

Описание нормальных базисов граничных алгебр и факторных языков медленного роста.

А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев

Аннотация

Для алгебры A через $V_A(n)$ обозначим размерность векторного пространства, порожденного мономами длины не больше n . Пусть $T_A(n) = V_A(n) - V_A(n-1)$. Назовем алгебру *граничной*, если $T_A(n) - n < \text{Const}$. В работе описываются нормальные базисы для алгебр с медленным ростом или граничных алгебр.

Пусть $\mathcal{L}$ – факторный язык над конечным алфавитом $\mathcal{A}$. *Функция роста* $T_{\mathcal{L}}(n)$ есть число подслов длины n в $\mathcal{L}$. Мы также описываем факторные языки, такие что $T_{\mathcal{L}}(n) \leq n + \text{const}$.¹

Ключевые слова: Нормальный базис, последовательность Штурма, функция роста, мономиальная алгебра, Bergman Gap theorem, факторный язык.

1 Введение.

Проблематике, связанной с ростом в словах и алгебрах, посвящена обширная литература (см. библиографию в работах [1, 6]). Для алгебры A через $V_A(n)$ обозначим размерность векторного пространства, порожденного мономами длины не больше n . Пусть $T_A(n) = V_A(n) - V_A(n-1)$. Если A однородна, то $T_A(n)$ есть размерность векторного пространства, порожденного мономами длины ровно n .

Известно, что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = -\infty$ (в этом случае : либо $\lim V_A(n) = C < \infty$ и тогда $\dim A < \infty$, либо $V_A(n) = O(n)$ и алгебра имеет медленный рост, либо $T_A(n) - n < \text{Const}$, либо, наконец, $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = \infty$. (Bergman Gap Theorem)

В последнем случае для любой функции $\phi(n) \rightarrow \infty$ и любой $\psi(n) = e^{o(n)}$ существует алгебра A такая, что для бесконечного множества натуральных чисел $n \in L \subset \mathbb{N}$ $T_A(n) > \psi(n)$ и для бесконечного множества натуральных чисел $n \in M \subset \mathbb{N}$ $T_A(n) < n + \phi(n)$ ([1]) и рост может быть хаотичным.

Случай алгебр *медленного роста*, когда $T_A(n) - n < \text{Const}$ исследовался рядом авторов, в частности Дж. Бергманом и Л. Смоллом [4, 1]. Назовем алгебру *граничной*, если $T_A(n) - n < \text{Const}$.

Объекты минимального роста представляют значительный интерес. Для слова W можно определить *функцию роста*: $T_W(n) = \text{Card } F_n(W)$. Ясно, что если $T_W(n) = 0$ для какого-то n , то W – конечное слово. Можно показать, что если W – непериодическое слово, то $T_W(1) \geq 2$ и кроме того $T_W(n+1) > T_W(n)$, поэтому $T_W(n) \geq n+1$, если $T_W(n) = n+1$ о получаются знаменитые *последовательности Штурма* (см. чрезвычайно красивую классическую теорему 1.1), которым посвящена обширная библиография [5]. Слова, удовлетворяющие более слабому условию $T_W(n) < n + C$ описаны в теореме 1.2.

Язык $\mathcal{L}$ называется *факторным* если подслово слова из $\mathcal{L}$ снова принадлежит $\mathcal{L}$. Язык называется *граничным*, если $T_{\mathcal{L}}(n) \leq n + \text{const}$.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00548.

Наша цель состоит в описании нормальных базисов граничных алгебр и граничных факторных языков, что обобщает теорему 1.2. Такое описание сводится к мономиальному случаю [1]. Оно дается в теореме 2.1.

Назовем *обструкцией* приводимое (то есть уменьшаемое) слово u такое, что любое его подслово неприводимо. *Сверхсловом* в алгебре A (правым, левым, двусторонним) называется сверхслово W такое, что любое его конечное подслово ненулевое. Аналогично определяется *неприводимое сверхслово* в алгебре A . $|w|$ есть длина слова w .

Сверхслово W называется *рекуррентным*, если каждое его подслово встречается в нем бесконечно много раз (в случае двустороннего бесконечного слова, каждое подслово встречается бесконечно много раз в обоих направлениях). Слово W называется *равномерно-рекуррентным* или (*p.p. словом*), если оно рекуррентно и для каждого подслова v существует натуральное $N(v)$, такое, что для любого подслова W и длины не менее, чем $N(v)$, v является подсловом u .

Важным инструментом для описания слова W является *графы подслов*, или *графы Рози* (*Rauzy's graphs*), которые строятся так: k -*граф* слова W – ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k + 1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A , последние k символов – подслово, соответствующее B . таким образом, ребра k -графа биективно соответствуют $(k + 1)$ -подсловам слова W . В этих терминах описываются динамические системы, связанные с перекладываниями отрезков [2].

Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ – его открытое подмножество, $f : M \rightarrow M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка. По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом: $w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$ которое называется *эволюцией* точки x_0 . Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \dots, U_n$. Пусть $\mathbb{S}^1$ – окружность единичной длины, $U \subset \mathbb{S}^1$ – дуга длины α , T_α – сдвиг окружности на иррациональную величину α . Слова, получаемые такими динамическими системами, называют *механическими словами* (*mechanical words*). Имеется классическая

Теорема 1.1 (Теорема эквивалентности [5]) *Следующие условия на сверхслово W почти эквивалентны (т.е. точностью до счетного множества, исключительные последовательности также описаны):*

1. Слово W является словом Штурма, т.е. имеет функцию сложности $T_W(n) = n + 1$.
2. Слово W сбалансированно (т.е. для любых его двух подслов u, v одинаковой длины выполняется неравенство: $||u|_a - |v|_a| \leq 1$).
3. Слово W является механическим.

Естественным обобщением слов Штурма являются слова с минимальной функцией роста, то есть с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $F_W(n + 1) - F_W(n) = 1$ при всех достаточно больших n . В работе [3] доказана следующая

Теорема 1.2 *Пусть W – рекуррентное слово над произвольным конечным алфавитом A . Тогда следующие условия на слово W эквивалентны:*

1. Существует такое натуральное N , что функция сложности слова W равна $T_W(n) = n + K$, для $n \geq N$ и некоторого постоянного натурального K .
2. Существуют такое иррациональное α и целые $n_1, n_2, \dots, n_m$, что слово W порождается динамической системой

$$(\mathbb{S}^1, T_\alpha, I_{a_1}, I_{a_2}, \dots, I_{a_n}, x),$$

где T_α – сдвиг окружности на иррациональную величину α , I_{a_i} – объединение дуг вида $(n_j\alpha, n_{j+1}\alpha)$.

2 Основные теоремы.

Теорема 2.1 (О нормальных базисах) Пусть A – граничная алгебра с образующими $a_1, \dots, a_s$. Тогда имеют место один из двух случаев.

Случай 1. Алгебра A не содержит равномерно-рекуррентного непериодического сверхслова. В этом случае нормальный базис алгебры A состоит из множества подслов следующего множества слов:

1. Одно слово вида $W = u^{\infty/2} c v^{\infty/2} \neq u^{\infty}$
2. Произвольный конечный набор μ конечных слов
3. Множество слов вида $u_i^{\infty/2} c_i$, $i = 1, \dots, r_1$
4. Множество слов вида $d_i v_i^{\infty/2}$, $i = 1, \dots, r_2$
5. Множество слов вида $e_j (R_j)^k f_j$, $k \in \mathbb{K}_j \subseteq \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, r_3$
6. Множество слов вида $W_\alpha = E_\alpha u^{n_\alpha} c v^{m_\alpha} F_\alpha$. При этом существуют такое $c > 0$, что для любого k количество слов W_α длины k меньше c .

Случай 2. Алгебра A содержит равномерно-рекуррентное непериодическое сверхслово W . В этом случае нормальный базис алгебры A состоит из множества подслов следующего семейства слов, включающее в себя:

1. Некоторое равномерно рекуррентное слово W с функцией роста $T_W(n) = n + \text{const}$ для всех достаточно больших n . Описание таких слов дано в теореме 1.2.
2. Произвольный конечный набор μ конечных слов
3. Множество слов вида $u_i^{\infty/2} c_i$, $i = 1, \dots, s_1$
4. Множество слов вида $d_i v_i^{\infty/2}$, $i = 1, \dots, s_2$
5. Множество слов вида $e_j (R_j)^k f_j$, $k \in \mathbb{K}_j \subseteq \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, s_3$
6. Множество слов вида $L_i O_i W_i$, $i = 1, \dots, k_1$. При этом W_i – сверхслово, эквивалентное W и $O_i W_i$ имеют входжение только одной обструкции (a , именно, O_i).
7. Множество слов вида $W'_j O'_j L'_j$, $j = 1, \dots, k_2$. При этом W'_j – сверхслово, эквивалентное W и $W'_j O'_j$ имеют входжение только одной обструкции (a , именно, O'_j).
8. Конечное множество серий вида: $h^1_i T_i h^2_i$, $i = 1, \dots, s$. При этом:
 - а) слово T_i содержит входжение ровно двух обструкций O_{i_1}, O_{i_2} (возможно, перекрывающихся)
 - б) Для некоторого $c > 0$ $|h^1_i| + |h^2_i| < c$ при всех i .
 - в) Существует $m > 0$ такое, что для любого k имеется не более k подслов длины m , вида (8) и не являющихся подсловами слова W .

Доказательство. Алгебру A считаем мономиальной. Назовем слово v алгебры A хорошим, если для любого n существуют сколь угодно длинные слова w_1, w_2 , $|w_1| > n, |w_2| > n$ такие, что $w_1 v w_2$ есть подслово алгебры A . Обозначим $T_{RL}(n)$ количество хороших слов длины n . Известно, что если $T_{RL}(n) = T_{RL}(n+1)$ при некотором n , то алгебра A имеет медленный рост (см. [1]). В силу граничности алгебры A $T_{RL}(n) \geq T_{RL}(n+1) + 1$, при всех достаточно больших n неравенство превращается в равенство (иначе $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{RL}(n) - n) = \infty$ и, как следствие $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = \infty$).

При этом граф Розы имеет развилку и, как следствие, два цикла, эволюция графа Розы устроена следующим образом: либо граф теряет сильную связность и имеет вид а). В этом случае его дальнейшая эволюция однозначна, она отвечает слову вида $u^{\infty/2} c v^{\infty/2}$ и мы имеем случай 1, либо граф Розы все время остается

сильно связным. Тогда эволюция связной компоненты, в которой есть развилка, асимптотически эквивалентна эволюции графа Розы некоторого слова Штурма. Если оно имеет вид $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$, то имеет место случай 1, иначе оно равномерно-рекуррентно и имеет место случай 2.

В случае 1 все обструкции для слова $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$ имеют ограниченную длину (см. [1]). Можно сделать следующее

Наблюдение. *Количество ненулевых слов длины n , не являющихся подсловами слова $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$ не превосходит константы (не зависящей от n).*

Предложение 2.2 ([1]) *Пусть $SW = WT$. Тогда W имеет вид: $s^k s_1$, где s_1 — начало слова s .*

Из данного предложения и только что сделанного наблюдения вытекает

Следствие 2.3 *Пусть $|u| = k$, $|v_1| = |v_2| = l$. Тогда либо количество подслов длины $k+t$, (где $t \leq k$) слова $v_1 u v_2$ не менее $t+1$, либо $u = s^k s'$, для некоторого слова s , при этом s' — начало s и $v_1 = v'_1 s'$.*

Из данного следствия и сделанного наблюдения получается

Предложение 2.4 *Существует константа K , зависящая только от граничной алгебры A , такая, что для любой обструкции O в слове W либо при некотором t для любых v_1, v_2 , $|v_1| \geq t$, $|v_2| \geq t$ $v_1 O v_2$ является нулевым словом алгебры (число t не зависит от выбора обструкции), либо $|v| \leq K$.*

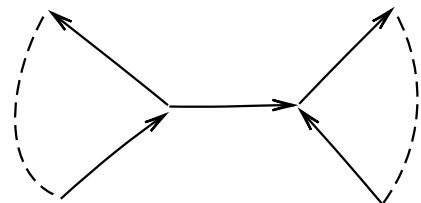
Из данного предложения следует, что словами алгебры A являются либо слова, содержащие не более двух обструкций, причем каждая обструкция находится на ограниченном расстоянии от одного из концов, либо подслова слов вида $R_i u_i^k T_i$. А все такие типы слов описаны в условии теоремы 2.1. $\square$

Мы также доказали следующее утверждение

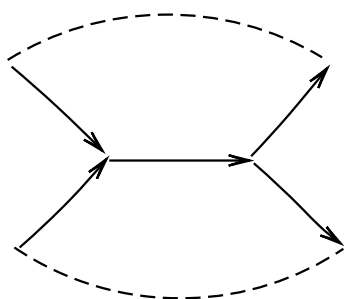
Теорема 2.5 (О граничных факторных языках) *Любой граничный факторный язык есть язык нормальных слов граничной алгебры. Множество его слов описывается в предыдущей теореме.*

Список литературы

- [1] А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.
- [2] Белов А. Я. Чернятьев А.Л., Слова медленного роста и перекладывания отрезков // Успехи Мат. Наук, 2008, 63:1(379), стр. 159–160.
- [3] Чернятьев А. Л. Слова с минимальной функцией роста. // Вестник МГУБ Матем. и Мех, ИАО, том 6, стр. 42–44, 2008 г.
- [4] G.M. Bergman, A note on growth functions of algebras and semigroups // Research Note, University of California, Berkeley, 1978.
- [5] J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) // Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).
- [6] M. Lothaire, Combinatorics on Words // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.



a)



b)