаемой функции $f(x)$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$;

в) имеет место аналог равенства Парсеваля

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x)dx = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}}[\hat{f}_i(\lambda)]^2 d\rho(\lambda). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть потенциал $q(x)$ в дифференциальном выражении (1) равномерно локально суммируем на $\mathbb{R}$. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \geq 0$ выполнены следующие оценки:*

$$\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\substack{\mu\le\sqrt{\lambda}\le\mu+1\\ \lambda\ge 0}}\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + (\sqrt{\lambda}+1)^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\}d\rho(\lambda) = O(1), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\substack{\mu\le\sqrt{-\lambda}\le\mu+1\\ \lambda\le 0}}\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + (\sqrt{-\lambda}+1)^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\}d\rho(\lambda) = O(e^{-\alpha\mu}). \tag{7}$$

Доказательство теоремы основано на специальном представлении обобщенных собственных функций (см., например, [9; 10, с. 105]).

Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$. Уравнение (3) равносильно равенству

$$u_i(x \pm t, \lambda) =$$

$$= u_i(x,\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}t) \pm (1/\sqrt{\lambda})u_i'(x,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^t u_i(x\pm\tau,\lambda)q(x\pm\tau)\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]d\tau, \tag{8}$$

в котором $t > 0$ произвольно, $\sqrt{\lambda}$ равен $i\sqrt{-\lambda}$, если $\lambda < 0$.

Введем для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ интегральные операторы T_+ и T_-:

$$T_\pm f(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^t q(x\pm\tau)\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]f(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Операторы (9) удовлетворяют оценкам

$$|T_\pm f(t)| \le \omega \sup_{0\le\tau\le t}|f(\tau)| \tag{10}$$

при $\lambda \geq 0$ и

$$|T_\pm f(t)| \le \omega \sup_{0\le\tau\le t}|f(\tau)\,\mathrm{ch}[\sqrt{-\lambda}(t-\tau)]| \tag{11}$$

при $\lambda < 0$. Здесь

$$\omega = \omega(t,x,\lambda) \equiv \min(t, \frac{2}{1+|\sqrt{\lambda}|})\int\limits_{x-t}^{x+t}|q(\xi)|d\xi. \tag{12}$$

Действительно, в случае $\lambda \geq 0$ неравенство

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t q(x\pm\tau)\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]f(\tau)d\tau\Big| \leq \sup_{0\leq\tau\leq t}|f(\tau)|\int_0^t |q(x\pm\tau)|\left|\frac{\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]}{\sqrt{\lambda}}\right|d\tau$$

влечет за собой (10), так как при $\sqrt{\lambda}\geq 1:\ |(1/\sqrt{\lambda})\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]| \leq 1/\sqrt{\lambda} \leq 2/(1+\sqrt{\lambda})$, а при $\sqrt{\lambda}\leq 1:\ |(1/\sqrt{\lambda})\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]| \leq t-\tau \leq t$.

В случае же, когда $\lambda < 0$, примем во внимание, что при $\sqrt{-\lambda}\geq 1:\ |(1/\sqrt{\lambda})\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]| = |(1/\sqrt{-\lambda})\ \mathrm{sh}[\sqrt{-\lambda}(t-\tau)]| \leq [2/(1+\sqrt{-\lambda})]\ \mathrm{ch}[\sqrt{-\lambda}(t-\tau)]$, а неравенство $|(1/\sqrt{\lambda})\sin[\sqrt{\lambda}(t-\tau)]| \leq t\ \mathrm{ch}[\sqrt{-\lambda}(t-\tau)]$, $0\leq\tau\leq t$, является тривиальным следствием элементарного неравенства*) $(1/z)\,\mathrm{sh}z \leq \mathrm{ch}z$.

Отметим, что для степеней операторов (9) выполнены оценки

$$|(T_\pm)^n f(t)| \leq \omega^n \sup_{0\leq\tau\leq t}|f(\tau)|, \quad n\geq 2, \tag{10'}$$

при $\lambda\geq 0$ и

$$|(T_\pm)^n f(t)| \leq \omega^n \sup_{0\leq\tau\leq t}|f(\tau)\ \mathrm{ch}[\sqrt{-\lambda}(t-\tau)]|, \quad n\geq 2, \tag{11'}$$

при $\lambda < 0$ **).

Оценки (10), (11), (10′), (11′) позволяют утверждать, что, если $\omega < 1$, уравнение (8) может быть разрешено методом последовательных приближений, в результате чего получится следующее представление обобщенных собственных функций:

$$u_i(x\pm t,\lambda) = u_i(x,\lambda)F^\pm(t,x,\lambda) \pm (1/\sqrt{\lambda})u_i'(x,\lambda)\Phi^\pm(t,x,\lambda). \tag{13}$$

Коэффициенты $F^\pm(t,x,\lambda)$ и $\Phi^\pm(t,x,\lambda)$ в (13) задаются равномерно сходящимися рядами $F^\pm(t,x,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}t) + \sum_{l=1}^{\infty}(T_\pm)^l\cos(\sqrt{\lambda}t)$, $\quad \Phi^\pm(t,x,\lambda) = \sin(\sqrt{\lambda}t) + \sum_{l=1}^{\infty}(T_\pm)^l\sin(\sqrt{\lambda}t)$.

В силу (10), (11), (10′), (11′) выполнены оценки

$$|F^\pm(t,x,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}t)| \leq [\omega/(1-\omega)]\ \mathrm{ch}[\ \mathrm{Im}(\sqrt{\lambda}t)], \tag{14}$$

$$|\Phi^\pm(t,x,\lambda) - \sin(\sqrt{\lambda}t)| \leq \min[t|\sqrt{\lambda}|, 2|\sqrt{\lambda}|/(1+|\sqrt{\lambda}|)][\omega/(1-\omega)]\ \mathrm{ch}[\ \mathrm{Im}(\sqrt{\lambda}t)]. \tag{15}$$

Доказательство теоремы с помощью представления (13) будет проведено в два этапа: сначала докажем оценки (6) и (7) при достаточно больших значениях $|\mu|$, а затем рассмотрим случай, когда μ меняется на конечном промежутке.

1a) Пусть $\lambda \geq 0$. Выберем $\mu_0 > 0$ так, чтобы при $\lambda \geq \mu_0^2$ равномерно по $x\in\mathbb{R}$ была выполнена оценка***)

$$\omega(1,x,\lambda) \leq 1/2. \tag{16}$$

Тогда из (12) следует, что равномерно по $t\leq 1$, $x\in\mathbb{R}$ и $\lambda\geq\mu_0^2$

$$\omega(t,x,\lambda) = O(1/|\sqrt{\lambda}|). \tag{17}$$

Поэтому неравенства (14) и (15) переходят в равномерные оценки

$$|F^\pm(t,x,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}t)| = O(1/\sqrt{\lambda}), \tag{18}$$

$$|\Phi^\pm(t,x,\lambda) - \sin(\sqrt{\lambda}t)| = O(1/\sqrt{\lambda}). \tag{19}$$

---

*) В силу четности левой и правой частей этого неравенства достаточно проанализировать случай $z>0$. Но функция $g(z) = z\,\mathrm{ch}z - \mathrm{sh}z$ монотонно возрастает на полупрямой $[0,\infty)$ и $g(0)=0$; поэтому $g(z)\geq 0$ для всех $z\geq 0$.

**) Оценка (10′) — очевидное следствие (10), а оценка (11′) доказывается по индукции с помощью (11) и неравенства $\mathrm{ch}z_1\cdot\mathrm{ch}z_2 \leq \mathrm{ch}(z_1+z_2)$.

***) Это возможно в силу равномерной локальной суммируемости потенциала $q(x)$ (см. соотношение (12)).

Фиксируем произвольное $\mu \geq \mu_0$, и пусть λ удовлетворяет условию $\mu \leq \sqrt{\lambda} \leq \mu + 1$. Рассмотрим обобщенный образ Фурье (4) функции

$$v(y) = \begin{cases} \cos[\mu(y-x)] & \text{при } 1/2 \leq |y-x| \leq 1, \\ 0 & \text{при остальных значениях } y. \end{cases} \tag{20}$$

Учитывая (13), имеем

$$\frac{1}{2}\hat{v}_i(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} (u_i(x+t,\lambda) + u_i(x-t,\lambda))\cos(\mu t)dt = u_i(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\cos(\mu t)\cos(\sqrt{\lambda}t)dt +$$

$$+ u_i(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\cos(\mu t)\Big[\frac{F^+(t,x,\lambda)+F^-(t,x,\lambda)}{2} - \cos(\sqrt{\lambda}t)\Big]dt +$$

$$+ (1/\sqrt{\lambda})u_i'(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\cos(\mu t)\Big[\frac{\Phi^+(t,x,\lambda)-\Phi^-(t,x,\lambda)}{2}\Big]dt. \tag{21}$$

Так как (см. [10, с. 17]) $\Big|\int_{1/2}^{1}\cos(\mu t)\cos(\sqrt{\lambda}t)dt\Big| \geq 2/\pi - 1/2 > 0$, то, привлекая к оценке выражений, заключенных в квадратные скобки в (21), оценки (18) и (19), получим

$$|u_i(x,\lambda)|^2 = O(1)|\hat{v}_i(\lambda)|^2 + O(1/\sqrt{\lambda})\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\} \tag{22}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Наряду с (20) рассмотрим функцию

$$w(y) = \begin{cases} \sin[\mu(y-x)] & \text{при } 1/2 \leq |y-x| \leq 1, \\ 0 & \text{при остальных значениях } y. \end{cases} \tag{23}$$

Аналогичным образом придем к равенству для обобщенного образа Фурье функции (23)

$$\frac{1}{2}\hat{w}_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u_i'(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\sin(\mu t)\sin(\sqrt{\lambda}t)dt + u_i(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\sin(\mu t)\Big[\frac{F^+(t,x,\lambda)-F^-(t,x,\lambda)}{2}\Big]dt +$$

$$+ (1/\sqrt{\lambda})u_i'(x,\lambda)\int_{1/2}^{1}\sin(\mu t)\Big[\frac{\Phi^+(t,x,\lambda)+\Phi^-(t,x,\lambda)}{2} - \sin(\sqrt{\lambda}t)\Big]dt. \tag{24}$$

Так как $\Big|\int_{1/2}^{1}\sin(\mu t)\sin(\sqrt{\lambda}t)dt\Big| \geq 2/\pi - 1/2 > 0$, то, проводя аналогичным образом оценку правой части (24), получим

$$|\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2 = O(1)|\hat{w}_i(\lambda)|^2 + O(1/\sqrt{\lambda})\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\} \tag{25}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Объединяя оценки (22), (25) и интегрируя обе части по мере $\rho(\lambda)$ в пределах $\mu \leq \sqrt{\lambda} \leq \mu + 1$, придем к равномерной по $x \in \mathbb{R}$ оценке

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\mu\leq\sqrt{\lambda}\leq\mu+1}\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\}d\rho(\lambda) = O(1)\sum_{i=1}^{m}\int_{\mu\leq\sqrt{\lambda}\leq\mu+1}\{|\hat{v}_i(\lambda)|^2 + |\hat{w}_i(\lambda)|^2\}d\rho(\lambda) +$$

$$+ O(\mu_0^{-2})\sum_{i=1}^{m}\int_{\mu\leq\sqrt{\lambda}\leq\mu+1}\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\}d\rho(\lambda). \tag{26}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{\mu\le\sqrt{\lambda}\le\mu+1} \{|\hat v_i(\lambda)|^2 + |\hat w_i(\lambda)|^2\}\,d\rho(\lambda) \le \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}} \{|\hat v_i(\lambda)|^2 + |\hat w_i(\lambda)|^2\}\,d\rho(\lambda)$ и правая часть последнего неравенства в силу аналога равенства Парсеваля (5) равна $\|v(y)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \|w(y)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 2$, то из оценки (26) при достаточно большом μ_0 следует равномерная по $x \in \mathbb{R}$ оценка (6) для $\mu \ge \mu_0$.

1б) Пусть теперь $\lambda < 0$. Возьмем пока произвольное число $R \in (0,1]$ и выберем $\mu_1 \ge 1/R$ так, чтобы при $\sqrt{-\lambda} \ge \mu_1$ и равномерно по $x \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство (16). Тогда при всех $t \le R$ имеет место равномерная оценка (17) и в силу (14) и (15)

$$|F^{\pm}(t,x,\lambda) - \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t)| = O(1/\sqrt{-\lambda})\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}R), \tag{27}$$

$$|\Phi^{\pm}(t,x,\lambda) - i\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t)| = O(1/\sqrt{-\lambda})\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}R). \tag{28}$$

Используем представление (13) для преобразования обобщенного образа Фурье (4) функции

$$v^0(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le |y-x| \le R, \\ 0 & \text{при остальных значениях } y. \end{cases} \tag{29}$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\hat v_i^0(\lambda) = u_i(x,\lambda)\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}R)}{\sqrt{-\lambda}} + u_i(x,\lambda)\int\limits_0^R \left[\frac{F^+(t,x,\lambda)+F^-(t,x,\lambda)}{2} - \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t)\right]dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}u_i'(x,\lambda)\int\limits_0^R \left[\frac{\Phi^+(t,x,\lambda)-\Phi^-(t,x,\lambda)}{2}\right]dt. \tag{30}$$

Так как при $\sqrt{-\lambda} \ge \mu_1$: $\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}R) \ge 0,5\exp(\sqrt{-\lambda}R)$, то, учитывая (27) и (28) при оценке интегралов в правой части (30), получим

$$|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R)|u_i(x,\lambda)|^2 =$$
$$= O(1)|\hat v_i^0(\lambda)|^2 + O(R^2)|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R)\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\} \tag{31}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Рассматривая для каждого $\mu \ge \mu_1$ обобщенный образ Фурье функции

$$w^0(y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y-x) & \text{при } 0 \le |y-x| \le R, \\ 0 & \text{при остальных значениях } y, \end{cases} \tag{32}$$

аналогичным образом придем к равномерной по $x \in \mathbb{R}$ оценке

$$|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R)|\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2 =$$
$$= O(1)|\hat w_i^0(\lambda)|^2 + O(R^2)|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R)\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\}. \tag{33}$$

Объединяя (31), (33) и выбирая R достаточно малым, имеем

$$|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R)\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\} = O(1)\{|\hat v_i^0(\lambda)|^2 + |\hat w_i^0(\lambda)|^2\}. \tag{34}$$

Проинтегрируем обе части (34) по мере $\rho(\lambda)$ в пределах $\mu \le \sqrt{-\lambda} \le \mu+1$ и примем во внимание оценку *) $|\lambda|^{-1}\exp(2\sqrt{-\lambda}R) \ge C_1\exp(\mu R)$, получим

$$\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\mu\le\sqrt{-\lambda}\le\mu+1}\left\{|u_i(x,\lambda)|^2 + |\sqrt{\lambda}|^{-2}|u_i'(x,\lambda)|^2\right\}d\rho(\lambda) =$$

$$= O(e^{-\mu R})\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\mu\le\sqrt{-\lambda}\le\mu+1}\{|\hat v_i^0(\lambda)|^2 + |\hat w_i^0(\lambda)|^2\}\,d\rho(\lambda).$$

---

*) Константа C_1 зависит только от R.

Из этой оценки, применяя аналог равенства Парсеваля (5) для функций (29), (32) и учитывая, что $\|v^0(y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$, $\|w^0(y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$, получим равномерную по $x \in \mathbb{R}$ оценку (7) для всех $\mu \geq \mu_1$ с константой $\alpha = R$.

Таким образом, осталось доказать (6) при $\mu \in [0, \mu_0]$ и (7) при $\mu \in [0, \mu_1]$. Остановимся подробно только на обосновании оценки (6).

2а) Пусть $\lambda \geq 0$ удовлетворяет условию $\mu \leq \sqrt{\lambda} \leq \mu + 1$ и число $R \in (0, 1]$ таково, что для всех $\sqrt{\lambda} \leq \mu_0$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство (16) *). Тогда при всех $t \leq R$ имеет место равномерная по $x \in \mathbb{R}$ оценка $\omega(t, x, \lambda) = O(R)$ и в силу (14) и (15) имеем

$$|F^{\pm}(t, x, \lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}t)| = O(R), \tag{35}$$

$$(1/|\sqrt{\lambda}|)|\Phi^{\pm}(t, x, \lambda) - \sin(\sqrt{\lambda}t)| = O(R^2). \tag{36}$$

Рассмотрим обобщенный образ Фурье функции $v^0(y)$, определяемой формулами (29). Принимая во внимание (13), получаем

$$\frac{1}{2}\hat{v}_i^0(\lambda) = u_i(x, \lambda)\int\limits_0^R \cos(\sqrt{\lambda}t)dt + u_i(x, \lambda)\int\limits_0^R \left[\frac{F^+(t, x, \lambda) + F^-(t, x, \lambda)}{2} - \cos(\sqrt{-\lambda}t)\right]dt +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u_i'(x, \lambda)\int\limits_0^R \left[\frac{\Phi^+(t, x, \lambda) - \Phi^-(t, x, \lambda)}{2}\right]dt. \tag{37}$$

Если R удовлетворяет условию $(\mu_0 + 1)R \leq \pi/2$, то $\int\limits_0^R \cos(\sqrt{\lambda}t)dt \geq 2R/\pi$ и, применяя оценки (35), (36) к выражениям, стоящим в квадратных скобках в правой части (37), получим равномерную по $x \in \mathbb{R}$ оценку

$$|u_i(x, \lambda)|^2 = O(R^{-2})|\hat{v}_i^0(\lambda)|^2 + O(R^2)\{|u_i(x, \lambda)|^2 + R^2|u_i'(x, \lambda)|^2\}. \tag{38}$$

Аналогичным образом, используя функцию $w^0(y)$, определяемую формулами (32), придем к равномерной по $x \in \mathbb{R}$ оценке

$$R^2|u_i'(x, \lambda)|^2 = O(R^{-2})|\hat{w}_i^0(\lambda)|^2 + O(R^2)\{|u_i(x, \lambda)|^2 + R^2|u_i'(x, \lambda)|^2\}. \tag{39}$$

Складывая почленно оценки (38) и (39) и выбирая R достаточно малым, получим для всех λ, для которых $\sqrt{\lambda} \leq \mu_0$, равномерную по $x \in \mathbb{R}$ оценку $|u_i(x, \lambda)|^2 + R^2|u_i'(x, \lambda)|^2 = O(R^{-2})\{|\hat{v}_i^0(\lambda)|^2 + |\hat{w}_i^0(\lambda)|^2\}$.

Теперь доказательство равномерной оценки (6) при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ может быть завершено точно так же, как в 1б).

2б) Для обоснования равномерной оценки (7) при $0 \leq \mu \leq \mu_1$ достаточно доказать оценку

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0 \leq \sqrt{-\lambda} \leq \mu_1 + 1} \{|u_i(x, \lambda)|^2 + |u_i'(x, \lambda)|^2\}\, d\rho(\lambda) = O(1),$$

равномерную по $x \in \mathbb{R}$. Для вывода этой оценки можно, как и в 2а), рассмотреть обобщенные образы Фурье функций (29) и (32) и, применяя оценки (14), (15), учесть, что при $\sqrt{-\lambda} \leq \mu_1$ выполнены неравенства $\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t) \leq \exp[(\mu_1 + 1)t]$, $|\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t)| \leq \exp[(\mu_1 + 1)t]$.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть потенциал $q(x)$ в дифференциальном выражении (1) равномерно локально суммируем на $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $\delta > 0$ можно указать такую постоянную $C_2(\delta) > 0$, что равномерно по $x \in \mathbb{R}$ выполнена оценка*

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{\infty} (\lambda + 1)^{-1/2-\delta}|u_i(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq C_2(\delta). \tag{40}$$

---

*) Выбор числа R, как и в 1б), производится ниже.

Доказательство. Перепишем левую часть (40) в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{\infty}(\lambda+1)^{-1/2-\delta}|u_i(x,\lambda)|^2 d\rho(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{k\le\sqrt{\lambda}<k+1}(\lambda+1)^{-1/2-\delta}|u_i(x,\lambda)|^2 d\rho(\lambda)\Big]$$

и учтем, что правая часть этого равенства не превосходит

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-1-2\delta}\Big[\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{k\le\sqrt{\lambda}\le k+1}|u_i(x,\lambda)|^2 d\rho(\lambda)\Big]. \qquad (41)$$

В силу оценки (6) выражение, стоящее в квадратных скобках в (41), есть $O(1)$ равномерно по $k\ge 0$ и $x\in\mathbb{R}$. Поэтому левая часть (40) не превосходит $O(1)\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-1-2\delta}\le C_2(\delta)$ равномерно по $x\in\mathbb{R}$.

Следствие 2. *Пусть потенциал $q(x)$ в дифференциальном выражении (1) равномерно локально суммируем на $\mathbb{R}$ и $\alpha>0$ — константа из утверждения теоремы 1. Тогда для каждого $\alpha_1\in[0,\alpha)$ можно указать такую постоянную $C_3(\alpha_1)>0$, что равномерно по $x\in\mathbb{R}$ выполнена оценка*

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha_1\sqrt{-\lambda}}|u_i(x,\lambda)|^2 d\rho(\lambda)\le C_3(\alpha_1). \qquad (42)$$

Оценка (42) доказывается так же, как и оценка (40) следствия 1, но с использованием оценки (7) теоремы 1.

В заключение отметим, что в случае, когда потенциал $q(x)$ оператора (1) не является равномерно локально суммируемым на $\mathbb{R}$, а лишь локально суммируемым на $\mathbb{R}$ (т. е. константа в правой части неравенства (2) зависит от x), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $q(x)$ локально суммируем на $\mathbb{R}$ и A — произвольное положительное число. Тогда существует такое $\alpha>0$, что равномерно по $x\in[-A,A]$ и $\mu\ge 0$ выполнены оценки (6) и (7), константы в правых частях которых, вообще говоря, зависят от A.*

Для обоснования теоремы 2 достаточно дословно повторить доказательство теоремы 1 и учесть, что в рассматриваемом случае оценки (16) — (19), (22), (25) — (28), (31), (33) — (36), (38) и (39) выполнены равномерно по $x\in[-A,A]$.

Таким же образом формулируются и доказываются аналоги следствий 1 и 2.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта DGIII/ESPRIT — ACTCS9282 сотрудничества, поддерживаемого Комиссией Европейского Сообщества.

Авторы благодарны И. Антониу за полезное обсуждение результатов данной работы во время их пребывания в Международном институте физики и химии им. Е. Солвея (Брюссель, Бельгия) в октябре — ноябре 1994 г.

Литература

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4.
2. *Шубин М. А.* // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 2. С. 95 — 135.
3. *Simon B.* // Adv. Appl. Math. 1982. Vol. 3, N 3. P. 463 — 490.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М., 1978. Т. 2.
6. *Oročko Yu.* // Rpt. Math. Phys. 1979. Vol. 15, N 2. P. 163 — 172.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М., 1966. Т. 2.
8. *Молчанов А. М.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 169 — 199.
9. *Тихомиров В. В.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807 — 810.
10. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 21 марта 1995 г.