ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 4 марта 1987 г.

1. К. И. Бабенко «Теория поверхностных волн».

Заседание 18 марта 1987 г.

1. А. А. Шкаликов «О постановке и разрешимости задач для уравнения волновода в полуцилиндре».

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим уравнение

$$-F\ \frac{d^2u}{dx^2} - iG\,\frac{du}{dx} + Hu - \omega^2 Iu = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Здесь F, G, H — операторы в $\mathfrak{H}$ такие, что $H = H^* > 0$, H^{-1} компактен, $\mathfrak{D}(G) \supseteq \mathfrak{D}(H^{1/2})$, $\operatorname{Im}(Gf, f) \geqslant 0\ \forall f \in \mathfrak{D}(G)$, оператор $F = F^* > 0$ ограничен, I — тождественный оператор, а число $\omega \in \mathbb{R}^+$.

С уравнением (1) свяжем пучок

$$P(\lambda) = \lambda^2 F + \lambda G + H - \omega^2 I.$$

Уравнение (1) есть абстрактная модель уравнения установившихся колебаний упругого волновода в полуцилиндре $Q = \Omega \times [0, \infty)$ (Ω — гладкая область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^n$) при заданной частоте ω (см. [1]), причем в процессах, где имеет место закон сохранения энергии, оператор G симметричен. Условие эллиптичности уравнения (1) в абстрактной форме выразим следующим образом.

Условие I. *Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > r_0 \gg 1$ выполняется оценка*

$$\| HP^{-1}(\lambda) \| + |\lambda|^2 \| P^{-1}(\lambda) \| \leqslant M, \ M = \text{const}.$$

Это условие есть аналог известных оценок для эллиптических систем с параметром, полученных С. Агмоном и Л. Ниренбергом, М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком. Мы будем использовать также

Условие II. *Если вектор функция $\mathcal{F}(\lambda) = [P^{-1}(\overline{\lambda})]^* f$, $f \in \mathfrak{H}$, голоморфна в верхней полуплоскости, то в этой полуплоскости она убывает.*

По оператору $H^{1/2} > 0$ построим шкалу пространств $\mathfrak{H}_\theta$ ($\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{D}(H^{1/2})$). Для упрощения формулировок предположим, что вещественные собственные значения (СЗ) пучка $P(\lambda)$ простые и не равны нулю. Пусть СЗ $\lambda_k \in \mathbb{R}$ и ему отвечает собственный элемент y_k. Тогда числа $\varepsilon_k = (p'_\lambda(\lambda_k) y_k, y_k) \neq 0$. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x), \tag{2}$$

где $\| u_0(x) \|_{\mathfrak{H}_1} \to 0$ при $x \to \infty$, а $u_1(x) = \sum\limits_{\lambda_k \in \mathbb{R}} c_k e^{i\lambda_k x} y_k$, $c_k \in \mathbb{R}$ (о характере незатухающих волн $e^{i\lambda_k x} y_k$, участвующих в представлении $u_1(x)$, будут сделаны дополнительные предположения).

Теорема 1. *Если выполнены условия* I, II *и* $\omega = 0$, *то при любом* $\varphi \in \mathfrak{H}_1$ $(\psi \in \mathfrak{H})$ *уравнение* (1) *имеет классическое при* $x > 0$ $(x < 0)$ *решение* $u(x)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$\lim_{x \to +0} \| u(x) - \varphi \|_{\mathfrak{H}_1} = 0 \quad (\lim_{x \to -0} \| u(x) - \psi \|_{\mathfrak{H}} = 0)$$

и условию излучения (2) *при* $x \to \infty$, *где функция* $u_1(x)$ *есть конечная сумма волн* $e^{i\lambda_k x} y_k$, *для которых* $\varepsilon_k \lambda_k < 0$ (>0). *Решение, удовлетворяющее перечисленным условиям, единственно и для всех* $x > 0$ $(x < 0)$ *удовлетворяет оценке*

$$\| F^{1/2} u'(x) \| \leqslant \| H^{1/2} u(x) \| \quad (\| F^{1/2} u'(x) \| \geqslant \| H^{1/2} u(x) \|).$$

Теорема 2. *Пусть* G *симметричен,* $\omega \geqslant 0$, *и выполнены условия* I, II. *Тогда при любом фиксированном* θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *и* $\varphi \in \mathfrak{H}_\theta$ *уравнение* (1) *имеет классическое при* $x > 0$ *решение* $u(x)$, *удовлетворяющее начальному условию* $\lim\limits_{x \to +0} \| u(x) - \varphi \|_{\mathfrak{H}_\theta} = 0$ *и условию излучения* (2) *при* $x \to \infty$, *где функция* $u_1(x)$ *есть сумма волн* $e^{i\lambda_k x} y_k$, *для которых* $\varepsilon_k > 0$. *Решение, удовлетворяющее перечисленным свойствам, единственно.*

Отметим, что в доказательстве единственности в обеих теоремах условия I, II не используются. В силу теоремы Леонтовича — Лайтхилла [1] поток энергии, переносимый волной $e^{i\lambda_k x} y_k$, совпадает по знаку с числом ε_k, поэтому теорема 2 дает обоснование энергетического принципа Мандельштама для отбора единственного решения уравнения волновода в полуцилиндре. Первая теорема такого рода при менее общих предположениях была доказана в [2]. Отметим, что теорема 2 легко выводится из теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И. Спектральная теория регулярных волноводов.— Ленинград: Изд-во физ.-техн. ин-та АН СССР, 1983.

[2] Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи//Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, вып. 2.— С. 38—61.