Московский физико-технический институт (государственный университет)
факультет инноваций и высоких технологий

На правах рукописи

Звонарев Артем Евгеньевич

Экстремальные задачи теории гиперграфов и их применения в евклидовой теории Рамсея

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
д.ф.-м.н. А.М. Райгородский

Москва, 2016

Оглавление

Список основных обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$|A|$ — мощность конечного множества A;

$[a]$ — целая часть числа a;

$a|b$ — свойство "a делит b", т.е. число a является делителем числа b;

$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;

$|\mathbf{x}|$ — норма вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве;

$V(G)$ — множество вершин графа G;

$E(G)$ — множество ребер графа G;

$\omega(G)$ — кликовое число графа G или число вершин в самом большом полном подграфе в G;

$f(N) = o(g(N))$ — для любого числа $c > 0$ существует такое число N_0, что для любого $N > N_0$ выполнено неравенство $|f(N)| \leq c|g(N)|$;

$f(x) \sim g(x)$ — функции асимптотически равны при $x \to \infty$, то есть $f(x) = g(x) \cdot (1 + o(1))$;

$r(x, y)$ — расстояние между точками x, y в метрике r;

$a \equiv b \pmod{k}$ — a сравнимо с b по модулю k, то есть a и b дают одинаковые остатки при делении на k;

C_n^k — число сочетаний из n элементов по k;

$c_x^y = \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}}$ — для произвольных чисел $x > 0$ и $y \in (0, x)$, также $c_x^y = 1$ при $y = x$ и $c_x^y = 0$ при $y > x$.

Введение

В настоящей диссертации исследуется ряд вопросов, возникающих на стыке нескольких областей науки – комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования и евклидовой теории Рамсея. Первоначально задачи, рассматриваемые в данной работе, появились в рамках комбинаторной геометрии. Это весьма многогранная и бурно развивающаяся часть современной комбинаторики. По-видимому, отправной точкой для ее развития послужила проблематика, обсуждавшаяся И. Кеплером и другими еще в начале XVII века. В частности, одна из задач в этой области в то время формулировалась следующим образом: каково максимальное число равных материальных шаров, которые можно приложить к равному всем им шару в евклидовом пространстве? И. Кеплер предположил, что число таких шаров 12, но полное и строгое решение этой задачи было дано лишь в 1953 году Б. Л. Ван дер Варденом и К. Шютте (см. [1]). Вообще, именно в XX веке комбинаторная геометрия сформировалась в самостоятельную дисциплину. С одной стороны, уже упомянутое решение задачи Кеплера поспособстваволо развитию современной теории упаковок и покрытий (см. [2]–[4]). С другой стороны, появился ряд новых задач, которыми мотивируется наша работа и о которых мы поговорим ниже. Дальнейшая структура введения следующая: в первых двух разделах мы обсудим задачи комбинаторной геометрии, в третьем разделе поговорим о тесно связанной с ними теории Рамсея, а в четвертой и пятой частях скажем несколько слов об экстремальной комбинаторике и ее связи с геометрией.

Проблема Борсука

В 1933 году К. Борсук поставил проблему отыскания минимального числа $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное ограниченное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [5]). Дадим более формальное определение. Введем величину

$$f(\Omega) = \min\{f : \ \Omega_1 \sqcup \dots \sqcup \Omega_f, \mathrm{diam}\ \Omega_i < \mathrm{diam}\ \Omega\ \forall\ i\},$$

где Ω – любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и

$$\mathrm{diam}\ \Omega = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|,$$

а $|x-y|$ – евклидово расстояние между векторами. В этих терминах

$$f(n) = \max_{\Omega} f(\Omega).$$

Борсук [5] высказал гипотезу, что $f(n) = n+1$. Для $n = 1, 2$ доказательство этого утверждения было получено самим Борсуком в той же работе [5]. А в 1955 году Эглстон доказал справедливость гипотезы в размерности $n = 3$ (см. [6]). Позднее рядом авторов были получены элементарные доказательства в этой размерности. Однако, начиная с размерности 4 доказательство гипотезы Борсука получить не удавалось. Были также предприняты попытки опровергнуть гипотезу, и в 1993 году Дж. Кан и Г. Калаи в работе [7] построили контрпримеры в размерностях $n \geqslant 2014$. Сейчас известно, что гипотеза уже не верна начиная с размерности $n = 64$. Подробнее с проблемой Борсука можно ознакомиться в работах и книгах [8]–[11].

Задача о хроматическом числе пространства

Еще одна основополагающая задача комбинаторной геометрии, история которой тесно связана с историей гипотезы Борсука, – это задача о нахождении так называемого *хроматического числа* евклидова пространства. Истоки она берет еще в 1950 году, когда Э. Нельсон предложил найти минимальное количество $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так покрасить все точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Величина $\chi(\mathbb{R}^n)$ и была названа *хроматическим числом* евклидова простанства. Сейчас известно множество результатов о хроматическом числе. Не вдаваясь в детали истории, подробности которой можно найти, например, в статье [12], приведем лишь основные результаты по этой проблеме.

- $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Нижняя оценка была получена братьями Мозерами в 1961 году в работе [13]. Верхняя оценка доказана в том же 1961 году Дж. Хадвигером в работе [14].
- $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$. Нижняя оценка была получена О. Нечуштаном в 2002 году в работе [15]. Верхняя оценка была доказана в 2000 году Д. Кулсоном в работе [16].

- $7 \le \chi(\mathbb{R}^4) \le 54$. Нижняя оценка была получена К. Кантвеллом в 1996 году в работе [17], а в 2006 году Л.Л. Ивановым было предложено существенно более простое доказательство этой оценки в работе [18]. Верхняя оценка была доказана в 2003 году Г. Тотом и Р. Радойчичем в работе [19].
- $(1.239...+o(1))^n \le \chi(\mathbb{R}^n) \le (3+o(1))^n$. Нижняя оценка была получена А.М. Райгородским в 2000 году в работе [20]. Верхняя оценка была доказана в 1972 году Д. Ларманом и К.А. Роджерсом в работе [21].

Заметим, что записи вида $f(n) \le (c+o(1))^n$ здесь и далее означают существование такой функции $g(n)$, равной $o(1)$ при $n \to \infty$, что $f(n) \le (c + g(n))^n$ для всех n. Также стоит отметить что все функции $o(1)$ во всех неравенствах разные.

За прошедшие с момента постановки задачи о хроматическом числе шестьдесят с лишним лет появились разнообразные ее обобщения. Например, рассматривались хроматические числа произвольных метрических пространств (см. [12], [22]–[30]). В частности, изучалась величина $\chi(\mathbb{Q}^n)$, или *хроматическое число* рационального пространства. В данном случае точки берутся из пространства $\mathbb{Q}^n$, снабженного евклидовой метрикой. Удивительно, но для $\chi(\mathbb{Q}^n)$ в малых размерностях, в отличие от вещественного случая, удалось получить достаточно много точных оценок. А именно: при $n = 1, 2, 3$ оказалось, что $\chi(\mathbb{Q}^n) = 2$, а при $n = 4$ получилось, что $\chi(\mathbb{Q}^n) = 4$ (подробнее см. в [22], [23]). В общем же случае лучшей верхней оценкой является оценка 1972 года Д. Лармана и К.А. Роджерса [21]:

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \le \chi(\mathbb{R}^n) \le (3 + o(1))^n,$$

а лучшей нижней оценкой — оценка Е.И. Пономаренко и А.М. Райгородского 2013 года (см. [31]):

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \ge (1.199\ldots + o(1))^n.$$

Также изучались *хроматические числа* пространств с несколькими (и даже бесконечно многими) запрещенными расстояниями. А именно, рассматривались величины

$$\chi((X, \rho), \mathcal{A}),$$

где (X, ρ) – метрическое пространство, а множество запретов берется как некоторое подмножество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$ и

$$\chi((X,\rho),\mathcal{A}) = \min\{\chi : \ \exists\, V_1, \ldots, V_\chi \ \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi, \\ \forall\, i \ \ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \mathcal{A}\}.$$

Более подробно с этой проблематикой можно ознакомиться в следующей литературе: [27], [28], [32]–[35].

Евклидова теория Рамсея

Еще одно естественное и важное обобщение понятия хроматического числа пространства дается в так называемой *евклидовой теории Рамсея*. Здесь множество $S \subset \mathbb{R}^d$ называется *рамсеевским*, если для любого r существует такое $n_0 \geq d$, что при каждом $n \geq n_0$ и при любой раскраске пространства $\mathbb{R}^n$ в r цветов найдется конгруэнтная одноцветная копия S. Можно дать то же определение и в терминах хроматических чисел. А именно, пусть $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ — минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не образовывали множеств, конгруэнтных S. В этих обозначениях S рамсеевское тогда и только тогда, когда $\chi_S(\mathbb{R}^n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

В свете оценки

$$(1.239... + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

ясно, что любое двухточечное множество S является рамсеевским и даже, как говорят, *экспоненциально рамсеевским*. Для многих других множеств также доказана экспоненциальная рамсеевость. Например, это сделано для множества вершин произвольного симплекса и для декартовых произведений экспоненциально рамсеевских множеств (см. [36]–[39]). Однако всякий раз это делается неявно, так что выписать оценку вида

$$\chi_S(\mathbb{R}^n) \geq (c + o(1))^n$$

с конкретной $c > 1$ не представляется возможным.

Отметим, что все множества S обязаны лежать на некоторой сфере (см. [36]–[38]). Трудная проблема состоит в доказательстве или опровержении обратного утверждения.

Дистанционные графы и гиперграфы

Теперь расскажем о связи описанных выше задач с проблемами экстремальной комбинаторики и теорией гиперграфов. Для начала введем определение *дистанционного графа*.

Дистанционный граф или *граф расстояний* – это любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \quad a > 0.$$

Желая подчеркнуть, что вершины графа принадлежат пространству размерности n, будем говорить об *n-мерном* дистанционном графе. Если $|V| < \infty$, то скажем явно, что граф расстояний конечный.

В терминах дистанционных графов $\chi(\mathbb{R}^n)$ — это хроматическое число графа расстояний, у которого $V = \mathbb{R}^n$. А поскольку, как нетрудно видеть, $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$, некоторые соображения компактности (см. [40]) показывают, что хроматическое число пространства достигается на конечном n-мерном дистанционном графе.

Все известные экспоненциальные нижние оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ достигаются на конечных дистанционных графах с вершинами в точках решетки $\mathbb{Z}^n$. А экспоненциальные оценки величин $\chi_S(\mathbb{R}^n)$, полученные в работах [36]–[38], и вовсе основаны на множествах $(0,1)$–векторов в пространстве. Опишем общую идею на примере величины $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ и графа с вершинами в $\{0,1\}^n$. Предположим, что в каждой вершине этого графа одно и то же число единиц. В этом случае граф является дистанционным тогда и только тогда, когда для некотогого b скалярное произведение его вершин (как векторов) равно b. Пусть $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, то есть минимальное количество цветов, в которые так можно покрасить все вершины этого графа, что все ребра не являются одноцветными (иначе говоря, вершины, образующие ребра, покрашены в разные цвета). Пусть, далее, $\alpha(G)$ есть размер любого из максимальных независимых множеств вершин графа G (то есть множества вершин, в которых никакие две вершины не соединены ребром). Ясно, что

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)},$$

где |V(G)| – количество вершин графа G. При этом в нашем случае $\alpha(G)$ – это максимальное число $(0,1)$–векторов, у которых попарные скалярные произведения не равны b. Таким образом, желая продолжить цепочку неравенств

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)},$$

мы должны научиться оценивать сверху число независимости. Напомним, что гиперграф – это пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами* гиперграфа. Ясно, что каждому $(0,1)$–вектору можно сопоставить ребро гиперграфа на n вершинах: это просто множество номеров координат, на которых стоят единицы. В этих терминах $\alpha(G)$ – это максимальное число ребер гиперграфа, попарные пересечения которых не могут иметь мощность b. Отыскание последней величины – это и есть классическая проблема экстремальной комбинаторики и теории кодирования. Здесь самые сильные до последнего времени результаты принадлежали П. Франклу и В. Редлю (см. [37]).

Задача об обхвате и хроматическом числе графа

В предыдущем разделе мы уже показали, насколько важны графы и их хроматические числа для комбинаторной геометрии. Один из классических результатов о хроматическом числе графа был доказан в 1959 году П. Эредешем (см. [41]): Для любых k, l существует граф G, у которого $\chi(G) > k$, $g(G) > l$, где в свою очередь $g(G)$ есть *обхват* графа G, то есть длина кратчайшего цикла в нем. П. Эрдеш доказал теорему для случая "обычных" графов, а А.М. Райгородский (см. [42]) сформулировал естественный аналог этой задачи для случая дистанционных графов: существует последовательность конечных n-мерных графов расстояний G_n, у которых нет клик размера k, а хроматические числа растут экспоненциально.

В работах [42] — [46] изучались величины

$$\zeta(k) = \sup\{\zeta : \ \exists\ \delta(n) = o(1),\ \forall\ n,\ \exists\ G\ \subset\ \mathbb{R}^n,$$

$$\omega(G) < k,\ \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\},$$

где $\omega(G)$ – число вершин в самом большой клике графа G. Для этих величин получены достаточно хорошие оценки. Для нас сейчас важно то, что, как видно из этих оценок, $\zeta(k) \to 1.239\ldots$ при $k \to \infty$. В настоящей диссертации мы докажем, что для любой функции $k = k(n)$, стремящейся к бесконечности с ростом n, существует функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, и такая последовательность конечных n-мерных дистанционных графов G_n, что $\chi(G_n) \geq (1.239... + \delta(n))^n$ и $\omega(G_n) \leq k(n)$.

Пафос этого утверждения в том, что константа в основании экспоненты, которая служит оценкой для хроматического числа, *в точности равна* величине $1.239\ldots$, а не просто "близка" к ней. И для этого достаточен любой сколь угодно медленный рост верхней границы $k(n)$ для кликового числа.

Структура диссертации

Настоящая диссертация состоит из трех глав. Первая глава посвящена улучшению результатов Франкла–Редля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением (см. раздел дистанционные графы и гиперграфы). Во второй главе речь пойдет о применении полученных результатов в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником. В третьей главе речь пойдет о некоторых результатах в решении классической проблемы, связанной с изучением хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства. И в заключении поговорим о дальнейших направлениях исследований.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору А.М. Райгородскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе.

Глава 1

Теорема о мощности множества ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и ее уточнения

1.1 Введение

Перед тем как сформулировать основную теорему, которая в данной диссертации была существенно улучшена, приведем ряд определений.

Определение 1. *Гиперграфом H* назовем пару множежств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами* гиперграфа.

Определение 2. Гиперграф называется *n-однородным*, если каждое его ребро имеет ровно n вершин.

Экстремальные задачи о раскрасках гиперграфов впервые возникли в классических работах 20-30-х годов XX века, положивших начало теории Рамсея. Проблемы рамсеевского типа берут свое начало в комбинаторике с теоремы Рамсея 1930 года, а в теории чисел — с теоремы Ван дер Вардена 1927 года. Обе эти теоремы очень тесно связаны с раскрасками гиперграфов и, по сути, стимулировали само развитие теории раскрасок гиперграфов.

В рамках этой теории следующую теорему в своей работе [37] доказали П. Франкл и В. Редль.

Теорема 1. *Пусть $H_1 = (V, E_1)$, $H_2 = (V, E_2)$ — два гиперграфа на одном и том же множестве V из n вершин, причем для любых $F_1 \in E_1$, $F_2 \in E_2$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ (множества ребер E_1, E_2 могут как пересекаться,* *так и не пересекаться). Если для некоторого $\eta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ выполнено условие $\eta n \leq l \leq \left(\frac{1}{2} - \eta\right) n$, то существует константа $\varepsilon > 0$, зависящая только от η, с которой $|E_1| \cdot |E_2| \leq (4 - \varepsilon + o(1))^n$.*

Разумеется, теорема 1 тем интереснее, чем больше n. Фактически мы видим, что при $n \to \infty$ максимум произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества, в которых запрещены "перекрестные" пересечения величины $l = \Theta(n)$, в экспоненту раз меньше, чем 4^n, т.е. чем просто максимум произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества.

Заметим, что в теореме не предполагается *однородность* гиперграфов, т.е. мощности ребер могут быть разными. На самом деле в приложениях, которым посвящена настоящая диссертация, гиперграфы будут как раз однородны. Поэтому мы сделаем дополнительно допущение, состоящее в том, что для любого $i \in \{1, 2\}$ и любого $F \in E_i$ выполнено $|F| = d$.

Опять же, если говорить о приложениях, то наиболее ценными являются ситуации, когда для каждого n есть своя пара гиперграфов H_1^n, H_2^n, для которых d (мощность каждого ребра) — это функция от n, имеющая асимптотику $d \sim an$, $a \in (0, 1/2)$, при $n \to \infty$, а l (величина запрета) — это функция от n, имеющая асимптотику $l \sim \rho n$, $\rho \in (0, a)$. В таких ситуациях величина ε из теоремы 1 зависит по-прежнему только от ρ и никак не учитывает значения a. Более того, зависимость функции ε от величины ρ в теореме 1 сильно неявная.

Нам удалось, во-первых, существенно уточнить теорему, во-вторых, сделать оценку зависящей также от a и, в-третьих, явно описать зависимость ε от ρ и a.

1.2 Формулировки основных результатов

Главными результатами данной главы являются, во-первых, существенное уточнение теоремы Франкла–Редля, а, во-вторых, новые верхние оценки произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества с запретом на "перекрестные" пересечения. Доказанные ниже теоремы опубликованы в статьях [65], [66].

Итак, пусть $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$ — гиперграфы, у которых $V^n = \{1, \ldots, n\}$, также для любого i и для любого $F \in E_i^n$ выполнено

$$|F| = d(n) \sim an, a \in (0, 1/2), n \to \infty,$$

и, наконец, для любых $F_1 \in E_1^n$, $F_2 \in E_2^n$ выполнено

$$|F_1 \cap F_2| \neq l(n) \sim \rho n, \rho \in (0, a), n \to \infty.$$

Введем ряд параметров. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ — положительные вещественные числа, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, причем $\alpha + \beta < 1$. Пусть далее $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, \alpha + \beta)$. Положим

$$\mu_1 = 1 - \alpha - \beta + \gamma_1,\ \mu_2 = 1 - \alpha - \beta + \gamma_2,$$

$$a_1 = \min\left\{a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1, \frac{\mu_1}{2}\right\},$$

$$a_2 = \min\left\{a - \alpha_1 - \beta + \gamma_2, \frac{\mu_2}{2}\right\}.$$

Теперь введем некоторую величину g_1. Для этого определим функцию энтропии

$$H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

и рассмотрим несколько случаев.

Если $a_1 = \frac{\mu_1}{2}$, то

$$g_1 = 2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}.$$

Если

$$a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1 \text{ и } a_1 + \beta \geq \frac{\mu_1}{2},$$

то

$$g_1 = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1 + H\left(\frac{a_1+\beta}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}\right\}.$$

Если

$$a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1 \text{ и } a_1 + \beta < \frac{\mu_1}{2},$$

то

$$g_1 = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}\right\}.$$

Для $\delta \in (0,1)$ и $z, z_1 \geq 1, z_2 \geq 1$ положим

$$f_1(\delta) = \inf\left\{(1+y)(1-x) : (1+y)^2 \leq 1+\delta, (1+x)(1-y) \leq 1+\delta,\right.$$
$$\left. x > 0, y > 0\ \right\},$$

$$f_2(\alpha, \beta, \delta, z) = \alpha \ln(1+\delta) + \beta \ln f_1(\delta) + \ln(1 - (\delta)^z), z \geq 1$$

$$\delta_1 = \sup\left\{\delta:\ \sup_{z_1\ge 1}\left\{\frac{\min\limits_{\gamma_1}(g_1/4^{\mu_1})}{(1+\delta)^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta)}:\ \beta=\rho-\alpha_1,\ \alpha+\beta\ge\rho,\right.\right.$$
$$\left.\left. f_2(\alpha,\beta,\delta,z_1)\le 0\right\} < 1-(\delta)^{z_1}\ \right\},$$

Далее похожим образом определим δ_2. А именно, пусть $\kappa = \frac{\beta}{\mu_2} - \frac{1}{2}$ и $\lambda \in \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2}, \kappa\right)$. Если

$$a_2 + (\kappa-\lambda)\mu_2 \ge \frac{\mu_2}{2},$$

то положим

$$g_2(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2 + H\left(\frac{a_2+(\kappa-\lambda)\mu_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+(\kappa-\lambda)}{2}\right)\mu_2}\right\}.$$

Иначе

$$g_2(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+(\kappa-\lambda)}{2}\right)\mu_2}\right\}.$$

Если $a_2 = \frac{\mu_2}{2}$, то

$$h(\lambda) = \max\left\{2^{\mu_2}\cdot 2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+\kappa-\lambda}{2}\right)\mu_2}\right\},$$

иначе

$$h(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, \max\left\{2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}\cdot 2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2}, g_2(\lambda)\right\}\right\}.$$

Наконец, $\xi = \min\limits_{\lambda} h(\lambda)$ и

$$\delta_2 = \sup$$
$$\left\{\delta:\sup_{z_2\ge 1}\left\{\frac{\min\limits_{\gamma_2:\,\kappa>0}(\xi/4^{\mu_2})}{(1+\delta)^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta)}: \rho-\alpha_1 = 1-\alpha-\beta, \alpha+\beta\ge 1-\rho,\right.\right.$$
$$\left.\left. f_2(\alpha,\beta,\delta,z_2)\le 0\right\} < 1-(\delta)^{z_2}\ \right\},$$

Теорема 2. *Положим $\varepsilon = \min\{(\delta_1)^{z_1}, (\delta_2)^{z_2}\}$. Имеет место неравенство*

$$|E_1^n|\cdot|E_2^n| \le (4-4\varepsilon+o(1))^n.$$

Замечание. В доказательстве используются идеи исходной работы П. Франкла и В. Редля [37], а также ряд новых нетривиальных соображений из экстремальной комбинаторики. Кроме того, рассуждение значительно усложнено за счет введения большого числа новых параметров. В частности, ограничение на мощность ребра гиперграфа приводит к новым неравенствам для оценки искомой величины $|E_1^n| \cdot |E_2^n|$. Более того, то, что все основные параметры из условия теоремы мы намеренно сделали зависимыми от n, помогло нам в отыскании явной зависимости ε от ρ и a.

В случае, когда $a = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{1}{4}$, теорема 1 имела следствие, сформулированное как следствие 1.2 в работе [37]: в обозначениях теоремы 2 выполнено неравенство

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (3.96 + o(1))^n.$$

При тех же параметрах теорема 2 дает оценку

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (3.892\ldots + o(1))^n.$$

Можно сравнить полученные оценки и с тривиальным случаем. Рассмотрим следующую таблицу. В ней приведены результаты вычислений при некоторых $a \in [0.3, 0.5]$ и $\rho \in [0.025, 0.25]$. В каждой клетке сверху стоит оценка в тривиальном случае, то есть просто квадрат числа всех возможных ребер без запрета на перекрестные пересечения $\sqrt[n]{(C_n^d)^2} = (\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}})^2$, а снизу — $4 - 4\varepsilon$. Видно, что в большинстве случаев имеет место значимое улучшение. Прочерки стоят в тех клетках, в которых улучшения нет.

	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
0.3	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	-	-
	3.384	3.372	3.296	3.280	3.220	3.268	3.180	3.232	-	-
0.35	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	-	-
	3.608	3.604	3.432	3.452	3.460	3.468	3.400	3.580	-	-
0.4	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	-
	3.716	3.712	3.704	3.700	3.700	3.692	3.688	3.676	3.780	-
0.45	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960
	3.792	3.792	3.788	3.796	3.796	3.800	3.796	3.800	3.804	3.880
0.5	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
	3.844	3.848	3.852	3.856	3.864	3.868	3.872	3.880	3.884	3.892

1.3 Доказательство уточнения теоремы Франкла–Редля

Доказательство теоремы 2 мы разобьем на несколько частей.

1.3.1 Некоторые параметры

Прежде всего заметим, что доказательство теоремы 2, будучи существенным уточнением доказательства теоремы 1 Франкла–Редля, тем не менее, во многом с ним перекликается. Поэтому мы будем часто апеллировать к работе [37] и даже к обозначениям из этой работы.

Итак, пусть фиксировано $n \in \mathbb{N}$ и даны гиперграфы $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$. У них одно и то же множество из n вершин, и нам нужно оценить произведение мощностей их множеств ребер. Поскольку n фиксировано, введем для множеств ребер новые обозначения, в которых n явно не фигурирует. А именно, заменим обозначение E_1^n на $\mathcal{F}$, а обозначение E_2^n — на $\mathcal{G}$. Так и индексов меньше, и символы совпадают со своими аналогами из работы [37].

Отметим, что, зафиксировав n, мы в принципе можем считать, что это достаточно большое число, ведь оценка в теореме 2 сформулирована с точностью до функции $o(1)$, которая стремится к нулю с ростом n, но при необходимости может быть сделана и очень большой на начальном отрезке натурального ряда.

Кроме того, коль скоро n дано, даны и числа d — мощность каждого ребра — и l — величина запрещенного пересечения.

Напомним несколько важных обозначений из работы [37]. Пусть на одном и том же n-элементном множестве вершин X есть два множества ребер $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Пусть числа l_1, l_2 таковы, что $0 \le l_1 \le l_2 \le n$. Тогда запись $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{P}(n, [l_1, l_2])$ означает, что для любого ребра из $\mathcal{X}$ и любого ребра из $\mathcal{Y}$ мощность их пересечения не принадлежит отрезку $[l_1, l_2]$. При $l_1 = l_2$ отрезок состоит из одного числа. Например, для наших множеств ребер $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ выполнено

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}(n, [l, l]).$$

Далее, по $x \in X$ определяются совокупности $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$:

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0(x) = \{F \in \mathcal{X} : x \notin F\},$$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1(x) = \{F \setminus \{x\} : x \in F \in \mathcal{X}\}$$

и их аналоги $\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1$. Наблюдение (очевидное) со страницы 267 работы [37] состоит в том, что

$$(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1 - 1, l_2 - 1]),$$

$$(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1, l_2]),$$

$$(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1 - 1, l_2]).$$

Отметим, что если гиперграф $(X, \mathcal{Y})$ однороден, то $\mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Y}_1 = \emptyset$.

Наконец, в [37] используется обозначение

$$p(\mathcal{X}) = \frac{|\mathcal{X}|}{2^{|\cup \mathcal{X}|}},$$

где под $\cup \mathcal{X}$ мы понимаем объединение всех ребер из совокупности $\mathcal{X}$.

Вернемся к нашим совокупностям $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и их параметрам n, d, l. Пусть $\delta \in (0, 1)$. Опишем алгоритм $\mathfrak{A}(\delta)$ со страницы 268 работы [37]. Этот алгоритм преобразует исходные совокупности $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ в некоторые новые совокупности $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, и, если изначально множествам из разных совокупностей было запрещено пересекаться по l элементам, то в итоге взаимные пересечения окажутся либо большими некоторой величины, либо меньшими некоторой другой величины.

1.3.2 Алгоритм Франкла–Редля $\mathfrak{A}(\delta)$

(a) Полагаем $m = n$, $l_1 = l$, $l_2 = l$.

(b) Проверяем, не выполнено ли $l_1 = 0$. Если да, то останавливаем алгоритм. Если нет, то переходим к шагу (c).

(c) Проверяем, не выполнено ли $l_2 = m$. Если да, то останавливаем алгоритм. Если нет, то переходим к шагу (d).

(d) Проверяем, не выполнено ли

$$p(\mathcal{F}_1)p(\mathcal{G}_1) > (1+\delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

Если да, то полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, $l_1 = l_1 - 1$, $l_2 = l_2 - 1$ и переходим к (h). Иначе переходим к (e).

(e) Выбираем $\mathcal{F}_1$ или $\mathcal{G}_1$ (скажем, $\mathcal{F}_1$) с $p(\mathcal{F}_1) \leq \sqrt{1+\delta}\,p(\mathcal{F})$ и переходим к (f).

(f) Проверяем, не выполнено ли

$$p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)p(\mathcal{F}_0) > (1+\delta)p(\mathcal{G})p(\mathcal{F}).$$

Если да, то полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1$ и переходим к (h). Иначе переходим к (g).

(g) Полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$, $l_1 = l_1 - 1$ и переходим к (h).

(h) Полагаем $m = m - 1$ и переходим к (b).

На шагах (d), (f) совокупности $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ преобразуются в совокупности $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$, у которых

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') > (1+\delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

На шаге (g) также имеет место преобразование совокупностей. Но что можно сказать о величинах p? Если положить, следуя работе [37],

$$\frac{p(\mathcal{F}_1)}{p(\mathcal{F})} = 1 + y, \ \frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} = 1 + x,$$

то, конечно, $x > 0$, а y может принимать любые значения. В работе [37] после несложных выкладок при $y < 0$ получено неравенство

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') > (1-\delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

В то же время при $y \geq 0$ имеем

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') = p(\mathcal{F}_1)p(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1) = p(\mathcal{F}_1)\frac{p(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})}p(\mathcal{G}) =$$

$$= (1+y)p(\mathcal{F}) \left(2 - \frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})}\right) p(\mathcal{G}) = (1+y)(1-x)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

Очевидно, $1 + y \leq \sqrt{1+\delta}$, т.е. $(1+y)^2 \leq 1 + \delta$, ведь шаг (e) уже пройден. Более того, преодолен и шаг (f), откуда

$$\frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} \cdot \frac{p(\mathcal{F}_0)}{p(\mathcal{F})} \leq 1 + \delta,$$

т.е.

$$(1+x) \cdot \frac{p(\mathcal{F}_0)}{p(\mathcal{F})} = (1+x)\left(2 - \frac{p(\mathcal{F}_1)}{p(\mathcal{F})}\right) = (1+x)(1-y) \leq 1 + \delta.$$

В итоге

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') \geq f_1(\delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}). \tag{2}$$

Поскольку $f_1(\delta)$, как несложно проверить, не превосходит $1-\delta$, получаем, что при любых y справедливо (2).

Алгоритм останавливается либо при $l_1 = 0$, либо при $l_2 = m$. Обозначим $\overline{\alpha}$ число шагов (d) и (f), из них $\overline{\alpha}_1$ шагов (d) и $\overline{\alpha}_2$ шагов (f). Аналогично — $\overline{\beta}$ — число шагов (g). Положим

$$\alpha = \frac{\overline{\alpha}}{n},\ \ \alpha_1 = \frac{\overline{\alpha}_1}{n},\ \ \alpha_2 = \frac{\overline{\alpha}_2}{n},\ \ \beta = \frac{\overline{\beta}}{n}.$$

Очевидно, последние четыре величины удовлетворяют всем ограничениям, наложенным на одноименные величины из раздела 1.2, т.е. на те величины, по которым фактически берутся внутренние супремумы в определениях чисел δ_1, δ_2 из формулировки теоремы 2. Иными словами, $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ — положительные вещественные числа, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha + \beta < 1$.

Ясно также, что если $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$ — совокупности, полученные по завершении алгоритма, то

$$p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*) \geq (1+\delta)^{\overline{\alpha}} f_1^{\overline{\beta}}(\delta) p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

В следующем параграфе мы разберем случай, когда алгоритм останавливается на $l_1 = 0$. В последнем параграфе разберем другой случай остановки.

1.3.3 Первый случай остановки алгоритма и доказательство теоремы 2 в этом случае

Зафиксируем любое число $\delta_1' < \delta_1$ (см. формулировку теоремы 2). Пусть m_1 — это мощность множества вершин гиперграфов $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, выданных алгоритмом $\mathfrak{A}(\delta_1')$. Предположим, что алгоритм завершился при $l_1 = 0$. Ясно, что $m_1 = n - \overline{\alpha} - \overline{\beta}$. Далее, поскольку концы интервала запрещенных пересечений (т.е. величины l_1, l_2) сдвигаются на 1 влево только на шагах (d) и (g), то понятно, что в текущем случае (когда по завершении алгоритма $l_1 = 0$) $l = \overline{\alpha}_1 + \overline{\beta}$, откуда $\rho \sim \alpha_1 + \beta$ при $n \to \infty$ или, что то же самое, $\beta \sim \rho - \alpha_1$. Разумеется, также выполнено неравенство

$$\alpha + \beta \geq (1 + o(1))\rho$$

при $n \to \infty$. Иными словами, величины α_1, α, β связаны асимптотически теми же соотношениями, какими связаны одноименные величины из внутреннего супремума в определении числа δ_1. Если бы еще оказалось, что $f_2(\alpha, \beta, \delta_1', z_1) \leq 0$ (хотя бы при больших n), то мы с уверенностью могли бы утверждать, что при больших n выполнено неравенство

$$\frac{\min\limits_{\gamma_1}(g_1/4^{\mu_1})}{(1+\delta_1')^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta_1')} < 1 - (\delta_1')^{z_1}. \tag{3}$$

Докажем оценку $f_2(\alpha,\beta,\delta_1',z_1)\le 0$ в дополнительном предположении, что $p(\mathcal{F})p(\mathcal{G})\ge(1-(\delta_1')^{z_1})^n$. Действительно,

$$1\ge p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*)\ge(1+\delta_1')^{\overline{\alpha}}f_1^{\overline{\beta}}(\delta_1')p(\mathcal{F})p(\mathcal{G})\ge$$

$$\ge(1+\delta_1')^{\overline{\alpha}}f_1^{\overline{\beta}}(\delta_1')(1-(\delta_1')^{z_1})^n,$$

откуда логарифмированием получаем

$$0\ge\overline{\alpha}\ln(1+\delta_1')+\overline{\beta}\ln f_1(\delta_1')+n\ln(1-(\delta_1')^{z_1})=$$

$$=n(\alpha\ln(1+\delta_1')+\beta\ln f_1(\delta_1')+\ln(1-(\delta_1')^{z_1})),$$

что и требовалось.

Заметим, что если дополнительное предположение неверно, то

$$|\mathcal{F}|\cdot|\mathcal{G}|=4^np(\mathcal{F})p(\mathcal{G})<(4-4(\delta_1')^{z_1})^n,$$

а стало быть, ввиду произвольности $\delta_1'<\delta_1$, имеем также

$$|\mathcal{F}|\cdot|\mathcal{G}|\le(4-4(\delta_1)^{z_1}+o(1))^n\le(4-4\varepsilon+o(1))^n,$$

т.е. теорема 2 доказана. Таким образом, мы можем считать, что с нашими параметрами $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta$, a, ρ выполнено (3).

Из (3) следует, что существует $\gamma_1\in(0,\alpha+\beta)$, с которым

$$\frac{g_1/4^{\mu_1}}{(1+\delta_1')^{\alpha}f_1^{\beta}(\delta_1')}<1-(\delta_1')^{z_1}.$$

Положим $\overline{\gamma}_1=[\gamma_1 n]$ (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x). Очевидно, $\overline{\gamma}_1\le\gamma_1 n$ и $\overline{\gamma}_1\sim\gamma_1 n$ при $n\to\infty$.

Положим $\overline{m}_1=m_1+\overline{\gamma}_1$. Получаем, что $\overline{m}_1\sim\mu_1 n$ (см. формулировку теоремы 2). Рассмотрим множество $\tilde{Y}$ мощности $\overline{\gamma}_1$ и две совокупности

$$\tilde{\mathcal{F}}=\{F^*\cup Y:\ F^*\in\mathcal{F}^*,\ Y\subseteq\tilde{Y}\},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}=\{G^*\cup Y:\ G^*\in\mathcal{G}^*,\ Y\subseteq\tilde{Y}\}.$$

Это совокупности ребер на множестве вершин мощности $\overline{m}_1$. Более того, как и в исходных совокупностях $\mathcal{F}^*,\mathcal{G}^*$, ребра из $\tilde{\mathcal{F}}$ пересекаются с ребрами из $\tilde{\mathcal{G}}$ не менее чем по $\overline{\beta}=\beta n$ вершинам (поскольку в начале алгоритма правый конец интервала запретов — это $l=\overline{\alpha}_1+\overline{\beta}$ и этот конец смещается на 1 только на шаге (d), т.е. $\overline{\alpha}_1$ раз). Наконец, каждое ребро в любом из гиперграфов "с волной" имеет мощность не больше

$$\overline{a}_1=d-\overline{\alpha}_1-\overline{\beta}+\overline{\gamma}_1\sim(a-\alpha_1-\beta+\gamma_1)n.$$

(ср. величину a_1 из формулировки теоремы 2). В самом деле, на каждом шаге (d) и на каждом шаге (g) при смене гиперграфов все ребра укорачиваются на 1.

Лемма 1. *Выполнена оценка*

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq (g_1 + o(1))^n.$$

Лемму мы докажем ниже, а сейчас допустим, что она верна. Тогда

$$p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}) \leq \frac{p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*)}{(1+\delta_1')^{\overline{\alpha}} f_1^{\overline{\beta}}(\delta_1')} = \frac{p(\tilde{\mathcal{F}})p(\tilde{\mathcal{G}})}{(1+\delta_1')^{\overline{\alpha}} f_1^{\overline{\beta}}(\delta_1')} = \frac{|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}|}{4^{\overline{m}_1}(1+\delta_1')^{\overline{\alpha}} f_1^{\overline{\beta}}(\delta_1')} \leq$$

$$\leq \left(\frac{g_1/4^{\mu_1}}{(1+\delta_1')^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta_1')} + o(1) \right)^n \leq (1 - {\delta_1'}^{z_1} + o(1))^n,$$

и теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Поскольку мы знаем, что обе совокупности расположены на множестве вершин мощности $\overline{m}_1$ и каждое ребро в них имеет не более $\overline{a}_1$ вершин, то для нас очевидна оценка

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(\sum_{i=0}^{\overline{a}_1} C_{\overline{m}_1}^i \right)^2,$$

которая при $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ (см. раздел 1.2) не столь уж тривиальна и с учетом формулы Стирлинга (ср. классическое неравенство Чернова) имеет вид

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1} + o(1) \right)^n.$$

Эта оценка согласуется с определением величины g_1 как раз в тех случаях, когда $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$.

Далее, во всех трех случаях определения величины g_1 присутствует величина $2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}$. Соответствующая оценка доказана в работе [37] в виде теоремы 2.1 на странице 266. Там нет μ_1, поскольку там множества вершин имеют мощности n; у нас же они суть $\overline{m}_1 \sim \mu_1 n$, откуда и нормировка, и o(1) в основании экспоненты, фигурирующей в итоговой оценке.

Осталось лишь объяснить “среднюю” оценку в случае, когда $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ и $a_1 + \beta \geq \frac{\mu_1}{2}$. Она тоже фактически доказана в предпоследнем неравенстве на странице 266 статьи [37]. В наших обозначениях то неравенство выглядит так:

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(\sum_{i=0}^{\overline{a}_1} C_{\overline{m}_1}^i \right) \left(\sum_{i=\overline{a}_1+\overline{\beta}}^{\overline{m}_1} C_{\overline{m}_1}^i \right),$$

и в указанных выше условиях последнее произведение имеет вид

$$\left(2^{H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1 + H\left(\frac{a_1+\beta}{\mu_1}\right)\mu_1} + o(1) \right)^n,$$

что и требовалось. Заметим, что такое неравенство не могло быть получено в рамках теоремы 2.1 из работы [37]. Дело в том, что там не было явного ограничения на мощность каждого ребра, а у нас оно есть.

Лемма доказана.

1.3.4 Второй случай остановки алгоритма и доказательство теоремы 2 в этом случае

Рассуждения очень похожи на те, которые мы провели в п. 1.3.3. Однако для большей четкости изложения их стоит повторить, т.к. есть и отличия.

Зафиксируем любое число $\delta_2' < \delta_2$ (см. раздел 1.2). Пусть m_2 — это мощность множества вершин гиперграфов $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, выданных алгоритмом $\mathfrak{A}(\delta_2')$. Предположим, что алгоритм завершился при $l_2 = m$. Ясно, что $m_2 = n - \overline{\alpha} - \overline{\beta}$. Далее, поскольку концы интервала запрещенных пересечений (т.е. величины l_1, l_2) сдвигаются на 1 влево только на шагах (d) и (g), то понятно, что в текущем случае (когда по завершении алгоритма $l_2 = m$) $l - \overline{\alpha}_1 = n - \overline{\alpha} - \overline{\beta}$, откуда $\rho - \alpha_1 \sim 1 - \alpha - \beta$ при $n \to \infty$. Разумеется, также выполнено неравенство

$$\alpha + \beta \geq (1 + o(1))(1 - \rho)$$

при $n \to \infty$. Иными словами, величины α_1, α, β связаны асимптотически теми же соотношениями, какими связаны одноименные величины из внутреннего супремума в определении числа δ_2. При этом неравенство $f_2(\alpha, \beta, \delta_2') \leq 0$ справедливо при больших n ровно по тем же причинам, по каким такое же неравенство выполнялось в первом случае остановки алгоритма.

Таким образом, существует γ_2, с которым $\kappa > 0$, и существует такое $\lambda \in \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2}, \kappa\right)$, что

$$\frac{\xi / 4^{\mu_2}}{(1 + \delta_2')^\alpha f_1^\beta(\delta_2')} < 1 - (\delta_2')^{z_2}.$$

Подчеркнем, что интервал, из которого берется λ, заведомо не пуст. В самом деле, если $a_2 = \frac{\mu_2}{2}$ (см. раздел 1.2), то интервал имеет вид $(0, \kappa)$, и все в порядке. Иначе

$$\kappa - \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2}\right) = \frac{\beta + a_2}{\mu_2} - 1 = \frac{a - \alpha_1 + \gamma_2}{1 - \alpha - \beta + \gamma_2} - 1,$$

и это больше нуля, коль скоро

$$a - \alpha_1 + \gamma_2 > 1 - \alpha - \beta + \gamma_2 \Longleftrightarrow a - \alpha_1 > \rho - \alpha_1 \Longleftrightarrow a > \rho.$$

Последнее верно по условию теоремы, и снова все в порядке.

Подчеркнем также, что, с очевидностью, $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Положим $\overline{\gamma}_2 = [\gamma_2 n]$. Очевидно,

$$\overline{\gamma}_2 \leq \gamma_2 n \text{ и } \overline{\gamma}_2 \sim \gamma_2 n \text{ при } n \to \infty.$$

Положим $\overline{m}_2 = m_2 + \overline{\gamma}_2$. Получаем, что $\overline{m}_2 \sim \mu_2 n$ (см. раздел 1.2). Рассмотрим множество $\tilde{Y}$ мощности $\overline{\gamma}_2$ и две совокупности

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{F^* \cup Y : \, F^* \in \mathcal{F}^*, \, Y \subseteq \tilde{Y}\},$$
$$\tilde{\mathcal{G}} = \{G^* \cup Y : \, G^* \in \mathcal{G}^*, \, Y \subseteq \tilde{Y}\}.$$

Это совокупности ребер на множестве вершин мощности $\overline{m}_2$. Более того, ребра из $\tilde{\mathcal{F}}$ пересекаются с ребрами из $\tilde{\mathcal{G}}$ не более чем по

$$n - \overline{\alpha} - 2\overline{\beta} + \overline{\gamma}_2 \sim (1 - \alpha - 2\beta + \gamma_2)n =$$
$$= (\mu_2 - \beta)n = \left(1 - \frac{\beta}{\mu_2}\right)(\mu_2 n) = \left(\frac{1}{2} - \kappa\right)(\mu_2 n)$$

вершинам (поскольку в начале алгоритма левый конец интервала запретов — это $l = \overline{\alpha}_1 + n - \overline{\alpha} - \overline{\beta}$ и этот конец смещается на 1 на шагах (d) и (g), т.е. $\overline{\alpha}_1 + \overline{\beta}$ раз). Наконец, каждое ребро в любом из гиперграфов "с волной" имеет мощность не больше

$$\overline{a}_2 = d - \overline{\alpha}_1 - \overline{\beta} + \overline{\gamma}_2 \sim (a - \alpha_1 - \beta + \gamma_2)n.$$

(ср. величину a_2 из раздела 1.2). В самом деле, на каждом шаге (d) и на каждом шаге (g) при смене гиперграфов все ребра укорачиваются на 1.

Лемма 2. *Выполнена оценка*

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq (\xi + o(1))^n.$$

Лемму мы докажем ниже. Доказательство же теоремы завершается в точности так же, как и в п. 1.3.3.

Доказательство леммы 2. Доказательство основано на сочетании нашей леммы 1 и теоремы 2.2 со страницы 267 статьи [37]. Напомним формулировку теоремы 2.2.

Теорема 2.2 ([37]). *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — две совокупности множеств на множестве из n элементов. Пусть $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ таково, что*

$$|A \cap B| \leq \left(\frac{1}{2} - \kappa\right) n$$

для всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда для любого $\lambda \in (0, \kappa)$ выполнено

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq \max\left\{2^n \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)n+1},\ 2^{2\left(H\left(\frac{1+\kappa-\lambda}{2}\right)n+1\right)}\right\}.$$

Наши совокупности $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}$ находятся во множестве из $\sim \mu_2 n$ элементов. Отсюда сразу получается оценка из леммы 2 в случае, когда $a_2 = \frac{\mu_2}{2}$ (см. раздел 1.2).

В остальных случаях оценка улучшается. А именно, если $a_2 < \frac{\mu_2}{2}$, то каждое из множеств в наших совокупностях имеет мощность, асимптотически не превосходящую $a_2 n = \frac{a_2}{\mu_2} \cdot (\mu_2 n)$. Значит, как и в начале доказательства леммы 1,

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \leq \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,\ |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,$$

и это сразу приводит к неравенству

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,$$

правая часть которого имеет вид $(\xi + o(1))^n$ при условии, что минимум в определении $h(\lambda)$ (см. раздел 1.2) достигается на первой из двух сравниваемых величин.

Чтобы пояснить, откуда берется оценка с помощью второй из двух сравнимаемых в определении $h(\lambda)$ величин, воспроизведем по сути доказательство теоремы 2.2 применительно к нашей ситуации. Пусть

$$\tilde{\mathcal{F}}_0 = \left\{F \in \tilde{\mathcal{F}} :\ |F| \leq \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \overline{m}_2\right\}.$$

Эта совокупность не обязана совпадать с $\tilde{\mathcal{F}}$, поскольку про элементы последней мы знаем лишь, что их мощности асимптотически не превосходят $a_2 n$, тогда как

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \overline{m}_2 < \frac{a_2}{\mu_2} \overline{m}_2 \sim a_2 n.$$

Тем не менее, возможны, конечно, два случая:

$$|\tilde{\mathcal{F}}_0| \geq \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{F}}| \text{ и } |\tilde{\mathcal{F}}_0| < \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{F}}|.$$

Аналогичные конструкции и случаи есть и для $\tilde{\mathcal{G}}$.

Если имеет место первый случай хотя бы для одной из совокупностей $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ (например, для $\tilde{\mathcal{F}}$), то

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq 2|\tilde{\mathcal{F}}_0| \cdot \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n \leq$$

$$\leq \left(2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,$$

и это как раз соответствует первой из двух величин под знаком максимума в определении $h(\lambda)$.

Если для обеих совокупностей $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ выполнен второй случай, то возьмем сперва

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_0, \;\; \tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{G}} \setminus \tilde{\mathcal{G}}_0.$$

Разумеется,

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq 4 \cdot |\tilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}_1|.$$

Далее, пусть

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \left\{\overline{G} : \; G \in \tilde{\mathcal{G}}_1\right\},$$

т.е. в $\tilde{\mathcal{H}}_1$ находятся дополнения множеств G. Тогда, во-первых, $|\tilde{\mathcal{H}}_1| = |\tilde{\mathcal{G}}_1|$ и, во-вторых, для любого $F \in \tilde{\mathcal{F}}_1$ и любого $\overline{G} \in \tilde{\mathcal{H}}_1$ выполнено

$$\left|F \cap \overline{G}\right| \geq (1 + o(1))(\kappa - \lambda)(\mu_2 n).$$

По лемме 1 отсюда следует оценка

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq 4 \cdot |\tilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}_1| = 4 \cdot |\tilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\tilde{\mathcal{H}}_1| \leq (g_2(\lambda) + o(1))^n,$$

и лемма 2 доказана.

Глава 2

Хроматические числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками

Отметим, что результаты, полученные в данной главе, являются новыми и опубликованы в статьях [65], [66].

2.1 Введение и формулировка результата

Напомним определение основной величины, которой и будет в основном посвящена настоящая глава.

Определение 3. $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ — минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не образовывали множеств, конгруэнтных S.

В нашем конкретном случае будем рассматривать в качестве множества S тройку вершин равностороннего треугольника. Для этого множества введем отдельное обозначение Δ.

В своей работе [37] П. Франкл и В. Редль доказали Теорему 1 (см. раздел 1.1) в том числе, имея целью оценить $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$, и в работе [37] им это удалось. Однако, было доказано лишь существование константы большей единицы в основании экспоненты. Более того, эффективного описания той константы из работы [37] получить невозможно. Нам же удалось получить явную нижнюю оценку для $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$.

Перед тем как перейти к формулировке основной теоремы данной главы, сделаем несколько предположений. А именно, пусть множество $\mathfrak{M}$ состоит из всех возможных упорядоченных наборов чисел $\mathbf{v} = (v, u, w, v', \theta)$, удовлетворяющих условиям

$$v \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \ u \in (0,1),$$

$$w \in \left(0, \frac{u}{2}\right), \ v - w \in \left(0, \frac{1-u}{2}\right),$$

$$v' \in (0, v), \ \theta \in (0, w), \ v' - \theta < v - w,$$

$$\theta < v', \ 1 - 2v + v' > u - 2w + \theta.$$

Для каждого $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ положим

$$r = \frac{(2\theta - w)(2w - 2\theta)}{u - 4w + 4\theta},$$

$$r' = \frac{(2v' - v)(2v - 2v')}{1 - 4v + 4v'}.$$

Напомним, что в теореме 2 первой главы настоящей диссертации, величина ε — это функция двух аргументов, которые там обозначены a и ρ, то есть функция, зависящая от величины мощности ребра (d — это функция от n, имеющая асимптотику $d \sim an$, $a \in (0, 1/2)$) и от запрещенного расстояния (l — это функция от n, имеющая асимптотику $l \sim \rho n$, $\rho \in (0, a)$). Также введем величину $c_x^y = \frac{x^x}{y^y (x-y)^{x-y}}$ — для произвольных чисел $x > 0$ и $y \in (0, x)$, и $c_x^y = 1$ при $y = x$ и $c_x^y = 0$ при $y > x$.

В перечисленных обозначениях имеет место следующая новая теорема, опубликованная в [65], [66].

Теорема 3. *Положим*

$$T = \Bigg\{ (\tau, \mathbf{v}) : \ \mathbf{v} \in \mathfrak{M} :$$

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > \mathbb{I}_{\left\{\theta \le \frac{w}{2}\right\}} \cdot c_u^{w-\theta} + \mathbb{I}_{\left\{\theta > \frac{w}{2}\right\}} \cdot \frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta - w + 2r}}{c_w^{2\theta - w + r} c_{u-w}^r},$$

$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta} \left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > \mathbb{I}_{\left\{v' \le \frac{v}{2}\right\}} \cdot c_1^{v-v'} + \mathbb{I}_{\left\{v' > \frac{v}{2}\right\}} \cdot \frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}},$$

$$\tau^2 \frac{\left(c_v^w\right)^2 \left(c_{1-v}^{u-w}\right)^2}{\left(c_1^u\right)^2 \left(c_u^w\right)^2} > \left(4 - 4 \cdot \varepsilon\left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u}\right)\right)^{1-u} \Bigg\},$$

где $\mathbb{I}$ *– индикатор события. Тогда*

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \ge \left(\sup_{(\tau, \mathbf{v}) \in T} \frac{c_1^v}{\tau} + o(1) \right)^n.$$

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (1.052\ldots + o(1))^n\,.$$

В следующем разделе мы опишем вычисления, позволившие получить следствие 1. В разделе 2.3 мы докажем теорему 3. Отметим, что в статьях [47] и [48] изучено следующее хроматическое число: $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки пространства, чтобы не существовало трех точек одного цвета, служащих вершинами равнобедренного треугольника с длиной боковых сторон 1 и длиной основания в пределах от $a < 1$ до $b > 1$. Конечно, $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geq \chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$. И во многих случаях оценка из следствия 1 с учетом этого неравенства дает более сильные результаты. А именно, в работе [48] приведена следующая таблица оценок

	1.10	1.15	1.2	1.25	1.30	1.35	1.40
0.02	1.053	1.079	1.104	1.129	1.153	1.177	1.200
0.04	1.049	1.075	1.100	1.125	1.149	1.173	1.196
0.06	1.044	1.070	1.095	1.120	1.144	1.168	1.191
0.08	1.038	1.064	1.089	1.114	1.138	1.162	1.185
0.10	1.032	1.057	1.082	1.107	1.131	1.155	1.177
0.12	1.025	1.050	1.075	1.099	1.123	1.147	1.170
0.14	1.020	1.043	1.067	1.091	1.115	1.138	1.161
0.16	1.015	1.036	1.059	1.083	1.106	1.130	1.153
0.18	1.010	1.029	1.051	1.074	1.098	1.121	1.143
0.20	1.006	1.023	1.044	1.066	1.089	1.111	1.134
0.22	1.002	1.018	1.037	1.058	1.080	1.103	1.125
0.24	—	1.013	1.030	1.051	1.072	1.094	1.115
0.26	—	1.009	1.025	1.043	1.064	1.085	1.106
0.28	—	1.004	1.019	1.037	1.056	1.076	1.097
0.30	—	1.001	1.015	1.030	1.049	1.068	1.088
0.32	—	—	1.010	1.025	1.042	1.060	1.080
0.34	—	—	1.005	1.020	1.035	1.053	1.072
0.36	—	—	1.002	1.014	1.030	1.046	1.064
0.38	—	—	1.002	1.009	1.024	1.040	1.057
0.40	—	—	1.002	1.005	1.018	1.034	1.050
0.42	—	—	1.002	1.005	1.013	1.028	1.043
0.44	—	—	1.002	1.005	1.007	1.022	1.037

	1.10	1.15	1.2	1.25	1.30	1.35	1.40
0.46	—	—	1.002	1.005	1.005	1.016	1.031
0.48	—	—	1.002	1.005	1.005	1.010	1.025
0.50	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.019
0.52	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.012
0.54	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.006
0.56	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.58	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.60	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005

Здесь по горизонтали стоят значения b, по вертикали — a, а в клетках — константы в основаниях экспоненциальных нижних оценок величины $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$. Видно, что улучшения возникают при $b = 1.1$, $a \geq 0.03$, при $b = 1.15$, $a \geq 0.12$, при $b = 1.2$, $a \geq 0.18$, при $b = 1.25$, $a \geq 0.24$, при $b = 1.3$, $a \geq 0.3$, при $b = 1.35$, $a \geq 0.36$, при $b = 1.4$, $a \geq 0.4$. Это связано с тем, что результаты работ [47], [48] получены принципиально иным методом, и наличие нового подхода, данного в теореме 3, позволяет серьезно продвинуться в задаче при тех параметрах, где старый метод давал слабые результаты.

2.2 Описание вычислений — ручных и компьютерных, — давших следствие 1

Сперва скажем несколько слов о том, как производилось вычисление величины ε из теоремы 2. Тут основным является следующее утверждение.

Утверждение 1. *Имеет место точное равенство*

$$f_1(\delta) = \frac{\sqrt{1+\delta}\left(3 - 2\sqrt{1+\delta} - \delta\right)}{2 - \sqrt{1+\delta}}.$$

Доказательство утверждения 1. Очевидно, что за счет неравенства $(1+y)^2 \leq 1+\delta$ выполнено $y < 1$. Поэтому неравенство $(1+x)(1-y) \leq 1+\delta$ равносильно неравенству $x \leq \frac{\delta+y}{1-y}$. Функция, которую мы минимизируем, имеет вид

$$f(x,y) = (1+y)(1-x),$$

т.е. по x она убывает. Значит, мы можем считать, что $x = \frac{\delta+y}{1-y}$. Получаем

$$f(x,y) = \frac{(1+y)(1-2y-\delta)}{1-y}.$$

Производная этой функции по y равна

$$\frac{2y^2 - 4y - 2\delta}{(1-y)^2}.$$

Корни числителя суть

$$y_1 = 1 - \sqrt{1+\delta} < 0,$$
$$y_2 = 1 + \sqrt{1+\delta} > 1,$$

т.е. с учетом свойства $y \in (0,1)$ числитель всегда отрицателен. Следовательно, наша функция убывает по y и минимальна при $y = \sqrt{1+\delta} - 1$. Утверждение доказано.

В свете утверждения 1 перебор идет без каких-либо дополнительных тонкостей. Для поиска δ_1 параметрами внешних циклов перебора служат δ и α_1, α_2. Величина δ берется с шагом 0.001, а величины α_1, α_2 — с шагами 0.01. По ним на каждой итерации вычисляется $\beta = \rho - \alpha_1$ и сразу проверяется условие $f_2(\alpha, \beta, \delta) \leq 0$. Если условие не выполнено, осуществляется переход к новой итерации. Иначе считается значение

$$\frac{\min\limits_{\gamma_1} (g_1/4^{\mu_1})}{(1+\delta)^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta)}.$$

Здесь перебираются γ_1: шаг 0.001, пределы перебора $(0, \alpha+\beta)$. В этом же переборе проверяется условие

$$\frac{1 + \frac{\beta}{\mu_1}}{2} \in (0,1),$$

т.к. это аргумент энтропии.

Аналогично считается δ_2, только здесь есть еще цикл по λ с шагом 0.01.

Теперь обратимся к следствию 1. В теореме 3 идет максимизация по $(\tau, \mathbf{v}) \in T$. Экспериментально (в серии запусков с невысокой точностью) было установлено, что достаточно брать $\tau \in (0,2)$. После этой локализации τ перебирались с шагом 0.0001. При фиксированном τ значения остальных параметров также выбирались в циклах: u, v и w с шагом 0.001; v', θ с шагом 0.01. Когда все параметры были фиксированы, находилось

$$\varepsilon\left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u}\right).$$

При этом точность приходилось понижать по сравнению с описанной выше.

В итоге были найдены

$$\tau = 1.8996, \quad v = 0.4989, \quad u = 0.022, \quad v' = 0.28, \quad \theta = 0.01.$$

Именно с ними и получилась оценка из следствия 1.

Вычисления осуществлялись на кластере Яндекса. Задача была разделена на 10000 частей, обработка которых велась параллельно. Весь расчет занял трое суток. За большое участие в этой работе автор благодарит В.А. Кошелева, исследователя и руководителя группы в отделе теоретических и прикладных исследований Яндекса.

Несмотря на то, что вычисления велись на кластере, итоговый результат можно при желании проверить и на обычном персональном компьютере, и даже на калькуляторе. Для этого достаточно знать лишь те значения вспомогательных параметров из формулировки теоремы 2, которые отвечают за величину ε для приведенных выше τ, v, u, v', θ. Вот они:

$$\delta_1 = \min\{(\delta_1)^{z_1}, (\delta_2)^{z_2}\} = 0.99,\ \alpha_1 = 0.04,\ \alpha_2 = 0.02,\ \beta = 0.236074,\ \gamma_1 = 0.29.$$

Теоретически, при повышении точности перебора, можно найти и больше десятичных знаков для оптимальных параметров. Однако это может привести лишь к увеличению ε и улучшению итоговой оценки, которая сейчас имеет величину 1.052.

2.3 Доказательство теоремы 3

2.3.1 Выбор параметров, формулировки лемм и вывод утверждения теоремы

Пусть $(\tau, \mathbf{v}) \in T$ — произвольная пара из формулировки теоремы 3. Пусть вектор $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ состоит из чисел v, u, w, v', θ, связанных известными соотношениями и вместе с τ удовлетворяющих известным неравенствам. Если мы докажем, что

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq \left(\frac{c_1^v}{\tau} + o(1)\right)^n,$$

то ввиду произвольности пары $(\tau, \mathbf{v})$ мы установим искомую оценку. Выберем некоторые параметры.

Пусть $\overline{v} = [vn]$,

$$V_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) :\ x_i \in \{0, 1\},\ x_1 + \ldots + x_n = \overline{v}\}.$$

Из формулы Стирлинга, очевидно, следует, что

$$|V_n| = C_n^{\overline{v}} = (c_1^v + o(1))^n.$$

И, кстати, именно из подобных соображений мы ввели обозначение c_a^b.

Пусть, далее, $\overline{p}_1$ — это минимальное простое число, с которым $\overline{v}' := \overline{v} - \overline{p}_1 \leq v'n - 2$. Известные результаты аналитической теории чисел (см. [49] и [50]) говорят о том, что существует такая функция f вещественного аргумента x, что $f(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ и для любого $x \geq 1$ на отрезке $[x, x + f(x)]$ есть простое число. Это значит, что $\overline{v}' \sim v'n$. Положим

$$E_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{v}'\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Пара $G_n = (V_n, E_n)$ — это так называемый *дистанционный граф*. У этого графа вершины — точки пространства, а ребра — отрезки данной длины.

Лемма 3. *Если множество точек $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$, то существует треугольник с вершинами в W и ребрами из E_n.*

Лемму 3 мы докажем позже, а пока выведем из нее теорему 3. Пусть $\mathbb{R}^n$ покрашено в $\chi < \frac{|V_n|}{\tau^n}$ цветов. Тогда и V_n покрашено в не более χ цветов. По принципу Дирихле в один из этих цветов покрашено некоторое множество точек $W \subset V_n$ мощности $> \tau^n$. Значит, есть в W одноцветный треугольник, т.е.

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq \frac{|V_n|}{\tau^n} = \left(\frac{c_1^v}{\tau} + o(1)\right)^n,$$

и теорема 3 доказана.

В свою очередь, лемма 3 является следствием леммы 4. Для ее формулировки введем еще ряд параметров. Положим $\overline{u} = [un]$, $\overline{w} = [wn]$. Выберем $\overline{p}_2$ как минимальное ппростое число, с которым величина $\overline{\theta}$, определенная равенством $\overline{\theta} = \overline{w} - \overline{p}_2$, не превосходит $\theta n - 2$. Опять же, ввиду [49] и [50], имеем $\overline{\theta} \sim \theta n$.

Лемма 4. *Если множество точек $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$, то число ребер графа G_n, оба конца которых находятся в W, не меньше величины*

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{|W| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_{\overline{v}'}^{\overline{\theta}} \left(C_{\overline{v}-\overline{v}'}^{\overline{w}-\overline{\theta}}\right)^2 C_{n-2\overline{v}+\overline{v}'}^{\overline{u}-2\overline{w}+\overline{\theta}}}.$$

Выведем из леммы 4 лемму 3. Пусть $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$. Тогда по лемме 4 в W много ребер графа G_n. Значит, хотя бы одна из вершин в W

имеет степень не меньше величины

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{C_{\overline{v}}^{\overline{w}}C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_{\overline{v}'}^{\overline{\theta}}\left(C_{\overline{v}-\overline{v}'}^{\overline{w}-\overline{\theta}}\right)^2 C_{n-2\overline{v}+\overline{v}'}^{\overline{u}-2\overline{w}+\overline{\theta}}},$$

которая из стандартных соображений имеет вид

$$\left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta}\left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}}+o(1)\right)^n.$$

Для дальнейшего удобства заменим наш граф на гиперграф по следующему принципу. Вершине графа, т.е. n-мерному (0,1)-вектору с $\overline{v}$ единицами, сопоставим ребро $\overline{v}$-однородного гиперграфа с n вершинами. Обозначим совокупность ребер полученного гиперграфа $\mathcal{F}=\mathcal{F}_n$. Тогда пара (F_1,F_2) ребер из $\mathcal{F}$ "образует ребро" (в исходном графовом смысле), если $|F_1\cap F_2|=\overline{v}'$ (мощность пересечения ребер гиперграфа $\mathcal{F}$ равна скалярному произведению векторов из V_n, отвечающих этим ребрам).

В новых терминах множество W — это тоже совокупность ребер $\mathcal{G}$ некоторого гиперграфа: $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$. И мы знаем, что одно из ребер $F\in\mathcal{G}$ имеет не меньше

$$\left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta}\left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}}+o(1)\right)^n$$

"соседей". Обозначим $\mathcal{H}$ совокупность, составленную из этих соседей.

Воспользуемся теоремами, доказанными П. Франклом–Р.М. Уилсоном в [51] и Е.И. Пономаренко в [52], [53] (см. также [12], [54]).

Теорема 4 ([51]). *Пусть $H=(V,E)$ — k-однородный гиперграф на n вершинах, причем для любых $F_1,F_2\in E$ выполнено $|F_1\cap F_2|\neq l$ и $k-l$ — степень простого числа, которую мы обозначим q. Если $2l<k$, то*

$$|E|\leq\sum_{i=0}^{q-1}C_n^i.$$

Теорема 5 ([52], [53]). *Пусть $H=(V,E)$ — k-однородный гиперграф на n вершинах, причем $k\leq\frac{n}{2}$, для любых $F_1,F_2\in E$ выполнено $|F_1\cap F_2|\neq l$, $2l\geq k$ и $q=k-l$ — степень простого числа. Положим $d=2l-k+1$. Определим натуральное число $\overline{r}$ из соотношения*

$$(k-d+1)\left(2+\frac{d-1}{\overline{r}+1}\right)\leq n<(k-d+1)\left(2+\frac{d-1}{\overline{r}}\right).$$

Тогда
$$|E| \leq \frac{C_n^{d+2\overline{r}}}{C_k^{d+\overline{r}} C_{n-k}^{\overline{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right).$$

Допустим, $v' \leq \frac{v}{2}$. Тогда по условию теоремы 3
$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta} \left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > c_1^{v-v'}.$$
В то же время
$$\sum_{i=0}^{\overline{p}_1-1} C_n^i = \left(c_1^{v-v'} + o(1)\right)^n.$$
Значит, при больших n выполнено неравенство
$$|\mathcal{H}| > \sum_{i=0}^{\overline{p}_1-1} C_n^i.$$
Но $\mathcal{H}$ — это $\overline{v}$-однородный гиперграф на n вершинах и
$$2\overline{v}' \leq 2v'n - 4 \leq vn - 4 < \overline{v},$$
т.е. применима теорема 4 с $k = \overline{v}$, $l = \overline{v}'$, $q = \overline{p}_1$, которая говорит, что в $\mathcal{H}$ есть пара (F_1, F_2), образующая ребро в исходном графе G_n. Поскольку, наконец, и F_1, и F_2 являются соседями F, то втроем они и задают треугольник в W.

Допустим теперь, что $v' > \frac{v}{2}$. Тогда возможны два варианта: $2\overline{v}' \geq \overline{v}$ и $2\overline{v}' < \overline{v}$. Но второй вариант возможен лишь при малых n, которыми мы, как обычно, можем пренебречь. Поэтому работаем в предположении $2\overline{v}' \geq \overline{v}$.

По условию теоремы 3
$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta} \left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > \frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}}.$$
В то же время при $k = \overline{v}$, $l = \overline{v}'$, $q = \overline{p}_1$ в теореме 5 имеем $d \sim (2v' - v)n$ и $\overline{r} \sim r'n$, откуда
$$\frac{C_n^{d+2\overline{r}}}{C_k^{d+\overline{r}} C_{n-k}^{\overline{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right) = \left(\frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}} + o(1) \right)^n,$$
т.е.
$$|\mathcal{H}| > \frac{C_n^{d+2\overline{r}}}{C_k^{d+\overline{r}} C_{n-k}^{\overline{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right)$$
и в $\mathcal{H}$ есть пара (F_1, F_2), образующая вместе с F треугольник в W.

Итак, все случаи разобраны, и лемма 3 выведена из леммы 4. Остается доказать лемму 4, и это мы сделаем в следующем параграфе.

2.3.2 Доказательство леммы 4

Во многом дальнейшие рассуждения являются обобщениями рассуждений из доказательства теоремы 1.7 в статье [37]. Мы также сохраняем для удобства многие обозначения той работы.

Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность, отвечающая множеству W из леммы 4. Предположим противное, т.е., что число ребер (F_1, F_2) в $\mathcal{F}$ — обозначим его s — меньше строго, чем

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{|\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_{\overline{v}'}^{\overline{\theta}} \left(C_{\overline{v}-\overline{v}'}^{\overline{w}-\overline{\theta}} \right)^2 C_{n-2\overline{v}+\overline{v}'}^{\overline{u}-2\overline{w}+\overline{\theta}}}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность всех $\overline{u}$-элементных подмножеств n-элементного множества, в котором находятся также все множества из совокупности $\mathcal{F}$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ положим

$$x_A = |\{F \in \mathcal{F} : \, |F \cap A| = \overline{w}\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} x_A = |\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}.$$

Значит, существует такое $A \in \mathcal{A}$, что

$$x_A \geq \frac{|\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_n^{\overline{u}}}.$$

Из некоторых соображений огрубим этот вывод, сказав, что заведомо

$$x_A \geq \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_n^{\overline{u}}} =: x_1.$$

И это, правда, полезно, т.к. таких A уже довольно много:

$$\sum_{A \in \mathcal{A} : \, x_A < x_1} x_A < |\mathcal{A}| \cdot x_1 = C_n^{\overline{u}} \cdot x_1 = \frac{1}{2} |\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}},$$

откуда

$$\sum_{A \in \mathcal{A} : \, x_A \geq x_1} x_A = \sum_{A \in \mathcal{A}} x_A - \sum_{A \in \mathcal{A} : \, x_A < x_1} x_A > \frac{1}{2} |\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}.$$

Пусть теперь для $A \in \mathcal{A}$

$$y_A = |\{(F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2 : |F_1 \cap A| = |F_2 \cap A| = \overline{w},$$

$$|F_1 \cap F_2 \cap A| = \overline{\theta}, |F_1 \cap F_2| = \overline{v}'\}|.$$

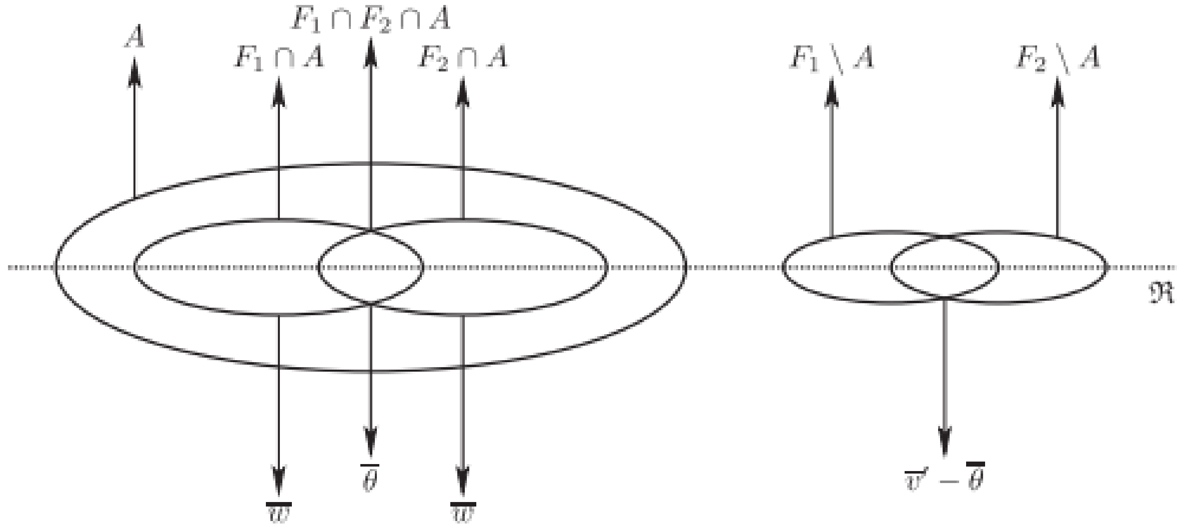

Рис. 1

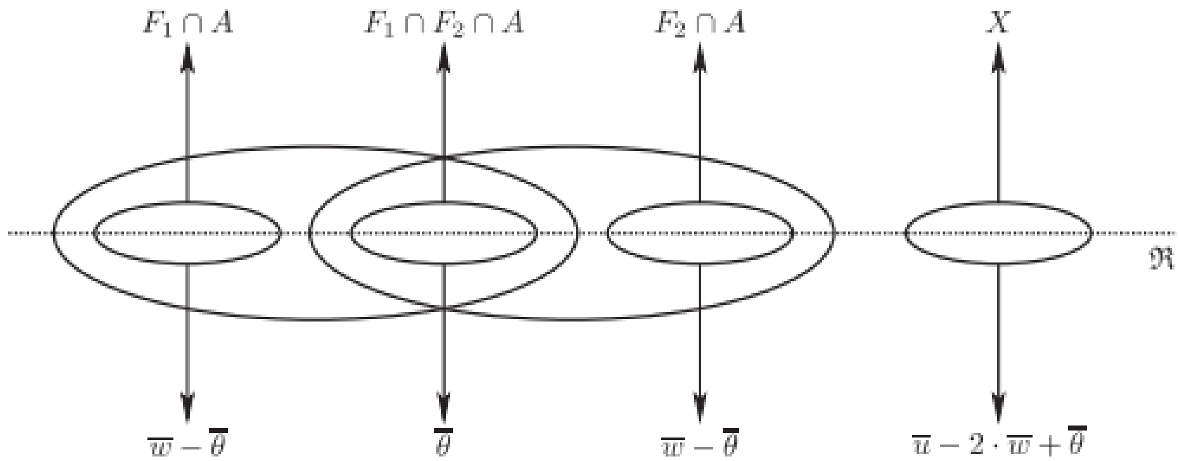

Рис. 2

Для большей наглядности мы на рисунке 1 изображаем типичное взаимное расположение множеств A, F_1, F_2.

Опять-таки, несложно понять, что (ср. рис. 2)

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} y_A = s C_{\overline{v}'}^{\overline{\theta}} \left(C_{\overline{v}-\overline{v}'}^{\overline{w}-\overline{\theta}} \right)^2 C_{n-2\overline{v}+\overline{v}'}^{\overline{u}-2\overline{w}+\overline{\theta}}.$$

Вернемся к тем $A \in \mathcal{A}$, для которых $x_A \geq x_1$. Если предположить, что для каждого такого A выполнено $y_A \geq \frac{1}{4} x_A$, то окажется, что с учетом изначального предположения о величине s выполнена серия неравенств

$$\sum_{A \in \mathcal{A}\colon\, x_A \geq x_1} y_A \geq \sum_{A \in \mathcal{A}\colon\, x_A \geq x_1} \frac{1}{4} x_A > \frac{1}{8} |\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}} >$$

$$> sC_{\overline{v}'}^{\overline{\theta}}\left(C_{\overline{v}-\overline{v}'}^{\overline{w}-\overline{\theta}}\right)^2 C_{n-2\overline{v}+\overline{v}'}^{\overline{u}-2\overline{w}+\overline{\theta}} = \sum_{A\in\mathcal{A}} y_A,$$

которая противоречива, ведь получается, что часть суммы строго больше всей этой суммы. Значит, существует A_0, для которого одновременно $x_{A_0} \geq x_1$ и $y_{A_0} < \frac{1}{4}x_{A_0}$.

Положим

$$\mathcal{F}_{A_0} = \{F \in \mathcal{F} : \, |F \cap A_0| = \overline{w}\}.$$

Естественно,

$$|\mathcal{F}_{A_0}| = x_{A_0} \geq x_1.$$

Удалим из совокупности $\mathcal{F}_{A_0}$ все множества F', для каждого из которых существует такое множество $F \in \mathcal{F}_{A_0}$, что

$$|F \cap F' \cap A_0| = \overline{\theta}, \;\; |F \cap F'| = \overline{v}'.$$

Останется совокупность $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$, причем

$$\left|\overline{\mathcal{F}}_{A_0}\right| \geq |\mathcal{F}_{A_0}| - 2y_{A_0} \geq \frac{1}{2}x_{A_0} \geq \frac{1}{2}x_1.$$

Перечислим все $C_{\overline{u}}^{\overline{w}}$ подмножеств множества A_0, имеющих мощность $\overline{w}$. Пусть z_i — число множеств из совокупности $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$, каждое из которых содержит i-е такое подмножество. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}} z_i = \left|\overline{\mathcal{F}}_{A_0}\right| \geq \frac{1}{2}x_1.$$

В то же время

$$\sum_{i:\, z_i < \frac{1}{4}\cdot\frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}} z_i < \frac{1}{4}x_1,$$

а стало быть,

$$\sum_{i:\, z_i \geq \frac{1}{4}\cdot\frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}} z_i = \sum_{i=1}^{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}} z_i - \sum_{i:\, z_i < \frac{1}{4}\cdot\frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}} z_i > \frac{1}{4}x_1.$$

Поскольку есть тривиальная оценка $z_i \leq C_{n-\overline{u}}^{\overline{v}-\overline{w}}$, отсюда следует, что

$$\left|\left\{i : \; z_i \geq \frac{1}{4}\cdot\frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}\right\}\right| > \frac{1}{4}\frac{x_1}{C_{n-\overline{u}}^{\overline{v}-\overline{w}}} = \frac{1}{8}\frac{|\mathcal{F}|C_{\overline{v}}^{\overline{w}}C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_n^{\overline{u}}C_{n-\overline{u}}^{\overline{v}-\overline{w}}} =$$

$$= |\mathcal{F}|\left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1)\right)^n > \left(\tau\cdot\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1)\right)^n.$$

Обозначим $B_{\nu_1}, \ldots, B_{\nu_t}$ — те самые $\overline{w}$-элементные подмножества множества A_0, которым соответствуют z_i с условием

$$z_i \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}.$$

Разумеется,

$$t > \left(\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1)\right)^n. \qquad (4)$$

Для удобства введем обозначение $z(B_{\nu_j})$ для величины z_i, отвечающей множеству B_{ν_j}, и положим $\mathcal{B} = \{B_{\nu_1}, \ldots, B_{\nu_t}\}$. Теперь рассмотрим два случая. Во-первых, может статься, что $\theta \leq \frac{w}{2}$. Тогда

$$2\overline{\theta} \leq 2\theta n - 4 \leq wn - 4 < \overline{w},$$

т.е. применима теорема 4 с $k = \overline{w}$, $l = \overline{\theta}$, $q = \overline{p}_2$. Эта теорема говорит, что если в совокупности $\mathcal{B}$ нет пар множеств, пересекающихся по l элементам, то

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{i=0}^{\overline{p}_2} C_{\overline{u}}^i = \left(c_u^{w-\theta} + o(1)\right)^n. \qquad (5)$$

По условию теоремы 3 в текущем случае

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > c_u^{w-\theta},$$

а значит, неравенства (4) и (5) не согласуются при больших n, откуда следует, что существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \overline{\theta}$.

Во-вторых, может быть и $\theta > \frac{w}{2}$. Тогда при больших n выполнено $2\overline{\theta} > \overline{w}$, т.е. применима теорема 5 с $k = \overline{w}$, $l = \overline{\theta}$, $q = \overline{p}_2$ (при этом число вершин гиперграфа, которое в теореме 5 обозначено n, сейчас равно $\overline{u}$). Эта теорема говорит, что если в совокупности $\mathcal{B}$ нет пар множеств, пересекающихся по l элементам, то

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{C_{\overline{u}}^{d+2\overline{r}}}{C_k^{d+\overline{r}} C_{\overline{u}-k}^{\overline{r}}} \left(\sum_{i=0}^{\overline{p}_2 - 1} C_{\overline{u}}^i\right).$$

Здесь

$$d \sim (2\theta - w)n, \ \overline{r} \sim rn, \ n \to \infty$$

Таким образом,

$$|\mathcal{B}| \leq \left(\frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta - w + 2r}}{c_w^{2\theta - w + r} c_{u-w}^r} + o(1)\right)^n. \qquad (6)$$

По условию теоремы 3 в текущем случае

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > \frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta-w+2r}}{c_w^{2\theta-w+r} c_{u-w}^r},$$

а значит, неравенства (4) и (6) не согласуются при больших n, откуда следует, что существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \overline{\theta}$.

Итак, в любом случае существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \overline{\theta}$. При этом

$$z(B_i) \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}}, \ i = 1, 2.$$

Положим

$$\mathcal{F}_{(i)} = \left\{ F \setminus B_i : \ F \in \overline{\mathcal{F}}_{A_0}, \ F \supset B_i \right\}, \ i = 1, 2,$$

так что $|\mathcal{F}_{(i)}| = z(B_i)$ и $\mathcal{F}_{(i)}$ — это множество ребер $(\overline{v} - \overline{w})$-однородного гиперграфа на $n - \overline{u}$ вершинах. Более того, с учетом условия теоремы 3

$$|\mathcal{F}_{(1)}| \cdot |\mathcal{F}_{(2)}| \geq \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\overline{u}}^{\overline{w}}} \right)^2 = \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{|\mathcal{F}| C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_n^{\overline{u}} C_{\overline{u}}^{\overline{w}}} \right)^2 >$$

$$> \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{\tau^n \cdot C_{\overline{v}}^{\overline{w}} C_{n-\overline{v}}^{\overline{u}-\overline{w}}}{C_n^{\overline{u}} C_{\overline{u}}^{\overline{w}}} \right)^2 = \left(\tau^2 \frac{\left(c_v^w\right)^2 \left(c_{1-v}^{u-w}\right)^2}{\left(c_1^u\right)^2 \left(c_u^w\right)^2} + o(1) \right)^n >$$

$$> \left(\left(4 - 4 \cdot \varepsilon \left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u} \right) \right)^{1-u} + o(1) \right)^n.$$

По теореме 2 существуют два таких множества $F_1 \in \mathcal{F}_{(1)}$ и $F_2 \in \mathcal{F}_{(2)}$, что $|F_1 \cap F_2| = \overline{v}' - \overline{\theta}$. Значит, в $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$ есть два множества $F_1' = F_1 \cup B_1$ и $F_2' = F_2 \cup B_2$, для которых

$$|F_1' \cap F_2' \cap A_0| = \overline{\theta}, \ |F_1' \cap F_2'| = \overline{v}'.$$

Но в $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$ по построению не может быть таких пар, и это противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Глава 3

О дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовым числами

Напомним, что в текущем разделе речь пойдет об естественном обобщении на случай дистанционных графов классического результата П. Эрдеша (см. [41]) о том, что для любых k, l существует граф G, у которого $\chi(G) > k$, $g(G) > l$.

3.1 Формулировка результата

Во введении были описаны следующие величины:

$$\zeta(k) = \sup\{\zeta : \ \exists\ \delta(n) = o(1),\ \forall\ n,\ \exists\ G\ \subset\ \mathbb{R}^n,$$

$$\omega(G) < k,\ \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\},$$

где $\omega(G)$ – число вершин в самом большой клике графа G. Для этих величин получены достаточно хорошие оценки, лучшие из которых приведены в таблице ниже. Здесь необходимо отметить работу А.Б. Купавского [46], в которой и были получены наилучшие оценки для $\zeta(k)$ с помощью нового вероятностного подхода для построения дистанционных графов без k-клик. При этом оценки, приведенные ниже, являются с точки зрения предложенного метода оптимальными.

k	$\zeta(k)$	k	$\zeta(k)$	k	$\zeta(k)$
3	1.0582	11	1.1131	19	1.1479
4	1.0663	12	1.1190	20	1.1518
5	1.0857	13	1.1245	100	1.2197
6	1.0898	14	1.1293	1000	1.2375
7	1.0995	15	1.1336	10000	1.2393
8	1.1019	16	1.1375	100000	1.2395
9	1.1077	17	1.1409	1000000	1.2395
10	1.1093	18	1.1441		

Для нас сейчас важно то, что, как видно из этих оценок, $\zeta(k) \to 1.239\dots$ при $k \to \infty$.

А нам удалось доказать следующий новый результат, опубликованный в [67].

Теорема 6. *Пусть $k = k(n)$ — любая функция, стремящаяся к бесконечности с ростом n. Тогда существует функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, и такая последовательность конечных n-мерных дистанционных графов G_n, что $\chi(G_n) \geq (\zeta + \delta(n))^n$ и $\omega(G_n) \leq k(n)$, где $\zeta = 1.239\dots$.*

3.2 Доказательство теоремы 6

Зафиксируем произвольную функцию $k = k(n)$, стремящуюся к бесконечности с ростом n.

Пусть для начала a и $b < a$ — произвольные числа из интервала $(0, 1/2)$. Для каждой пары таких чисел рассмотрим последовательность множеств

$$V_n(a,b) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n): \ x_i \in \{-1, 0, 1\},$$
$$|\{i: \ x_i = 1\}| = [an], \ |\{i: \ x_i = -1\}| = [bn]\}.$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x. Стандартные вычисления с применением формулы Стирлинга показывают, что

$$|V_n(a,b)| = (\beta(a,b) + o(1))^n,$$

где $\beta(a,b) > 1$. Пусть p — минимальное простое число, такое, что

$$[an] + [bn] - 2p < -2[bn].$$

Обозначив через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ евклидово скалярное произведение векторов, положим

$$E_n(a,b) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}: \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n(a,b), \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [an] + [bn] - p\}.$$

Образовалась последовательность конечных n-мерных дистанционных графов

$$G_n(a,b) = (V_n(a,b), E_n(a,b)).$$

Назовем множество $W \subseteq V$ вершин какого-либо графа $G = (V,E)$ *независимым*, если никакие два его элемента не соединены ребром из множества E. Размер любого из максимальных по мощности независимых множеств в графе G обозначим через $\alpha(G)$ и будем говорить, что $\alpha(G)$ — *число независимости* данного графа. В определенном смысле независимые множества — это "антиклики"; именно поэтому число независимости и кликовое число принято обозначать первой и последней буквами греческого алфавита.

В работе [20] показано, что

$$\alpha(G_n(a,b)) \le (\gamma(a,b) + o(1))^n,$$

где $1 < \gamma(a,b) < \beta(a,b)$ (более подробно нужные выкладки проведены в [54]). В то же время практически очевидно, что

$$\chi(G) \ge \frac{|V|}{\alpha(G)}$$

для любого графа $G = (V,E)$. В нашем случае, стало быть,

$$\chi(G_n(a,b)) \ge \frac{(\beta(a,b)+o(1))^n}{(\gamma(a,b)+o(1))^n} = \left(\frac{\beta(a,b)}{\gamma(a,b)} + o(1)\right)^n.$$

Как доказано все в тех же [20], [54], значение

$$\max_{a,b} \frac{\beta(a,b)}{\gamma(a,b)}$$

в точности равно ζ и достигается при $a_0 = 0.36063\ldots$ и $b_0 = 0.063\ldots$, где a_0 и b_0 суть величины, на которых достигается максимум следующей дроби.

$$f(a,b) = \frac{A^A B^B C^C}{a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}},$$

где

$$A = \frac{2 + 9b + 3a - \sqrt{(2+9b+3a)^2 - 12(3b+a)^2}}{12}$$

$$B = \frac{a+3b}{2} - 2A$$

$$C = 1 + A - \frac{a+3b}{2}$$

Если бы было заодно выполнено неравенство $\omega(G_n) \leq k$, то говорить было бы дальше не о чем. Однако в графах G_n полно k-клик.

Применим вероятностный метод. Рассмотрим $G_n = G_n(a_0, b_0)$. Пусть

$$\beta = \beta(a_0, b_0), \gamma = \gamma(a_0, b_0), N = |V_n(a_0, b_0)|.$$

Положим $\rho = N^{-3/k}$. Поскольку, очевидно, $\rho \in (0, 1]$, эту величину можно интерпретировать как вероятность. А именно, мы будем удалять ребра графа G_n независимо друг от друга с вероятностью $1 - \rho$. Получится случайный граф. Если мы докажем, что с положительной вероятностью у этого графа нет k-клик и его число независимости не превосходит $(\gamma + o(1))^n$, то мы найдем нужный нам граф и теорема будет доказана.

Положим

$$l = \left[5\frac{\alpha(G_n)}{\rho}\ln N\right] + 1 \geq 5\frac{\alpha(G_n)}{\rho}\ln N.$$

Имеем

$$l \sim 5\alpha(G_n)N^{3/k}\ln N \leq 5N^{3/k}(\ln N)(\gamma + o(1))^n =$$
$$= (\beta + o(1))^{3n/k}(\gamma + o(1))^n = (\gamma + o(1))^n,$$

т.к. $k \to \infty$ (разумеется, здесь все величины $o(1)$ разные).

Докажем, что с положительной вероятностью у случайного графа G одновременно $\omega(G) < k$ и $\alpha(G) < l$. Ясно, что этого хватит для завершения доказательства теоремы.

Обозначим через X_n число k-клик в случайном графе, а через Y_n — число независимых множеств размера l в нем. Ввиду неравенства Маркова достаточно получить оценки $MX_n < \frac{1}{2}$ и $MY_n < \frac{1}{2}$ при больших n, где M — математическое ожидание. Имеем

$$MX_n \leq C_N^k \rho^{C_k^2} \leq N^k \rho^{\frac{k(k-1)}{2}} = N^k \cdot N^{-1.5(k-1)} \to 0.$$

Вместе с тем

$$MY_n = \sum_{A \subset V_n,\ |A| = l} (1 - \rho)^{|\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \in E_n:\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A\}|}.$$

Классическая теорема Турана говорит, что если у графа l вершин и число независимости α, то число его ребер не меньше, чем число ребер у графа, состоящего из попарно непересекающихся клик, размеры которых отличаются от α не более чем на 1. Отсюда сразу следует, что

$$|\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \in E_n :\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in A\}| \geq \frac{l^2}{(1 + o(1))\alpha(G_n)}.$$

Однако для наших целей константа не важна. Заметим что, в работе [42] доказана оценка

$$|\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in E_n : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}| \geq \frac{l^2}{4\alpha(G_n)}.$$

В итоге

$$MY_n \leq C_N^l (1-\rho)^{\frac{l^2}{4\alpha(G_n)}} \leq N^l e^{-\frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)}} = e^{l \ln N - \frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)}}.$$

Но

$$\frac{\rho l}{4\alpha(G_n)} \geq 1.25 \ln N,$$

так что

$$l \ln N - \frac{\rho l^2}{4\alpha(G_n)} \leq -0.25 l \ln N \to -\infty, \quad MY_n \to 0,$$

и теорема доказана.

Заключение

Обзор полученных результатов и перспективные направления дальнейших исследований

В настоящей диссертации исследован ряд вопросов, находящихся на стыке нескольких областей науки. В главе 1 в рамках теории экстремальных задач о раскрасках гиперграфов нам удалось существенно уточнить классический результат П. Франкла и В. Редля (Теорема 1) и, более того, получить новые верхние оценки произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества с запретом на "перекрестные" пересечения. В главе 2 мы получили новые оценки хроматического числа пространства с запрещенным равносторонним треугольником, применив результат первой главы и используя принципиально новый подход, описанный в теореме 3. Тем самым удалось серьезно продвинуться в задаче, где старый подход, часто используемый при решении задач в области экстремальной комбинаторики и евклидовой теории рамсея, давал слабые результаты. И, наконец, в главе 3, используя вероятностный метод, удалось доказать аналог классического утверждения П. Эрдеша для случая дистанционных графов.

Существует много различных направлений дальнейших исследований. Во-первых, если говорить о результатах, полученных в главе 1, то можно сформулировать аналоги доказанных утверждений для случая, когда гиперграфы n_1- и n_2-однородные. Во-вторых, можно попытаться перенести технику, используемую при доказательстве теоремы 2, на случай произвольных треугольников с заданными длинами сторон. И, наконец, можно перейти от запретов на треугольники к запретам на симплексы, а также другие более сложные конфигурации, расположенные на сферах. Кроме того, результаты теорем 1 и 2 возможно допускают дальнейшие уточнения, но они возникнут, если справедлива некоторая гипотеза. Вот о ней и о том, что может получиться, поговорим далее.

Гипотеза о произведении мощностей множеств ребер гиперграфов в случае, когда мощности перекрестных пересечений ограничены снизу

Для того, чтобы сформулировать новую теорему, нам придется дать небольшой обзор результатов относительно одной смежной проблемы экстремальной теории гиперграфов. В самом деле, если наша задача состоит в отыскании оценок для произведения мощностей ребер двух гиперграфов, ребрам которых запрещены взаимные пересечения данной величины, то естественен близкий вопрос: каково максимальное произведение мощностей ребер двух гиперграфов, если любое ребро первого гиперграфа с любым ребром второго гиперграфа должно иметь не менее стольких-то общих вершин? Полного ответа на поставленный вопрос нет. Однако, имеет место следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Пусть $H_1 = (V, E_1)$, $H_2 = (V, E_2)$ — два гиперграфа на одном и том же множестве вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, причем H_1 является d_1-однородным, а H_2 — d_2-однородным и для любых $F_1 \in E_1$, $F_2 \in E_2$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \geq l$ (множества ребер E_1, E_2 могут как пересекаться, так и не пересекаться). Тогда*

$$|E_1| \cdot |E_2| \leq \max_{i,j:\ 0<i+j<n-l} |\mathcal{E}^1_{i,j}| \cdot |\mathcal{E}^2_{i,j}|,$$

где

$$\mathcal{E}^1_{i,j} = \{F \subset V :\ |F| = d_1,\ |F \cap \{1, 2, \ldots, l+i+j\}| \geq l+i\},$$
$$\mathcal{E}^2_{i,j} = \{F \subset V :\ |F| = d_2,\ |F \cap \{1, 2, \ldots, l+i+j\}| \geq l+j\}.$$

Эта гипотеза доказана в случае, когда H_1 и H_2 совпадают, т.е. в случае, когда дан один гиперграф и его ребра имеют достаточно большие попарные пересечения (см. [54]–[58]). Для случая, когда гиперграфы по существу различны, имеется ряд работ, частично решающих проблему (см. [59]–[61]).

Модификация теоремы 2

Ввиду гипотезы 1 можно модифицировать алгоритм выбора необходимых параметров для теоремы 2 следующим образом. Как и перед формулировкой теоремы 2, зафиксируем числа

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \rho \in (0, a)\,.$$

Пусть
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, a_1, a_2$$
такие же, как в теореме 2. Пусть
$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max_{i,j:\ 0<i+j<x_1-x_4} c_{x_4+i+j}^{x_4+i} \cdot c_{x_1-x_4-i-j}^{x_2-x_4-i} \cdot c_{x_4+i+j}^{x_4+j} \cdot c_{x_1-x_4-i-j}^{x_3-x_4-j}.$$
Положим $g_1 = g(\mu_1, a_1, a_1, \beta)$ и далее определим δ_1 так же, как в теореме 2.

Выбор величины δ_2 осуществим по той же схеме, что и в теореме 2, только величину
$$2^{2H\left(\frac{1+\kappa-\lambda}{2}\right)\mu_2}$$
в трех местах заменим величиной
$$g(\mu_2, a_2, \mu_2 - a_2, (\kappa - \lambda)\mu_2).$$

В итоге справедлива следующая новая теорема, опубликованная в [68].

Теорема 6. *Пусть*
$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \rho \in (0, a).$$
Предположим, что верна гипотеза 1. Найдем величины δ_1, δ_2 с помощью алгоритма, описанного перед формулировкой теоремы. Пусть $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда существует функция φ натурального аргумента n, принимающая, возможно, как положительные, так и отрицательные значения и стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, с которой имеет место следующее утверждение. Пусть d и l — функции натурального аргумента n, принимающие натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющие асимптотики $d(n) \sim an$, $l(n) \sim \rho n$. Пусть, кроме того, $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$ — две последовательности $d(n)$-однородных гиперграфов, в которых для каждого n множество вершин V^n одно и то же и $|V^n| = n$, причем для любых $F_1 \in E_1^n$, $F_2 \in E_2^n$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l(n)$ (множества ребер E_1^n, E_2^n могут как пересекаться, так и не пересекаться). Тогда
$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (4 - \varepsilon + \varphi(n))^n.$$

Теперь сравним результаты теоремы 2 и 6. В главе 1 мы говорили о том единственном случае, где П. Франкл и В. Редль конкретизировали свою оценку из работы [37], то есть когда $a = 0.5$ и $\rho = 0.25$. У них получилось число 3.96, и, как мы описали далее в главе 1, теорема 2 дает более сильный результат, а именно оценку 3.892. Проведя аналогичные вычисления для теоремы 6, нами была получена оценка 3.87, что, конечно, еще лучше. Вычисления констант в теореме 6 намного более трудоемкие, поэтому мы пока ограничились случаем когда $a = 0.5$ и $\rho = 0.25$.

Как и у теоремы 2, так и у теоремы 6 есть следствие. Справедливо

Следствие 2. *Если верна гипотеза 1, то имеет место оценка*

$$\chi_{\Delta}(\mathbb{R}^n) \geq (1.06\ldots + o(1))^n .$$

Понятно, что следствие 2 сильнее следствия 1 из теоремы 2. Описание вычислений, давших следствие, похоже на приведенные выше, и здесь мы его не повторяем. В следующем разделе мы приведем схему доказательства теоремы 6 и в конце рассмотрим ряд ситуаций, в которых все перевисленные теоремы допускают уточнения.

Схема доказательства теоремы 6

Доказательство теоремы 6 очень похоже на доказательство теоремы 2, подробно изложенное в первой главе настоящей диссертации. Поясним, в чем состоят различия. В разделе 1.3.2 был описан алгоритм, который по исходным гиперграфам $\mathcal{F} = H_1^n$, $\mathcal{G} = H_2^n$ строит новые гиперграфы $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$. У алгоритма есть два варианта остановки.

В первом случае гиперграфы $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$ обладают следующими параметрами. Их общее множество вершин имеет мощность $\mu_1 n \pm f_1(n)$, где f_1 — функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Ребра каждого из них содержат не более $a_1 n \pm f_2(n)$ вершин, где f_2 — функция, аналогичная f_1. При этом мощность пересечения любого ребра из $\mathcal{F}^*$ и любого ребра из $\mathcal{G}^*$ не меньше $\beta n \pm f_3(n)$. Нетрудно проверить с использованием формулы Стирлинга, что ввиду гипотезы 1

$$|\mathcal{F}^*| \cdot |\mathcal{G}^*| \leq (g_1 + f_4(n))^n.$$

Ровно такую же роль играла в этом случае и величина g_1 из алгоритма 1. Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения из доказательства теоремы 2.

Во втором случае остановки алгоритма гиперграфы $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$ обладают иными параметрами. Их общее множество вершин имеет мощность $\mu_2 n \pm h_1(n)$, где h_1 — функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Ребра каждого из них содержат не более $a_2 n \pm h_2(n)$ вершин, где h_2 — функция, аналогичная h_1.

При этом мощность пересечения любого ребра из $\mathcal{F}^*$ и любого ребра из $\mathcal{G}^*$ не *больше* $\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)\mu_2 n \pm h_3(n)$. Такого рода ограничение характерно для задач теории кодирования о построении равновесных кодов, исправляющих ошибки (см. [63]). Ситуация с границами для мощностей этих кодов крайне запутанная. Есть ряд классических границ (см. [63]), и есть, например, работа [64], которая затрудняет формулировку какой-либо гипотезы.

В результате применяется трюк, при котором (см. раздел 1.3) второй гиперграф заменяется новым гиперграфом с прежним множеством вершин и со следующими свойствами: каждое ребро нового гиперграфа имеет не менее $(\mu_2-a_2)n\pm h_4(n)$ вершин; ребра нового гиперграфа пересекают ребра первого гиперграфа по не менее $(\kappa-\lambda)\mu_2 n$ вершинам. Видно, что указанные параметры согласуются с аргументами функции g в описании параметров теоремы 2. В итоге с учетом формулы Стирлинга, гипотезы 1 и хода доказательства из раздела 1.2 имеем оценку

$$|\mathcal{F}^*|\cdot|\mathcal{G}^*| \leq (\xi+h_5(n))^n.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения из доказательства теоремы 2.

Схема доказательства теоремы 6 завершена.

Ситуация, в которой теоремы 1, 2 и 6 допускают уточнения

Рассмотрим ситуацию, в которой гиперграфы H_1 и H_2 совпадают. Разумеется, для этого специального случая теоремы 1, 2 и 6 дают оценку мощности множества ребер гиперграфа H_1 (он же H_2) величиной

$$\left(\sqrt{4-\varepsilon}+\varphi'(n)\right)^n.$$

Ниже напомним еще раз две теоремы, касающиеся этого случая. Это теоремы 4 и 5 из раздела 2.3.1. Их кардинальное отличие от теорем 1, 2 и 6 состоит в том, что если в теоремах 1, 2 и 6 запрет l может принимать абсолютно любые значения, то в них запрет обязан отличаться от мощности каждого ребра (как и в теоремах 2 и 6, гиперграфы там однородные) на величину, равную степени простого числа. Первая теорема доказана П. Франклом и Р. Уилсоном в [51]. Вторая принадлежит Е.И. Пономаренко и А.М. Райгородскому (см. [12], [52] – [54], [62]).

Теорема 4. *Пусть $H=(V,E)$ — d-однородный гиперграф на n вершинах, причем для любых $F_1,F_2\in E$ выполнено $|F_1\cap F_2|\neq l$ и $d-l$ — степень* *простого числа, которую мы обозначим q. Если $2l < d$, то*

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{q-1} C_n^i.$$

Теорема 5. *Пусть $H = (V, E)$ — d-однородный гиперграф на n вершинах, причем $d \leq \frac{n}{2}$, для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$, $2l \geq d$ и $q = d - l$ — степень простого числа. Положим $t = 2l - d + 1$. Определим натуральное число r из соотношения*

$$(d-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) \leq n < (d-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r}\right).$$

Тогда

$$|E| \leq \frac{C_n^{t+2r}}{C_d^{t+r} C_{n-d}^r} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i\right).$$

Переформулируем эти теоремы, используя следующее утверждение (см. [50]): *существует такая константа $C > 0$, что для любого n между n и $n + Cn^{0.525}$ есть простое число.* Благодаря этому утверждению теоремы 4 и 5 можно переписать следующим образом.

Теорема 7. *Пусть*

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \rho \in \left(0, \frac{a}{2}\right).$$

Тогда существует функция φ натурального аргумента n, принимающая, возможно, как положительные, так и отрицательные значения и стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, с которой имеет место следующее утверждение. Пусть d — функция натурального аргумента n, принимающая натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющая асимптотику $d(n) \sim an$. Тогда существует такая функция l натурального аргумента n, принимающая натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющая асимптотику $l(n) \sim \rho n$, что если $H^n = (V^n, E^n)$ — последовательность $d(n)$-однородных гиперграфов на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E^n$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l(n)$, то

$$|E^n| \leq \left(c_1^{a-\rho} + \varphi(n)\right)^n.$$

Теорема 8. *Пусть*

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \rho \in \left(\frac{a}{2}, a\right).$$

Тогда существует функция φ натурального аргумента n, принимающая, возможно, как положительные, так и отрицательные значения и стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, с которой имеет место следующее утверждение. Пусть d — функция натурального аргумента n, принимающая натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющая асимптотику $d(n) \sim an$. Тогда существует такая функция l натурального аргумента n, принимающая натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющая асимптотику $l(n) \sim \rho n$, что если $H^n = (V^n, E^n)$ — последовательность $d(n)$-однородных гиперграфов на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E^n$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l(n)$ и

$$r' = \frac{(2\rho - a)(2a - 2\rho)}{1 - 4a + 4\rho},$$

то

$$|E^n| \leq \left(\frac{c_1^{2\rho - a + 2r'} c_1^{a-\rho}}{c_a^{2\rho - a + r'} c_{1-a}^{r'}} + \varphi(n) \right)^n.$$

Отметим, что оценки из теорем 4 и 5, работающие в весьма специальных ситуациях, сильнее многих оценок, приведенных ранее. Например, при $a = 0.5$, $\rho = 0.25$, которые мы неоднократно упоминали, так как это единственный случай, в котором П.Франкл и В.Редль все-таки конкретизировали свою оценку, имеем вместо $\sqrt{3.87} = 1.967\ldots$ число $1.754\ldots$ Но тут очень важен эффект, создаваемый степенью простого числа, которая есть в соответствующих формулировках (см. [54]). Ниже приведена таблица вычислений при $a \in [0.3, 0.5]$ и $\rho \in [0.025, 0.25]$ для случая, когда гиперграфы H_1 и H_2 совпадают. В верхней строке для каждых a и ρ приведена оценка из теоремы 2, в нижней строке оценка, полученная с использованием теорем 4 и 5.

	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
0.3	1.840	1.836	1.815	1.811	1.794	1.808	1.783	1.798	1.842	1.842
	1.801	1.755	1.704	1.649	1.590	1.526	1.530	1.546	1.575	1.623
0.35	1.899	1.898	1.853	1.858	1.860	1.862	1.844	1.892	1.910	1.910
	1.879	1.842	1.800	1.755	1.704	1.649	1.590	1.583	1.587	1.603
0.4	1.928	1.927	1.925	1.924	1.924	1.921	1.920	1.917	1.960	3.842
	1.938	1.910	1.879	1.842	1.801	1.755	1.704	1.649	1.631	1.624
0.45	1.947	1.947	1.946	1.948	1.948	1.949	1.948	1.949	1.950	1.969
	1.978	1.960	1.938	1.911	1.879	1.842	1.801	1.755	1.704	1.674
0.5	1.960	1.962	1.963	1.964	1.966	1.967	1.968	1.970	1.971	1.973
	1.998	1.990	1.978	1.960	1.938	1.911	1.879	1.842	1.801	1.755

Список литературы

[1] K. Schutte, B.L. van der Waerden, *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Mathematische Annalen, 125 (1953), 325 - 334.

[2] П.М. Грубер, К.Г. Леккеркеркер, *Геометрия чисел*, Наука, Москва, 2008.

[3] Дж. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, Москва, 1965.

[4] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Мир, Москва, 1990.

[5] K. Borsuk, *Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphare*, Fundamenta Mathematicae, 20 (1933), 177 - 190.

[6] H.G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, Journal of the London Mathematical Society, 30 (1955), 11 - 24.

[7] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin of the American Mathematical Society, 29 (1993), 60 - 62.

[8] В.Г. Болтянский, И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, Москва, 1965.

[9] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Современная математика, Фундаментальные направления, 23 (2007), 147 - 164.

[10] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[11] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.

[12] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи математических наук, 56 (2001), вып. 1, 107 - 146.

[13] L. Moser, W. Moser, *Solution to problem 10*, The Canadian Mathematical Bulletin, 4 (1961), 187 - 189.

[14] H. Hadwiger, *Ungeloste Probleme N 40*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen, Series A, 16 (1961), 103 - 104.

[15] O. Nechushtan, *Note on the space chromatic number*, Discrete Mathematics, 256 (2002), 499 - 507.

[16] D. Coulson, *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete mathematics, 256 (2002), N1, 83 - 90.

[17] K. Cantwell, *Finite Euclidean Ramsey theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 73 (1996), N2, 273 - 285.

[18] Л. Л. Иванов, *Оценка хроматического числа пространства* $\mathbb{R}^4$, Успехи математических наук, 371 (2006), 181 - 182.

[19] R. Radoicic, G. Toth, *Note on the chromatic number of the space*, Discrete and Computational Geometry, Springer, 2003, 695 - 698.

[20] А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства*, Успехи математических наук, 55 (2000), N2, 147 - 148.

[21] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

[22] M. Benda, M. Perles, *Colorings of metric spaces*, Geombinatorics, 9 (2000), 113 - 126.

[23] D.R. Woodall, *Distances realized by sets covering the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14 (1973), 187 - 200.

[24] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach edition, Springer, 2013, 429 - 460.

[25] А.М. Райгородский, *О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах*, Доклады РАН, 432 (2010), N2, 174 - 177.

[26] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of spheres in* $\mathbb{R}^n$, Combinbatorica, 32 (2012), N1, 111 - 123.

[27] А.Б. Купавский, *Хроматическое число пространства* $\mathbb{R}^n$ *с множеством запрещенных расстояний*, Доклады РАН, 435 (2010), N6, 740 - 743.

[28] A.B. Kupavskii, *On the chromatic number of* $\mathbb{R}^n$ *with an arbitrary norm*, Discrete mathematics, 311 (2011), 437 - 440.

[29] А.Б. Купавский, *О раскрасках сфер, вложенных в* $\mathbb{R}^n$, Математический сборник, 202 (2011), N6, 83 - 110.

[30] А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с* l_q*-нормой*, Успехи математических наук, 59 (2004), N5, 161 - 162.

[31] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства*, Успехи математических наук, 68 (2013), N5, 183-184.

[32] Е.С. Горская, И.М. Митричева, В.Ю. Протасов, А.М. Райгородский, *Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации*, Математический сборник, 200 (2009), N6, 3 - 22.

[33] А.М. Райгородский, И.М. Шитова, *О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями*, Математический сборник, 199 (2008), N4, 107 - 142.

[34] Н.Г. Мощевитин, А.М. Райгородский, *О раскрасках пространства* $\mathbb{R}^n$ *с несколькими запрещенными расстояниями*, Математические заметки, 81 (2007), N5, 733 - 744.

[35] А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями*, Доклады РАН, 408 (2006), N5, 601 - 604.

[36] P. Frankl, V. Rödl, *All triangles are Ramsey*, Transactions of the American Mathematical Society, 297 (1986), N2, 777 - 779.

[37] P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society, 300 (1987), N1, 259 - 286.

[38] P. Frankl, V. Rödl, *A partition property of simplices in Euclidean space*, Journal of the American Mathematical Society, 3 (1990), N1, 1 - 7.

[39] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, John Wily and Sons, NY, Second Edition, 1990.

[40] N.G. de Bruijn, P. Erdös, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen, Series A, 54 (1951), N5, 371 - 373.

[41] P. Erdös, *Graph theory and probability*, Canadian Journal of Mathematics, 11 (1959), 34 - 38.

[42] А.М. Райгородский, О.И. Рубанов, *О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик*, Математические заметки, 87 (2010), N3, 417 - 428.

[43] А.М. Райгородский, *О дистанционных графах с большим хроматическим числом, не содержащих больших симплексов*, Успехи математических наук, 62 (2007), N6, 187 - 188.

[44] A.M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, *On the clique and the chromatic numbers of highdimensional distance graphs*, Number Theory and Applications: Proceedings of the International Conferences on Number Theory and Cryptography - S.D. Adhikari and B. Ramakrishnan, Harish-Chandra Research Institute, Editors - A publication of Hindustan Book Agency, 2009, 149 - 157.

[45] Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, *Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера*, Математический сборник, 204 (2013), N4, 49 - 78.

[46] А. Б. Купавский, *Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами*, Известия Российской академии наук, Серия математическая, 78 (2014), N1, 65 - 98.

[47] А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, *Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками*, Математические заметки, 93 (2013), N1, 134 - 143.

[48] А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, *Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками*, Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения, 125 (2013), 252 - 268.

[49] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, Москва, 1967.

[50] R.C. Baker, G. Harman, J. Pintz, *The difference between consecutive primes, II*, Proceedings of the London Mathematical Society, 83 (2001), 532 - 562.

[51] P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences* , Combinatorica, 1 (1981), 357 - 368.

[52] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Доклады РАН, 454 (2014), N3, 268-269.

[53] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Проблемы передачи информации, 49 (2013), N4, 98 - 104.

[54] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2007.

[55] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian, *The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 76 (1996), 121 - 138.

[56] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian, *The complete intersection theorem for systems of finite sets*, European Journal of Combinatorics, 18 (1997), 125 - 136.

[57] R. Ahlswede, V.M. Blinovsky, *Lectures on advances in combinatorics*, Springer, 2008.

[58] А.М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2010, второе издание.

[59] P. Borg, *Intersecting families of sets and permutations: a survey*, Advances in Mathematics Research (A.R. Baswell Edition), Nova Science Publishers, Inc., 16 (2011), 283 - 299.

[60] P. Borg, *The maximum sum and the maximum product of sizes of cross-intersecting families*, European Journal of Combinatorics, 35 (2014), 117 - 130.

[61] P. Frankl, S.J. Lee, M. Siggers, N. Tokushige, *An Erdős–Ko–Rado theorem for cross t-intersecting families*, arXiv:1303.0657.

[62] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов*, Математические заметки, 96 (2014), N1, 138 - 147.

[63] Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Москва, Связь, 1979.

[64] В.А. Зиновьев, Т. Эриксон, *О каскадных равновесных кодах, превышающих границу Варшамова–Гилберта*, Проблемы передачи информации, 23 (1987), N1, 110 - 111.

[65] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, А.А. Харламова, *Улучшение теоремы Франкла–Редля о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Доклады РАН, 457 (2014), N2, 144 - 146. (Журнал входит в список, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. А.М. Райгородский поставил задачу и редактировал введение. Д.В. Самирову и А.А. Харламовой принадлежит редакция доказательства основной теоремы, доказательство всех основных результатов принадлежит А.Е. Звонареву.)

[66] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, А.А. Харламова, *О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником*, Математический сборник, 205 (2014), N9, 97 - 120. (Журнал входит в список, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. А.М. Райгородский поставил задачу и редактировал введение. Д.В. Самирову и А.А. Харламовой принадлежит редакция доказательства основной теоремы, доказательство всех основных результатов принадлежит А.Е. Звонареву.)

[67] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, *О дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовым числами*, Труды МФТИ, Том 4, 1 (2012), 122-126. (Журнал входит в список, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. А.М. Райгородский поставил задачу и редактировал введение. Доказательство всех основных результатов принадлежит А.Е. Звонареву.)

[68] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, *Улучшения теоремы Франкла-Редля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником*, Труды МИАН, 288 (2015), 109 - 119. (Журнал входит в список, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. А.М. Райгородский поставил задачу и редактировал введение. Доказательство всех основных результатов принадлежит А.Е. Звонареву.)