

ФГБОУ ВО Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Тарасов Павел Борисович

**Об условиях равномерности систем функций
многозначной логики**

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дискретной математики
механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Колпаков Роман Максимович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Коршунов Алексей Дмитриевич,**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник, лаборатория
дискретного анализа, ФГБУН «Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН»

Стеценко Владимир Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ «Московский педагогический государствен-
ный университет», математический факультет, ка-
федра теоретической информатики и дискретной
математики

Ведущая организация: ФГБУН «Институт прикладной математики им.
М. В. Келдыша РАН»

Защита диссертации состоится **27 мая 2016 года** на заседании диссертаци-
онного совета Д.501.001.84 на базе «ФГБОУ ВО Московский государствен-
ный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В.
Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ
ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по
адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж и на сайте
<http://mech.math.msu.su>.

Автореферат разослан **27 апреля 2016 года**

Ученый секретарь диссертационно-
го совета Д.501.001.84, созданно-
го на базе ФГБОУ ВО МГУ им.
М. В. Ломоносова, доктор физико-
математических наук, профессор

Шафареви́ч Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа относится к математической теории синтеза управляющих систем. Рассматривается задача о реализации функций k -значной логики формулами над конечными системами.

Синтез и сложность управляющих систем является одним из важнейших направлений исследований в математической кибернетике. Класс формул над конечными функциональными системами, реализующих функции k -значной логики ($k \geq 2$), — один из основных модельных классов управляющих систем. Задача изучения сложности формул заключается в построении формулы, которая реализует заданную функцию и является оптимальной относительно некоторой меры сложности. Наиболее часто используемыми мерами сложности для формул являются число символов переменных, входящих в формулу (называемое сложностью формулы), и глубина формулы. Сложность формулы можно интерпретировать как ее «стоимость», а глубину — как время ее вычисления, при условии, что все вычисления можно производить параллельно. Очевидным способом построения оптимальной формулы является перебор, но на практике такой метод не может быть использован в силу экспоненциального роста объема вычислений от числа переменных заданной функции. Поэтому важное значение имеет задача построения формул, близких к оптимальным, без использования перебора.

Большое число методов синтеза формул было разработано для конечных систем, состоящих из булевых функций. Для полных базисов асимптотически оптимальные методы синтеза как формул, так и некоторых других классов управляющих систем, были разработаны О. Б. Лупановым¹. Оценки глубины формул в полных базисах были получены в работах С. Б. Гашкова² и С. А.

¹Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия ВУЗов. Радиофизика. Т. 1, № 1, 1958. С. 120-140.

Лупанов О. Б. Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики // ДАН СССР. 128, 3. 1959. С. 464-467.

Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61-80.

Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 63-97.

Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63-97.

Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14, М.: Физматгиз, 1965. С. 21-110.

Лупанов О. Б. О сложности реализации степеней булевой (n, n) -функции // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. С. 59-67.

²Гашков С. Б. О глубине булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 265-268.

Ложкина³. Сложность и глубина формул также изучалась для случая функционально неполных систем функций двужанной и k -значной логики при $k \geq 3$ (см., например, работы А. Б. Угольников⁴, А. Е. Андреева⁵ и А. А. Андреева⁶).

В последнее время все более актуальной становится проблема вычисления функций с помощью распараллеленных вычислений. Поскольку время распараллеленного вычисления формулы прямо пропорционально ее глубине, проблема минимизации таких вычислений сводится к задаче построения по заданной формуле эквивалентной формулы (то есть формулы, реализующей ту же функцию), имеющей наименьшую возможную глубину. Если функцию f можно реализовать над конечной системой функций A формулой глубины не более l , то несложно получить верхнюю оценку $L \leq n^l$ сложности L реализации функции f формулами над A , где n — максимальное число переменных у функций из A . Таким образом, глубина реализации функции формулами над A не может быть меньше по порядку логарифма сложности этой реализации. В случае, если эта нижняя оценка достигается, говорят о равномерности системы A : конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f , реализуемой формулами над A , выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d, \quad (1)$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть сложность и глубина реализации функции f формулами над системой A . Таким образом, равномерные системы функций — это системы, позволяющие распараллеливать оптимальным образом вычисление функций, реализуемых формулами над этими системами.

Пусть $k \geq 2$. Обозначим через E_k множество $\{0, \dots, k-1\}$, а через P_k множество всех функций k -значной логики. Вопросы, связанные с равномерностью систем функций из P_k , изучались во многих работах. В работах В. М. Храп-

³Ложкин С. А. О связи между глубиной и сложностью эквивалентных формул и о глубине монотонных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 269-270.

⁴Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Докл. АН. СССР. 1979. **249**, 1. 60-62.

Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. 1980. Вып. 112.

Угольников А. Б. О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 242-245.

Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 174-176.

⁵Андреев А. Е. О сложности монотонных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1985. Вып. 4. С. 83-87.

Андреев А. Е. О синтезе функциональных сетей // Докт. диссертация. М.: МГУ им М. В. Ломоносова, 1985.

⁶Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 3-7.

Андреев А. А. О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25-30.

ченко⁷ и Ф. Спиры⁸ независимо была доказана равномерность всех конечных полных систем булевых функций. Методы, предложенные в работах В. М. Храпченко и Ф. Спиры, нетрудно перенести на полные системы функций многозначной логики, однако они существенно используют полноту систем. В работе И. Вегенера⁹ установлена равномерность всех конечных систем, порождающих класс M всех монотонных булевых функций. А. Б. Угольниковым¹⁰ установлена равномерность всех конечных систем булевых функций (см. также работу М. Е. Рагаза¹¹). В данной работе также приведен пример систем функций из P_3 , не являющихся полиномиально эквивалентными.

Таким образом, вопрос о равномерности конечных систем функций из P_2 решен полностью, поэтому приобретает актуальность задача исследования равномерности систем функций k -значной логики при $k \geq 3$. Задача о равномерности в P_k является существенно более сложной в связи с тем, что для замкнутых классов булевых функций существует удобное описание, приведенное в работах Э. Поста¹², в то время как для замкнутых классов функций из P_k при $k \geq 3$ описание отсутствует, что связано с существованием принципиальных отличий многозначных логик от двухзначной, в частности, с континуальностью¹³ семейства всех замкнутых классов k -значной логики при $k \geq 3$ и отсутствием описания всех конечно-порожденных классов k -значной логики.

Ряд публикаций посвящен задаче о соотношении глубины и сложности формул над конечными системами функций, порождающими предполные классы в P_k при $k \geq 3$. Полное предикатное описание предполных классов получено в работах И. Розенберга¹⁴. Согласно данному описанию, все предполные клас-

⁷ см. Яблонский С. В., Козырев В. П. Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. Вып. 19а. М.: Изд-во МЭИ, 1997.

⁸ *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525-527.

⁹ *Wegener I.* Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41-42.

¹⁰ *Угольников А. Б.* О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики // VII Всесоюзная конференция "Проблемы теоретической кибернетики": тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета. 1985. С. 194-195.

Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики. Математические заметки, том 42, выпуск 4, октябрь 1987. М.: Наука, 1987. С. 603-612.

¹¹ *Ragaz M. E.* Parallelizable algebras. Archiv fur mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77-99.

¹² *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, № 3. 163-185.

Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princetion-London: London Univ. Press. 1941. 5. 122.

¹³ *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k -значных замкнутых классов не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. 127, 1. С. 44-46.

¹⁴ *Rosenberg I.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. C. R. Acad. Sci. Paris Ser A, 260 (1965), 3817-19.

сы функций в P_k при $k \geq 3$ можно разделить на следующие семейства: классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$; классы функций, сохраняющих разбиения множества E_k , — классы типа $\mathbb{E}$; классы функций, сохраняющих сильно гомоморфные прообразы элементарных h -адических отношений, — классы типа $\mathbb{B}$; классы функций, сохраняющих центральные отношения, — классы типа $\mathbb{C}$; классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$; классы монотонных функций — классы типа $\mathbb{O}$.

Пусть ρ — отношение частичного порядка на E_k , такое, что для любых двух элементов a и b из (E_k, ρ) существуют $\sup(a, b)$ и $\inf(a, b)$. Класс всех функций, сохраняющих отношение ρ , называется классом типа $\mathbb{O}^\#$. Конечно-порожденные предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества ширины 2, называются классами типа $\mathbb{O}_2$. Классы типа $\mathbb{C}$, сохраняющие унарные и бинарные центральные отношения, называются классами типа $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ соответственно.

Равномерность всех конечных систем, порождающих предполные классы в P_3 , анонсирована в работе Л. И. Ахметовой¹⁵. Равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы типов $\mathbb{L}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{O}^\#$, $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ в P_k , установлена в работе Р. Ф. Сафина¹⁶. Кроме того, в этой работе для любого $k \geq 3$ доказано существование равномерных порождающих систем для классов типа $\mathbb{C}$. Для некоторых классов типа $\mathbb{O}_2$ в работе О. С. Дудаковой¹⁷ показано существование в этих классах функции специального вида, поэтому применением метода из работ В. М. Храпченко и Ф. Спиры нетрудно установить равномерность всех конечных систем, порождающих эти классы. В работе Д. Ю. Дудорова¹⁸ анонсирована равномерность порождающих систем некоторых предполных классов монотонных функций в P_k при $k > 7$.

Наряду со свойством равномерности функциональных систем в представленной диссертационной работе изучается ослабленный вариант этого свойства, который называется квази-равномерностью. Конечная система функций A называется квази-равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f , реализуемой формулой над A , выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

¹⁵Ахметова Л. И. О глубине формул для предполных классов трехзначной логики // Методы и системы технической диагностики, выпуск 18. Саратов: Изд-во Саратовского университета.

¹⁶Сафин Р. Ф. О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k -значной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып 13. М. Физматлит. 2004. С. 223–278.

¹⁷Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып 17. М.: Физматлит, 2008. С. 13–104.

¹⁸Дудоров Д. Ю. Материалы X Межд. сем. "Дискр. матем. и ее прилож." М. 2010. С. 18–20.

С задачей нахождения достаточных условий равномерности систем функций связана задача о сравнении базисов. Конечные системы функций A и B , такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2 , что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$L_A^{c_1}(f) \leq L_B(f) \leq L_A^{c_2}(f).$$

Нетрудно доказать, что если системы A и B равномерны, то они являются полиномиально эквивалентными. Из упомянутых выше результатов А. Б. Угольников следует, что все конечные системы булевых функций, порождающие один и тот же замкнутый класс, попарно полиномиально эквивалентны. Им же приведен пример систем функций 4-значной логики, не являющихся полиномиально эквивалентными.

Целью работы является нахождение соотношений между глубиной и сложностью реализации функций многозначной логики в различных базисах посредством исследования равномерности различных систем функций k -значной логики.

Основные методы исследования. В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности методы теории синтеза и сложности управляющих систем и теории функциональных систем, а также разработанные автором новые методы синтеза формул, позволяющие устанавливать равномерность конечных систем функций многозначной логики.

Научная новизна: Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Любая конечная система A функций из $P_{k,s}$, такая, что проекция системы A на множество E_s порождает мажоритарную функцию, равномерна. (через $P_{k,s}$ обозначается множество всех функций k -значной логики принимающих значения из множества $\{0, \dots, s-1\}$).
2. Все конечные системы функций, порождающие предполные классы P_k типа $\mathbb{C}$, равномерны при $k \geq 3$.
3. При $k \leq 7$ все конечные системы функций из P_k , порождающие предполные классы, равномерны.

4. Доказана равномерность конечных систем функций $P_{k,2}$, проекция которых не лежит целиком ни в одном из множеств¹⁹ $O^\infty, I^\infty, K, D, L$.
5. Для конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка специального вида на E_k , получены достаточные условия равномерности и критерий квазиравномерности.
6. Приведены конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$ такие, что $[A] = [A']$, при этом система A равномерна, система A' не равномерна и системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Специальном семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством проф. А. Б. Угольников, проф. Р. М. Колпакова и проф. С. Б. Гашкова (неоднократно в 2010 – 2013 гг.),
2. Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» (г. Москва, 9 – 13 апреля 2012 г.),
3. XI Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (г. Москва, 18 – 23 июня 2012 г.),
4. Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (г. Москва, 8 – 13 апреля 2013 г.),
5. CSEDays. Theory 2013. Algorithms and Complexity (г. Екатеринбург, 29 июня – 1 июля 2013 г.),
6. XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Казань, 6 – 20 июня 2014 г.),
7. Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics (г. Петрозаводск, 15 – 18 сентября 2014 г.).

Публикации. Основные результаты автора опубликованы в 7 работах автора [1-7], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Полный объем диссертации — **94** страницы. Список литературы содержит **69** наименований.

¹⁹Обозначения для замкнутых классов булевых функций взяты из книги: Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. 64 с.

Содержание работы

Во введении приводится обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, и формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе приводятся определения и обозначения, используемые в работе. В частности, даны следующие определения.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция из P_s , такие, что для любого $\tilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\text{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим $\text{pr}_s A = \{\text{pr}_s f \mid f \in A\}$. Множество $\text{pr}_s A$ будем называть проекцией системы A на P_s .

Функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ будем называть мажоритарной, если для любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\alpha, \alpha, \dots, \alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha, \dots, \alpha, \beta, \alpha) = f(\beta, \alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций из P_k обозначим через NA_k .

Подформулы $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ формулы Φ вида $f(\Phi_1, \dots, \Phi_t)$ называются главными подформулами. Формула Φ над конечной системой функций A называется α -формулой, если у каждой подформулы Φ имеется не более одной нетривиальной главной подформулы.

Конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f , реализуемой формулой над A , выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d,$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть минимальная сложность и минимальная глубина реализации функции f формулами над системой A .

Конечная система функций A называется квазиравномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f , реализуемой формулой над A , выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

Конечные системы функций A и B такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2 , что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$(L_A(f))^{c_1} \leq L_B(f) \leq (L_A(f))^{c_2}.$$

Во второй главе приводятся методы доказательства достаточных условий равномерности конечных систем функций многозначной логики.

В первом параграфе приводятся методы, общие для всех систем функций многозначной логики. В частности, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество $[\text{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.

В качестве следствия из данного утверждения с использованием результатов работ Р. Ф. Сафина и С. С. Марченкова²⁰ получены следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть A — конечная система функций из P_k , порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.

Теорема 3. Пусть A — конечная система функций из P_k , где $k \leq 7$, порождающая предполный класс. Тогда система A равномерна.

Теорема 4. Конечная система A функций из $P_{k,2}$ такая, что $\text{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, является равномерной.

Во втором параграфе рассматриваются методы доказательства равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$, проекция которых порождает класс монотонных булевых функций.

В третьем параграфе рассматриваются методы доказательства равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка на множестве E_k , в котором $1 \geq 0$ и остальные элементы попарно несравнимы и несравнимы с 0 и 1.

Приведем необходимые определения. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k,2}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in E_k$. Положим

$$\begin{aligned} M_f^{x_i} &= \{\text{pr}_2 f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) \mid \tilde{\alpha} \in E_k^{n-1}\}, \\ V_f^{x_i} &= \{\tilde{\alpha} \in E_k^{n-1} \mid \text{pr}_2 f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, y, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) \neq 0, 1\}, \\ f|_{x_i}^\beta &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, \beta, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Для произвольных множества $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ и набора $\tilde{\alpha} \in E_k^t$ положим

$$\begin{aligned} f|_{\tilde{\alpha}}^X &= (\dots (f|_{x_{i_1}}^{\alpha_1})|_{x_{i_2}}^{\alpha_2}) \dots |_{x_{i_t}}^{\alpha_t}, \\ M_f^X &= \bigcup_{x \in X} M_f^x, \quad \widehat{M}_f^X = \bigcup_{x \in X} \{M_f^x\}, \end{aligned}$$

²⁰Марченков. С. С. Об id -разложениях класса P_k над предполными классами // Дискрет. матем., 5:2 (1993), 98–110.

$$V_f^X = \{\tilde{\alpha} \in E_k^{n-t} \mid \text{pr}_2 f|_{\{\tilde{\alpha}\}_{x_1, \dots, x_n} \setminus X} \neq 0, 1\}.$$

Будем говорить, что монотонная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$ и набора $\tilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, если существует функция $g(x_1, \dots, x_{n-q}, y_1, \dots, y_r) \in B$, такая, что:

1. для любого $\tilde{\beta} \in V_f^X$ выполнено $\text{pr}_2 g(\tilde{\beta}, \tilde{y}) \notin [\{0, 1\}]$;
2. если $\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\tilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\text{pr}_2 g(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
3. если $\{1, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\tilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\text{pr}_2 g(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
4. если $\widehat{M}_f^X = \{\{0, 1, x\}\}$ и $\tilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\text{pr}_2 g(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in \text{NA}_2$.

Множество функций $f(x_1, \dots, x_n)$, таких, что f обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ относительно замкнутого класса B и набора $\tilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, будем обозначать через $\#_X^{\tilde{\alpha}}(B, n, r)$. Положим

$$\#_X(B, n, r) = \bigcap_{\tilde{\alpha} \in E_k^{|X|}} \#_X^{\tilde{\alpha}}(B, n, r);$$

$$\#(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{X \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \#_X(B, n, r);$$

Будем говорить, что система A монотонных функций из $P_{k,2}$ обладает свойством $\#$, если $A \subset \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$.

Основными результатами параграфа являются следующие теоремы:

Теорема 5. Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.

Теорема 6. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ существует такая функция $g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_r) \in [A]$, что для любого $\tilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено включение $\text{pr}_2 g(\tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in \text{NA}_2$. Тогда система A равномерна.

В третьей главе вводится следующее множество функций:

$$\#_1(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \#_{\{x_i\}}(B, n, r).$$

Будем говорить, что система A монотонных функций из $P_{k,2}$ обладает свойством $\#_1$, если $A \subset \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$.

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d , что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A , эквивалентная формуле Φ , для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Основными результатами главы являются следующие теоремы:

Теорема 7. Пусть A — конечная система функций из P_k такая, что множество всех α -формул над системой A равномерно над A . Тогда система A квазиравномерна.

Теорема 8. Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A .

В четвертой главе приводится пример систем функций из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, одна из которых является равномерной, а другая не является равномерной, из чего, в частности, следует, что эти системы не являются полиномиально эквивалентными. Таким образом, получен пример систем функций 3-значной логики, не являющихся полиномиально эквивалентными. Данное утверждение сформулировано в виде теоремы:

Теорема 9. Существуют такие конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$, что $[A] = [A']$ и

1. система A равномерна,
2. система A' не равномерна,
3. системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

В пятой главе сводятся воедино все результаты работы и доказываются некоторые теоремы, являющиеся следствиями доказанных в первых четырех главах.

В диссертации принята следующая нумерация утверждений: леммы, теоремы и утверждения нумеруются парами чисел — номер главы и номер утверждения, а следствия нумеруются по порядку для каждого утверждения.

Заключение

Дальнейшая разработка темы диссертации включает в себя следующие задачи:

1. Доказательство равномерности систем, удовлетворяющих условию $\hat{\#}_1$, или нахождение системы функций из $P_{k,2}$, являющейся квази-равномерной но не являющейся равномерной.
2. Перенос методов диссертации на классы не монотонных функций $P_{k,2}$.
3. Перенос методов диссертации на произвольные замкнутые классы P_3 .

Благодарности

Основная часть диссертации была выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Борисовича Угольников, которому автор выражает благодарность за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство, обсуждение результатов и внимание к работе автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Р. М. Колпакова. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук О. С. Дудаковой за обсуждение результатов работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Тарасов П. Б. О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 61–64.
2. Тарасов П. Б. О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. 5. 41–46.
3. Тарасов П. Б. Некоторые условия равномерности функций k -значной логики, принимающих значения 0 и 1 // Ученые записки Казанского университета. 2014. № 3. 123–129.
4. Тарасов П. Б. Равномерность некоторых конечных систем функций многозначной логики // Тезисы XI Международного семинара "Дискретная Математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 18 – 23 июня 2012 г.). Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 213 – 215.

5. *Тарасов П. Б.* Several Sufficient Conditions For Uniformity of Finite Systems of Many-valued Logic // CSEDays. Theory 2013 (г. Екатеринбург, 29 июня - 1 июля 2013 г.). С. 47-49.
6. *Тарасов П. Б.* О некоторых необходимых условиях равномерности систем функций многозначной логики // Материалы XVII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 16-20 июня 2014 г.) Под редакцией Ю. И. Журавлева. Казань: Отечество, 2014. С. 232 – 234.
7. *Тарасов П. Б.* Several Necessary Conditions For Uniformity of Finite Systems of Many-valued Logic // Третий Российско-Финский симпозиум по дискретной математике. Расширенные тезисы докладов. (г. Петрозаводск, 15 – 18 сентября 2014 г.) Под редакцией В. В. Мазалова. С. 129–132.