На правах рукописи

Звонарев Артем Евгеньевич

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИПЕРГРАФОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОЙ ТЕОРИИ РАМСЕЯ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2016

Работа выполнена на кафедре дискретной математики
факультета инноваций и высоких технологий
Московского физико-технического института
(государственного университета)

Научный руководитель:	**Райгородский Андрей Михайлович**, доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Малышев Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде, Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, ведущий научный сотрудник
	Стонякин Федор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, кафедра алгебры и функционального анализа, доцент
Ведущая организация:	Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН

Защита состоится 24 июня 2016 г. в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ им. М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан “___” ____________ 2016 г.

Председатель
диссертационного совета А.А. Васин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации исследуется ряд вопросов, возникающих на стыке нескольких областей науки – комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования и евклидовой теории Рамсея.

Первоначально задачи, рассматриваемые в диссертации, появились в рамках комбинаторной геометрии. Это весьма многогранная и бурно развивающаяся часть современной комбинаторики. По-видимому, отправной точкой для ее развития послужила проблематика, обсуждавшаяся И. Кеплером и другими еще в начале XVII века. В частности, одна из задач в этой области в то время формулировалась следующим образом: каково максимальное число равных материальных шаров, которые можно приложить к равному всем им шару в евклидовом пространстве? И. Кеплер предположил, что число таких шаров 12, но полное и строгое решение этой задачи было дано лишь в 1953 году Б. Л. Ван дер Варденом и К. Шютте[1]. Вообще, именно в XX веке комбинаторная геометрия сформировалась в самостоятельную дисциплину. С одной стороны, уже упомянутое решение задачи Кеплера поспособстваволо развитию современной теории упаковок и покрытий[2,3,4]. С другой стороны, появился ряд новых задач, которыми мотивируется наша работа и о которых мы поговорим ниже.

В 1933 году К. Борсук[5] поставил проблему отыскания минимального числа $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное ограниченное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Далее Борсук высказал гипотезу, что $f(n) = n + 1$. Для $n = 1, 2$ доказательство этого утверждения было получено самим Борсуком. А в 1955 году Эглстон[6] доказал справедливость гипотезы в размерности $n = 3$. Позднее рядом авторов были получены элементарные доказательства в этой размерности. Однако, начиная с размерности 4 доказательство гипотезы Борсука получить не удавалось. Были также предприняты попытки опровергнуть гипотезу, и в 1993 году Дж. Кан и Г. Калаи[7] построили контрпримеры в размерностях $n \geq 2014$. Сейчас известно, что гипотеза уже не верна начиная с размерности $n = 64$.

Еще одна основополагающая задача комбинаторной геометрии, история которой тесно связана с историей гипотезы Борсука[8,9,10,11], – это задача о нахождении так называемого *хроматического числа* евклидова пространства. Истоки она берет еще в 1950 году, когда Э. Нельсон предложил найти минимальное количество $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно

---

[1] K. Schutte, B.L. van der Waerden, *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Mathematische Annalen, 125 (1953), 325 - 334.

[2] П.М. Грубер, К.Г. Леккеркеркер, *Геометрия чисел*, Наука, Москва, 2008.

[3] Дж. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, Москва, 1965.

[4] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Мир, Москва, 1990.

[5] K. Borsuk, *Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphare*, Fundamenta Mathematicae, 20 (1933), 177 - 190.

[6] H.G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, Journal of the London Mathematical Society, 30 (1955), 11 - 24.

[7] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to BorsukŸs conjecture*, Bulletin of the American Mathematical Society, 29 (1993), 60 - 62.

[8] В.Г. Болтянский, И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, Москва, 1965.

[9] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Современная математика, Фундаментальные направления, 23 (2007), 147 - 164.

[10] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.

[11] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

так покрасить все точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Величина $\chi(\mathbb{R}^n)$ и была названа *хроматическим числом* евклидова простанства.

За прошедшие с момента постановки задачи о хроматическом числе шестьдесят с лишним лет появились разнообразные ее обобщения. Например, рассматривались хроматические числа произвольных метрических пространств[12,13,14,15,16,17,18]. В частности, изучалась[19,20] величина $\chi(\mathbb{Q}^n)$, или *хроматическое число* рационального пространства. В данном случае точки берутся из пространства $\mathbb{Q}^n$, снабженного евклидовой метрикой. Также изучались *хроматические числа* пространств с несколькими[21,22] (и даже бесконечно многими) запрещенными расстояниями. А именно, рассматривались величины $\chi((X,\rho),\mathcal{A})$, где (X,ρ) – метрическое пространство, а множество запретов берется как некоторое подмножество $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}_+$ и

$$\chi((X,\rho),\mathcal{A}) = \min\{\chi:\ \exists\, V_1,\dots,V_\chi\ \ \mathbb{R}^n = V_1\sqcup\ldots\sqcup V_\chi,$$
$$\forall\, i\ \ \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\in V_i\ \ \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\notin\mathcal{A}\}.$$

Еще одно естественное и важное обобщение понятия хроматического числа пространства дается в так называемой *евклидовой теории Рамсея*. Здесь множество $S\subset\mathbb{R}^d$ называется *рамсеевским*, если для любого r существует такое $n_0\ge d$, что при каждом $n\ge n_0$ и при любой раскраске пространства $\mathbb{R}^n$ в r цветов найдется конгруэнтная одноцветная копия S. Можно дать то же определение и в терминах хроматических чисел. А именно, пусть $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ — минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не образовывали множеств, конгруэнтных S. В этих обозначениях S рамсеевское тогда и только тогда, когда $\chi_S(\mathbb{R}^n)\to\infty$ при $n\to\infty$. В свете оценки $(1.239...+o(1))^n\le\chi(\mathbb{R}^n)\le(3+o(1))^n$ ясно, что любое двухточечное множество S является рамсеевским и даже, как говорят, *экспоненциально рамсеевским.* Для многих других множеств также доказана экспоненциальная рамсеевость. Например, это сделано для множества вершин произвольного симплекса (в частности, для треугольников[23]) и для декартовых произведений экспоненциально рамсеевских множеств[24]. Однако всякий

---

[12] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи математических наук, 56 (2001), вып. 1, 107 - 146.

[13] M. Benda, M. Perles, *Colorings of metric spaces*, Geombinatorics, 9 (2000), 113 - 126.

[14] D.R. Woodall, *Distances realized by sets covering the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14 (1973), 187 - 200.

[15] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach edition, Springer, 2013, 429 - 460.

[16] А.М. Райгородский, *О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах*, Доклады РАН, 432 (2010), N2, 174 - 177.

[17] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of spheres in* $\mathbb{R}^n$, Combinbatorica, 32 (2012), N1, 111 - 123.

[18] А.Б. Купавский, *О раскрасках сфер, вложенных в* $\mathbb{R}^n$, Математический сборник, 202 (2011), N6, 83 - 110.

[19] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

[20] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства*, Успехи математических наук, 68 (2013), N5, 183-184.

[21] Н.Г. Мощевитин, А.М. Райгородский, *О раскрасках пространства* $\mathbb{R}^n$ *с несколькими запрещенными расстояниями*, Математические заметки, 81 (2007), N5, 733 - 744.

[22] А.Б. Купавский, *Хроматическое число пространства* $\mathbb{R}^n$ *с множеством запрещенных расстояний*, Доклады РАН, 435 (2010), N6, 740 - 743.

[23] P. Frankl, V. Rödl, *All triangles are Ramsey*, Transactions of the American Mathematical Society, 297 (1986), N2, 777 - 779.

[24] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, John Wily and Sons, NY, Second Edition, 1990.

раз это делается неявно, так что выписать оценку вида $\chi_S(\mathbb{R}^n) \geq (c+o(1))^n$ с конкретной $c > 1$ не представляется возможным.

Теперь расскажем о связи описанных выше задач с проблемами экстремальной комбинаторики и теорией гиперграфов. Для начала введем определение *дистанционного графа.*

Дистанционный граф или *граф расстояний* – это любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}, \quad a > 0.$$

Желая подчеркнуть, что вершины графа принадлежат пространству размерности n, будем говорить об *n-мерном* дистанционном графе. Если $|V| < \infty$, то скажем явно, что граф расстояний конечный. В терминах дистанционных графов $\chi(\mathbb{R}^n)$ — это хроматическое число графа расстояний, у которого $V = \mathbb{R}^n$. А поскольку, как нетрудно видеть, $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$, некоторые соображения компактности показывают, что хроматическое число пространства достигается на конечном n-мерном дистанционном графе.

Все известные экспоненциальные нижние оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ достигаются на конечных дистанционных графах с вершинами в точках решетки $\mathbb{Z}^n$. А экспоненциальные оценки величин $\chi_S(\mathbb{R}^n)$, вовсе основаны на множествах $(0,1)$–векторов в пространстве. Опишем общую идею на примере величины $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ и графа с вершинами в $\{0,1\}^n$. Предположим, что в каждой вершине этого графа одно и то же число единиц. В этом случае граф является дистанционным тогда и только тогда, когда для некотогого b скалярное произведение его вершин (как векторов) равно b. Пусть $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, то есть минимальное количество цветов, в которые так можно покрасить все вершины этого графа, что все ребра не являются одноцветными (иначе говоря, вершины, образующие ребра, покрашены в разные цвета). Пусть, далее, $\alpha(G)$ есть размер любого из максимальных независимых множеств вершин графа G (то есть множества вершин, в которых никакие две вершины не соединены ребром). Ясно, что $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, где |V(G)| – количество вершин графа G. При этом в нашем случае $\alpha(G)$ – это максимальное число $(0,1)$–векторов, у которых попарные скалярные произведения не равны b. Таким образом, желая продолжить цепочку неравенств $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, мы должны научиться оценивать сверху число независимости. Напомним, что гиперграф – это пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами* гиперграфа. Ясно, что каждому $(0,1)$–вектору можно сопоставить ребро гиперграфа на n вершинах: это просто множество номеров координат, на которых стоят единицы. В этих терминах $\alpha(G)$ – это максимальное число ребер гиперграфа, попарные пересечения которых не могут иметь мощность b. Отыскание последней величины – это и есть классическая проблема экстремальной комбинаторики и теории кодирования. Здесь самые сильные до последнего времени результаты принадлежали П. Франклу и В. Редлю[25].

Цель работы и основные задачи. Цель работы состоит в решении следующих задач: усиление теоремы Франкла–Редля и изучение его приложений; получение новых верхних оценок произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества с запретом на "перекрестные" пересечения; получение новых нижних оценок для хроматического числа пространства с запрещенным равносторонним треугольником;

[25] P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society, 300 (1987), N1, 259 - 286.

обобщение на случай дистанционных графов классического результата П. Эрдеша[26] о том, что для любых k, l существует граф G, у которого $\chi(G) > k$, $g(G) > l$.

Методы исследования. В диссертации используются линейно–алгебраический метод, методы экстремальной комбинаторики и теории кодирования, вероятностный метод в комбинаторике.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты дают новую информацию о рамсеевских свойствах евклидова пространства.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Существенно усилена теорема Франкла–Редля о максимуме произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества, в которых запрещены "перекрестные" пересечения.

2. Получены новые явные экспоненциальные нижние оценки величины $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$, равной минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не образовывали множеств, конгруэнтных Δ, где в качестве множества Δ рассматривается тройка вершин равностороннего треугольника.

3. Доказана теорема о существовании дистанционных графов с хроматическим числом $\chi(G_n) \geq (1.239... + \delta(n))^n$ при $\delta(n) \to 0$, $n \to \infty$ и без клик растущего размера.

Степень достоверности и апробация результатов. Материалы диссертации опубликованы в 4 работах, в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [1, 2, 3, 4]. Список этих работ приведен в конце автореферата. Также результаты докладывались и получили одобрение специалистов на международной конференции "4th Polish Combinatorial Conference" в Бедлево (Польша, 2012 г.), на семинаре под руководством профессора В.Б. Алексеева, профессора А.А. Сапоженко, профессора С.А. Ложкина (ВМК МГУ, 2015 г.), а также на научных семинарах под руководством профессора А.М. Райгородского в МФТИ (кафедра дискретной математики) и в МГУ им. М.В. Ломоносова (кафедра математической статистики и случайных процессов) (2012 – 2015 г. г.). Достоверность полученных результатов подтверждается применением современных методов экстремальной комбинаторики и теории кодирования.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 59 страниц. Список литературы содержит 68 наименований.

[26] P. Erdös, *Graph theory and probability*, Canadian Journal of Mathematics, 11 (1959), 34 - 38.

Основное содержание работы

Введение к диссертации состоит из пяти частей. В них описывается общая история развития комбинаторной геометрии, а также рассматриваются классические задачи Борсука, Нельсона–Хадвигера и Эрдеша и их связь с евклидовой теорией Рамсея, проблемами экстремальной комбинаторики и теорией гиперграфов. Здесь же вводятся определения хроматического числа пространства, рамсеевского множества, дистанционного графа, гиперграфа и формулируется аналог классического утверждения Эрдеша о хроматическом числе графа для случая дистанционных графов.

Первая глава диссертации посвящена теореме о мощности множества ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и ее уточнениям. В разделе 1.1 приводится результат П. Франкла и В. Редля[27]

Теорема 1. *Пусть $H_1 = (V, E_1)$, $H_2 = (V, E_2)$ — два гиперграфа на одном и том же множестве V из n вершин, причем для любых $F_1 \in E_1$, $F_2 \in E_2$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ (множества ребер E_1, E_2 могут как пересекаться, так и не пересекаться). Если для некоторого $\eta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ выполнено условие $\eta n \leq l \leq \left(\frac{1}{2} - \eta\right) n$, то существует константа $\varepsilon > 0$, зависящая только от η, с которой $|E_1| \cdot |E_2| \leq (4 - \varepsilon + o(1))^n$.*

Далее в разделе 1.2 вводятся основные обозначения и затем формулируется новая теорема 2, которая является существенным уточнением теоремы 1.

Пусть $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$ — гиперграфы, у которых $V^n = \{1, \ldots, n\}$, также для любого i и для любого $F \in E_i^n$ выполнено

$$|F| = d(n) \sim an, a \in (0, 1/2), n \to \infty,$$

и, наконец, для любых $F_1 \in E_1^n$, $F_2 \in E_2^n$ выполнено

$$|F_1 \cap F_2| \neq l(n) \sim \rho n, \rho \in (0, a), n \to \infty.$$

Введем ряд параметров. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ — положительные вещественные числа, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, причем $\alpha + \beta < 1$. Пусть далее $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, \alpha + \beta)$. Положим

$$\mu_1 = 1 - \alpha - \beta + \gamma_1, \;\; \mu_2 = 1 - \alpha - \beta + \gamma_2,$$

$$a_1 = \min\left\{a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1, \frac{\mu_1}{2}\right\},$$

$$a_2 = \min\left\{a - \alpha_1 - \beta + \gamma_2, \frac{\mu_2}{2}\right\}.$$

Теперь введем некоторую величину g_1. Для этого определим функцию энтропии

$$H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$$

и рассмотрим несколько случаев.

Если $a_1 = \frac{\mu_1}{2}$, то

$$g_1 = 2^{2H\left(\frac{1 + \frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}.$$

Если

$$a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1 \text{ и } a_1 + \beta \geq \frac{\mu_1}{2},$$

[27] P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society, 300 (1987), N1, 259 - 286.

то

$$g_1 = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1 + H\left(\frac{a_1+\beta}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}\right\}.$$

Если

$$a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1 \text{ и } a_1 + \beta < \frac{\mu_1}{2},$$

то

$$g_1 = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\frac{\beta}{\mu_1}}{2}\right)\mu_1}\right\}.$$

Для $\delta \in (0,1)$ и $z, z_1 \geq 1, z_2 \geq 1$ положим

$$f_1(\delta) = \inf\left\{(1+y)(1-x) : (1+y)^2 \leq 1+\delta, (1+x)(1-y) \leq 1+\delta, \right.$$
$$\left. x > 0, y > 0 \right\},$$

$$f_2(\alpha, \beta, \delta, z) = \alpha \ln(1+\delta) + \beta \ln f_1(\delta) + \ln(1-(\delta)^z), z \geq 1$$

$$\delta_1 = \sup\left\{\delta : \sup_{z_1 \geq 1}\left\{\frac{\min\limits_{\gamma_1}(g_1/4^{\mu_1})}{(1+\delta)^\alpha f_1^\beta(\delta)} : \ \beta = \rho - \alpha_1, \ \alpha + \beta \geq \rho, \right.\right.$$
$$\left.\left. f_2(\alpha, \beta, \delta, z_1) \leq 0\right\} < 1 - (\delta)^{z_1} \right\},$$

Далее похожим образом определим δ_2. А именно, пусть $\kappa = \frac{\beta}{\mu_2} - \frac{1}{2}$ и $\lambda \in \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2}, \kappa\right)$. Если

$$a_2 + (\kappa - \lambda)\mu_2 \geq \frac{\mu_2}{2},$$

то положим

$$g_2(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2 + H\left(\frac{a_2+(\kappa-\lambda)\mu_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+(\kappa-\lambda)}{2}\right)\mu_2}\right\}.$$

Иначе

$$g_2(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+(\kappa-\lambda)}{2}\right)\mu_2}\right\}.$$

Если $a_2 = \frac{\mu_2}{2}$, то

$$h(\lambda) = \max\left\{2^{\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1+\kappa-\lambda}{2}\right)\mu_2}\right\},$$

иначе

$$h(\lambda) = \min\left\{2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, \max\left\{2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2}, g_2(\lambda)\right\}\right\}.$$

Наконец, $\xi = \min\limits_{\lambda} h(\lambda)$ и

$$\delta_2 = \sup$$
$$\left\{\delta : \sup_{z_2 \geq 1}\left\{\frac{\min\limits_{\gamma_2 :\ \kappa > 0}(\xi/4^{\mu_2})}{(1+\delta)^\alpha f_1^\beta(\delta)} : \rho - \alpha_1 = 1 - \alpha - \beta, \alpha + \beta \geq 1 - \rho, \right.\right.$$
$$\left.\left. f_2(\alpha, \beta, \delta, z_2) \leq 0\right\} < 1 - (\delta)^{z_2} \right\},$$

Теорема 2. *Положим* $\varepsilon = \min\{(\delta_1)^{z_1}, (\delta_2)^{z_2}\}$. *Имеет место неравенство*

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (4 - 4\varepsilon + o(1))^n .$$

Также в разделе 1.2 приводятся новые верхние оценки произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n-элементного множества с запретом на "перекрестные" пересечения. Здесь же приведена таблица, в которой сравниваются результаты вычислений при некоторых $a \in [0.3, 0.5]$ и $\rho \in [0.025, 0.25]$ из теоремы 2 с тривиальным случаем. В каждой клетке сверху стоит оценка в тривиальном случае, то есть просто квадрат числа всех возможных ребер без запрета на перекрестные пересечения $\sqrt[n]{(C_n^d)^2} = (\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}})^2$, а снизу — $4 - 4\varepsilon$. Видно, что в большинстве случаев имеет место значимое улучшение. Прочерки стоят в тех клетках, в которых улучшения нет.

	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
0.3	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	3.393	-	-
	3.384	3.372	3.296	3.280	3.220	3.268	3.180	3.232	-	-
0.35	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	3.651	-	-
	3.608	3.604	3.432	3.452	3.460	3.468	3.400	3.580	-	-
0.4	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	3.842	-
	3.716	3.712	3.704	3.700	3.700	3.692	3.688	3.676	3.780	-
0.45	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960
	3.792	3.792	3.788	3.796	3.796	3.800	3.796	3.800	3.804	3.880
0.5	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
	3.844	3.848	3.852	3.856	3.864	3.868	3.872	3.880	3.884	3.892

Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 1.3.

В **главе 2** обсуждаются вопросы, связанные с задачей поиска хроматичесткого числа пространства с запрещенным равносторонним треугольником $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$. Здесь основными результатами яляются теорема 3, в которой получена конструктивная нижняя оценка для $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$, и ее следствие 1, в котором дана явная константа в основании экспоненты для оценки $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$. Сначала в разделе 2.1 вводится ряд обозначений.

Пусть множество $\mathfrak{M}$ состоит из всех возможных упорядоченных наборов чисел $\mathbf{v} = (v, u, w, v', \theta)$, удовлетворяющих условиям

$$v \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \;\; u \in (0, 1),$$

$$w \in \left(0, \frac{u}{2}\right), \;\; v - w \in \left(0, \frac{1-u}{2}\right),$$

$$v' \in (0, v), \;\; \theta \in (0, w), \;\; v' - \theta < v - w,$$

$$\theta < v', \;\; 1 - 2v + v' > u - 2w + \theta.$$

Для каждого $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ положим

$$r = \frac{(2\theta - w)(2w - 2\theta)}{u - 4w + 4\theta},$$

$$r' = \frac{(2v'-v)(2v-2v')}{1-4v+4v'}.$$

Также введем величину $c_x^y = \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}}$ — для произвольных чисел $x > 0$ и $y \in (0,x)$, и $c_x^y = 1$ при $y = x$ и $c_x^y = 0$ при $y > x$.

В перечисленных обозначениях имеет место следующая новая теорема.

Теорема 3. *Положим*

$$T = \Bigg\{ (\tau, \mathbf{v}) : \ \mathbf{v} \in \mathfrak{M} :$$

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > \mathbb{I}_{\left\{\theta \le \frac{w}{2}\right\}} \cdot c_u^{w-\theta} + \mathbb{I}_{\left\{\theta > \frac{w}{2}\right\}} \cdot \frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta-w+2r}}{c_w^{2\theta-w+r} c_{u-w}^r},$$

$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^{\theta} \left(c_{v-v'}^{w-\theta}\right)^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > \mathbb{I}_{\left\{v' \le \frac{v}{2}\right\}} \cdot c_1^{v-v'} + \mathbb{I}_{\left\{v' > \frac{v}{2}\right\}} \cdot \frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}},$$

$$\tau^2 \frac{\left(c_v^w\right)^2 \left(c_{1-v}^{u-w}\right)^2}{\left(c_1^u\right)^2 \left(c_u^w\right)^2} > \left(4 - 4 \cdot \varepsilon \left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u}\right)\right)^{1-u} \Bigg\},$$

где $\mathbb{I}$ – индикатор события. Тогда

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \ge \left(\sup_{(\tau,\mathbf{v}) \in T} \frac{c_1^v}{\tau} + o(1) \right)^n.$$

Следствием из теоремы 3 является новая нижняя оценка величины $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \ge (1.052\ldots + o(1))^n.$$

Далее в разделе 2.2 описаны вычисления, позволившие получить следствие 1. И, наконец, в разделе 2.3 приведено доказательство теоремы 3. В доказательстве используются некоторые идеи исходной работы П. Франкла и В. Редля, но рассуждение значительно усложнено за счет введения большого числа новых параметров и использования нетривиального сочетания методов экстремальной комбинаторики и линейно-алгебраического метода в комбинаторике, в том числе результатов П.Франкла и Р.М. Уилсона[28], и Е.И. Пономаренко[29,30].

Теорема 4 (П. Франкл Р. М. Уилсон). *Пусть $H = (V, E)$ — k-однородный гиперграф на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \ne l$ и $k - l$ — степень простого числа, которую мы обозначим q. Если $2l < k$, то*

$$|E| \le \sum_{i=0}^{q-1} C_n^i.$$

[28] P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences* , Combinatorica, 1 (1981), 357 - 368.

[29] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Доклады РАН, 454 (2014), N3, 268-269.

[30] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Проблемы передачи информации, 49 (2013), N4, 98 - 104.

Теорема 5 (Е.И. Пономаренко) *Пусть $H = (V, E)$ — k-однородный гиперграф на n вершинах, причем $k \le \frac{n}{2}$, для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \ne l$, $2l \ge k$ и $q = k - l$ — степень простого числа. Положим $d = 2l - k + 1$. Определим натуральное число $\overline{r}$ из соотношения*

$$(k-d+1)\left(2+\frac{d-1}{\overline{r}+1}\right) \le n < (k-d+1)\left(2+\frac{d-1}{\overline{r}}\right).$$

Тогда

$$|E| \le \frac{C_n^{d+2\overline{r}}}{C_k^{d+\overline{r}} C_{n-k}^{\overline{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i\right).$$

В **главе 3** рассматривается задача о дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовыми числами. В разделе 3.1 речь идет об естественном обобщении на случай дистанционных графов классического результата П. Эрдеша[31] о том, что для любых k, l существует граф G, у которого $\chi(G) > k$, $g(G) > l$, где в свою очередь $g(G)$ есть *обхват* графа G, то есть длина кратчайшего цикла в нем. Далее в этом же разделе приводится формулировка основного результата.

Теорема 6. *Пусть $k = k(n)$ — любая функция, стремящаяся к бесконечности с ростом n. Тогда существует функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, и такая последовательность конечных n-мерных дистанционных графов G_n, что $\chi(G_n) \ge (\zeta + \delta(n))^n$ и $\omega(G_n) \le k(n)$, где $\zeta = 1.239\ldots$, а $\omega(G_n)$ – число вершин в самом большой клике графа G_n.*

Для доказательства теоремы 6 используется классический вероятностный метод в сочетании с линейно–алгебраическим методом в комбинаторике.

В **заключении** проводится обзор полученных результатов и ряд перспективных направлений дальнейших исследований. Кроме того, рассматриваются возможные дальнейшие уточнения теорем 1 и 2. Но они возникают, если сраведлива гипотеза[32,33,34,35,36] экстремальной теории гиперграфов.

Гипотеза 1. *Пусть $H_1 = (V, E_1)$, $H_2 = (V, E_2)$ — два гиперграфа на одном и том же множестве вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, причем H_1 является d_1-однородным, а H_2 — d_2-однородным и для любых $F_1 \in E_1$, $F_2 \in E_2$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \ge l$ (множества ребер E_1, E_2 могут как пересекаться, так и не пересекаться). Тогда*

$$|E_1| \cdot |E_2| \le \max_{i,j:\ 0<i+j<n-l} |\mathcal{E}^1_{i,j}| \cdot |\mathcal{E}^2_{i,j}|,$$

где

$$\mathcal{E}^1_{i,j} = \{F \subset V:\ |F| = d_1,\ |F \cap \{1, 2, \ldots, l+i+j\}| \ge l+i\},$$

[31] P. Erdös, *Graph theory and probability*, Canadian Journal of Mathematics, 11 (1959), 34 - 38.

[32] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian, *The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 76 (1996), 121 - 138.

[33] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian, *The complete intersection theorem for systems of finite sets*, European Journal of Combinatorics, 18 (1997), 125 - 136.

[34] R. Ahlswede, V.M. Blinovsky, *Lectures on advances in combinatorics*, Springer, 2008.

[35] P. Borg, *Intersecting families of sets and permutations: a survey*, Advances in Mathematics Research (A.R. Baswell Edition), Nova Science Publishers, Inc., 16 (2011), 283 - 299.

[36] P. Borg, *The maximum sum and the maximum product of sizes of cross-intersecting families*, European Journal of Combinatorics, 35 (2014), 117 - 130.

$$\mathcal{E}^2_{i,j} = \{F \subset V: \ |F| = d_2, \ |F \cap \{1, 2, \ldots, l+i+j\}| \geq l+j\}.$$

Далее приводятся соответствующие модификации теоремы 2. И в итоге формулируется новая теорема 6.

Теорема 7. *Пусть*

$$a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \rho \in (0, a)\,.$$

Предположим, что верна гипотеза 1. Найдем величины δ_1, δ_2 с помощью алгоритма, описанного перед формулировкой теоремы. Пусть $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда существует функция φ натурального аргумента n, принимающая, возможно, как положительные, так и отрицательные значения и стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, с которой имеет место следующее утверждение. Пусть d и l — функции натурального аргумента n, принимающие натуральные значения и при $n \to \infty$ имеющие асимптотики $d(n) \sim an$, $l(n) \sim \rho n$. Пусть, кроме того, $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$ — две последовательности $d(n)$-однородных гиперграфов, в которых для каждого n множество вершин V^n одно и то же и $|V^n| = n$, причем для любых $F_1 \in E_1^n$, $F_2 \in E_2^n$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l(n)$ (множества ребер E_1^n, E_2^n могут как пересекаться, так и не пересекаться). Тогда

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (4 - \varepsilon + \varphi(n))^n.$$

Здесь же приводится сравнение оценок теорем 2 и 6.

Как и у теоремы 2, так и у теоремы 6 есть следствие.

Следствие 2. *Если верна гипотеза 1, то имеет место оценка*

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (1.06\ldots + o(1))^n\,.$$

Далее приведена схема доказательства теоремы 6. И, наконец, рассматривается ситуация, в которой теоремы 1, 2 и 6 допускают уточнения, с подробным анализом полученных оценок.

Соискатель признателен д.ф.-м.н., проф. А.М. Райгородскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

1. *Звонарев А.Е., Райгородский А.М., Самиров Д.В., Харламова А.А.* Улучшение теоремы Франкла–Редля о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения. // Доклады РАН. — 2014. — Т. 457, вып. 2. — С. 144 - 146.

2. *Звонарев А.Е., Райгородский А.М., Самиров Д.В., Харламова А.А.* О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником. // Матем. сборник. — 2014. — Т. 205, вып. 9. — С. 97 - 120.

3. *Звонарев А.Е., Райгородский А.М.* О дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовым числами. // Труды МФТИ — 2012. — Т. 4, вып. 1. — С. 122 - 126.

4. *Звонарев А.Е., Райгородский А.М.* Улучшения теоремы Франкла-Редля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником. // Труды МИАН — 2015. — Т. 288 — С. 109 - 119.

Личный вклад соискателя. В работах [1–4] А.Е. Звонаревым были доказаны основные результаты. В работах [1–2] Д.В. Самиров помогал в подсчете итоговых оценок, А.А. Харламова помогала в оптимизации вычислений. В работах [1–4] А.М. Райгородский помогал в постановке задач и редактировании текста.

Звонарев Артем Евгеньевич

Экстремальные задачи теории гиперграфов и их применения в евклидовой теории Рамсея

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 05.10.2015. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Усл. печ. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 396.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский физико-технический институт (государственный университет”
Отдел оперативной полиграфии “Физтех-полиграф”
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9