Отзыв
научного руководителя на диссертацию А.Е. Звонарева
“Экстремальные задачи теории гиперграфов и их применения в евклидовой теории Рамсея”, представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация А.Е. Звонарева посвящена нескольким классическим и тесно связанным между собой задачам экстремальной комбинаторики и комбинаторной геометрии.

Первая задача — это задача о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с запрещенными мощностями пересечений ребер. Эта задача также допускает переформулировку в терминах теории кодирования, и тогда в ней речь идет о наибольшем числе кодовых слов в равновесном коде с запрещенными Хэмминговыми расстояниями.

Один из наиболее важных вариантов первой задачи — это проблема отыскания верхних границ для произведений мощностей множеств ребер двух однородных гиперграфов, обладающих тем свойством, что ребра одного из них не могут иметь заданную наперед мощность пересечения с ребрами другого из них.

Этим вариантом задачи в разные годы занимались такие классики современной комбинаторики, как Франкл, Редль, Мубаи, Уилсон и др. Ими были получены весьма сильные результаты. Однако эти результаты крайне далеки от оптимальных. Более того, наилучшая ранее известная граница Франкла–Редля имела вид экспоненты, про основание которой было лишь доказано, что оно меньше определенной константы. Однако никаких явных оценок этой константы из работы Франкла–Редля получить не удавалось.

Значительным достижением **первой главы** диссертации является эффективизация константы из теоремы Франкла–Редля и, как следствие, получение *явных* экспоненциальных границ для произведений мощностей множеств ребер однородных гиперграфов с запрещенными перекрестными пересечениями. Для доказательства нового результата Звонареву потребовалось значительное видоизменение первоначального алгоритма Франкла–Редля, на котором базировалось их доказательство, а также введение большого числа новых параметров и искусное применение различных идей из экстремальной комбинаторики, в том числе новых.

Вторая глава диссертации посвящена применению результатов первой главы в евклидовой теории Рамсея. Напомним, что множество $S \subset \mathbb{R}^d$ называется *рамсеевским*, если для любого r существует такое n, что при любой раскраске пространства $\mathbb{R}^n$ в r цветов найдется одноцветная конгруэнтная копия S. Известно, что S рамсеевское лишь при условии, что S конечно и лежит на сфере. Однако обратное утверждение — сложная проблема.

Франкл, Редль и др., основываясь на своих результатах о произведениях мощностей множеств ребер однородных гиперграфов, показали, что вершины правильного треугольника образуют рамсеевское множество. Более того, они показали, что зависимость r от n в этом случае экспоненциальная. Тем не менее, никаких эффективных оценок константы в основании экспоненты получено не было.

Звонареву удалось применить результат первой главы диссертации и в итоге явно оценить снизу константу в основании указанной выше экспоненты числом 1.052. Важно отметить, что этот результат, доказанный в **главе 2**, отнюдь не является прямым следствием основной теоремы главы 1, примененной в рамках техники Франкла–Редля. Даже так оценка не получилась бы. Звонареву потребовался еще ряд результатов и новых идей экстремальной комбинаторики, в частности, использованы недавние работы Е.И. Пономаренко, усиливающие линейно-алгебраические оценки Франкла–Уилсона.

Третья глава диссертации посвящена еще одной тесно связанной с предыдущими задаче. А именно, не только вершины треугольника, но и концы отрезка, конечно, являются рамсеевскими. Это классический результат о том, что *хроматическое число* евклидова пространства экспоненциально растет к бесконечности. Иными словами, существует последовательность дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, у которых экспоненциально растут хроматические числа. При этом наилучшая известная константа в основании экспоненты равна $1.239\ldots$ Ранее было доказано, что, более того, при каждом k существует последовательность дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, у которых экспоненциально растут хроматические числа, но кликовые числа не превосходят k. Естественно, константы ξ_k в основании экспонент зависят от k и всегда находятся в интервале от 1 до $1.239\ldots$. Визуально казалось (и интуитивно это ожидаемо), что $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 1.239\ldots$ Однако это не было доказано. Звонареву удалось строго доказать, что если k — любая функция от размерности, сколь угодно медленно стремящаяся к бесконечности, то существует последовательность дистанционных графов $G_n \subset \mathbb{R}^n$, у которых $\chi(G_n) \geq (1.239\ldots + o(1))^n$ и $\omega(G_n) < k(n)$. Использовано нетривиальное сочетание вероятностного и линейно-алгебраического методов в комбинаторике.

Наконец, в диссертации есть **заключение**, в котором дается обзор потенциальных исследований, а также приводится одна известная гипотеза экстремальной комбинаторики, из которой можно вывести уточнения основных результатов глав 1 и 2.

Диссертация представляет собой законченное исследование, результаты которого вносят серьезный вклад в современную теорию гиперграфов и теорию Рамсея. Эти результаты полезны для специалистов МФТИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МИРАН им. В.А. Стеклова, ИПМ ДВО РАН, Нижегородского ГУ и многих других университетов и научно-исследовательских центров. Их также можно использовать при чтении курсов по различным областям дискретной математики.

Таким образом, диссертационная работа А.Е. Звонарева полностью соответствует требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Артем Евгеньевич Звонарев заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

23.03.2016

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук, профессор — А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

Ученый секретарь Ученого совета МФТИ, доцент — Ю.И. Скалько

Почтовый адрес: 119991, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
Телефон: 7 (495) 408-45-54.
Адрес электронной почты: mraigor@yandex.ru.