

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего

CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Proceedings of the international conference dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichy

2019


1755



Выдающийся ученый и общественный деятель, ректор МГУ имени М. В. Ломоносова с 1992 года, академик РАН ***В. А. Садовничий***

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции,
посвящённой 80-летию академика РАН В. А. Садовничего

CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Proceedings of the international conference dedicated
to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichy

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2019

УДК 517+ 519+531
ББК 22.162:22.193: 22.19:22.311:22.2
С56

DOI 10.29003/m978-5-317-06111-1

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 19-01-20097 и попечительского Совета МГУ имени М. В. Ломоносова

Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – 824 с.

С56

e-ISBN 978-5-317-06111-1 print-ISBN 978-5-317-06133-3

Книга составлена из коротких заметок, в которых представлены результаты исследований участников международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. В книге представлены 5 направлений математики и механики, в которых активно работал В. А. Садовничий. Эти направления совпадают с названиями секций конференции.

1. Теория операторов и функциональный анализ.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Теория функций и вычислительная математика.
4. Геометрия и математическая физика.
5. Механика и математическое моделирование.

Ключевые слова: теория операторов, спектральная теория, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций, математическая физика, механика, математическое моделирование.

© МГУ имени М. В. Ломоносова, 2019
© Коллектив авторов, 2019
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2019

e-ISBN 978-5-317-06111-1

Организационный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: Т.П. Лукашенко, А.Т. Фоменко, А.А. Шкаликов
Члены комитета: В.В. Александров, Е.Д. Алферова, А.И. Аптекарев, А.А. Владимиров, В.В. Власов, А.А. Левин, Е.С. Карулина, И.С. Ломов, А.Н. Попов, Т.В. Родионов, А.М. Савчук, А.П. Солодов, Я.Т. Султанаев, Д.В. Трещев

Программный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: А.И. Шафаревич, А.А. Шкаликов
Члены комитета: Д.В. Георгиевский, В.Н. Денисов, А.О. Иванов, И.С. Ломов, Т.П. Лукашенко, А.М. Савчук, А.С. Шамаев

Organizing Committee
Chairman: V.N. Chubarikov
Vice chairmen: T.P. Lukashenko, A.T. Fomenko, A.A. Shkalikov
Members: V.V. Alexandrov, E.D. Alferova, A.I. Aptekarev, A.A. Vladimirov, V.V. Vlasov, A.A. Levin, E.S. Karulina, I.S. Lomov, A.N. Popov, T.V. Rodionov, A.M. Savchuk, A.P. Solodov, Ya.T. Sultanaev, D.V. Treschev

Program Committee
Chairman: V.N.Chubarikov
Vice chairmen: A.I. Shafarevich, A.A. Shkalikov
Members: D.V. Georgievskii, V.N. Denisov, A.O. Ivanov, I.S. Lomov, T.P. Lukashenko, A.M. Savchuk, A.S. Shamaev

Содержание

Секция 1. Теория операторов и функциональный анализ **1**

А.Р. Абдуллаев, Е.А. Скачкова, О разрешимости квазилинейного операторного уравнения в резонансном случае 1

О.Г. Авсянкин, О компактности и обратимости операторов типа свертки в пространствах Морри 3

А.Н. Агаджанов, Об универсальных неравенствах для норм в суперрефлексивных банаховых пространствах 5

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков, Негладкие сечения единичного шара пространства $C(Q)$ 8

А.Б. Антоневич, А.Н. Бузулуцкая, Симметрии конфигураций в квазирешетках 9

С.Н. Асхабов, Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью 11

А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов, Задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида 14

Б.Б. Беднов, О точках Штейнера в пространстве Линденштраусса 18

Александр А. Беляев, Аналитические продолжения мер на бесконечномерном пространстве 20

Алексей А. Беляев, Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и Лизоркина–Трибеля 23

Б.Т. Билалов, О базисности возмущенной системы экспонент в пространствах типа Морри 26

Н.А. Бокаев, Ж.М. Онербек, Об ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем 28

Н.Ф. Валеев, Об обратных спектральных задачах с неполными данными 31

В.Б. Васильев, Эллиптические операторы, уравнения и краевые задачи 34

А.А. Владимиров, Угловые расширения операторных матриц . . . 36

В.Е. Владыкина, Спектральные асимптотики задачи Штурма–Лиувилля при минимальных условиях на гладкость коэффициентов 38

В.В. Власов, Спектральный анализ операторных моделей линейной вязкоупругости 41
Т.А. Гарманова, Явный вид точных констант в неравенствах типа Маркова – Фридрихса – Колмогорова 43
В.Л. Гейнц, Обратная задача о резонансах для уравнения Шредингера 45
С.В. Гонченко, А.Д. Козлов, К.Е. Морозов, К.А. Сафонов, Бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых и дискретные аттракторы Шильникова 48
К.С. Елецких, Псевдообобщенный $\binom{\mu}{\nu}$-сдвиг и формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу 50
В.К. Захаров, Т.В. Родионов, Проблема Рисса – Радона – Фреше характеризации интегралов и слабая компактность множеств радоновских мер 52
А.С. Иванов, О применимости метода А. А. Дородницына для вычисления первых собственных значений для струны с сингулярными потенциалом и весом 56
О.А. Иванова, Свертки в сопряженных к весовым пространствам целых функций 58
М. Илолов, Обобщенные дробные производные Лиувилля-Лизоркина и некоторые их свойства 60
Н.С. Иманбаев, О нулях одного класса целых функций, имеющих интегральное представление 63
Х.К. Ишкин, Об устойчивости некоторого класса несамосопряженных операторов 65
С.И. Кадченко, А.В. Пуршева, Л.С. Рязанова, Численный метод решения обратных спектральных задач на геометрическом графе 67
А.С. Калитвин, Фредгольмовость линейных уравнений с частными интегралами в L^p 71
В.А. Калитвин, О спектральном радиусе операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами 74
А.А. Калыбай, Р. Ойнаров, Ограниченность одного класса интегральных операторов из весового пространства Соболева в весовое пространство Лебега 76
Б.Е. Кангужин, Изменение конечной части спектра оператора Лапласа за счет дельта-образных возмущений 78
Н.Н. Конечная, Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями 80
А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, О базисности системы корневых функций задачи с наклонной производной для оператора Лапласа 82
Л.К. Кусаинова, Я.Т. Султанаев, Г. Мурат, Аппроксимативные оценки для одного дифференциального оператора в весовом гильбертовом пространстве 85
З.А. Кусраева, О продолжении положительных операторов 88

А. А. Лобода, Методы получения представлений решений стохастических уравнений Шредингера 91
Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Одномерное преобразование Бесселя четных и нечетных функций 94
А.С. Макин, О базисности спектральных разложений, отвечающих оператору Дирака с регулярными краевыми условиями 96
А.С. Мигаева, А.В. Перескоков, Асимптотика спектра атома водорода в электромагнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров 99
К.А. Мирзоев, Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов 102
Е.Д. Нурсултанов, Об интерполяционной теореме Марцинкевича . 105
А.В. Павлов, Преобразование Лапласа и преобразование Фурье . . 106
А.С. Печенцов, По следам В.А. Садовничего 109
С.С. Платонов, Гармонический анализ Фурье – Якоби и некоторые задачи теории приближения функций 112
В.Е. Подольский, Формула регуляризованного следа для возмущенного гармонического осциллятора 115
Д.М. Поляков, Спектральные асимптотики для дифференциального оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами 117
В.В. Рыжиков, Меры динамического происхождения с необычными свойствами 120
В.С. Рыхлов, Кратная полнота корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями 122
А.М.Савчук, И.В.Садовничая, О свойствах операторной группы, порождаемой одномерной системой Дирака 125
М.А. Садыбеков, О базисности корневых функций краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля с симметричным потенциалом 129
К.К. Садыкова, Н.Т. Тлеуханова, Об операторе свертки в анизотропных пространствах Никольского–Бесова с доминирующей смешанной производной 132
В.Ф. Салманов, В.С. Мирзоев, Базисность системы экспонент в Grand- пространствах Соболева 134
Т.А. Сафонова, Об интегральном представлении полилогарифмов и ассоциированных с ними функций 136
В.Н. Сивкин, О базисности собственных функций возмущений самосопряженных операторов 139
Н.А. Сидоров, О параметрических семействах разветвляющихся решений нелинейных уравнений в условиях сплетения 142
Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Спектральные свойства дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами 143
Ю.А. Тихонов, О классической разрешимости системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей в теории вязкоупругости 146

Е.Т. Шавгулидзе, А.К. Кравцева, Асимптотические разложения интегралов Фейнмана по пространству траекторий 148
С.Н. Туманов, Теорема полноты системы собственных функций оператора Шрёдингера с комплексным степенным потенциалом 149
З.Ю. Фазуллин, Фомулы следов ограниченных возмущений двумерных модельных дифференциальных операторов 151
И.Д. Цопанов, А.К. Баззаев, Регуляризованные следы для возмущений спектрального оператора. Метод Галеркина-Петрова вычисления собственных значений. 154
М.Ш. Шабозов, О неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных в L_2 157
И.А. Шейпак, Точные оценки производных четного порядка в пространствах Соболева 160
Р.Н. Ярметова, Дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами 162
A.R. Aliev, On the solvability in a weight space of a boundary-value problem for a class fourth-order operator-differential equations . 164
N.V. Artamonov, On the solvability of the operator Riccati equation in reflexive Banach space 166
A.V. Arutyunov, S.E. Zhukovskiy, On global inverse function theorems 167
A. Asanov, Z.A. Kadenova, Uniqueness of solutions for one class of Fredholm – Stieltjes equations of the first kind with tho variables 169
D. Borisov, On spectrum of quadratic operator pencil with small periodic $\mathcal{PT}$-symmetric perturbation 172
A.G. Chechkina, Operator estimates for problems with oscillating Steklov boundary condition 174
V. Chilin, M. Muratov, J. Pashkova, Dominated ergodic theorem in symmetric spaces on infinite continuous measure space 176
V.A. Dubravina, Feynman approximations for solutions to second-order parabolic equations on some ramified manifolds 178
F.A. Guliyeva, S.R. Sadigova, On approximation by shift operators in Morrey type spaces 180
J.J.Hasanov, Singular integral operators and their commutators on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent . . . 181
S. Iliadis, On actions of spaces continuously containing topological groups 183
M.I. Ismailov, V.Q. Alili, On basicity of the system of exponents and trigonometric systems in grand-Lebesgue spaces 185
Z. Kadelburg, Spectral function asymptotics of differential operators . 186
E.S. Karulina, Oscillation properties of one fourth-order problem with a spectral parameter in boundary conditions 186
B.B. Koca, Spectral properties of Toeplitz operators 187
M. Kukushkin, On spectral properties of the m-accretive operator transform 188
I.V. Melnikova, Semigroup and distribution methods in studying abstract stochastic problems 189
S.S. Mirzoev, S.F. Babayeva, On a double-point boundary value problem for a second order operator-differential equation 191

A.M. Musayev, Oscillatory integral operators and their commutators in modified Morrey spaces with variable exponent 192
A.S. Osipov, Remarks on commuting Jacobi type difference operators 194
N.N. Shamarov, Kolmogorov integral and Fock approaches to Weyl second quantization 197
O.G. Smolyanov, Transformation of Feynman path integrals and quantum anomalies 200
V.D. Stepanov, Characterization of associate function spaces and principle of duality 201
S.M. Tashpulatov, The structure of essential spectra and discrete spectrum of five-electron systems in the Hubbard model. Quartet state202
V.A. Yurko, Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with complex weights 205

Секция 2. Дифференциальные уравнения 207
М.Ф. Абдукаримов, С.Х. Мирзоев, О существовании решения одной задачи граничного управления, связанной с нагруженным уравнением 207
А.В. Аксенов, Инвариантное свойство функции Римана 209
И.В. Асташова, О типичности и нетипичности степенного поведения blow-up решений нелинейных уравнения типа Эмдена – Фаулера высокого порядка в зависимости от спектра порожденного им якобиана 212
Е.А Бадерко, М.Ф. Черепова, О единственности в классе Гёльдера решения задачи Дирихле для параболических систем в полуограниченной области на плоскости 215
Ш.А. Балгимбаева, Ограниченность некоторых классов периодических псевдодифференциальных операторов 217
Е.А. Барабанов, В.В. Быков, Обобщение примеров Перрона и Виноградa неустойчивости показателей Ляпунова на линейные дифференциальные системы с параметрическими возмущениями 220
С.И. Безродных, Аналитическое продолжение гипергеометрической функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ 223
А.В. Болтачев, А.Ю. Савин, Об одном классе фредгольмовых краевых задач для волнового уравнения с данными на всей границе 227
Е.Е. Букжалёв, Применение метода асимптотических итераций к одному сингулярно возмущенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка 229
В.Ф. Бутузов, О сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения 232
А.Н. Ветохин, Дескриптивный тип множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра 234
В.И. Власов, Асимптотика и метод решения уравнения Пуассона в областях с узкой щелью 236

В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский, Проблема нормальных движений маятника с трением в шарнире и полостью, частично заполненной идеальной жидкостью 240

Н.П. Волков, Управление переходными процессами в одной модельной задаче динамики реактора 243

А.А. Гималтдинова, Спектральные задачи с нелокальными условиями со знакопеременным весом 246

Ю.В. Гласко, О геометрическом методе решения некоторых краевых задач 247

Н.Л. Гольдман, Некоторые новые постановки нелинейных задач для параболического уравнения 249

В.И. Горбачев, О приближенном решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами 252

В.Н. Денисов, О скорости стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с растущими коэффициентами . . 256

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, М.Г. Ергалиев, Об одной граничной задаче теплопроводности и связанном с ней вырождающемся интегральном уравнении типа Абеля второго рода . . 258

С.А.Довбыш, Квазислучайные движения и неинтегрируемость в системах с группой симметрий S^1 261

А.В. Егорова, О вычислении средней временной выгоды для эксплуатируемой популяции 264

Н.В. Зайцева, Начально-граничные задачи для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом 268

Г.А. Закирова, Обратная спектральная задача для дифференциального оператора четвертого порядка 270

Е.П. Иванова, О коэрцитивности возмущенных дифференциально-разностных уравнений 273

М.Ю. Игнатьев, О задаче рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью 275

Е.В. Игонина, Об исследовании устойчивости системы управления маятникового типа 278

М. Исмати, Н.М. Исматов, О почти-периодичности решения четвертой (пятой) смешанной задачи для системы уравнений Ламе 280

Б.Т. Калимбетов, В.Ф. Сафонов, Интегро-дифференциальные сингулярно возмущенные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами 282

Т.Ш. Кальменов, Н. Кахарман, Отсутствие конечного спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений . 284

В.Л. Камынин, Об обратных задачах одновременного определения младших коэффициентов в параболическом уравнении 286

О.Х. Каримов, Коэрцитивная разрешимость нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве 288

Ш.Г. Касимов, У.С. Мадрахимов, Об однозначной разрешимости обобщенного аналога начально-граничной задачи колебаний балки, один конец который заделан, а другой шарнирно закреплен, в классах Соболева в многомерном случае 290
И.С. Кащенко, О поведении решений уравнения с двумя большими запаздываниями 293
А.И. Кожанов, Краевые задачи для квазигиперболических уравнений 295
Л.М. Кожевникова, О решениях эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей и данными в виде меры в пространстве $\mathbb{R}^n$ 296
Ю.А. Комаров, А.Б. Куржанский, Векторный вариант гамильтонова формализма 299
А.Н. Конёнков, Разрешимость задачи Дирихле для параболической системы на плоскости 302
М.В. Коровина, Проблема Пуанкаре. Асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек . . 304
Б.Д. Кошанов, Об обобщенной задаче Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости 307
М.Н. Кузнецова, Интегрируемые квазилинейные двумеризованные цепочки и характеристические алгебры 309
А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Локальные аттракторы уравнения Кана–Хиллиарда 312
А.Н. Кучкарова, Построение системы собственных функций задачи Трикоми–Неймана для вырождающегося оператора смешанного типа 314
А.С. Леонов, Апостериорная оценка точности нахождения источника в обратных задачах для линейных уравнений в частных производных 316
А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова, О нелокальных подстановках для уравнений Лиувилля 319
Ф.Х. Мукминов, О корректности смешанной задачи для анизотропного параболического уравнения с диффузной мерой . . 321
А.Б. Муравник, Некоторые сингулярные неравенства, возникающие в моделях нейросетей: глобальная разрешимость 324
Н.Т. Орумбаева, А.Б. Кельдибекова, Разрешимость периодической краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка 325
Г.С. Осипенко, Аппроксимация эргодических мер 329
К.Н. Оспанов, О максимальной регулярности эллиптического уравнения со смещением 332
С.Е. Пастухова, Усреднение максимальных монотонных операторов степенного роста с осциллирующим показателем 332
С.В. Пикулин, Сходимость решений квазилинейного эллиптического уравнения в области с шаровой полостью 336
Е.В. Полежаева, Н.Т. Левашова, Д.И. Кузнецова, Стабилизация решения вида фронта задачи реакция-диффузия-адвекция . . 338

И.П. Половинкин, М.В. Половинкина, А.Л. Мугланов, О двухточечных формулах средних значений для эллиптических уравнений в неевклидовых пространствах 341
А.И. Прилепко, Оптимальное управление и принцип максимума в (B) – пространствах 343
Л.С. Пулькина, О некоторых условиях разрешимости нелокальных задач для гиперболических уравнений 345
Н.А. Раутиан, Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами 347
Л.И. Родина, Оценка промыслового дохода в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса 349
К.Б. Сабитов, Начально-граничная задача для трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа 352
Ж. Сартабанов, А.А. Кульжумиева, Многопериодическое решение полулинейной D_e-системы 355
И.Н. Сергеев, Устойчивость решений дифференциальных систем по Ляпунову и по Перрону 358
С.Н. Сидоров, Краевые задачи для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа 361
П.М. Симонов, О теореме Боля–Перрона о существовании пределов решений для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием 364
С.М. Ситник, О композиционном методе в теории операторов преобразования 367
В.В. Соловьев, Разрешимость обратной задачи определения источника с компактным носителем в уравнении теплопроводности 369
Б.Х. Турметов, О некоторых нелокальных краевых задачах с граничными операторами дробного порядка 371
А.К. Уринов, К.Т. Каримов, Задача типа задачи Дирихле в полубесконечном параллелепипеде для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами 373
А.В. Филиновский, Асимптотическое представление первого собственного значения задачи Робена 375
А.Р. Хакимова, Об одном методе построения пары Лакса 378
А.Р.Халмухамедов, Э.И.Кучкоров, К.К.Тургунов, О спектральных разложениях функций из класса С.М. Никольского по собственным функциям оператора Шрёдингера в трехмерной области 380
Г.А. Чечкин, О сите Стеклова 382
Л.Г. Шагалова, Кусочно-линейное минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби с неоднородным гамильтонианом . . 385
М.В. Шамолин, Интегрируемые динамические системы с диссипацией со многим числом степеней свободы 387
Э.Л. Шишкина, Метод решения дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя 390
М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов, Приближенные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий 394

A.T. Assanova, Z.M. Kadirbayeva, On the solvability of periodic problem for loaded pseudoparabolic equation of fourth order 396
S.A. Buterin, M.A. Malyugina, C.-T. Shieh, An inverse spectral problem for functional-differential pencils with delay 399
V.A. Galkin, Microlocal geometry makes global structures in porous medium 402
V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, A. Ukhlov, Conformal spectral estimates of the Dirichlet-Laplacian 404
K. Imanberdiyev, A. Kassymbekova, On stabilization problem for a loaded heat equation: the two-dimensional case 405
G. Kurina, On projector approach to constructing asymptotic solution of initial value problems for singularly perturbed systems in critical case 408
N. Nefedov, The periodic solutions with an interior layer of Burgers type equations with modular advection: asymptotic approximation and asymptotic solutions of some inverse coefficient problems 410
V.S. Serov, Spectral problems for elliptic operators with singular coefficients 412
A.G. Yagola, A posteriori error estimation for solutions of ill- posed problems 415

Секция 3. Теория функций и вычислительная математика 417

Е.С. Алексеева, А.Э. Рассадин, Новые аппроксимации для полного эллиптического интеграла 3-го рода 417
Ю.А. Алхутов, М.Д. Сурначёв, О регулярности $p(x)$-гармонических функций с измеримым показателем p 420
Г.А. Армеев, Г.М. Кобельков, А.В. Кудрявцев, М.А. Ложников, В.Н. Новоселецкий, А.К. Шайтан, К.В. Шайтан, Распознавание дифракционных изображений единичных частиц в экспериментах на рентгеновских лазерах 423
Е.А. Асташов, О классификации простых ростков эквивариантных функций 425
А.О. Багапш, О граничном поведении решений сильно эллиптических систем на плоскости 429
М.Н. Бахшалыева, Квадратурные формулы для логарифмических потенциалов простого и двойного слоев 432
А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов, О восстановлении функции, заданной интегралами по семейству парабол 434
Е.И. Бережной, Суммы и пересечения пространств Морри 437
Т.М. Вуколова, Б.В. Симонов, Оценки норм одного класса двойных рядов 440
В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий, О сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов знакопеременных функций 444
А.С. Гаспарян, Формулы типа Бине–Коши для многомерно-матричных деревьев 447
С.Ю. Гоголева, А.Х. Ишмаметов, Решения плохо обусловленных задач наименьших квадратов с разреженными матрицами на основе метода регуляризации с применением стратегии Марковица 450
В.М. Головизнин, Б.Н. Четверушкин, Балансно – характеристические схемы для уравнений параболического типа 453
Б.И. Голубов, С.С. Волосивец, Обобщенная двоичная производная и равномерная сходимость ее ряда Фурье–Уолша 454

А.В. Звягин, Г.М. Кобельков, М.А. Ложников, О численной стабилизации нестационарных задач математической физики . . 456
С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков, Алгоритмы решения многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и В.А. Марченко 458
С.Н. Копылов, Влияние масштабных функций на свойства интеграла Хенстока–Курцвейля 461
А.А. Корнев, О теореме Адамара–Перрона и методах типа дефляции для стабилизации нелинейных нестационарных процессов 462
Н.Г. Корыткин, П.Г. Корыткин, Построение градуировочных характеристик средств измерений методом максимума компактности, его автоматизация и программная реализация 463
О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов, Области однолистности некоторых классов голоморфных отображений круга в себя 465
М.Р. Лангаршоев, Точное неравенство типа Джексона в весовом пространстве Бергмана 468
С.Ф. Лукомский, Нехааровские вейвлеты на нульмерных группах . 470
С.Г. Мерзляков, С.В. Попенов, Интерполяция суммами рядов экспонент и глобальная голоморфная задача Коши для операторов свертки 473
С.И. Мустафина, В.А. Михайлов, Т.А. Михайлова, Об использовании распределения частиц по времени пребывания в задаче моделирования процесса сополимеризации в каскаде реакторов 477
К.А. Оганесян, Мера положительности суммы невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ 480
Б.П. Осиленкер, О мультипликаторах рядов Фурье по многочленам, ортогональным в континуально-дискретных пространствах Соболева 482
А.Г. Петров, Численные схемы без насыщения для полигармонического уравнения 485
А.Ю. Попов, Экстремальная задача о наибольшем значении минимума модуля аналитической функции на окружности 489
М.К. Потапов, Б.В. Симонов, Конструктивные характеристики дробных модулей гладкости 491
А.В. Прошкина, О некоторых аналогах теорем Хаусдорфа–Юнга и Пэли–Винера для преобразований Фурье быстро убывающих функций 494
З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов, О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой 498
А.М. Седлецкий, О минимальности и неполноте системы экспонент в весовых пространствах на полупрямой и на прямой 502
Т.Ю. Семенова, Оценка остаточного члена асимптотического разложения интеграла Фейнмана 504
П.А. Терехин, Системы сжатий и сдвигов в симметричных пространствах 507
Н.Т. Тлеуханова, А. Бахыт, О тригонометрических множителях в весовых пространствах 509

Ю.А. Фарков, О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитических в окрестности компактного множества 511
Г.В. Федоров, О классах периодических функциональных непрерывных дробей в эллиптических полях 514
Ш.А. Хайруллоев, Теорема о нулях производной функции Харди . 517
А.В. Цветкова, Пара лагранжевых многообразий и асимптотика полиномов Эрмита 520
Е.В. Чижонков, О численном моделировании градиентных катастроф в задачах, связанных с плазменными колебаниями . . . 522
В.Г. Чирский, Метод Зигеля–Шидловского в прямом произведении p-адических полей 524
И.А. Шакиров, Асимптотические формулы для фундаментальных характеристик полинома Лагранжа, определенного в нечетном числе узлов 525
М.А. Шишленин, С.И. Кабанихин, Регуляризация задачи продолжения решений уравнений математической физики с данными на части границы 528
S. Artamonov, Approximation by generalized sampling series and generalized moduli of smoothness 532
R.R. Ashurov, Generalized localization for spherical partial sums of multiple Fourier series 535
G.A. Kalyabin, On a special sequence of minimal integers with locally maximal Gronwall numbers 537
Ž. Pavićević, On the constancy of continuous functions and their applications 540
D. Suragan, Geometric Hardy and Hardy-Sobolev inequalities on stratified Lie groups 542
J. Šušić, Extremums of vector-valued functions of several real variables 544

Секция 4. Геометрия и математическая физика 545
Ш.А. Алимов, А.В. Юлдашева, О разрешимости уравнения с сингулярным ядром, связанного с перидинамической моделью . . 545
А.И. Аллилуева, Конические лагранжевы поверхности и асимптотические решения уравнений релятивистской газовой динамики 547
А.Ю. Аникин, Й. Брюнинг, С.Б. Куксин, Квазиклассическая асимптотика стационарных решений псевдодифференциальных уравнений с нетривиальным субглавным символом 548
С.В. Богомолов, Иерархиии моделей в математической физике . . 549
А.А. Борубаев, О равномерно перистых пространств и равномерно совершенных отображениях 553
Б.О. Волков, Уравнения Лапласа для лапласианов Леви и инстантоны на многообразии 556
В.З. Гринес, О топологии многообразий, допускающих структурно устойчивые каскады с регулярной и хаотической динамикой . 559
Е.Я. Гуревич, О включении в поток каскадов Морса – Смейла и их топологической классификации 561
В.А. Кибкало, Биллиарды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем 563

А.С. Мищенко, Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях и геометрическое описание когомологий Хохшильда групповых алгебр 566
В.Е. Назайкинский, Асимптотики спектральных задач, связанные с биллиардами геодезического потока на торе Лиувилля с вырождающейся на границе метрикой 569
А.Я. Нарманов, О. Касимов, О геометрии множества орбит векторных полей Киллинга 570
О.А. Нарманов, Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности 573
Г.В. Носовский, А.Ю. Чекунов, Геометрическое кодирование цифровых изображений 575
В.А. Павленко, «Квантование» одной гамильтоновой системы Кимуры 577
В.В. Палин, Геометрические решения задачи Римана для одного класса нестрого гиперболических систем (случай волны разрежения) 578
Ф.Ю. Попеленский, Комбинаторный поток Риччи на поверхностях для метрик упаковок кругов с вырождениями 581
И.Х. Сабитов, Бесконечно малые изгибания поверхности вращения с уплощением бесконечного порядка в полюсе 584
Б.И. Сулейманов, Изомонодромное квантование первого и второго уравнений Пенлеве посредством автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы 586
А.Е. Теретёнков, Квантовая немарковская динамика с несколькими резервуарами 587
А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, Реализация эффектов систем физики и механики интегрируемыми биллиардами. 589
О.Д. Фролкина, Канторовы множества с проекциями положительной размерности 592
А.П. Хромов, Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения 593
А.И. Шафаревич, Лапласианы и волновые уравнения на двумерных многоганниках 594
Ю.В. Шеретов, О трёх классах точных решений стационарной квазигидродинамической системы 595
А.И. Штерн, Условия непрерывности для конечномерных локально ограниченных представлений связных локально компактных групп 596
A.A. Davydov, Yu.A. Skinder, Controllability of dynamic inequalities on two dimensional manifolds and its stability 597
S. Mayburov, Nuclear decay oscillations and nonlinear Schroedinger equation 598
A.K. Motovilov, Friedrichs – Faddeev model: Complex deformation and resonances 601
K.K. Nandi, R.N. Izmailov, Relative time delay due to frame dragging in the weak field of the Spinning Black Hole 604

Yu. Shestopalov, Resonances, complex waves, and inverse scattering problems 607

Секция 5. Механика и математическое моделирование 609

М.М. Алхъенди, Я.Ю. Ларина, О существовании асимптотически устойчивых множеств в модели биологического контроля численности популяции вредителей 609

Д.А. Балашов, Устойчивость стационарных движений гиростата . 612

В.Б. Беднова, Распределение температуры при внезапном нагреве поверхности неоднородного полупространства 614

А.А. Бобылев, Моделирование процессов изнашивания топокомпозита при дискретном контакте 616

А.С. Братусь, С.В. Дрожжин, Математические модели эволюции репликаторных систем 619

Г.Л. Бровко, Системы отсчета в классической механике деформируемых тел 622

С.А. Будочкина, В.М. Савчин, О симметрийном анализе систем с бесконечным числом степеней свободы 626

А.А. Буров, В.И. Никонов, Эквипотенциальные поверхности малых небесных тел с нерегулярным распределением масс . . . 628

В.В. Вакулюк, Исследование определяющих соотношений Победри в нелинейной теории вязкоупругости 631

В.И. Ванько, И. Ньютон и А.Н. Крылов: аэродинамическая задача 635

Ю.В. Василевский, Метод расчета течений несжимаемой жидкости в областях с меняющимися во времени границами 637

Е.А. Веденеева, О.Э. Мельник, Автомодельное решение задачи о растекании неньютоновской жидкости с учетом проскальзывания по подстилающей поверхности. Приложение к вулканическим извержениям 639

А.В. Вершинин, К.М. Зингерман, Д.А. Коновалов, В.Ан. Левин, Численное моделирование в CAE Fidesys процесса аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках 642

И.И. Вигдорович, Спектр затухающей двумерной автомодельной турбулентности 647

А.В. Влахова, А.П. Новодерова, Занос колесного аппарата при попадании на «микст» 649

В.Е. Волков, А.И. Рубинштейн, Колебания неоднородных нагруженных пластин 652

А.А. Гавриков, О решении краевых задач на собственные значения для линейных гамильтоновых систем 654

Д.В. Георгиевский, Эволюция возмущений, налагаемых на нестационарный сдвиг среды Бингама 657

А.В. Гладун, Частичная стабилизация стационарных движений спутника со спарками гиродинов 659

А.Н. Голубятников, Д.В. Украинский, Точные аналитические решения уравнений газовой динамики 661
И.Г. Горячева, Математические модели механики дискретного контакта 663
В.А. Громов, Предсказание потери устойчивости цилиндрической оболочки: прямые и обратные задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана 666
С.Ю. Доброхотов, Операторные пучки и простые решения задачи о волнах на поверхности жидкости в рамках линейной гидроупругой модели 669
В.П. Епифанов, Особенности контактного разрушения льда 670
Н.А. Зайцев, Б.В. Критский, Расчет двухфазных течений среды Ван дер Ваальса в модели диффузного интерфейса локальным разрывным методом Галеркина 672
Э.Б. Завойчинская, О стохастической теории усталостного масштабно-структурного разрушения металлов 676
Д.Д. Захаров, Точные неотражающие граничные условия в упругих волноводах 679
А.В. Звягин, А.А. Лужин, А.А. Шамина, Трехмерные трещины в упругом теле 683
А.А. Зобова, Асимптотическое разделение движений при качении с проскальзыванием вязкоупругого цилиндра 685
А.Г. Калугин, О механизме ориентационной неустойчивости в нематических жидких кристаллах 688
А.В. Карапетян, К.А. Катасонова, Динамика мобильного робота 690
А.Б. Киселев, Точные решения одномерных динамических задач со сферической и цилиндрической симметриями для несжимаемых вязкопластической среды и вязкой жидкости. Обобщенная задача Забабахина 693
Л.А. Климина, А.М. Формальский, Трехзвенный шарнирный механизм как модель человека на качелях 696
Д.Ю. Князьков, Т.Ю. Фигурина, Периодические режимы прямолинейного движения системы двух тел 699
В.Д. Котелкин, Л.И. Лобковский, Геодинамика континентальных окраин и модель эволюции Арктического региона 702
М.Д. Ковалёв, О понятии шарнирного механизма и уточнениях теоремы Кемпе 705
Е.И. Кугушев, Т.В. Сальникова, С.Я. Степанов, Возможные модели формирования планетарных систем 708
Н.В. Куликовская, Применение теории марковских процессов для обработки экспериментов с волосковыми клетками датчиков вестибулярной информации 711
С.А. Кумакшев, Эволюция стационарных течений вязкой жидкости в плоском диффузоре 714
В.Ан. Левин, К.М. Зингерман, А.В. Вершинин, Д.А. Коновалов, Многократное наложение конечных упругих деформаций. Аддитивные технологии 718

А.М. Локощенко, Л.В. Фомин, Ю.Г. Басалов, В.С. Агабабян, Моделирование ползучести металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии 721
Б.Я. Локшин, Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов, О винтовых движениях тела в сопротивляющейся среде 724
В.Т. Лукашенко, Ф.А. Максимов, Математическое моделирование совместного полета тел с расчетом соударений 727
С.А. Лурье, С.В. Маковский, Е.Д. Лыкосова, Об аномальных демпфирующих свойствах композитов с вязкоупругими покрытиями 730
А.М. Мамонов, В.В. Терауд, Экспериментальное исследование локализации деформаций в титановых образцах с и без влияния водородного охрупчивания при ползучести 731
С.А. Маслов, В.Л. Натяганов, Обратные задачи идентификации роли электромагнитных факторов в процессах формирования торнадо 732
А.И. Матасов, Обоснование метода скаляризации 735
В.М. Мирсалимов, Оптимальное проектирование волокнистых композитов 737
Е.А. Михайлов, И.Н. Сибгатуллин, Динамо в торе и связанные с ним турбулентные движения 738
В.М. Морозов, В.И. Каленова, О некоторых новых классах линейных нестационарных динамических систем, содержащих управление и измерения 739
С.В. Нестеров, Л.Д. Акуленко, Влияние дефектов на спектры собственных частот и формы колебаний 741
М.У. Никабадзе, А.В. Романов, О некоторых вопросах микрополярной теории призматических упругих тел 744
М.С.Никольский, Об оценивании множеств достижимости управляемых объектов 747
А.О. Овчинникова, Т.И. Савелова, Разработка рекомендаций для проведения EBSD измерений при изучении текстуры поликристаллов 749
Д.А. Пожарский, Н.Б. Золотов, Асимптотические методы в контактных задачах для упругих цилиндров 752
С.С. Постнов, Особенности задач оптимального управления линейными системами дробного порядка в зависимости от типа оператора дифференцирования 754
Е.А. Постнова, Анализ динамики линейных систем дробного порядка с управлением 757
Т. Рашидов, Б. Мардонов, Е.В. Ан, Действие поверхностных волн Релея и Стоунли на подземный трубопровод 760
О.С. Розанова, М.К. Турцынский, Н.В. Винонен, Полная классификация положений равновесия движений с однородной деформацией на вращающейся плоскости 763
В.В. Сазонов, С.В. Сазонова, И.А. Самыловский, А.С. Сапелкин, Инструментальная среда планирования космической съемки и сеансов связи со спутниками ДЗЗ 765

Н.Н. Субботина, Н.Г. Новоселова, Построение множества выживания в задаче химиотерапии злокачественных опухолей . . . 767
Р.Н. Тихомиров, Задача о тепловыделении для близко расположенных параллельных проводников 771
А.А. Толченников, Решение двумерного уравнения Дирака с линейным потенциалом и локализованным начальным условием 774
И.О. Фасхеев, Пористые насыщенные среды при конечных деформациях 775
А.А. Федюков, Стабилизация динамической системы с ограничениями на фазовые переменные 777
А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Асимптотические представления решения задачи о поле давления в несовершенно вскрытом нефтегазовом пласте 780
А.В. Хохлов, Анализ и сравнение арсеналов возможностей линейного определяющего соотношения вязкоупругости Больцмана-Вольтерры и нелинейного соотношения Работнова 782
Д.В. Христич, Соотношения нелинейной анизотропной термоупругости 785
Ю.Д. Чашечкин, Математические основания актуальной механики жидкостей 789
А.С. Шамаев, Т.Н. Бобылева, Проблемы математического моделирования слоистых упруго-ползучих сред 792
М.Г. Широбоков, С.П. Трофимов, М.Ю. Овчинников, Методы гомотопии в задачах построения космических траекторий 795
Е.А. Яновская, Об одном обобщении задачи Л. Прандтля о сжатии пластической полосы и его приложении 797
М.В. Яшина, О спектральных свойствах замкнутой бинарной цепочки с детерминированными периодическими правилами разрешения конфликта 798
A.O. Belyakov, A.P. Seyranian, Approximations of the monodromy matrix by averaging method 801
A.N. Galybin, Incomplete BVP of plane elasticity in terms of stress and displacement orientations 803
Указатель авторов 805

Секция 1

Теория операторов и функциональный анализ

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

А.Р. Абдуллаев, Е.А. Скачкова
skachkovaea@gmail.com

УДК 517.988.63

Для квазилинейного операторного уравнения с необратимым линейным оператором (резонансный случай) сформулированы эффективные теоремы существования хотя бы одного решения.

Ключевые слова: квазилинейное операторное уравнение, резонансная краевая задача, степень Брауэра.

Solvability of a quasilinear operator equation at resonance

For a quasilinear operator equation with a noninvertible linear operator (the resonance case), effective existence theorems for at least one solution are established.

Keywords: quasilinear operator equation, boundary value problem at resonance, Browder's degree.

Абдуллаев Абдула Рамазанович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия); Abdullaev Abdula (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Скачкова Елена Александровна, старший преподаватель, Пермский государственный национальный исследовательский университет (Пермь, Россия); Elena Skachkova (Perm State University, Perm, Russia)

Рассмотрим уравнение

$$Lx = Fx + f \tag{1}$$

с линейным ограниченным оператором $L : X \to Y$ и непрерывным (вообще говоря нелинейным) оператором $F : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства и $f \in Y$.

Если краевая задача рассматривается в виде квазилинейного операторного уравнения (1), то в случае необратимости оператора L, задачу принято называть резонансной (или критическим случаем задачи). Эффективные условия разрешимости уравнения (1) в случае резонанса представляют значительный интерес для исследования конкретных классов резонансных краевых задач.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n-мерных векторов $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с действительными компонентами α_i и нормой $|\cdot|$. Пусть $r > 0$. Обозначим через $B(r) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : |\alpha| < r\}$ открытый шар в R^n и пусть $\partial B(r) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : |\alpha| = r\}$ — его граница. Будем предполагать, что $L : X \to Y$ – нетеров оператор неотрицательного индекса. Через $\ker L$ и $\mathrm{im}\, L$ соответственно обозначим ядро и образ оператора $L : X \to Y$. Рассмотрим разложения пространств X и Y в прямые суммы $X = \ker L \oplus X_0$, $Y = \mathrm{im}\, L \oplus Y_0$ и пусть $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ линейные ограниченные проекторы соответственно на $\ker L$ и $\mathrm{im}\, L$. Пусть далее для простоты $\mathrm{ind}\, L = 0$, $n = \dim \dim L$ и $J_1 : \mathbb{R}^n \to \ker L$ — фиксированный изоморфизм.

Рассмотрим вспомогательное отображение $\Phi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определённое для произвольного элемента $z \in X_0$ такое, что из $\Phi_z(\alpha) = 0$ следует, что $F(z + J_1\alpha) \in \mathrm{im}\, L$.

Конкретная конструкция отображения Φ_z зависит от специфики рассматриваемой краевой задачи и, в основном, определяется операторами P, Q и J_1. В частности, это отображение может быть определено равенством $\Phi_z(\alpha) = J_2 Q^c F(z + J_1\alpha)$, где $Q^c = I - Q$ – дополнительный проектор, $J_2 : Y_0 \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм. Для каждого $z \in X_0$ через $\deg(\Phi_z, B(r))$ обозначим степень Брауэра отображения $\Phi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно шара радиуса $r > 0$ с центром в нуле.

Получены новые теоремы существования решения уравнения (1). Эти утверждения основаны на применении схемы исследования резонансных краевых задач, предложенной в работе [1].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*
1) *оператор F — вполне непрерывный;*
2) *существуют $a, b, \gamma \geqslant 0$ и $\gamma < 1$ такие, что $||Fx|| \leqslant a + b||x||^\gamma, x \in X$;*
3) *для каждого $z \in X_0$ существует $r \leqslant d||z||$, $r = r(z) > 0$ такое, что* $\deg(\Phi_z, B(r)) \neq 0$.
Тогда уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение для любого $f \in \mathrm{im}\, L$.*

Многие авторы применяют подобные теоремы существования для исследования на разрешимость периодических краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений и систем.

При применении утверждения теоремы 1 определённые трудности могут быть связны с проверкой условия 3). В этом случае могут быть использованы различные теоремы о степени отображения в конечномерных простран-

ствах (см., например, [2]). Следующее утверждение в этом смысле является более удобным для применения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 и, кроме того, условие*
3') *для каждого* $z \in X_0$ *существует* $r \leqslant d||z||$, $r = r(z) > 0$ *такое, что для всех* $\alpha \in \partial B(r)$ *справедливо неравенство* $< \Phi_z(\alpha), \alpha) > \geqslant < \alpha, \alpha >$.
Тогда уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение для любого* $f \in \operatorname{im} L$.

Литература

1. *Абдуллаев А. Р., Скачкова Е. А.* Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка. // Известия вузов. Математика. №12 (2013), 3-10.

2. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

О КОМПАКТНОСТИ И ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

О.Г. Авсянкин

avsyanki@math.rsu.ru

УДК 517.9

Рассматриваются интегральные операторы свертки в пространствах Морри. Получены достаточные условия компактности произведения оператора свертки и оператора умножения на существенно ограниченную функцию. Для оператора, являющегося суммой тождественного оператора и оператора свертки, получен критерий обратимости.

Ключевые слова: пространство Морри, оператор свертки, компактность, обратимость

On the compactness and invertibility of convolution operators in Morrey spaces

We consider integral convolution operators in Morrey spaces. We obtain the sufficient conditions of compactness for the product of the convolution operator and the operator of multiplication by an essentially bounded function. We also obtain the invertibility criterion of the operator, which is the sum of identity operator and the convolution operator.

Keywords: Morrey space, convolution operator, compactness, invertibility

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18–51–06005–Аз_а, 18–01–00094–А).

Авсянкин Олег Геннадиевич, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, Южный федеральный университет (Ростов–на–Дону, Россия); Oleg Avsyankin (Southern Federal University, Rostov–on–Don, Russia)

1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пространство Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ — это пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty,$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x.

Пространства $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$. Так как $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, $L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то ниже всюду считаем, что $0 < \lambda < n/p$.

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор свертки

$$(H\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Известно (см. [1]), что оператор H ограничен в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

2. Обозначим через M_a оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ выделим два специальных класса функций.

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = 0.$$

Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $\Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$A(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in K} |a(x) - a(x-t)|$$

принадлежит классу $L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$.

Известны достаточные условия предкомпактности множеств, лежащих в пространстве Морри (см. [2]). На этой основе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \lambda < n/p$. Тогда*

1) если $a \in L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$, то операторы M_aH и HM_a компактны в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$;

2) если $a \in \Omega_\infty(\mathbb{R}^n)$, то коммутатор $M_aH - HM_a$ компактен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Подробное изложение результатов этого раздела можно найти в [3].

3. В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Назовем символом этого оператора функцию $c + \widehat{h}(\xi)$, где $\widehat{h}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $h(t)$.

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $0 < \lambda < n/p$. Для того чтобы оператор $cI + H$ был обратим в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$c + \widehat{h}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n,$$

где $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ является коммутативной. Для алгебры $\mathfrak{A}$ строится символическое исчисление, т. е. каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ ставится в соответствие некоторая функция $\sigma_A(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}}^n)$, которую будем называть символом оператора A. На основе исследования пространства максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, доказано, что невырожденность символа $\sigma_A(\xi)$ является необходимым и достаточным условием обратимости оператора A.

Литература

1. *Burenkov V.I., Tararykova T.V.* Young's inequality for convolutions in Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., **7**:2 (2016), 92–99.

2. *Chen Y., Ding Y., Wang X.* Compactness of Commutators for Singular Integral on Morrey Spaces // Canad. J. Math, **64**:2 (2012), 257–281.

3. *Авсянкин О.Г.* О компактности операторов типа свертки в пространствах Морри // Матем. заметки, **102**:4 (2017), 483–489.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ НОРМ В СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Н. Агаджанов

ashot_ran@mail.ru

УДК 517.982.22

В докладе приведены универсальные неравенства для норм в суперрефлексивных банаховых пространствах. Под универсальными неравенствами для норм понимаются неравенства справедливые для произвольной эквивалентной нормы на банаховом пространстве. Полученные неравенства для норм справедливы (при соответствующих значениях параметров) для пространств Лебега, Соболева, Бесова, Лизоркина-Трибеля и др.

Ключевые слова: суперрефлексивное банахово пространство, модули выпуклости и гладкости, финитная представимость

Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings

The report presents universal inequalities for norms in superreflexive Banach spaces. By universal inequalities for norms, we mean inequalities valid for an arbitrary equivalent norm on a Banach space. The obtained inequalities for the norms are convincing (at the corresponding values of the parameters) for the spaces of Lebesgue, Sobolev, Besov, Lizorkin-Triebel, etc.

Keywords: superreflexive Banach space, modules of convexity and smoothness, finite representability

Агаджанов Ашот Николаевич, к.ф.-м.н., Федеральное государственное учреждение РАН ИПУ им. В.А. Трапезникова (Москва, Россия); Ashot Agadzhanov (Trapeznikov Institute of Control Scienses, Russian Academy of Scienses, Moscow)

Среди банаховых пространств суперрефлексивные занимают особое место. Это связано с тем, что важнейшее пространство современной математической физики и функционального анализа, а именно, пространство Лебега L^p и l^p, Соболева W_p^m, Бесова $B_{p,q}^s$, Лизоркина-Трибеля $F_{p,q}$ и др., при соответствующих значениях параметров являются суперрефлексивными.

Этот класс банаховых пространств был впервые введен Р. Джеймсом в начале 70-х годов прошлого века [1].

Приведем необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1. *Банахово пространство Y называется финитно представимым в банаховом пространстве X (finite representation in X), если для любого $\lambda > 1$ и любого конечномерного подпространства $Y_0 \subset Y$ существует изоморфизм $T\colon Y_0 \to X$ такой, что*

$$\frac{1}{\lambda}||y||_Y \leqslant ||T_y|| \leqslant \lambda||y||_Y \qquad \forall y \in Y_0$$

Определение 2. *Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если каждое банахово пространство финитно представимое в X является рефлексивным.*

Назовем модулем выпуклости банахова пространства X

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{1}{2}||x+y||\colon ||x|| = ||y|| = 1, ||x-y|| \geqslant \varepsilon, 0 < \varepsilon \leqslant 2\}.$$

Модулем гладкости банахова пространства X назовем

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{||x+y|| + ||x-y||}{2} - 1\colon ||x|| = 1, ||y|| = \tau, \tau > 0\right\}.$$

Банахово пространство называют равномерно выпуклым относительно нормы $||\cdot||$, если $\delta_x(\varepsilon) > 0$ при $0 < \varepsilon \leqslant 2$.

Банахово пространство называют равномерно гладким относительно нормы $||\cdot||$, если $\lim_{\tau\to 0+}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$.

Пусть X — суперрефлексивное банахово пространство. Назовем неравенство для норм, определенных на X, универсальным если оно выполняется для всех норм эквивалентных заданной норме на X.

Фундаментальное значение в теории суперрефлексивных пространств занимают результаты П. Энфло [2] и Ж. Пизье [3].

П. Энфло доказал, что банахово пространство суперрефлексивно тогда и только тогда, когда на нем может быть определена равномерно выпуклая (равномерно гладкая норма).

Ж. Пизье усилил результат П. Энфло, в том отношении, что на суперрефлексивном банаховом пространстве может быть определена норма $|\cdot|$, модуль выпуклости которой удовлетворяет неравенству $\delta_{||}(\varepsilon) \geqslant L\cdot\varepsilon^q$, где $L > 0$ — константа, $2 \leqslant q < \infty$.

Приведем полученные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $||\cdot||$ *— произвольная норма на суперрефлексивном пространстве* X*. Существует множество мощности континуума, состоящее из равномерно выпуклых норм* $|\cdot|_\Delta$*, которые* Δ*-изоморфны норме* $||\cdot||$*, то есть для любых* $u \in X$ *имеют место неравенства*

$$\frac{1}{1+\Delta}|u|_\Delta \leqslant ||u|| \leqslant (1+\Delta)|u|_\Delta.$$

Лемма 2. *Пусть* $||\cdot||$ *— произвольная норма на* X*. Существует множество мощности континуума, состоящее из равномерно гладких норм* $|||\cdot|||_\Delta$*, которые* Δ*-изоморфны норме* $||\cdot||$*.*

С помощью лемм 1 и 2 может быть доказана основная теорема.

Теорема 1. *Пусть* X *— суперрефлексивное банахово пространство и* $||\cdot||$ *— произвольная норма на* X*. Для любых* $u, v \in X$ *выполняются неравенства:*

$$||\lambda u+(1+\lambda)v|| \leqslant (1+\Delta)(\lambda||u||^{q_\Delta}+(1-\lambda)||v||^{q_\Delta}-W_1(q_\Delta,\lambda)\cdot c_\Delta\cdot||u-v||^{q_\Delta})^{1/q_\Delta}$$

$$||\lambda u+(1+\lambda)v|| \geqslant \frac{1}{1+\Delta}(\lambda||u||^{p_\Delta}+(1-\lambda)||v||^{p_\Delta}-W_0(p_\Delta,\lambda)\cdot d_\Delta\cdot||u-v||^{p_\Delta})^{1/p_\Delta}$$

Здесь $\Delta \in (p-1,1)$, $p = \dfrac{\ln 2}{\ln 2\left(1-\varphi\cdot\delta_{||\cdot||_\Delta}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)}$, $\varphi = \dfrac{22}{5}$ *— константа Фигеля* [4], $c_\Delta = \dfrac{3\cdot\beta\cdot\ln^2 2}{16\cdot\pi^2\cdot\alpha^{q+\Delta}}\cdot\dfrac{\Delta}{(1+\Delta)\cdot 4^{q+\Delta}}$ $(\alpha>\beta>1)$, $d_\Delta = c_\Delta^{\Delta+(1-p)}$,

$$W_0(p_\Delta,\lambda) = \lambda^{p_\Delta}(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^{p_\Delta}, \quad W_1(q_\Delta,\lambda) = \lambda^{q_\Delta}(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^{q_\Delta},$$

$q_\Delta = q+\Delta$, $p_\Delta = p-\Delta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $q = \max\{s\colon l^s$ *фин. представимы в* $X\}$.

Некоторые другие неравенства для норм в суперрефлексивных банаховых пространствах приведены в [5].

Литература

1. *James R.C.* Super-reflexive Banach spaces // Canad. J. Math. **24** (1972), 896-904.

2. *Enflo P.* Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm // Israel J. Math. **13** (1972), 281-288. 3. *Pisier G.* Martingales with values in uniformly convex spaces // Israel J. Math. **20** (1975), 326-350.

4. *Figiel T.* On the moduli of convexity and smoothness // Studia Math., **56** (1978), 121-155.

5. *Агаджанов А.Н.* Геометрия норм и неравенства в суперрефлексивных банаховых пространствах // ДАН, **421**:3 (2008), 295-298.

НЕГЛАДКИЕ СЕЧЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО ШАРА ПРОСТРАНСТВА $C(Q)$

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

alexey.alimov-msu@yandex.ru, igtsarkov@yandex.ru

УДК 517.518

Установлено, что в пространстве $C(Q)$ (Q — хаусдорфов компакт) существует двумерное подпространство, сдвиги которого имеют только негладкие пересечения с единичным шаром пространства.

Ключевые слова: геометрия банаховых пространств, сечение единичного шара

Nonsmooth sections of the unit ball in $C(Q)$

We show that in $C(Q)$ (Q is a Hausdorff compact set), there exists a two-dimensional subspace whose translates intersect the unit ball only by a nonsmooth set.

Keywords: Banach space geometry, section of the unit ball

Дается ответ на следующий вопрос. Существует ли собственное подпространство L пространства $C(Q)$ такое, что пересечение любого его сдвига $L + x$, $x \in B$, с единичным шаром B пространства $C(Q)$ всегда является негладким множеством? Гладкость выпуклого множества (тела $B \cap (L + x)$ в аффинном пространстве $L + x$) понимается в стандартном смысле: выпуклое тело называется гладким, если любая его граничная точка является точкой гладкости, т.е. в ней опорная гиперплоскость к нему единственна.

Ответ на данный вопрос оказывается отрицательным даже для двумерного подпространства L: существует такое двумерное подпространство $L \subset C[0, 1]$, что любой его сдвиг дает негладкое множество при пересечении с единичным шаром пространства. Отметим, что согласно классической теореме Банаха–Мазура единичный шар B пространства $C[0, 1]$ имеет гладкие центрально-симметричные сечения любой размерности, однако в поставленной выше задаче рассматриваются сечения, полученные сдвигом фиксированного подпространства L, так что существующие по теореме Банаха–Мазура гладкие сечения могут оказываются не параллельными подпространству L.

Теорема. *Для любого конечного $n \geqslant 2$ в пространстве $C(Q)$ (Q — хаусдорфов компакт, $\operatorname{card} Q > n$) существует n-мерное подпространство, любой сдвиг которого на вектор p, $\|p\| < 1$, пересекает шар B пространства $C(Q)$ по негладкому телу.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00332-а) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1).

Алимов Алексей Ростиславович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Alimov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia).

Царьков Игорь Германович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor' Tsar'kov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia).

СИММЕТРИИ КОНФИГУРАЦИЙ В КВАЗИРЕШЕТКАХ

А.Б. Антоневич, А.Н. Бузулуцкая
antonevich@bsu.by, anna-glazl@yandex.ru

УДК 517.518

Введены подмножества квази-решетки, названные конфигурациями, которые могут служить моделями расположения атомов в веществе. Получено описание симметрий заданной конфигурации.

Ключевые слова: квазирешетка, симметрия, квазикристалл

On symmetry of configurations in quasi-lattises

The notion of configuration, as a subset of a quasi-lattise is given. A description of non-trivial symmetry of configuranitn obtained.

Keywords: quasi-lattice, symmetry, quasi-cristall

C^*-подалгебра $\mathcal{A}$ в алгебре $CB(\mathbb{R}^m)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ называется *квазипериодической* ранга N, если она порождена конечным числом N экспонент $e^{i2\pi<h_j,x>}, h_j \in \mathbb{R}^m, J = 1, \ldots, N$, где векторы h_j линейно независмиы над полем $\mathbb{Q}$. Как абстрактная C^*-алгебра она изоморфна алгебре $C_1(\mathbb{R}^N)$, состоящей из непрерывных функций на $\mathbb{R}^N$, периодических с периодом 1 по каждой переменной. Но свойства индивидуальных квазипериодических функций существенно отличаются от периодических.

Квазипериодические функции и квазипериодические алгебры представляют особый интерес в связи с многочисленными приложениями, в частности, в теории квазикристаллов [1, 2].

Подгруппа в $\mathbb{R}^m$, имеющая конечное число образующих, называется *квазирешеткой*. Квазирешетка, порожденная векторами h_j, называется *группой частот* рассматриваемой алгебры и обозначается $H(\mathcal{A})$.

Пространство $\mathbb{R}^m$ будем отождествлять с его образом L при заданном вложении $J : \mathbb{R}^m \to L \subset \mathbb{R}^N$. Множество функций

$$\mathcal{A}_L = \{u(x) : u \in C_1(\mathbb{R}^N, x \in L\},$$

являющихся сужениями на L периодических функций, есть квазипериодическая алгебра на $\mathbb{R}^m$, группа частот которой $H(\mathcal{A}_L)$ есть проекция группы $\mathbb{Z}^N$ на L. В частности, если подпространство L *вполне иррационально*, т.е. нет ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^N$, ортогональных к L, то $\mathcal{A}_L$ имеет ранг N.

Любая квазипериодическая алгебра ранга N совпадает с одной из алгебр $\mathcal{A}_L$ при подходящем выборе вложения.

Удобно, следуя [1], при описанной конструкции называть $\mathbb{R}^m$ *физическим пространством*, $\mathbb{R}^N$ — *супер-пространством*.

Антоневич Анатолий Борисович, д.ф.-м.н., профессор, БГУ (Минск, Баларусь); Anatolij Antonevich, (Belarussian State University, Minsk, Belarus)

Бузулуцкая Анна Николаевна, к.ф.-м.н., системный аналитик, СООО "ХайКво Солюшенс"(Минск, Баларусь); Hanna Busulustkaya (HiQo Solutions, Ltd., Minsk, Belarus)

Тогда с процесс, описываемым квазипериодической функцией на $\mathbb{R}^m$, получается сужением на физическое пространство упорядоченного (периодического) процесса, происходящего в суперпространстве. Это часто упрощает исследование.

Особенностью квазикристаллов являтся то, что они обладают симметрией, запрещенной в теории кристалов. В связи этим изучался вопрос о симметрии квазирешеток, а именно об исследовании квазикристаллографических групп, определение которых дано С.П.Новиковым и А.П.Веселовым.

Пусть задана квазирешетка $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$. *Группа аффинной симметрии* квазирешетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ $\widetilde{G}$ есть группа $\widetilde{G}$, состоящая из таких аффинных преобразований $g(x) = Qx + b$ физического пространства $\mathbb{R}^m$, при которых $g(\Gamma) \subset \Gamma$.

Группа симметрии G есть подгруппа в $\widetilde{G}$, состоящая из изометрических преобразований, т.е. у которых матрица Q -ортогональная.

Фактор-группа G/Γ называется *линейной частью* .

Абстрактная группа называется *квазикристаллографической*, если она является группой симметрии какой-нибудь квазирешетки.

Каждая симметрия квазирешетки порождает автоморфизм соответствующей квазипериодической алгебры $\mathcal{A}$, поэтому описание таких симметрий связано с описанием автоморфизмов $\mathcal{A}$[3].

Заметим, что квазирешетка является всюду плотным множеством в $\mathbb{R}^m$ и не может описывать расположение атомов в веществе.

Конфигурацией будем называть подмножество $K \subset \Gamma$, состоящее из проекций на L точек из $\mathbb{Z}^N$, находящихся на расстоянии от L, меньшем заданного $d > 0$. Конфигурации возникают при рассмотрении аппроксимаций квазипериодических $\delta-$ функции, а именно, функция, аппроксимирующая квазипериодическую $\delta-$функции, отлична от нуля только в окрестностях точек из некоторой конфигурации. Конфигурация является дискретным множеством и может служить кандидатом на модель расположения атомов в твердом веществе. В общем случае расположение точек конфигурации не обладает каким-либо порядком, что можно считать моделью аморфного состояния вещества.

Но могут существовать симметрии конфигурации, которые описывают упорядоченность в расположении точек конфигурации.

Теорема 1. *Пусть квазипериодическая алгебра $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^m$ реализована с помощью вложения в $\mathbb{R}^N$ описанным выше образом и пусть K есть конфигурация, соответствующая этой реализации. Нетривиальная симметрия конфигурации K существует тогда и только тогда, когда существует перестановочная матрица U размерности $N \times N$, такая, что L есть подпространство в $\mathbb{R}^N$, инвариантное относительно действия U, на котором действие U нетривиально. При этом симметрия действует как сужение действия U на L.*

Литература

1. *Дынников И. А. Новиков С. П.* Топология квазипериодических функций на плоскости // УМН, **60**:1 (2005), 3-28.

2. *Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А. Садов В. А.* Геометрия квазикристаллов //УМН, **48**:1 (1993), 41-102.

3. *Antonevich A., Glaz (Buzulutskaya) A.* Quasi-peroidic Algebras and Their Physical Automorphisms. In book: Geometric Methods in Physics XXXV, Birkhauser, 2017, P. 3-10.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. Асхабов

askhabov@yanrex.ru

УДК 517.968

Методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) в классе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций изучается интегро-дифференциальное уравнение вольтерровского типа с разностным ядром и степенной нелинейностью. Получены точные априорные оценки для решений этого уравнения. Использование этих оценок позволило доказать глобальную теорему существования и единственности решения. Показано, что решение может быть найдено методом последовательных приближений, для которых указаны оценки погрешности и скорости их сходимости к точному решению.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, степенная нелинейность, метод Белецкого.

Integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity

The integro-differential equation of Volterra type with difference kernel and power nonlinearity is studied by the method of weight metrics (analog of the Bielicki method) in the class of non-negative continuous functions on the positive half-axis. Exact a priori estimates for the solutions of this equation are obtained. The use of these estimates allowed to prove the global theorem of existence and uniqueness of the solution. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations for which the error estimates and the rate of their convergence to the exact solution are given.

Keywords: integro-differential equation, power nonlinearity, Bielicki method.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001).

Асхабов Султан Нажмудинович, д.ф.-м.н., доцент, Чеченский государственный педагогический университет, Чеченский государственный университет (Грозный, Россия); Sultan Askhabov (Chechen Pedagogical State University, Chechen State University of Grozny, Russia)

Основным объектом исследования в данной работе является нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u'(t)dt,\ u(0) = 0,\ x > 0,\ \alpha > 1. \tag{1}$$

На ядро $k(x)$ накладывается условие:

$$k(x) \in C^1[0,\infty),\ k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ k(0) = 0 \text{ и } k'(0) > 0, \tag{2}$$

где $C^1[0,\infty)$ означает множество всех непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ функций.

Решения уравнения (1) разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \{u(x) :\ u(x) \in C^1(0,\infty),\ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1) мы будем рассматривать интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k'(x-t)u(t)dt,\ x > 0,\ \alpha > 1, \tag{3}$$

в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$:

$$Q_0 = \{u(x) :\ u(x) \in C[0,\infty),\ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Доказательство следующей леммы аналогично приведенному в [1, §17].

Лемма 1. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x) \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3), то функция $u(x)$ не убывает и дважды непрерывно дифференцируема при $x > 0$.*

С помощью леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x) \in Q_0^1$ и является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то $u(x) \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3). Обратно, если уравнение (3) имеет решение $u(x) \in Q_0$, то $u(x) \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1).*

Следующая лемма предоставляет точные априорные оценки решения уравнения (3), играющие важную роль при доказательстве основных результатов данной работы (теоремы 1 и 2).

Лемма 3. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u(x) \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (3), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)x\right]^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(x)\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x). \tag{4}$$

Пример ядра $k(x) = a \cdot x$, где $a > 0$ любое число, показывает, что нижняя и верхняя априорные оценки (4) неулучшаемы, так как в этом случае они совпадают и являются решением как интегрального уравнения (3), так и интегро-дифференциального уравнения (1).

Из Леммы 3 следует, что решения интегрального уравнения (3) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}.$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свёртки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Лемма 4. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T.*

Исследование интегрального уравнения (3) будет основано на принципе сжимающих отображений и для его применения нужно построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс:

$$P_b = \{u(x) : u(x) \in C[0,b] \ \text{ и } \ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (4), а $b > 0$ – произвольное число.

По аналогии с методом Белицкого (см., например, [3, с. 218]) введем во множестве функций P_b расстояние по формуле:

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \tag{5}$$

Легко проверить (ср. [1, §17]), что множество P_b с метрикой ρ_b образует полное метрическое пространство.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0,b)$ такое, что

$$k'(c) < \alpha \cdot k'(0). \tag{6}$$

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}. \tag{7}$$

Справедлива следующая лемма (ср. [2]).

Лемма 5. *Пусть функция $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство:*

$$k'(x) \cdot e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{8}$$

где c и β определяются из условия (6) и равенства (7), соответственно.

Теорема 1. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, причем*

$$\rho_b(Tu_2,Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho_b(u_2,u_1), \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in P_b,$$

где число c определяется из условия (6).

Таким образом, на основании принципа сжимающих отображений и теоремы 1, используя связь между уравнениями (3) и (1), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2), то интегродифференциальное уравнение (1) имеет в Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (5). При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q = k'(c)/\big[\alpha \cdot k'(0)\big] < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ есть начальное приближение.

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. —М.: Физматлит, 2009.

2. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math., **36**:1 (1979), 61–72.

3. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. —М.: Мир, 1969.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов

akrambegmatov@mail.ru, zarifjonochilov@mail.ru

УДК 517.946

В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказаны теоремы единственности и существования решения, получены оценки устойчивости и формула обращения в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность решения задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Begmatov Akram Hasanovich (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Очилов Зарифжон Хусанович, к.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Ochilov Zarifjon Xusanovich (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

The problem of integral geometry with a weight function of a special type

A new class of Volterra type integral geometry problems with a special-weight function is considered. Theorems of uniqueness and the existence of a solution are proved, stability estimates and the inversion formula in Sobolev spaces are obtained, thereby showing the weak incorrectness of the solution of the integral geometry problem.

Keywords: The problem of integral geometry, weak and strong incorrectness, uniqueness and stability

Интегральная геометрия - это интенсивно развивающая область современной математики. Она является одним из крупных направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа.

Приведем общую постановку задачи интегральной геометрии [1]. Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [9-14]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [15-18].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым (см.[4]). В работах А.Л. Бухгейма [5,6] получены формулы обращения для задачи восстановления функции через интегралы от неё по параболоидам в полупространстве $y > 0$, причем формула обращения, приведенная в [5], содержит только конечное число производных от данных. В [6] с помощью техники шкал банаховых пространств доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с весовой функцией, аналитической по части переменных.

В своей работе [2] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

В статье рассматривается задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида по полуплоскости $y > 0$. Доказаны теоремы единственности и существования решения в классе гладких финитных функций, получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает её слабую некорректность, а также формулы обращения.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$(x,y)\in R^2,(\xi,\eta)\in R^2,\lambda\in R^1,\mu\in R^1$$

$$\Omega=\{(x,y),x\in R^1,y\in(0,1),l<\infty\}$$

$$\overline{\Omega}=\{(x,y),x\in R^1,y\in[0,1]\}$$

Постановка задачи. В полосе $\overline{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин (x,y), произвольная кривая семейства $P(x,y)$ определяется соотношениями

$$P(x,y)=\{(\xi,\eta):\eta=(\xi-x+\sqrt{y})^2,0\leqslant\eta\leqslant y,x-\sqrt{y}\leqslant\xi\leqslant x\}\cup$$

$$\cup\{(\xi,\eta):\eta=(x+\sqrt{y}-\xi)^2,0\leqslant\eta\leqslant y,x\leqslant\xi\leqslant x+\sqrt{y}\}$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x,y)$, если для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(\cdot)$ по кривым $P(x,y)$:

$$\int\limits_{x-\sqrt{y}}^{x}g(x-\xi)u(\xi,(\xi-x+\sqrt{y})^2)d\xi+\int\limits_{x}^{x+\sqrt{y}}g(x-\xi)u(\xi,(x+\sqrt{y}-\xi)^2)d\xi=f(x,y) \tag{1}$$

где $g(x-\xi)=\sqrt{\frac{\eta}{y}}\cdot\chi(x-\xi)$, $\chi(x-\xi)=\begin{cases}1,\text{если } x-\xi>0,\\ 0,\text{если } x-\xi<0.\end{cases}$

Функция $u(x,y)$ - функция из класса u, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R^2_+ :

$$supp\ u\subset D=\{(x,y):-a<x<a,0<a<\infty,0<y<l,l<\infty\}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$. Тогда решение задача 1 в классе U единственно, имеет место представление*

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I_2(x-\xi,y-\eta)(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2})f(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{2}$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_1\|f\|_{W_2^{2,2}(\Omega)}$$

где C_1 - некоторая постоянная.

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1972.

2. *Лаврентьев А.М., Шабат Б.В.*Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1986.

3. *Романов В.Г.* О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР, **173**:4 (1967), 766-796.

4. *Романов В.Г.* О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн., **8**:5 (1967), 1206-1208.

5. *Бухгейм А.Л.* О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн., **13**:1 (1972), 34-42.

6. *Бухгейм А.Л.* Об одной задаче интегральной геометрии // Мат. проблемы геофизики, **36**:4 (1973), 69-73.

7. *Бегматов Акрам Х.* Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН, **349**:3 (1996), 297-298.

8. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., **37**:3 (1996), 500-505.

9. *Бегматов Акрам Х.* Новые классы слабо и сильно некорректных задач интегральной геометрии // Второй Сиб. конгресс по прикл. и инд. математике. Тез. докл., ч. III. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1996, 298.

10. *Бегматов Акрам Х.* Некоторые новые классы задач интегральной геометрии. // Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики, **40** (1997), 30.

11. *Бегматов Акрам Х.* Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., **38**:4 (1997), 723-737.

12. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН, **358**:2 (1998), 151-153.

13. *Бегматов Акрам Х.* Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН, **386**:1 (2002), 1-3.

14. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН, **429**:3 (2009), 295-297.

15. *Begmatov Akram H., Muminov M.E., Ochilov Z.H.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type // Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics, **3**:5 (2015), 113-120.

16. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовой функцией специального вида. // Журнал Continuum: Математика. Информатика. Образование, **2** (2017), 11-15.

О ТОЧКАХ ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНДЕНШТРАУССА

Б.Б. Беднов
noriiii@inbox.ru

УДК 517.982.256, 515.124.4

В пространстве Линденштраусса множество точек Штейнера для произвольного конечного набора элементов характеризуется через пересечение метрических отрезков и пересечение шаров.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка

On Steiner points in the Lindenstrauss space

The set of Steiner points for an arbitrary finite set of elements is characterized by the intersection of metric segments and the intersection of balls in the Lindenstrauss space.

Keywords: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection

В действительном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ для произвольного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ из $n \geqslant 3$ его элементов определяется множество точек Штейнера

$$\mathrm{St}_n(x_1, \dots, x_n) = \left\{ s \in X \colon \sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}.$$

Точки Штейнера называют также точками Ферма, точками Ламе и медианами. Возникающее при этом отображение Штейнера $\mathrm{St}_n : X^n \to X$ пространства $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in X\}$ с нормой $\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \|x_1\| + \dots \|x_n\|$ в X может быть, вообще говоря, не однозначным и определенным не на всем X^n.

В случае гильбертова пространства X и $n = 3$ точка Штейнера $\mathrm{St}(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна: она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший 120°), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом 120°).

Наиболее просто точки Штейнера находятся в пространстве L_1: для всякого набора функций $x_1, \dots, x_n \in L_1(E, \mu)$ множество $\mathrm{St}_n(x_1, \dots, x_n)$ состоит в точности из таких функций s, которые в μ-почти каждой точке $t \in E$ принимают значения, *средние* для чисел $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (при нечетном n такая функция единственна).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00333) и Программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (НШ 6222.2018.1).

Беднов Борислав Борисович, к.ф.-м.н., переводчик-секретарь, МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Borislav Bednov (Lomonosov Moscow State University, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Точки Штейнера могут не существовать уже для трехточечных множеств M_3 в банаховом пространстве X. Первый пример таких X и M_3 построил А.Л. Гаркави [1] в 1974 г. В то же время во всяком банаховом пространстве X, 1-дополняемом в своем втором сопряженном (в частности, в любом рефлексивном пространстве, а также в любом пространстве L_1) множество $\mathrm{St}_n(x_1,\dots,x_n)$ непусто для любого набора точек x_k и любого натурального n (см., напр., [2]).

Пусть $m \geqslant 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством m.2.I.P. (m.2 Intersection Property), если всякие m попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Действительные банаховы пространства, обладающие свойством m.2.I.P. для всякого $m \geqslant 3$, называются пространствами Линденштраусса или предуальными к L_1. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие.

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{St}(M_n)$ не пусто [3] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{St}(M_n)$ можно охарактеризовать [4] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$). Точнее, верна

Теорема [4]. *Пусть пространство X предуально к L_1. Для множества $M = \{x_1,\dots,x_n\}$ из X имеет место формула*

$$|\mathrm{St}|(M) = \frac{1}{2}\max\left\{\sum_{j=1}^{k} L(N_j) : N_1 \cup \dots \cup N_k = M\right\},$$

где максимум берётся по всем не менее чем двухточечным подмножествам $N_j \subset M$, причём если точка x_i имеет кратность p_i во множестве M, то x_i содержится в p_i различных множествах из $\{N_j\}_{j=1}^k$. Число $L(N_j)$ обозначает максимальную сумму длин рёбер цикла, обходящего все вершины из N_j по одному разу. При этом

$$\mathrm{St}(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{St}(N_j^*, X) = \bigcap m[x_p, x_q],$$

где $\{N_j^*\}_{j=1}^k$ — такие не менее чем двухточечные подмножества множества M, для которых $\sum_{j=1}^k L(N_j^*) = 2|\mathrm{St}|(M)$, а последнее пересечение берётся по тем парам индексов p,q, для которых $x_p, x_q \in N_j^*$ соединены ребром в цикле с длиной $L(N_j^*)$, обходящем множество N_j^*, $j = 1,\dots,k$.

Заметим, что для двухточечного множества N_j цикл состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

В пространстве Линденштраусса величина $|\mathrm{St}|(x_1,x_2,x_3)$ равна полупериметру треугольника $x_1x_2x_3$. При этом расстояния от x_i до всех точек $s \in \mathrm{St}(x_1,x_2,x_3)$ одинаковы и равны $\rho_i = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Это значит, что $|\mathrm{St}|(x_1,x_2,x_3)$ есть пересечение

шаров $B(x_i, \rho_i)$, $i = 1, 2, 3$. Для четырёх элементов пространства Линденштраусса $|\mathrm{St}|(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{\|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|, \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_4\|, \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|\}$ и расстояния $\|x_i - s\|$ определены не однозначно при $s \in \mathrm{St}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Нетрудно доказать, что множества $\mathrm{St}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathrm{St}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеют непустое пересечение для произвольных элементов x_1, x_2, x_3, x_4 пространства Линденштраусса. Возможно, множества $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$ имеют непустое пересечение для каждого n и произвольных $x_1, \ldots, x_n$ из предуального к L_1 пространства.

В пространстве Линденштраусса подмножество из $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$ можно получить как пересечение шаров $B(x_i, r_i)$ при условиях $r_1 + \cdots + r_n = |\mathrm{St}|(x_1, \ldots, x_n)$ и $r_i + r_j \geqslant \|x_i - x_j\|$ (в силу свойства m.2.I.P.). При малых n такие радиусы позволяют предъявить липшицеву выборку из отображения Штейнера $\mathrm{St}_n : C[K]^n \to C[K]$ (в конечномерных пространствах Линденштраусса липшицева выборка из отображения Штейнера существует [5]).

Литература

1. *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., **95(137)**:2(10) (1974), 272–293.

2. *Veselý L.* Generalized centers of finite sets in Banach spaces // Acta Math. Univ. Comenianae, **66**:1 (1997), 83–115.

3. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб., **205**:4 (2014), 3–19.

4. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб., **207**:8 (2016), 31–46.

5. *Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Матем. сб., **209**:2(2018), 3–21.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕР НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Александр А. Беляев

aabelyaev@fa.ru

УДК 517.982, 517.987, 517.54

Изучаются свойства аналитических мер на бесконечномерном локально выпуклом пространстве. Устанавливается, что мера является аналитической экспоненциального роста только тогда, когда её преобразование Фурье финитно в некотором смысле. Приводятся примеры таких мер.

Ключевые слова: бесконечномерный анализ, теория меры, аналитическое продолжение

Беляев Александр Афанасьевич, к.ф.-м.н., доцент, Финансовый университет при Правительстве РФ (Москва, Россия); Alexander Belyaev (Financial University under the Goverment of the Russian Federation, Moscow, Russia)

Analytic continuations of measures on infinite-dimensional space

The properties of analytic measures on an infinite-dimensional locally convex space are studied. It is established that a measure is an analytic exponential growth only when its Fourier transform is finite in some sense. Examples of such measures are given.

Keywords: infinite dimensional analysis, measure theory, analytic continuation

Доклад основан на совместных с О.Г. Смоляновым исследованиях аналитических мер на бесконечномерных пространствах, начатых в работе [2].

Пусть $Q-$ вещественное ЛВП и $P = Q'-$ сопряжённое пространство непрерывных линейных функционалов на Q. Обозначим Σ_P минимальную $\sigma-$ алгебру подмножеств пространства P, содержащую алгебру $Q-$цилиндрических подмножеств P, и через $M(\Sigma_P)$ банахово пространство всех конечных $\sigma-$аддитивных комплекснозначных мер на Σ_P, наделённое нормой $\|\mu\| = |\mu|(P)$, где $|\mu|-$ вариация меры μ [1]. Мера μ на Σ_P однозначно определяется своим преобразованием Фурье $\hat{\mu}$(см.[1]).

Назовём меру $\mu \in M(\Sigma_P)$ аналитической по направлению $h \in P$, если $\forall A \in \Sigma_P$ функция $\mu(A - th), \quad t \in \mathbb{R}$, имеет аналитическое продолжение $\mu(A - zh)$ в область $U_{\mu,h,A} \subset \mathbb{C}$ (см. [2]).

Можно дать эквивалентное определение аналитичности меры, основанное на разложении функции $\mu(A - th)$ в ряд Тейлора (см. [3]).

Если для каждого $A \in \Sigma_P$ существует аналитическое продолжение функции $\mu(A-th)$ в область $U \subset \mathbb{C}$, то это продолжение $\mu_{zh}(A) = \mu(A-zh)$ является мерой, аналитически зависящей от $z \in U$.

Из аналитичности меры следует её бесконечная дифференцируемость по направлению h (определение и свойства дифференцируемых мер см. в [4,5]).

Пространство всех мер на Σ_P аналитических по направлению $h \in Q$ обозначим $M_h(\Sigma_P)$.

Лемма 1. *Пусть $h \in P$ и мера $\mu-$ аналитическая по направлению h. Тогда производная d_h меры μ по h также есть мера на Σ_P аналитическая по направлению h.*

Лемма 2. *Пусть $h \in P$ и мера $\mu-$ аналитическая по направлению h. Тогда для произвольной меры $\nu \in M(\Sigma_P)$ свёртка мер $\mu * \nu$ также есть мера на Σ_P аналитическая по направлению h.*

Будем говорить, что мера μ на Σ_P целая экспоненциального роста с показателем $R > 0$ по направлению $h \in P$, если $\mu-$ целая по направлению h и $\forall R_1 > R$, $\forall A \in \Sigma_P$ существует такая константа $C(h, R_1, A) > 0$, что

$$|\mu(A - zh)| \leqslant C(h, R_1, A)e^{R_1|Im(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Пространство всех таких мер будем обозначать $AM_{h,R}(\Sigma_P)$. Пространство всех целых по направлению h мер экспоненциального роста с произвольным показателем $R > 0$ обозначим $AM_h(\Sigma_P)$.

Лемма 3. *Пусть $h \in P,\ R > 0$. Тогда $\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$ тогда и только тогда, когда $\mu-$ целая по направлению $h \in P$ мера и выполнена оценка*

$$\|\mu_{zh}\| \leqslant 4e^{R|Im(z)|}\|\mu\| \ \ \forall z \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

Из леммы 3 следует, что $AM_{h,R}(\Sigma_P)-$ замкнутое подпространство банахова пространства $M(\Sigma_P)$.

Для любого $B \subset P$ поляра B° в Q определется равенством

$$B^\circ = \{q \in Q\colon | < q, p > | \leqslant 1 \ \ \forall p \in B\}.$$

Теорема 1. *Пусть $h \in P,\ R > 0,\ \ \mu \in M(\Sigma_P)$ и $\hat{\mu} = \mathcal{F}(\mu)$. Тогда*

$$\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P) \Leftrightarrow supp(\hat{\mu}) \subset R \cdot \{h\}^\circ.$$

Отметим, что теорема 1 обобщает известную конечномерную теорему Пэли-Винера о распределениях с компактным носителем на случай мер на бесконечномерных пространствах. Иной подход к обобщению теоремы Пэли-Винера на случай квазимер на бесконечномерном пространстве можно найти в работе [6].

Следствие 1. *Пусть последовательность мер μ_n из $AM_{h,R}(\Sigma_P)$ сходится на каждом $A \in \Sigma_P$. Тогда существует предел μ последовательности μ_n в $M(\Sigma_P)$, и для каждого $z \in \mathbb{C}$ последовательность мер $(\mu_n)_{zh}$ сходится по вариации к мере $\mu_{zh} \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$. При этом $\forall \delta > 0$ указанная сходимость последовательность $(\mu_n)_{zh}$ равномерна по множеству*

$$V_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |Imz| \leqslant \delta\}.$$

Следствие 2. *Пусть $h \in P$ и $\mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$. Тогда для произвольной меры $\nu \in M(\Sigma_P)$ свёртка мер $\mu * \nu$ также есть мера из $AM_{h,R}(\Sigma_P)$.*

Следствие 3. *Пусть $h \in P,\ \mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$ и $T-$цилиндрический многочлен на P. Тогда $T \cdot \mu \in AM_{h,R}(\Sigma_P)$.*

Можно показать, что, по крайней мере в том случае, когда P содержит некоторое плотное сепарабельное гильбертово подпространство, существует такая нетривиальная продакт-мера μ, что $\mu \in AM_h(\Sigma_P) \ \ \forall h \in H$, где $H-$плотное гильбертово подпространство P. Запас таких мер можно расширить с помощью следствий 2 и 3.

Отметим, что с помощью введенного понятия аналитической меры экспоненциального роста, в совместной с О.Г. Смоляновым работе [2] авторами было доказано существование фундаментального решения уравнения с постоянными коэффициентами в бесконечномерном пространстве при достаточно широких ограничениях.

Литература

1. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 336 с.

2. *Беляев А.А., Смолянов О.Г.* Распределения и аналитические меры на бесконечномерных пространствах — Доклады Академии наук., **483**:1, (2018), с. 7-10.

3. *Бенткус В. Ю.* Эллиптичность бесконечномерного итерированного оператора Лапласа. I. — Литовский матем. сб., **19**:4, (1979), с. 13-28.

4. *Smolyanov O.G., Weizsaecker H.von.* Infinite dimensional analysis. — Quantum probability and related topics. , vol. 2, No. 1, (1999), p.51-78.

5. *Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры — Тр. ММО, **24** (1971), 133–174.

6. *Хренников А.Ю., Петерссон Х.* Теорема Пэли–Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах — Изв. РАН. Сер. матем., 652 (2001), 201–224.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ

Алексей А. Беляев

alexei.a.belyaev@gmail.com, belyaev-aa@rudn.ru

УДК 517.518.23

Мы рассматриваем проблему конструктивного описания мультипликаторов, действующих в шкале пространств Лизоркина–Трибеля, причём особое внимание уделяется случаю пространств бесселевых потенциалов. Применяя принцип равномерной локализации, мы показываем, что при естественных ограничениях в важных частных случаях может быть получение описание пространства мультипликаторов в терминах равномерно локализованных пространств Лизоркина–Трибеля. Это описание обобщают полученные ранее в совместных работах автора и А. А. Шкаликова результаты о мультипликаторах, действующих в пространствах бесселевых потенциалов.

Ключевые слова: мультипликаторы, равномерная локализация, пространства Лизоркина–Трибеля

Multipliers in Bessel potential and Lizorkin–Triebel spaces

We consider a problem of finding a constructive description of multipliers acting in the scale of Lizorkin–Triebel spaces with special attention being paid to the case of multipliers between Bessel potential spaces. We show that, since uniform localization principle holds true for Lizorkin–Tribel spaces, under natural assumptions the multiplier space can be described in terms of the uniformly localized Lizorkin–Tribel spaces in some important model cases. This description generalizes results about multipliers acting in Bessel potential spaces, obtained recently by the author and A. A. Shkalikov.

Keywords: multipliers, Lizorkin–Triebel spaces, uniform localization

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-6222.2018.1.

Беляев Алексей Александрович, к.ф.-м.н. (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова и Российский Университет Дружбы Народов, Москва, Россия); Alexei A. Belyaev, Ph.D. (Lomonosov Moscow State University and Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

Рассмотрим мультипликаторы, действующие между пространствами $A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n)$ и $A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)$, где в качестве $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ фигурирует или пространство Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, или пространство Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$.

В важном частном случае $p = q$ эти шкалы совпадают и, более того, при нецелых значениях индекса гладкости s имеет место соотношение $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n)$, где $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева–Слободецкого. В другом важном модельном случае $q = 2$ мы получаем, что

$$F^s_{p,\,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n),$$

где $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесселевых потенциалов.

Последний случай был детально изучен в работах [1] и [2], где для описания мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое была использована шкала равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Использование этой шкалы позволило найти конструктивное описание мультипликаторов, действующих между пространствами бесселевых потенциалов. А именно, были получены следующие результаты

Теорема 1. *Пусть* $s_1,\ s_2 \geqslant 0$ *и* $p_1,\ p_2 > 1$. *Пусть также* $p_1 \leqslant p_2$, $s_1 - n/p_1 \geqslant s_2 - n/p_2$ *и* $s_1 - n/p_1 > 0$. *Тогда*

$$M[H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to H^{s_2}_{p_2}(\mathbb{R}^n)] = H^{s_2}_{p_2,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть* $s_1,\ s_2 \geqslant 0$ *и* $p_1,\ p_2 > 1$. *Пусть также* $p_1 \leqslant p_2$, *причём или* $s_1 \geqslant s_2,\ s_1 - n/p_1 > 0$, *или* $s_2 \geqslant s_1,\ s_2 - n/p_2^{'} > 0$. *Тогда*

$$M[H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to H^{-s_2}_{p_2}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s_2}_{p_2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s_1}_{p_1^{'},\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны (здесь и ниже для числа $p \in (1; +\infty)$ *под* p' *понимаем число из* $(1; +\infty)$, *определённое соотношением* $1/p + 1/p^{'} = 1$*).*

Локализационные свойства пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля принципиально отличаются. В случае пространств Лизоркина–Трибеля имеет место принцип равномерной локализации, гласящий, что на пространстве $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{s,\,p,\,q,\,(p)}$, эквивалентную стандартной норме этого пространства и заданную соотношением

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(p)} = \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z \cdot u\|_{F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, u \in F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n),$$

где $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a)\ 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n;\ \ b)\ \eta(x) = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leqslant 1;$$

$$c)\ \eta(x) = 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geqslant 2,$$

и

$$\eta_z(x) = \eta(x - z) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Для пространств Бесова норма $\|\cdot\|_{s,\,p,\,q,\,(p)}$, заданная соотношением

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(p)} = \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z \cdot u\|_{B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, u \in B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n),$$

строго слабее стандартной нормы $\|\cdot\|_{B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)}$ при $p > q$ и строго сильнее этой нормы при $p < q$ (смотреть [3]). При этом для пространств Бесова эти нормы эквивалентны только при $p = q$, но в этом случае, как отмечалось выше, $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$.

Мы изучаем соотношения между стандартными нормами на пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова и локализованными нормами

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(r)} = \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\|\eta_z \cdot u\|_{A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad r \in [1;\, +\infty),$$

$$\|u\|_{s,\,p,\,q,\,(\infty)} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left(\|\eta_z \cdot u\|_{A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)} \right),$$

что позволяет установить теоремы вложения для мультипликаторов, действующих в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова. Основное внимание уделяется той ситуации, когда возможно получить описание пространства мультипликаторов в терминах локализованных норм.

Следующая теорема представляет собой основной результат для мультипликаторов в пространствах Лизоркина–Трибеля в той ситуации, когда оба индекса гладкости этих пространств неотрицательны.

Теорема 3. *Пусть* $s_1 > \frac{n}{p_1}$, $s_2 \geqslant 0$, $p_1,\ p_2 > 1$, $q_1,\ q_2 \geqslant 1$, *причём* $p_1 \leqslant p_2$, $s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2}$. *Тогда*

$$M[F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)] = F^{s_2}_{p_2,\,q_2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

и нормы этих пространств эквивалентны.

Ограничения, налагаемые в условиях этой теоремы, являются естественными в том смысле, что при отказе от любого из этих ограничений невозможно получить описание соответствующего пространства мультипликаторов в терминах его совпадения с некоторым пространством $F^{\gamma}_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \stackrel{def}{=} F^{\gamma}_{p,\,q,\,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства Теоремы 3 используется следующее

Утверждение 1. *Пусть* $s_1,\ s_2,\ s_3 \in \mathbb{R}$, $p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_1,\ q_2,\ q_3 > 1$. *Пусть также или* $p_1 < p_2$, *или* $p_1 = p_2$ *и* $q_1 \leqslant q_2$. *Тогда непрерывное вложение*

$$F^{s_3}_{p_3,\,q_3,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такая константа $C > 0$, *что*

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{F^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \cdot \|\mathbf{f}\|_{F^{s_3}_{p_3,\,q_3}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{F^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Литература

1. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.* Multipliers in spaces of Bessel potentials: the case of indices of nonnegative smoothness // Math. Notes, **102**: 5 – 6 (2017), 632–644.

2. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.* Multipliers in Bessel potential spaces with smoothness indices of different sign // St. Petersburg Math. J., **30** (2019), 203–218.

3. *Bourdaud G.* Localisations des espaces de Besov // Stud. Math., **90** : 2 (1988), 153–163

О БАЗИСНОСТИ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Б.Т. Билалов

b_bilalov@mail.ru

УДК 517.51

В работе рассматривается возмущенная система экспонент $\exp\left(i\left(n-\beta\, sign\, n\right)t\right), n \in Z$, где $\beta-$некоторый комплексный параметр. Находится необходимое и достаточное условие на параметр β, при выполнении которого эта система образует базис в пространстве Морри на интервале $(-\pi,\pi)$. Критерий базисности относительно параметра β этой системы в лебеговых пространствах получен в работах А.М.Седлецкого и Е.И.Моисеева. Отметим, что критерий базисности в пространствах Морри отличается от критерия базисности в лебеговых пространствах.

Ключевые слова: возмущенная система экспонент, базисность, пространство Морри

The basis property of a perturbed system of exponentials in Morrey-type spaces

The perturbed system of exponents $\exp\left(i\left(n-\beta\, sign\, n\right)t\right), n \in Z$, where β is some complex parameter is considered. A necessary and sufficient condition on the parameter β are obtained, under which this system forms a basis for Morrey space over the interval $(-\pi,\pi)$. A basicity criterion with respect to the parameter β of this system in Lebesgue spaces was obtained in the works of A.M. Sedletskii and E.I. Moiseev. We note that the basicity criterion in Morrey spaces differs from the basicity criterion in Lebesgue spaces.

Keywords: perturbed system of exponents, basis property, Morrey space

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики-Грант No EIF-BGM-4-RFTF-1/2017-21/02/1

Билалов Билал Тельман оглы, д.ф.-м.н., профессор, чл. корр. НАН Азербайджана Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Bilal Bilalov (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Работа посвящена изучению базисности возмущенной системы экспонент

$$E_\beta \equiv \left\{ e^{i(n-\beta\, sign\, n)t} \right\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

в пространствах Морри на интервале $(-\pi,\pi)$, где $\beta \in C-$комплексный параметр.

Определим пространство Морри на единичной окружности $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости C. Далее $\omega = int\gamma$ будет обозначать единичный шар в C.

Через $L^{p,\alpha}(\gamma), 1 \leqslant p < +\infty, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, будем обозначать нормированное пространство всех измеримых на γ функций $f(\cdot)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \gamma|_\gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\gamma} |f(\xi)|^p\, |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty,$$

($|B \cap \gamma|_\gamma -$линейная мера пересечения $B\cap\gamma$), где sup берется по всем шарам с центром на γ и с произвольным положительным радиусом. Относительно этой нормы $L^{p,\alpha}(\gamma)$ является банаховым. Наряду с этим определим пространство $L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < +\infty, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, состоящего из измеримых на $(-\pi,\pi)$ функций $f(\cdot)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)} = \sup_{I\subset[-\pi,\pi]} \left(|I|^{\alpha-1} \int_I |f(t)|^p\, |dt| \right)^{1/p} < +\infty,$$

где sup берется по всем интервалам $I \subset [-\pi,\pi]$. Нетрудно заметить, что соответствие $f(t) =: F\left(e^{it}\right), t \in (-\pi,\pi), F(\cdot) \in L^{p,\alpha}(\gamma)$, устанавливает изометрический изоморфизм между пространствами $L^{p,\alpha}(\gamma)$ и $L^{p,\alpha}(-\pi,\pi)$. Поэтому в дальнейшем эти пространства будем отождествлять и его будем обозначать через $L^{p,\alpha}$, а норму через $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

Будем рассматривать подпространство $M^{p,\alpha}$ функций $f(\cdot)$, сдвиги которых непрерывны в $L^{p,\alpha}$, т.е. $\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{p,\alpha} \to 0, \delta \to 0$.

Для установления базисности системы экспонент (1) в пространствах Морри $M^{p,\alpha}$ применяется метод краевых задач. Этот метод требует установления базисности частей системы экспонент в пространствах Морри-Харди $MH_+^{p,\alpha}$ и ${}_{-1}MH_-^{p,\alpha}$.

Итак, рассмотрим систему $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+} \subset M_+^{p,\alpha}, 1 < p < +\infty, 0 < \alpha < 1$. Пусть $f \in M_+^{p,\alpha} -$произвольная функция. Совершенно очевидно, что $f \in L_p^+ = H_p^+/_\gamma$. Из базисности системы экспонент $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $M^{p,\alpha}$ (см. [1]) получаем разложение

$$f(t) = \sum_{n\in Z} f_n e^{int}. \tag{2}$$

Из сходимости ряда (2) к $f(\cdot)$ в $M^{p,\alpha}$ следует, что он сходится к $f(\cdot)$ и в L_p. А из включения $f \in L_p^+$ следует, что $f_n = 0, \forall n < 0$. В результате получаем разложение в $M_+^{p,\alpha}$:

$$f(t) = \sum_{n\in Z_+} f_n e^{int},$$

т.е. произвольная функция из $M_+^{p,\alpha}$ разлагается в ряд по системе $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$. Из минимальности системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $M^{p,\alpha}$ непосредственно следует минимальность системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ в $M_+^{p,\alpha}$. В итоге получаем базисность системы $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ в $M_+^{p,\alpha}$. Совершенно аналогично доказывается базисность системы $\left\{e^{-int}\right\}_{n\in N}$ в ${}_{-1}M_-^{p,\alpha}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Система* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ $\left(\left\{e^{-int}\right\}_{n\in N}\right)$ *образует базис в пространстве* $M_+^{p,\alpha}$ *(в* ${}_{-1}M_-^{p,\alpha}$*),* $1<p<+\infty, 0<\alpha<1$.

Также справедлива

Теорема 2. *Пусть* $2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\notin Z$. *Тогда система* E_β *образует базис в* $M^{p,\alpha}$, $1<p<+\infty$, $0<\alpha<1$, *тогда и только тогда, когда* $\left[2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\right]=0$ *(*$[\cdot]-$*целая часть). Ее дефект равен* $d(E_\beta)=\left[2Re\beta+\frac{\alpha}{p}\right]$. *При* $d(E_\beta)<0$, *она неполна, по минимальна в* $M^{p,\alpha}$; *при* $d(E_\beta)>0$, *она полна, но не минимальна в* $M^{p,\alpha}$.

Литература

1. *Bilalov B.T., Quliyeva A.A.* On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces // International Journal of Mathematics, **25**:6 (2014), 10 pages.

2. *Bilalov B.T.* The basis property of a perturbed system of exponentials in Morrey-type spaces // Siberian Mathematical Journal, **60**: 2 (2019), 249–271.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Н.А. Бокаев, Ж.М. Онербек

bokayev2011@yandex.ru, onerbek.93@mail.ru

УДК 517.518

В настоящей работе вводится понятие глобального пространства типа Морри с переменным показателем. Приводятся достаточные условия ограниченности потенциала Рисса с постоянным и переменным показателями в этих пространствах.

Ключевые слова: глобальные пространства типа Морри с переменным показателем, потенциал Рисса, ограниченность оператора.

Бокаев Нуржан Адилханович, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Nurzhan Bokayev (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Онербек Жомарт Муратович, магистр. ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Zhomart Onerbek (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

On boundedness of the Riesz potential in the global Morrey type spaces with variable exponent

We introduce the global Morrey type spaces with variable exponent. We give sufficient conditions for the boundedness of Riesz Potential with constant and variable exponent in this spaces.

Keywords: the global Morrey type spaces with variable exponent, Riesz Potential, boundedness of operator.

Потенциал типа Рисса определяется равенством:

$$I^{\alpha(x)} f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy,$$

где $0 < \alpha(x) < n$. При $\alpha = const$ этот оператор совпадает классическим потенциалом Рисса I^{α}.

Пусть $p(x)$ измеримая функция на открытом множестве $\Omega \subset R^n$ со значениями $(1, \infty)$. Открытое множество Ω может быть и неограниченным. Предположим

$$1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty,$$

где $p_- = p_-(\Omega) = \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = p_+(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} p(x)$.

Пусть $P^{\log(\Omega)}$ — это множество функций $p(x)$, для которых

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-ln|\, x-y|}, |x-y| \leqslant \frac{1}{2},$$
$$|p(x) - p(\infty)| \leqslant A_\infty \ln(2+|x|) \;\; x, y \in \Omega.$$

Обозначим через $L_{p(.)}(\Omega)$ пространство всех измеримых функций $f(x)$ на Ω, таких, что

$$J_{p(.)}(f) = \int_\Omega [f(x)]^{p(x)}\, dx < \infty,$$

где норма определяется следующим образом

$$||f||_{p(.)} = \inf\left\{\eta > 0, J_{p(.)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Пусть $w(x,r)$ - неотрицательная измеримая функция на $\Omega \times [0,l]$, где $\Omega \subset R^n$, $l = \operatorname{diam}\Omega, 1 \leqslant \theta < \infty$. Глобальные пространства Морри с переменным показателем $GM_{p(.),w(.),\theta}$ - это множество функций с конечной квазинормой:

$$\|f\|_{GM_{p(.),w(.),\theta}} = \sup_{x\in R^n} \left\| w(x,r)^{-1} r^{-\theta_p(x,r)} \|f\|_{L_{p(.)}(B(x,r))} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} < \infty,$$

где $B(x,r)$ — шар в n-мерном пространстве с центром в точке x и радиусом r. Пусть $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(x)}$, при $r \leqslant 1$; $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(\infty)}$, при $r > 1$.

Теорема 1. Пусть $p_1(x), p_2(x) \in P^{\log(\Omega)}$ и $0 < \alpha < n$, $\frac{1}{p_2(x)} = \frac{1}{p_1(x)} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < \theta < \infty$, и пусть измеримые функции w_1, w_2 удовлетворяют условию:

$$\sup_{x\in R^n} \int_0^\infty {w_2}^{-\theta}(x,r) \int_r^\infty (w_1(x,t)\, t^{\theta_{p_1}(x,t) - \theta_{p_2}(x,t) - 1})^{\frac{\theta}{\theta-1}} dt dr < \infty.$$

Тогда оператор I^{α} ограничен из $GM_{p_1(.),w_1(.),\theta}$ в $GM_{p_2(.),w_2(.),\theta}$.

Теорема 2. Пусть $p_1(x), p_2(x) \in P^{\log(\Omega)}$ и

$$\alpha_- = \inf_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0, (\alpha p)_+ = \sup_{x\in\Omega} \alpha(x)p(x) < n,$$

функции w_1, w_2 и удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\gamma(x) = A_{\infty}\alpha(x)[1-\frac{\alpha(x)}{n}]$. Тогда оператор $\frac{1}{(1+|x|)^{\gamma(x)}} I^{\alpha(.)}$ ограничен из $GM_{p_1(.),w_1,\theta}(.)$ в $GM_{p_2(.),w_2(.),\theta}$.

Для обобщенных пространств типа Морри $M_{p(.),w(.)}$ условия ограниченности потенциала Рисса в случае ограниченных множеств Ω получены в [1], а в случае неограниченных множеств Ω -получены в [2],[3]. Другие условия ограниченности классического потенциала Рисса I^{α} в глобальных пространствах типа Морри $GM_{p,w(.),\theta}$ с постоянным показателем p получены в работе [4].

Литература

1. *Almeida A., Hasanov J.J, Samko S.G.* Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces // Georgian Mathematical Journal, **15**:2 (2008), 195-208.

2. *Guliev V.S., Hasanov J.S, Samko S.G.* Boundedness of the maximal,potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces // Math.Scand., **107** (2010), 285-304.

3. *Guliev V.S., Samko S.G.* Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets // Journal of Mathematical Sciences, **193**:2 (2013), 228-247.

4. *Burenkov V.I., Guliyev V.S.* Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. **30**. 2009. 211–249.

ОБ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ

Н.Ф. Валеев
valeevnf@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L}[q]u := -u'' + q(x)u$ с разделенными граничными условиями.

Суть оптимизационной обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля заключается в следующем: для заданных собственных значений λ_k, $k = 1, ..., m$ и потенциала $q_0(x)$ требуется найти потенциал $q(x)$, ближайший к $q_0(x)$ в определенной норме, такой, что $\lambda_k(q) = \lambda_k$, $k = 1, ..., m$ для всех $k = 1, .., m$.

В статье доказано существование решения этой задачи.

Ключевые слова: спектральная теория, обратные спектральные задачи, нелинейные дифференциальные операторы

On inverse spectral problems with incomplete data

We consider an inverse optimization spectral problem for the Sturm-Liouville operator $\mathcal{L}[q]u := -u'' + q(x)u$ whith separated boundary conditions.

The essence of the inverse optimization spectral problem for the Sturm-Liouville operator is the following: for a given $q_0(x)$ and eigenvalues λ_k, $k = 1, ..., m$ potential $q(x)$ closest to $q_0(x)$ in a given norm, such that $\lambda_k(q) = \lambda_k$, $k = 1, ..., m$ for all $k = 1, ..., m$.

In the article we prove the existence of solutions to this problem.

Keywords: nonlinear differential equations, spectral theory,inverse spectral problems.

В работе обсуждаются обратные спектральные задачи для самосопряженных дифференциальных операторов (как в обычных, так и в частных производных) , в которых задаются лишь неполные спектральные данные, например, первые m собственных значений $\lambda_1 < ... < \lambda_m$.

Вследствие неполноты спектральных данных, такие задачи имеют неединственное решение и некорректны.

Мы предлагаем дополнить условия этих задач содержательными (с физической или геометрической точки зрения) и обоснованными условиями, которые в итоге приводят к новому классу обратных спектральных задач.

Математические постановки таких задач связаны с проблемой построения линейной колебательной системы $\mathbb{S}$ наиболее близкой к заданной линейной колебательной системе $\mathbb{S}_0$ (в какой-то норме) и такой, чтобы $\mathbb{S}$ обладал заданными значениями частот собственных колебаний. Далее эти задачи будем называть "Оптимизационными обратными спектральными задачами

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., доцент, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Russia)

с неполными данными сокр. ООСЗНД (см.[5]). Отметим, что ООСЗНД тесно связана с многопараметрическими обратными спектральными задачами (см.[6])

В целом наш основной результат исследования ООСЗ состоит в построении нетривиальной связи между оптимизационными обратными спектральными задачами с неполными данными для эллиптических дифференциальных операторов и нелинейными дифференциальными операторами. А именно, нами установлено, что каждая оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными эквивалентна вполне определенному нелинейному дифференциальному оператору (см. подробнее в [3,4,5]).Эквивалентность этих задач, в частности, позволяет находить условия разрешимости как ООСЗ, так и соответствующих краевых задач для нелинейных операторов (см. подробнее в [4,5]).

В данном сообщении мы покажем характер связи ООСЗ с нелинейноми дифференциальноми операторами на примере оператора Штурма-Лиувилля и сформулируем новые утверждения о существовании решений ООСЗ.

Пусть задан самосопряженный оператор Штурма - Лиувилля $L(q)$, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0,1),$$

с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, где $q \in L^2(0,1)$– вещественная функция потенциала. Спектр оператора $L(q)$состоит из собственных значенний: $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < ... < \lambda_k(q) < ...$

Применительно к введенному выше оператору Штурма - Лиувилля $L(q)$ мы рассмотрим следующий модельный вариант оптимизационной обратной спектральной задачи:

$(\mathcal{P}^0)$ *Пусть заданы* $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- *спектральные данные задачи, вещественная функция* $q_0 \in L^2(0,1)$. *Требуется найти вещественный потенциал* $\hat{q} \in L^2(0,1)$ *такой, что:*

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, .., m;$$

и $||q_0 - \hat{q}||_{L^2} =$

$$= \min\{||q_0 - q||_{L^2} : \ \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = 1, 2, .., m; \ q \in L^2(0,1)\}.$$

Сформулированная задача связана с системой нелинейных дифференциальных операторов второго порядка, и для нее справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть задана функция потенциала* $q_0 \in L^2(0,1)$ *и произвольный упорядоченный набор чисел* $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- *спектральные данные задачи. Тогда существует функция* $\hat{q} \in L^2(0,1)$ *такая, что:*

$$L(\hat{q})u_k = -u_k'' + \hat{q}(x)u_k = \lambda_k^* u_k, \ u_k(0) = u_k(1) = 0, k = 1, ., m;$$

$$||q_0 - \hat{q}||_{L^2} = \min\{||q_0 - q||_{L^2} : \ \lambda_k^* = \lambda_k(q), k = 1, ., m; \ q \in L^2(0,1)\}.$$

решение ООСЗ $\hat{q}$ выражается формулой

$$\hat{q}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k^2(x)$$

Вопрос количества (счетности,конечности или единственности) решений оптимизационной обратной спектральной задачи остается открытым, здесь же укажем одно достаточное условие единственности решения.

Теорема 2. *Пусть задан произвольный упорядоченный набор чисел $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- спектральные данные задачи функция потенциала $q_0 \in L^2(0,1)$ такая, что $\lambda_k(q_0) < \lambda_k^*$ для всех $k = 1, 2, .., m$. Тогда*

1) оптимизационная обратная спектральная задача имеет единственное решение $\hat{q} \in L^2(0,1)$. и $\hat{q}(x) = \sum_{j=1}^{m} u_j^2(x)$, где $\{u_j(x)\}_{j=1}^m$ слабое решение системы нелинейныйных уравнений

$$L(\hat{q})u_k = -u_k'' + \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^2(x)\right)u_k = \lambda_k^* u_k, k = 1, .., m;$$

2) система нелинейных уравнений имеет единстенное решение.

Литература

1. *M. Gel'fand, B. M. Levitan.* On the determination of a differential equation from its spectral function // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, **15**:4 (1951), 309-360.

2. *D. E. Edmunds, W. D. Evans.* Spectral theory and differential operators. Vol. 15. — Oxford: Clarendon Press, 1987.

3. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On inverse spectral problem and generalized Sturm nodal theorem for nonlinear boundary value problems // Ufa Math. J.,**10**:4 (2018), 122–128.

4. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On an inverse optimization spectral problem and a related nonlinear boundary value problem // Math. Zametki, **104**:4 (2018), 621-625.

5. *Y. Sh. Il'yasov, N.F. Valeev.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem // Journal of Differential Equations, **266**:8,2019, Pages 4533-4543

6. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. **426**:4 2009. С. 1–4.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

В.Б. Васильев
vbv57@inbox.ru

УДК 517.95, 517.983

Рассматриваются эллиптические псевдодифференциальные операторы на многообразиях, граница которых имеет особенности. Описываются достаточные условия фредгольмовости в пространствах Соболева–Слободецкого, основанные на локальном принципе и специальной факторизации эллиптического символа.

Ключевые слова: эллиптический оператор, символ, многообразие, фредгольмовость

Elliptic operators, equations and boundary value problems

We consider elliptic pseudo-differential operators on manifolds for which their boundaries have singularities. We describe sufficient conditions for Fredholm properties in Sobolev–Slobodetskii spaces based on the local principle and special factorization of an elliptic symbol.

Keywords: elliptic operator, symbol, manifold, Fredholm property

Мы рассматриваем псевдодифференциальные операторы A на m-мерном компактном многообразии M с краем. Предполагается, что на границе ∂M многообразия M имеются компактные подмногообразия M_k размерности $0 \leqslant k \leqslant m-2$, которые мы называем особыми. Сингулярные точки границы описываются разными типами *локальных представителей* оператора A [6]. Для простоты будем считать, что $M \subset \mathbb{R}^m$ – область в m-мерном пространстве и $A(x,\xi)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^{2m}$.

Локальные представители оператора выглядят следующим образом

$$A_{x_0} : u(x) \longmapsto \int\limits_{D_{x_0}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i\xi\cdot(x-y)} A(\varphi(x_0),\xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0}, \tag{1}$$

где $\varphi : U \to D_{x_0}$ – диффеоморфизм, причем каноническая область D_{x_0} имеет различный вид в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M. Здесь мы рассматриваем следующие типы канонических областей D_{x_0}: $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}, W^k = \mathbb{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} – выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m-k}$, не содержащий целой прямой.

Оператор A с таким набором локальных представителей (1) удобно рассматривать в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(M)$, локальными вариантами которых будут пространства $H^s(D_{x_0})$.

Определение 1. *Символом оператора A называется оператор-функция $A(x) : M \to \{A_x\}_{x\in M}$, которая представляет собой семейство*

Васильев Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ БелГУ (Белгород, Россия); Vladimir Vasilyev (Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia)

локальных представителей оператора A. Оператор A называется эллиптическим, если его символ представляет собой семейство обратимых операторов.

Если функция $A(x,\xi)$ удовлетворяет некоторым дополнительным гладкостным условиям и

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(x,\xi)| \leqslant c_1(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

то имеют место следующий вывод [6].

Теорема 1. *Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда он эллиптический.*

Обозначим $\varkappa_{n-1}(x)$ индекс факторизации [1] функции $A(x,\xi)$ в точке $x \in \partial M \setminus \cup_{k=0}^{m-2} M_k$, $\varkappa_k(x)$ – индексы k-волновой факторизации [2] относительно конуса C_x^{m-k} в точках $x \in M_k, k = 0,1,\cdots,n-2$ и предположим, что функции $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,n-1$, продолжаются по непрерывности на $\overline{M_k}$. Последнее требование связано с тем, что возможны ситуации, когда $M_k \cap M_{k-1} \neq \emptyset$.

Аналогично [1] в силу единственности волновой факторизации [2] можно убедиться, что функции $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,m-1$, не зависят от выбора локальной системы координат.

Теорема 2. *Предположим, что классический эллиптический символ $A(x,\xi)$ допускает k-волновую факторизацию относительно конусов C^{m-k} с индексами $\varkappa_k(x), k = 0,1,\cdots,m-2$, удовлетворяющими условиям:*

$$|\varkappa_k(x) - s| < 1/2, \quad \forall x \in M_k, \quad k = 0,1,\cdots,m-1. \tag{2}$$

Тогда оператор $A : H^s(M) \to H^{s-\alpha}(M)$ фредгольмов.

Если эллиптичность нарушается на подмногообразиях M_k, рассматриваются модификации оператора A с привлечением граничных или кограничных операторов [2]. В частности, это происходит, когда нарушается одно из условий (2).

В работах автора [3–5] рассмотрены конкретные краевые задачи для некоторых особенностей в случае нарушения условия (2).

Литература

1. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1973.

2. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — Москва: КомКнига, 2010.

3. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators, equations and boundary value problems // AIP Conf. Proc. **2037** (2018) 020028.

4. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. **41**:18 (2018) 9252–9263.

5. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. **39**:1 (2019) 109-124.

6. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. ArXiv: 1901.06630v1 [math. FA]

УГЛОВЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Владимиров
vladimirov@shkal.math.msu.su

УДК 517

Указывается основанный на представлении о тройках $\mathfrak{D}^+ \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^-$ гильбертовых пространств аналог процедуры продолжения по Фридрихсу для ряда неполуограниченных операторных матриц.

Ключевые слова: оснащённое гильбертово пространство, операторная матрица, расширение симметрического оператора

Angular extensions of operator matrices

We use the notion of triples $\mathfrak{D}^+ \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^-$ of Hilbert spaces to develop an analog of the Friedrichs extension procedure for a class of nonsemibounded operator matrices.

Keywords: triple of Hilbert spaces, operator matrix, extension of symmetric operator

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дано некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, разложенное в ортогональную прямую сумму $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ двух своих замкнутых подпространств. Пусть при этом дополнительно фиксированы четыре оператора $T_{11}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{11}^\circ \to \mathfrak{H}_1$, $T_{12}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{22}^\circ \to \mathfrak{H}_1$, $T_{21}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{11}^\circ \to \mathfrak{H}_2$ и $T_{22}^\circ\colon \operatorname{dom} T_{22}^\circ \to \mathfrak{H}_2$, задающие симметрическую операторную матрицу

$$T^\circ \rightleftharpoons \begin{pmatrix} T_{11}^\circ & T_{12}^\circ \\ T_{21}^\circ & T_{22}^\circ \end{pmatrix}$$

с областью определения $\operatorname{dom} T_{11}^\circ \oplus \operatorname{dom} T_{22}^\circ$. Наконец, пусть симметрический оператор T_{11}° ограничен снизу, а симметрический оператор T_{22}° — сверху. Построенный таким образом оператор T° не является полуограниченным, и потому вопрос о построении (некоторых) его расширений не может непосредственным образом решаться на основе стандартной процедуры Фридрихса. Однако оказывается возможной следующая модификация указанной процедуры.

Зафиксируем два значения $\varkappa$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ) \qquad \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} \geqslant \|y\|_{\mathfrak{H}_1}^2,$$
$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^\circ) \qquad \langle (\tau - T_{22}^\circ) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2} \geqslant \|y\|_{\mathfrak{H}_2}^2.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_2$ пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{22}^\circ$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_2} \rightleftharpoons \langle (\tau - T_{22}^\circ) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2},$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01215.

Владимиров Антон Алексеевич, д.ф.-м.н., в.н.с., ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Москва, Россия); Anton Vladimirov (FRC CSC, Moscow, Russia)

через $T_{22}^{\bullet}$ — связанное с пространством $\mathfrak{D}_2$ фридрихсовское расширение оператора T_{22}°, а через $\mathfrak{D}_1$ — пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T_{11}^{\circ}$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_1} \rightleftharpoons \left[\langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T_{22}^{\bullet})^{-1} T_{21}^{\circ} y, T_{21}^{\circ} y\rangle_{\mathfrak{H}_2}\right]^{1/2}.$$

По построению, при этом существуют обладающие плотными образами непрерывные операторы вложения $I_1 \colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{H}_1$ и $I_2 \colon \mathfrak{D}_2 \to \mathfrak{H}_2$. Это позволяет ввести в рассмотрение тройку пространств $\mathfrak{D} \hookrightarrow^{I} \mathfrak{H} \hookrightarrow^{I^*} \mathfrak{D}^*$, где положено $\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$ и $I \rightleftharpoons I_1 \oplus I_2$, а через $\mathfrak{D}^*$ обозначено пространство, сопряженное пространству $\mathfrak{D}$.

Предложение 1. *Оператор $I^* T^{\circ} I$ является ограниченным и обладает всюду определенным замыканием $T \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$.*

Отвечающий указанному замыканию $T \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$ (неограниченный) оператор $T^{\bullet} \rightleftharpoons (I^*)^{-1} T I^{-1}$ будет называться *угловым расширением* исходной операторной матрицы T°.

На языке угловых расширений может быть единообразным образом выражен ряд фактов теории операторных матриц, ранее получавшихся [1,2] как независимые. Основу для такого выражения составляют следующие два факта.

Предложение 2. *Пусть матрица T° самосопряжена в существенном, операторы T_{11}° и T_{22}° полуограничены (соответственно, снизу и сверху), а также выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:*

1. *Оператор T_{22}° самосопряжен в существенном, причем для некоторых $\gamma, \varkappa \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}) \qquad \|T_{21}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1}.$$

2. *Для некоторых $\gamma, \varkappa, \tau \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения*

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}) \qquad \|T_{21}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^{\circ} - \varkappa)y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1},$$
$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^{\circ}) \qquad \|T_{12}^{\circ} y\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (\tau - T_{22}^{\circ})y, y\rangle_{\mathfrak{H}_2}.$$

3. *Операторы T_{11}° и T_{22}° являются ограниченными.*

Тогда замыкание оператора T° является его угловым расширением.

Предложение 3. *Пусть отрезок $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^{\bullet})$ таков, что отвечающий оператор-функции S вида*

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} - \lambda I_1^* I_1 - T_{12}[T_{22} - \lambda I_2^* I_2]^{-1} T_{21}$$

оператор $S(\zeta^+) \colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1^*$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда спектр оператора $T^{\bullet}$ на полуинтервале $[\zeta^-, \zeta^+)$ чисто дискретен, причем его суммарная кратность равна разности отрицательных индексов инерции операторов $S(\zeta^+)$ и $S(\zeta^-)$.

Содержание доклада основано на материале работы [3].

Литература

1. *Langer H., Langer M., Tretter C.* Variational principles for eigenvalues of block operator matrices // Indiana Univ. Math. Jour., **51**:6 (2002), 1427-1459.

2. *Kraus M., Langer M., Tretter C.* Variational principles and eigenvalue estimates for unbounded block operator matrices and applications // Journ. of Comput. and Appl. Math., **171** (2004), 311-334.

3. *Владимиров А.А.* Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряженных операторных матриц // Матем. заметки, **101**:4 (2017), 516-530.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ГЛАДКОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.Е. Владыкина

vladykina@cosmos.msu.ru

УДК 517.928, 517.984

В работе рассматривается задача Штурма – Лиувилля в обобщенной форме с минимальными условиями на гладкость коэффициентов. Для этой задачи вводится понятие усиленно регулярных краевых условий. Для операторов, порождаемых соответствующими дифференциальными выражениями и усиленно регулярными краевыми условиями получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Ключевые слова: Уравнение Штурма – Лиувилля, асимптотики собственных значений, асимптотики собственных функций, сингулярные коэффициенты

Spectral asymptotics of the Sturm – Liouville problem with minimal smoothness conditions for the coefficients

The paper deals with the Sturm – Liouville problem in a generalized form with minimal smoothness conditions for the coefficients. Asymptotic formulae are obtained for the eigenvalues and the eigenfunctions of the operators generated by the corresponding differential expressions and stronly regular boundary conditions.

Keywords: the Sturm – Liouville equation, asymptotics of the eigenvalues, asymptotics of the eigenfunctions, singuar coefficients

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Программы президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ- 6222.2018.1).

Владыкина Вероника Евгеньевна, без степени, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Veronika Vladykina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля в обобщенной форме:

$$-(r^2y')' + py' + qy = \lambda^2\rho^2 y, \qquad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где r и ρ — абсолютно непрерывные положительные функции, а p и q — комплекснозначные, причем

$$p \in L^1[a,b], \quad q \in W^{-1,2}[a,b]. \tag{2}$$

Последнее условие означает, что первообразная $u = \int q\,dx$, понимаемая в смысле теории распределений, принадлежит пространству $L^2[a,b]$.

Кроме того, предположим, что

$$\rho' u, ru, pu \in L_1[a,b], \quad \text{где } u = \int q\,dx. \tag{3}$$

В классическом случае, когда

$$r, \rho \in W^{2,1}[a,b], \quad q, p \in L^1[a,b],$$

с помощью замены уравнение (1) сводится к уравнению

$$-z'' + f(t)z = \lambda^2 z, \quad f \in L^1[0,h]$$

собственные функции и собственные значения которого при усиленно регулярных по Биркгофу краевых условиях хорошо известны (см. [1, гл. 2]).

В случае $r \equiv \rho \equiv 1$, $p = 0$ асимптотики собственных функций и собственных значений задачи (1) с краевыми условиями Дирихле были получены в работе [2].

Основным инструментом для получения асимптотических формул служит следующий результат, полученный в [3,4].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3). *Тогда* $\forall s > 0$ *фундаментальные решения задачи* (1) *представимы в виде*

$$y_\pm(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \varphi_\pm(x,\lambda)).$$

Здесь функции $\varphi_\pm$ *аналитические в полуплоскости* $\Pi_s^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im}\lambda \geqslant -s\}$ *при* $|\lambda| > R$ *и*

$$|\varphi_+(x,\lambda)| + |\varphi_-(x,\lambda)| = o(1) \quad \text{при } |\lambda| \to \infty,\ \lambda \in \Pi_s^+,$$

равномерно по $x \in [a,b]$.*Полученные асимптотики можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную*

$$y^{[1]} = y' - h(x)\frac{\rho}{r}y, \quad \text{где } h = \int \frac{q}{r\rho}\,dx.$$

А именно

$$y_\pm^{[1]}(x,\lambda) = \pm i\lambda\sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \psi_\pm(x,\lambda)),$$

где функции $\psi_\pm$ обладают тем же свойством, что и функции $\varphi_\pm$. Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости Π_s^+ рассматривать полуплоскость $\Pi_s^- = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant s\}$.

Эта теорема позволяет нам следуя [1, гл. 2] определить регулярные и усиленно регулярные краевые условия. Итак, назовем краевые условия

$$U_j(y) = \alpha_{j0}y(a) + \alpha_{j1}y^{[1]}(a) + \beta_{j0}y(b) + \beta_{j1}y^{[1]}(b) = 0, \quad j = 1, 2. \qquad (4)$$

регулярными, если отличны от нуля числа θ_1, θ_{-1}, определенные следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + sp_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_1^{\nu_1} & (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + \frac{1}{s}p_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_2^{\nu_1} \\ (p_{\nu_1}(a)\alpha_{2\nu_2} + sp_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_1^{\nu_2} & (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + \frac{1}{s}p_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_2^{\nu_2} \end{vmatrix} = \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s,$$

где $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right)$, $p_1(x) = \sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right)$, $\omega_1 = i$, $\omega_2 = -i$. Если при этом $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$, будем называть условия усиленно регулярными.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), *а краевые условия* (4) *— регулярные. Тогда собственные значения задачи* (1), (4) *образуют две последовательности*

$$\lambda_k'^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0 \xi'}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

$$\lambda_k''^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0 \xi''}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

где ξ', ξ'' — корни уравнения $\theta_1 s^2 + \theta_0 s + \theta_{-1} = 0$, возможно, совпадающие. При этом в случае $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в случае $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$ — простые или двукратные.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3) *и краевые условия* (4) *— усиленно регулярные. Тогда собственные функции задачи* (1), (4) *образуют две последовательности*

$$y_{1,k} = p_0(x)(-i)^{\nu_2} e^{i\lambda_k' t(x)} \left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \frac{1}{\xi'}\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right) -$$
$$- p_0(x)i^{\nu_2} e^{-i\lambda_k' t(x)} \left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \xi'\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right),$$

где $t(x) = \int_a^x \frac{\rho}{r}$,

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right),$$

а формула для $y_{2,k}$ получается из формулы для $y_{1,k}$ заменой ξ' на ξ'' и λ_k' на λ_k''.

В частности для краевых условий Дирихле $y(a) = y(b) = 0$ получим:

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\left(1 + o(1/k)\right),\ y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}} \sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1),$$

а для краевых условий Неймана $y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b) = 0$ получим:

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\left(1 + o(1/k)\right),\ y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}} \cos\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1),$$

Литература

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит. 2010

2. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897-912.

3. *Shkalikov A. A., Vladykina V. E.* Asymptotics of the solutions of the Sturm—Liouville equation with singular coefficients // Math. Notes. **99**:5 (2015), 891-899.

4. *Владыкина В. Е.* Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма–Лиувилля по спектральному параметру // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. № 1 (2019), 57-61.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В.В. Власов

vikmont@yandex.ru

УДК 517.968.72

Исследуются вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения с частными производными по пространственным переменным. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными моделями линейной вязкоупругости, а также имеют ряд других важных приложений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, спектральный анализ, оператор-функция

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01215).

Власов Виктор Валентинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Victor Vlasov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Spectral analysis of linear viscoelasticity operator models

We consider the Volterra integro-differential equations with operator coefficients in Hilbert space that can be realized as partial integro-differential equations on space variables. These equations represent the general models of linear viscoelasticity and they have many other important applications.

Keywords: integro-differential equations, spectral theory, operator function

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными моделями линейной вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \\ + \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, $t > 0$, среда заполняет ограниченную область $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, u удовлетворяет условиям Дирихле в области Ω с гладкой границей, $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \cdot\text{grad div}u)$, $L_2 = \lambda \cdot \text{grad div}u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ - оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работе [3].

Литература

1. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М. : МАКС Пресс, 2016.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ линейных моделей вязкоупругости // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **132** (2017), 25-29.

3. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. **75** (2014), 185-204.

ЯВНЫЙ ВИД ТОЧНЫХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА МАРКОВА – ФРИДРИХСА – КОЛМОГОРОВА

Т.А. Гарманова

garmanovata@gmail.com

УДК 517.518.23

Для функций из класса Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$ рассматривается вопрос о нахождении точных констант в неравенствах $|f^{(k)}(x)| \leqslant A_{n,k}(x)\|f\|_{\mathcal{H}}$. Для каждого натурального n и $k \leqslant n-1$ найден явный вид $A_{n,k}(x)$ в терминах гипергеометрических функций.

Ключевые слова: пространства Соболева, константы вложения, гипергеометрические функции

The explicit form of exact constants in Markov – Friedrichs – Kolmogorov-type inequalities.

For functions from the Sobolev class $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$ the problem of finding exact constants in inequalities $|f^{(k)}(x)| \leqslant A_{n,k}(x)\|f\|_{\mathcal{H}}$ is considered. For each natural n and $k \leqslant n-1$ the explicit form of $A_{n,k}(x)$ are found in terms of hypergeometric functions.

Keywords: Sobolev spaces, embedding constants, hypergeometric functions

Определим величины $A_{n,k}(x)$ как наименьшие возможные константы в неравенствах

$$\left|f^{(k)}(a)\right|^2 \leqslant A_{n,k}^2(a)\|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Такие неравенства называются неравенствами типа Маркова-Фридрихса-Колмогорова. Точное значение

$$A_{n,k} := \sup_{x\in[0;1]} A_{n,k}(x),$$

называют константой вложения пространства Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k\,[0;1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Гарманова Татьяна Алексеевна, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatiana Garmanova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Целью данного исследования является установление явного вида функций $A_{n,k}(x)$, для всех $x \in (0,1)$ и натуральных n и $k \leqslant n-1$. Задача нахождения точных констант в неравенствах Маркова-Фридрихса-Колмогорова на отрезке $[-1,1]$ была рассмотрена в работах [1], [2]. В работе [1] были получены формулы для констант $A^2_{n,0}$, $A^2_{n,1}$ и $A^2_{n,2}$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A^2_{n,k}(x)$ и предъявлены формулы для $A^2_{n,4}$ и $A^2_{n,6}$.

Смещенные полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[0;1]$ и определяются

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}\left((x^2-x)^n\right)^{(n)}.$$

Первообразная порядка $m>0$ определяется

$$P_n^{(-m)} := \frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)}.$$

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A^2_{n,k}(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A^2_{n,k}(x) = A^2_{n-1,k-1}(x) - \left(P_{n-1}^{(k-n)}(x)\right)^2 (2n-1).$$

С увеличением k сложность вычисления $A^2_{n,k}(x)$ при помощи формулы, приведенной в Лемме 1, возрастает. Поэтому рассмотрим новый подход к описанию первообразных полиномов Лежандра и функций $A^2_{n,k}(x)$, использующий специальные функции.

Лемма 2. *Первообразные смещенных полиномов Лежандра порядка $k-n$ имеют вид*

$$P_n^{(k-n)}(t) = \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\\ n-k+1\end{matrix};\,-4t\right],$$

где $t = x^2 - x$

С помощью лемм 1,2 и теоремы Клаузена, приведенной в книге [3], доказывается следующий основной результат.

Теорема 1. *Величины $A^2_{n,k}(x)$ имеют вид*

$$A^2_{n,k}(t) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k\\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\,-4t\right],$$

где $t = x^2 - x$.

Литература

1. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$ // Труды МИАН, 2010, Т.269, 143–149.

2. *Мукосеева Е.В., Назаров А.И.* О симметрии эктремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, т.425, 35–45.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О РЕЗОНАНСАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Л. Гейнц
valgeynts@gmail.com

УДК 517.518

Ядро резольвенты самосопряженного оператора Шредингера на оси или полуоси с потенциалом, убывающим быстрее экспоненты, может быть продолжено как мероморфная функция на $\mathbb{C}$; ее полюсы в замкнутой нижней полуплоскости называются резонансами [1]. В данной работе мы исследуем задачу восстановления потенциала по конечному набору резонансов и собственных значений и даем оценки устойчивости такого восстановления.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, целые функции

The inverse resonance problem for the Schroedinger operator

The kernel of the self-adjoint Schroedinger operator on the line or on the half-line with the super-exponential decaying potential can be continued over $\mathbb{C}$ as a meromorphic function; its poles in the lower half-plane are called resonances [1]. In this work we consider the problem of the reconstruction of a potential from the finite set of resonances and eigenvalues and give some estimates on the stability of such reconstruction.

Keywords: differential equations, spectral theory, entire functions

Приведем стандартные сведения об операторе Шредингера на полуоси ([2, 3]). Пусть $q : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty.$$

Тогда оператор

$$H_q y = -y'' + qy,$$
$$Dom(H_q) = \{y \in L^2(0,\infty) : y, y' \in AC_{loc}[0,\infty),\ H_q y \in L^2(0,\infty),\ y(0) = 0\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01215.

Гейнц Валерий Леонидович, ассистент, Российский Университет Дружбы Народов (Москва, Россия); Valeriy Geynts (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

самосопряжен. Его спектр:

$$\sigma(H_q) = [0,\infty) \cup \{-\mu_1^2, ..., -\mu_N^2\},\ \mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_N > 0.$$

Рассмотрим уравнение $-y'' + qy = z^2 y$. Для всех $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$, где $\mathbb{C}_+ := \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, существует единственное решение $y_q(x,z)$, удовлетворяющее

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_q(x,z)}{\exp(ixz)} = 1,$$

и для всех $z \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $s_q(x,z)$ такое, что

$$s_q(x,z) = x(1+o(1)),\ x \to 0,$$
$$\frac{\partial s_q}{\partial x}(x,z) = 1 + o(1),\ x \to 0.$$

Резольвента оператора Шредингера H_q — интегральный оператор

$$\left(H_q - z^2\mathbf{1}\right)^{-1} f(x) = \int_0^\infty R_q(x,t;z) f(t) dt,$$

где ядро

$$R_q(x,t;z) = \begin{cases} \dfrac{y_q(x,z)s_q(t,z)}{\psi_q(z)},\ t \leqslant x, \\ \dfrac{y_q(t,z)s_q(x,z)}{\psi_q(z)},\ t > x. \end{cases}$$

Лемма. *Если* $\int\limits_0^\infty |q(x)|e^{\alpha x}dx < \infty$, $\alpha > 0$, *то функция Йоста* $\psi_q(z)$ *имеет голоморфное продолжение в полуплоскость* $\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right) := \left\{z : Im(z) > -\frac{\alpha}{2}\right\}$; *если, более того,* $\int\limits_0^\infty |q(x)|e^{x^\gamma}dx < \infty$ *для некоторого* $\gamma > 1$, *то функция Йоста* $\psi_q(z)$ *продолжается до целой функции порядка, не превосходящего*

$$\rho(\gamma) := \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

и конечного типа.

Нули функции Йоста ψ_q, лежащие в нижней полуплоскости, называются резонансами.

Помимо классических обратных задач [4], большой интерес с физической точки зрения имеет задача о восстановлении потенциала по множеству нулей функции Йоста в круге $B(0,R) = \{z : |z| < R\}$. Соответственно, возникает вопрос о точности (устойчивости) такого восстановления. Устойчивость задачи востановления по полному набору нулей функции Йоста исследовалась в работах [5, 6], по конечному набору — в [7]. В данной работе получено усиление и обобщение результатов работы [7].

Теорема 1. *Пусть два потенциала* $q_j \in L^1(0,a)$, $j = 1,2$, *удовлетворяют априорным условиям*

$$\|q_j\|_{L^1} \leqslant Q_1,\ \|q_2 - q_1\|_{L^p} \leqslant D_p.$$

Предположим, что круг $B(0,R)=\{|z|<R\}$ *содержит одинаковое количество нулей функций Йоста* ψ_{q_j}, *и* $\psi_{q_1}(0)=C\psi_{q_2}(0)$ *для некоторого* $C\neq 0$, *а внутри круга* $B(0,R)$ *нули* $\{z_n^{(j)}\neq 0\}_{n=1}^N$ *функций* ψ_{q_j} *удовлетворяют следующему условию близости:*

$$\left|\frac{1}{z_n^{(2)}}-\frac{1}{z_n^{(1)}}\right|<\varepsilon,\ n=1,...,N.$$

Пусть $\delta\in(0,1)$ — *произвольный параметр. Тогда существуют константы* R_0,C_1 *такие, что для* $R>R_0$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a}\left|\int_x^a(q_2(t)-q_1(t))dt\right|\leqslant\varphi_1(R,\varepsilon)+C_1R^{-(1-\delta)\frac{p-1}{3p-2}}(1+\chi_1(R));$$

если дополнительно

$$\int_0^a q_1(t)dt=\int_0^a q_2(t)dt,\ q_2-q_1\in AC[0,a],\ \|(q_2-q_1)'\|_{L^p}\leqslant D_p',$$

то существует константа C_2 *такая, что для* $1\leqslant r<\infty$

$$\|q_2-q_1\|_{L^r}\leqslant\psi_2(R,\varepsilon)+C_2R^{-\min\left\{\frac{r-1}{2r-1},\ \frac{p-1}{3p-2}\right\}(1-\delta)}\left(\ln(R)\right)^{\frac{r-1}{r}}(1+\chi_2(R));$$

где $\varphi_k(R,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ $(\varepsilon\to 0)$, $\chi_k(R)\to 0$ $(R\to\infty)$, R_0, C_k *зависят от набора* $(a,\delta,Q_1,p,D_p,D_p')$.

Техника доказательства этих оценок опирается на метод оператора преобразования [3, 7] и замечание 6 работы [8], использованное для оценок разности функций Йоста на конечном отрезке.

Литература

1. *Zworski M.* Resonances in physics and geometry // Notices Amer. Math. Soc, **46** (1999), 319-328.

2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т.2. — М: Мир, 1978.

3. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. — Киев: Наукова Думка, 1972.

4. *Chadan K., Sabatier P.C.* Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. — Springer-Verlag, 1977.

5. *Korotyaev E.L.* Inverse resonance scattering on the half line // Asymptot. Anal. **37**:3-4 (2004), 215-226.

6. *Korotyaev E.L.* Stability for inverse resonance problem // Int. Math. Res. Not. **73** (2004), 3927-3936.

7. *Marletta M., Shterenberg R., and Weikard R.* On the inverse resonance problem for Schroedinger operator // Comm. Math. Phys., **295**:2 (2010), 465-484.

8. *Гейнц В.Л., Шкаликов А.А.* Оценка отношения двух целых функций, нули которых совпадают в круге // Матем. заметки, **99**:6 (2016).

БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ И ДИСКРЕТНЫЕ АТТРАКТОРЫ ШИЛЬНИКОВА

С.В. Гонченко, А.Д. Козлов, К.Е. Морозов, К.А. Сафонов
sergey.gonchenko@mail.ru, safonov.klim@yandex.ru

УДК 517.938

Обсуждаются хорошо известные из приложений бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых в случае ориентируемых и неориентируемых трехмерных отображений, а также рассматривается задача о сценариях возникновения дискретных аттракторов Шильникова, которые содержат неподвижную точку типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием.

Ключевые слова: замкнутая инвариантная кривая, бифуркация, аттрактор Шильникова.

Bifurcations of doubling closed invariant curves and discrete Shilnikov attractors

We discuss the well-known from applications bifurcations of doubling closed invariant curves in the case of orientable and nonorientable three-dimensional maps, and study scenarios for the emergence of discrete Shilnikov attractors that contain a saddle-focus fixed point with two-dimensional unstable manifold.

Keywords: closed invariant curve, bifurcation, Shilnikov attractor.

Пусть диффеоморфизм T, заданный на R^3, имеет гладкую замкнутую инвариантную кривую L. Различают два основных типа таких кривых: резонансные и эргодические. Для резонансной кривой число вращения ν одномерного отображения $T|_L$ рационально, $\nu = p/q$, и $T|_L$ имеет одинаковое число устойчивых и неустойчивых циклов периода q, точки которых чередуются на L. У гладкой эргодической кривой ν иррационально, и траектория любой точки всюду плотна на L. Охарактеризовать тип эргодической кривой L трехмерного отображения можно по спектру ее показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Один из ее показателей всегда нулевой, например, $\Lambda_1 = 0$. Тогда кривая L

- *устойчивая*, если $\Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$, *вполне неустойчивая*, если $\Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0$ – при этом она *узлового типа*, если $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, и *фокусного типа*, если $\Lambda_2 = \Lambda_3$;

Гонченко Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Sergey Gonchenko (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Козлов Александр Дмитриевич, м.н.с., ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Alexandr Kozlov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Морозов Кирилл Евгеньевич, аспирант, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Kirill Morozov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Сафонов Клим Андреевич, студент, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Klim Safonov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

- *седловая*, если $\Lambda_2\Lambda_3 < 0$.

В случае, когда кривая L – седловая, у нее есть два двумерных инвариантных многообразия $W^s(L)$ и $W^u(L)$, устойчивое и неустойчивое соответственно, которые пересекаются по L трансверсально. По определению, кривая L является ω-предельной (α-предельной) для любой точки из $W^s(L)$ (из $W^u(L)$).

Лемма 1. *Пусть T имеет замкнутую эргодическую инвариантную кривую L. Тогда $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ – одновременно либо цилиндры, либо листы Мёбиуса.*

Хорошо известно, что замкнутые инвариантные кривые трехмерных отображений могут претерпевать бифуркации при изменении параметров. Некоторые такие бифуркации, приводящие к разрушению инвариантной кривой и возникновению хаоса, известны и в двумерном случае [1]. В трехмерном случае к ним можно добавить еще т.н. "бифуркации рассыпания" (когда исходная замкнутая инвариантная кривая распадается на несколько компонент связности) и некоторые другие. Для эргодических инвариантных кривых одной из наиболее известных и часто наблюдаемых в приложениях является бифуркация удвоения. Когда отображение T ориентируемо, такая бифуркация приводит к тому, что устойчивая кривая узлового типа становится седловой, у которой $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ – листы Мёбиуса, а в ее окрестности появляется замкнутая устойчивая инвариантная кривая двойной длины. В случае, когда отображение T неориентируемо, также могут наблюдаться бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых, однако они имеют другую структуру.

Рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений, обладающих гладкой эргодической замкнутой инвариантной кривой L_μ, которая при $\mu < \mu_0$ устойчива и имеет узловой тип, а при $\mu > \mu_0$ – седловая.

Теорема 1. *Предположим, что $T^2(\mu)$ вкладывается в поток в достаточно малой фиксированной окрестности кривой L_μ для всех близких к $\mu = \mu_0$ значений параметра μ. Тогда, при общих условиях, при $\mu > \mu_0$ кривая L_μ становится седловой, у которой $W^s_{loc}(L_\mu)$ и $W^u_{loc}(L_\mu)$ являются цилиндрами, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, образующие цикл периода 2, т.е. $T(L^1_\mu) = L^2_\mu$ и $T(L^2_\mu) = L^1_\mu$.*

В качестве иллюстрации этой теоремы в докладе рассматривается задача о сценариях возникновения дискретных аттракторов Шильникова, т.е. странных аттракторов содержащих неподвижную точку типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием [2], в однопараметрических семействах неориентируемых трехмерных отображений Эно.

Литература

1. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. — С. 3–26.

2. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная Динамика, 2012, т.8, № 1, с. 3–28.

ПСЕВДООБОБЩЕННЫЙ $\binom{\mu}{\nu}$-СДВИГ И ФОРМУЛА ПУАССОНА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

К.С. Елецких
kostan.yeletsky@gmail.com

УДК 517.951

Рассматривается краевая задача для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Операторы Бесселя в уравнении, вообще говоря, разной размерности. Получено представление решения в виде формулы Пуассона со специальным псевдосдвигом.

Ключевые слова: уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу, оператор Бесселя, псевдообобщенный $\binom{\mu}{\nu}$-сдвиг, формула Пуассона

Pseudo-generalized $\binom{\mu}{\nu}$-shift and the Poisson formula for solving a boundary value problem for the Euler – Poisson – Darboux equation

The boundary value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation is considered. Bessel operators in the equation, in general, of different dimensions. A representation of the solution in the form of a Poisson formula with a special pseudo-shift is obtained.

Keywords: Euler – Poisson – Darboux equation, Bessel operator, pseudo-generalized $\binom{\mu}{\nu}$-shift, Poisson formula

Рассматриваются сингулярные дифференциальные операторы Бесселя произвольных положительных размерностей β и γ:

$$B_\beta = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\beta}{t}\,\frac{d}{dt}\,, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}.$$

Пусть $k > 0$. В [1] решение задачи Коши для уравнения $B_{k,x}u(x,y) = B_{k,y}u(x,y)$, $u|_{x=0} = \Phi(x)$ найдено в виде обобщенного сдвига Пуассона начального условия:

$$u(x,y) = T_x^y\Phi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \Phi\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha}\right)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha. \quad (1)$$

Сдвиг T_x^y принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана.

Елецких Константин Сергеевич, ассистент, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Konstantin Yeletskikh (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

В [2] рассмотрено подобное уравнение, но более общее чем (1), поскольку операторы Бесселя, входящие в него, имеют, вообще говоря, различные положительные размерности.

Теорема. *В области* $\Omega = \{0 < x < 1, t \in (0,T)\}$ *существует и единственно решение* $u(x,t)$ *следующей краевой задачи*

$$B_{\beta,\,t}u(x,t) = B_{\gamma,\,x}u(x,t), \quad \gamma{>}0, \quad \beta{>}0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \tag{3}$$

Решение в виде ряда Фурье–Бесселя имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \quad X_n(x) = \frac{j_\nu(\lambda_n x)}{|j_\nu(\lambda_n)|},$$

$$u_n(t) = \varphi_n \; j_\mu(\lambda_n t), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(x) \; X_n(x)\, x^\gamma dx,$$

$\mu{=}\frac{\beta-1}{2}$, $\nu{=}\frac{\gamma-1}{2}$, $j_\nu(x) = 2^\nu\,\Gamma(1+\nu)\,\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, *а* J_ν *— функция Бесселя первого рода.*

Отметим, что рассмотренная выше функция j_ν является ограниченным (в начале координат) решением сингулярного уравнения Бесселя и определяется степенным равномерно сходящимся рядом

$$j_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+1)}{m!\,\Gamma\,(m{+}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad j_\nu(0) = 1.$$

Спектральные значения параметра λ_n находятся как решения уравнения $j'(\lambda_n){=}0$.

Полученное решение можно записать соответствующей формулой Пуассона. Если $\beta \neq \gamma$, то это решение имеет вид

$$u(x,t) = \overset{\nu,\mu}{V_x^t} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \; j_{\frac{\beta+\gamma-2}{2}}(\lambda_n x),$$

где псевдообобщенный $\overset{\nu,\mu}{V_x^t}$-сдвиг определен выражением:

$$\overset{\nu,\mu}{V_x^t}\, f(x) = \frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(r)\, d\theta,$$

$$r = \sqrt{2\cos\theta\,(x^2\, e^{i\theta} + t^2 e^{-i\theta})}.$$

Отметим, что эта конструкция сдвига не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана.

При $\beta = \gamma$ решение краевой задачи находится по формуле Пуассона [2]

$$u(x,t) = T_x^t \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = T_x^t \varphi(x),$$

где T_x^t — обобщенный сдвиг Пуассона, тот же, что и в формуле (1). Но в отличие от работы [1] здесь требуется согласование начальнного и граничных условий.

По схеме, предложенной в [2], находится и неограниченное (при $t \to \infty$) решение задачи (2), (3). В этом случае граничные условия при ($x = 0$) имеют предельную форму. Неограниченное решение представляет собой фундаментальное решение оператора Эйлера—Пуассона—Дарбу и выражается через j-функцию Неймана, введенную в [3].

Результаты заметки получены в соавторстве с Л.Н. Ляховым.

Литература

1. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи матем. наук, **VI**:2 (42) (1951), 102–143.

2. *Ляхов Л.Н., Елецких К.С., Санина Е.Л.* О формулах Пуассона для краевых задач уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу // ПМА, **97** (2019), 83–91.

3. *Ляхов Л.Н.* Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя // Труды математического института им. В.А. Стеклова, **278** (2012), 148–160.

ПРОБЛЕМА РИССА – РАДОНА – ФРЕШЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ И СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВ РАДОНОВСКИХ МЕР

В.К. Захаров, Т.В. Родионов

rodionovtv@mail.ru

УДК 517.987

Предложен критерий C_b-слабой компактности множеств положительных ограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве, восходящий к критерию Прохорова для польского пространства. Для общего хаусдорфова пространства, где пространство C_b ограниченных непрерывных функций может быть тривиально и не разделять точки и замкнутые множества, предложен критерий S-слабой компактности, где S — равномерно замкнутое линейное пространство метаполунепрерывных функций. Эти результаты существенно опираются на решение проблемы Рисса – Радона – Фреше описания радоновских интегралов как линейных функционалов, полученное авторами ранее.

Ключевые слова: радоновская мера, свойство Прохорова, равномерная узкость, слабая компактность, теорема Рисса о представлении

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ РФ (проект НШ-6222.2018.1).

Захаров Валерий Константинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valeriy Zakharov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Родионов Тимофей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Timofey Rodionov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Riesz – Radon – Frechet problem of characterization of integrals and weak compactness of sets of Radon measures

The paper presents some C_b-weak compactness criterion of a set of positive bounded Radon measures for a Tychonoff space similar to the well-known Prokhorov criterion. Since for a general Hausdorff space the classical space C_b of bounded continuous functions can be trivial and not separate points and closed sets, the S-weak compactness criterion is presented for this case, where S is the new uniformly closed linear space of metasemi-continuous functions. These results are esentially based on the solution of the Riesz – Radon – Frechet problem of characterization of Radon integrals as linear functionals obtained by the authors earlier.

Keywords: Radon measure, Prokhorov property, uniform tightness, weak compactness, Riesz representation theorem

Известный критерий Ю. В. Прохорова (1956) утверждает, что для слабой компактности замкнутого множества ограниченных радоновских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $(T, \mathcal{G})$ относительно слабой топологии, порождённой на пространстве $\mathfrak{RM}_b$ ограниченных радоновских мер семейством C_b ограниченных непрерывных функций, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

(α^π) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что $|\mu|(T \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$ (*равномерная узкость*);

(β) $\sup(|\mu|T \mid \mu \in M) \in [0, \infty)$.

Эти условия достаточны для слабой компактности на тихоновском (вполне регулярном) топологическом пространстве [2, IX.5.5]. Однако, они не будут необходимыми даже в случае положительных мер [3, 4.5.3, 4.5.4].

В случае общего хаусдорфова топологического пространства не имеет смысла рассматривать C_b-слабую компактность, ввиду возможной тривиальности семейства C_b: оно может состоять из одних только постоянных функций. Поэтому В.К. Захаров рассмотрел в [4] слабую компактность относительно линейного пространства S *симметризуемых функций*, являющегося равномерным замыканием введённого Ф. Хаусдорфом линейного пространства $SC_b^u + SC_b^l$, состоящего из сумм $f + g$ ограниченных функций, полунепрерывных сверху и полунепрерывных снизу. S-слабая топология на $\mathfrak{RM}_b$ сильнее C_b-слабой топологии, но строго слабее тривиальной топологии сходимости на борелевских множествах, использованной в [3, 5.6.14]. Заменяя условие (α^π) более строгим условием *локально равномерной узкости*

(α^ζ) для любого $G \in \mathcal{G}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$,

получаем следующий критерий.

Теорема 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство и $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. Замыкание $\operatorname{cl} M$ множества M в S-слабой топологии является S-слабо компактным тогда и только тогда, когда M обладает свойствами (α^ζ) и (β).*

Следствие. *Если $M \subset \mathfrak{RM}_b$ обладает свойствами (α^ζ) и (β), то его замыкание* $\operatorname{cl} M$ *в S-слабой топологии S-слабо компактно.*

В решении проблемы для тихоновского пространства используется следующее условие *хвостовой узкости*:

(α^z) для любой сети $(\mu_j \in M \mid j \in J)$ существует такая подсеть $(\mu_{j_i} \mid i \in I)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компактное множество C и индекс $i_0 \in I$, для которых $\mu_{j_i}(T \setminus C) < \varepsilon$ при всех $i \geqslant i_0$.

Теорема 2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство и $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. Множество M является C_b-слабо компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и обладает свойствами (α^z) и (β).*

Следствие. *Если $M \subset \mathfrak{RM}_b$ обладает свойствами (α^π) и (β), то его замыкание* $\operatorname{cl} M$ *в C_b-слабой топологии C_b-слабо компактно.*

Исторически оформились два способа доказательства достаточности в критериях слабой компактности множества M.

Первый способ связан с именами А. Д. Александрова [1], Ю. В. Прохорова [6], Ф. Топсо [7] и др. Он состоит в задании предельной радоновской меры $\mu_0 \in M$ для исходной сети $s \equiv (\mu_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ посредством некоторой сложной прямой формулы, выражающей μ_0 через $\mu_\varkappa$.

Второй способ восходит к Н. Бурбаки [2]. Он состоит в переходе от сети мер s к сети интегралов $\sigma \equiv (\int \cdot\, d\mu_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ в двойственном линейном пространстве C_b' всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве C_b. Далее используется теорема Алаоглу–Бурбаки о слабой компактности единичного шара в двойственном пространстве [5, теорема 7 (III.3)], согласно которой для сети σ существует предельный непрерывный функционал φ_0.

И, наконец, нужно использовать реализационную теорему Рисса–...–Прохорова–Бурбаки о представлении функционала φ_0 в виде интеграла $\varphi_0 = \int \cdot\, d\mu_0$ по некоторой радоновской мере μ_0. Эта мера μ_0 и является предельной для сети s. В силу важности этой теоремы приведём её точную формулировку [2, IX.5.2].

Теорема (Рисс–...–Прохоров–Бурбаки). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, то функционал $\varphi = \int \cdot\, d\mu$ является линейным и* ***узким****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что из $f \in C_b$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C)$ следует, что $|\varphi f| < \varepsilon$.*

2. *Если φ — узкий линейный функционал на C_b, то существует единственная ограниченная радоновская мера μ, такая что $\varphi = \int \cdot\, d\mu$.*

Данный способ Бурбаки используется в доказательстве теоремы 2.

Для доказательства же теоремы 1 используется подход Бурбаки, но с обобщением реализационной теоремы Рисса–...–Прохорова–Бурбаки на случай хаусдорфова пространства [4].

Теорема (Рисс–...–Прохоров–Бурбаки–Захаров). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство.*

1. *Если* $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, *то функционал* $\varphi = \int \cdot\, d\mu$ *является линейным, поточечно (монотонно)* σ*-непрерывным и* ***локально узким****, т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $G \in \mathcal{G}$ *существует такое компактное подмножество* $C \subset G$, *что из* $f \in S$ *и* $|f| \leqslant \chi(G \setminus C)$ *следует, что* $|\varphi f| < \varepsilon$.

2. *Если* φ — *локально узкий, поточечно (монотонно)* σ*-непрерывный, линейный функционал на* S, *то существует единственная ограниченная радоновская мера* μ, *такая что* $\varphi = \int \cdot\, d\mu$.

Приведённые реализационные теоремы являются частными случаями общей параметрической реализационной теоремы [8, 3.6.4], решающей проблему Рисса–Радона–Фреше характеризации радоновских интегралов как линейных функционалов.

Литература

1. *Александров А. Д.* Additive set functions on abstract spaces. III // Матем. сборник, **13**:3 (1943), 169-238.

2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. —М.: Наука, 1977.

3. *Богачёв В. И.* Слабая сходимость мер. — М: ИКИ, 2016.

4. *Захаров В. К.* Проблема Рисса – Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер // Труды МИРАН, **248** (2005), 106-116.

5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М: Наука, 1984.

6. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теор. вероятностей и её применения, **1** (1956), 177-238.

7. *Topsøe F.* Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence // Math. Scand. **34** (1974), 239-245.

8. *Zakharov V. K., Rodionov T. V., Mikhalev A. V.* Sets, Functions, Measures. Volume II: Fundamentals of Functions and Measure Theory (De Gruyter Studies in Mathematics, **68/2**). Berlin: Walter de Gruyter, 2018.

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СТРУНЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛОМ И ВЕСОМ

А.С. Иванов

andrew-ivanov95@yandex.ru

УДК 517.518

Цель данного доклада — обсуждение применимости метода Дородницына для вычисления первых собственных значений линейного операторного пучка с сингулярными коэффициентами из пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$. Приближенное решение строится с использованием полученных автором ранее формул следов целых отрицательных порядков рассматриваемого пучка. Обсуждается вопрос существования решения, а также доказывается теорема о корректности метода путем обобщения теоремы, доказанной ранее В. А. Садовничим и соавторами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, линейный пучок

Of applicability of A. A. Dorodnitsyn's method for calulation of the first eigenvalues of the string with singular potential and weight

The main goal of the speech is the discussion of the applicability of Dorodnitsyn's method for calculation of the first eigenvalues of linear operator pencil with singular coefficients from $W_2^{-1}[0,\pi]$ space. An approximate solution is constructed using the formulas for traces of entire negative orders for a considered pencil obtained by the author earlier. The existence of a solution is discussed, and a theorem on the correctness of the method is proved by generalizing a theorem proved earlier by V. A. Sadovnichii and co-authors.

Keywords: differential equations, spectral theory, linear pencil

Рассматривается линейный операторный пучок

$$A(\lambda) = Ly - \lambda Py.$$

Здесь $Ly = -y'' + q(x)y$ — оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, P — оператор умножения на сингулярный вес ρ. Потенциал и вес рассматриваются из негативного пространства Соболева $W_2^{-1}[0,\pi]$. Через u и v обозначим обобщенные первообразные из $L_2[0,\pi]$ потенциала q и веса ρ соответственно.

В работе [1] А. А. Дородницын предложил метод приближенного вычисления первых собственных значений краевых задач Штурма–Лиувилля с весом. Метод существенно использовал суммы целых степеней величин, обратных к собственным значениям задачи. Значительно позже корректность метода была доказана В. А. Садовничим и совторами в работе [2]. Авторы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Иванов Андрей Сергеевич, аспирант МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrei Ivanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

доказывали сходимость построенного Дородницыным приближенного решения к собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля с непрерыным и действительнозначным потенциалом и весом вида $\rho(x) = \rho_0(x)x^\alpha$, где $\alpha > -1$, предполагая абсолютную сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-1}$, где λ_j — собственные значения краевой задачи.

Для рассматриваемого сингулярного пучка автором совместно с А.М. Савчуком в работе [3] были получены оценки собственных значений.

Теорема 1. *Для любой функции $v \in L_2[0,\pi]$ величины $|\lambda_n|^{-1}$, где λ_n — собственные значения пучка $A(\lambda)$, удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{-1} \leqslant C \ln n, \qquad |\lambda_n|^{-1} \leqslant C \frac{\ln n}{n}.$$

В той же работе сформулирована теорема, дающая оценки на собственные значения пучка, если обобщенная первообразная v веса ρ рассматривается в шкале пространств $v \in W_2^\theta[0,\pi]$, $\theta \in [0,1]$.

Теорема 2. *Для любой функции $v \in W_2^\theta[0,\pi]$, $\theta \in [0,1]$ собственные значения пучка $A(\lambda)$ удовлетворяют оценке*

$$|\lambda_n| \geqslant C n^{1/p},$$

где $p > 1/(1+\theta)$ произвольно.

Полученные оценки влекут за собой абсолютную сходимость следов целых отрицательных порядков пучка $A(\lambda)$, начиная со 2, а именно величин $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-p}$, $p \geqslant 2$. Для следа порядка (-1) можно предполагать только условную сходимость. Отсутствие абсолютной сходимости для любого $P \in W_2^{-1}[0,\pi]$ доказывает пример из работы А. А. Владимирова [4], в которой автор строит неядерный мультипликатор из пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$ в пространство $W_2^{-1}[0,\pi]$.

Позднее, в работе [5] автором были получены формулы следов целых отрицательных порядков для пучка $A(\lambda)$ в терминах веса ρ и интегрального ядра операторого L^{-1}.

В настоящем докладе обсуждаются вопросы применимости метода Дородницына для вычисления первых собственных значений рассматриваемого линейного пучка. Обсуждаются вопросы существования приближенного решения, решение строится с использованием полученных автором формул следов целых отрицательных порядков, а теорема о корректности метода обобщается на случай условно сходящегося следа порядка (-1).

Литература

1. *Дородницын А.А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН, **7**:6 (1952), 3-96.

2. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М., Попов А.Ю.* Корректность метода А. А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач // Дифференц. уравнения, **38**:4 (2002), 471-476.

3. *Иванов А.С., Савчук А.М.* След порядка (-1) для струны с сингулярным весом // Матем. заметки, **102**:2 (2017), 197-215.

4. *Владимиров А.А.* Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // Дальневост. матем. журн., **15**:2 (2015), 156-165.

5. *Иванов А.С.* Следы высших отрицательных порядков для струны с сингулярным весом // Дифференц. уравнения, **54**:10 (2018), 1338-1348.

СВЕРТКИ В СОПРЯЖЕННЫХ К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О.А. Иванова

neo_ivolga@mail.ru

УДК 517.9

В топологическом сопряженном к счетному индуктивному пределу E весовых пространств Фреше целых функций многих комплексных переменных с помощью обычных сдвигов определено умножение — свертка. Полученная алгебра изоморфна коммутанту системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в E. В построенной алгебре аналитических функционалов в двух несмешанных случаях введена топология, с которой эта алгебра становится топологической и уже топологически изоморфна указанному коммутанту с соответствующей (естественной) операторной топологией.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, коммутант, оператор свертки

Convolutions in duals of weighted spaces of entire functions

We define a multiplication — convolution in the dual of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire functions of several variables. This algebra is isomorphic to the commutant of the system of partial derivatives in the algebra of all continuous linear operators in E. In the constructed algebra of analytic functionals in two pure cases a topology is defined. With this topology the mentioned algebra is topological and it is now topologically isomorphic to the considered commutant with its natural operator topology.

Keywords: weighted space of entire functions, algebra of analytical functionals, commutant, convolution operator

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., ст. преподаватель, Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

В докладе идет речь о свертке в сопряженных к весовым пространствам целых (в $\mathbb{C}^N$) функций и представлениях соответствующих алгебр аналитических функционалов. Для непрерывных функций $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ таких, что $v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, определим весовое пространтво целых функций

$$E := \{f \in H(\mathbb{C}^N) \Big| \ \exists n \, \forall k : \ \sup_{z \in \mathbb{C}^N} (|f(z)| \exp(-v_{n,k}(z)) < +\infty\},$$

снабженное естественной топологией счетного индуктивного предела пространств Фреше. Веса $v_{n,k}$ удовлетворяют стандартным техническим условиям, обеспечивающим инвариантность E относительно операторов частного дифференцирования, сдвига, умножения на независимые переменные. Пространства подобного вида часто возникают при реализации различных функциональных пространств и их сопряженных посредством преобразования Фурье-Лапласа и его аналогов.

Пусть E' — пространство линейных непрерывных функционалов на E. Для $\varphi, \psi \in E$ стандартным образом определим свертку $\varphi \otimes \psi$:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_t(\psi_z(f(t+z))), \ f \in E.$$

Обозначим символом $\mathcal{K}(\partial)$ коммутант системы $\{\partial_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ операторов частного дифференцирования в кольце всех линейных непрерывных операторов в E. Для функционала $\varphi \in E'$ введем оператор

$$A_\varphi(f)(z) := \varphi_t(f(t+z)), \ f \in E, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Отображение $\omega : (E', \otimes) \to \mathcal{K}(\partial)$, $\omega(\varphi) := A_\varphi$, является алгебраическим изоморфизмом «на».*

Возникает естественный вопрос о топологических свойствах этого изоморфизма и свертки $\otimes$: при каких условиях $(E', \otimes)$ является топологической алгеброй, а ω — топологическим изоморфизмом? Мотивацией подобного исследования является то, что топологические небанаховы алгебры имеют широкое поле применений: при изучении операторов обобщенного интегрирования, в спектральной теории в пространствах аналитических функционалов, в теории операторов обобщенного сдвига, групп и алгебр Ли. Указанная топологичность полезна при решении различных аппроксимационных задач, при исследовании операторов свертки A_φ. В общей ситуации ω является топологическим изоморфизмом пространства E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$ на $\mathcal{K}(\partial)$ со слабо-операторной топологией.

Оказалось, что независимость весов $v_{n,k}$ от n или от k является достаточным условием упомянутой топологичности, то есть нужное имеет место в несмешанных, "чистых" случаях. В таких ситуациях E является либо пространством Фреше, либо счетным индуктивным пределом банаховых пространств.

Теорема 2. *[2] Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ или $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$.*

(i) (E', λ) *с умножением* $\otimes$ *— топологическая алгебра. (При этом* λ *— некоторая топология проективного предела, соответственно, индуктивного предела последовательности банаховых пространств в* E'*. Она согласуется с двойственностью между* E' *и* E*.)*

(ii) $\omega : (E', \lambda) \to (\mathcal{K}(\partial), \mu)$ *— топологический изоморфизм "на". (При этом* μ *— некоторая естественная операторная топология в* $\mathcal{K}(\partial)$*).*

Роль топологичности рассматриваемой алгебры при изучении операторов свертки A_φ показывает, в частности,

Теорема 3. *[2] Предположим, что все многочлены содержатся в* E *и плотны в* E*. Пусть, кроме того, существует локально выпуклая топология* $\widetilde{\lambda}$ *в* E'*, согласующаяся с двойственностью между* E' *и* E*, такая, что* $(E', \widetilde{\lambda})$ *является топологической алгеброй с умножением* $\odot$*. Тогда* E' *с умножением* $\odot$ *не имеет делителей нуля.*

Следствие. *Пусть выполняются предположения теоремы 3. Тогда для любого* $\varphi \in E' \backslash \{0\}$ *множество* $A_\varphi(E)$ *плотно в* E*.*

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфимск. матем. журн., **9**:3 (2017), 38-49.

2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер., **24**:3 (2018), 14-22.

ОБОБЩЕННЫЕ ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИУВИЛЛЯ-ЛИЗОРКИНА И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

М. Илолов

ilolov.mamadsho@gmail.com

УДК 517-983-5,517-968-7

Приводится сравнительный анализ операции свертки в пространствах обобщенных функций и операции дробного дифференцирования. На этой основе установлена связь между мультипликаторами и свертывателями в соответствующих функциональных пространствах. Полученные результаты могут найти применения при анализе линейных дифференциальных операторов с частными производными дробного порядка.

Ключевые слова: обобщенное лиувиллевское дифференцирование, функциональные пространства, мультипликатор, свертыватель, преобразование Фурье.

Илолов Мамадшо, д.ф.-м.н., профессор, Академия наук Республики Таджикистан (Душанбе, Таджикистан); Mamadsho Ilolov (Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Generalized fractional Liouville-Lizorkin derivatives and some of their properties

A comparative analysis of the convolution operation in spaces of generalized functions and the operation of differentiation is given. On this basis, a relationship is established between the multipliers and convolutors in the corresponding functional spaces. The obtained results can be used in the analysis of linear differential operators with partial derivatives of fractional order.

Keywords: generalized Liouville differentiation, functional spaces, multiplier, convolutor, Fourier transform.

Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций убывающих на ∞ быстрее любой степени $|x|$. Для функции $u \in S(\mathbb{R}^n)$ определено преобразование Фурье

$$\hat{u} = (\mathcal{F})(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x) e^{i<\zeta,x>} dx, \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$u(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = \frac{1}{(2u)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\zeta) e^{-<\zeta,x>} d\zeta, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Существует стандартная процедура распространения операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ на $S^{'}(\mathbb{R}^n)$ -пространство обобщенных функций медленного роста.

Отметим, что классы $S(\mathbb{R}^n)$ плохо приспособлены для дробных интегралов и производных. Функции $I^{\alpha}_{\pm}\varphi$, $D^{\alpha}_{\pm}\varphi$ где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ являются бесконечно дифференцируеммыми, но недостаточно "хорошо"ведут себя, вообще говоря, на бесконечности. В этой связи в [1] введено пространство $\Phi(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, которое является инвариантным относительно дробного интегродифференцирования.

Рассмотрим n-мерный дробный интеграл Лиувилля

$$I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n_{+\ldots+}} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt, \tag{3}$$

где $R_{+\ldots+}$ октант $\{t : t_1 \geqslant 0, \cdots t_n \geqslant 0\}, t^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1} \cdots t_n^{\alpha_n-1}$.

Для интеграла (3) с учетом (2) при $0 \leqslant \alpha_k < 1, k = 1, \cdots n$ справедлива формула

$$\mathcal{F}I^{\alpha}\varphi = (-ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \tag{4}$$

где $(-ix)^{-\alpha} = (-ix_1)^{-\alpha_1} \cdots (-ix_n)^{-\alpha_n}, \varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Из формулы (4) следует, что требуемая инвариантность класса Φ будет иметь место, если функция $\varphi(t)$ этого класса будет иметь образы Фурье $\hat{\varphi}(x)$, тождественно аннулирующиеся на гиперплоскости $x_k = 0$.

Обозначим через Ψ подкласс пространства $S(\mathbb{R}^n)$, состоящий из функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на гиперплоскостях $x_k = 0$.

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(\mathbb{R}^n), (D^j\psi)(x_1 \cdots x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n) = 0$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots; k = 1, \cdots, n\}.$$

Прообразы Фурье функций из Ψ образуют пространство Лизоркина $\Phi = \Phi(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \hat{\varphi} \in \Psi\}$. Так как

$$\hat{\varphi}^j(x)\big|_{x_k=0} = \int_{\mathbb{R}^{n-i}} e^{i<x^I,t^I>}(t^I)^{j^I}dt^i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t^I, \zeta^{j_k})d\zeta,$$

где $t^I = (t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n), j^I = (j_1, \cdots, j_{k-1}, j_{k+1}, \cdots, j_n)$, то класс $\Phi(\mathbb{R}^n)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, для которых равны нулю все моменты.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n)\zeta^m d\zeta = 0, m = 0, 1, 2, \cdots$$

вдоль координатных осей, $k = 1, \cdots, n$.

Отметим также, что в пространстве Φ определена непрерывная операция сдвига $\tau_h(\varphi) = \varphi(x + h)$. Обозначим через Ψ' и Φ' сопряженные к Ψ и Φ пространства обобщенных функций, соответственно.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. Если функционал f типа функции $f(\zeta)$ является мультипликатором в пространстве Ψ', то функционал $D = \hat{f}$ -свертыватель в пространстве Φ' и имеет место формула

$$\widetilde{D * g} = \tilde{D} \cdot \tilde{g}.$$

В условиях теоремы $f(\zeta) = (i\zeta)^r = (i\zeta_1)^{r_1} \cdots (i\zeta_n)^{r_n}$. Вычислим прообраз $D^r = D^{r_1 \cdots r_n}$ этой функции. Для этой цели представим функцию $(i\zeta)^r$ в виде прямой суммы

$$(i\zeta)^r = (i\varepsilon_1)^{r_1} \times (i\zeta_2)^{r_2} \times \ldots \times (i\zeta_n)^{r_n}.$$

Ясно, что данная функция принадлежит $S^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме о преобразовании Фурье прямого произведения имеем

$$(i\hat{\zeta})^r = (i\hat{\zeta_1})^{r_1} \times (i\hat{\zeta_2})^{r_2} \times \cdots \times (i\hat{\zeta_n})^{r_n}.$$

При нецелых значениях $(i\zeta_{r_k})^{r_k}$ является многозначной функцией и имеет вид

$$(i\zeta_{r_k})^{r_k} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}rk} \cdot \zeta_k^{rk}, & \text{если } \zeta_k > 0, \\ e^{-i\frac{\pi}{2}rk} \cdot |\zeta_k^{rk}|, & \text{если } \zeta_k < 0. \end{cases}$$

Возьмем ветвь $(i\zeta_k)^{r_k} = e^{i\frac{\pi}{2}rk}(\zeta_k - i0)^{rk}$, и получим

$$(i\hat{\zeta_k})^{r_k} = \frac{1}{\Gamma(-r_k)} \cdot \frac{1}{\underset{+}{x}_k^{1+r_k}},$$

$$D^{r_1\cdots r_n}(x)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(-r_k)}\cdot\frac{1}{\overset{+}{x}{}_1^{1+r_1}}\times\frac{1}{\overset{+}{x}{}_2^{1+r_2}}\times\cdots\times\frac{1}{\overset{+}{x}{}^{1+r_n}},$$

где

$$\overset{+}{x}{}^{\gamma}=\begin{cases}x^{\gamma}, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Таким образом под дробной обобщенной производной Лиувилля будем понимать свертку обобщенной функции $f\in\Phi'$ с обобщенной функцией $D^{r_1\cdots r_n}x\in\Phi'$. Операторы $D^{r_1\cdots r_n}$ образуют аддитивную перестановочную группу по вектор-параметру $(r_1,\cdots,r_n)$ и при $r_k<0, k=1;h$, приводят к интегралу Римана-Лиувилля порядка $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$.

В работах [2, 3] рассматриваются близкие по идее вопросы.

Литература

1. *П. И. Лизоркин* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Матем. сб., **60**:3 (1963), 325–353.

2. *К. Х. Бойматов, П. И. Лизоркин* Оценки роста решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения **25**:4 (1989), 578–588.

3. *Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н.* О дробных линейных уравнениях в банаховых пространствах Доклады Академии наук РТ,**61**:2 (2018), 113-119.

О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Н.С. Иманбаев

imanbaevnur@mail.ru

УДК 517.927

Исследуется распределение нулей целых функций специального вида, связанных со спектральными задачами.

Ключевые слова: нули целых функций, интегральное представление, спектр, асимптотика

On the zeros of a class of entire functions, having an integral representation

The question of the distribution of zeros of some specific kind of entire functions connected with spectral problems is studied.

Keywords: zeros of entire functions, integral representation, spectrum, asymptotics

Иманбаев Нурлан Сайрамович, к.ф.-м.н., профессор, Южно-Казахстанский государственный педагогический университет (Шымкент, Казахстан); Nurlan Imanbaev (South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan.)

Рассматривается вопрос распределения нулей целых функций вида

$$f(z) = 1 + Az + z^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} \exp\left(\rho(\omega_j x + \omega_{j+1} y)\right) \cdot D(x,y)dxdy, \qquad (1)$$

где $\rho = \sqrt[3]{z}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{2\pi ij}{3}\right)$, $i = \sqrt{-1}$, A-константа, $D(x,y)$ — абсолютно интегрируемая функция.

Исследование нулей целых функций вида (1), совпадающих с квазиполиномами, и их связь со спектральными задачами отражена в [1-4].

Теорема 1. *Пусть $D(x,y)$ абсолютно интегрируемая на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функция. Если функция $D(x,y)$ непрерывна и отлична от нуля в окрестности квадрата, тогда нули функции $f(z)$, достаточно большие по модулю, могут быть только в секторах сколь угодно малого раствора ε*

$$\left|Argz \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $\omega_1 D(1,0) + D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{-2ik\pi}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_2} \cdot \ln\left(\frac{\omega_1 D(1,0) + D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$

$$+O\left(\max\left(\ln k\omega\left(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k}\right); 1\right)\right), \quad k >> 1,$$

где $\omega(\delta)$-модуль непрерывности функции $D(x,y)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $D(1,0) + \omega_2 D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz + \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{2ik\pi}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \cdot \ln\left(\frac{D(1,0) + \omega_2 D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$

$$+O\left(\max\left(\ln k\omega\left(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k}\right); 1\right)\right), \quad k >> 1,$$

Доказана следующая [5]:

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ имеет вид (1). Допустим, что функция $D(x,y)$ в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка по переменным x, y. Если $\omega_1 D(1,0) + D(0,1) \neq 0$ и $D(1,1) \neq 0$, то нули z_k функции $f(z)$ имеют ту же асимптотику, что и в теоремах 2, 3, остаточный член которых записывается в виде $O(1/k)$.*

В формулировках теорем 2, 3, числа, выраженные через логарифмы, можно включить в остаточные члены. В то же время в теореме 4 эти величины существенно уточняют асимптотику.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех., **No.6** (1982), 41–51.

2. *Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белаббаси Ю.* О нулях целых функций одного класса // Труды семинара им. И.Г. Петровского, Вып. **8** (1982), 211–217.

3. *Седлецкий А.М.* Когда все нули целой функции экспоненциального типа лежат в криволинейной полуплоскости (необходимое условие) // Мат. сб., **186**:9 (1995), 125–134.

4. *Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е.* О нулях целых функций, имеющих интегральное представление // Известия НАН РК. Сер. физ-мат., **No.3** (1995), 47–52.

5. *Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T.* On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations, **2013**:110 (2013), 1–5.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Х.К. Ишкин

ishkin62@mail.ru

УДК 517.984.4

Изучаются классы несамосопряженных операторов, сохраняющих некоторые спектральные свойства при малых возмущениях. Показано, что при относительно компактных возмущениях сохраняются свойства: принадлежность резольвенты классу Неймана–Шаттена, наличие хотя бы одного луча наилучшего убывания резольвенты, а при дополнительных условиях типа Данфорда–Шварца — базисность системы корневых векторов для суммирования методом Абеля– Лидского.

Ключевые слова: несамосопряженные операторы, спектральная неустойчивость, базисность для суммирования методом Абеля– Лидского

On the stability of some classes of non-self-adjoint operators

We study classes of non-self-adjoint operators that preserve certain spectral properties under small perturbations. We have shown that with relatively compact perturbations, the following properties are preserved: the Schatten–von Neuman property of the resolvent, the presence of at least one ray of the best decrease of the resolvent, and under additional conditions of Dunford–Schwarz type, the Abel-Lidskii basis property of root vectors.

Keywords: non-self-adjoint operators, spectral instability, Abel–Lidskii basis property

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Khabir K. Ishkin, professor (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространств, T_0 – плотно определенный в $\mathcal{H}$ замкнутый оператор с дискретным спектром. В работе [1] М. В. Келдыш получил широкие условия на возмущения, сохраняющие свойство полноты системы корневых векторов (СКВ) и асимптотику спектра самосопряженного оператора T_0 с резольвентой класса Неймана–Шаттена $\mathfrak{S}_p$. Как показывают многочисленные примеры (см. [2] и имеющиеся там ссылки), для операторов, не представимые в виде $T = T_0 + V$, где T_0 самосопряжен, V — T_0-компактен, теорема Келдыша не работает. Между тем такого рода операторы (далее — ДСО (далекие от самосопряженных операторы)) довольно часто возникают в различных разделах физики и механики (см., например, [2,3]). В связи с этим возникает задача среди ДСО выявить классы операторов, обладающих определенными свойствами, которые сохраняются при малых (в каком-либо смысле) возмущениях.

В настоящей заметке мы рассмотрим два таких класса. Как было отмечено, спектр ДСО не обязательно локализуется около вещественной прямой, потому может быть бесконечным в любом угле $\{\theta_1 < \arg\lambda < \theta_2\}$. В связи с этим будем говорить, что спектр T_0 *локализован около луча* $\arg\lambda = \alpha$ тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0$

$$N(T_0, r) \sim N(T_0, \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon, r), \quad r \to +\infty,$$

где $N(T, \eta, \zeta, r)$ и $N(T, r)$ – число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta < \arg\lambda < \zeta,\ |\lambda| < r\}$ и круге $\{|\lambda| < r\}$.

Далее обозначим через $S_{p,\alpha}$ множество плотно определенных в $\mathcal{H}$ операторов с резольвентой класса $\mathfrak{S}_p$ и со спектром, локализованным около луча $\arg\lambda = \alpha$. Луч $\arg\lambda = \varphi$ называют *лучом наилучшего убывания* резольвенты оператора T, если существуют $R > 0, C > 0$, что при всех $r > R$ $\|(T_0 - re^{i\varphi})^{-1}\| \leqslant Cr^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть* $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, $(-\infty, 0]$ *– луч наилучшего убывания* T_0^{-1} *и оператор* V *компактен относительно* T_0. *Тогда найдутся* $\varepsilon_0 > 0, R_0 > 0$, *такие, что при всех* λ *из* $U_0 = \{\lambda :\ |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon_0,\ |\lambda| \geqslant R_0\}$ *оператор* $R_\lambda := (T_0 + V - \lambda)^{-1}$ *существует и принадлежит* $\mathfrak{S}_p$. *При этом каждый луч* $\{\lambda = re^{i\alpha}\ (|\alpha - \pi| \leqslant \varepsilon_0\}$ *является лучом наилучшего убывания* R_λ.

Прежде, чем сформулировать следующий результат, напомним, что означает понятие *базиса для суммирования методом Абеля–Лидского*. Предположим сначала, что все собственные числа $\{\mu_k\}$ оператора T содержатся в угле $\Theta = \{\mu :\ |\arg\mu| < \theta\}$. Пусть $\alpha \in (0, \pi/2\theta)$. Положим $\mu^\alpha = |\mu| e^{i\alpha \arg\mu}$, $\mu \in \Theta$. Тогда для любого $t > 0$ $e^{-\mu^\alpha t} \to 0$, $\Theta \ni \mu \to \infty$. Положим

$$S_k(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} e^{-\mu^\alpha t} (T - \mu)^{-1} d\mu,$$

где γ_k – положительно ориентированный контур, целиком лежащий в угле Θ и содержащий внутри себя μ_k. Если при любом $t > 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k(t)$ сильно сходится к некоторому оператору $S(t)$ и для любого $f \in \mathcal{H}$ $\lim\limits_{t \to +0} S(t) f = f$, то говорят, что СКВ оператора T образует *базис для метода суммирования Абеля–Лидского порядка* α. Сформулированное понятие естественным образом обобщается на случай, когда оператор T удовлетворяет условиям:

(DS1) $T^{-1} \in \mathfrak{S}_p, p < \infty$;

(DS2) существуют лучи $\gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \varphi_k\}$ и $R > 0$ такие, что $|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leqslant \pi/p$, $\gamma_k \cap \{|\lambda| > R\} \subset \rho(T)$ и при некотором $N \geqslant -1$

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = O(\lambda^N), \gamma_k \ni \lambda \to \infty,$$

(подробности см., в работе [4, п. 6.4]). Условия (DS1) – (DS2) впервые были введены Н. Данфордом и Дж. Шварцем [5, Глава XI, § 9].

Теорема 2. *Пусть оператор удовлетворяет условиям* $(DS1)$ – $(DS2)$ *с* $N = -1$ *и оператор* V T_0*-компактен. Тогда СКВ оператора* $T_0 + V$ *образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка* $p + \varepsilon$ *с произвольным* $\varepsilon > 0$.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР, **77**:1 (1951), 11-14.

2. *Mennicken R., Möller M.* Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. — Amsterdam–London: Elsevier, 2003.

3. *Bagarello F., Gazeau J.P., Szafraniec F.H., Znojil M.* Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects. — Hoboken: John Wiley and Sons, 2015.

4. *Войтович Н.Н., Кацеленбаум В.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. — Москва: Наука, (1977)

5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. **2**. — Москва: ИЛ, 1966.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

С.И. Кадченко, А.В. Пуршева, Л.С. Рязанова

sikadchenko@mail.ru, avpursheva@gmail.com, ryazanova2006@rambler.ru

УДК 519.624.2

Разработан численный метод восстановления возмущающего потенциала оператора Штурма-Лиувилля, заданного на двухреберном геометрическом графе, по спектральным характеристикам возмущенного и соответствующего ему невозмущенного операторов. Метод был апробирован на последовательном графе. Результаты численных экспериментов показали хорошую точность и высокую вычислительную эффективность разработанного метода.

Ключевые слова: спектральная теория операторов, обратные спектральные задачи, собственные значения и собственные функции операторов.

Кадченко Сергей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, МГТУ им. Г.И. Носова (Магнитогорск, Россия); Sergey Kadchenko (Nosov Magnitogorsk State Technical Univesity, Magnitogorsk, Russia)

Пуршева Анастасия Викторовна, аспирант кафедры уравнений математической физики, ЮУрГУ(НИУ) (Челябинск, Россия); Anastasiia Pursheva (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Рязанова Любовь Сергеевна, к.п.н., доцент, МГТУ им. Г.И. Носова, магистрант кафедры уравнений математической физики, ЮУрГУ(НИУ) (Магнитогорск, Челябинск, Россия); Lyubov Ryazanova (Nosov Magnitogorsk State Technical Univesity, Magnitogorsk, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

The numerical method for solving inverse spectral problems on a geometric graph

The numerical method had been developed for the reconstructing of perturbing potential of the Sturm-Liouville's operator given on a two-edge geometrical graph from the spectral characteristics of perturbed and corresponding unperturbed operators. The method was tested on the sequential graph. The results of a numerical experiments showed a good accuracy and a high computational efficiency of the developed method.

Keywords: operator's spectral theory, inverse spectral problems, eigenvalues and eigenfunctions of operators.

В работе В.А. Садовничего и В.В. Дубровского [1] были изложены идеи численного метода вычисления приближенных первых собственных значений возмущенных самосопряженных операторов. В последствии, используя эти идеи и метод Галеркина, удалось доказать следующую теорему [2]. При этом удалось снять ограничение на норму возмущающего потенциала.

Теорема 1. *Пусть L – дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H и удовлетворяет однородным граничным условиям, заданных для оператора L, то его приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_k$ находятся по формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \tag{1}$$

где $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$, $n \in N$.

В [2], [3] показано, что формулы (1) позволяют с большой вычислительной точностью находить приближенные собственные значения дискретных полуограниченных операторов. Используя (1), нами построен алгоритм численного решения обратных спектральных задач на геометрических графах. Рассмотрим двухреберный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ – множество вершин, $\mathbf{E} = \{E_1, E_2\}$ – множество ребер. Каждое ребро имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$, $j = 1, 2$. Пусть на графе $\mathbf{G}$ задана вектор-функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, каждая компонента которой $u_j(s_j)$ отвечает соответствующему ребру E_j.

Рассмотрим на графе $\mathbf{G}$ обратную спектральную задачу в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{g} = (g_1, g_2),\ g_j \in L_2(0, l_j),\ j = 1, 2\}$ [4]

$$-\frac{d^2 u_j}{ds_j^2} + p_j(s_j)u_j = \mu u_j, \quad u_j = u_j(s_j), \quad s_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \left.\frac{du_1}{ds_1}\right|_{s_1=0} = 0, \quad u_1(s_1) = u_2(0), \\ d_1 \left.\frac{du_1}{ds_1}\right|_{s_1=l_1} - d_2 \left.\frac{du_2}{ds_2}\right|_{s_2=0} = 0, \quad \left.\frac{du_2}{ds_2}\right|_{s_2=l_2} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

В H определено скалярное произведение [4]

$$(\mathbf{g},\mathbf{h})=\sum_{j=1}^{2}d_j\int\limits_0^{l_j}g_jh_jds,\quad \mathbf{g},\mathbf{h}\in\mathbf{G}. \tag{4}$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения прямой задачи (2)-(3), занумерованные в порядке неубывания их вещественных частей, а через $\{v_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие им ортонормированные собственные функции, заданные на ребрах E_j графа $\mathbf{G}$ для случая, когда $p_j(s_j)\equiv 0$. Система собственных функций $\{v_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Согласно теореме 1, собственные значения (2), (3) μ_k $(k=\overline{1,\infty})$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\mu_k=\int\limits_0^{l_{max}}\Big[&d_1\chi_1(s)\Big(-v_{1k}''(s)+p_1(s)v_{1k}(s)\Big)v_{1k}(s)+\\&+d_2\chi_2(s)\Big(-v_{2k}''(s)+p_2(s)v_{2k}(s)\Big)v_{2k}(s)\Big]ds+\delta_k,\end{aligned} \tag{5}$$

где $l_{max}=\max(l_1,l_2)$, $\chi_j(s)=\begin{cases}1, & s\in[0,l_j],\\ 0, & s>l_j.\end{cases}$ $j=1,2.$

Используя (4), запишем (5) в виде

$$\int\limits_0^{l_{max}}\Big[d_1\chi_1(s)v_{1k}^2(s)p_1(s)+d_2\chi_2(s)v_{2k}^2(s)p_2(s)\Big]ds=\mu_k-\lambda_k-\delta_k,\quad k=\overline{(1,\infty)}.$$

На основе этих уравнений составим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$AP\equiv\int\limits_0^{l_{max}}\widehat{K}(x,s)P(s)ds=f(x),\ c\leqslant x\leqslant d, \tag{6}$$

где A – оператор Фредгольма,

$$\widehat{K}(x_k,s)=\Big(K_1(x_k,s)\quad K_2(x_k,s)\Big),\quad P(s)=\begin{pmatrix}P_1(s)\\P_2(s)\end{pmatrix},$$
$$f(x_k)=\mu_k-\lambda_k-\delta_k,\ x_k\in[c,d].$$

Пусть ядро $\widehat{K}(x,s)$ интегрального уравнения (6) непрерывно и замкнуто в $\Pi=[0,l_1]\times[0,l_2]\times[c,d]$, а $f(x)\in L_2[c,d]$, $P_j(s)\in W_2^1[0,l_j]$, $j=1,2$.

Точные значения функции $f(x)$ неизвестны, но известны ее приближенные значения $\widetilde{f}(x)$ такие, что $||f-\widetilde{f}||_{L_2[c,d]}<\delta$. Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (6) является некорректно поставленной. Введем в рассмотрение сглаживающий функционал Тихонова

$$\Phi_\alpha[P,\widetilde{f}]=||AP-\widetilde{f}||^2_{L_2[c,d]}+\alpha\Omega[P]. \tag{7}$$

Элемент P_α ищется из условия, что функционал (7) достигает минимального значения. Система уравнений, определяющая экстремали функционала $\Phi_\alpha[P, \widetilde{f}]$, имеет вид

$$\begin{cases} \alpha[p_1^\alpha(t) - q(p_1^\alpha)''(t)] + \int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{11}(s,t)p_1^\alpha(s) + R_{21}(s,t)p_2^\alpha(s)\Big]ds = F_1(t), \\ \alpha[p_2\alpha(t) - q(p_2^\alpha)''(t)] + \int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{12}(s,t)p_1^\alpha(s) + R_{22}(s,t)p_2^\alpha(s)\Big]ds = F_2(t). \end{cases}$$

Здесь

$$\int\limits_0^{l_{max}} \Big[R_{mn}(s,t)p_m^\alpha(s)ds = \int\limits_0^{l_{max}} p_m^\alpha(s)ds\Big[\int_c^d K_m(x,s)K_n(x,t)dx\Big]ds,$$

$$F_m(t) = \int_c^d K_m(x,t)\tilde{f}(x)dx,$$

$m, n = 1, 2$, $t \in [a, b]$, $q > 0$, α — параметр регуляризации.

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты по восстановлению значений функций $p_j(s)$ в узлах дискретизации в обратной спектральной задаче (2), (3), показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики.

Литература

1. *Садовничий В.А., Дубровский В.В.* Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов // Труды семинара им. И.Г Петровского, №17 (1994), 244-248.

2. *Kadchenko, S.I.* A numerical method for inverse spectral problems / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **8**:3 (2015), 116-126.

3. *Kadchenko, S.I.* Spectral problems on compact graphs / S.I. Kadchenko, S. N. Kakushkinm G.A. Zakirova // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **10**:3 (2017), 156-162.

4. *Баязитова А.А.* Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование", **16**:192 (2010), 4-10.

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В L^P

А.С. Калитвин

kalitvinas@mail.ru

УДК 517.968

Важнейшие свойства линейных интегральных уравнений связаны с их фредгольмовостью. Линейные уравнения второго рода с частными интегралами не являются фредгольмовыми даже в общем случае непрерывных ядер. В связи с этим изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений с частными интегралами в пространствах Лебега L^p.

Ключевые слова: операторы и уравнения с частными интегралами, фредгольмовость, обратимость

The Fredholm property of linear equations with partial integrals in L^p

The most important properties of linear integral equations are related to their Fredholm property. Linear equations of the second kind with partial integrals are not Fredholm even in the general case of continuous kernels. In this connection, we study the Fredholm property of linear integral equations with partial integrals in Lebesgue spaces L^p.

Keywords: operators and equations with partial integrals, Fredholm property, invertibility

К линейным уравнениям с частными интегралами приводятся задачи механики сплошных сред, теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро - дифференциальных уравнений с частными производными и другие проблемы, причем решения уравнений понимаются в различных смыслах. Это приводит к необходимости изучения уравнений в пространствах, которые выбираются в зависимости от смысла понимаемых в уравнениях решений [1–4].

В [5] условия (критерии) фредгольмовости получены для интегральных уравнений с частными интегралами и ядрами из пространства непрерывных вектор-функций со значениями в L^1, однако при этих условиях соответствующие операторы, вообще говоря, не действуют в пространстве L^p. Поэтому в работе изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений с частными интегралами в пространствах Лебега L^p.

Пусть $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $D = [a,b] \times [c,d]$, функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ измеримы на $D \times [a,b]$, $D \times [c,d]$, $D \times D$ соответственно.

Калитвин Анатолий Семенович, д.ф.-м.н., профессор, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия); Anatolij Kalitvin (Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia)

В пространстве $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ изучается фредгольмовость линейных интегральных уравнений второго рода с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s). \quad (1)$$

Пусть $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Будем предполагать, что

$$\int_a^b |l(t,s,\tau)|^q d\tau \leqslant \tilde{L}, \int_c^d |m(t,s,\sigma)|^q d\sigma \leqslant \tilde{M} \int_a^b\int_c^d |n(t,s,\tau,\sigma)|^q d\tau d\sigma \leqslant \tilde{N}, \quad (2)$$

и для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$

$$\int_a^b |l(t_1,s_1,\tau) - l(t_2,s_2,\tau)|^q d\tau < \epsilon, \int_c^d |m(t_1,s_1,\sigma) - m(t_2,s_2,\sigma)|^q d\sigma < \epsilon, \quad (3)$$

$$\int_a^b\int_c^d |n(t_1,s_1,\tau,\sigma) - n(t_2,s_2,\tau,\sigma)|^q d\tau d\sigma < \epsilon. \quad (4)$$

При сделанных предположениях линейные операторы

$$(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

действуют и непрерывны в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ и в $C(D)$ [3], оператор

$$(L(s)x)(t) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau \ (c \leqslant s \leqslant d),$$

вполне непрерывен как оператор, действующий из $L^p([a,b])$ в пространство $C([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, оператор

$$(M(t)x)(s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(\sigma)d\sigma \ (a \leqslant t \leqslant b)$$

вполне непрерывен как оператор, действующий из $L^p([c,d])$ в пространство $C([c,d])$ непрерывных на отрезке $[c,d]$ функций [6]. При этом операторфункции $L(s)$ и $M(t)$ непрерывны по норме операторов, действующих из $L^p([a,b])$ и $L^p([c,d])$ в пространства $C([a,b])$ и $C([c,d])$ соответственно [3, 4].

В дальнейшем линейное уравнение $x = Ax+f$ будем называть фредгольмовым в рассматриваемом банаховом функциональном пространстве, если линейный оператор A ограничен в этом пространстве, а оператор $I-A$, где I — единичный оператор, имеет замкнутое множество значений, конечные размерности ядра и коядра соответственно и равный нулю индекс.

Следующий пример показывает, что даже в простейшем случае линейное интегральное уравнение второго рода с гладкими ядрами не является фредгольмовым ни в $C(D)$ и ни в $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Приме 1. *Однородное интегральное уравнение второго рода с частными интегралами*

$$x(t,s) = \int\limits_0^1 x(\tau,s)d\tau + \int\limits_0^1 x(t,\sigma)d\sigma \tag{5}$$

не является фредгольмовым ни в пространстве $C(D)$ и ни в пространстве $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где $D = [0,1] \times [0,1]$.

Действительно, функция $x(t) \equiv 1$ является собственной функцией компактного в $C([0,1])$ и в $L^p([0,1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ интегрального оператора

$$(\bar{L}x)(t) = \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau,$$

соответствующей собственному числу 1, а ядро $\ker(\bar{L})$ этого оператора бесконечномерно. Тогда бесконечномерно ядро оператора $I-\bar{K}$, содержащее множество $1 \otimes \ker(\bar{L})$, следовательно, уравнение (5) не является фредгольмовым.

Теорема 1. *Если функции l, m, n удовлетворяют условиям (2)–(4), то в $L^p(D)$ фредгольмовость уравнений $(I-L)x = f$ и $(I-M)x = f$ равносильна их обратимости и обратимости в $L^p([a,b])$ и в $L^p([c,d])$ уравнений $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [c,d])$ и $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [a,b])$ соответственно, а фредгольмовость в $L^p(D)$ уравнения (1) равносильна обратимости в $L^p([a,b])$ и в $L^p([c,d])$ уравнений $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [c,d])$ и $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [a,b])$.*

Литература

1. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтер-ра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.

3. *Appell J.M., Kalitvin A. S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro - differential equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.

4. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

5. *Калитвин А.С.* Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифференциальные уравнения, **42**:6 (2006), 1194-1200.

6. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин
kalitvin@mail.ru

УДК 517.968

Рассматривается определение линейных операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами. Приводятся условия обращения в нуль спектрального радиуса этих операторов в пространстве непрерывных функций и в пространствах L^p.

Ключевые слова: операторы Вольтерра с частными интегралами, спектральный радиус, свойство Андо

On spectral radius of Volterra operators with multidimensional partial integrals

The definition of Volterra linear operators with multidimensional partial integrals is considered. The conditions for the vanishing of the spectral radius of these operators in the space of continuous functions and in the spaces L^p are given.

Keywords: Volterra operators with partial integrals, spectral radius, Ando property

Пусть T и S — компактные множества положительной лебеговой меры в конечномерных пространствах, $D = T \times S$, $C(D)$ — пространство непрерывных функций на D, L, M, N, K— операторы

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \iint\limits_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\ K = L + M + N,$$

где l, m, n — заданные измеримые на $D \times T$, $D \times S$, $D \times D$ действительные функции соответственно.

Функции l, m, n назовем ядрами Вольтерра, если в T и S заданы семейства замкнутых множеств $\{T(t) : t \in T\}$ и $\{S(s) : s \in S\}$, причем $t \in T(t)$, $s \in S(s)$, при $\bar{t} \in T(t)$ $T(\bar{t}) \subset T(t)$, при $\bar{s} \in S(s)$ $S(\bar{s}) \subset S(s)$ и выполнены следующие свойства:

а) для каждого $\delta > 0$ существуют конечные множества $T(\delta) = \{t_1, \cdots, t_p\}$, $S(\delta) = \{s_1, \cdots, s_q\}$ такие, что $mes(T(t_{i-1})\Delta T(t_i)) < \delta$ $(i = 1, \cdots, p)$, $T(0) = \emptyset$, $\cup_{i=1}^{p} T(t_i) = T$; $mes(S(s_{j-1})\Delta S(s_j)) < \delta$ $(j = 1, \cdots, q)$, $S(0) = \emptyset$, $\cup_{j=1}^{q} S(s_j) = S$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств;

Калитвин Владимир Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия); Vladimir Kalitvin (Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia)

б) $l(t,s,\tau)=0$ при $\tau\notin T(t)$, $m(t,s,\sigma)=0$ при $\sigma\notin S(s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=0$ при $\tau\notin T(t)$ или $\sigma\notin S(s)$.

Примеры ядер Вольтерра приведены в [1].

Через $r(K), r(L), r(M), r(N)$ обозначим спектральные радиусы операторов K, L, M, N.

Теорема 1. *Если операторы L, M, N с ограниченными ядрами Вольтерра действуют в $C(D)$, то $r(K)=r(L)=r(M)=r(N)=0$.*

Пусть $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных по $(t,s)\in D$ вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$ и

$$n(t,s,\tau,\sigma)=\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\chi_{T(t)}(\tau), n(t,s,\tau,\sigma)=\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma),$$

$$l(t,s,\tau)=\bar{l}(t,s,\tau)\chi_{T(t)}(\tau), m(t,s,\sigma)=\bar{m}(t,s,\sigma)\chi_{S(s)}(\sigma), \qquad (1)$$

где через $\chi_{T(t)}(\tau)$ и $\chi_{S(s)}(\sigma)$ обозначены характеристические функции множеств $T(t)$ и $S(s)$ соответственно.

Теорема 2. *Если $\bar{l}(t,s,\tau)\in C(L^1(T))$, $\bar{m}(t,s,\sigma)\in C(L^1(S))$, $\bar{n}(t,s,\tau,\sigma)\in C(L^1(D))$, L, M, N — операторы с ядрами Вольтерра (1) и $K=L+M+N$, то в $C(D)$ $r(K)=r(L)=r(M)=r(N)=0$.*

Пусть $u=mes\, T_1+mes\, S_1$, где $T_1\subset T$ и $S_1\subset S$ —измеримые множества, и $\delta(A)=\overline{\lim_{u\to 0}}\|P_{D_1}AP_{D_1}\|$, где оператор $A\in\{K,L,M,N\}$, P_{D_1} — оператор умножения на характеристическую функцию χ_{D_1} множества $D_1=T_1\times S_1$, а норма оператора $P_{D_1}AP_{D_1}$ рассматривается как норма этого оператора, действующего в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Если $\delta(A)=0$, то говорят, что оператор A обладает свойством Андо.

Свойство Андо выполнено для оператора K, если оно выполнено для операторов L, M, N. Через $]K[,]L[,]M[,]N[$ обозначим операторы с ядрами $|l|,|m|,|n|$. Если меры на множествах T и S не содержат атомы, то действующий в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ оператор $]K[$ обладает свойством Андо точно тогда, когда свойством Андо обладают операторы $]L[,]M[,]N[$, причем из свойства Андо для этих операторов вытекает свойство Андо для операторов K, L, M, N. Если ядра действующих в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ операторов L, M, N ограничены, то операторы $]K[,]L[,]M[,]N[$ обладают свойством Андо. Другие условия, из которых следует свойство Андо, приведены в [2].

Так как $r(A)\leqslant\delta(A)$ [2], то равенство нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с частными интегралами в пространствах $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ вытекает из свойства Андо для этих операторов.

Теорема 3. *Если оператор Вольтерра $A\in\{K,L,M,N\}$ действует в $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и обладает свойством Андо, то $r(A)=0$.*

В заключение отметим, что к линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся задачи теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными [2–4]. Условия равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с одномерными частными интегралами приведены в [1, 2, 5], а операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами — в [1].

Литература

1. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтер-ра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006.

2. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

3. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

4. *Appell J.M., Kalitvin A. S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro - differential equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.

5. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА В ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛЕБЕГА

А.А. Калыбай, Р. Ойнаров

kalybay@kimep.kz, o_ryskul@mail.ru

УДК 517.983.34

Рассматривается интегральный оператор вольтеррового вида. Получены критерии его ограниченности из весового пространства Соболева в весовое пространство Лебега. При этом предполагается, что ядро оператора неотрицательное и удовлетворяет условию $Q_n, n \geqslant 0$.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, весовое пространство Соболева, интегральный оператор, ограниченность

Boundedness of one class of integral operators from a weighted Sobolev space into a weighted Lebesgue space

A Volterra type integral operator is considered. Criteria of its boundedness from a weighted Sobolev space to a weighted Lebesgue space are obtained. In addition, it is assumed that the kernel of the operator is nonnegative and satisfies the condition $Q_n, n \geqslant 0$.

Keywords: weighted Lebesgue space, weighted Sobolev space, integral operator, boundedness

---

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом AP05130975 КН МОН РК.

Калыбай Айгерим Айсултанкызы, к.ф.-м.н., доцент, Университет КИМЭП (Алматы, Казахстан); Aigerim Kalybay (KIMEP University, Almaty, Kazakhstan)

Ойнаров Рыскул, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Ryskul Oinarov (The L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Пусть $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть υ, ρ, u и ω неотрицательные на I функции такие, что υ^p, ρ^p, ω^p,u^r, $\rho^{-p'}$, $\omega^{-q'}$ локально суммируемы на I.

Обозначим через $W_p^1(u, \upsilon) \equiv W_p^1(u, \upsilon, I)$ пространство всех локально абсолютно непрерывных на I функций, для которых конечно норма

$$\|f\|_{W_p^1} = \|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ - обычная норма пространства $L_p(I)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon) \equiv \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon, I)$ обозначим замыкание множества $\overset{\circ}{AC}(I) \cap W_p^1(\rho, \upsilon)$ по норме пространства $W_p^1(\rho, \upsilon)$.

Пусть $L_{p,\upsilon} \equiv L_p(\upsilon, I)$ пространство всех измеримых на I функций с конечной нормой $\|f\|_{p,\upsilon} \equiv \|\upsilon f\|_p$.

Рассмотрим ограниченность интегрального оператора

$$\mathcal{K}^+ f(x) = \int_a^x K(x, s) f(s) ds, \quad x \in I, \tag{1}$$

из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon)$ в $L_{q,}(\omega, I)$, т.е. выполнение неравенства

$$\|\omega \mathcal{K}^+ f\|_q \leqslant C(\|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p), \quad f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$ и ядро оператора (1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geqslant 0$. Тогда для оператора (1) неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда $\max\{F_i^+, G_j^+\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j), $i, j = 1, 2$; при этом для наилучшей постоянной $C > 0$ в (2) имеет место соотношение $C \approx \max\{F_i^+, G_j^+\}$, $i, j = 1, 2$. Здесь $F_i^+ = \sup\limits_{z \in I} F_i^+(z)$, $G_j^+ = \sup\limits_{z \in I} G_j^+(z)$,*

$$F_1^+(z) = \left(\int_a^{\mu^-(z)} \rho^{-p'}(x) \left(\int_z^b \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) ds \right)^q \omega^q(t) dt \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_2^+(z) = \left(\int_z^b \omega^q(t) \left(\int_a^{\mu^-(z)} \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x) dx \right)^{\frac{q}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$G_1^+(z) = \sup_{y \in \Delta_\mu^+(z)} \left(\int_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)} \rho^{-p'}(x) \left(\int_y^z \left(\int_{\varphi^-(x)}^t K(t, s) ds \right)^q \omega^q(t) dt \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$G_2^+(z) = \sup_{y\in\Delta_\mu^+(z)} \left(\int_y^z \omega^q(t) \left(\int_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)} \left(\int_{\varphi^-(x)}^{t} K(t,s)ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{q}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$\Delta_\mu^+(z) = [\varphi^-(\mu^-(z)), z]$.

Определение функции $\varphi^\pm, \mu^\pm$ и множества $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$ можно найти в [1].

Литература

1. *Ойнаров Р.* Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева // Известия РАН, серия математическая, **78**:4 (2014), 207–223.

ИЗМЕНЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ЗА СЧЕТ ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Б.Е. Кангужин
kanbalta@mail.ru

УДК 517.9, 517.43

С помощью дельта-образных возмущений в работе удается изменить начальную конечную часть спектра оператора Лапласа. В данной работе показано, что возмущение с точечным носителем можно выбрать так, чтобы изменилось только конечное число собственных значений исходного оператора

Ключевые слова: оператор Лапласа, задача Дирихле, максимальный оператор, дельта-образное возмущение, резольвента, спектр оператора

Change of the finite part of the spectrum of the Laplace operator due to delta-shaped perturbations

Using delta-shaped perturbations in the work it is possible to change the initial final part of the spectrum of the original operator. This paper shows that a point-supported perturbation can be chosen so that only a finite number of eigenvalues of the original operator changed.

Keywords: Laplace operator, Dirichlet problem, maximal operator, delta-shaped perturbation, resolvent, spectrum of the operator

---

Работа выполнена при частичной поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН Республики Казахстан (проект № AP05131292).

Кангужин Балтабек Есматович, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Baltabek Kanguzhin (al-Farabi Kazakh National University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

В 1986 году В.А. Садовничий и В.А. Любишкин [1] исследовали поведение резольвент конечномерного возмущения дискретных операторов в зависимости от условий налагаемых на возмущения. При этом их конечномерные возмущения позволяют либо ослаблять, либо получать новые условия, налагаемые на возмущения. В данной работе в отличие от указанной работы В.А. Садовничего и В.А. Любишкина, конечномерному возмущению подвергается не исходный дискретный оператор, а обратный к нему оператор. Последнее обстоятельство позволяет интерпретировать такие возмущения, как дельтообразные возмущения исходного оператора. С помощью дельта-образных возмущений в работе удается изменить начальную конечную часть спектра исходного оператора. Подобные результаты по возмущению конечной части спектра оператора Штурма-Лиувилля исследованы в работах H. Hochstadt.

Пусть $d-$ натуральное число. В пространстве $\mathbb{R}^d$ возьмем односвязную область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $q_0 \in L_1(\Omega)$. Запишем неоднородное уравнение

$$-\Delta u(x) + q_0(x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

с условиями Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Оператор соответствующей задаче Дирихле (1)-(2) в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначим через B_0. Считаем, что потенциал q_0 выбран так, что существует

$$B_0^{-1} f(x) = \int_\Omega G(x,t) f(t) dt. \tag{3}$$

Ядро интегрального оператора (3) называется функцией Грина краевой задачи Дирихле (1)-(2). Когда $q_0(x) = \overline{q_0(x)}$ оператор $B_0 = B_0^*$ и поэтому обладает следующими свойствами:

1) $G(x,t) = G(t,x), \quad x,t \in \Omega$;

2) Существует бесконечное число вещественных собственных значений

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \dots;$$

3) Система собственных функций $\{w_n(x)\}\infty_{n=1}$ оператора B_0 образует ортогональный базис пространства $L_2(\Omega)$.

В данной работе потенциал $q_0(x)$ заменим на другой потенциал $q(x) = q_0(x) + p(x)$ и соответствующий оператор обозначим через B_p. Основной результат работы - существуют функций $p(x)$ с $supp(p) = x^0$, где $x^0 \in int\Omega$, для которых собственные значения операторов B_0 и B_p совпадают. Известно, что при $d = 1$, $\Omega = (0,1)$ спектр оператора B_0 не изменяется при замене потенциала $q(x)$ на $q(1-x)$. В отличие от указанного случая, в настоящей работе возмущение $p(x)$ имеет точечный носитель. Здесь сохранение спектра оператора B_0 выполняется не за счет симметрии, а за счет других механизмов. Утверждения о сохранении собственных значений при $d = 1$ в случае многоточечных задач можно найти в работе [2]. В работах [3-5] исследуется возможность конечномерного возмущения спектра оператора. В данной работе показано, что возмущение $p(x)$ с точечным возмущением можно выбрать так, чтобы изменилось только конечное число собственных

значений оператора B_0. В указанных работах [3-5] рассматривались только регулярные возмущения потенциала. В предлагаемом случае возмущение $p(x)$ представляет дельта-образную функцию. В 80-е годы на семинаре В.А. Садовничего результаты H. Hochstadt усиленно обсуждались с тем, чтобы перенести его результаты на случай одномерных дифференциальных операторов с нераспадающимися граничными условиями. Представленные в настоящей работе результаты можно интерпретировать как перенос некоторых результатов H. Hochstadt на операторы с условиями во внутренней точке. Представленные в работе результаты справедливы при всех $d \geqslant 1$. В то же время работы [3-5] посвящены случаю $d = 1$.

Литература

1. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функц. анализ и его прил., **20**:3 (1986), 55-65.

2. *Кангужин Б.Е.* Критерии Вайнштейна и регуляризованные следы в случае поперечных колебаний упругой струны с пружинами // Диференц. уравн., **54**:1 (2018), 9-14.

3. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville systems // Quart. S. Math., **6** (1955), 121-127.

4. *Hochstadt H.* The Inverse Sturm-Liouville Problem // Communication on Pure and Applied Mathematics, **26** (1973), 715-729.

5. *Левитан Б.М.* Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному и двум спектрам // Изв. АН СССР, **42**:1 (1978), 185-199.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Н.Н. Конечная

n.konechnaya@narfu.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен способу нахождения главного члена асимптотики решений некоторых линейных дифференциальных уравнений, когда независимая переменная x бесконечно большая, т.е. при $x \to +\infty$. При этом предполагается, что коэффициенты исходного уравнения являются суммами некоторых чисел и производных первого порядка в смысле теории распределений от некоторых функций, убывающих на бесконечности в интегральном смысле.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с коэффициентами – распределениями, квазипроизводные, асимптотика решений дифференциальных уравнений

Работа частично выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Конечная Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., зав. кафедрой, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Natalia Konechnaya (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

Asymptotics of solutions to linear differential equations with distribution coefficients

The report is devoted to the method of finding the principal term of the asymptotics of solutions to some linear differential equations, when the independent variable x is infinitely large, that is, with $x \to +\infty$. In this case, it is assumed that the coefficients of the original equation are sums of some numbers and first-order derivatives in the sense of the theory of distributions of certain functions decreasing at infinity in the integral sense.

Keywords: differential equations with distribution coefficients, quasi-derivatives, asymptotics of solutions to differential equations

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и λ – комплексные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – комплекснозначные измеримые на $R_+ (:= [0, +\infty))$ функции, такие, что

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} |p_j| \in L^1_{loc}(R_+).$$

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует понимать уравнение вида

$$y^{(n)} + (a_1 + p_1(x))y^{(n-1)} + (a_2 + p_2'(x))y^{(n-2)} + \ldots + (a_n + p_n'(x))y = \lambda y,$$

где все производные понимаются в смысле теории распределений. Используя эту конструкцию, установлено, что главный член асимптотики при $x \to +\infty$ фундаментальной системы решений этого уравнения и их производных определяется, как и в классическом случае, по корням многочлена

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n - \lambda,$$

если функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ удовлетворяют определенным условиям интегрального убывания на бесконечности.

В докладе более подробно будет рассматрен случай, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \lambda = 0$, а именно, будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2'(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n'(x)y = 0.$$

Пусть функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *такие, что*

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} x^{j-2}|p_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда это уравнение имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots n$, *такую, что при* $x \to +\infty$ *справедливы равенства*

$$y_j^{[s]}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!}(1 + o(1)), & \text{если } s = 0, 1, \ldots, j-1, \\ x^{j-1-s}\, o(1), & \text{если } s = j, j+1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Доклад основан на совместной работе с Мирзоевым К.А. “Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка” // Математические заметки (в печати).

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.584, 517.518.34, 517.956.227

Исследуется спектральная задача с наклонной производной для оператора Лапласа в круге D. Установлены асимптотические свойства собственных значений и доказано свойство базисности со скобками в $L_2(D)$ системы корневых функций отмеченной задачи.

Ключевые слова: задача с наклонной производной, оператор Лапласа, собственные значения, корневые функции, базис Рисса, базис со скобками

The basis property of the root system functions of oblique derivative problem for the Laplace operator

We investigate a spectral problem with an oblique derivative for the Laplace operator in a disc D. The asymptotic properties of the eigenvalues and the basis property with brackets in $L_2(D)$ of the system of root functions are established.

Keywords: oblique derivative problem, Laplace operator, eigenvalues, root functions, Riesz basis, basis with brackets

Свойство полноты системы корневых функций эллиптических операторов с условием равенства нулю наклонной производной на границе области изучалось в [1, 2]. Вопрос о базисности таких систем долгое время оставался открытым. В 1994 году вышла статья [3], где было доказано отсутствие свойства базисности в $L_p(D)$ (при любом $1 < p < \infty$) у системы собственных и присоединённых функций задачи с наклонной производной для оператора Лапласа в круге D. Развивая результаты [3], мы показываем, что система корневых функций этой задачи образует базис со скобками в $L_2(D)$.

Работа выполнена при частичной поддержке программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013). Второй автор поддержан РФФИ (проект № 18-01-00236).

Костин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Andrew Kostin (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

В единичном круге $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ рассматривается спектральная задача

$$\Delta w + \mu^2 w = 0, \quad (x,y) \in D, \qquad \frac{\partial w}{\partial l} = 0, \quad (x,y) \in \partial D, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\mu^2 \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, l — направление, составляющее постоянный угол $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ с внешней нормалью к ∂D. Как показано в [3] (см. также [4]), все собственные значения $\lambda = \mu^2$ этой задачи описываются корнями уравнений

$$\mu J_n'(\mu)\cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu)\sin\alpha = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

с функцией Бесселя $J_n(\mu)$ комплексной переменной μ. Из [1] следует, что система корневых функций задачи (1) полна в $L_2(D)$. Согласно [3] присоединённых функций у задачи нет, все собственные функции даются формулами

$$u_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) = e^{in\varphi}\, J_n(\mu_{n,\,k}(\alpha)\, r), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

а биортогональная система имеет вид (черта сверху означает комплексное сопряжение)

$$v_{m,\,j}(r,\varphi;\alpha) = e^{im\varphi}\, J_m(\overline{\mu}_{m,\,j}(\alpha)\, r), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Здесь $\mu_{n,\,k}(\alpha)$ — корни уравнения (2), выделенные условием $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ и занумерованные в порядке возрастания модуля. Корень $\mu = 0$ учитывается только для $n = 0$, т. е. $\mu_{0,\,1} = 0$, а для всех остальных таких корней выполнено $\operatorname{Re}\mu_{n,\,k}(\alpha) > 0$. Как в [3], после нормировки систем (3) и (4) получим

$$\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) = u_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha)/I_{n,\,k}, \quad \widehat{v}_{m,\,j}(r,\varphi;\alpha) = v_{m,\,j}(r,\varphi;\alpha)/\,\overline{I}_{m,\,j}\,, \tag{5}$$

где

$$I_{n,\,k} = \sqrt{\pi}\, J_n(\mu_{n,\,k}(\alpha))\sqrt{1 - n^2\,\mu_{n,\,k}^{-2}(\alpha)\cos^{-2}\alpha}, \quad I_{0,\,1} = \sqrt{\pi}, \tag{6}$$

а $\{\widehat{u}_{n,\,k}\}$ и $\{\widehat{v}_{m,\,j}\}$ с индексами $n, m \in \mathbb{Z}$; $k, j \in \mathbb{N}$, есть биортонормированная пара в комплексном пространстве $L_2(D)$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} r\, u(r,\varphi)\,\overline{v(r,\varphi)}\, dr\, d\varphi \tag{7}$$

и нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Таким образом, система (3) полна и минимальна в $L_2(D)$, но не образует базис в этом пространстве. В настоящей работе установлена базисность со скобками системы (3) в пространстве $L_2(D)$.

Пусть $H = L_2(D)$ — основное гильбертово пространство со скалярным произведением (7). Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$H_n = \bigl\{u \in L_2(D) \mid u(r,\varphi) = e^{in\varphi}\, U(r),\ U \in L_{2,r}(0,1)\bigr\},$$

где $L_{2,r}(0,1)$ обозначает комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(f,g)_0 = \int\limits_0^1 r f(r)\,\overline{g(r)}\, dr$.

Ясно, что $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — это система ортогональных подпространств H, причём $H = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} H_n$. Система $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис из подпространств гильбертова пространства H (см. [5]), но в отличие от стандартной ситуации в спектральной теории (см., например, [6, 7]), здесь $\dim H_n = \infty$.

Теорема 1. *Пусть значения $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ выбраны произвольно и фиксированы. Система*

$$\big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha)\big\}_{k\in\mathbb{N}}$$

является базисом Рисса подпространства H_n пространства $H = L_2(D)$.

Теорема 2. *При любом значении $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ система функций*

$$\big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big\{\widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha)\big\}_{k\in\mathbb{N}},$$

определенных в (5), образует базис со скобками пространства $H = L_2(D)$. Именно, всякий элемент $u \in H$ раскладывается и притом единственным образом в ряд

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{n,\,k}\, \widehat{u}_{n,\,k}(r,\varphi;\alpha) \right). \tag{8}$$

Здесь $u_n \in H_n$, и все ряды сходятся в H. Коэффициенты разложения (8) даются формулами

$$C_{n,\,k} = I_{n,\,k}^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r\, u(r,\varphi)\, \overline{v_{n,\,k}}(r,\varphi;\alpha)\, dr\, d\varphi\,,$$

где функции $v_{n,\,k}$ и числа $I_{n,\,k}$ заданы в (4) и (6) соответственно.

Важную роль в исследовании играют положительные корни уравнения $J_n'(z) = 0$. Упорядочим их по возрастанию, обозначим $j'_{n,\,k}$ и получим последовательность $0 < j'_{n,\,1} < j'_{n,\,2} < \ldots < j'_{n,\,k} < \ldots$.

Теорема 3. *Пусть значения $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0, \pi/2)$ фиксированы. Для корней $\mu_{n,\,k}(\alpha)$ уравнения (2) при $k \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_{n,\,k}(\alpha) = j'_{n,\,k} + \frac{in\,\mathrm{tg}\,\alpha}{j'_{n,\,k}} + \frac{n^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2j'^3_{n,\,k}} + \frac{in^3\ \mathrm{tg}\,\alpha(3+\mathrm{tg}^2\,\alpha)}{3j'^3_{n,\,k}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{j'^5_{n,\,k}}\Big).$$

Краткое изложение представленных результатов см. в [8].

Литература

1. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. on Pure and Appl. Math., **15** (1962), 119-147.

2. *Моисеев Е. И.* О полноте собственных функций некоторых краевых задач // Докл. АН СССР, **226**:5 (1976), 1012-1014.

3. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифференц. уравнения, **30**:1 (1994), 128-143.

4. *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* On complex roots of an equation arising in the oblique derivative problem // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **788** (2017) 012052 doi:10.1088/1742-6596/788/1/012052. P. 1-7.

5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.

6. *Агранович М. С.* О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной частью // Функц. анализ и его прил., **28**:3 (1994), 1-21.

7. *Шкаликов А. А.* О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Теория функций и дифференциальные уравнения. Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН, **269** (2010), 290-303.

8. *Костин А. Б., Шерстюков В. Б.* Базисность системы корневых функций задачи с наклонной производной // Докл. АН, **482**:1 (2018), 12-15.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕСОВОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.К. Кусаинова, Я.Т. Султанаев, Г. Мурат

leili2006@mail.ru, sultanaevyt@gmail.com, gulnar_18.01@mail.ru

УДК 517.951

Рассматривается самосопряженный оператор L, ассоциированный с замыканием в гильбертовом пространстве $L_{2,w}$ квадратичной формы $a_m[u,f]=\int_\Omega\left(\sum_{|\alpha|=m}\rho^2(x)D^\alpha u\overline{D^\alpha f}+\upsilon_m^2(x)u\overline{f}\right)dx$, $f,u\in C_0^\infty(\Omega)$. Получены аппроксимативные оценки компактов $BH\cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$ для определенных весовых интерполяционных пространств H.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, интерполяционное пространство, поперечники компактов

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP 05133397).

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Leili Kussainova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ имени М. Акмоллы (Уфа, Россия); Yaudat Sultanaev (M. Akmolla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia)

Мурат Гульнар, докторант, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Gulnar Murat (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan)

Approximate estimates for one differential operator in a weighted Hilbert space

We consider a self-adjoint operator L associated with a closure in the Hilbert space $L_{2,w}$ of a quadratic form $a_m[u,f] = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|=m} \rho^2(x) D^\alpha u \overline{D^\alpha f} + v_m^2(x) u \overline{f} \Big) dx,\ f,u \in C_0^\infty(\Omega)$. We obtain approximate estimates of the compacts $BH \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$ for certain weighted interpolation spaces H.

Keywords: differential operator, interpolation space, widths of compacts

В работе приняты обозначения: BX — единичный шар в банаховом X, $L_{2,\omega}$ — пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_1 = \int_\Omega f \overline{g} \omega(x) dx,$$

$\omega(x) > 0$ п. в. в Ω, $\omega \in L_{loc}(\Omega)$, I^n — множество кубов $Q = Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_j - x_j| < h/2; 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $v_s(x) = \rho(x) h^{-s}(x)$ $(s > 0)$, ρ и $h(\cdot)$ — положительные функции, заданные в области Ω и удовлетворяющие условиям:

1) $0 < h(\cdot) \leqslant 1$,
2) для любого $x \in \Omega$ $Q(x) = Q_{h(x)}(x) \subset \Omega$,
3) существует такое $\varkappa > 1$, что

$$\varkappa^{-1} \leqslant \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leqslant \varkappa, \text{ если } y \in \widetilde{Q}(x) = \frac{3}{4} Q(x).$$

Положим $v_s(x) = \rho(x) h^{-s}(x)$, $(s > 0)$. Пусть $\{Q^j, j \in J\}$ - семейство Безиковича, выделенное из множества кубов $\{\widetilde{Q}(x), x \in \Omega\}$ [1, §1.1].

Обозначим через $H_p^s(\rho, v_s)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по порме

$$\|f; H_p^s(\rho, v_s)\| = \Big[\sum_{j \geqslant 1} \big(\rho^p(x^j) \|\psi_j f; H_p^s\|^p + v_s^p(x^j) \|\psi_j f\|_p^p \big) \Big]^{1/p}, 1 < p < \infty, \tag{1}$$

где

$$(J_s f)(x) = \Big(F^{-1} (1 + \xi^2)^{s/2} F f \Big)(x); \ \left(\xi^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right).$$

Нормы, заданные в $C_0^\infty(\Omega)$ посредством равенства вида (1), эквивалентны.

Пусть $\{A_0, A_1\}$ - интерполяционная пара банаховых пространств. Обозначим через $[A_0, A_1]_\theta$, $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ $(0 < \theta < 1, 1 \leqslant q < \infty)$ интерполяционные прстранства, построенные методом комплексной инерполяции, методом вещественной интерполяции [2].

Теорема 1. *Пусть* $1 < s_1 < s_0$, $1 < p < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $0 < \theta < 1$, $v_i = \rho h^{-s_i}(\cdot)$. *Тогда*

$$\Big[H_p^{s_0}(\rho, v_0), H_p^{s_1}(\rho, v_1) \Big]_\theta H_p^s[\rho, v_s].$$

Для целого $m > 0$ ($m \in \mathbb{N}$) пространство H_p^m есть пространство Соболева W_p^m. Поэтому $H_p^m(\rho, \upsilon_m)$ есть весовое пространство Соболева $W^m(\rho, \upsilon_m)$ с эквивалентной нормой

$$\|u; W_p^m(\rho, \upsilon_m)\| = \Big(\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} |\rho(x) D^\alpha u|^p + |\upsilon_m(x) u|^p \right) dx \Big)^{1/p}.$$

Для $s = [s] + \{s\}$ $(0 < \{s\} < 1)$ $W_p^s(\rho, \upsilon_s)$ определяется как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u; W_p^s(\rho, \upsilon_s)\| = \|\upsilon_s u; L_p(\Omega)\| + \\ + \Big[\sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{\big|\rho(x)\big(D^\alpha u(y) - D^\alpha u(x)\big)\big|^p}{|y-x|^{n+\{s\}p}} dxdy \Big]^{1/p}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < m_1 < m_0$ *— целые,* $1 < p < \infty$, $pm_1 > n$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)m_0 + \theta m_1$ *— нецелое. Тогда*

$$\big(W_p^{m_0}(\rho, \upsilon_0), W_p^{m_1}(\rho, \upsilon_1)\big)_{\theta,p} = W_p^s(\rho, \upsilon_s).$$

Пусть $\mathcal{B}_x = \Big\{ Q \in I^n, Q \subset \widetilde{Q}(x) \Big\}$, $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{B}_x$. Зададим на семействе $\mathcal{B}$ максимальный оператор

$$M^* f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{B},\ x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int |f|, \quad f \in L_{loc}(\Omega).$$

Положим

$$\Phi(x) = \rho^{-1}(x) \sqrt{M^*\omega(x)},$$
$$\Omega_{\lambda,m} = \{x \in \Omega : \Phi(x) h^m(x) > \lambda\},\ \lambda \geqslant 0,$$
$$\mathcal{K}_m(\lambda) = \int_{\Omega_\lambda} \Phi^{n/m}(x) dx.$$

Если $K_m = \mathcal{K}_m(0) < \infty$, то оператор L положительно определен и имеет компактный обратный оператор [3].

Пусть $\mathcal{F}$ — центрально-симметрическое и ограниченное подмножество в $L_{2,\omega}$, $\delta_k(\mathcal{F}) = \delta_k(\mathcal{F}, L_{2,\omega})$, $d_k(\mathcal{F}) = d_k(\mathcal{F}, L_{2,\omega})$ — линейный k-поперечник, соответственно k-поперечник по Колмогорову множества $\mathcal{F}$ [4, §1.5].

Запись $\omega \in A_1(\mathcal{B})$ будет означать, что

$$\sup_Q M^*\omega \leqslant c \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega,\ \forall Q \in \mathcal{B}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < m_1 < m_0$ *— целые,* $2m_1 > n$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)m_0 + \theta m_1$. *Пусть* L *— оператор, ассоциированный с формой* $a_{m_1}[\cdot,\cdot]$, $K_{m_i} < \infty$, $W_i = W_2^{m_i}(\rho, \upsilon_i)$, $(i = 0, 1)$. *Справедливы утверждения:*

a) Пусть s — нецелое, $W_s = (W_0, W_1)_{\theta,2}$, $\mathcal{F}_s = BW_s \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$. Тогда

$$\sup_{k\geqslant 0}(k+1)^{s/n} d_k(\mathcal{F}_s) \leqslant c_1 K_0^{(1-\theta)m_0/n} K_1^{\theta m_1/n}.$$

b) Пусть $[H]_s = [W_0, W_1]_\theta$, $M_s = B[H]_s \cap \mathrm{L}^{-1}(BL_{2,\omega})$, $\omega \in A_1(\mathcal{B})$. Тогда

$$c_2^{-1}\lambda^{-n/m_0}\mathcal{K}_{m_0}(c_2\lambda) \leqslant \sum_{\delta(M_s)>\lambda} 1 \leqslant c_2\lambda^{-n/m_1}\mathcal{K}_{m_1}(c_2^{-1}\lambda).$$

Постоянные $c_l = c_l(\varkappa, n, p, m_0, m_1)$ $l = 1, 2$.

Литература

1. *Guzman M.* Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$. — Springer–Verlag, 1975.

2. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces. Differentiol Operators. — VEB Deutsch. Verlag. B., 1978.

3. *Айтенова М. С., Кусаинова Л.К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложения весовых классов Соболева // Математический журнал. Алматы, **2**:1, 3–9, **2**:2 (2002), 7–14.

4. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Издательство Московского университета, 1976.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.А. Кусраева

zali13@mail.ru

УДК 517.9

Основной результат утверждает, что если E — сепарабельная решетка Фреше, а F — (локально телесная) топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством, любой положительный линейный оператор T_0 из мажорируемого подпространства $E_0 \subset E$ в F допускает продолжение до линейного положительного оператора T из E в F.

Ключевые слова: топологическая векторная решетка, сепарабельность, σ-интерполяционное свойство, мажорирующее подпространство, положительный оператор.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследования, проект N 18-31-00205

Кусраева Залина Анатольевна, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, РНОМЦ ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Zalina Kusraeva (Regional mathematical center of SFEDU, Rostov-on-Don, Russia; Southern Mathematical Institute VSC RAS)

On extension of positive operators

The main result: If E is a separable Frechet lattice, and F is a (locally solid) topological vector lattice with the σ-interpolation property, then any positive linear operator T_0 from a majorizing subspaces $E_0 \subset E$ to F can be extended to a linear continuous positive operator T from E to F.

Keywords: topological vector lattice, σ-interpolation property, majorizing subspace, separability, positive operator

Операторы из векторной решетки E в векторную решетку F обладают хорошими свойствами в том случае, когда F порядково полна. Так, например, классическая теорема Л. В. Канторовича утверждает, что если F порядково полна, то положительный линейный оператор, действующий из мажорирующего подпространства $E_0 \subset E$ в F, допускает продолжение на все E с сохранением линейности и положительности, см. [1]. Напомним, что подпространство E_0 называют *мажорируемым*, если для любого $x \in E$ найдется $y \in E_0$ такой, что $x \leqslant y$. В некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты F за счет предъявления к E некоторых дополнительных условий. В данной работе рассматривается именно такое взаимодействие условий сепарабельности E и σ-интерполяционного свойства F в задаче о продолжении положительных линейных операторов. Введем соответствующие понятия. Недостающие сведения можно найти в [1], [2], [3], [4]. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются архимедовыми и вещественными.

Говорят, что архимедова векторная решетка F обладает *σ-интерполяционным свойством* (или *свойством Кантора*), если для любых последовательностей (x_n) и (z_n) в F, удовлетворяющих неравенству $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in F$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, см. [3; определение 1.1.7 (iv)] или [5; определение 146.6]. Эквивалентное условие состоит в том, что для любых двух счетных множество $U \subset F$ и $V \subset F$ таких, что $u \leqslant v$ для любых $u \in U$ и $v \in V$, существует элемент $y \in F$ для которого $u \leqslant y \leqslant v$, каковы бы ни были $u \in U$ и $v \in V$.

Пусть теперь векторная решетка E одновременно является топологическим векторным пространством. Назовем пространство E *топологической векторной решеткой*, если E *локально телесно,* т. е. если E обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из телесных множеств (см. [4]); используются также более громоздкие термины — *локально телесное пространство Рисса* [6] и *векторная решетка с локально телесной топологией линейного пространства* [2]). Напомним, что множество $A \subset E$ называют *телесным*, если $|y| \leqslant |x|$ и $x \in A$ влекут $y \in A$. *Решеткой Фреше* будем называть топологическую векторную решетку, если она метризуема и (метрически) полна. Иногда решетка Фреше предполагается локально выпуклой по определению (см., например, [4;стр. 296]), однако нам это дополнительное предположение не потребуется. Топологическое пространство называют *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Теперь имеются все ингредиенты, чтобы сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть E — сепарабельная решетка Фреше, а F — локально телесная топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством. Пусть G — мажорируемое подпространство E. Тогда любой положительный линейный оператор T_0 из G в F допускает продолжение до линейного непрерывного положительного оператора T из E в F.*

Замечание 1. В доказательстве данной теоремы ключевой момент заключается во взаимодействии сепарабельности и σ-интерполяционного свойства. Эта идея впервые была реализована в работе Абрамовича и Викстеда [7] при доказательство одного варианта теоремы Хана — Банаха — Канторовича. Дальнейшее развитие представлено в обзоре Н. Данет и Р.-М. Данет [8], см. также [9], [10], [11].

Замечание 2. Теорема 1 усиливает результат Джинси Чена [9; теорема 7] в следующих направлениях. Во-первых, в [9] имеется дополнительное требование о том, что F обладает *свойством Фату*, т. е. в F имеется базис окрестностей нуля, состоящий из телесных порядково замкнутых множеств, см. [2; определение 23A]. Во-вторых, это условие возникло в связи со способом доказательства, использующим конструкцию *порядкового пополнения* векторной решетки, тогда как наши рассуждения опираются на метрическую полноту E и не нуждаются в порядковом пополнении. В третьих, доказательство из [9] завершается применением *трансфинитной индукциии* в форме леммы Цорна, в то время как мы ограничиваемся счетной формой аксиомы выбора. Таким образом, доказанная теорема выводится из аксиомы счетного выбора.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators // Acad. Press Inc., London etc., 1985.—xvi+367 p.

2. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory // Cambridge University Press, 1974.

3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices // Berlin: Springer etc., 1991.—xvi+395 p.

4. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства // Москва: Мир, 1971.

5. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces // North Holland: Amsterdam etc., 1983.

6. *Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces// Academic Press, New York, 1978. 7 *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. // Quart. J. Math. Oxford, **44**:3 (1993), 257–270.

8 *Dănet N., Dănet R. M.* Extension Theorems and the Riesz Decomposition Property// Positivity, **7** (2003), 87–93.

9 *Chen J.* Extension theorems with the range space not necessarily Dedekind complete, Note di Matematica **26**:2 (2006), 153–160.

10 *Dănet N.* The Riesz decomposition property for the space of regular operators, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2001), 539–542.

11 *Dănet R. M., Wong N. C.* Hahn-Banach-Kantorovich type theorems with the range space not necessarily (o)-complete // Taiwanese J. Math., **6**, (2002), 241–246.

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

А. А. Лобода
orion1312@yandex.ru

УДК 517.955.4

Для получения представлений решений используются аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля, аналитическое продолжение по аргументу и рандомизированная теорема Чернова, а также некоторые обобщения метода замены переменной.

Ключевые слова: Стохастическое уравнение Шрёдингера-Белавкина, стохастическое уравнение теплопроводности, аналитическое продолжение, формулы Фейнмана-Каца, интеграл Фейнмана

The methods for obtaining representations of solutions of Schrodinger's stochastic equations

To obtain representations of solutions, we use the analytic continuation with respect to the parameter and the Parseval's equality, analytical continuation of the argument and the randomized Chernov's theorem, and also some generalizations of the variable replacement method.

Keywords: Stochastic Schrodinger-Belavkin equation, stochastic heat conduction equation, analytic continuation, Feynman-Katz's formulas, Feynman's integral

Методы исследования детерминированных задач обобщаются на стохастический случай. В работе [1] доказана рандомизированная версия теоремы Чернова, позволяющая получить представление решения стохастического уравнения Шрёдингера рандомизированным интегралом Фейнмана путем построения фейнмановских аппроксимаций решения (формулы Фейнмана). Подробнее об этом методе см. [2].

В докладе применяется также аналитическое продолжение меры по параметру и равенство Парсеваля. Рассматривается задача Коши для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера (уравнение теплопроводности):

$$d\Psi_{\cdot}(t)(q) = \left(\alpha\frac{d^2\Psi_{\cdot}(t)(q)}{dq^2} + \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}|q|^2\right)\right)\times$$

$$\times\Psi(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_{\cdot}(t)(q)dw(t), \Psi(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \qquad (1)$$

где $\varphi_0(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^1),\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \mathrm{Re}\alpha \geqslant 0.$

Решение этой задачи Коши записывается в виде функционального интеграла (формула Фейнмана-Каца):

$$\Psi(t,\omega)(q) = \int_{C(0,t)} \exp\left\{\int_0^t \alpha V(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\}\times$$

Лобода Артём Александрович, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Artyom Loboda (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$$\times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dw(\tau)\right\}\varphi_0(q+\xi(t))w_{0t}^{\alpha}(d\xi). \qquad (2)$$

Формула доказывается с помощью формулы Ито, а сложность по сравнению с детерминированным случаем возникает из-за зависимости от времени белого шума (подробнее см. [3]). Затем используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть μ - это произведение меры Винера на $C(0,1)$ и функции ψ на $C(0,1)$, определяемой равенством $\psi(\xi) = e^{-\int_0^1 \lambda(\xi(t))^2 dt}$, $\lambda > 0$. Тогда преобразование Фурье $F\mu$ меры μ определяется равенством $F\mu(\eta) = e^{-\int_0^1\int_0^1 b(t,s)\eta(dt)\eta(ds)}$, где b - функция, зависящая от λ.*

Лемма требуется для вывода аналога представления Маслова-Чеботарева для задачи Коши (1). Далее применяется аналитическое продолжение по параметру и равенство Парсеваля. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Для решения $\Psi(t,\omega)(q)$ задачи Коши при $\alpha = i$ справедливо равенство*

$$\Psi(t,\omega)(q) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dw(\tau)\right\}\varphi_0(q+\xi(\tau))F(d\xi),$$

где символ $\int ...F(d\xi)$ - это интеграл Фейнмана, определяемый как предел конечнократных интегралов (см. [4] и имеющиеся там ссылки).

Здесь V и φ_0 - преобразования Фурье счётно-аддитивных борелевских мер ν_1 и ν_2 на $\mathbb{R}^1$, $\lambda > 0$. Равенство Парсеваля используется для построения последовательности конечнократных интегралов, сходящейся к интегралу из теоремы 1.

Ещё один вариант аналитического продолжения впервые был предложен в работе [5]. Здесь речь идёт об аналитическом продолжении по аргументу (метод замены переменных). В докладе рассматривается представление решения задачи Коши (1) с помощью формулы Фейнмана-Каца (2). Если все функции, входящие в (1), допускают аналитическое продолжение в подходящую область, получается другое представление решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом. Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\psi : [0,\infty) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $\psi(t) - \psi(0) = \int_0^t((\psi(\tau))'' - iV\psi(\tau))d\tau$, и для каждого $t \geqslant 0$ функция $x \mapsto \psi(t)(x)$ допускает аналитическое продолжение на область $\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-i\alpha}, \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}),\ \rho > 0\}$, и продолжение по непрерывности на ее замыкание. Пусть функция $\varphi : [0,\infty) \to L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ — комплексификация пространства $L_2(\mathbb{R}^1)$) определяется так: $\varphi(t)(x) = \psi(t)(\sqrt{-i}x)$ $(\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}})$ Тогда функция φ - это решение уравнения $i\varphi(t) - i\varphi(0) = \int_0^t(-(\varphi(\tau))'' + V\varphi(\tau))d\tau$.*

Справедлива теорема (подробнее см. [6]).

Теорема 2. *Пусть* Ψ *- решение следующей задачи Коши*

$$d\Psi_\omega(t)(q) = \left(i\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2} + \left(iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\right) \times$$
$$\times \Psi_\omega(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi\omega(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot).$$

Тогда

$$\Psi(t,q_1) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2 d\tau\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0(q_1 + \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))wf^{-1}(d\xi_1).$$

Здесь интеграл берётся по счётно-аддитивной мере, в отличие от представления решения из теоремы 1. Связь между двумя интегралами в докладе не рассматривается.

Метод замены переменной допускает некоторые обобщения. Рассматривается стохастическое уравнение Шредингера, где функции f определена на $(0,+\infty)$ и принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ (это уравнение описывает квантовую динамику при непрерывном измерении координаты q_1).

$$if'(t) = (-\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})f(t) + dW(t)\alpha q_1 f(t) \tag{3}$$

Пусть f – решение уравнения (3). Пусть функция g принимает значения в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и определяется равенством $g(t)(q_1,q_2) = f(t)(\frac{q_1}{\sqrt{i}}, \sqrt{i}q_2)$. Тогда g-это решение уравнения теплопроводности

$$g'(t) = (+\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2})g(t) - idW(t)\alpha q_1 g(t) \tag{4}.$$

Если g – решение уравнения (4), то функция f, определенная равенством $f(t)(q_1,q_2) = g(t)(\sqrt{i}q_1, \frac{q_2}{\sqrt{i}})$, будет решением уравнения (3).

Решение уравнения (4) можно представить формулой Фейнмана-Каца

$$g(t)(q_1,q_2) = \int_{C_{q_1,q_2}(0,t)} e^{\int_0^t -idW(\tau)\alpha\xi(\tau)d\tau}\omega(d\xi),$$

где $C_{q_1,q_2}(0,t)$ – пространство определенных на $[0,t]$ непрерывных функций, со значениями в $\mathbb{R}^2$, равных в нуле (q_1,q_2). Тогда функция f, определенная выше, - это решение уравнения (3).

Литература

1. *O. O. Obrezkov, O.G. Smolyanov, A. Truman.* The Generelized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula. // Doklady Mathematics, 2005. V. 71, N 1, P. 105-110.

2. *J. Gough, O.O. Obrezkov, O.G. Smolyanov.* SRandomized Hamiltonian Feynman integrals and Shcrödinger-Itô stochastic equations.// Izvestiya: Mathematics, 2005. V.69, N 6, P. 1081-1098.

3. *Лобода А. А.* Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера.//Дифференциальные уравнения, 2018. V. 54, N 4, P. 561–564.

4. *Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Континуальные интегралы. — Второе издание М.: УРСС, 2015.

5. *Doss H.* ur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques.//Communications in Mathematical Physics, 1980. V. 73, P. 247-264.

6. *Лобода А. А.* Метод Досса для стохастического уравнения Шрёдингера — Белавкина.//Математические заметки, 2019. V. 106, N 2, в печати.

ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

УДК 517.9

Решается вопрос о связи представления преобразования Киприянова–Катрахова нечетных функций, определенных в $\mathbb{R}_1$ в виде преобразования Фурье специальных интегралов по прямым в $\mathbb{R}_2$.

Ключевые слова: преобразования Киприянова–Катрахова, оператор Бесселя, преобразования Фурье специальных интегралов.

One-dimensional Bessel transform of even and odd functions

The question of the connection between the representation of the Kipriyanov–Katrachov transformation of odd functions defined in $\mathbb{R}_1$ as the Fourier transform of special integrals over straight lines in $\mathbb{R}_2$.

Keywords: Kipriyanov–Katrachov transforms, Bessel operator, Fourier transforms of special integrals.

В работе [1] введено одно из преобразований Бесселя следующего вида

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) - i\frac{x\xi}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) \right] x^\gamma dx, \tag{1}$$

где $j_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)J_\nu(x)\,/\,(x/2)^\nu$, $\nu > -1/2$, а J_ν функция Бесселя первого рода.

Ляхов Лев Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГУ (Воронеж, Россия); Lev Lyakhov (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Рощупкин Сергей Александрович, к. ф.-м. н, доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Sergey Roshchupkin (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

В [2] введен следующий интегральный оператор

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int\limits_{\mathbb{R}_1}\mathcal{P}_x^\gamma\,\delta(p-x\xi)f(x)x^\gamma dx,\quad \mathbb{R}_1=\{-\infty<x<+\infty\},\qquad(2)$$

называемый преобразованием Радона—Киприянова. Здесь $\mathcal{P}_x^\gamma$ оператор Пуассона [3].

$\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$, обладает свойством четности: если функция представлена в виде суммы четной и нечетно функций $f=f_{ev}+f_{od}$, то $\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\mathcal{P}_x^\gamma f_{ev}(x)$ и $\mathcal{P}_x^\gamma f(-x)=\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)$.

Введем нечетный оператор Пуассона по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha)\cos\alpha\cdot\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha,$$

который обладает свойством $\mathcal{P}_x^\gamma(f_{ev}(x)+f_{od}(x))=\mathcal{P}_x^\gamma f_{od}(x)$ и $\mathcal{P}_x^\gamma f(-x)=-\mathcal{P}_x^\gamma f(x)$.

Полный оператор Пуассона определим равенством

$$\prod_x^\gamma f(x)=\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)-i\mathcal{P}_x^\gamma f(x).\qquad(3)$$

При этом, если $f(x)$ четная функция, то $\prod_x^\gamma f(x)=\mathcal{P}_x^\gamma f(x)$ и если нечетная, то $\prod_x^\gamma f(x)=-i\mathfrak{P}_x^\gamma f(x)$. Пусть f—четная функция. Тогда, используя процедуру вращения $x\to\sqrt{z_1^2+z_2^2}$ и полагая $z_1=p$, можем записать

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=2C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip\xi}dp\int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2+z_2^2})z_2^{\gamma-1}dz_2=2C(\gamma)F_{p\to\xi}[R_{\gamma,ev}[f](p)](\xi),$$

где интеграл по прямой $\infty<p<\infty$ (от четной по p функции) представляет собой специальное *четное преобразование Радона*, обозначенное $R_{\gamma,ev}$.

Ясно что если четная функция f принадлежит классу основных функций Шварца, то

$$R_{\gamma,ev}[f](p)=\frac{2C(\gamma)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\langle p,\xi\rangle}F_B[f](p)dp=F_{\xi\to p}[F_{B,x\to\xi}[f](p)].$$

Если f нечетная функция, то имеет место другая формула

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=-2i\mathcal{F}_{B,od}[f](\xi)=-2\int\limits_0^\infty\left(\mathfrak{P}_x^\gamma e^{-ix\xi}\right)f(x)\,x^\gamma dx=$$

$$=2C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip\xi}dp\int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2+z_2^2})\ \frac{p}{\sqrt{p^2+z_2^2}}\ z_2^{\gamma-1}dz_2\,dp=$$

$$= 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} [R_{\gamma,od}[f](p)\ dp,$$

где интеграл по прямой $\infty < p < \infty$ (от нечетной по p функции) представляет собой *специальное нечетное преобразование Радона*, обозначенное $R_{\gamma,ev}$.

Отсюда, для гладкой интегрируемой нечетной функции f, получим

$$R_{\gamma,od}[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\, p}\ \mathcal{F}_{B,\xi\to p}\ [f](\xi)\ d\xi.$$

Полное специальное преобразование Радона определим в виде суммы четной и нечетной составляющих: $\mathfrak{R}_\gamma = \mathcal{R}_{\gamma,ev} + \mathcal{R}_{\gamma,od}$. Тогда

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi}\ \mathfrak{R}_\gamma[f](p)\ dp\,, \quad \mathfrak{R}_\gamma[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi}\ \mathcal{F}_B[f](\xi)\ d\xi\,.$$

Литература

1. *Киприянов И.А., Катрахов В.В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Матем. сборн. **104**:1 (1977), 49-68.

2. *Киприянов И.А., Ляхов Л.Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // ДАН, **360**:2 (1998), 157-160.

3. *Левитан Б.М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Успехи матем. наук, **VI**:2 (1951), 102-143.

О БАЗИСНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОПЕРАТОРУ ДИРАКА С РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Макин

alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.52

На конечном интервале рассматривается спектральная задача для оператора Дирака с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями и комплекснозначным суммируемым потенциалом. Целью работы является нахождение условий, при которых система корневых функций образует обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками

Ключевые слова: оператор Дирака, спектральное разложение, базисность

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МИРЭА (Москва, Россия); Alexander Makin (MIREA, Moscow, Russia)

On the Basis Property of Spectral Expansions of Dirac Operators with Regular Boundary Conditions

Spectral problem for the Dirac operator with regular but not strongly regular boundary conditions and complex-valued potential summable over a finite interval is considered. The purpose of this paper is to find conditions under which the root function system forms a usual Riesz basis rather than a Riesz basis with parentheses.

Keywords: Dirac operator, spectral expansion, basis property

На интервале $(0,\pi)$ рассмотрим систему Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P(x), Q(x) \in L_1(0,\pi)$, и двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} – произвольные комплексные числа, причем строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через A_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A. Краевые условия (2) называются регулярными, если

$$A_{14}A_{23} \neq 0 \tag{3}$$

и усиленно регулярными, если кроме (3) дополнительно выполняется условие

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} \neq 0.$$

Известно [1], что система корневых функций задачи (1), (2) с регулярными краевыми условиями полна в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$. В [2-5] было доказано, что в случае усиленно регулярных краевых условий система корневых функций задачи (1), (2) образует базис Рисса, а для регулярных, но не усиленно регулярных условий – базис Рисса со скобками.

Далее будем рассматривать только регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия, т.е. будем считать, что имеет место равенство

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0.$$

Хорошо известно, что в этом случае спектр состоит из попарно сближающихся собственных значений $\lambda_n = \lambda_{k,1} = -\frac{i}{\pi}\ln z + 2k + \varepsilon_{k,1}$ при $n = 2k$, $\lambda_n = \lambda_{k,2} = -\frac{i}{\pi}\ln z + 2k + \varepsilon_{k,2}$ при $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{k,j} \to 0$ $(j = 1, 2)$ при

$k \to \pm\infty$, где $z = (A_{12} + A_{34})/(2A_{23})$. Если при всех k, таких что $|k| > k_0$, $\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2}$, то спектр будем называть асимптотически кратным.

Следуя [6], регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия будем называть условиями периодического типа, если $A_{13} = A_{24} = 0, \quad A_{12} = A_{34}$. Условия периодического типа эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $a \neq 0$. Если $a = -1$, то краевые условия (4) являются периодическими, а если $a = 1$, то антипериодическими.

Случай периодических и антипериодических краевых условий исследовался во многих работах. В частности, в [7] был построен пример потенциала $V(x)$, при котором соответствующее разложение по системе корневых функций расходится в пространстве $\mathbb{H}$.

Обозначим через Ψ множество пар функций $(P(x), Q(x)) \in L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$ таких, что система корневых функций задачи (1), (4) образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, $\overline{\Psi} = (L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)) \setminus \Psi$.

Теорема 1. *Множества Ψ и $\overline{\Psi}$ всюду плотны в $L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$.*

Пусть краевые условия не являются периодическими, т.е. справедливо неравенство

$$|A_{13}| + |A_{24}| + |A_{12} - A_{34}| > 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *При выполнении условия (5) система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда спектр является асимптотически кратным.*

Литература

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

2. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential // Math. Notes, **96**:5 (2014), 777-810.

3. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Современная математика. Фундаментальные направления, **58** (2015), 128-152.

4. *Lunyov A., Malamud M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl., **441**:1 (2016), 57-103.

5. *Лунев А.А.,Маламуд М.М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для (2×2) - системы типа Дирака // Докл. РАН, **458**:3, (2014) 255-260.

6. *Djakov P. , Mityagin B.* Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac operators with Regular Boundary Conditions // Indiana Univ. Math. J., **61**:1 (2012), 359-398.

7. *Джаков П., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН, **61**:4 (2006), 77-182.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

А.С. Мигаева, А.В. Перескоков

anastasiy_ mi@mail.ru, pereskokov62@mail.ru

УДК 517.984, 517.958

Найдена асимптотика серии собственных значений и асимптотические собственные функции вблизи нижних границ резонансных спектральных кластеров, которые образуются около уровней энергии невозмущенного атома водорода.

Ключевые слова: спектральный кластер, квантовый метод усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение

Asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in electromagnetic field near the lower boundaries of spectral clusters

We obtain the asymptotics of the series of eigenvalues and the asymptotic eigenfunctions near the lower boundaries of the resonance spectral clusters formed near the energy levels of the unperturbed hydrogen atom.

Keywords: spectral cluster, quantum averaging method, coherent transformation, the WKB approximation

Рассмотрим задачу на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ для нерелятивистского гамильтониана атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon\mathbb{M}_3 + \varepsilon E_1 x_1 + \varepsilon^2\mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = ix_2\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле вдоль оси x_1 , $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что напряженность электрического поля имеет вид $E_1 = \hbar e_1$, где $\hbar > 0$ - малый параметр, а число $e_1 > 0$ — любое. Кроме того, пусть параметры ε и $\hbar$ удовлетворяют условию $\varepsilon^{1/7} \ll \hbar$ и выполнено равенство $\hbar = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи

Мигаева Анастасия Сергеевна, студент, Национальный исследовательский университет “МЭИ” (Москва, Россия); Anastasia Migaeva (National Research University“MPEI”, Moscow, Russia)

Перескоков Александр Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Национальный исследовательский университет “МЭИ” (Москва, Россия); Alexander Pereskokov (National Research University «Higher School of Economics», National Research University“MPEI”, Moscow, Russia)

является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию около собственных значений невозмущенного атома водорода резонансных спектральных кластеров [1].

Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] на примере задачи об атоме водорода в магнитном поле был предложен общий метод построения асимптотики спектра вблизи границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении асимптотических собственных функций. В данной работе этот метод будет применен к гамильтониану (1). Для нахождения асимптотики будут использованы неприводимые представления алгебры Карасева – Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями [3].

Произведем перенормировку спектральной задачи, затем дважды применим квантовый метод усреднения и выполним когерентное преобразование [1]. В результате приходим к однопараметрическому семейству дифференциальных уравнений Гойна

$$\frac{\overline{z}(\overline{z}^2+r\overline{z}+1)}{|m|^2}\frac{d^2\Phi}{d\overline{z}^2}-\frac{1}{|m|}\left[(2\sqrt{a}-1-\frac{3}{|m|})\overline{z}^2+\frac{3(1-27e_1^4)}{f}(\sqrt{a}-\right.$$

$$-1-\frac{2}{|m|})\overline{z}-1-\frac{1}{|m|}\Big]\frac{d\Phi}{d\overline{z}}+\Big[(\sqrt{a}-\frac{1}{|m|})(\sqrt{a}-1-\frac{1}{|m|})\overline{z}-$$

$$-\frac{1}{2f}(3(\sqrt{a}-1)(1+\frac{1}{|m|})-\frac{1}{|m|^2})+\frac{e_1^2}{f}(6-a+\frac{1}{|m|^2})+$$

$$+\frac{9e_1^4}{2f}(4a+9\sqrt{a}+3+\frac{9}{|m|}(\sqrt{a}-1)+\frac{5}{|m|^2})+\frac{n^4\xi}{4|m|^2}\Big]\Phi=0. \qquad (2)$$

Здесь числа

$$f=1+9{e_1}^2,\quad r=2-f+2/f,\quad a=n^2|m|^{-2},\quad m\in\mathbb{Z},\quad 5^{-1/2}n<|m|<n.$$

Уравнение (2) содержит параметр e_1, рост которого отвечает увеличению напряженности электрического поля, а также число ξ, которое определяет поправку к спектру. Собственными числами уравнения Гойна назовем такие значения параметра ξ, при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathcal{P}[m,n]$ многочленов степени не выше $n-|m|-1$.

Далее для уравнения Гойна строится асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи в классе антиголоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках и показателем $n-|m|-1$ в точке $\overline{z}=\infty$. Асимптотика искомого многочлена получается в результате проектирования асимптотического решения многоточечной спектральной задачи на пространство $\mathcal{P}[m,n]$.

Асимптотика решений уравнений Гойна (2) находится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений. При изменении параметра e_1 возникают различные случаи расположения особых точек и точек поворота на комплексной плоскости. Этим случаям отвечает различная глобальная структура линий Стокса.

Основным результатом данной работы является доказательство существования вблизи нижних границ спектральных кластеров серии собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2}+\varepsilon m\sqrt{9e_1^2+1}+\frac{\varepsilon^2 n^2[n^2(1-14e_1^2-153e_1^4)+m^2(1+30e_1^2+27e_1^4)]}{2(9e_1^2+1)}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2 n^2(2k+1)}{\sqrt{9e_1^2+1}}\sqrt{n^2(-1+18e_1^2+81e_1^4)+m^2(5+18e_1^2-81e_1^4)}+$$

$$+O(\varepsilon^2 n^2)+O(\varepsilon^3 n^{10}), \qquad k=0,1,2,\ldots. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon \to +0$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/7}$, $5^{-1/2}n < |m| < n$. Кроме того, параметр $e_1 > 0$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{2}-1}/3$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{6}+1}/3$.

Формула (3) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана – Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Отметим, что асимптотику (3), а также формулу для соответствующих асимптотических собственных функций получить стандартными методами, такими, как лучевой метод или теория комплексного ростка невозможно.

Литература

1. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода // ТМФ, **142**:3 (2005), 530-555.

2. *Перескоков А.В.* Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров // Тр. ММО, **73**:2 (2012), 277-325.

3 *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ, **108**:3 (1996), 339-387.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУММ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

К.А. Мирзоев

mirzoev.karahan@mail.ru

УДК 517.927.25, 517.521.15, 517.589

Собственные значения и собственные функции некоторых операторов, порождённых симметрическими дифференциальными выражениями с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в пространстве квадратично интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, явно вычисляются, а резольвенты этих операторов являются интегральными операторами. Из спектральной теоремы следует, что для ядер резольвент этих операторов справедлива билинейная формула. Кроме того, каждое из этих ядер является функцией Грина некоторой самосопряжённой граничной задачи, и хорошо известна процедура её построения. Таким образом, для функций Грина этих задач справедливы формулы разложения в ряды по собственным функциям. В работе полученные этим способом тождества применяются для интегрального представления сумм некоторых степенных рядов и, в частности, для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов.

Ключевые слова: самосопряжённые краевые задачи, собственные значения и собственные функции, многочлены от операторов, функция Грина, интегральное представление степенных рядов.

About integral representation of the sums of certain power series

The eigenvalues and eigenfunctions of some operators generated by symmetric differential expressions with constant coefficients and self-adjoint boundary conditions in the space of Lebesgue-integrable functions on an interval are explicitly calculated, and the resolvents of these operators are integral operators. From the spectral theorem it follows that for the kernels of the resolvents of these operators the bilinear formula is valid. In addition, each of these kernels is a Green function of some self-adjoint boundary value problem, and the procedure for constructing it is well known. Thus, for the Green functions of these problems, the formulas of expansion in series in eigenfunctions are valid. In this paper, the identities obtained by this method are applied to the integral representation of the sums of some power series and, in particular, to the calculation of the sums of some convergent number series.

Keywords: self-adjoint boundary value problems, eigenvalues and eigenfunctions, polynomials of operators, Green function, integral representation of power series.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01215).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Karakhan Mirzoev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть S - самосопряжённый оператор, порождённый выражением

$$l_2[y] := -y''$$

и граничными условиями Дирихле

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$, и пусть $p_m(x)$ - многочлен степени $m \geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим оператор $p_m(S)$. Область определения $\mathcal{D}(p_m(S))$ этого оператора - это множество

$$\mathcal{D}(p_m(S)) = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,\pi];\ V_j(y) = 0,\ j = 1,\dots,2m\}$$

где линейные формы $V_j(y)$ определяются равенствами

$$V_{j+1}(y) := y^{(2j)}(0),\ V_{j+m+1}(y) := y^{(2j)}(\pi), \quad j = 0,\dots,m-1.$$

При этом если $y \in \mathcal{D}(p_m(S))$, то

$$p_m(S)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Спектр $\sigma(p_m(S))$ этого оператора является дискретным и имеет вид

$$\sigma(p_m(S)) = \{\mu|\ \mu = \mu_{2m,k} := p_m(k^2),\ k = 1;2;\dots\}$$

при этом собственному значению $\mu_{2m,k}$ соответствует собственная функция

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx.$$

Предположим теперь, что число $\mu = 0$ является регулярной точкой оператора $p_m(S)$ (т.е. $0 \notin \sigma(p_m(S))$), и рассмотрим его резольвенту $R_\mu(p_m(S))$ при $\mu = 0$. Эта резольвента является интегральным оператором, и для его ядра $G(x,t)$ справедлива формула разложения по собственным функциям.

С другой стороны, ядро $G(x,t)$ является функцией Грина самосопряжённой граничной задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f, \\ V_j(y) = 0, \quad j = 1,2,\dots,2m, \end{cases} \tag{1}$$

и хорошо известна процедура её построения через легко конструируемый определитель (см., напр., [1], часть вторая, гл. I, § 1.5), а именно,

$$G(x,t) = \frac{1}{\det D}\begin{vmatrix} g(x,t) & y_1(x) & \dots & y_{2m}(x) \\ V_1(g) & & & \\ \vdots & & D & \\ \vdots & & & \\ V_{2m}(g) & & & \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где матрица $D := (V_s(y_l))_{s,l=1}^{2m}$, а значения форм $V_j(g)$ $(j = 1, \ldots, 2m)$ находятся по формулам

$$V_{j+1}(g) = \frac{\partial^{(2j)} g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\bigg|_{x=0}, \quad V_{j+m+1}(g) = \frac{\partial^{(2j)} g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\bigg|_{x=\pi}, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Таким образом, если многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$, то для функции Грина $G(x,t)$ задачи (1) справедливо тождество

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx \sin kt}{p_m(k^2)}.$$

Применяя далее это равенство и разложения в ряды Фурье функций

$$\ln(1 - 2z\cos 2x + z^2), \ \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1 - z^2}, \ \ln \frac{1 + 2z \sin x + z^2}{1 - 2z \sin x + z^2},$$

можно, доказать, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ и пусть $G(x,t)$ — функция Грина, определяемая формулой (2). Тогда при $z \in [-1, 1]$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k p_m(k^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x,x) \ln(1 - 2z\cos 2x + z^2) dx,$$

а при $z \in (-1, 1]$ - равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{p_m(k^2)} = 4 \int_0^{\pi/2} G(x,x) \frac{z^2 - z\cos 2x}{1 - 2z\cos 2x + z^2} dx.$$

Теорема 2. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ и пусть $G(x,t)$ — функция Грина, определяемая формулой (2). Тогда при $z \in [-1, 1]$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1) p_m((2k-1)^2)} = \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1 - z^2} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \frac{(z + z^3) \sin x}{1 - 2z^2 \cos 2x + z^4} dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1) p_m((2k-1)^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \ln \frac{1 + 2z \sin x + z^2}{1 - 2z \sin x + z^2} dx,$$

а при $z \in (-1,1)$ *- равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, \pi/2) \frac{(z-z^3)\sin x}{1+2z^2\cos 2x + z^4} dx.$$

Доклад основан на совместных работах с Сафоновой Т.А. (см. [2] и [3]).

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976.

2.*Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Докл. АН, **482**:5 (2018), 500-503.

3. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА

Е.Д. Нурсултанов

er-nurs@yandex.ru

УДК 517.5

Приводятся новые интерполяционные теоремы для интегральных операторов, где условия ограниченности операторов дается в терминах ядра оператора.

Ключевые слова: интерполяция, теорема Марцинкевича, интегральные операторы.

On the Marcinkiewicz interpolation theorem

New interpolation theorems for integral operators are given, where the conditions for the boundedness of operators are given in terms of the kernel of the operator.

Keywords: interpolation, Marcinkiewicz theorem, integral operators.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект № AP05132071).

Нурсултанов Ерлан Даутбекович, д.ф.-м.н., профессор, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Астана, Казахстан); Erlan Nursultanov (Kazakhstan branch of Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan)

Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича - Кальдерона.

Пусть $p_0 < p_1,\ \theta \in (0,1), \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда для квазилинейного оператора T верна оценка

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant C_{p_0,p_1,p,\tau} \left(\|T\|_{L_{p_0,\tau} \to L_{p_0,\infty}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L_{p_1,\tau} \to L_{p_1,\infty}}\right)^{\theta},$$

где $0 < \tau \leqslant \infty$.

В докладе приводятся новые интерполяционные теоремы для интегральных операторов, где условия ограниченности операторов дается в терминах ядра оператора. Данный подход позволяет расширить класс интегральных операторов для которых имеет место теоремы типа Марцинкевича - Кальдерона. Приводятся так же теоремы типа теорем экстраполяции для интегральных операторов.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

А.В. Павлов

a_pavlov@mirea.ru

УДК 517.518

Доказана регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля для широкого класса функций. Из данного факта выводится перестановочность синус и косинус преобразований с точностью до знака.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля, перестановочность синус и косинус преобразований Фурье

The transform of Laplace and the transform of Fourier

The regularity of the double transform of Laplace is proved. From the fact we obtain, that the sine transform of Fourier from the cosine transform of Fourier is equal to the cosine transform from the sine transform of Fourier.

Keywords: the regularity of the transform of Laplace, transposition of the cosine and sine operators of Fourier

Павлов Андрей Валерианович, к.ф.-м.н., доцент, МИРЕА-РТУ (Москва, Россия); Andrey Valerianovich Pavlov (MIREA-RTU, Moscow, Russia)

Основным результатом является регулярность двойного преобразования Лапласа в окрестности нуля для некоторого класса функций (лемма 1 и теорема 1). Как следствие доказано совпадение по модулю применения операторов синус и косинус преобразований в разном порядке.

Результат, сформулированный в теореме 1, использует существенно другие методы [1-5] по сравнению с многочисленными работами И.И. Привалова на данную тему. В качестве введения автор приводит по его мнению интересный пример о неединственности разложения на элементарные дроби: $p[1/(p-1)-1/(p+1)] = 1/(p-1)+1/(p+1)$, $p/(p-1)^2 - p/(p^2-1) = 1/(p-1)^2 + 1/(p^2-1)$.

Мы будем использовать обозначения: $Lu(t)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt}u(t)dt, x > 0$, $F_\pm^0 u(t)(\cdot)(p) = \int\limits_0^\infty e^{\pm pit}u(t)dt$, $Cou(t)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty \cos xtu(t)dt$, $Siu(v)(\cdot)(x) = \int\limits_0^\infty \sin xtu(t)dt, x \in (-\infty, \infty)$.

Нам понадобится условие Y1.

Условие Y1. Для функции $u(x)$ выполнено условие Y1, если функция $u(p)$ регулярна в области $\{|Re\, p| < a\} \bigcap \{|Im\, p| < a\}$ при некотором положительном $a > 0$, $u(0) = 0$, причем $\max\left[|u(p)|, |du(p)/dp|, |d^2u(p)/p^2|\right]|p^{2+\delta}| \to 0$, $p \to \infty$, $\delta > 0$, $\delta = const$; $Re\, u(s) = u(s)$, $s \in (-\infty, \infty)$.

Лемма 1. *Если для регулярной и однолистной в некоторой открытой окрестности нуля G функции $Q(p)$ имеет место равество*

$$l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = Q(p), p = iy, y \in (0 + \infty),$$

функции $l_1(p), L_1(p)$ регулярны в левой половине плоскости и непрерывны на мнимой границе, функции $l_2(p), L_2(p)$ регулярны в правой половине плоскости и непрерывны на мнимой границе, то равенство $l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = Q(p)$ остается верным на всей мнимой оси внутри G.

Доказательство. Так как $l_1(p) + l_2(p)$ замыкается сама с собой после оборота по часовой стрелке вокруг нуля ввиду регурярности и однолистности $Q(p)$, и одновременно значения с верхней части мнимой оси совпадают с со значениями $L_1(p) + L_2(p)$ в правой полуплоскости, то значения в левой полуплоскости $l_1(p) + l_2(p)$ замыкаются со значениями $L_1(p) + L_2(p)$ на отрицательной части мнимой оси внутри G.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Функция $LLu(x)(\cdot)(z)$, регулярна в области $\{z : |z| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, если для $u(p)$ выпонено условие Y1.*

Теорема при $u_-(t) = u(t), t \in [0, +\infty), u_-(t) = -u(t), t \in (-\infty, 0)$, вытекает из равенства

$$Q(y) = 2\pi u(y) = 2Re\, l_1(x) = l_1(p) + l_2(p) = L_1(p) + L_2(p) = 2Re\, L_1(y), p = iy,$$

$y \in [0, +\infty)$, при

$$l_1(p) = LF_+u(t)(\cdot)(p), l_2(p) = L_+F_-u(t)(\cdot)(p),$$

$$L_1(p) = LF_+u_-(t)(\cdot)(p), L_2(p) = L_+F_-u_-(t)(\cdot)(p).$$

Пользуясь леммой 1, получаем, что равенство выполнено при всех, в том числе отрицательных y, и пара $l_1(p) + l_2(p)$ является аналитическим продолжением пары $L_1(p) + L_2(p)$ через всю мнимую ось с одной половины плоскости на другую [3]. Мы воспользовались непрерывностью каждой из функций $l_1(p), l_2(p), L_1(p), L_2(p)$ на всей мнимой оси (с учетом формулы интегрирования по частям во внутренних интегралах, условия Y1 и равенства $u(0) = 0$). Регулярность данных функций в области их определения очевидна.

Ввиду общеизвестной регулярности [6] функций $l_1(p), L_1(p)$ при регулярной в окрестности всей действительной оси функции $u(p)$ получаем, что функции $l_2(p), L_2(p)$ тоже регулярны в некоторой открытой окрестности нуля.

Следовательно, сумма $l_1(p) + L_1(p) = 2LF_+^0u(t)(\cdot)(p) = 2(1/i)LLu(t)(\cdot)(ip)$ (после изменения порядка интегрирования) тоже регулярна в некоторой открытой окрестности нуля.

Теорема 1 доказана.

Как следствие теоремы 1 получаем, что во всей плоскости $l_1(p) - L_1(p) = L_2(p) - l_2(p) \equiv 0$. Ограниченность и стремление к нулю данных функций в области их определения, включая мнимую ось, очевидно следует из условия Y1. Как функции ,ограниченные во всей плоскости, данные разности равны нулевой константе [3].

Значения данной разности на мнимой оси равны $(SiCou(t)(\cdot)(p) + CoSiu(t)(\cdot)(p))i \equiv 0$, что доказывает в условиях теоремы 1 равенство по модулю применения операторов синус и косинус преобразований в разном порядке.

Литература

1. *Павлов А.В.* Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа // Мат. заметки, **90**:6 (2011), 792-796.

2. *Pavlov A.V.* About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Petrozavodsk: Issues of Analysis, **23**:1 (2016), 21 - 30.

3. *Lavrentiev M.A., Shabat B.V.* The methods of theory functions of complex variable. — Science: Moscow, 1987.

4. *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* О математических работах профессора А.А. Карацубы // Тр. МИАН, **218**, 1997, 7-19.

5. *Павлов А.В.* О перестановочности косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., № 2 (2019), 46-49.

6. *Сорокин В.Н., Вшивцев А.С., Норин Н.В.* Решение спектральной задачи для уравнения Шредингера с вырожденным полиномиальным потенциалом четной степени// Теорет. и Мат. Физ., **109**:1 (1996), 107-123.

ПО СЛЕДАМ В.А. САДОВНИЧЕГО

А.С. Печенцов
pechentsovas@rambler.ru

УДК 517.927

В $L^2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма-Лиувилля, порождаемый выражением $l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x-b), \quad a > 0, \quad b > 0$, $\delta(x)$ — Дельта функция Дирака, и краевым условием $y(0) = 0$. Предъявлены формулы регуляризованных следов этого оператора.

Ключевые слова: собственные значения, асимптотика спектра, регуляризованные следы.

Following in the traces of V.A.Sadovnichy

We consider the Sturm-Liouville operator generated in the space $L^2[0,+\infty)$ by the expression $l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x-b), \quad a > 0, \quad b > 0$, $\delta(x)$ is the Dirac delta function and the boundery condition $y(0) = 0$.We obtained the regularised trace formulas of this operator.

Keywords: the eigenvalues, asymptotics of the spectrum, regularized traces.

В 1971 году Виктор Антонович Садовничий [1] вычислил регуляризованные следы для сингулярного дифференциального оператора L в пространстве $L^2[0,\pi]$, заданного выражением

$$l(y) := -y''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y(x) + p(x)y(x)$$

и краевым условием $y(\pi) = 0$. Функция $p(x)$ вещественнозначная, достаточно гладкая и финитная в окрестности нуля, $\nu \geqslant 1$.

Собственные значения λ_n оператора L имеют асимптотику:

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx - \frac{1}{\pi^2}(\nu^2 - \frac{1}{4}).$$

Дзета-функция оператора L

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

Печенцов Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexandr Pechentsov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

регулярна в полуплоскости $\Re s > 1/2$ и имеет аналитическое продолжение в левую полуплоскость. Регуляризованный след оператора L порядка k, $k \in \mathbb{N}$, т. е. сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^k - A_k(n)\right),$$

($A_k(n)$-числа, определяемые асимптотикой собственных значений, обеспечивающие сходимость ряда), выражается через значение $Z(-k)$ аналитического продолжения дзета-функции оператора L.

Если положить $p(x) = 0$, то с.з. λ_n^0 являются нулями функции Бесселя $I_\nu(\sqrt{\lambda}\pi)$, для которых справедливо тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^0 - \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right) = \\ = \frac{1}{8}\left(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{12} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8\pi^2}\left(4\nu^2 - 1\right)(\nu + 1).$$

В настоящей работе, используя метод Лидского-Садовничего [2], получена формула регуляризованного следа порядка $-\sigma$, при $\Re\sigma > -1/2$, для оператора Эйри в пространстве $L^2[0, +\infty)$, возмущённого δ — функцией Дирака (теорема1). Получены тождества для нулей $-\lambda_n^0$ функции Эйри Ai ($\mathrm{Ai}(-\lambda_n^0) = 0$): при $m = 2, 3, ...,$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^0)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\Big(\frac{\mathrm{Ai}'(-\lambda)}{\mathrm{Ai}(-\lambda)}\Big)_{\lambda}^{(m-1)}(0).$$

В частности при $m = 2$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^0)^2} = \frac{4\pi^2}{3^{1/3}\Gamma^4(1/3)},$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера. В случае непрерывного спектра формула для следа разности двух сингулярных операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами, содержащими δ — функции Дирака получена в работе [3]. В $L^2[0, +\infty)$ рассматрим оператор $\mathcal{H}_{a,b}$ порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x - b)$$

и краевым условием Дирихле $y(0) = 0$),a, b — положительные числа (см.[4,5,6]) Спектр оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ представляет собой множество корней целой функции [6]

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Ai}(-\lambda)\Big(1 + \pi a\mathrm{Ai}(b - \lambda)\mathrm{Bi}(b - \lambda)\Big) - \pi a\mathrm{Ai}^2(b - \lambda)\mathrm{Bi}(-\lambda),$$

где Bi -другая функция Эйри, причём вронскиан функций Ai и Bi равен $\frac{1}{\pi}$. В комплексной плоскости λ сделаем разрез по отрицательной части действительной оси. Зафиксируем достаточно малое положительное число t_0 (

$0 < t_0 < \lambda_1^0$). Построим контур Γ, состоящий из интервала $(-\infty, -t_0)$, проходимого от $-\infty$ до $-t_0$, окружности $\gamma = t_0 \exp(i\phi), \phi$ убывает от π до $-\pi$, интервала $(-\infty, -t_0)$, проходимого от $-t_0$ до $-\infty$. Рассмотрим интеграл

$$Z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\sigma} \frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda, \quad \text{где} \quad \lambda^{-\sigma} = \exp(-\sigma \ln \lambda).$$

Функцию $Z(\sigma)$ будем называть дзета-функцией оператора $\mathcal{H}_{a,b}$. При $\Re\sigma > 3/2$

$$Z(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\sigma}.$$

Теорема 1. *При $\Re\sigma > -1/2$ справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{-\sigma} - (\lambda_n^0)^{-\sigma}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\sigma} d \ln \frac{\Delta(\lambda)}{\mathrm{Ai}(-\lambda)}.$$

Отметим также, что при $-1/2 < \Re\sigma < 0$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{-\sigma} - (\lambda_n^0)^{-\sigma}\right) = \frac{\sin(\sigma\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{-\sigma} d \ln \frac{\Delta(-t)}{\mathrm{Ai(t)}}.$$

Литература

1. *Садовничий В.А.* О некоторых тождествах для собственных чисел сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Соотношения для нулей функций Бесселя // Вестник МГУ, Сер.1. Математика. Механика. 1971, 3, 77-86.

2. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения, **1**:2 (1967), 52-59.

3. *Pechentsov A.* Trace of a Difference of Singular Sturm-Liouville Operators with a Potential Containing Dirac Functions // Russian Journal of Mathematical Physics, **20**:2 (2013), 230-238.

4. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897-912.

5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды московского математического общества, **64** (2003), 159-212.

6. *Печенцов А.С.* Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма – Лиувилля, возмущенного δ-функцией Дирака// Дифференциальные уравнения, **53**:8 (2017), 1058-1063.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУРЬЕ – ЯКОБИ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

С.С. Платонов

ssplatonov@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматриваются некоторые задачи теории приближения функций в весовых L_2-функциональных пространствах на полуоси $[0,+\infty)$ с использованием модулей гладкости, построенных на основе обобщенных сдвигов Якоби. Основным результатом является описание функциональных пространств типа Никольского в терминах наилучших приближений функциями с ограниченным спектром.

Ключевые слова: приближение функций, гармонический анализ Фурье – Якоби, обобщенные сдвиги Якоби, функциональные пространства типа Никольского

Fourier – Jacobi harmonic analysis and some problems of approximation

We study some problems of the approximation of functions in weighted L_2 function spaces on the half-axis $[0,+\infty)$ using the modulus of smoothness defined in terms of generalized Jacobi translations. We define function spaces of Nikol'skii type and describe them in terms of best approximations using as the approximation tool a class of functions with bounded spectrum.

Keywords: approximation of functions, Fourier – Jacobi harmonic analysis, generalized translations of Jacobi, function spaces of Nikol'skii type

Для любых значений параметров α,β $(\alpha\geqslant\beta\geqslant-1/2)$, функции Якоби $\Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ образуют непрерывную ортогональную систему функций на полуоси $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ относительно меры $(\operatorname{sh}t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch}t)^{2\beta+1}\,dt$. Гармонический анализ, связанный с этой ортогональной системой, называется гармоническим анализом Фурье – Якоби. Основными элементами гармонического анализа Фурье – Якоби являются дифференциальные операторы Якоби, интегральные преобразования Фурье – Якоби и обобщенные сдвиги Якоби. Многие задачи классического гармонического анализа имеют естественные аналоги для гармонического анализа Фурье – Якоби (см., например, [1]).

В [2] гармонический анализ Фурье – Якоби использовался для изучения некоторых задач теории приближения функций в весовых L_2 функциональных пространствах на полуоси $\mathbb{R}_+$. В качестве средства приближения использовался класс функций с ограниченным спектром, то есть класс функций, преобразования Фурье – Якоби которых являются функциями с

Платонов Сергей Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Россия); Sergei Platonov (Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia)

компактным носителем. Продолжая эту тематику, в настоящей работе определяются некоторые весовые функциональные пространства типа Никольского на $\mathbb{R}_+$ и получено их описание в терминах наилучших приближений функциями с ограниченным спектром.

Дифференциальный оператор Якоби определяется формулой

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\alpha,\beta} := \frac{d^2}{dt^2} + ((2\alpha+1)\operatorname{cth} t + (2\beta+1)\operatorname{th} t)\frac{d}{dt}. \tag{1}$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ функция Якоби $u(t) = \Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ является единственным четным C^∞-решением дифференциального уравнения

$$\mathcal{B}u + (\lambda^2 + (\alpha+\beta+1)^2)u = 0$$

с начальным условием $u(0) = 1$.

Мы будем рассматривать функции на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при необходимости считать, что функции продолжаются на всю ось $\mathbb{R}$ как четные функции.

Пусть $d\mu_{\alpha,\beta}(t) := (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}\,dt$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $L^2_{\alpha,\beta} = L^2(\mathbb{R}_+, d\mu_{\alpha,\beta})$, $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — норма в гильбертовом пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ — топологическое векторное пространство четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ — пространство четных обобщенных функций на $\mathbb{R}$, то есть линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать $\langle f, \varphi\rangle$. Пространство $L^2_{\alpha,\beta}$ вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, если для $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ положить

$$\langle f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi(t)\,d\mu_{\alpha,\beta}(t).$$

Действие дифференциального оператора $\mathcal{B}$ расширяется с пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ на пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ по формуле

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi\rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+).$$

В частности, действие оператора $\mathcal{B}$ определено для любой функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$, но при этом $\mathcal{B}f$ является, вообще говоря, обобщенной функцией.

Преобразование Фурье – Якоби $\mathcal{F} : f(t) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$, $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$, определяется формулой

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,d\mu_{\alpha,\beta}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

для функций $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и по непрерывности продолжается на гильбертово пространство $L^2_{\alpha,\beta}$.

Функция $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ называется функцией с ограниченным спектром порядка $\sigma > 0$, если $\widehat{f}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \sigma$. Множество всех таких функций

обозначим $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}$. Функции из линейных подпространств $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)} \subset L^2_{\alpha,\beta}$ являются естественным средством для построения теории приближений в гильбертовом пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$.

Операторы обобщенного сдвига Якоби T^s, $s \in \mathbb{R}_+$, в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ определяются формулой

$$\mathcal{F}(T^s f)(\lambda) = \Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(s)\,\mathcal{F}(f)(\lambda),$$

где $f \in L^2_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье – Якоби, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Для любой функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ обобщенный модуль гладкости $\omega_k^{(\alpha,\beta)}(f;\delta)_2$ порядка k, $k \in \mathbb{N}$, определяется формулой

$$\omega_k^{\alpha,\beta)}(f;\delta)_2 := \sup_{0<h\leqslant\delta} \|(I - T^h)^k f\|_{\alpha,\beta}, \quad \delta > 0,$$

где I — тождественный оператор, $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — норма в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ функциями из подпространства $\mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}$ определяется как

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 := \inf\{\|f - g\|_{\alpha,\beta} : g \in \mathcal{I}_\sigma^{(\alpha,\beta)}\}.$$

Пусть $r > 0$ — действительное число и пусть k, s — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2s > 0$. Обозначим через $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ множество всех функций $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ таких, что $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2 f, \ldots, \mathcal{B}^s f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k^{(\alpha,\beta)}(\mathcal{B}^s f;\delta)_2 \leqslant A_f \delta^{r-2s}, \qquad \delta > 0.$$

Для $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$ определим полунорму

$$h_2^{r(\alpha,\beta)}(f) := \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k^{(\alpha,\beta)}(\mathcal{B}^s f;\delta)_2}{\delta^{r-2s}}.$$

Множество $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_2^{r(\alpha,\beta)}} := \|f\|_{\alpha,\beta} + h_2^{r(\alpha,\beta)}(f).$$

В следующей теореме пространство $H_2^{r(\alpha,\beta)}$ описывается в терминах наилучших приближений функциями из $\mathcal{I}_\sigma^{r(\alpha,\beta)}$.

Теорема 1. *Если $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$, то для $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 \leqslant c_1 \frac{h_2^{r(\alpha,\beta)}(f)}{\sigma^r}.$$

Обратно, если $f \in L^2_{\alpha,\beta}$ и для $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$E_\sigma^{(\alpha,\beta)}(f)_2 \leqslant \frac{A}{\sigma^r},$$

где A — положительное число, которое не зависит от σ (но зависит от f), то $f \in H_2^{r(\alpha,\beta)}$ и

$$\|f\|_{H_2^{r(\alpha,\beta)}} \leqslant c_2 \left(\|f\|_{\alpha,\beta} + A\right).$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные, которые не зависят от f, но могут зависеть от k, r, s, α, β.

Литература

1. *Koornwinder T.H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // R. A. Askey at all (eds), Special functions: Group Theoretical Aspects and Applications. — D. Reidel Publ. Comp., 1984 — 1-85.

2. *Platonov S.S.* Fourier-Jacobi harmonic analysis and some problems of approximation of functions on the half-axis in L_2 metric: Jackson's type direct theorems // Integral Transforms Spec. Funct., **30**:4 (2019), 264-281.

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.Е. Подольский

wpve@yandex.ru

УДК 517.984

Доказана суммируемость по Абелю формулы регуляризованного следа для возмущения гармонического осциллятора оператором умножения на ограниченную функцию из пересечения $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: спектральная теория, регуляризованный след

Regularized trace formula for perturbed harmonic oscillator

Abel summability proved for regularized trace formula for perturbing a harmonic oscillator by a multiplication operator on a bounded function from the intersection of $L_1(\mathbb{R})$ and $L_2(\mathbb{R})$.

Keywords: spectral theory, regularized trace

Подольский Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Podolskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Доклад посвящен обсуждению одной формулы теории регуляризованных следов для операторов с резольвентой из класса Гильберта-Шмидта и приложению этой формулы к возмущенному гармоническому осциллятору.

Теорема 1. *Пусть оператор A самосопряженный, дискретный, полуограниченный снизу и его резольвента принадлежит классу Гильберта-Шмидта. Оператор B ограничен. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные вектора оператора A, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его собственные числа, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $A+B$. Если при некотором $0<\beta<1$ выполнено*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\beta-3} < +\infty$$

и

$$\sum_{\lambda_k=\left[\lambda_n+\lambda_n^{\beta}\right]+1}^{+\infty} |(B\varphi_n,\varphi_k)(B\varphi_k,\varphi_n)| = O\left(\lambda_n^{2\beta-2}\right).$$

то верна формула

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\Bigg(\mu_n-\lambda_n-(B\varphi_n,\varphi_n)- -\frac{t}{2}\left(\left(B^2\varphi_n,\varphi_n\right)-(\mu_n-\lambda_n)^2\right)\Bigg)=0.$$

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированные собственные функции оператора гармонического осциллятора*

$$-y''+x^2y,$$

действующего в $L_2(\mathbb{R})$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его собственные числа, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа возмущения гармонического осциллятора оператором умножения на ограниченную функцию $q(x)$. Если $q(x)\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, то верна следующая формула:

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\Big(\mu_n-\lambda_n-(B\varphi_n,\varphi_n)\Big)=0. \tag{1}$$

При доказательстве теоремы 2 использованы оценки для собственных функций гармонического осциллятора [1], и некоторые оценки для спектра возмущенного гармонического осциллятора [2]. Отметим, что из результатов [2] немедленно следует, что если в условиях теоремы 2 считать дополнительно выполненным условие $q(x)\in L_2(\mathbb{R},(|x|+1)^2dx)$, то формула (1) выполнена без суммирования, указанный ряд будет абсолютно сходящимся.

Литература

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. ГИФМЛ, Москва, 1962.

2. *Челкак Д. С.* Асимптотика спектральных данных гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом с конечной энергией. // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2003, т. 303, с. 223-271.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д.М. Поляков
DmitryPolyakow@mail.ru

УДК 517.927

Рассматривается несамосопряженный оператор четвертого порядка с матричными коэффициентами. Область определения этого оператора задается квазипериодическими краевыми условиями. Используя метод подобных операторов, для рассматриваемого оператора получены асимптотические формулы для собственных значений.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, матричные коэффициенты, асимптотика собственных значений

Spectral asymptotics for fourth-order differential operator with matrix coefficients

We consider non-self-adjoint fourth-order operator with matrix coefficients. The domain of this operator is defined by quasiperiodic boundary conditions. Using the method of similar operators, we get asymptotic formulas of eigenvalues for this operator.

Keywords: fourth-order differential operator, matrix coefficients, asymptotic of eigenvalues

Через $L_2^k[0,1]$ обозначим пространство $L_2^k[0,1] = L_2([0,1],\mathbb{C}^k) = L_2[0,1]\times\cdots\times L_2[0,1]$ (k раз) со скалярным произведением

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{k}\int_0^1 f_j(t)\overline{g_j(t)}\,dt,$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k) \in L_2^k[0,1]$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k) \in L_2^k[0,1]$.

Целью настоящего доклада является изучение асимптотических формул для собственных значений несамосопряженного оператора четвертого порядка $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$, который определяется дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - \mathfrak{A}(t)y'' - \mathfrak{B}(t)y,$$

где $\mathfrak{A}(t) = (a_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ и $\mathfrak{B}(t) = (b_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ — матрицы размера $k\times k$, причем элементы этих матриц a_{pj} и b_{pj} принадлежат $L_2[0,1]$. Область определения $D(L_\theta) = \{y \in W_2^4([0,1],\mathbb{C}^k)\} \subset L_2^k[0,1]$ оператора L_θ задается квазипериодическими краевыми условиями $y^{(j)}(1) = e^{i\pi\theta}y^{(j)}(0)$, $j = 0,1,2,3$, где $\theta \in (0,2)$, $\theta \neq 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых — кандидатов наук (МК-1056.2018.1, соглашение № 075-02-2018-433).

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry Polyakov (Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia)

Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим матрицу $\mathfrak{A}_0 = (a_{0,pj})_{p,j=1}^k$, где $a_{0,pj} = \int_0^1 a_{pj}(t)\,dt$. Всюду далее будем предполагать, что матрица $\mathfrak{A}_0$ подобна диагональной матрице.

Для изучения асимптотических формул для собственных значений дифференциальных операторов высших порядков с матричными коэффициентами применяются различные методы (см. [1] – [3]). В настоящей работе будет использоваться несколько иная техника. Эта техника основывается на работах [4] и [5]. Ее применение позволит уточнить, а в ряде случаев улучшить, известную до настоящего времени асимптотику собственных значений. Прежде чем сформулировать полученные результаты, дадим необходимое определение.

Определение. *Для любой ограниченной матрицы A, действующей в $\mathbb{C}^k$, ее среднее арифметическое собственных значений определяется как*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j,$$

где λ_j — собственные значения матрицы A.

Теорема 1. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, для которого спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{|n|\geqslant m+1}\sigma_n), \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество и множества σ_n, $|n| \geqslant m+1$, не более, чем k-точечны. Тогда для среднего арифметического собственных значений $\widehat{\lambda}_n$ оператора L_θ справедливо следующее асимптотическое представление

$$\widehat{\lambda}_n = \pi^4(2n+\theta)^4 + \frac{\pi^2(2n+\theta)^2}{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_j + \mathcal{O}(|n|), \quad |n| \geqslant m+1,$$

где μ_j, $j = 1, \dots, k$, — собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_0$.

В связи с тем, что собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_0$ могут быть кратными, то в данном случае мы можем говорить только о среднем арифметическом собственных значений. Однако, если сделать некоторые дополнительные предположения, то можно выписать и асимптотику собственных значений.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 собственные значения μ_j, $j = 1, \dots, k$, матрицы $\mathfrak{A}_0$ являются простыми, то имеет место следующая асимптотика*

$$\widetilde{\lambda}_{n,j} = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2\mu_j + \mathcal{O}(|n|), \quad j = 1, \dots, k, \quad |n| \geqslant m+1.$$

Асимптотические формулы, полученные в теоремах 1 и 2, уточняют соответствующие результаты из [3, Theorems 1,2] в части остаточного члена.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев. Пусть матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оператора L_θ имеют размер 1×1 и состоят каждая из одного элемента a и b соответственно, причем $a, b \in L_2[0,1]$. Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *Оператор L_θ является оператором с дискретным спектром и существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр представим в виде (1). Собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,1}$, $|n| \geqslant m+1$, допускают следующую асимптотику*

$$\widetilde{\lambda}_{n,1} = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - \\ - (2n+\theta)^2 \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{s-n}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} + \frac{|n|\gamma_n}{(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2},$$

где (γ_n) — некоторая суммируемая последовательность и a_s, $s \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции a.

Отметим, что применяемая техника позволяет получить асимптотику собственных значений также и в периодическом или антипериодическом случае. Пусть $\theta \in \{0,1\}$ и $k = 1$. Тогда матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вновь размера 1×1 с элементами a, b из $L_2[0,1]$. Исследование спектральных свойств рассматриваемого оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, представляет самостоятельный интерес (см. [5] и [6] и используемую там литературу). Отметим, что в [6] изучался оператор произвольного порядка.

По сравнению с [5, Теорема 1] и [6, Theorems 1, 2], в следующей теореме уточняется вид второго приближения, а также формула остаточного члена.

Теорема 4. *Оператор L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, является оператором с дискретным спектром и существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр представим в виде (1). Причем $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек не превосходящим $2m+1$, а множество σ_n определяется как $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n^+\}\cup\{\widetilde{\lambda}_n^-\}$. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^\mp$, $n \geqslant m+1$, оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, допускают следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n^\mp = \pi^4(2n+\theta)^4 - 2(2n+\theta)^2 \sum_{s=1, s\neq n}^{\infty} \frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \mp \\ \mp (2n+\theta)^2 \Big(\pi^2 a_{-2n-\theta} - 2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n, s\neq -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{s-n}a_{-n-s-\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\Big)^{1/2} \cdot \\ \cdot \Big(\pi^2 a_{2n+\theta} - 2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n, s\neq -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\Big)^{1/2} + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + n\widetilde{\gamma}_n,$$

где $(\widetilde{\gamma}_n)$ — некоторая суммируемая последовательность.

Кроме того, из теорем 3 и 4 легко получить асимптотику собственных значений оператора L_θ, $\theta \in [0,2)$, в случае когда функции a и b являются гладкими или вещественными. Эти результаты улучшают известные ранее (см. [5, Теорема 2]).

Литература

1. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 9 (1983), 190-229.

2. *Лужина Л.М.* Регулярные спектральные задачи в пространствах вектор-функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех., 1 (1988), 31-35.

3. *Veliev O.A.* Unifrom convergence of the spectral expansion for a differential operator with periodic matrix coefficients // Bound. Value Probl., (2008), 2008: 628973.

4. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Матем. сб., **208**:1 (2017), 3-47.

5. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Алгебра и анализ, **27**:5 (2015), 117-152.

6. *Veliev O.A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math., **176** (2010), 195-207.

МЕРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ С НЕОБЫЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В.В. Рыжиков

vryzh@mail.ru

УДК 517.9

Существует сохраняющий меру поток на пространстве Лебега, спектральная мера σ которого обладает следующими свойствами:

(i) она непрерывна и сингулярна относительно меры Лебега на группе $\mathbf{R}$;

(ii) для некоторого множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma\times\sigma$ на фиксированную прямую вдоль этих направлений являются $(1-1)$-отображениями, а образы меры суть сингулярные меры на прямой;

(iii) для бесконечного множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma\times\sigma$ на прямую являются $(\infty-1)$-отображениями, причем образы меры $\sigma\times\sigma$ эквивалентны мере Лебега на прямой.

Ключевые слова: функциональный анализ, спектральные меры унитарных потоков

Measures of the dynamical origin with unusual properties

There is a measure-preserving flow on Lebesgue space whose spectral measure σ has the following properties:

(i) it is continuous and singular with respect to the Lebesgue measure on the group $\mathbf{R}$;

(ii) for some set of directions in $\mathbf{R^2}$ the projections of the measure $\sigma\times\sigma$ onto a fixed line along these directions are $(1-1)$-maps, and the images of the measure are singular measures on the line;

(iii) for another uncountable set of directions in $\mathbf{R^2}$ the projections of the measure $\sigma\times\sigma$ along these directions onto this line are $(\infty-1)$-maps, and the images of the measure $\sigma\times\sigma$ are equivalent to the Lebesgue measure.

Keywords: functional analysis, spectral measures of unitary flows

Рыжиков Валерий Валентинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valery Ryzhikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Эргодическая теория является одним из источников разнообразных примеров унитарных представлений. Предлагаются унитарные потоки динамического происхождения, обладающие следующими свойствами.

Теорема 1. *Для любого $N \geqslant 2$ найдется унитарный поток T_t такой, что при $1 \leqslant m < n \leqslant N$ спектр тензорного произведения $T_{mt} \otimes T_{nt}$ простой и сингулярный, а при $n > N$ спектр произведения $T_t \otimes T_{nt}$ является счетнократным лебеговским.*

Спектральная мера σ такого потока при фиксированном N обладает свойствами:

(i) мера σ непрерывна и сингулярна относительно меры Лебега на группе $\mathbf{R}$, ее носитель есть $\mathbf{R}$;

(ii) проекции меры $\sigma \times \sigma$ вдоль векторов (m, n), $1 \leqslant m < n \leqslant N$, на диагональ в $\mathbf{R^2}$ являются $(1-1)$-отображениями, а образы этой меры суть сингулярные меры на прямой;

(iii) для бесконечного множества направлений в $\mathbf{R^2}$ проекции меры $\sigma \times \sigma$ на диагональ являются $(\infty - 1)$-отображениями, причем образы меры $\sigma \times \sigma$ эквивалентны мере Лебега на прямой.

Кроме того спектральные меры предлагаемых потоков взаимно сингулярны со своими сверточными степенями (примеры таких потоков появились в [1]). Построение эргодических потоков, обеспечивающих нужные эффекты, является модификаций конструкций автоморфизмов из работы [2]. Используя технику "вынуждения перемешивания"[3], можно добиться того, что спектральная мера потока обладает всеми упомянутыми свойствами и при этом является мерой сингулярной мерой, преобразование Фурье которой стремится к нулю на бесконечности. Напомним, что сингулярная мера на окружности, у которой коэффициенты Фурье стремятся к нулю, предложена в [4] (автор признателен А.А. Приходько, обратившего его внимание на этот факт).

Литература

1. *Степин А.М.* Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР, Сер. матем.,**50**:4 (1986), 801-834.

2. *Ryzhikov V.V.* Spectral properties and approximations of joinings for infinite rank-one actions // ArXiv e-prints, arXiv:1902.03215 (2019).

3. *Рыжиков В.В.* Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1 // Матем. сб., **198**:5 (2007), 137-159.

4. *Menshov D.E.* Sur l'unicité du développement trigonométrique // C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A-B, **163** (1916), 433-436.

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.С. Рыхлов
RykhlovVS@yandex.ru

УДК 517.927.25

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается класс не исследованных ранее нерегулярных пучков дифференциальных операторов n-го порядка, порожденных однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями, l из которых берутся в нуле, а $n-l$ в единице. Предполагается, что характеристики пучка лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$. Исследуются достаточные условия кратной полноты в пространстве $L_2[0,1]$ корневых функций пучков этого класса. В частности, показано, что при условии $n-k<l<k$ имеет место $(n-k)$-кратная полнота с возможным конечным дефектом.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, распадающиеся краевые условия, корневые функции, кратная полнота корневых функций

Multiple completeness of root functions of non-regular pencils of differential operators with constant coefficients and separating boundary conditions

In the space $L_2[0,1]$ we consider a class of not previously investigated irregular pencils of differential operators of the n-th order generated by a homogeneous differential expression with constant coefficients and separating boundary conditions, l of which are taken at the end of 0, and $n-l$ at the end of 1. It is assumed that the characteristics of the pencils lie on two rays emanating from the origin in the quantities k and $n-k$. Sufficient conditions for multiple completeness the space $L_2[0,1]$ of root functions of the pencils from this class are investigated. In particular it is shown that under the condition $n-k<l<k$ $(n-k)$-fold completeness the system of root functions with possible a finite defect is took place.

Keywords: pencil of ordinary differential operators, separating boundary conditions, root functions, multiple completeness the system of root functions

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y,\lambda):=\sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)},\ p_{js}\in\mathbb{C},\quad p_{n0}\neq 0,\quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

Рыхлов Виктор Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия); Victor Rykhlov (Chernyshevsky State University of Saratov, Saratov, Russia)

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i = \overline{1,l},\ \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i = \overline{l+1,n}, \quad (2)$$

где λ, α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, определения корневых функций (к.ф.), m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноты к.ф., характеристического определителя, характеристического многоугольника и т. п. из [1].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота системы к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1–4].

В [2] рассмотрен случай, когда характеристики пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [2] получены достаточные условия кратной полноты системы к.ф. для вроде бы более общего класса пучков вида (1)–(2) в случае полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий (то есть, когда не только $2l \geqslant n$, но и $2l < n$ в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$). Но, несмотря на то, что краевые условия (2) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [2], тем не менее, теорема 1 о полноте из [2] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2), так как не все параметры в формулировке теоремы 1 из [2] определены для распадающихся краевых условий (2).

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [2], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий (см. [4]), но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения (характеристики) $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$ ($0 \leqslant k \leqslant n$). Не нарушая общности можно считать, что корни расположены следующим образом при $|\varphi| < \pi/2$:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \cdots < \omega_k e^{-i\varphi}, \quad (3)$$

В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$) считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{0, q\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$ и положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu,\ i = \overline{1,l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu,\ i = \overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \text{ при } n-k \leqslant l; \quad (4)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \text{ при } n-k \geqslant l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0,\ \text{при } k \leqslant l; \tag{6}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \text{ при } k \geqslant l. \tag{7}$$

Отметим, что в граничном случае $n-k=l$ условия (4) и (5) совпадают. Аналогично, в граничном случае $k=l$ совпадают условия (6) и (7).

Теорема 1. *Если $[k,n-k]_+ \leqslant l$ и выполняются условия (4) и (6), то при $m \leqslant 2(n-l)$ система к.ф. пучка $L(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Теорема 2. *Если $[k,n-k]_- \geqslant l$ и выполняются условия (5) и (7), то при $m \leqslant 2l$ система к.ф. пучка $L(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Граничный случай в теоремах 1 и 2 сформулируем в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если $[k,n-k]_- = [k,n-k]_+ = l$ или, что эквивалентно, $n=2k=2l$ и выполняются условия (4) (или (5)) и (6) (или (7)), то система к.ф. пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $[d_1,d_2]_-$ в случае, если по-крайней мере для одного $i=\overline{1,n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Показано, что в случае

$$[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+, \tag{8}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемое доказательство не проходит. Это случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. [1]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs}.

Использование другого подхода из [1], позволяет получить достаточные условия кратной полноты к.ф. и в случае (8). Считаем далее для определенности, что $n=k<k$.

Пусть множество Ω состоит из 0, ω_1, ω_2, …, ω_n, всевозможных сумм этих точек, содержащих по два, по три различных слагаемых и так далее, n слагаемых. Обозначим $M = \operatorname{conv}\Omega$. Граница M — это параллелограмм $ABCD$. Здесь $A=0$ и $B=\omega_1+\cdots+\omega_k$ — крайние левая и правая точки на луче, исходящем из начала, под углом φ, $C=\omega_1+\cdots+\omega_n$ и $D=\omega_{k+1}+\cdots+\omega_n$, причем прямая CD параллельна прямой AB. Через M_Δ, как и в [1], обозначим характеристический многоугольник пучка $L(\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (4), (9) ($n-k<l<k$) и характеристический многоугольник M_Δ пучка (1)–(3) касается сторон AB и CD многоугольника M. Тогда система к.ф. этого пучка $(n-k)$-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

Литература

1. *Рыхлов В.С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ, **1(26)** (2015), 69-86.

2. *Rykhlov V.S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Math., **72**:1-2 (2017), 281-301.

3. *Рыхлов В.С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН, **63**:2 (2017), 340-361.

4. *Рыхлов В.С.* О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // ТВИМ, **4(41)** (2018), 90-112.

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДАЕМОЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРАКА

А.М.Савчук, И.В.Садовничая

artem_savchuk@mail.ru, ivsad@yandex.ru

УДК 517.984.52, 517.927.25,

Для одномерного оператора Дирака $\mathcal{L}$, определенного на конечном отрезке дифференциальным выражением $B\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y}$ с суммируемым комплекснозначным потенциалом и регулярными по Биркгофу краевыми условиями, построена операторная группа $\exp\{it\mathcal{L}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Доказано, что группа корректно определена в любом пространстве $(L_p[0,\pi])^2$, $p \in (1,\infty)$, и $(W_2^\theta[0,\pi])^2$, $\theta \in [0,1/2)$.

Ключевые слова: спектральная теория, полугруппы операторов

On properties of operator exponent generated by 1-D Dirac system

For the one-dimensional Dirac operator $\mathcal{L}$ defined on a finite segment by a differential expression $B\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y}$ with summable complex-valued potential and Birkhoff-regular boundary conditions, the operator group $\exp\{it\mathcal{L}\}$, $t \in \mathbb{R}$ is constructed. It is proved that the group is correctly defined in any space $(L_p[0,\pi])^2$, $p \in (1,\infty)$, and $(W_2^\theta[0,\pi])^2$, $\theta \in [0,1/2)$.

Keywords: spectral theory, operator semigroups

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01215).

Савчук Артем Маркович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Artem Savchuk (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Садовничая Инна Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Inna Sadovnichaya (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть

$$\ell(\mathbf{y}) = \mathrm{B}\mathbf{y}' + P(x)\mathbf{y},$$

где $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \mathbf{y}_2(x) \end{pmatrix}$, $x \in [0, \pi]$,

— дифференциальное выражение, порождающее вместе с краевыми условиями U в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$ одномерный оператор Дирака. Матрицу $P(x)$ — потенциал оператора $\mathcal{L}$ будем считать комплекснозначной и суммируемой, т.е. $p_j \in L_1[0,\pi]$. Мы будем рассматривать краевые условия вида

$$U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \big(y_1(0)\mathbf{y}_2(0)\big) + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ \mathbf{y}_2(\pi) \end{pmatrix} = 0,$$

требуя при этом регулярность их по Биркгофу. А именно, мы будем предполагать, что определитель J_{13}, составленный из первого и третьего столбцов матрицы $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$ краевых условий, отличен от нуля, так же, как и определитель J_{24}. Оператором Дирака назовем оператор

$$\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y} = \ell(\mathbf{y}), \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\ U\mathbf{y} = 0\}.$$

При этом мы здесь и далее через $W_p^n[0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$, обозначаем классические пространства Соболева и для краткости пишем $\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi]$, понимая под этим, что $y_1,\ y_2 \in W_1^1[0,\pi]$.

Определенный таким образом оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ мы будем называть регулярным оператором Дирака. Известно (см., например, [1]), что при таких условиях оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ является замкнутым (неограниченным) оператором в $\mathbb{H}$ с непустым резольвентным множеством. Известно также, что его спектр состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, лежащих в некоторой горизонтальной полосе $\{|\mathrm{Im}\lambda| < \alpha\}$. Систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы обозначим $\mathbf{y}_{n\,n\in\mathbb{Z}}$ (алгоритм нумерации чисел λ_n и выбора векторов $\mathbf{y}_n$ мы опишем чуть позже).

Наша цель — построить сильно непрерывную операторную группу $U(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Мы покажем, что эта группа определена не только в пространстве $\mathbb{H}$, но и в пространствах Соболева $\mathbb{H}^\theta$, $0 < \theta < 1/2$, и в пространствах $(L_\mu[0,\pi])^2$, $\mu \in (1,\infty)$. Кроме того, будет получено представление $U(t) = U_0(t) + V(t)$, где $U_0(t)$ — группа, порожденная невозмущенным оператором.

Часто нам будет удобно предполагать потенциал $P(x)$ внедиагональным: $p_1(x) \equiv p_4(x) \equiv 0$. Общий случай сводится к внедиагональному с помощью преобразования подобия.

Утверждение 1(см. [2]). *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0,\pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где*

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))},$$
$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \qquad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x,$$
$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t)+p_4(t))dt,$$

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \epsilon u_{13} & \epsilon u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & \epsilon u_{23} & \epsilon u_{24} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t)-p_4(t))dt\right). \qquad (1)$$

Оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями будем называть невозмущенным оператором Дирака. Его спектр можно найти явно.

Утверждение 2 (см. [2]). *Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi}\ln z_0 + 2n$ и $-\frac{i}{\pi}\ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения*

$$J_{23}z^2 - [J_{12}+J_{34}]z - J_{14} = 0, \qquad (2)$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$. В случае, если дискриминант квадратного уравнения (2) равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны.

В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну:

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \varkappa_0 + n, & \text{для четных } n, \\ \varkappa_1 + n, & \text{для нечетных } n, \end{cases}$$
$$\text{где} \quad \varkappa_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0, \quad \varkappa_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1,$$

причем $-1 < \operatorname{Re}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1 \leqslant 1$. В случае $\operatorname{Re}\varkappa_0 = \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1$ для определенности будем считать, что $\operatorname{Im}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Im}\varkappa_1$.

Утверждение 3 (см. [1]). *Собственные значения регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ можно занумеровать с учетом кратности так, что $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$ при $n \to \pm\infty$.*

Далее считаем, что собственные значения занумерованы именно так. Конечно, данное условие задает нумерацию не единственным образом, а именно, с точностью до перенумерации конечного числа собственных значений. Мы зафиксируем одну (какую-то) нумерацию.

Условие отличия от нуля дискриминанта квадратного уравнения (2) выделяет из множества регулярных краевых условий класс условий, которые мы будем называть сильно регулярными. Таким образом, краевые условия сильно регулярны, если $(J_{12}+J_{34})^2 + 4J_{23}J_{14} \neq 0$. Регулярные условия, для которых данное выражение обнуляется, будем называть слабо регулярными. Оператор Дирака с внедиагональным потенциалом P и сильно регулярными (слабо регулярными) краевыми условиями U будем называть сильно регулярным (соответственно, слабо регулярным). В случае потенциала P общего вида будем называть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярным (слабо регулярным), если таковы краевые условия $\widetilde{U}$, определенные в (1).

В случае сильной регулярности все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ однократны, а собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ однократны при $|n| > N$ для некоторого N. Соответствующие собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$. В слабо регулярном случае число кратных собственных значений может быть бесконечно. В любом случае для каждого кратного собственного значения мы строим систему максимальных цепочек присоединенных функций (каноническую по Келдышу систему собственных и присоединенных функций). Легко видеть, что таких цепочек может быть максимум две, но их длина может быть какой угодно. Собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$.

Теорема 1(см. [1] и [2])**.** *Для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}$. В слабо регулярном случае эта система является базисом Рисса со скобками, причем объединять функции системы надо парами $\{\mathbf{y}_{2k}, \mathbf{y}_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.*

Биортогональную систему будем обозначать $\mathbf{z}_n$. Несложно видеть, что эта система составлена из корневых функций сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ и также является базисом Рисса.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Для любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определена сильно непрерывная в $\mathbb{H}$ операторная группа $U(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}$, $t \in \mathbb{R}$. Эта группа допускает представление*

$$U(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x, \mathbf{z}_n) e^{it\lambda_n} \mathbf{y}_n. \tag{3}$$

В слабо регулярном случае сходимость ряда понимается в смысле

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=-K}^{K} \left((x, \mathbf{z}_{2k}) e^{it\lambda_{2k}} \mathbf{y}_{2k} + (x, \mathbf{z}_{2k+1}) e^{it\lambda_{2k+1}} \mathbf{y}_{2k+1} \right).$$

Ряд (3) сходится в $\mathbb{H}$ безусловно.

Через $\mathbb{H}^\theta$ обозначаем далее пространства Соболева $W_2^\theta \times W_2^\theta$ с дробным индексом гладкости $\theta \in [0,1]$. При этом $\mathbb{H}^0 = \mathbb{H}$, а $\mathbb{H}^1$ совпадает с классическим соболевским пространством. Известно, что $\mathbb{H}^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}^1]_\theta$ (комплексный метод интерполяции). Через $\mathbb{H}_U^\theta$ обозначаем интерполяционную шкалу $\mathbb{H}_U^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^1]_\theta$, $\theta \in (0,1)$, где $\mathbb{H}_U^1$ — подпространство в $\mathbb{H}^1$ функций, удовлетворяющих краевым условиям U. Известно, что $\mathbb{H}^\theta = \mathbb{H}_U^\theta$ при всех $\theta \in [0, 1/2)$, а при $\theta \in [1/2, 1]$ коразмерность подпространства $\mathbb{H}_U^\theta$ равна 2.

Теорема 3. *Пусть $P \in L_\mu$ для некоторого $\mu \in [1,2)$. Тогда сильно непрерывная операторная группа $U(t)$ определена рядом (3) в пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$ для любого $\theta \in [0, 3/2 - 1/\mu)$, а при $\mu = 2$ — для любого $\theta \in [0,1]$.*

Литература

1. *A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov* The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential // Math. Notes. 2014.**96** №5. P. 3–36.

2. *А. М. Савчук, И. В. Садовничая* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. **58** С. 128–152.

О БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.А. Садыбеков
sadybekov@math.kz

УДК 517.984.62

Рассмотрена спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на интервале $(0,\pi)$ с двухточечными краевыми условиями общего вида. Для случая, когда комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1(0,\pi)$ удовлетворяет условию симметрии $q(x) = q(\pi - x)$, дано полное описание свойств базисности в $L_2(0,\pi)$ корневых функций двухточечных краевых задач в терминах коэффициентов краевого условия.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, двухточечная краевая задача, собственные функции, корневые функции, безусловный базис

On basicity of root functions of boundary value problems for Sturm-Liouville operator with symmetric potential

We consider a spectral problem for the Sturm-Liouville operator with two-point boundary conditions of the general form. For the case when the complex-valued coefficient $q(x) \in L_1(0,\pi)$ satisfies the symmetry condition $q(x) = q(\pi - x)$ we give a complete description of the basicity properties in $L_2(0,\pi)$ of root functions of the two-point boundary value problems in terms of the coefficients of the boundary condition.

Keywords: Sturm-Liouville problem, two-point boundary value problem, eigenfunctions, root functions, unconditional basis

В работе [1] В.А. Садовничий со своим учеником Б.Е. Кангужиным исследовали зависимость спектра от коэффициентов краевых условий для дифференциального оператора четного порядка с определенной симметрией коэффициентов оператора. Ими впервые показано, что при определенных условиях спектр оператора не зависит от некоторых коэффициентов краевого условия. В частности, как следствие, было показано, что спектр задачи для уравнения

$$Ly \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = by(\pi), \; y'(0) = y'(\pi), \tag{2}$$

при симметричном коэффициенте

$$q(x) = q(\pi - x), \quad 0 < x < \pi, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (грант AP05133271).

Садыбеков Махмуд Абдысаметович, д.ф.-м.н., профессор, Генеральный директор Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Makhmud Sadybekov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

не зависит от коэффициента $b \neq -1$ краевого условия (2) и совпадает со спектром периодической краевой задачи.

Основываясь на этом результате, в настоящем докладе мы покажем, что для случая, когда комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1(0,\pi)$ удовлетворяет условию симметрии (3), может быть дано полное описание свойств базисности корневых функций двухточечных краевых задач для уравнения (1) в терминах коэффициентов краевого условия.

Отметим, что симметрия коэффициента играет важную роль в спектральной теории. Например, в [2] показано, что все вольтерровые краевые задачи для уравнения (1) задаются условиями $y(0) = \alpha y(\pi)$, $y'(0) = -\alpha y'(\pi)$ при $\alpha^2 \neq 1$. При $\alpha \neq 0$ условие симметрии (3) является критерием вольтерровости этой задачи.

Для дифференциального уравнения (1) мы рассматриваем двухточечные краевые условия общего вида

$$\begin{cases} U_1(y) = a_{11}y'(0) + a_{12}y'(\pi) + a_{13}y(0) + a_{14}y(\pi) = 0, \\ \\ U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y'(\pi) + a_{23}y(0) + a_{24}y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $U_1(y)$ и $U_2(y)$ – линейно независимые формы с комплексными коэффициентами.

По своим спектральным свойствам краевые условия (4) традиционно разделяют на 4 основных типа:
1) усиленно регулярные;
2) регулярные, но не усиленно регулярные;
3) нерегулярные;
4) вырожденные.

Известно, что в первом случае система корневых функций задачи (1), (4) всегда является базисом Рисса в $L_2(0,\pi)$. Этот результат независимо доказан в книге Данфорд Н. и Шварц Дж. (1966), В.П. Михайловым (1962) и Г.М. Кесельманом (1964).

В третьем случае, как впервые было показано Stone M.H. в 1927 году, она никогда не образует даже обычного базиса в $L_2(0,\pi)$. Решение вопроса о базисности корневых функций для четвертого случая краевых условий дано в недавней работе А.С. Макина 2018 года. Им доказано, что никакая система корневых функций задачи (1), (4) с вырожденными краевыми условиями не образует даже обычного базиса в $L_2(0,\pi)$.

Также хорошо известно, что во втором случае, в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$, система корневых функций задачи может обладать или не обладать свойством базисности в $L_2(0,\pi)$. Впервые В.А. Ильин построил пример двух операторов с одними и теми же (регулярными, но не усиленно регулярными) краевыми условиями и сколь угодно близкими (в любой метрике) бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которые имеют принципиально различные свойства: у одного имеется базис из корневых функций, у другого – нет. В частности, отсюда следует, что проблема базисности корневых функций для задач с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями, вообще говоря, не может быть решена в терминах коэффициентов краевого условия. Однако,

как показано А.А. Шкаликовым в 1979 году [3], корневые функции задачи можно объединить парами так, что соответствующие двумерные подпространства образуют базис Рисса из подпространств (и безусловный базис со скобками).

Таким образом, благодаря исследованиям многих математиков, проблема базисности системы корневых функций задачи (1), (4) сведена к исследованию случая регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий. Как было показано в [4], все такие краевые условия могут быть представлены в одном из двух видов

$$\begin{cases} y'(0) + (-1)^\theta y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ \alpha y(0) + (-1)^\theta (1-\alpha) y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

или

$$\begin{cases} \alpha y'(0) + (-1)^\theta (1-\alpha) y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ y(0) + (-1)^\theta y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{6}$$

где $\theta = 0$ или $\theta = 1$, а коэффициенты α, β_0 и β_1 – произвольные комплексные числа. Если $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$, то не уменьшая общности можно считать, что отличны от нуля следующие определители

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \alpha & (-1)^\theta(1-\alpha) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ 1 & (-1)^\theta \end{vmatrix} \neq 0,$$

составленные из коэффициентов краевых условий (5) и (6) соответственно.

Основным результатом доклада являются следующие теоремы о базисности нормальной системы корневых функций задач (1), (5) и (1), (6).

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in L_1(0,\pi)$ и удовлетворяет условию симметрии (3). Тогда если $\alpha = 1/2$, то нормальная система корневых функций образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. При этом:*
(а) Если $|\beta_0| = |\beta_1| = 0$, то спектр задачи является асимптотически двукратным, а корневые подпространства состоят из двух собственных функций.
(б) Если $|\beta_0|+|\beta_1| > 0$, то спектр задачи асимптотически простой и задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций.

Теорема 2. *Пусть $q(x) \in L_1(0,\pi)$ и удовлетворяет условию симметрии (3). Тогда если $\alpha \neq 1/2$, то нормальная система корневых функций не образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. При этом:*
(а) Если $|\beta_0| = |\beta_1| = 0$, то спектр задачи является асимптотически двукратным, а корневые подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функций. Нормальная система корневых функций образует безусловный базис в $L_2(0,\pi)$.
(б) Если $|\beta_0|+|\beta_1| > 0$, то спектр задачи асимптотически простой и задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций. Нормальная система корневых функций образует базис Рисса из подпространств, но не образует безусловного базиса в $L_2(0,\pi)$.

Доклад основан на результатах совместных исследований с Т.Ш. Кальменовым и Б.Н. Бияровым.

Литература

1. *Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР, **267**:2 (1982), 310–313.

2. *Бияров Б.Н., Джумабаев С.А.* Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля// Матем. заметки, **56**:1 (1994), 143–146.

3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. **34**:5 (1979), 235–236.

4. *Оразов И., Садыбеков М.А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. мат. журнал. **53**:1 (2012), 180–186.

ОБ ОПЕРАТОРЕ СВЕРТКИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

К.К. Садыкова, Н.Т. Тлеуханова

sadkelbet@gmail.com, tleukhanova@rambler.ru

УДК 517.5

В работе исследуется ограниченность нормы оператора свертки в анизотропных пространствах Никольского-Бесова с доминирующей смешанной производной.

Ключевые слова: оператор свертки, анизотропные пространства Бесова, анизотропные пространства Соболева.

On the convolution operator in anisotropic Nikolsky-Besov spaces with a dominant mixed derivative.

The paper studies the boundedness of the norm of the convolution operator in anisotropic Nikol'skii-Besov spaces with the dominant mixed derivative.

Keywords: convolution operator, anisotropic Besov spaces, anisotropic Sobolev spaces

---

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект № AP05132590).

Садыкова Келбет Курмановна, докторант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Kelbet Sadykova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Тлеуханова Назерке Тулековна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Nazerke Tleukhanova (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Пусть $\mathbb{T}^n = [0,1)^n$ – n-мерный тор, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leqslant \boldsymbol{\infty}$. Следуя работе [1] определим пространство $B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}^n)$ как множество рядов $f = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i (m,x)}$ (вообще говоря, расходящиеся), для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}_n)} = \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j k_j} \|\Delta_k(f)\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)} \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

где $\Delta_k(f)(x) = \sum\limits_{\substack{2^{k_j - 1} \leqslant |m_j| < 2^{k_j} \\ j=1,\dots,n}} a_m e^{2\pi i (m,x)}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, $(m,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i$.

При $q = \infty$ величины $\left(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$, $\left(\int\limits_{\mathbb{T}} f^q \right)^{\frac{1}{q}}$ будем понимать соответственно как $\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|$, $ess \sup\limits_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|$.

Будем говорить, что ряд $f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i (k,x)}$ является элементом пространства $W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$ (см. [1]), если найдется функция $f^{\boldsymbol{\alpha}} \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^{\alpha} a_k e^{2\pi i (k,x)}$, здесь $\bar{k}^{\alpha} = \prod\limits_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\alpha}$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}$, $j = 1, \dots, n$,

$$\|f\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)} \stackrel{def}{=} \|f^{\alpha}\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Определим понятие свертки для элементов этих пространств.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i (k,x)}$ и $g(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} b_k e^{2\pi i (k,x)}$ тригонометрические ряды. Под сверткой этих рядов будем понимать ряд

$$(f * g)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k b_k e^{2\pi i (k,x)}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} < \infty$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} + \mathbf{1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$. *Предположим, что* $f \in W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, $g \in W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f * g \in W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f * g\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)} \leqslant \|f\|_{W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} < \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$, $\mathbf{0} < \mathbf{h}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \leqslant \boldsymbol{\infty}$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\eta}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\xi}}$. *Предположим, что* $f \in B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)$, $g \in B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f * g \in B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f * g\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C \|f\|_{B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$, $1 \leqslant \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} < \infty$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$. *Предположим, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– измеримые функции на* $\mathbb{T}^n$, *такие что* $f \in B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)$, $g \in B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f * g \in B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}\mathbf{h}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f * g\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}\mathbf{h}}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C\|f\|_{B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)},$$

где $\frac{1}{\mathbf{h}} \leqslant \frac{1}{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{\boldsymbol{\xi}}$.

Литература

1. *Nursultanov E.D.* Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications // Dokl. Math., **69**:1 (2004), 16–19.

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В GRAND-ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В.Ф. Салманов, В.С. Мирзоев

valid.salmanov@mail.ru

УДК 517.51

В работе вводится одно подпространство Grand- пространства Соболева и изучается базисность системы экспонент в этом подпространстве.

Ключевые слова: система экспонент, базисность, Grand-пространство Соболева

Basicity of system of exponent in the Grand Sobolev spaces

In this paper, we introduce one subspace of the Grand Sobolev space and study the basis property of the system of exponents in this subspace.

Keywords: system of exponents, basis property, Grand Sobolev space

Салманов Валид Фатали оглы, к.ф.-м.н., доцент, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Индустрии; Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Valid Salmanov (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Мирзоев Видади Султаеага оглы, к.ф.-м.н., доцент Институт Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан); Vidadi Mirzoyev (Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

Пусть $1 < p < +\infty$. Пространство измеримых на $(a,b) \subset R$ функций f таких, что

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|b-a|} \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty, \tag{1}$$

называют $L_{p)}(a,b)$ Grang-пространством Лебега [1] . Аналогично вводится пространство Grand- Соболева [2] $W^1_{p)}(a,b) = \{f : f, f' \in L_{p)}(a,b)\}$ с нормой

$$\|f\|_{W_{p)}} = \|f\|_{p)} + \|f'\|_{p)}. \tag{2}$$

Известно что, это не сепарабельное Банахово пространство. Обозначим через $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ множество всех функций из $W^1_{p)}(a,b)$ для которых $\|\hat{f}'(\cdot + \delta) - \hat{f}'(\cdot)\| \to 0$, при $\delta \to 0$, где

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \in (a,b), \\ \\ 0, t \notin (a,b) \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ является многообразием в $W^1_{p)}(a,b)$. Пусть $GW^1_{p)}(a,b)$ является замыканием $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ относительно нормы (2).

Теорема 1. *Система* $t \cup \{e^{int}\}_{n \in Z}$ *образует базис в пространстве* $GW^1_{p)}(-\pi,\pi)$.

Литература

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal., **119** (1992), 129-143.

2. *Donofrio L., Sbordone C., Schiattarella R.* Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs // J. Fixed Point Theory Appl., **13** (2013), 309-340.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛИЛОГАРИФМОВ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ФУНКЦИЙ

Т.А. Сафонова
t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.927.25, 517.521.15, 517.589

В работе средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, порождённых симметрическим дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[a,b]$, получено интегральное представление некоторых степенных рядов и некоторых специальных функций таких, как полилогарифмы и ассоциированные с ними функции.

Ключевые слова: функция Грина, полилогарифмы и ассоциированные с ними функции, интегральное представление степенных рядов

About integral representation of polylogarithms and functions associated with them

In this paper, using the spectral theory of ordinary differential operators generated by a symmetric differential expression with constant coefficients and self-adjoint boundary conditions in the Hilbert space $\mathcal{L}^2[a,b]$, an integral representation of some power series and some special functions such as polylogarithms and associated functions is obtained.

Keywords: Green function, polylogarithms and associated functions, integral representation of power series

Как известно, полилогарифмическая функция $Li_j(z)$ и ассоциированная с ней функция $Ti_j(z)$ порядка j от аргумента z определяются равенствами

$$Li_j(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k^j} \quad \text{и} \quad Ti_j(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)^j},$$

где z, $j\in C$, причём $|z|<1$ (см., напр., [1], ch. 7, § 7.1, formula 7.1 и 7.4).

В работе [2] получено интегральное представление функций $Li_{2m}(z)$ и $Li_{2m+1}(z)$ при $m=1,2,\ldots$ и $z\in(-1,1]$, а именно

$$Li_{2m}(z)=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\int\limits_0^1(B_{2m}(x)-B_{2m})\frac{z(\cos 2\pi x-z)}{1-2z\cos 2\pi x+z^2}dx$$

и

$$Li_{2m+1}(z)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!}\int\limits_0^1 B_{2m+1}(x)\frac{z\sin 2\pi x}{1-2z\cos 2\pi x+z^2}dx,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Tatyana Safonova (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

где $B_n(x)$ и B_n, $n = 1, 2, \ldots$, - многочлены и числа Бернулли соответственно.

Цель данной работы - получение аналогных тождеств для функций $Ti_{2m}(z)$ и $Ti_{2m+1}(z)$.

Пусть T - самосопряжённый оператор, порождённый в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ выражением

$$l_2[y] = -y''$$

и граничными условиями Дирихле-Неймана

$$y(0) = y'(\pi) = 0,$$

и пусть $p_m(x)$ - многочлен с вещественными коэффициентами степени $m \geqslant 1$. Рассмотрим оператор $p_m(T)$. Область определения $\mathcal{D}(p_m(T))$ этого оператора определяется равенством

$$\mathcal{D}(p_m(T)) = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,\pi];\ W_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, 2m\},$$

где линейные формы $W_j(y)$ таковы, что

$$W_{j+1}(y) := y^{(2j)}(0),\ W_{j+m+1}(y) := y^{(2j+1)}(\pi),\quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Кроме того, если $y \in \mathcal{D}(p_m(T))$, то

$$p_m(T)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Спектр $\sigma(p_m(T))$ этого оператора, очевидно, является дискретным и имеет вид

$$\sigma(p_m(T)) = \{\nu|\ \nu = \nu_{2m,k} := p_m((k-1/2)^2),\ k = 1, 2, \ldots\},$$

а собственному значению $\nu_{2m,k}$ соответствует собственная функция

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(k-1/2)x,\quad k = 1, 2, \ldots.$$

Предположим теперь, что ноль является регулярной точкой оператора $p_m(T)$ (т.е. $0 \notin \sigma(p_m(T))$), и рассмотрим его резольвенту $R(p_m(T))$ в этой точке. Хорошо известно, что эта резольвента является интегральным оператором, и для его ядра $K(x,t)$ - функции Грина задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f \\ W_j(y) = 0,\ j = 1, \ldots, 2m \end{cases}, \tag{1}$$

вычисляемой по известной процедуре (см., напр., [3], часть вторая, гл. I, §1.5), справедлива формула

$$K(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k-1/2)x\sin(k-1/2)t}{p_m((k-1/2)^2)}.$$

Далее используя это равенство и формулу разложения функции

$$\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}\quad z\in[-1,1]$$

в ряды Фурье, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m((k-1/2)^2)\neq 0$ при $k=1,2,\ldots$, $K(x,t)$ - функция Грина задачи (1). Тогда при $z\in[-1,1]$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((k-1/2)^2)}=2\int\limits_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}dx \qquad (2)$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{p_m((k-1/2)^2)}=4\int\limits_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\frac{(z^3+z)\sin x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим далее частный случай $p_m(x)=x^m$. В этом случае несложно показать, что справедливо равенство

$$K(x,\pi-x)=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}E_{2m-1}(x/\pi+1/2),$$

где $E_{2m-1}(x)$, $m=1,2,\ldots$ - многочлены Эйлера. Учитывая это тождество в равенствах (2) и (3), заключаем, что справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *При $z\in[-1,1]$ справедливы тождества*

$$Ti_{2m+1}(z)=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{4(2m-1)!}\int\limits_0^1 E_{2m-1}(x)\operatorname{arctg}\frac{2z\cos\pi x}{1-z^2}dx$$

и

$$Ti_{2m}(z)=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2(2m-1)!}\int\limits_0^1 E_{2m-1}(x)\frac{(z^3+z)\cos\pi x}{1+2z^2\cos 2\pi x+z^4}dx.$$

Доклад основан на совместных работах с проф. Мирзоевым К.А. (см. [2] и [4]).

Литература

1.*Levin L.* Polylogarithms and associated functions. — New York. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1981.

2.*Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Докл. АН, **482**:5 (2018), 500-503.

3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976.

4. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки.

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Н. Сивкин
sivkin96@yandex.ru

УДК 517.518

В работе изучаются базисные свойства корневых векторов оператора $A = T + B$, где B - несамосопряжённый оператор, локально p-подчинённый самосопряжённому оператору T с дискретным спектром. Доказана теорема о базисности со скобками корневых векторов оператора $T + B$.

Ключевые слова: возмущения линейных операторов, условия p-подчинения, базисы со скобками, спектральная теория

Eigenfunctions basis property perturbations of self-adjoint operators

In this paper we study the basis properties of the root vectors of the operator $A = T + B$, where B is a non-self-adjoint operator, locally p-subordinated to the self-adjoint operator T with a discrete spectrum. We find conditions which guarantee that root vectors of $T + B$ form a Riess basis with parenthesis.

Keywords: perturbations of self-adjoint operators, p-subordination conditions

Пусть $T = T^*$ - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(H)$. Предположим, что T имеет дискретный неотрицательный спектр, и его собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумерованы с учётом геометрической кратности. Полную ортонормированную систему собственных векторов оператора T, отвечающую этим собственным значениям, обозначим через $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. В этой работе предполагаем, что справедливо следующее ограничение роста собственных значений:

$$ck^{\alpha} < \mu_k < Ck^{\alpha}, \tag{1}$$

для некоторых постоянных c, C, и $\alpha \geqslant 1$ - порядок оператора T.

На оператор-возмущение B накладываем следующие условия:

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(B), \tag{2}$$

$$\|B\varphi_k\| \leqslant b\mu_k^p,\ 0 \leqslant p \leqslant 1 - \alpha^{-1}, \tag{3}$$

где b - постоянная, не зависящая от k.

Основной результат состоит в следующем:

Теорема. *При выполнении вышеозначенных условий система собственных и присоединённых векторов оператора $T + B$ образует базис со скобками пространства H.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Сивкин Владимир Николаевич, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sivkin Vladimir (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Изложим план доказательства. Сначала мы покажем, что *оператор $T + B$ корректно определён на пространстве H, и система его корневых векторов полна в H. При этом спектр оператора $T + B$ дискретен, и для $\forall \delta > 0$ лишь конечное число собственных значений возмущённого оператора A лежит вне сектора $\{|\arg \lambda| < \delta\}$.*

На втором шаге будем использовать свойство проекторов Рисса, которое позволяет выразить операторы проектирования на корневые подпространства через резольвенту:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(A-\lambda)^{-1}d\lambda = P,$$

где Γ - это замкнутый контур в комплексной плоскости, не проходящий через точки спектра. P - это проектор на корневые подпространства, отвечающие собственным значениям, находящимся внутри контура.

На этом шаге проводим рассуждения, следуя работе [2]. Вводим мероморфную операторозначную функцию

$$G(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}B(\lambda - T)^{-1}.$$

Зададим контуры интегрирования $\{Q_{r_n}\}$. Каждый контур - это треугольник, ограниченный с двух сторон лучами вида $\{t \pm it, t \in R_+\}$, третья сторона которого - это часть вертикальной прямой $Re\lambda = r_n$.

Тогда, из вышеуказанных равенств, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_n} G(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} G(\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{n}(P_k - P_k^0),$$

где γ_k - граница области $Q_k \setminus \bar{Q}_{k-1}$, а P_k, P_k^0 - проекторы Рисса, отвечающие спектру операторов A и T внутри $Q_k \setminus \bar{Q}_{k-1}$.

Так как сумма ортогональных проекторов сильно сходится к единичному оператору, то для доказательства теоремы достаточно доказать оценку

$$\int_{\partial Q_n} G(\lambda)fd\lambda \leqslant C\|f\|, \forall f,$$

где постоянная C не зависит от вектора f и номера контура интегрирования n.

Таким образом, что исходная задача свелась к проведению оценок интегралов по треугольникам Q_n.

На третьем шаге показываем, что интеграл по их боковым сторонам ограничен, а именно, показываем, что интеграл от $G(\lambda)$ по лучам $\{t \pm it\}$ ограничен.

Основная трудность - найти точки на вещественной оси, через которые нужно проводить вертикальные отрезки, на которых можно провести нужные оценки.

Определение. *Назовем возрастающую последовательность* $\{t_l\}$ *обзорной для последовательности* $\{\mu_k\}$, *если для пары натуральных* k, m *таких, что* $\mu_m < t_k < \mu_{m+1}$ *будет справедлива оценка*

$$|\mu_{m-l} - t_k| \geqslant C|l|m^{\alpha-1}, \forall l \in Z. \tag{4}$$

То есть, обзорная последовательность состоит из точек, относительно которых исходная последовательность ведёт себя регулярно, то есть вблизи этих точек нет кластеров.

Лемма. *Для последовательности* μ_k, *для которой справедливы оценки (1), (4) существует обзорная последовательность.*

На шаге 4 используем приём искусственной лакуны Маркуса-Мацаева. Рассматриваем последовательность расширяющихся полос $\{Re\lambda \in (t_k - at_k^p, t_k + at_k^p)\}$ *Оказывается, если спектра в этих полосах нет, то оценка проводится легко.*

В общем случае используется приём создания искусственной лакуны. Строим конечномерное исправление T' оператора T, у которого в полосах не содержится спектра, и доказываем для него. Затем переходим к исходным операторам T и $T+B$. *На шаге 5 доказываем следующее утверждение: в полосах будет равномерно ограниченное число точек спектра этих операторов, причём они будут сосредоточены вблизи вещественной прямой, на расстоянии не более, чем* ct_k^p, *где* $c = const$. Доказательство опирается на формулу Вайнштейна-Ароншайна, связывающую число собственных значений оператора в области и приращение аргумента некоторой мероморфной функции вдоль границы.

На шаге 6 в последний раз разбиваем задачу на случаи. В первом случае проводим оценку интеграла в полосах, но вне параболы $\{|\sigma| < ic\sigma^p\}$, *это делается просто. Во втором случае находим вертикальный отрезок внутри параболы, наиболее удалённый от точек спектра.* Для того, чтобы найти вертикальный отрезок с ограниченной величиной $G(\lambda)$ на нём, воспользуемся леммой №6.5 работы [2], которая позволяет оценить мероморфную функцию сверху всюду, кроме кружков фиксированного суммарного радиуса ε.

Представленные в этом сообщении результаты получены совместно с проф. А.А. Шкаликовым.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Тр. МИАН, (2010).

2. *Шкаликов А.А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // УМН, **71**:5 (2016), 113-174.

3. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.

4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.

5. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов.// УМН, **26**:4 (1971), 15-41.

6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.

7. *Маркус А.С.* О разложении по корневых векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // ДАН СССР, **142**:3 (1962), 538-541.

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СПЛЕТЕНИЯ

Н.А. Сидоров
sidorovisu@gmail.com

УДК 517.988

Дан обзор результатов в проблеме анализа появления свободных параметров в разветвляющихся решениях общих нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Рассмотрен прием упрощения уравнения разветвления, позволяющий строить такие решения в окрестностях точек ветвления, методом двухступенчатых итераций. Используются результаты наших работ (Матем. сб., **192**: 7 (2001), 107-124, Матем. сб., **186**: 2 (1995), 129-141).

Ключевые слова: нелинейные уравнения, разветвляющиеся решения, банаховы пространства

On parametric families of branching solutions of nonlinear equations under interlacing conditions

The analysis of the appearance of free parameters in branching solutions of general non-linear equations in Banach spaces is continued. A new technique to simplify the branching equation is proposed.

Keywords: nonlinear equations, branching solutions, Banach spaces

Рассматривается уравнение

$$Bx = R(x, \lambda). \tag{1}$$

Здесь $B, D \in E_1 \to E_2-$ замкнутый линейный Фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения, $\dim N(B) = n \geqslant 1$, $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$. Известно [3], что решения нелинейных уравнений (1) могут зависеть от одного или нескольких свободных числовых параметров. Эти параметры в разных задачах имеют разный смысл и могут принадлежать как ограниченной области евклидова пространства, так и неограниченной области. Приводится анализ появления свободных параметров при построении малых разветвляющихся решений $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ уравнения (1) в условиях существования линейных операторов $S \in L(E_1)$, $K \in L(E_2)$ сплетаемых операторами B и R, т.е. удовлетворяющих условию

$$BS = KB, \;\; R(Sx, \lambda) = KR(x, \lambda), \;\; \forall x, \lambda.$$

Сидоров Николай Александрович, д.ф.-м.н., профессор, ИГУ (Иркутск, Россия); Nikolay Sidorov (Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

Демонстрируется, что результаты работ [1, 2, 3] лежат в основе ряда общих теорий существования и итерационных методов построения параметрически семейство решения уравнения (1) в окрестностях точек бифуркации.

Литература

1. *Сидоров Н.А., Абдуллин В. Р.*Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений // Матем. сб., **192**: 7 (2001), 107–124.

2. *Сидоров Н.А.* Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Матем. сб., **186**: 2 (1995), 129–141.

3. *Логинов Б.В., Сидоров Н.А.* Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации // Матем. сб., **182**: 5 (1991), 681–691.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова

ellkid@gmail.com

УДК 517.518

Доклад будет посвящен обзору полученных авторами результатов по исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами.

Ключевые слова: спектр, индексы дефекта, дифференциальные операторы

Spectral properties of differential operators with oscillating coefficients

The report will be devoted to a review of the spectral properties of the differential operators with oscillating coefficients obtained by the authors.

Keywords: spectrum, deficiency indexes, differential operators

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00250).

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ им.Акмуллы (Уфа, Россия); Yudat Sultanaev (Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russia)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Elvira Nazirova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Предполагается обсудить спектральные свойства дифференциальных операторов (индексы дефекта и характер спектра) с колеблющимися коэффициентами , а так же ряд новых методов и подходов к исследованию асимптотических свойств решений сингулярных дифференциальных уравнений.

Асимптотические формулы для фундаментальной системы решений дифференциального уравнения содержат важную информацию об индексах дефекта минимального оператора L_0, порожденного соответствующим дифференциальным выражением, а так же о качественных спектральных свойствах самосопряженных расширений этого оператора. При этом к настоящему времени каких-либо широких классов дифференциальных операторов с коэффициентами, отличными от регулярных, для которых были бы получены асимптотические формулы фундаментальной системы решений, нет.

В связи с этим интересны любые достаточно содержательные классы коэффициентов линейного дифференциального выражения произвольного порядка, для которых удается строить асимптотики решений при больших значениях аргумента или спектрального параметра, и исследовать спектральные свойства порождаемых этими дифференциальными выражениями операторов.

В статье [1] получены результаты для уравнения Штурма-Лиувилля для класса потенциалов, содержащих осцилляцию. Модельным примером такого уравнения является уравнение вида:

$$-y'' + x^{\alpha}(1 + \sin x^{\beta})y = \lambda y, \quad \beta > \alpha/2 + 1. \tag{1}$$

Для решений данного уравнения удается выписать асимптотические формулы решений при $x \to \infty$, а затем применить полученные асимпотики для изучения спектральных свойств соответствующего минимального дифференциального оператора. Метод исследования таких уравнений основан на переходе к уравнению Риккати, распространить такой подход на уравнения более высоких степеней затруднительно.

В статье [2] была предпринята попытка применить к уравнению Штурма-Лиувилля с колеблющимся потенциалом подход, основанный на модификации метода Левинсона, который заключается в переходе к системе дифференциальных уравнений, ряде матричных преобразований полученной системы и дальнейшем переходе к системе интегральных уравнений. Удалось получить результаты для уравнения (1) при более жестком условии $\beta > \alpha + 1$, однако сам метод исследования может быть применен к уравнениям любого порядка.

В работе [3] был предложен принципиально новый подход к изучению асимптотического поведения при $x \to \infty$ решений сингулярного двучленного уравнения вида:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y + \lambda q(x)y = 0$$

с нерегулярно растущим при $x > 0$ потенциалом $q(x)$ на модельном примере уравнения 4-го порядка с осциллирующим потенциалом:

$$-\frac{d^4}{dx^4}y + \lambda^4(h(x) + q(x))y = 0,$$

где $h(x)$ –функция, содержащая осцилляцию, например, $h(x) = (1 + x)^{\alpha}\sin(x^{\beta})$, $q(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $\beta > 3\alpha/8 + 3/2$. Идея метода заключается в серии матричных преобразований соответствующей системы дифференциальных уравнений, переход к которой осуществляется с помощью введения квазипроизводных, с использованием матричного тождества Хаусдорфа.

В ряде работ авторов доклада данный метод получил развитие. Например, в работе [4] построены асимптотические формулы при $x \to \infty$ для фундаментальной системы решения уравнения с промежуточным осциллирующим коэффициентом $h(x)$ и коэффициентом $q(x)$ из стандартного класса функций, регулярных по Титчмаршу-Левитану:

$$ly = y(4) - \lambda(h(x)y)' - q(x))y = \lambda y.$$

Так же исследованы индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного ly.

В работе [5] разработанный метод матричных преобразований реализован для получения асимптотики фундаментальной системы решений для следующего класса дифференциальных уравнений:

$$y(2n) - (q(x) + h(x))y = 0,$$

где $q(x)$ — регулярный потенциал, а $h(x)$ — быстро осциллирующее возмущение вида:

$$h(x) = \sum a_k(x)S_k(\phi(x)),$$

$S_k(t)$ — осциллирующие функции, $\phi(x)$, $a_k(x)$ — достаточно гладкие монотонные функции.

В дальнейшем планируется продолжить исследования подобных классов дифференциальных операторов и их спектральных свойств.

Литература

1. *Valeev N. F. , Sultanaev Y.T.* On the deficiency indices of a Sturm-Liuville operator with a rapidly oscillating perturbation // Doklady mathematics, **62**:2 (2000), 271–273.

2. *Макина Н.К., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О методах исследования асимптотического поведения сингулярных дифференциальных уравнений // Математические заметки, **196**:2 (2014), 627–632.

3.*Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал, **7**:3 (2015), 9–15.

4. *Valeev N.F., Eskermesuly A., Sultanaev Y.T.* On the deficiency index of a differential operator with fast oscillating coefficients // Mathematical Notes, **100**:3–4 (2016), 486–490.

5. *Валеев Н.Ф., Мякинова О.В., Султанаев Я.Т.* Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n-го порядка с нерегулярными коэффициентами // Математические заметки, **104**:4 (2018), 626–631.

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ю.А. Тихонов
mihelson1994@yandex.ru

УДК 517.983.5

В данной работе рассматривается абстрактное интегродифференциальное уравнение второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве с неограниченными некоммутирующими операторными коэффициентами. Данное уравнение может быть сведено к системе интегродифференциальных уравнений первого порядка. В данной работе установлены результаты о классической корректной разрешимости полученной системы, а также получены оценки нормы решения.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, полугруппы операторов.

On classic solvability of system of integrodifferential equations, arising in theory of viscoelasticity

In the present work an integrodifferential equation of the second order in separable Hilbert with unbounded non-commuting operator coefficients is considered. This equation is reduced to the system of integrodifferential equations of the first order. In the present work we obtain a result on classical correct solvability of this system and introduce the norm estimate of the solution.

Keywords: integrodifferential equations, operator semigroups.

В данной работе изучаются вопросы, связанные с корректной разрешимостью абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными некоммутирующими операторными коэффициентам в гильбертовом пространстве. Рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + \alpha Au(t) - B^*\rho(t) + \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = f(t), \\ \dot{\rho}(t) + Bu(t) = 0, \ t > 0, \\ u(+0) = \varphi_0, \ \rho(+0) = \psi_0, \end{cases} \tag{1}$$

где функции $u(t)$ и $\rho(t)$ принимают значения в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H; A – положительно определённый самосопряжённый оператор, имеющий компактный обратный; оператор B – замкнутый, A-компактный в смысле Като; α – коэффициент внутреннего трения Кельвина-Фойгта. Ядро вольтерровой свёртки задаётся рядом:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t},$$

сходящимся в нуле.

Тихонов Юрий Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yury Tikhonov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Уравнения вида (1) являются абстрактными моделями интегродифференциальных уравнений, описывающих вязкоупругие баротропные жидкости. Исследованию интегродифференциальных уравнений, имеющих аналогичный вид при $\alpha = 0$ и $K(t)$, являющимся конечной суммой экспонент, посвящены работы [1]. В этих работах установлена классическая разрешимость (1), экспоненциальное убывание решений и их асимптотика при некоторых дополнительных предположениях на правую часть.

Отметим, если формально продифференцировать первое равенство в (1) и подставить $\dot{\rho}(t)$ из второго уравнения получим уравнение второго порядка:

$$\ddot{u}(t) + \alpha A\dot{u}(t) + B^*Bu(t) + K(0)Au(t) + \int_0^t \dot{K}(t-s)Au(s)ds = g(t), \qquad (2)$$

$$u(+0) = \varphi_0,\ \dot{u}(+0) = \varphi_1.$$

которое является абстрактной моделью одномерных малых колебаний вязкоупругого стержня. Результаты о корректной разрешимости интегродифференциального уравнения в пространствах Соболева с весом подробно описаны в монографии [2]. Спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом уравнения (2), с дополнительным операторным слагаемым в правой полуплоскости проведён в работе [3], а в статье [4] для этой оператор-функции получена локализация собственных чисел положительного, нейтрального и отрицательного типов, когда $K(t) = 0$. В случае, когда $B = 0$, а $K(t)$ – ряд убывающих экспонент, спектральный анализ символа уравнения (1) проведён в левой полуплоскости в работе [5].

Главный результат данной работы состоит в установлении классической разрешимости системы уравнений (1) при $\alpha > 0$ и $K(t)$, представимого в виде ряда из экспонент, а также оценки нормы решения.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_0 \in Dom(A)$, $\psi_0 \in Dom(B^*)$, $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ *тогда существуют и единственные функции* $u(t), \rho(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *удовлетворяющие (1).*

Если, кроме того, $B^*B \geqslant \delta > 0$, *то существуют* $\omega, d > 0$, *что справедлива оценка:*

$$\|u\|_H^2 \leqslant d_0 e^{-2\omega t}(\|\varphi_0\|_H^2 + \|\psi_0\|_H^2) + \|f(t)\|_{C[0,t]}^2 .$$

Литература

1. *Д. А. Закора* Модель сжимаемой жидкости Максвелла // СМФН **63**:2 (2017), 247-265.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений.. — Москва: МАКС Пресс, 2016. – 488 с.

3. *А. И. Милославский* О спектре неустойчивости операторного пучка // Математические заметки **49**:4 (1991), 88-94.

4. *А. А. Шкаликов, Р. О. Гринив* О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // Математичексие заметки **56**:2 (1994), 840-851.

5. *А. В. Давыдов, Ю. А. Тихонов* Исследование моделей Кельвина-Фойгта, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения **54**:12 (2018), 1663-1677.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА ПО ПРОСТРАНСТВУ ТРАЕКТОРИЙ

Е.Т. Шавгулидзе, А.К. Кравцева
shavgulidze@bk.ru, k-anna-k@mail.ru

В работе построено асимптотическое разложение аналитического интеграла Фейнмана от экспоненты с полиномом четвёртого порядка в показателе по пространству непрерывных траекторий с закреплёнными границами. Полученные результаты могут быть использованы для вычисления асимптотики интегралов, описывающих решения эволюционных уравнений.

Пусть Q — вещественное гильбертово пространство, $p_k\colon Q\times\ldots\times Q\to\mathbb{R}$ — k-линейные непрерывные симметричные формы, $k=1,2,3,4$, p_0 — комплексное число, t — положительное число. Определим функционал $v\colon Q\to\mathbb{R}$ формулой $v(q)=\sum\limits_{i=0}^{4}p_i(q,\ldots,q)$ и, используя линейность функционалов p_i, продолжим функционал v на $Q^{\mathbb{C}}$. Пусть после сдвига на вектор $z_0\in Q$ сумма многочленов p_i переходит в сумму многочленов q_k: $v(q+z_0)=\sum\limits_{i=0}^{4}p_i(q+z_0,\ldots,q+z_0)=\sum\limits_{i=0}^{4}q_k(z_0,\underbrace{q,\ldots,q}_{k})$. Предположим, что $p_4(q,q,q,q)>0$ для любых $q\in Q$, $q\neq 0$. Пусть $\widehat{l}(q)=(p_4(q,q,q,q))^{1/4}$, $\widehat{l}(x_1+x_2)\leqslant\widehat{l}(x_1)+\widehat{l}(x_2)$ для любых $x_1,x_2\in Q$. Определим операцию свёртки формулой $(f*g)(\tau)=\frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t}f(\tau_1)g(\tau-\tau_1)d\tau_1$. Обозначим за ϕ функцию, определяемую равенством $\phi(\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\delta}}\cos\left(\dfrac{\pi n\tau}{t}\right)$. Пусть $\widehat{T}$ — самосопряжённый положительно-определённый ядерный оператор; функция $z_0\colon[0,t]\to Q^{\mathbb{C}}$ имеет вид $z_0(\tau)=(g_0*\phi)(\tau)$, где $g_0\in L_2([0,t],Q^{\mathbb{C}})$, и

$$\sum_{j=1}^{4}j\int_0^t p_j((u*\phi)(\tau),\underbrace{z_0(\tau),\ldots,z_0(\tau)}_{j})d\tau+$$

$$+2\int_0^t(\widehat{T}^{-1}z_0'(\tau),(u*\phi)(\tau))d\tau=0$$

для любых $u\in L_2([0,t],Q)$;

Шавгулидзе Евгений Тенгизович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Eugeniy Shavgulidze (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кравцева Анна Константиновна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anna Kravtseva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$\phi_1(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\delta}} \cos\left(\frac{\pi n \tau}{t}\right)$; оператор T определяется формулой $Th = \widehat{T}(h * \phi_1)$, где $h = u * \phi$, $u \in L_2([0,t], Q)$. И пусть

$$F(\lambda) = \int\limits_E \exp\left\{-i\lambda \int\limits_0^t v(x(\tau))d\tau - \frac{i\lambda}{2} \int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}x'(\tau), x'(\tau))d\tau\right\} dx,$$

$$\text{где } E = \left\{\begin{matrix} x \in C([0,t], Q) \\ x(0) = x(t) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Тогда при некоторых условиях на q_k, z_0 и δ существуют операторы A и B, действующие на некотором подпространстве пространства $E^{\mathbb{C}}$ такие, что при $\lambda \to \infty$ функции $F(\lambda)$ соответствует асимптотический ряд

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma(z_0)}} \exp\left\{-i\lambda \int\limits_0^t \left(v(z_0(\tau)) + \frac{1}{2}(\widehat{T}^{-1}z_0'(\tau), z_0'(\tau))\right) d\tau\right\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m! \lambda^m} \mathrm{Tr}T\left(\mathrm{Tr}T\left(\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{Tr}T\left(\exp\left\{-i\lambda \sum_{k=3}^{4} \int\limits_0^t q_k(z_0(\tau), \underbrace{A^{-1}x(\tau), \dots}_{k})d\tau\right\}\right)'' \dots\right)''\right)''\Big|_{x=0},$$

$$\text{где } \gamma(z_0) = \det(I + TB).$$

Результаты заметки получены в соавторстве с О.Г. Смоляновым.

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ СТЕПЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С.Н. Туманов

tumanov.sergey@topofmind.ru

УДК 517.984, 517.927.25

Доказана полнота системы собственных функций оператора Шрёдингера с комплексным степенным потенциалом на полуоси с краевыми условиями Дирихле.

Ключевые слова: спектральная теория, полнота системы собственных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Туманов Сергей Николаевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Tumanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the Schrödinger operator with the complex power potential.

The completeness for the system of eigenfunctions of the Schrödinger operator with the complex power potential on the semi-axis with Dirichlet boundary conditions is proved.

Keywords: spectral theory, completeness of the system of eigenfunctions.

Мы рассматриваем оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

на полуоси $x \in [0, +\infty)$ с краевыми условиями Дирихле в нуле. Константа $c \in \mathbb{C}$.

Известно, что резольвента $R(\lambda) = (\mathcal{L}_{c,\alpha} - \lambda)^{-1}$ убывает вне замкнутого сектора $\Lambda = \{\arg\lambda \in [0, \arg c]\}$ — числового образа $\mathcal{L}_{c,\alpha}$. Известно [1], что порядок оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ равен $(2+\alpha)/2\alpha$. Если функция f ортогональна всем собственным функциям оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$, то вектор-функция $R(\lambda)f = (\mathcal{L}^*_{c,\alpha} - \lambda)^{-1} f$ со значениями в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ является целой функцией порядка роста $2\alpha/(2+\alpha)$ и нормального типа (см. §4 [4]). Если раствор сектора Λ меньше $2\pi\alpha/(2+\alpha)$, т.е. если $|\arg c| < 2\pi\alpha/(2+\alpha)$, то из теоремы Фрагмена–Линделефа следует, что $R(\lambda)f \equiv 0$, откуда $f \equiv 0$, а это влечет полноту собственных функций оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$.

Эти идеи берут начало от работы Келдыша [3]. Конечно, такой подход не позволяет получить информацию, как растет функция $R(\lambda)f$ внутри сектора Λ. Априори, она экспоненциально растет в этом секторе. Но оказывается, что если вместо вектор-функции $R(\lambda)f$ рассмотреть скалярную целую функцию $(R(\lambda)f)(x)$, заморозив произвольную фиксированную точку x, то эта функция может оказаться убывающей в более широком секторе, чем $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Это наблюдение оказывается решающим для доказательства теоремы о полноте при более слабых условиях на аргумент числа c. Реализовать такой план нам удалось при $\alpha = 2/3$.

Итак, наша основная теорема посвящена оператору

$$\mathcal{L}_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^{2/3}$$

и формулируется так

Теорема 1. *Найдется $\theta_0 \in (\pi/10, \pi/9)$ такое, что при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi/2 + \theta_0$ система собственных функций оператора $\mathcal{L}_c$ будет полна в $L_2(\mathbb{R}_+)$.*

Источником вдохновения послужила статья Савчука и Шкаликова [1], в которой для операторов на полуоси вида

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

была высказана гипотеза: найдется $\alpha_0 < 2/3$, такое, что система собственных функций $\mathcal{L}_{i,\alpha} = -d^2/dx^2 + ix^\alpha$ будет полной в $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $\alpha \in (\alpha_0, 2/3]$.

Отметим, что задача полноты $\mathcal{L}_{i,\alpha}$ до настоящего времени не была решена даже для $\alpha = 2/3$ и в 2015 году была отмечена Я. Алмогом (Y. Almog) [2] как одна из актуальных открытых проблем. Полученная нами теорема, конечно же ее решает при $\alpha = 2/3$.

Литература

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., **51**:1 (2017), 82-98.

2. *Almog Y.* Materials of the workshop "Mathematical aspects of physics with non-self-adjoint operators". List of open problems // https://aimath.org/pastworkshops/nonselfadjoint.html

3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР, **77**:1 (1951), 11-14.

4. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром. // Успехи мат. наук, **71**:5 (2016), 113-174.

ФОМУЛЫ СЛЕДОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.Ю. Фазуллин

fazullinzu@mail.ru

УДК 517.984.46

В работе получена формула регуляризованного следа для ограниченных возмущений дискретных самосопряженных операторов с вычетом первой поправки теории возмущений. В качестве приложения рассмотрены возмущения оператором умножения на ограниченную измеримую функцию некоторых двумерных модельных дифференциальных операторов математической физики.

Ключевые слова: спектр, регуляризованные следы, дискретные операторы, возмущения, дифференциальные операторы в частных производных.

The formulas of the traces of bounded perturbations of two-dimensional model differential operators

In this work we deal with bounded perturbations of discrete self-adjoint operators. And we obtain for them the regularized trace formulas without the first correction term of the perturbation theory. As an application, we consider two-dimensional model differential operators of mathematical physics, which are perturbed by the multiplication by a bounded measurable function.

Keywords: spectrum, regularized traces, discrete operators, perturbations, partial differential operators.

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $L_0 = L_0^*$ полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с дискретным спектром $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < ...)$, P_k – ортогональный проектор соответствующий λ_k.

Предположим, что

$$\inf_{k>>1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0, \tag{1}$$

$r_n = 2^{-1} \min \{\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$ и существует последовательность d_n, такая, что $0 < d_n \leqslant r_n$, $\inf\limits_{n \geqslant 2} d_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-\lambda_n| \leqslant d_n} \|R_{0n}(z)V\| = 0, \tag{2}$$

где $R_{0n}(z) = R_0(z) - (\lambda_n - z)^{-1} P_n$, $R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}$.

Если V – симметрический L_0-компактный в $\mathcal{H}$, то оператор $L = L_0 + V$ замкнут в $\mathcal{D}(L_0)$ и дискретен (теорема Като-Реллиха).

Справедливы следующие утверждения о локализации спектра и формуле регуляризованного следа для собственных чисел оператора L.

Теорема 1. *Пусть выполнены* (1) *и* (2). *Тогда для собственных чисел* μ *оператора* L *из интервала* $(\lambda_n - r_n, \lambda_n + r_n)$, *при* $n >> 1$ *справедлива оценка:*

$$|\mu - \lambda_n| \leqslant C \|P_n V\|, \quad C > 0.$$

Пусть $\nu_n = \dim P_a n P_n$, $\mu_s^{(n)}$, $s = \overline{1, \nu_n}$ - собственные числа оператора L, „расщепленные" возмущением V от спектра L_0. И $\alpha_n = tr P_n V R_{0n}(\lambda_n) V$, $\Gamma_n = \left\{z : |z| = \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}\right\}$, $\beta_n = -tr\left((2\pi i)^{-1} \oint\limits_{\Gamma_n} z(R_0(z)V)^3 R(z) dz\right)$, где $R(z) = (L - z)^{-1}$, tr – след ядерного оператора.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2) *теоремы 1 и при* $n >> 1$

$$\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda_n} \lambda_k \alpha_k = o(\lambda_n), \quad \beta_n = o(1),$$

$$\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda_n} \sum_{\lambda_m \geqslant \lambda_{n+1}} tr P_k V P_m V = o(\lambda_n).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} \left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + tr(P_k V)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda_n} tr\left(P_k V^2 - (P_k V)^2\right). \tag{3}$$

Отметим, что правая часть формулы (3) для произвольных ограниченных самосопряженных возмущений равна нулю, если для функции распределения спектра оператора L_0 справедлива следующая оценка: $N(t, L_0) = o(t), t \to \infty$, (см. [1], теорема 5). Более того, теоремы 1 и 2 позволяют получить формулы следов типа Гельфанда-Левитана для возмущений некоторых модельных операторов математической физики оператором умножения на ограниченную измеримую функцию конечной гладкости:

1. Оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S^2 ([2])

$$L_0 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}, \quad \mathcal{H} = L_2(S^2)$$

$$\sigma(L_0) = \{k(k+1)\}_{k=0}^{\infty}, \quad \nu_k = 2k+1, \quad N(t) = O(t), \quad t \to \infty$$

Теорема 3. *Пусть* $V(\theta,\varphi) \in W_2^1(S^2)$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=-k}^{k}\left[k(k+1) + \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} V(s)ds - \mu_s^{(k)}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{S^2} V^2(s)ds - \frac{1}{16\pi^2}\int_{S^2}\int_{S^2}\frac{V(s)V(s_0)}{\sqrt{1-(\overrightarrow{s},\overrightarrow{s_0})^2}}dsds_0$$

где $\overrightarrow{s} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, $\overrightarrow{s_0} = (\cos\varphi_0\sin\theta_0, \sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0)$.

2. Двумерный гармонический осциллятор ([3])

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1^2 + x_2^2, \qquad \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2),$$

$$\sigma(L_0) = \{2(k+1)\}_{k=0}^{\infty} \quad \nu_k = k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$N(t, L_0) = O(t^2), \quad t \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $V(x_1,x_2) \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{tr}P_kV + \sum_{s=0}^{k}\left(2(k+1) - \mu_s^{(k)}\right)\right] = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2} V^2(x)dx.$$

3. Двумерный гармонический осциллятор в полосе ([4])

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1^2, \quad \mathcal{H} = L_2(\Pi), \quad \Pi = \{x = (x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0,\pi]\}$$

$$D(L_0) = \left\{u(x_1,x_2) : u \in W_2^2(\Pi), u(x_1,0) = u(x_1,\pi) = 0\right\}$$

$$\sigma(L_0) = \{k \in \mathbb{N}\setminus\{1,3\}\}, \nu_k \cong \left[\frac{\sqrt{k}}{2}\right], N(t,L_0) = O(t^{\frac{3}{2}}), t \to \infty$$

Теорема 5. *Пусть* $V(x) \in C_0^{(2)}(\Pi)$. *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}/\{1,3\}}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + tr(P_kV)\right] = \frac{1}{12\pi}\int_{\Pi} V^2(x)dx.$$

4. Двумерный оператор Шредингера в однородном магнитном поле ([5]).

$$L_0 = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\right)^2, \qquad \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2),$$

$$\sigma(L_0) = \{2(2k+1)\}_{k=0}^{\infty} \quad \text{(уровни Ландау)}, \quad \nu_k = \infty.$$

Теорема 6. *Пусть* $V \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда справедлива формула следа*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=-k}^{\infty}(\lambda_k - \mu_k^{(i)}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} V(x)dx\right) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} V^2(x)dx.$$

Литература

1. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Матем. сборник, **196**:12 (2005), 123–156.

2. *Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю., Атнагулов А. И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формула следов // Уфимск. матем. журн., **8**:3 (2016), 22–40.

3. *Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х.* Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник, **192**:2 (2001), 109–138.

4. *Фазуллин З. Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармоническго осциллятора в полосе // Дифференц. уравнения, **55**:5 (2019), 691–701.

5. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Спектр и формула следов двумерного оператора Шрёдингера в однородном магнитном поле // Дифференц. уравнения, **45**:4 (2009), 549–563.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. МЕТОД ГАЛЕРКИНА-ПЕТРОВА ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

И.Д. Цопанов, А.К. Баззаев

55tsopanovig@gmail.com, al.bazzaev@gmail.com

УДК 517.984

Получены формулы регуляризованных следов для возмущений дискретного спектрального оператора оператором Гильберта – Шмидта. Доказана применимость метода Галеркина – Петрова для приближенного вычисления собственных значений для таких возмущений.

Ключевые слова: собственные значения, спектральный оператор, оператор Гильберта – Шмидта, метод Галеркина – Петрова

Цопанов Игорь Дзастемирович, к.ф.-м.н., доцент, Владикавказский институт управления (Владикавказ, Россия); Igor Tsopanov (Vladikavkaz Institute of Management, Vladikavkaz, Russia)

Баззаев Александр Казбекович, к.ф.-м.н., СОГУ имени К.Л. Хетагурова (Владикавказ, Россия); Владикавказский институт управления (Владикавказ, Россия); Alexander Bazzaev (North-Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia), (Vladikavkaz Institute of Management, Vladikavkaz, Russia)

Regularized traces for perturbations of the spectral operator. The Galerkin-Petrov method for calculating eigenvalues.

Formulas of regularized traces are obtained for perturbations of a discrete spectral operator by the Hilbert – Schmidt operator. The applicability of the Galerkin – Petrov method for the approximate calculation of eigenvalues for such perturbations is proved.

Keywords: eigenvalues, spectral operator, Hilbert – Schmidt operator, Galerkin – Petrov method

Пусть T – дискретный спектральный оператор [1] в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть T представим в виде $T = S + N$, где S – спектральный оператор скалярного типа [1], корневые векторы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ которого образуют базис Рисса, а N – квазинильпотентный оператор, каждое ограничение которого на корневое подпространство является конечномерным нильпотентным оператором. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – корневые векторы оператора S^*. Будем считать, что функция распределения спектра оператора T удовлетворяет условию $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^{\alpha}} = \varepsilon < \infty \;\; 0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим возмущение оператора T произвольным ограниченным оператором B. Верна

Теорема 1. Корневые подпространства оператора $T+B$ образуют базис Рисса из подпространств в H.

Теорема 2. Пусть B – оператор Гильберта-Шмидта в H. Если $s \in \mathbb{N}$, то существует подпоследовательность натурального ряда $\{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Big\{ \sum_{m=1}^{M_\nu} \Big[\mu_m^s - \lambda_m^s \; - s\lambda_m^{s-1}(B\varphi_m, \psi_m)\Big] +$$

$$+ c_\nu(s) - \sum_{k=2}^{s-1} \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu} c_{s-k}\,(B\varphi_{m_1}, \psi_{m_k}) \prod_{j=2}^{k} (B\varphi_{m_j}, \psi_{m_{j-1}}) \Big\} =$$

$$= \kappa_s \, Tr(G^{-1}B^sG),$$

где

$$\kappa_s = \begin{cases} 1, \; if \; s \geqslant 2 \\ 0, \; if \; s = 1 \end{cases} \quad , \quad c_\nu(1) = 0, \; c_{s-k} = [\lambda^s : \lambda_{m_1}, \ldots, \lambda_{m_k}, \lambda_{m_k}].$$

Здесь G – ограниченный обратимый оператор на H такой, что для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=0}^{\infty} : \varphi_i = Ge_i, \psi_j = (G^{-1})^* e_j \;\; \forall i, j = 0, 1, 2, \ldots$ Для c_{s-k} использован символ разделенной разности [2].

Формулы, приведенные в теореме 2, называют обычно формулами регуляризованных следов.Существенный вклад в их развитие внесли академик В.А. Садовничий и его ученики. В [8] приведен обзор этой теории. В [6] исследуются формулы регуляризованных следов возмущений из классов Шаттена – фон Неймана.

Рассмотрим в качестве модельного примера задачу Ионкина. Дифференциальный оператор T здесь определяется равенствами

$$Ty = -y'',\ 0 < x < 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = y'(1), \tag{3}$$

Спектральные свойства оператора (3) изучены в работе [4].

Для сопряженной задачи $T^*y = -y'', y'(1) = 0, y(0) = y(1)$, имеем $\psi_0 = 2, \psi_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx), \psi_{2k} = 4x\cos(2\pi kx), k \in \mathbb{N}$, где $T^*\psi_{2k} = \lambda_k\psi_{2k},\ T^*\psi_{2k-1} = \lambda_k\psi_{2k-1} + p_k\psi_{2k},\ p_k = 4k\pi, k \in \mathbb{N}$, т.е. ψ_{2k-1} – присоединенный вектор, а ψ_{2k} – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k. При такой нумерации выполнены соотношения биортогональности $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим спектральную задачу $(T+B)y = \mu\, y$ с точки зрения применимости метода Галеркина-Петрова [5] с системами координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, где B – произвольный ограниченный оператор . Приближение для собственных функций здесь ищется в виде $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)}\varphi_k$, где коэффициенты $c_k^{(n)}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}[\mu\ \delta_{kj} - ((T+B)\varphi_k, \psi_j)] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим определитель этой системы через $\delta_n = \delta_n(\mu)$. Нули этого определителя и являются приближенными значениями собственных значений исходной спектральной задачи. Докажем, что выполнены соотношения сходимости:

$$\lambda_k^{(n)} \quad \to \quad \lambda_k \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \forall\ k = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Следуя [7], сделав замену $y = (T+E)^{-1}u$ и введя обозначения $S = (B-E)(T+E)^{-1}$, $A = (T+E)^{-1}$, получим

$$(E + S - \mu\, A)u = 0,$$

где операторы A и $S = (B-E)A$ – ядерные. Следовательно, корректно определен характеристический определитель ядерного оператора $L = L_\mu = -S + \mu\, A$:

$$\Delta(\mu) = det(E - L(\mu)) \stackrel{def}{=} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k(L_\mu)),$$

где $\lambda_k(L)$ – собственные значения оператора L. Согласно [3] имеем

$$\Delta(\mu) = \det\|((E + S - \mu\, A)\varphi_k, \psi_j)\|_{k,j=1}^{\infty}.$$

Отметим, что $\mu_* \in \mathbb{C}$ является собственным значением исходной задачи тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu_*) = 0$. Обоснование этого проводится с помощью неравенства Карлемана.

Из теоремы Гурвица получим справедливость следующего предложения.

Теорема 3. В любой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ нули определителя $\Delta_n(\lambda)$ равномерно сходятся (их конечное число) к соответствующим нулям

функции $\Delta(\lambda)$. Следовательно, получаем, что нули определителя системы Галеркина-Петрова совпадают с нулями определителя $\Delta_n(\mu)$, для которых выполняются соотношения сходимости.

Литература

1. *Данфорд Н., Шварц Д.* Теория операторов. Т. III. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.— 663 с.

2. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.— 376с.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448с.

4. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, **13**:2 (1977), 294-304.

5. *Красносельский М.А., Вайниккo Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 455 с.

6. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Формула регуляризованного следа для возмущений из класса Шатена–фон Неймана дискретных операторов // Уфимск. матем. журн., **7**:4 (2015), 109-115.

7. *Нейман-Заде М. И., Шкаликов А. А.* О вычислении собственных значений задачи Орра-Зоммерфельда // Фундам. и прикл. матем., **8**:1 (2015), 301-305.

8. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы дискретных операторов// Успехи математических наук, **61**:5 (2006), 89-156.

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В L_2

М.Ш. Шабозов

shabozov@mail.ru

УДК 517.5

В докладе излагаются точные неравенства типа Колмогорова для последовательности производных периодических функций двух переменных и наилучших приближений последовательности производных функций тригонометрическими “углами” в пространстве $L_2(Q)$ $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$.

Ключевые слова: неравенства типа Колмогорова, тригонометрические “угли”, квазиполином, наилучшее приближение.

Шабозов Мирганд Шабозович, д.ф.-м.н., профессор, Таджикский национальный университет (Душанбе, Республика Таджикистан); Mirgand Shabozov, professor, Tajik National University (Dushanbe, Republic of Tajikistan)

Kolmogorov type inequality for the functions of two variable in L_2

In this speech will delivered about the exact inequalities of Kolmogorov type for a sequence derivatives of functions of two variables and the best approximate sequential derivatives of functions by trigonometric "angle" in $L_2(Q)$ $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$.

Keywords: Kolmogorov type inequality, trigonometric "angle", quasipolynomial, the best approximation

В монографии [1] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных (неравенствам типа Колмогорова) функций с различными областями определения, как классических, так и полученных в последнее время. При этом основное внимание уделено точным неравенствам такого типа. В [2] приведен обстоятельный обзор неравенств типа Колмогорова, где получены наилучшие константы и анализируется их связь с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования на различных классах функций. Следует отметить, что почти все результаты в [1] и [2] получены для вещественнозначных функций одного переменного. Естественно, что представляет большой интерес получение неравенств типа Колмогорова для функций многих переменных, где получены значительно меньше результатов. Здесь излагаем некоторые результаты для периодических дифференцируемых функций двух переменных в $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x,y)dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ — множество функций $f \in L_2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)} \in L_2$.

Дифференцируя формально равенство

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)},\ c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) e^{-i(px+qy)} dxdy$$

r-раз по переменному x и s-раз по переменному y в смысле сходимости в метрике L_2, запишем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (ip)^r (iq)^s c_{pq}(f) e^{i(px+qy)},$$

откуда сразу вытекает равенство

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} p^{2r} q^{2s} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{pq}^2(f),$$

где

$$\rho_{pq}^2(f) = |c_{-p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{p,q}(f)|^2.$$

Для функции $f \in L_2^{(r,s)}$, её частных производных $f^{(r,0)}$ $(r \in \mathbb{N})$, $f^{(0,s)}$ $(s \in \mathbb{N})$, а также смешанных производных $f^{(r-k,s-l)}$ $(k,l \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leqslant k \leqslant r,\ 0 \leqslant l \leqslant s)$ в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f),\ \|f^{(r,0)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{2r}\rho_{p,q}^2(f),$$

$$\|f^{(0,s)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} q^{2s}\rho_{p,q}^2(f),$$

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2}^2 = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{2(r-k)}q^{2(s-l)}\rho_{p,q}^2(f).$$

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r,s)}$ $(r,s = 2,3...)$ *при всех* $k = \overline{1,r-1}$ *и* $l = \overline{1,s-1}$ *имеют места неравенства*

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_2}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \tag{1}$$

Знак равенства в (1) реализуется, например, функцией

$$f_0(x,y) = \gamma \cos m(x+\alpha) \cdot \cos n(y+\beta) \in L_2^{(r,s)},\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\{u_0(x), u_1(x), \dots u_m(x)\},\ V_n := \{v_0(y), v_1(y), \dots v_n(y)\}$$

их конечномерные подпространство, то есть $U_m \subset X,\ V_n \subset Y$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{p=0}^{m} u_p(x)\psi_p(y) + \sum_{q=0}^{n} v_q(y)\phi_q(x),$$

где $\{\phi_q(x)\}_{q=0}^n$ и $\{\psi_p(y)\}_{p=0}^m$ — наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y назовем тригонометрическом "углом" [3-4], или обобщенным полиномом (квазиполиномом), порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство пространств $Z := Z(Q)$, которое обозначим

$$G(U_m, V_n) : U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции " $\otimes$ " и " $+$ " обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z; = \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n)\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m > r \geqslant k \geqslant 1,\ n > s \geqslant l \geqslant 1,\ m, n, r, s, k, l \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2}\right)^{kl/rs} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2}\right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)},$$

которое является точным в вышеуказанном смысле.

Отметим, что теорема 2 доказывается по схеме рассуждений приведенной в [5], где найдены неравенство типа Колмогорова для функций двух комплексных переменных в пространстве Бергмана.

Литература

1. *Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

2. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук, **51**:6 (1996), 89-124.

3. *Потапов М.К.* О приближении "углом" // Proceedings of the conference on constructive theory of functions, Akademiai Kiado, Budapesht, 1972, 371-399.

4. *Потапов М.К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения "углом" // Тр. МИАН СССР. **117** (1972), 256-291.

5. *Шабозов М.Ш., Сайнаков В.Д.* О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Труды ИММ УрО РАН, **23**:4 (2018), 295-309.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

И.А. Шейпак

iasheip@yandex.ru

УДК 517.518.23

Изучается связь норм операторов вложения пространства $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n[-1;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k[-1;1]$ с нормами функционалов $f \mapsto f^{(k)}(x)$ в пространстве $\mathcal{H}$. Для каждой фиксированной точки x обозначим норму функционала через $A_{n,k}(x)$. Для каждого натурального n и четного $k \leqslant n-1$ найдено явное значение $A_{n,k}(0)$, которое является глобальным максимумом функции $A_{n,k}(x)$. Это значение также является точной константой вложения в указанных пространствах.

Ключевые слова: пространства Соболева, константы вложения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Шейпак Игорь Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Sheipak (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Sharp estimates of even order derivatives in Sobolev spaces

We study the relation of embedding operators norms from space $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n[-1;1]$ in $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k[-1;1]$ with norms of functionals $f \mapsto f^{(k)}(x)$ in space $\mathcal{H}$. For each fixed point x we denote the functional norm by $A_{n,k}(x)$. For each natural n and even $k \leqslant n-1$, explicit values $A_{n,k}(0)$ are found, which are the global maximum of the function $A_{n,k}(x)$. This value is the exact embedding constant in the specified spaces.

Keywords: Sobolev spaces, embedding constants

Определим величины $A_{n,k}(x)$ как нормы функционалов $f \mapsto f^{(k)}(x)$, действующих в пространстве $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n[-1;1]$:

$$A_{n,k}(x) := \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=1} |f^{(k)}(x)|.$$

Целью данного исследования является установление точного значения

$$\Lambda_{n,k} := \sup_{x\in[-1;1]} A_{n,k}(x),$$

которое называют константой вложения пространства Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n[-1;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_\infty^k[-1;1]$. Намного удобнее работать с квадратом этих величин, поэтому $\Lambda_{n,k}^2$ также называют константами вложения.

В работе [1] были получены формулы для констант $\Lambda_{n,0}^2$, $\Lambda_{n,1}^2$ и $\Lambda_{n,2}^2$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A_{n,k}^2(x)$ и предъявлены формулы для $\Lambda_{n,4}^2$ и $\Lambda_{n,6}^2$.

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1;1]$ и определяются формулой Родрига

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

Первообразная порядка $m>0$ определяется формулой

$$P_n^{(-m)} := \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)}.$$

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A_{n,k}^2(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A_{n,k}^2(x) = A_{n-2,k-2}^2(x) - \left(P_{n-2}^{(k-n)}(x)\right)^2\left(n-\frac{3}{2}\right) - \left(P_{n-1}^{(k-n)}(x)\right)^2\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Для величин $A_{n,k}^2(x)$ справедливо соотношение*

$$\frac{dA_{n,k}^2(x)}{dx} = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(x)\cdot P_n^{(k-n+1)}(x).$$

Теорема 1. *Точка $x = 0$ является точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ на отрезке $[-1;1]$.*

С помощью лемм 1, 2 и теоремы 1 доказывается следующий основной результат.

Теорема 2. *Точные значения констант вложения на отрезке $[-1;1]$ при $k = 2l$, $l = 0, 1, \ldots$ имеют вид*

$$\Lambda^2_{n,k} := A^2_{n,k}(0) = \frac{((k-1)!!)^2}{2^{2n-k-1}((n-(k/2)-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

Литература

1. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}^n_2\,[0;1]$ // Труды МИАН, **269** (2010), 143-149.

2. *Мукосеева Е.В., Назаров А.И.* О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ, **425** (2014), 35-45.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Н. Ярметова

tagirova_rena@mail.ru

УДК 517.984

Доклад посвящен исследованию спектральных свойств операторов, порожденных в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$ симметрическими дифференциальными выражениями с полиномиальными коэффициентами и их степенями. Рассматривается случай, когда в базисе функций Чебышева-Эрмита им соответствуют двухдиагональные обобщенные якобиевы матрицы. Найдены дефектные числа таких операторов, построены примеры целых дифференциальных операторов минимального типа, которые порождаются иррегулярными дифференциальными выражениями.

Ключевые слова: симметрические дифференциальные и разностные операторы, обощенные якобиевые матрицы, индекс дефекта, самосопряженные расширения, спектр

Ярметова Рена Насировна, аспирант, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Rena Yarmetova (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

Differential operators with polynomial coefficients

The report is devoted to the study of the spectral properties of the operators generated in a Hilbert space $L^2(-\infty,+\infty)$ symmetric differential expressions with polynomial coefficients and their powers. The case is considered when, in the basis of Chebyshev-Hermite functions, they correspond to two-diagonal generalized Jacobi matrices. The deficiency indecies of such operators are found, examples of entire differential operators of minimal type are constructed, which are generated by irregular differential expressions.

Keywords: symmetric differential and difference operators, generalized Jacobi matrix, deficiency index, self-adjoint extensions, spectrum

В докладе будет рассмотрено симметрическое дифференциальное выражение порядка $n = 2k + m \geqslant 3$ вида

$$l = \sum_{i=0}^{k} \{h_i a^{*i+m} a^i + \overline{h}_i a^{*i} a^{i+m}\},$$

где $m \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$ – целые числа, $h_0, h_1, \ldots, h_k$ – произвольные комплексные числа, $h_k \neq 0$, и

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx}), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx}).$$

В этом случае матричным представлением минимального замкнутого симметрического оператора L, порожденного дифференциальным выражением l в пространстве $L^2(-\infty,+\infty)$, в базисе функций Чебышева-Эрмита является якобиева матрица, в которой только элементы двух диагоналей отличны от нуля, а именно диагонали с номером m выше и ниже главной (нулевой) диагонали. Исходя из этого, найдены дефектные числа оператора L, порожденного дифференциальным выражением l и его степенями.

В докладе также будут приведены примеры операторов, порожденных дифференциальными выражениями не более третьего порядка с полиномиальными коэффициентами и их степенями в пространстве $L^2(-\infty,+\infty)$, дефектные числа которых могут оказаться не только меньше или равны, но, что особенно интересно, и больше порядка соответствующих дифференциальных выражений.

Доклад основан на совместной статье [1].

Литература

1. *К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная, Т.А. Сафонова, Р.Н. Тагирова* Обобщенные якобиевы матрицы и спектральный анализ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **152** (2018), 91-102.

ON THE SOLVABILITY IN A WEIGHT SPACE OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A CLASS FOURTH-ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.R. Aliev
alievaraz@yahoo.com

UDC 517.95

In a Sobolev-type space with an exponential weight, sufficient conditions are founded for the well-posed and unique solvability of a boundary value problem for one class fourth-order operator-differential equations with multiple characteristics.

Keywords: boundary-value problem, operator-differential equation, Hilbert space, self-adjoin operator, regular solvability
MSC: 35G15, 47D03

In a separable Hilbert space H, we consider a boundary-value problem

$$\left(-\frac{d}{dx}+A\right)^3\left(\frac{d}{dx}+A\right)u(x)+$$

$$\sum_{j=1}^{4}A_j\frac{d^{4-j}u\left(x\right)}{dx^{4-j}}=f\left(x\right),\ x\in R_+=[0,+\infty), \tag{1}$$

$$u\left(0\right)=0, \tag{2}$$

where $f\left(x\right)$ and $u\left(x\right)$ are H-valued functions, A is a self-adjoint positive-definite operator with lower boundary of the spectrum λ_0 ($A=A^*\geqslant\lambda_0 E$ ($\lambda_0>0$), where E is the identity operator), and A_j, $j=1,2,3,4$, are linear, generally, unbounded operators.

Note that equations of the form (1) are encountered in applications, in particular, in the problems of stability of plates made of plastic materials (see [1]).

We introduce the following Hilbert spaces with exponential weight $e^{-\kappa x/2}$, $\kappa\in R=(-\infty,+\infty)$:

$$L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right)=\left\{v\left(x\right):\|v\|_{L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right)}=\left(\int\limits_0^{+\infty}\|v\left(x\right)\|_H^2\,e^{-\kappa x}dx\right)^{1/2}<+\infty)\right\},$$

$$W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H\right)=\left\{v\left(x\right):\|v\|_{W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H\right)}=\right.$$

$$\left.\left(\int\limits_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^4u\left(x\right)}{dx^4}\right\|_H^2+\left\|A^4u\left(x\right)\right\|_H^2\right)e^{-\kappa x}dx\right)^{1/2}<+\infty\right\}.$$

Let

$$W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H;\{0\}\right)=\left\{v\left(x\right):v\left(x\right)\in W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H\right),v\left(0\right)=0\right\}$$

and let P_0 denote an operator from the space $W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H;\{0\}\right)$ to $L_{2,\kappa}\left(R_+;H\right)$ defined as

$$P_0u(x)\equiv\left(-\frac{d}{dx}+A\right)^3\left(\frac{d}{dx}+A\right)u(x),\ u(x)\in W_{2,\kappa}^4\left(R_+;H;\{0\}\right).$$

This work is supported by the "University Grant" of the ASOIU (no. ADNSU-2018-1-01).
Aliev A.R. (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

Definition. Suppose that for any $f(x) \in L_{2,\kappa}(R_+; H)$ there exists a function $u(x) \in W^4_{2,\kappa}(R_+; H)$ satisfying equation (1) almost everywhere in R_+ and boundary condition (2) in the sense that

$$\lim_{x\to 0} \left\| A^{7/2} u(x) \right\|_H = 0,$$

and, moreover,

$$\|u\|_{W^4_{2,\kappa}(R_+;H)} \leqslant const\, \|f\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}.$$

Then the boundary value problem (1) and (2) is said to be *regularly solvable.*

The following theorems is valid.

Theorem 1. *Suppose that* $A = A^* \geqslant \lambda_0 E$ $(\lambda_0 > 0)$ *and* $\kappa \in (-2\lambda_0, 2\lambda_0)$. *Then the operator* P_0 *is an isomorphism between the spaces* $W^4_{2,\kappa}(R_+; H; \{0\})$ *and* $L_{2,\kappa}(R_+; H)$.

Theorem 2. *Suppose that* $A = A^* \geqslant \lambda_0 E$ $(\lambda_0 > 0)$, $\kappa \in (-2\lambda_0, 2\lambda_0)$ *and, the operators* $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, *are bounded in* H, *moreover, the following inequality holds true*

$$\sum_{j=1}^{4} N_j \left\| A_j A^{-j} \right\|_{H\to H} < 1,$$

where

$$N_j = \sup_{0\neq u \in W^4_{2,\kappa}(R_+;H;\{0\})} \left(\left\| A^j \frac{d^{4-j}u}{dx^{4-j}} \right\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)} \|P_0 u\|^{-1}_{L_{2,\kappa}(R_+;H)} \right),\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Then the boundary-value problem (1) *and* (2) *is regularly solvable.*

Note that the well-posed and unique solvability of equation (1) on the whole axis was studies in [2]. The Fredholm property of the boundary-value problems on the semi-axis and on a finite interval for equations of the form (1) was considered in [3].

References

1. *Teters G.A.* Complex Loading and Stability of the Covers from Polymeric Materials. Zinatne Press, Latvia, Riga, 1969. (in Russian)

2. *Aliev A.R., Mohamed A.S.* On a Class of Fourth-Order Operator-Differential Equations in Weighted Space. In the Book "Science in Universities: Mathematics, Computer Science, Physics, Education" (to the 110th Anniversary of the Mathematical Faculty of Moscow State Pedagogical University) - Moscow, Publishing House "Moscow State Pedagogical University", 2010, 88-91.

3. *Shkalikov A.A.* Elliptic Equations in Hilbert Space and Associated Spectral Problems // J. Soviet Math., **51**:4 (1990), 2398-2467 (published in Trudy Sem. Petrovsk., 14 (1989), 140-224).

ON THE SOLVABILITY OF THE OPERATOR RICCATI EQUATION IN REFLEXIVE BANACH SPACE

N.V. Artamonov

nikita.artamonov@gmail.com

UDC 517.968.4

Let X be a reflexive Banach space. It is proved that the integral non-autonomous operator Riccati equation has a unique non-negative strongly continuous solution $P(t) \in \mathcal{L}(X, X^*)$

Keywords: operator Riccati equation, reflexive Banach space, operator-function

Operator Riccati equation arises in many applications. It is well-known that the solution of linear-quadratic control problem on finite interval can be obtained by solving differential Riccati equation.

We will use the following notations. If $X_{1,2}$ are Banach spaces, then by $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ we will denote the space of bounded operators acting from X_1 to X_2. By $C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X_1, X_2))$ we denote the space of strongly continuous operator functions on interval $\mathcal{I} = [0, T]$ with the topology of strongly uniform convergence. By definition the operator-function $P \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X_1, X_2))$ if and only if for all $x \in X_1$ the vector-function $P(\cdot)x \in C(\mathcal{I}; X_2)$.

An operator function $\{U_{t,s}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ on a Banach space is called *forward (in time) evolution family* if $U_{t,t} = I$ and $U_{t,s} = U_{t,r}U_{r,s}$ for all $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$. An operator function $\{V_{s,t}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ on a Banach space is called *backward (in time) evolution family* if $V_{t,t} = I$ and $V_{s,t} = V_{s,r}V_{r,t}$ for all $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$.

An evolution family is called *strongly continuous* if it is strongly continuous in t (for fixed s) and in s (for fixed t). Note that strongly continuous evolution family is not necessary jointly continuous.

Let X be a reflexive Banach space with duality pairing $\langle f, x\rangle$ $(x \in X, f \in X^*)$. If $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ then taking into account the canonical isomorphism between X and X^{**} one can consider that the adjoint operator $A_1^* \in \mathcal{L}(X, X^*)$. Operator $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ is self-adjoint if $A_1 = A_1^*$. Self-adjoint $A_1 \in \mathcal{L}(X, X^*)$ is non-negative if $\langle A_1 x, x\rangle \geqslant 0$ for all $x \in X$.

Analogously if $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ then one can consider that the adjoint operator $A_2^* \in \mathcal{L}(X^*, X)$. Operator $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ is self-adjoint if $A_2 = A_2^*$. Self-adjoint operator $A_2 \in \mathcal{L}(X^*, X)$ is non-negative if $\langle x, A_2 x\rangle \geqslant 0$ for all $x \in X$.

Note that if $U_{t,s}$ is strongly continuous evolution family in reflexive space X then $V_{s,t} = U_{t,s}^*$ is strongly continuous backward evolution family in X^*.

Theorem 1. *Let X be a reflexive Banach space and the following assumptions hold:*

1. *$\{U_{t,s}\}_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T}$ is strongly continuous and uniformly bounded forward evolution family in $\mathcal{L}(X)$. Then $V_{s,t} = U_{t,s}^*$ is strongly continuous and uniformly bounded backward evolution family in $\mathcal{L}(X^*)$.*
2. *operator functions $C \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X, X^*))$ and $B \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X^*, X))$*
3. *$C(t) = C^*(t) \geqslant 0$ and $B(t) = B^*(t) \geqslant 0$ for all $t \in \mathcal{I}$.*

Nikita V. Artamonov (MGIMO-University, Moscow, Russia)

Then for all self-adjoint non-negative $G \in \mathcal{L}(X, X^*)$ the integral Riccati equation

$$P(t) = V_{t,T} G U_{T,t} + \int_t^T V_{t,s}\{C(s) - P(s)B(s)P(s)\}U_{s,t}ds$$

has a unique self-adjoint non-negative solution $P \in C_s(\mathcal{I}; \mathcal{L}(X, X^*))$.

Theorem 1 generalizes the results by Curtain & Pritchard, Lasiecka & Triggiani, Da Prato & Ichikawa to the case of arbitrary reflexive Banach space.

Some applications of Theorem 1 will be given during the talk.

References

1. *Артамонов Н.В.* О разрешимости интегрального уравнения Риккати в рефлексивном банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения, **55** (2019) (принято к публикации)

2. *Артамонов Н.В.* О разрешимости системы прямых-обратных линейных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Мат.заметки, **100**:5 (2016), 762-765

ON GLOBAL INVERSE FUNCTION THEOREMS

A.V. Arutyunov, S.E. Zhukovskiy

arutyunov@cs.msu.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

The question on the existence of a right inverse mapping to a smooth mapping acting between finite-dimensional linear spaces is considered. Sufficient conditions for existence of the right inverse mapping are obtained.

Keywords: inverse function, global homeomorphism.

Consider the equation

$$f(x) = y. \tag{1}$$

Here f is a continuous mapping between Banach spaces X and Y, $x \in X$ is an unknown variable, and $y \in Y$ is a parameter. Given a set $V \subset Y$, a function $g : V \to X$ is called a right inverse to f on V if $f(g(y)) = y$ for all $y \in V$. The existence of inverse function to f on the set V is equivalent to solvability of equation (1) for every $y \in V$. Hence, theorems on the existence and properties of inverse functions are applicable to equations in various areas of mathematics and play important role in optimization, ordinary differential equations, control theory, etc.

Let us consider one class of theorems on inverse functions, namely the global homeomorphism theorems. These assertions provide assumptions for the mapping f to be a homeomorphism or, equivalently, for equation (1) to have the only solution

The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (Project no. 17-11-01168)

Aram Arutyunov (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia)

Sergey Zhukovskiy (Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudniy, Russia; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia)

$x = g(y)$ for every $y \in Y$ continuously dependent on y. The classical result in this area is the Hadamard's Theorem. Let us recall it.

Hadamard's Theorem (see, for example, [1, Theorem 5.3.10]). *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be continuously differentiable, the linear mapping $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be invertible for every $x \in \mathbb{R}^n$, and there exist $c \geqslant 0$ such that*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x)^{-1} \right\| \leqslant c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Then f is a homeomorphism.

Some problems lead to the investigation of global solvability of equation (1) in the case when f a priori is not a homeomorphism, for example, when $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$ and $k < n$. In this case, there can be obtained conditions for existence of continuous right inverse function $g : Y \to X$. In our research, we have obtained these conditions under various differentiability assumptions on f in both finite-dimensional and infinite-dimensional case. In particular, for the case when the spaces X and Y are finite-dimensional, the following assertion was derived.

Below $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^k$ are real coordinate spaces with the norms denoted by $|\cdot|$. Given a linear operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, denote by $\operatorname{cov} A$ the supremum of all numbers $\alpha > 0$ such that $B_{\mathbb{R}^k}(\alpha) \subset AB_{\mathbb{R}^n}(1)$. Here $B_{\mathbb{R}^k}(\alpha)$ stands for the closed ball in $\mathbb{R}^k$ centered at zero with the radius α.

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ be a twice continuously differentiable mapping, $\alpha > 0$ be a given number. If*

$$\operatorname{cov} \frac{\partial f}{\partial x}(x) \geqslant \alpha \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

then for every $x_0 \in \mathbb{R}^n$, there exists a continuously differentiable mapping $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ such that

$$f(g(y)) = y, \quad |g(y) - x_0| \leqslant \frac{|y - f(x_0)|}{\alpha} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^k.$$

Note that the proof of the existence of the right inverse function g in this theorem is based on the theory of ordinary differential equations. In fact, $g(y)$ can be constructed as a value of a solution of a specific ordinary differential equation with a parameter y.

References

1. *Ortega J.M., Rheinboldt W.C.* Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. — NY: Academic Press, 1970.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR ONE CLASS OF FREDHOLM – STIELTJES EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH THO VARIABLES

A. Asanov, Z.A. Kadenova

avyt.asanov@mail.ru, kadenova71@mail.ru

UDC 517.968

This report is devoted to the study of the uniqueness of solutions linear integral equations of the first kind with two independent variables in which the operator generated by the kernel, is not compact operator. The relevance of the problem is due to the needs in development of new approaches for the regularization and uniqueness of the solution of linear integral equations of the first kind with two independent variables. As of approximate solutions such tasks, stable to small variations of the initial data, we use the solutions derived by the method of regularization and belong to the class of incorrectly formulated tasks. One of the classes of such ill-posed problems are integral equations of the first kind with two independent variables. The aim of the work is the proof of the theorems of uniqueness for solving of Fredholm-Stielties linear integral equations of the first kind with two independent variables. In the paper a theorem is proved the uniqueness of the solution of Fredholm-Stielties integral equations of the first kind with two independent variables.To obtain formulated in the article the results of used methods of functional analysis. The obtained results are new. The reliability of the result set of evidence and is illustrated by examples.The work has a theoretical character. The obtained theoretical results can be applied in various fields of science and technology method of nonnegative quadratic forms and the consept of derivative with respect to increasing function.

Keywords: Fredholm-Stieltjes inteqral equations, first kind, two variables, solution and uniqueness

Various issues concerning of integral equations of the first kind were studied in [1-7]. More specifically, fundamental results for Fredholm integral equations of the first kind were obtained in [6], where regularizing operators in the sense of M.M.Lavrent'ev vere constructed for solutions of linear Fredholm integral equations of the first kind. The regularization and uniqueness of solutions to systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind were investigated in [3, 4]. In this paper, while analizing the following integral equation.

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y) + \int_{t_0}^T Q(t,x,s)u(s,x)d\psi(s) + \int_{t_0}^t \int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s) = f(t,x),\ (t,x) \in G = \left\{(t,x) \in R^2 : t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b\right\}, \tag{1}$$

where

$$K(t,x,y) = \left\{ \begin{array}{l} A(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ B(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \end{array} \right\}$$

Avyt Avyt Asanov, Kyrgyz-Turkish Manas University, Kyrgystan
Zuula Kadenova, Institute of mathematics of NAS of the Kyrgyz Republic

$$Q(t,x,s)=\left\{\begin{array}{l} M(t,x,s),\ t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b,\\ \\ N(t,x,s),\ t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b, \end{array}\right\}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s), C(t,x,s,y)$ are given continuous functions, respectively on the domains

$$G_1=\{(t,x,y): t_0\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant y\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_2=\{(t,x,y): t_0\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant y\leqslant b\};$$

$$G_3=\{(t,x,s): t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_4=\{(t,x,s): t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$G_5=\{(t,x,s,y): t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant T,\ a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Here $u(t,x)$ and $f(t,x)$ are the unknown and given functions, respectively, $(t,x)\in G$, $\varphi(x)$ is the increasing continuous function in $[a,b]$, $\psi(t)$ is the increasing continuous function in $[t_0,T]$.

Using $A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s)$ and $N(t,x,s)$ we define the following functions

$$\left\{\begin{array}{l} P(t,x,y)=A(t,x,y)+B(t,y,x), (t,x,y)\in G_1;\\ \\ H(t,x,s)=M(t,x,s)+N(s,x,t), (t,x,s)\in G_3 \end{array}\right\}$$

In this work for the investigation of the integral equation (1) we it is based on the notion of the derivative of function with respect to the strictly increasing function [8]. Then we need the concept of the denvative defined in the work [8]. Apparently the first notion of the derivative, with respect to the strictly increasing function, was introduced in [8].

Definition. The derivative of a function $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ is the function $f'_{\varphi}(x)$ whose value at $x\in(a,b)$

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\varphi(x+\Delta)-\varphi(x)}, \tag{2}$$

where $\varphi(x)$ is the given strictly increasing continuous function in (a,b).

If the limit in (2) exists, we say that $f(x)$ is a differentiable function with respect to $\varphi(x)$. The first derivative $f'_{\varphi}(x)$ may also be differentiable function with respect to $\varphi(x)$ at every point $x\in(a,b)$

$$f''_{\varphi}(x)=(f'_{\varphi}(x))'_{\varphi},$$

is called the second derivative of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ they would, with.

$$f^{(n)}_{\varphi}(x)=(f^{(n-1)}_{\varphi}(x))'_{\varphi}$$

denoting the n-th derivative of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$.

Similarly, we define partial derivatives of functions of many variables.

In this work, on the basis of the consepts of the partial derivative of functions $P(t,x,y)$,$H(t,x,s)$ with respect to the increasing continuous functions $\varphi(x)$ and $\psi(t)$ and methods of functional analysis, the uniqueness theorems are proved for the integral equation (1).

References

1. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. VSP. Utrecht, p.168, (2003).

2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. VSP, Utrecht. p.272. (1998).

3. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of Volterra nonlinear integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **309**:5 (1989), 1052-1055.

4. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **317**:1 (1991), 330-333.

5. Lavrent'ev M.M. On-integral equations of first kind. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **127**:1 (1959), 31-33.

6. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. — AMS: Providence, R.I., 1986.

7. Imanaliev M.I. Asanov A. and Kadenova Z.A. A class of linear integral equations of the first kind with two independent variables. Doklady Mathematics, **89**:1 (2014), 98-102.

8. Asanov A. The denivative of a function by means of a increasing function. Fen Bilimleri Dergisi, Kyrgyz-Turkish Manas University, 1. 18-64 (2001).

ON SPECTRUM OF QUADRATIC OPERATOR PENCIL WITH SMALL PERIODIC $\mathcal{PT}$-SYMMETRIC PERTURBATION

D. Borisov
borisovdi@yandex.ru

UDC 517.984

We study the spectrum of a quadratic operator pencil with a small $\mathcal{PT}$-symmetric periodic potential and a fixed localized potential. We show that the essential spectrum has a band structure with bands usual and unusual gaps. These gaps can contain isolated eigenvalues and we study the existence and asymptotic behavior of such eigenvalues.

Keywords: operator pencil, $\mathcal{PT}$-symmetric perturbation, spectrum

The main object of our study is the quadratic operator pencil

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda) := -\frac{d^2}{dx^2} + V + \mathrm{i}\varepsilon\lambda\gamma + \varkappa - \lambda^2 \quad \text{in} \quad L_2(\mathbb{R}).$$

Here $\gamma \in C(\mathbb{R})$ is a real odd 2π-periodic function, $\varkappa \in \mathbb{R}$ is a fixed constant, $V \in C(\mathbb{R})$ is a real function decaying at infinity: $|V(x)| \leqslant Ce^{-\vartheta|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, where C, ϑ are some positive constants independent of x. The domain of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ is the Sobolev space $H^2(\mathbb{R})$. We are interested in the behavior of the spectrum of the operator pencil $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ as $\varepsilon \to +0$.

As $\varepsilon = 0$, the essential spectrum of the pencil $\mathcal{H}_0$ is as follows. If $\varkappa \geqslant 0$, this is just two half-lines $\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2\right) = (-\infty, -\sqrt{\varkappa}] \cup [\sqrt{\varkappa}, +\infty)$. As $\varkappa < 0$, the essential spectrum is a cross in the complex plane:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2\right) = \left\{\lambda = \mathrm{i}t : \ -\sqrt{|\varkappa|} \leqslant t \leqslant \sqrt{|\varkappa|}\right\} \cup \mathbb{R}.$$

By $B_r(a)$ we denote the ball $B_r(a) := \{\lambda : |\lambda - a| < r\}$. and we let $\lambda_0^{(m)} := \sqrt{\frac{m^2}{4} + \varkappa}\operatorname{sign} m$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

The essential spectrum as $\varepsilon > 0$ is described in the next theorem.

Theorem 1. *For each $R > 0$ there exists $\varepsilon_0 > 0$ and $c > 0$ such that for all $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ the essential spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ located inside the ball $B_R(0)$ is as follows. Outside the balls $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, and $B_{c\varepsilon}(0)$, the essential spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ coincides with that of $\mathcal{H}_0 + \varkappa - \lambda^2$. Inside the balls $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$, $\lambda_0^{(m)} \neq 0$, $\lambda_0^{(m)} \in \mathbb{R}$, the spectrum is a continuous arc in a complex plane with the following approximate parametric description:*

$$\lambda = \lambda_0^{(m)} \pm \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2\lambda_0^{(m)}}\sqrt{(\lambda_0^{(m)})^2\alpha_0^2(m) - s^2m^2 + O(\varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon^2}{4\lambda_0^{(m)}}\left(\frac{2\varkappa s^2}{(\lambda_0^{(m)})^2} - \frac{\alpha_0^2(m)}{2} + (\lambda_0^{(m)})^2\alpha_1(m)\right) + O(\varepsilon^3),$$

$$\alpha_0(m) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)\sin mx\,dx,$$

$$\alpha_1(m) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)\left(u_+(x,m)\cos\frac{mx}{2} + u_-(x,m)\sin\frac{mx}{2}\right)dx,$$

Denis Borisov (Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, RAS, Ufa, Russia)

where $m \in \mathbb{Z}_+$ and $u_\pm$ are the solutions to the boundary value problems

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2}{4}\right) u_+(x,m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\gamma(x) \cos \frac{m}{2} x - \alpha_0(m) \sin \frac{m}{2} x\right), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2}{4}\right) u_-(x,m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\gamma(x) \sin \frac{m}{2} x - \alpha_0(m) \cos \frac{m}{2} x\right), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$u_\pm\left(-\frac{1}{2}, m\right) = (-1)^m u_\pm\left(\frac{1}{2}, m\right), \qquad \frac{du_\pm}{dx}\left(-\frac{1}{2}, m\right) = (-1)^m \frac{du_\pm}{dx}\left(\frac{1}{2}, m\right),$$

orthogonal to $\cos \frac{m}{2} x$ *and* $\sin \frac{m}{2} x$ *in* $L_2(-\pi, \pi)$. *Inside the balls* $B_{c\varepsilon}(\lambda_0^{(m)})$ *with a non-zero pure imaginary* $\lambda_0^{(m)} \neq 0$, *the essential spectrum of* $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$ *is pure imaginary. If* $\alpha_0(m) \neq 0$, *this part of the essential spectrum contains a gap* $\left(\beta_m^-(\varepsilon), \beta_m^+(\varepsilon)\right)$ *with the end-points obeying the asymptotics:*

$$\beta_m^\pm(\varepsilon) = \lambda_0^{(m)} \pm \frac{\mathrm{i}\varepsilon|\alpha_0(m)|}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4\lambda_0^{(m)}} \left(\frac{\alpha_0^2(m)}{2} + |\lambda_0^{(m)}|^2 \alpha_1(m)\right) + O(\varepsilon^3).$$

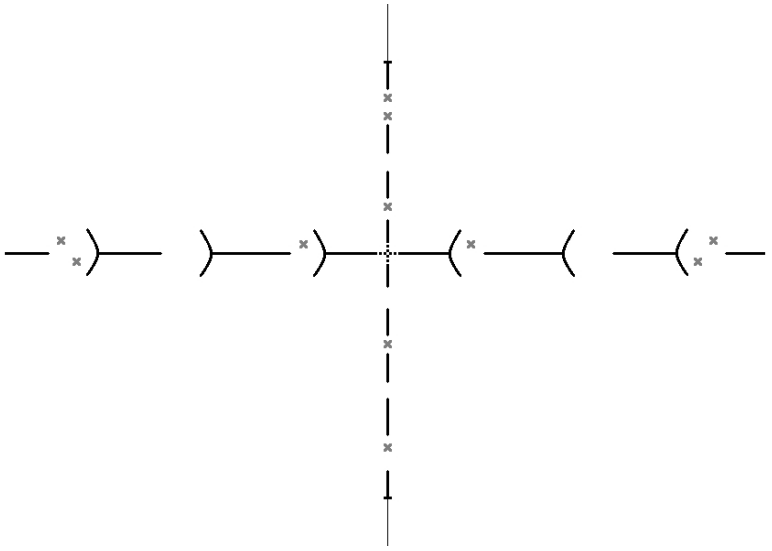


Figure 1.1: Approximate shape of the essential spectrum and possible isolated eigenvalues converging to the essential spectrum. The dotted lines at zero indicate that here the structure of the spectrum requires further studies not made in the present work.

As this theorem states, the essential spectrum has small gaps. Inside these gaps, the operator pencil $\mathcal{H}_\varepsilon$ can have isolated eigenvalues. We obtain condition ensuring the existence and absence of such eigenvalues in a given gap and describe their asymptotic behavior as $\varepsilon \to 0$. The conditions involve scattering data for the potential V and Fourier coefficients of the potential γ. In particular, we show that there can be no eigenvalues or up to two eigenvalues in each gap. The eigenvalues can be both real and imaginary. Their asymptotics are power in ε. An example of how the spectrum of $\mathcal{H}_\varepsilon$ can look like is given in Figure 1.

This is a joint work with G. Cardone.

OPERATOR ESTIMATES FOR PROBLEMS WITH OSCILLATING STEKLOV BOUNDARY CONDITION

A.G. Chechkina
chechkina@gmail.com

UDC 517.984.5

We consider boundary–value and spectral problems for the Laplacian in a domain with a smooth boundary. We assume that the homogeneous Dirichlet condition alternates with the Steklov condition on the boundary of the domain. We get the operator estimates for the convergence of solutions as a characterizing the frequency of the alternation small parameter tends to zero.

Keywords: homogenization, rapidly changing boundary conditions, Steklov–type problem, spectrum

We consider an elliptic problem in a domain with rapidly changing Steklov boundary conditions (previously such problems were considered in [1], [2], [3]).

Let $x = (x_1, x_2)$ be local coordinates in $\mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a connected domain with a non-empty boundary. We assume that the boundary of Ω is C^2-smooth and has a uniformly bounded curvature. The domain Ω can be both bounded or unbounded.

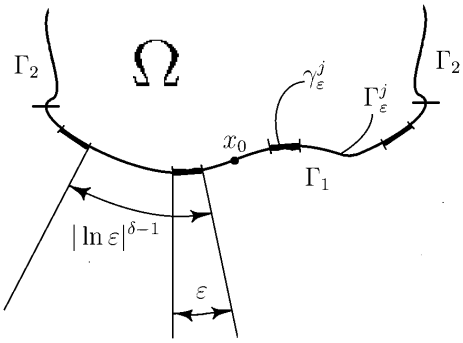


Figure 1.1: Domain Ω.

We choose a point $x_0 \in \partial\Omega$ and we consider Γ_1, the set of points $x(s) \in \partial\Omega$ such that $|s| < 1$, where s is the arc length measured from the point x_0. Consider $k \in \mathbb{Z}$ and let $s_k = k \cdot |\ln\varepsilon|^{\delta-1}$, $x_k = x(s_k)$, where $\delta \in (0,1)$ and ε is a small positive parameter. Denote $\Upsilon_\varepsilon = \{k : \left|k \cdot |\ln\varepsilon|^{\delta-1}\right| < 1\}$.

In other words, Γ_1 is a part of $\partial\Omega$ of length 2. By Γ_2 we denote the rest of the boundary, that is, $\Gamma_2 := \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_1$. We suppose that the boundary $\partial\Omega$ is C^3-smooth

Aleksandra G. Chechkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

in the vicinity of the part Γ_1. We suppose that Γ_1 consists of two rapidly alternating parts: $\Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$, where $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^k$, $\Gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^k$ with the length $|\gamma_\varepsilon^k| = \varepsilon$, $\overline{\gamma}_\varepsilon^j \cup \overline{\Gamma}_\varepsilon^k = [x(s_k), x(s_{k+1})]$, $k \in \Upsilon_\varepsilon$. See Fig. 1.

In this paper, we consider the following eigenvalue problem:

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{H}} u_\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \lambda u_\varepsilon & \text{on} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

where

$$\widehat{\mathcal{H}} := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{2} \Big(A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_j \Big) + A_0$$

is a differential operator. Here $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ are given real functions defined in $\overline{\Omega}$. We suppose that $A_{ij}, A_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $A_0 \in C(\overline{\Omega})$, these functions are uniformly bounded in $\overline{\Omega}$, and $A_{ij} = A_{ji}$,

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant c_0 \sum_{j=1}^{2} \xi_j^2, \qquad x \in \overline{\Omega}, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

where $c_0 > 0$ is a fixed constant. The symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ stands for the conormal derivative:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x) \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{2} A_j \nu_j,$$

where $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ is the outward unit normal to $\partial\Omega$.

We consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{H}} U_\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_0 U_\varepsilon = g & \text{on} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

where $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ is a given function. We treat this problem in the weak sense and the solutions are sought in the Sobolev space $\mathring{H}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ consisting of the functions in $W_2^1(\Omega)$ having the zero trace on γ_ε.

Let $\mathcal{H}_\varepsilon$ be an operator in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mapping each $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ into the trace on $\partial\Omega$ of solution to problem (2); it is clear that this trace is zero on γ_ε. Then eigenvalue problem (1) can be rewritten as

$$\mathcal{H}_\varepsilon \mathfrak{u}_\varepsilon = \Lambda \mathfrak{u}_\varepsilon,$$

where $\mathfrak{u}_\varepsilon$ is the trace of U_ε on $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon$ and $\Lambda := (\lambda + \lambda_0)^{-1}$.

By $\mathcal{H}_0$ we denote the same operator as $\mathcal{H}_\varepsilon$ but for the case $\gamma_\varepsilon = \emptyset$, $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega$. It is clear that both operators $\mathcal{H}_\varepsilon$ and $\mathcal{H}_0$ are bounded.

The following statements hold true.

Theorem 1. *The operators $\mathcal{H}_\varepsilon$ and $\mathcal{H}_0$ are self-adjoint in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. The estimate holds:*

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon - \mathcal{H}_0\| \leqslant C |\ln \varepsilon|^{-\frac{\delta}{2}},$$

where $\|\cdot\|$ stands for the norm of a bounded operator in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\delta = const$, $0 < \delta < 1$.

Theorem 2. *The spectrum of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ converges to spectrum of $\mathcal{H}_0$. The spectral projectors of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ converge to the spectral projectors of the operator $\mathcal{H}_0$. In particular, if λ_0 is a discrete eigenvalue of $\mathcal{H}_0$ of a multiplicity n, as $\varepsilon \to 0+$, there exist exactly n eigenvalues of the operator $\mathcal{H}_\varepsilon$ counting multiplicities converging to λ_0 as $\varepsilon \to 0+$ and the total projector of these eigenvalues converges to the projector on the eigenspace associated with λ_0 in the norm of bounded operators in $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

References

1. *Chechkina A.G., Sadovnichy V.A.* Degeneration of Steklov–Type Boundary Conditions in one Spectral Homogenization Problem // Eurasian Mathematical Journal **6**: 3 (2015), 13–29.

2. *Chechkina A.G.* The homogenization of spectral problems with singular perturbation of the Steklov condition // Izvestiya Mathematics **81**: 1 (2017), 199–236.

3. *Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U.* Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov–Type Problem for Elasticity System // Applicable Analysis. **98**: 1-2 (2019), 32–44.

DOMINATED ERGODIC THEOREM IN SYMMETRIC SPACES ON INFINITE CONTINUOUS MEASURE SPACE

V. Chilin, M. Muratov, J. Pashkova

vladimirchil@gmail.com, mamuratov@gmail.com, pashkova.kromsh@gmail.com

UDC 517.987

It is given conditions under which dominated ergodic theorem hold in symmetric spaces of measurable functions defined on infinite continuous measure space.

Keywords: Symmetric function space, continuous measure space, Dunford-Schwartz operator, dominated ergodic theorem.
MSC: 37A30, 47A35, 46E30

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a Maharam measure space with continuous measure μ. Denote by $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}^0(\Omega)$ the algebra of equivalence classes of almost everywhere finite real-valued measurable functions on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Let $\mathbf{L}^0_\mu$ be the subalgebra in $\mathbf{L}^0$ consisting of the functions $f \in \mathbf{L}^0$ such that $\mu\{|f| > \lambda(f)\} < \infty$ for some $\lambda(f) > 0$. If $f \in \mathbf{L}^0_\mu$, then a *non-increasing rearrangement* of f is defined as

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \ \mu\{|f| > \lambda\} \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

Let $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ be the σ-finite measure space with Lebesgue measure ν. A non-zero linear subspace $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}^0_\nu$ with a Banach norm $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ is called *symmetric (fully symmetric)* on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ if

$$f \in \mathbf{E}, \ g \in \mathbf{L}^0_\nu, \ g^*(t) \leqslant f^*(t) \ \text{ for all } \quad t > 0,$$

Vladimir Chilin, Tashkent Branch of Moscow State University, Taskent, Uzbekistan
Muratov Mustafa, Tavrichesky National University, Simferopol, Russia
Pashkova Juliya, Tavrichesky National University, Simferopol, Russia

(respectively,

$$f \in \mathbf{E},\ g \in \mathbf{L}^0_\nu,\ \int\limits_0^s g^*(t)dt \leqslant \int\limits_0^s f^*(t)dt \quad \text{for all} \quad s > 0 \quad (\text{writing} \quad g \prec\prec f)),$$

implies that $g \in \mathbf{E}$ and $\|g\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Let $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ be a symmetric (fully symmetric) space on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$. Define

$$\mathbf{E}(\Omega) := \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}^0_\mu : f^*(t) \in \mathbf{E}\}$$

and set $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)} = \|f^*\|_{\mathbf{E}},\ f \in \mathbf{E}(\Omega)$. It is known [2, Ch.3, Sec.3.5, Theorem 3.5.5] that $(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)})$ is a Banach space and conditions $f \in \mathbf{E}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^0_\mu$, $g^*(t) \leqslant f^*(t)$ for every $t > 0$ (respectively, $g \prec\prec f$) imply that $g \in \mathbf{E}(\Omega)$ and $\|g\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)}$. In such a case, we say that $(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)})$ is a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *generated* by the fully symmetric) space $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

Immediate examples of fully symmetric spaces are the classical L^p-space $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ with the standard norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, the space $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ with the norm $\|f\|_{\mathbf{L}^1\cap\mathbf{L}^\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$, and the space $\mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{L}^1+\mathbf{L}^\infty} = \inf\left\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty :\ f = g + h,\ g \in \mathbf{L}^1,\ h \in \mathbf{L}^\infty\right\}.$$

Let $T : \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty \to \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ be a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), that is, T is linear and

$$\|T(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \ \text{ for all } \ f \in \mathbf{L}^1 \quad \text{and} \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \ \text{ for all } \ f \in \mathbf{L}^\infty.$$

It is known that if $T \in DS$, then $T(\mathbf{E}(\Omega)) \subseteq \mathbf{E}(\Omega)$ for any fully symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$, in addition, $\|T\|_{\mathbf{E}(\Omega)\to\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant 1$ (see, e.g. [1, Ch.II, §4, Sec.2, 4]).

Let $T \in DS$, $f \in \mathbf{L}^p$, and let

$$A_n(T)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(f) \ \text{ and } \ A_\infty(f) = \sup_{n\geqslant 1} A_n(T)(|f|).$$

The well-known dominated ergodic theorem states that $A_\infty(f) \in \mathbf{L}^p$ for any $T \in DS$, $f \in \mathbf{L}^p$, $1 < p < \infty$, and the following inequality holds

$$\|A_\infty(f)\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

It is clear that there is the problem of describing the class of fully symmetric spaces $\mathbf{E}(\Omega)$ for which the dominated ergodic theorem with respect to the action of an arbitrary $T \in DS$ is valid.

If $f \in \mathbf{L}^1 + \mathbf{L}^\infty$ then we can define the following continuous non-increasing function on the interval $(0, +\infty)$:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*\, d\nu,\ t \in (0,\ +\infty) \ \ (\text{Hardy-Littlewood maximum function}).$$

Since $\mathbf{L}^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega) \subseteq \mathbf{E}(\Omega) \subseteq \mathbf{L}^1(\Omega) + \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ for any symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$, it follows that Hardy-Littlewood maximum function $f^{**}(t)$ is defined for every $f \in \mathbf{E}(\Omega)$.

Set

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)) = \{f \in \mathbf{L}^1(\Omega) + \mathbf{L}^\infty(\Omega) :\ f^{**} \in \mathbf{E}\},$$

and $\|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))} = \|f^{**}\|_{\mathbf{E}}$, where $\mathbf{E} = \mathbf{E}(0,\infty)$ is symmetric space on $((0,\infty), \mathcal{B}, \nu)$ that generates the symmetric space $\mathbf{E}(\Omega)$ on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Theorem 1. The pair $\big(\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)), \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))}\big)$ is a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

The following theorem is a version of the dominated ergodic theorem for fully symmetric space $\big(\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega)), \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))}\big)$.

Theorem 2. Let $\big(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)}\big)$ be a symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, and let $T \in DS$. Then $A_\infty(f) \in \mathbf{E}(\Omega)$ and $\|A_\infty(f)\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E})}$ for any $f \in \mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))$.

Corollary. Let $\big(\mathbf{E}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega)}\big)$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, and let $\mathbf{E}(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{E}(\Omega))$ as sets. Then $A_\infty(f) \in \mathbf{E}(\Omega)$ for any $T \in DS$, $f \in \mathbf{E}(\Omega)$. In addition, there exists $\lambda > 0$ such that

$$\|A_\infty(f)\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \leqslant \lambda \cdot \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega)} \quad \text{for all} \quad T \in DS, \ f \in \mathbf{E}(\Omega).$$

References

1. *Krein S.G., Petunin Yu.I, Semenov E.M.* Interpolation of Linear Operators. — M., Nauka, 1978. (Russian); English translation: Translations of Mathematical Monographs, vol.54, American Mathematical Society, Providence, 1982.

2. *Lord S., Sukochev F., Zanin D.* Singular Traces. Theory and Applications. — Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston. 2013.

FEYNMAN APPROXIMATIONS FOR SOLUTIONS TO SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATIONS ON SOME RAMIFIED MANIFOLDS

V.A. Dubravina

dubravina_vika@mail.ru

UDC 517

Feynman formula is used to represent some object (usually the solution to an evolution equation) as a limit of multiple integrals as multiplicity tends to infinity. This formulae give some approximations to the solutions, which are called Feynman approximations. In the talk one considerers such representation by the Lagrangian Feynman formula for the Cauchy problem for the heat-type parabolic equation. By ramified manifold one means a disjoint union of a set of smooth bounded manifolds of equal dimension. The discussed Cauchy problem is posed for functions, defined on some ramified manifold K, from space $L_p(K)$.

Keywords: Feynman formula, Lagrangian Feynman formula, parabolic equation, Cauchy problem

This research is supported by Lomonosov Moscow State University. Grant "Modern problems of mathematics and mechanics".

Viktoryia Dubravina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

The representation for the solution to Shroedinger equation, which is now called the Feynman formula, appeared in 1948 in the paper by Feynman [1]. He suggested that the integration holds over upcoming powers of configuration space, in this case corresponding formulas are called Lagrangian Feynman formulae. If the integration holds over powers of phase space, as was suggested by Feynman in 1951, the formulae are called Hamiltonian. These names can be explained by the fact than the first formula is related to the classical action in Lagrangian form, and the second one is related to the action in Hamiltonian form.

In 1964 E.Nelson first proved Lagrangian Feynman formulae [2], where he used the Trotter formula. The proof for Hamiltonian Feynman formulae appeared only in 2002 in the paper [3] by O.G. Smolyanov with co-authors, where the Chernoff theorem was used. This theorem, being the generalization of the Trotter formula, turned out to be an effective tool to obtain various Feynman-type formulae.

In this talk one discusses Lagrangian Feynman-type formulae, which are the limits of multiple integrals over some extension of ramified manifold K (the solution to the Cauchy problem is defined on K), as multiplicity tends to infinity.

One calls the ramified manifold K a disjunctive union of a set of open bounded smooth manifolds $K_j, j = 1, \dots, m$, of equal dimension $dim K_j = n$. This set of manifolds can be isometrically embedded in $\mathbb{R}^s$ for large enough s. Each manifold K_j is also supposed to have partially smooth boundary, which can partially coincide for different manifolds K_j. The boundary is equipped with proper mixed boundary conditions, which can be either Robin-type boundary conditions or Kirchhoff boundary conditions.

We discuss the Cauchy problem

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t), \psi(0) = f_0, \text{where } \psi : [0, \infty) \to D_A, f_0 \in D_A,$$

Let D_A be a subspace of $L_p(K)$ of functions, such that
1) their first and second derivatives belong to $L_p(K)$,
2) they satisfy the described above boundary conditions.

The differential operator A has the following form:

$$Af(q) = \frac{1}{2}c(q)\Delta f(q), \quad q \in K,$$

where Δ is the Laplace–Beltrami operator.

In order to obtain the Feynman-type formulae we use the following theorem:

The Chernoff theorem. *Let X be a Banach space, $(L(X), \tau)$ be a space of linear continuous operators on X, τ be a strong operator topology. Let $F\colon [0, \delta) \to (L(X), \tau)$ be a continuous space such that*
1) $F(0) = Id$, 2) for any $t \in (0, \infty)$ and some constant $a \in \mathbb{R}$ the following inequality is fulfilled $\|F(t)\| \leqslant e^{at}$, 3) there exists such linear and dense in X subspace $D \subset X$, that for any $f \in D$ there exists the derivative $F'(0)f = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(t)f - f}{t}$. Assume, that defined this way operator $F'(0)$, acting in D, has a closure, which is a generator of strongly continuous semigroup $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$, then $F(t/n)^n \to T_t$ as $n \to \infty$ in topology τ uniformly with respect to $t \in [0, \alpha]$, for any constant $\alpha > 0$.

For $X = L_p(K)$ we suggest that operator-valued function $F(\cdot)$ is the composition of four operators $I_2F_2(\cdot)F_1(\cdot)I_1$, where I_1 is an embedding $L_p(K)$ into $L_p(Z)$ and I_2 is a restriction $L_p(Z)$ to $L_p(K)$, where Z is a ramified manifold, being a proper extension of K; $F_1(\cdot)$ modifies the function, defined on Z, in the neighborhood of the boundary of K, and $F_2(\cdot)$ is the integral operator of convolution type.

It is shown that the conditions of the Chernoff theorem are fulfilled and hence the solution to the Cauchy problem under consideration can be presented in the form of a limit of multiple integrals, i.e. in the form of the Feynman-type formula.

References

1. *Feynman R.P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics// Reviews of modern physics, **20**:2 (1948) — 367-387.

2. *Nelson E.* Feynman Integrals and the Schroedinger Equation // J. Math. Phys., **5**:3 (1964) — 332-343.

3. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula// J.of Math. Phys., **43**:10 (2002).

ON APPROXIMATION BY SHIFT OPERATORS IN MORREY TYPE SPACES

F.A. Guliyeva, S.R. Sadigova

quliyeva-fatima@mail.ru, s_sadigova@mail.ru

Morrey space $M^{p,\alpha}$ and its subspace $MC^{p,\alpha}$ where the continuous functions are dense are considered. Basic properties of convolution are extended to these spaces. It is proved that the convolution in $MC^{p,\alpha}$ can be approximated by finite linear combinations of shifts. Approximate identity in $MC^{p,\alpha}$ is also considered.

Keywords: Morrey space, convolution, approximate identity.

By the Morrey-Lebesgue space $M^{p,\alpha}(\Gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$, on the rectifiable Jordan curve Γ, we mean a normed space of all functions$f(\xi)$ measurable on Γ equipped with a finite norm $\|\cdot\|_{M^{p,\alpha}(\Gamma)}$:

$$\|f\|_{M^{p,\alpha}(\Gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \Gamma|_\Gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\Gamma} |f(\xi)|^p \, |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty.$$

Denote by $\tilde{M}^{p,\alpha}$ the linear subspace of $M^{p,\alpha}$ consisting of functions whose shifts are continuous in $M^{p,\alpha}$, i.e. $\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{M^{p,\alpha}} \to 0$ as $\delta \to 0$. The closure of $\tilde{M}^{p,\alpha}$ in $M^{p,\alpha}$ will be denoted by $MC^{p,\alpha}$.

Consider the Morrey-Lebesgue space $M^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha < 1$. Let $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Take $f \in M^{p,\alpha}$;$g \in M^{q,\alpha}$.

Consider the convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy, x \in [-\pi, \pi].$$

Guliyeva Fatima Agayar kizi, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Sadigova Sabina Rahib kizi, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Let us consider the approximate identities for convolutions in the space $M^{p,\alpha}$. By the approximate identity (for convolution) we mean $\left\{K_n^{(\cdot)}\right\}_{n\in N} \subset L_1(-\pi,\pi)$, satisfying the following conditions:

$\alpha)\ \sup\limits_n \|K_n\|_{L_1} < +\infty$; $\beta)\ \lim\limits_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$; $\gamma)\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} |K_n(x)\,dx| = 0\ ,\ \forall\delta\in(0,\pi)$.

Theorem 1. *Let $\{K_n\}_{n\in N}$ be an approximate identity. Then the following properties are true:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_n * f - f\|_\infty = 0\ ,\ \forall f\in C[-\pi,\pi]$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{d^m}{dx^m}(K_n * f) - \frac{d^m}{dx^m}f\right\|_\infty = 0\ ,\ \forall f\in C[-\pi,\pi]$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_n * f - f\|_{p,\alpha} = 0\ ,\ \forall f\in MC^{p,\alpha},\ 1\leqslant p<+\infty\ ,\ 0<\alpha<1$.

References

1. *Guliyeva F.A., Sadigova S.R.* On Some Properties of Convolution in Morrey Type Spaces // Azerbaijan Journal of Mathematics, **8**:1 (2018), 140-150.

SINGULAR INTEGRAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS ON GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

J.J.Hasanov

hasanovjavanshir@yahoo.com.tr

UDC 517.518

We consider the generalized weighted Morrey spaces $\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)$ with variable exponent $p(x)$ and a general function $\varphi(x,r)$ defining the Morrey-type norm. In case of unbounded sets $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ we prove the boundedness of the Calderón-Zygmund singular operators with standard kernel, in such spaces. We also prove the boundedness of the commutators of Calderón-Zygmund singular operators in the generalized weighted Morrey spaces with variable exponent.

Keywords: singular integral operators, generalized weighted Morrey space with variable exponent, BMO space.
MSC: 42B20,42B25, 42B35

The classical Morrey spaces were originally introduced by Morrey in [1] to study the local behavior of solutions to second order elliptic partial differential equations. For the properties and applications of classical Morrey spaces, we refer the readers to [1,2]. Mizuhara and Nakai introduced generalized Morrey spaces. Later, Guliyev defined the generalized Morrey spaces $M^{p,\varphi}$ with normalized norm. Recently, Komori and Shirai considered the weighted Morrey spaces $L_w^{p,\kappa}$ and studied the boundedness of some classical operators such as the Hardy-Littlewood maximal operator, the Calderón-Zygmund operator on these spaces. Guliyev gave a concept of generalized weighted Morrey space $M_w^{p,\varphi}$ which could be viewed as extension of both generalized Morrey space $M^{p,\varphi}$ and weighted Morrey space $L_w^{p,\kappa}$.

Javanshir Hasanov (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

As it is known, last two decades there is an increasing interest to the study of variable exponent spaces and operators with variable parameters in such spaces, on the progress in this field, including topics of Harmonic Analysis and Operator Theory, see also references therein. For mapping properties of maximal functions and singular integrals on Lebesgue spaces with variable exponent.

Calderón-Zygmund type singular operator $Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$, where $K(x,y)$ is a "standard singular kernel", that is, a continuous function defined on $\{(x,y) \in \Omega \times \Omega : x \neq y\}$ and satisfying the estimates

$$|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n} \quad \text{for all} \quad x \neq y,$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leqslant C\frac{|y-z|^\sigma}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad \text{if} \quad |x-y| > 2|y-z|,$$

$$|K(x,y) - K(\xi,y)| \leqslant C\frac{|x-\xi|^\sigma}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad \text{if} \quad |x-y| > 2|x-\xi|.$$

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $(1,\infty)$. An open set Ω which may be unbounded throughout the whole paper. We mainly suppose that $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$, where $p_- := ess\inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ := ess\sup_{x\in\Omega} p(x)$. By $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ we denote the space of all measurable functions $f(x)$ on Ω such that $I_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. Equipped with the norm $\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\eta > 0 : \ I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leqslant 1\right\}$, this is a Banach function space. By $p'(\cdot) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, $x \in \Omega$, we denote the conjugate exponent.

$\mathcal{P}(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p : \Omega \to [1,\infty)$;

$\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ satisfying the local log-condition

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{A}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| \leqslant \frac{1}{2} \quad x,y \in \Omega,$$

where $A = A(p) > 0$ does not depend on x, y;

$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1 < p_- \leqslant p_+ < \infty$;

for Ω which may be unbounded, by $\mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$ we denote the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is unbounded)

Let $1 \leqslant p(x) < \infty$, $x \in \Omega$. The variable exponent generalized Morrey space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)$ and variable exponent generalized weighted Morrey space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi(\cdot)}_\omega(\Omega)$ are defined as the set of integrable functions f on Ω with the finite norms

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}} = \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)t^{\theta_p(x,t)}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))},$$

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi}_\omega} = \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\widetilde{B}(x,r))}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\widetilde{B}(x,r))},$$

respectively, where $\theta_p(x,r) = \begin{cases} \frac{n}{p(x)}, & r \leqslant 1, \\ \frac{n}{p(\infty)}, & r \geqslant 1 \end{cases}$.

We define the $BMO(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\Omega,\ r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y) - f_{\widetilde{B}(x,r)}|dy.$$

We define the $BMO_{p(\cdot),\omega}(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO_{p(\cdot),\omega}} = \sup_{x\in\Omega,\ r>0} \frac{\|(f(\cdot) - f_{\widetilde{B}(x,r)})\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\Omega)}}{\|\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}_\omega(\Omega)}}.$$

Let us define the class $A_{p(\cdot)}(\Omega)$ to consist of those weights ω for which

$$\sup_B |B|^{-1}\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))} < \infty.$$

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$ and $\varphi_1(x,t)$ and $\varphi_2(x,r)$ fulfill condition*

$$\int_t^{\infty} \frac{ess\inf_{s<r<\infty} \varphi_1(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,s))}} \frac{ds}{s} \leqslant C\varphi_2(x,t),$$

where C does not depend on $x \in \Omega$ and t. Then the singular integral operator T is bounded from the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_1}_{\omega}(\Omega)$ to the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_2}_{\omega}(\Omega)$.

The commutator generated by T and a suitable function b is formally defined by $[T,b]f = T(bf) - bT(f)$.

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$, $b \in BMO(\Omega)$ and the functions $\varphi_1(x,r)$ and $\varphi_2(x,r)$ satisfy the condition*

$$\sup_{t>r}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{ess\inf_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,s))}}{\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}} \leqslant C\varphi_2(x,r).$$

Then the operator $[b,T]$ is bounded from the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_1}_{\omega}(\Omega)$ to the space $\mathcal{M}^{p(\cdot),\varphi_2}_{\omega}(\Omega)$.

References

1. *C.B. Morrey*, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

2. *G. Di Fazio and M. A. Ragusa*, Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients , J. Funct. Anal. 112 (1993), 241-256.

ON ACTIONS OF SPACES CONTINUOUSLY CONTAINING TOPOLOGICAL GROUPS

S. Iliadis

s.d.iliadis@gmail.com

Definition. Given an indexed collection $\mathbf{G}$ of topological groups, let Q be a topological space, and let h^G_Q, $G \in \mathbf{G}$, be a topological embedding of G into Q. We say that Q is a *continuosly containing space for* $\mathbf{G}$ *with respect to the collection* $\{h^G_Q : G \in \mathbf{G}\}$ if the following conditions are satisfied: (1) For any points $x, y \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h^G_Q(xy)$ in Q, there exist neighbourhoods V and W in Q of $h^G_Q(x)$ and $h^G_Q(y)$, respectively, such that, for any points $x', y' \in G' \in \mathbf{G}$ such that $h^{G'}_Q(x') \in V$ and $h^{G'}_Q(y') \in W$, we have $h^{G'}_Q(x'y') \in U$; (2) For any $x \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h^G_Q(x^{-1})$ in Q there exists a neighbourhood V of $h^G_Q(x)$ in Q such that, for each $x' \in G' \in \mathbf{G}$ for which $h^{G'}_Q(x') \in V$, we have $h^{G'}_Q((x')^{-1}) \in U$; (3) $\cup\{h^G_Q(G) : G \in \mathbf{G}\} = Q$.

Stavros Iliadis, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

Below, we shall identify the topological group $G \in \mathbf{G}$ with the subset $h_Q^G(G)$ of Q and will say that Q is a *continuously containing space for* $\mathbf{G}$. (See [3].)

Definition. Let Q be a continuously containing space for a collection $\mathbf{G}$ of topological groups and X a topological space. An open continuous mapping $F : Q \times X \to X$ is said to be an *action* of Q on X if for each $G \in \mathbf{G}$ the restriction $F|_{G\times X}$ of F onto the subset $G \times X \subset Q \times X$ is an action of G on X.

In the formulation of the given below theorem it is used the notion of a saturated class of spaces, which is introduced in the paper [1] and widely used in [2]. This notion indicate the realm of spaces in which the given theorem is considered. So, if in the formulation of the theorem we replace the words "a saturated class of spaces" by the words, for example, "the class of all completely regular spaces" or by "the class of all completely regular n-dimensional spaces" (both classes are saturated), then we obtain two distinct theorems, independent each of other, that is each of them does not follows from other, but having the similar proofs. Thus, the words "a saturated class of spaces" in the formulation of the theorem are not technical conditions, they join distinct and independent results having a common proof. In the following proposition we indicate some of the saturated classes of spaces.

Proposition (see [1] and [2]). *The following classes, consisting of spaces of weight* $\leqslant \tau$*, are saturated classes:*

(1) *the class of all* T_0*-spaces;*

(2) *the class of all regular spaces;*

(3) *the class of all completely regular spaces;*

(4) *the class of all spaces of the small inductive dimension* $ind \leqslant n \in \mathbb{N}$*;*

(5) *the class of all spaces of the small transfinite inductive dimension* $ind \leqslant \alpha$*, where* α *is an ordinal;*

(6) *the class of all countable-dimensional spaces;*

(7) *the class of all strongly contable-dimensional spaces;*

(8) *the class of all locally finite-dimensional spaces.*

(9) *the intersection of any two saturated classes of spaces.*

(In the definition of the elements of the above classes (6)–(8) the small inductive dimension *ind* is used.)

Theorem. *Let* $\mathbb{S}$ *be a saturated class of spaces of weight* $\leqslant \tau$*, where* τ *is a fixed infinite cardinal,* $\mathbf{G}$ *an indexed collection of topological groups, which as topological spaces are elements of* $\mathbb{S}$*,* X *a fixed topological space of weight* $\leqslant \tau$*, and let for each* $G \in \mathbf{G}$*,* $F_G : G \times X \to X$ *be an action of* G *on* X*. Then, there exists an element* T *of* $\mathbb{S}$*, which is a continuously containing space for* $\mathbf{G}$*, and an action* $F : \mathrm{T} \times X \to X$ *such that for each* $G \in \mathbf{G}$*, the restriction* $F|_{G\times X}$ *of* F *onto the subset* $G \times X \subset Q \times X$ *coincides with* F_G*.*

1. *Stavros Iliadis.* A construction of containing spaces // Topology and its Applications, **107** (2000), 97-116.

2. *S.D. Iliadis.* Universal Spaces and Mappings. (North-Holland Mathematics Studies **198**). — Elsevier, 2005.

3. *Stavros Iliadis.* On embeddings of topological groups // Fundamental and Applied Mathematics, **20**:2 (2015), 105-112 (Russian). Journal of Mathematical Sciences, **223**:6 (2017), 720-724 (English).

ON BASICITY OF THE SYSTEM OF EXPONENTS AND TRIGONOMETRIC SYSTEMS IN GRAND-LEBESGUE SPACES

M.I. Ismailov, V.Q. Alili

migdad-ismailov@rambler.ru, alilivefa@mail.ru

UDC 517.51

This paper is devoted to the study of the basis properties of trigonometric systems and the solvability of the Riemann problem in the grand-Lebesgue spaces $L^{p)}, p > 1$. In this paper, a subspace $G^{p)}$ of the space $L^{p)}, p > 1$, is defined and the basicity of trigonometric systems in $G^{p)}, p > 1$. is established. Grand-Hardy classes $H^{+}_{p)}, p > 1$, are defined, in which analogues of the Riesz and Smirnov theorems and on the representation of a function by the Cauchy formula are proved. The solvability of the Riemann problem in grand-Hardy classes is studied.

Keywords: system of exponents, basicity, grand-Lebesgue space

In the paper we study the basicity of the system of exponents and trigonometric system in grand-Lebesgue spaces $L^{p)}$. Let $L^{p)}(-\pi;\pi)$, $1 < p < +\infty$, be a grand-Lebesgue space of measurable on $[-\pi;\pi]$ functions f, with the finite norm

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon}\,dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty.$$

For $\forall f \in L^{p)}(-\pi;\pi)$ and $\forall \delta > 0$ we assume $T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x+\delta), x+\delta \in [-\pi;\pi] \\ 0, x+\delta \in R\backslash[-\pi;\pi]. \end{cases}$

We denote by $\tilde{G}^{p)}(-\pi;\pi)$ a linear manifold of functions $f \in L^{p)}(-\pi;\pi)$ satisfying the condition $\|T_\delta f - f\|_{p)} \to 0, \delta \to 0$. Let $G^{p)}(-\pi;\pi)$ be a closure $\tilde{G}^{p)}(-\pi;\pi)$ in $L^{p)}(-\pi;\pi)$. We have the following

Lemma 1. *The space $C_0^\infty[-\pi;\pi]$ is dense in $G^{p)}(-\pi;\pi)$*

We consider the basicity of the system of exponent and trigonometric system in the spaces $G^{p)}(-\pi;\pi)$ and $G^{p)}(0;\pi)$ respectively. The following statements are valid.

Theorem 1. *Exponential system $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ forms a basis for the space $G^{p)}(-\pi;\pi)$, $1 < p < +\infty$.*

Theorem 2. *Systems of sines $\{\sin nt\}_{n\in N}$ and cosines $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ forms bases for the space $G^{p)}(0;\pi)$, $1 < p < +\infty$.*

The results of the note are obtained in co-authorship with B.T. Bilalov.

Ismailov Migdad Imdad, PhD, Associate professor, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku State University, Baku, Azerbaijan

Alili Vafa Gachay, PhD student, Baku Slavic University, Baku, Azerbaijan

References

1. *Castilo R.E., Rafeiro H.* An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Springer, Switzerland, 2016.
2. *Kokilashvili V.* Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces// J. Math. Sci., **170**: (2010), 20-33
3. *Bilalov B.T., Gasymov T. B., Quliyeva A.A.* On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey–Hardy classes // Turkish J. Math., **40**:5 (2016), 1085–1101.

SPECTRAL FUNCTION ASYMPTOTICS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Z. Kadelburg
kadelbur@matf.bg.ac.rs

UDC 517.927.25

V.A. Sadovnichiĭ showed that it is possible to use weighted regularized sums of the roots of a whole function, belonging to the class K, in order to determine spectral function asymptotics for the Sturm-Liuoville operator. In this talk, we give a survey of some further results in this direction. Namely, such asymptotic behavior is determined in the case of the following problems: an even order operator, the Regge operator, the Orr-Sommerfeld equation, an operator with non-local boundary conditions, the one-dimensional Dirac system, and a second order functional-differential operator.

Keywords: differential operator, spectral function, asymptotic behavior
MSC: 47E05, 34L20

OSCILLATION PROPERTIES OF ONE FOURTH-ORDER PROBLEM WITH A SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

E.S. Karulina
karulinaes@yandex.ru

We consider the oscillation properties of one fourth-order problem with a spectral parameter in boundary conditions.

Keywords: eigenfunctions, oscillation, spectral theory

This work is supported by the Ministry of Education, Science and Technological Development of Serbia (no. 174002).

Zoran Kadelburg, University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia
Karulina Elena Sergeevna (Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia)

Consider the boundary problem

$$(py'')'' - (qy')' = \lambda ry,$$

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

$$(py)''(1) - \alpha\lambda y'(1) = [(py'')' - qy'](1) + \beta\lambda y(1) = 0,$$

where λ is a spectral parameter. We show that if all eigenvalues

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

of this problem are positive, then they are simple, and the derivatives y'_n of the correspondent eigenfunctions have n changes of the sign.

Some particular cases of this problem were considered, for example, in [1].

The talk is based on a joint work with Vladimirov A.A.

References

1. *Kerimov N.B., Aliev Z.S.* Basis properties of a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition // Sb. Math. **197**:9-10 (2006), 1467-1487.

2. *Vladimirov A.A.* On the problem of oscillation properties of positive differential operators with singular coefficients // Math. Notes, **100**:5-6 (2016), 790-795.

SPECTRAL PROPERTIES OF TOEPLITZ OPERATORS

B.B. Koca

basakoca@istanbul.edu.tr

UDC 517

In this talk, we consider Toeplitz operators H^p, $1 < p < \infty$. In the case of $p = 2$, Peller [1] obtained estimates for the resolvents of Toeplitz operators under certain restrictions on their symbols and found conditions for the existence of nontrivial invariant subspaces and for a Toeplitz operator to be similar to a unitary operator. It is natural to ask what happens in the case of $p \neq 2$. We study some spectral properties for Toeplitz operators with unimodular symbols and Toeplitz operators whose spectra satisfies a certain geometric condition (the so-called the circular convexity condition).

Keywords: Toeplitz operators, Hardy space, invariant subspace, spectrum
MSC: 47B35, 47A15

References

1. *Peller V.V.* Spectrum, similarity, and invariant subspaces of Toeplitz operators//Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50** (1986), 776–787.

This work is supported by TUBITAK (no. 19-01-00000).

Beyaz Basak Koca, Istanbul University, Istanbul, Turkey

ON SPECTRAL PROPERTIES OF THE M-ACCRETIVE OPERATOR TRANSFORM

M. Kukushkin
kukushkinmv@rambler.ru

UDC 517.984

In this paper we present spectral theorems for some type of a m-accretive operator transform. The relevance of such consideration is lots of applications to the semigroup theory and as a consequence of this fact to the theory of PDE. More precisely, a considered below operator transform can be reduced to a second order differential operator with a fractional derivative in the final term.

Keywords: non-selfadjoint operator, sectorial operator, strongly continuous semigroup
MSC: 47A10, 47A07, 47B10

In the paper [1] the spectral properties of perturbed non-selfadjoint and normal operators were studied. However for applying these results for a concrete operator we must have a representation of one by the sum of the main part and the operator-perturbation. It is essential that the main part must be an operator of a special type either a selfadjoint or a normal operator. If we consider a case where in the representation the main part is neither selfadjoint nor normal and we cannot approach the required representation in an obvious way, then it is possible to use another technique based on properties of the real component of the initial operator. This is a subject of our consideration.

Suppose J is a m-accretive operator acting in a complex separable Hilbert space $\mathfrak{H}$, J^{-1} is compact, the operator G is bounded and strictly accretive, $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(T^*)$, $\overline{\mathrm{D}(T)} = \mathfrak{H}$, where $T := J^*GJ$. Note that the positive fractional powers of the operator J are well defined (see [2]). Consider the operator J transform

$$L := J^*GJ + J^\alpha,\ \alpha \in (0, 1/2). \tag{1}$$

Using the imposed conditions on the operators J, G we prove that the numerical range of the operator $\bar{L}$ belongs to the sector with the vertex situated at the point zero and the semi-angle θ, $0 \leqslant \theta < \pi/2$. We also prove that $0 \in \mathrm{P}(\bar{L})$. Consider a real component $H := (L + L^*)/2$ of the operator L. It is not hard to prove that $\bar{H}$ is selfadjoint and $0 \in \mathrm{P}(\bar{H})$. Using the technic of the sesquilinear form theory we establish the compactness property of the operators $\bar{L}^{-1}, \bar{H}^{-1}$. In accordance with the definition given in the paper [1] we denote by μ order of the operator $\bar{H}$. As a main result we obtain the number of theorems that give us a description of the spectral properties of the operator $\bar{L}$. The following theorem is formulated in terms of order μ and is devoted to the Schatten-von Neumann classification.

Theorem 1. *We have the following classification*

$$\bar{L}^{-1} \in \mathfrak{S}_p,\ p = \begin{cases} l,\ l > 2/\mu,\ 0 < \mu \leqslant 1, \\ 1,\ 1 < \mu < \infty \end{cases}.$$

Maksim Kukushkin, International Committee Continental, Zheleznovodsk, Russia

The following theorem establishes the completeness property of the system of root vectors of the operator $\bar{L}^{-1}$.

Theorem 2. *Suppose $\theta < \pi\mu/2$; then the system of root vectors of the operator $\bar{L}^{-1}$ is complete.*

It is a well-known fact that for any bounded operator with the compact imaginary component there is a relationship between s-numbers of the imaginary component and the eigenvalues (see [3]). Similarly using the information on s-numbers of the real component, we obtain an asymptotic formula for the eigenvalues $\lambda_i(\bar{L}^{-1})$, $i \in \mathbb{N}$. This idea is realized in the following theorem.

Theorem 3. *The following inequality holds*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(\bar{L}^{-1})|^p \leqslant \sec^p\theta \, \left\|S^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p(\bar{H}^{-1}), \ (n = 1, 2, ..., \nu), \ 1 \leqslant p < \infty,$$

where ν is the sum of all algebraic multiplicities of the operator $\bar{L}^{-1}$.

Moreover, if $\nu = \infty$ and order $\mu \neq 0$, then the following asymptotic formula holds $|\lambda_i(\bar{L}^{-1})| = o\left(i^{-\mu+\varepsilon}\right)$, $i \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Remark 1. *Note that if the operator A is the ifinitesimal generator of a C_0 semigroup of contractions $T_t : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, then A is m-accretive. Hence if in additional we assume that A^{-1} is compact, then we claim that the Theorems 1-3 are true for the operator J transform (1), where $J := A$ and the operator G is chosen respectively. If besides of the made assumptions the semigroup T_t is a shift semigroup acting in a space of Lebesgue square integrable functions, then it is not hard to show that (1) may represent a differential operator second order with the fractional derivative in the final term.*

References

1. *Shkalikov A.A.* Perturbations of selfadjoint and normal operators with a discrete spectrum. // Russian Mathematical Surveys, **71** (2016), 113–174.

2. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.

3. *Gohberg I.C., Krein M.G.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. — Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1965.

SEMIGROUP AND DISTRIBUTION METHODS IN STUDYING ABSTRACT STOCHASTIC PROBLEMS

I.V. Melnikova

Irina.Melnikova@urfu.ru

UDC 517.983, 517.982.4, 519.21

Construction of generalized and regularized solutions to abstract stochastic equations with generators of regularized semigroups and infinite-dimensional white noise are under consideration.

Keywords: semigroup of operators, generalized function, Wiener process

The work was supported by Regulation no. 211 of the Government of the Russian Federation (contract no. 02.A03.21.0006).

Irina V. Melnikova (Professor, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

The research area of stochastic differential equations has occupied one of the primary areas of pure and applied mathematics for the last three decades providing new techniques for studying complex systems in mathematical physics, finance, biology, etc., whose evolution is subject to random perturbations. Among the equations, the most studied are those that simulate finite-dimensional processes with white noise type perturbations.

We consider the infinite-dimensional stochastic Cauchy problem

$$X'(t) = AX(t) + F(t, X) + B(t, X)\mathcal{W}(t),\ t \in [0, T],\ X(0) = \zeta \tag{1}$$

with A generating an R-regularized semigroup $\{V(t), t \geqslant 0)\}$ in a Hilbert space H $(V(t)u - R(t)u = \int_0^t V(s)Au\,ds, u \in D(A) \subset H)$, $B \in L(\mathcal{H}, H)$, and $\mathcal{H}$-valued white noise $\mathcal{W}$. We pay special attention to the linear problem $(F = 0)$ and $A = A(i\partial/\partial x)$.

Generally the problem is ill-posed in H due to properties of A and $\mathcal{W}$ [1, 2].

The following approaches to regularization and construction of generalized solutions are considered.

• Construction of solutions to the corresponding integrated problem with Itô integral w.r.t. a Wiener process W, a "primitive" of white noise $\mathcal{W}$.

• Construction of generalized (in t) solutions to (1) with white noise $\mathcal{W}$, a generalized derivative of W in spaces of abstract distributions defined by properties of A.

• Construction of generalized (in random variable ω) solutions to (1) with $\mathcal{W}$ defined in infinite-dimensional white noise spaces.

• Construction of generalized (in x) solutions to (1) with $A = A(i\partial/\partial x)$ in Gelfand-Shilov spaces in the case of Petrovskii well-posed, conditionally well-posed, and ill-posed problems. Note that due to proven in [3] connection between Gelfand-Shilov classification and semigroup classification, for equations with $A(i\partial/\partial x)$ generating integrated or convoluted semigroups we can construct generalized in t solutions instead of generalized in x solutions and conversely.

References

1. *Melnikova I.V.* Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions: Regularized and Generalized Solutions. London, New York, Washington, CRC Press, 2016.

2. *Melnikova I.V., Alshanskiy M.A.* Stochastic Equations with an Unbounded Operator Coefficient and Multiplicative Noise // Siberian Math. J., **58**:6 (2017), 15p.

3. *Melnikova I.V., Alekseeva U.A.* Semigroup Classification and Gelfand–Shilov Classification of Systems of Partial Differential Equations // Mat. Zam., **104**:6 (2018), 895–911.

ON A DOUBLE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION

S.S. Mirzoev, S.F. Babayeva

mirzoyevsabir@mail.ru, seva_babaeva@mail.ru

In the paper the existence and uniqueness of a class of double-point boundary value problems on a semi-axis is studied for a second order operator-differential equation of elliptic type. The solvability conditions of these boundary value problems expressed by the properties of the coefficients of the given equation.

Keywords: Hilbert space, self-adjoint operator, boundary value problem, regular solvability.

Let H be a separable Hilbert space, A be a definite-positive self-adjoint operator with domain of definition $D(A)$. As is known, the domain of definition of the operator A^γ $(\gamma \geqslant 0)$ becomes a Hilbert space H_γ with regard to scalar product $(x,\, y)_\gamma = (A^\gamma x,\, A^\gamma y)$, $x,\, y \in D(A^\gamma)$. For $\gamma = 0$ we assume $H_0 = H$ and $(x,\, y) = (x,\, y)_0$.

Denote by $L_2(R_+;\, H)$ Hilbert space of all functions $f(t)$ determined almost everywhere in $R_+ = (0,\, \infty)$ with Bochner quadratically integrable values in H, for which

$$\|f\|_{L_2(R_+;\, H)} = \left(\int\limits_0^\infty \|f(t)\|^2\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

In what follows all derivatives u', u'' are understood in the sense of distribution theory [1]. Following the monograph [1] we introduce the Hilbert space

$$W_2^2(R_+,\, H) = \left\{u :\ u'' \in L_2(R_+;\, H)\ ,\ \ A^2 u \in L_2(R_+;\, H)\right\}$$

with the norm

$$\|u\|_{W_2^2(R_+,\, H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;\, H)} + \|A^2 u\|^2_{L_2(R_+;\, H)}\right)^{1/2}.$$

Let us consider in the space H the boundary value problem

$$-u''(t) + A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t)\ , \quad t \in R_+ = (0,\, \infty)\,, \tag{1}$$

$$u(0) + u(1) = 0. \tag{2}$$

Definition. Problem (1),(2) is said to be regularly solvable if for any function $f(t) \in L_2(R_+;\, H)$ there exists the function $u(t) \in W_2^2(R_+,\, H)$ that satisfies equation (1) almost everywhere in R_+, condition (2) in the sense of convergence

$$\lim_{t \to +0} \|u(t) + u(1-t)\|_{3/2} = 0,$$

and it holds the estimation

$$\|u\|_{W_2^2(R_+,\, H)} \leqslant const\ \|f\|_{L_2(R_+;\, H)}.$$

Sabir S. Mirzoev (Institute Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan and Baku State University, Baku, Azerbaijan

Sevinj F. Babayeva (Institute of Control Systems and Baku State University, Baku, Azerbaijan

Theorem. *Let A be a positive-definite self-adjoint operator, the operators $B_1 = A_1 A^{-1}$ and $B_2 = A_2 A^{-2}$ be bounded in H and the following inequality holds for them*

$$q = N_1 \|B_1\| + N_0 \|B_2\| < 1,$$

where

$$N_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2},\ N_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Then problem (1),(2) is regularly solvable.

References

1. *Lions, J.L., Magenes E.,* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and their Applications, Moscow, Mir, 371 p.(in Russian).

OSCILLATORY INTEGRAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS IN MODIFIED MORREY SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

A.M. Musayev

musayevali07@gmail.com

UDC 517.518

In this paper first we prove Calderón-Zygmund-type integral inequalities for oscillatory integral operators and their commutators in the modified Morrey spaces with variable exponent $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ are unbounded sets. After that we prove the boundedness of these operators on the spaces $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$.

Keywords: Calderón-Zygmund-type integral inequalities for oscillatory integral operators, modified Morrey space with variable exponent.
MSC: 42B20,42B25, 42B35

The variable exponent analysis is a popular topic which attract many researchers. This topic is mainly focused on the Lebesgue and Sobelev spaces with variable order of integrability and operator theory in these spaces. The study of these spaces has been stimulated by problems of various fields, influenced by many applications, for instance, mechanics of the continuum medium, elasticity, fluid dynamics, calculus of variations and differential equations with non-standard growth conditions. In particular, various results on non-weighted and weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents $p(x)$ have been proved for maximal, singular and fractional type operators.

A distribution kernel $K(x,y)$ is a "standard singular kernel", that is, a continuous function defined on $\{(x,y) \in \Omega \times \Omega : x \neq y\}$ and satisfying the estimates

$$|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n} \quad \text{for all} \quad x \neq y,$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leqslant C\frac{|y-z|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad \text{if} \quad |x-y| > 2|y-z|,$$

A.M. Musayev (Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

$$|K(x,y)-K(\xi,y)| \leqslant C\frac{|x-\xi|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}, \ \ \sigma>0, \ \text{ if } \ |x-y|>2|x-\xi|.$$

Calderón-Zygmund type singular operator and the oscillatory integral operator are defined by

$$Tf(x)=\int_{\Omega} K(x,y)f(y)dy,$$

$$Sf(x)=\int_{\Omega} e^{P(x,y)}K(x,y)f(y)dy,$$

where $P(x,y)$ is a real valued polynomial defined on $\Omega\times\Omega$. Lu and Zhang used L^2-boundedness of T to get L^p- boundedness of S with $1<p<\infty$.

The commutator generated by the operator S for a given measurable function b is formally defined by

$$[S,b]f=S(bf)-bS(f).$$

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $(1,\infty)$. An open set Ω which may be unbounded throughout the whole paper. We mainly suppose that

$$1<p_{-}\leqslant p(x)\leqslant p_{+}<\infty,$$

where $p_{-}:=ess\inf_{x\in\Omega}p(x)$, $p_{+}:=ess\sup_{x\in\Omega}p(x)$. By $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ we denote the space of all measurable functions $f(x)$ on Ω such that

$$I_{p(\cdot)}(f)=\int_{\Omega}|f(x)|^{p(x)}dx<\infty.$$

Equipped with the norm

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\inf\left\{\eta>0:\ I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right)\leqslant 1\right\},$$

this is a Banach function space. By $p'(\cdot)=\frac{p(x)}{p(x)-1}$, $x\in\Omega$, we denote the conjugate exponent.

$\mathcal{P}(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p:\Omega\to[1,\infty)$;

$\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p\in\mathcal{P}(\Omega)$ satisfying the local log-condition

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\frac{A}{-\ln|x-y|}, \ \ |x-y|\leqslant\frac{1}{2} \ \ x,y\in\Omega,$$

where $A=A(p)>0$ does not depend on x,y;

$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p\in\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1<p_{-}\leqslant p_{+}<\infty$;

for Ω which may be unbounded, by $\mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$ we denote the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is unbounded)

Let $\lambda(x)$ be a measurable function on Ω with values in $[0,n]$. The variable modified Morrey space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ is defined as the set of integrable functions f on Ω with the finite norms

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega,\ t>0}[t]_1^{\frac{\lambda(x)}{p(x)}}t^{-\theta_p(x,t)}\|f\chi_{\widetilde{B}(x,t)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

respectively.

We define the $BMO(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO}=\sup_{x\in\Omega,\ r>0}|B(x,r)|^{-1}\int_{\widetilde{B}(x,r)}|f(y)-f_{\widetilde{B}(x,r)}|dy.$$

We define the $BMO_{p(\cdot)}(\Omega)$ space as the set of all locally integrable functions f with finite norm

$$\|f\|_{BMO_{p(\cdot)}} = \sup_{x\in\Omega,\, r>0} \frac{\|(f(\cdot) - f_{\widetilde{B}(x,r)})\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}{\|\chi_{\widetilde{B}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}.$$

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$ and $0 \leqslant \lambda(x) < n$. Then the singular integral operator S is bounded from the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$ to the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$*

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_{\infty}(\Omega)$, $b \in BMO(\Omega)$ and $0 \leqslant \lambda(x) < n$. Then the singular integral operator $[b, S]$ is bounded from the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$ to the space $\widetilde{\mathcal{L}}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$.*

References

1. *C.B. Morrey*, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

2. *G. Di Fazio and M. A. Ragusa*, Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients , J. Funct. Anal. 112 (1993), 241-256.

3. *S. Janson*, Mean oscillation and commutators of singular integral operators, Ark. Mat. **16**, 1978, 263-270.

REMARKS ON COMMUTING JACOBI TYPE DIFFERENCE OPERATORS

A.S. Osipov

osipa68@yahoo.com

UDC 517.984.4,517.982.37,517.962.2

We study the situations when two Jacobi operators are self-adjoint and commute. Both scalar and block Jacobi operators are considered. In the latter case, some sufficient conditions for commutativity in terms of the operators' coefficients are given.

Keywords: Jacobi matrices, difference equations, moment problem, orthogonal polynomials
MSC: 47B39, 47A10, 39A70

Andrey Osipov, Federal State Institution "Scientific-Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Moscow, Russia

In the operator theory, the study of commuting operators remains an actual task. First we recall that two self-adjoint (possibly unbounded) operators are said to commute if their spectral projections commute [1]. In [2] E. Nelson proved the existence of two essentially self-adjoint operators A and B in a Hilbert space $\mathcal{H}$ having a common dense domain $\mathcal{D}$ such that for all x in $\mathcal{D}$, $ABx = BAx$, but such that $\bar{A}$ and $\bar{B}$ do not commute. He proved that for the commutativity some additional conditions are needed. In this note, we study the commutativity issues for some operators generated by semi-infinite Jacobi matrices with scalar and matrix elements.

We start from the scalar Jacobi operators. Namely, consider two Jacobi matrices:

$$J^1 = \begin{pmatrix} b_0^1 & a_0^1 & 0 & 0 \\ a_0^1 & b_1^1 & a_1^1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} b_0^2 & a_0^2 & 0 & 0 \\ a_0^2 & b_1^2 & a_1^2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix};$$

where $a_n^m, b_n^m \in \mathbb{R}, a_n^m > 0, n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 1, 2$. Denote by L_0^1 and L_0^2 the minimal closed symmetric operators the Hilbert space $l^2[0,\infty)$ (consisting of the complex sequences $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$), generated by J^1 and J^2 respectively. Also, denote by $P^1(\lambda) = (P_i^1(\lambda))_{i=0}^{\infty}, Q^1(\lambda) = (Q_i^1(\lambda))_{i=0}^{\infty}$ and $P^2(\lambda) = (P_i^2(\lambda))_{i=0}^{\infty}, Q^2(\lambda) = (Q_i^2(\lambda))_{i=0}^{\infty}$ the systems of polynomials of the first and the second kind (see e. g. [3] for details) corresponding to J^1 and J^2. The formal matrix commutativity $J^1 J^2 = J^2 J^1$ (which amounts to commutativity of L_0^1 and L_0^2 on the set $D_0^{'}$ of finitely nonzero vectors from $l^2[0,\infty)$) implies

$$a_n^2 = k a_n^1, \quad b_n^2 = k b_n^1 - K; \quad n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

where $k = a_0^2/a_0^1$, $K = k b_0^1 - b_0^2$. In terms of the polynomial systems, this implies that

$$P_i^2(\lambda) = P_i^1\left(\frac{\lambda}{k} + \lambda_0\right) \quad Q_i^2(\lambda) = \frac{1}{k} Q_i^1\left(\frac{\lambda}{k} + \lambda_0\right); \quad \lambda_0 = \frac{K}{k}; \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

As well known ([3]), the defect numbers of L_0^m are are either (0,0) (self-adjoint or limit-point case) or (1,1) (limit-circle case). If the relations (1) are fulfilled, then one can easily check that the defect numbers of L_0^1 and L_0^2 are the same.

Define the domains D^m, $m = 1, 2$ as the sets of all vectors $y \in l^2[0,\infty)$ such that $J^m y \in l^2[0,\infty)$. For any y and z from D^m there exists a limit

$$[y, z]_{\infty}^m := \lim_{n\to\infty} a_n^m (y_n \bar{z}_{n+1} - y_{n+1} \bar{z}_n).$$

The study of self-adjoint extensions of Jacobi operators in the limit-circle case allows us to get the following result.

Theorem 1. *Assume that L_0^1 and L_0^2 are commutative on the set $D_0^{'}$. Then, either they are self-adjoint and commute, or they admit a commutative self-adjoint extensions. In the latter case these extensions can be determined as follows: $L_{ext}^1 := J^1 y$ on the elements y in D^1, satisfying the boundary condition:*

$$[y, Q^1(0)]_{\infty}^1 - h[y, P^1(0)]_{\infty}^1 = 0;$$

and $L_{ext}^1 := J^2 y$ on the elements y in D^2, satisfying:

$$[y, Q^2(\lambda_0)]_{\infty}^2 - \tilde{h}[y, P^2(\lambda_0)]_{\infty}^2 = 0;$$

where h is a real number, $\tilde{h} = kh$.

We now consider one special class of block Jacobi operators. First, consider two three-diagonal block matrices

$$J_b^1 = \begin{pmatrix} B_{0,1} & A_{0,1}^* & & \mathbf{0} \\ A_{0,1} & B_{1,1} & A_{1,1}^* & \\ & A_{1,1} & B_{2,1} & \ddots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad J_b^2 = \begin{pmatrix} B_{0,2} & A_{0,2}^* & & \mathbf{0} \\ A_{0,2} & B_{1,2} & A_{1,2}^* & \\ & A_{1,2} & B_{2,2} & \ddots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where $A_{n,m}$ are $(n+2)\times(n+1)$ complex matrices, rank $A_{n,m} = (n+1)$; and $B_{n,m}$ - $(n+1)\times(n+1)$ matrices, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 1, 2$. Assume that for J_b^1 and J_b^2 the commutativity relations are fulfilled, which implies

$$A_{n,1}A_{n-1,2} = A_{n,2}A_{n-1,1},$$

$$A_{n-1,1}B_{n-1,2} + B_{n,1}A_{n-1,2} = A_{n-1,2}B_{n-1,1} + B_{n,2}A_{n-1,1},$$

$$A_{n-1,1}A_{n-1,2}^* + B_{n,1}B_{n,2} + A_{n,1}^*A_{n,2} = A_{n-1,2}A_{n-1,1}^* + B_{n,2}B_{n,1} + A_{n,2}^*A_{n,1}. \quad (2)$$

Denote by $\hat{l}^2[0,\infty)$ the Hilbert space of quadratic summable sequences $u = (u_0, u_1, \dots)$ where the vectors $u_j \in \mathbb{C}^j$; with the inner product $(u,v) = \sum_{j=0}^{\infty}(u_j, v_j)_{\mathbb{C}^j}$. Also, denote by L_1 and L_2 the operators (which act via matrix multiplication on $\hat{l}^2[0,\infty)$), generated by J_b^1 and J_b^2 respectively. The domain D_0 of L_1 and L_2 consists of the finitely nonzero vectors from $\hat{l}^2[0,\infty)$. These are symmetric operators which, as follows from (2), are commutative on the vectors from D_0. The study of such operators is important to the theory of multivariate orthogonal polynomials and multidimensional moment problem. It was shown in [4] that if L_1 and L_2 (under some additional assumptions on the structure of $A_{n,m}$ and $B_{n,m}$) are essentially self-adjoint and commute, then the corresponding two-dimensional moment problem has the solution, and a sufficient condition for that was found (Theorem 3). Using the results of [5]-[6], one can find a number of similar conditions, in particular the following one:

Theorem 2. *Assume that L_1 and L_2 are commutative on D_0. Denote*

$$E_n = A_{n,1}^*A_{n+1,1}^* + A_{n,2}^*A_{n+1,2}^*,$$

$$F_n = A_{n,1}^*B_{n+1,1} + B_{n,1}A_{n,1}^* + A_{n,2}^*B_{n+1,2} + B_{n,2}A_{n,2}^*.$$

$$G_n = A_{n-1,1}A_{n-1,1}^* + A_{n-1,2}A_{n-1,2}^* + (B_{n,1})^2 + (B_{n,2})^2 + A_{n,1}^*A_{n,1} + A_{n,2}^*A_{n,2}.$$

If $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_n D_{1,n}} = \infty$, *where* $C_n = max\{\|E_n\|, \|E_{n+1}\|, \|F_n\|\}$, *and* $D_{1,n} = max\{D_n, D_{n+1}\}$, *where* $D_n = \|G_n^{-1}E_{n-2}\| + \|G_n^{-1}F_{n-1}\| + \|G_n^{-1}E_n\| + \|G_n^{-1}F_n\|$, *then operators L_1 and L_2 are essentially self-adjoint and commute.*

Finally, note that if the analog of Carleman's condition is fulfilled for L_1 and L_2: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|A_{n,m}\|} = \infty$, then L_1 and L_2 are self-adjoint, but the question of their commutativity remains open.

References

1. *M. Reed, B. Simon* Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis. — New York: Academic Press, 1980.

2. *E. Nelson* Analytic vectors // Ann. of Math. **70(3)** (1959), 572–615.

3. *N.I. Akhiezer* The Classical Moment Problem. — Edinburgh: Oliver Boyd, 1965.

4. *M. Gekhtman, A. Kalyuzhny* On the orthogonal polynomials in several variables // Integr. Equat. Oper. Theory **19(4)** (1994), 404–418.

5. *E.N. Petropoulou, L. Velazquez* Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations // J. Math. Alal. Appl. **420** (2014), 852–872.

6. *I.N. Braeutigam, K.A. Mirzoev* Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices // Dokl. Math. **93(2)** (2016), 170–174.

KOLMOGOROV INTEGRAL AND FOCK APPROACHES TO WEYL SECOND QUANTIZATION

N.N. Shamarov

nshamarov@yandex.ru

UDC 517.9

The second quantization method is developed into two directions which both transform real-valued infinite dimensional classical observables into symmetric (in proper sense) pseudo-differential operators, acting on functions and measures (Borel or generalized) defined on an infinite-dimensional real Hilbert space H.

The first construction deals with only countably additive measures on H but uses Kolmogorov "indefinite" integral technique; and the second one uses a version of translation-invariant generalized measure on H (analogous to the finite-dimensional Lebesgue measure) and infinite dimensional functions-to-functions Fourier transforms leading to the natural Fock CCR representation.

Keywords: Kolmogorov definite and indefinite integrals, Fock representation of canonical commutation relations, Weyl pseudo-differential operators, method of second quantization
MSC: 46N50

The fundamental physical theories continue to inspire deep analytical advances; in particular the mathematical formulation of renormalization method in physically interesting models needs further development of functional-analytical methods for regularizing linear functionals such as traces and integrals [1], and the correspondent exponentials like determinants [2] and evolutional semigroups [3], [4]. The functional representations of the Fock space [5] objects in the second quantization [6] methods are the objects of infinite dimensional analysis being the functions (of infinitely many variables) differentiated to obtain equations and integrated to obtain solutions [3]. Following to the works of V.Fock and [3], below we accept that the domain of the functions representing states of secondary quantized system is the separable infinite-dimensional real Hilbert space H which can be interpreted as a real (configurational) part of the complex Hilbert space of the (pure) states of a "primary" quantized system (= of the "one-particle" part of the secondary quantized system's Hilbert space, which can be called Dirac–Fock space [5]).

This work is supported by "5-100 Russian Academic Excellence Program".

Nikolai Shamarov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The attempt to exclude generalized measures from the definition, given in [3], of infinite-dimensional pseudo-differential operators (PDO, which are secondary quantized observables), defined on the space $M(H)$ of some Fomin-smooth [7] countably additive Borel measures on H, led us to use the construction of the Kolmogorov integral [8] while in its easy form for the σ-additive measures. Namely, like the complex-values measure on a measurable space $(X,\mathcal{F})$ denoted as fm or $f(x)m(dx)$ or $\int_{\cdot} fm$ and defined by $\mathcal{F}\ni A\mapsto (fm)(A)\equiv\int_A f(x)m(dx)$ can be called the Lebesgue indefinite integral of $f\in L_1(|m|)$ over m, also in the case when $f_j\in L_1(X,\mathcal{F},|m_j|)$ $(j=1,...,n)$ the function $a=a_{f_1,m_1;\ ...;\ f_n,m_n}: X\times\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ defined by $X\times\mathcal{F}\ni(x,A)\mapsto a(x,A)=\sum_j f_j(x)m_j(A)$ is called a (Kolmogorov) amplitude (interpreted as the intensity of transitions from x to A), and its indefinite Kolmogorov integral is denoted by $\int_{\cdot} a$ or by $a(x,dy)|_{y=x}$ such that $\int_{\cdot} a:\mathcal{F}\ni A\mapsto\int_A a(x,dy)|_{y=x}\equiv\sum_j\int_A f_j(x)m_j(dx)$. In the following some analytical assumption are omitted and the discussion has an algebraic character.

Let $Q=H=P\equiv H^*$, $E=Q\times P$ and let $K:E\to\mathbb{C}$ be be a polynomial w.r.t. ortho-normed basis $\mathcal{E}=\{e_j\}$ of H. Then the (P)DOs $\hat{K}_M$ with the Weyl symbol K (in the spaces of measures) and $\hat{K}$ in the spaces of functions on H can be defined by means of the injective Hilbert Fourier transform [9] (HFt) and its inverse. Let m be a measure smooth enough along $span(\mathcal{E})$, and $a_{K,m}$ be the Kolmogorov amplitude such that for any $(q_0,p)\in E$

$$\int_Q e^{ip(q_1)}a_{K,m}(q_0,dq_1)=\int_Q e^{ip(q_1)}K(\tfrac{q_0+q_1}{2},p)m(dq_1);$$

then $\hat{K}_M\ m$ is such a measure that for each $p\in P$

$$\int_Q e^{ipq}(\hat{K}_M\ m)(dq)=\int_Q e^{ipq}a_{K,m}(q_0,dq)|q=q_0\ .$$

Let now $\psi: H\to\mathbb{C}$ be a smooth enough function. Then $\hat{K}\psi: H\to\mathbb{C}$ is such a function that for each $q\in Q$ $\hat{K}\psi(q)=\int_P e^{ip(q)}a_{K,\psi,q}(p,dp_1)|p=p_1$, where $a_{K,\psi,q}$ is such a Kolmogorov amplitude that for any $q_1\in Q$ and $p\in P$

$$K(\tfrac{q+q_1}{2},p)\psi(q)=\int_P e^{ip_1(q_1)}a_{K,\psi,q}(p,dp_1)\ .$$

Theorem 1. *If K is real valued, then $\hat{K}$ is a symmetric differential operator on functions in the sense that $\hat{K}_M$ has the same coefficients as a differential operator on measures. Moreover, if $K(q,p)\equiv g(q)$ for some polynomial $g:Q\to\mathbb{C}$ then $(\hat{K}\psi)(q)=g(q)\psi(q)$ and $(\hat{K}_M m)(dq)=g(q)m(dq)$; and if $K(q,p)=p(e_j)^n$ then $\hat{K}$ "$=$" $\hat{K}_M=(-i)^n(\partial_{e_j})^n$.*

The second construction of PDO uses simple variant of translation-invariant Schwartz spaces $S^r(H)=\cup\{S^r_L(H): L\subset H,\dim L<\infty\}$ where $\mathbb{R}\ni r>0$, $g^r(x)=e^{-r\|x\|^2/2}$ and, for any finite dimensional subspace $L\subset H$, $S^r_L(H)=\{(f\circ P_L)(g^r\circ P_{L^\perp}): f\in S(L;\mathbb{C})\}$, P_{H_0} denotes orthogonal projector on a closed linear subspace $H_0\subset H$. Now the normalized Fourier transform $F^{2\pi}: S^{2\pi}(H)\ni\psi\mapsto\tilde{\psi}\in S^{2\pi}(H)$ of a function $\phi_f=(f\circ P_L)(g^{2\pi}\circ P_{L^\perp})$ $(f\in S(L;\mathbb{C})$ can be defined as $\widetilde{\phi_f}=\phi_{\tilde{f}}$ where $\tilde{f}(y)=\int_L e^{2\pi i(x,y)_L}f(x)dx$ $(y\in L)$ and hence $f(x)=\int_L e^{-2\pi i(x,y)_L}\tilde{f}(y)dy$ $(x\in L)$. The "Lebesgue" integration can be also defined as $\int_H f(P_L x)g^{2\pi}(P_{L^\perp}x)dx=\int_L f(y)dy$ so the space $S^\pi(H)$ carries a complex scalar product $(\psi_1,\psi_2)_{L_2(H)}=\int_H\psi_1(x)\overline{\psi_2(x)}dx$ and its completion is denoted $L_2(H)$.

If K is as above and $\phi\in S^{2\pi}(H)$ then define

$$\hat{K}_-\phi\ (q)=\int_P dp\ (e^{2\pi ip(q)}\int_Q e^{-2\pi ip(q_1)}K(\tfrac{q+q_1}{2},p)\phi(q_1)dq_1)$$

so $\hat{K}_-\phi \in S^{2\pi}(H)$ again. Endowing the space $C^\infty(H)$ of all Frechet smooth function with the topology of convergence of each derivative on each finite dimensional bounded set, we close the graph of $\hat{K}_-$ in such a topology and then restrict the closure onto $S^\pi(H)$ denoting the restriction by $\hat{K}_+$.

Theorem 2. *If K is real valued then $\hat{K}_+$ is an essentially self-adjoint differential operator in $L_2(H)$ having the same algebraic property as do $\hat{K}$ in Theorem 1 up to constant multipliers:*

if $K(q,p) \equiv g(q)$ for some polynomial $g : Q \to \mathbb{C}$ then $(\hat{K}_+\psi)(q) = g(q)\psi(q)$ and if $K(q,p) = p(e)^n$ ($\|e\|_H = 1$) then $\hat{K}_+ = (-\frac{i}{2\pi})^n(\partial_e)^n$.

Moreover, analytic continuation of each $K \in E'$ onto the complexification of E defines the Fock representation of the canonical commutation relations with the vacuum vector $g^\pi \in L_2(H)$.

References

1. *Sadovnichii V. A., Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T.* Representation of regularized traces of operators by functional integrals // Doklady Math., **86**, no. 2 (2012), 644—647.

2. *V. A. Sadovnichii, O. G. Smolyanov, and E. T. Shavgulidze* Representations of regularized determinants of exponentials of differential operators by functional integrals // Doklady Math., **93**, no. 1 (2016), 46—48.

3. *V. V. Kozlov, O. G. Smolyanov* Hamiltonian Approach to Secondary Quantization // Doklady Math., **98**, no. 3 (2018), 571—574.

4. *Kravtseva A. K., Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T.* Asymptotic expansions of Feynman integrals of exponentials with polynomial exponent // Rus. J. of Math. Phys., **23**, no. 4 (2016), 490–508.

5. *V. Fock* Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung // Z. Phys., **49** , no.5–6 (May 1928), 339–357.

6. *V. Fock* Konfigurationsraum und zweite Quantelung // Z. Phys., **75** , no.9–10 (Sep 1932), 622–647.

7. *Averbuch V.I., Smolyanov O.G., Fomin S.V.* Generalized functions and differential equations in linear spaces. I. Differentiable measures. // Works of the Moscow mathematical society, **24** no 133 (1971), 133–174.

8. *Kolmogoroff A.* Untersuchungen Über den Integralbegriff. // Math. Ann., **103** (1930), 654-696

9. *O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze* Path integrals. — Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1990 (2nd ed. 2015) (Rus.)

TRANSFORMATION OF FEYNMAN PATH INTEGRALS AND QUANTUM ANOMALIES

O.G. Smolyanov
smolyanov@yandex.ru

UDC 517

Feynman path integral need not be invariant with respect to transformation, which conserve classical action, because the generalized (Lebesgue) measure, which is used in the definition of the Feynman path integral, may be not invariant with respect to the transformation. It is shown that it is the reason of so called quantum anomalies. The statement resolve the contradiction between results in the books by K. Fujikawa and H. Suzuki ([1]) and P. Cartier and C. DeWitt-Morette ([2]) in favor of the first one.

Keywords: Feynman path integral, generalized measure, Lebesgue distribution, quantum anomaly, classical action

One calls quantum anomaly the situation when the dynamic of the quantum system, which is obtained by a procedure of quantization of a classical (Lagrangian or Hamiltonian) system, whose action is invariant with respect to some transformation, which we denote by g, is not invariant with respect to the same transformation.

In the talk we show that such loss of invariance is explained by nontrivial transformation of the Sobolev-Schwartz distribution, which is used in Feynman path integral representing the dynamic of quantum system.

Feynman path integrals are used to represent solutions to Cauchy problems for Schroedinger-type equations and also some other objects related to such equations (for example, regularized traces of differential operators and regularized exponents of such operators).

Such Feynman path integrals, which are used in the representation of solutions to Cauchy problem of the Schroedinger equation, can be interpreted as integrals of the exponent of classical action times a function depending on initial data with respect to generalized measure which is a sort of the Sobolev-Schwartz distribution. This distribution is translation-invariant and hence can be considered a generalization of the Lebesgue measure. According to the well-known A.Weil's theorem, on any infinite-dimensional locally convex space there does not exist an analog of the standard Lebesgue measure: any translation-invariant σ-additive σ-finite locally finite Boreal measure on an infinite-dimensional locally convex space is equal to zero. The invariance of classical action with respect to some transformation does not imply the invariance of Feynman path integral with respect to this transformation because the translation-invariant generalized measure in the integral need not be invariant with respect to this transformation.

One can define the transformation of the generalized measure using the derivative of this measure along the vector field which generates such transformation. The formulae for transformation of usual measures generated by vector fields can be found in [3]. One can show that the formulae for generalized measures look quite similar.

We denote the vector field, which generates the transformation g, by h.

This research is supported by Lomonosov Moscow State University. Grant "Modern problems of mathematics and mechanics" and by visit-professor grant of MPhTI.

Oleg Smolyanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Let also ν be the product of the exponent of the action of the classical system and the Lebesgue-type (i.e. translation invariant) distribution (generalized measure):

$$\nu = e^{S(\cdot)} M_{\mathcal{L}};$$

here $S(\cdot)$ is the classical action and $M_{\mathcal{L}}$ is the Lebesgue-type distribution. Let the symbol $\nu' h$ denote the derivative of ν along the vector field h; then according to the Leibnitz formula:

$$\nu' h = e^{S(\cdot)} S' h(\cdot) M_{\mathcal{L}} + e^{S(\cdot)}\ tr(h'(\cdot)) M_{\mathcal{L}}.$$

If the domain of the vector field h is equipped with a Hilbert structure then for any x from the domain of h, $h'(x)$ is the linear operator in the corresponding Hilbert space, and the symbol $tr(h'(x))$ denotes the usual trace of operator.

If the vector field h generates a transformation with respect to which the action $S(\cdot)$ is invariant, then $S' h(\cdot) = 0$ and hence $\nu' h = e^{S(\cdot)}\ tr(h'(\cdot)) M_{\mathcal{L}}$. If $tr(h'(\cdot)) \neq 0$ then the derivative of ν along the vector field h is not equal to zero. This is just the origin of the quantum anomalies.

References

1. *Fujikawa K., Suzuki H.* Path Integrals and Quantum Anomalies. — Clarendon Press: Oxford, 2004.

2. *Cartier P., DeWitt-Morette C.* Functional Integration: Action and Symmetries. — Cambridge University Press, 2006.

3. *Smolyanov O.G., Weizsacker H.v.* Smooth probability measures and associated probability operators// Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2013. – **2**:1, – pp. 51–78.

CHARACTERIZATION OF ASSOCIATE FUNCTION SPACES AND PRINCIPLE OF DUALITY

V.D. Stepanov

stepanov@mi-ras.ru

We analyse the problem of characterization of function spaces associated to a given function spaces or cones. The situation is rather different for an ideal, that is with lattice property, and non-ideal function spaces. Namely, the notion of associate norm bifurcates for a non-ideal space. We provide several examples of such a characterization including the weighted Sobolev space of the first order on the real line. The talk is based on the publications [1-7].

References

1. Stepanov V.D., On optimal Banach spaces containing a weight cone of monotone or quasiconcave functions, Math. Notes, **98**, No. 6, 957–970 (2015).

2. Eveson S.P., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line, Math. Nachr., **288**, No. 8-9, 877–897 (2016).

The author was supported by the Russian Scientific Fund (project no. 19-11-00087) and Russian Fund for Basic Researches (project no. 19-01-00223).

Vladimir D. Stepanov (Computing Center of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia)

3. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., On weighted Sobolev spaces on the real line, Math. Nachr., **290**, No. 5-6, 890–912, (2017).

4. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., Hardy-Steklov integral operators. Part I. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **300**, Suppl. 2, pp. S1–S112 (2018).

5. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., and Ushakova E.P., Hardy-Steklov integral operators. Part II. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **302**, Suppl. 2, pp. S1–S61. (2018)

6. Jain P., Singh A.P., Singh M., and Stepanov V.D., Sawyer's duality principle for grand Lebesgue space, Math. Nachr. **292**, No. 4, 841–849, (2019)

7. Stepanov V.D. and Ushakova E.P., Hardy–Steklov operators and the duality principle in weighted first-order Sobolev spaces on the real axis, Math. Notes, **105**, No. 1, pp. 92—104, (2019).

THE STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. QUARTET STATE

S.M. Tashpulatov

sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

UDC 517.984

We consider of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the quartet state of the system. (3-10 lines).

Keywords: essential spectra, discrete spectrum, Hubbard model, five-electron systems, quartet state
MSC: 47Axx

In the early 1970s, three papers [1,2,3], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems, appeared almost simultaneously and independently. In that model, a single nondegenerate electron band with a local Coulomb interaction is considered. The model Hamiltonian contains only two parameters: the matrix element t of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter U of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian can be written as

$$H = t\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}, \tag{1}$$

where $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ denote Fermi operators of creation and annihilation of an electron with spin γ on a site m and the summation over τ means summation over the nearest neighbors on the lattice.

This work is supported by Uz.FFI (no. OT-F2-18).

Sadulla Mamarajabovich Tashpulatov (Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

The model proposed in [1,2,3] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system, although the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [4]. We also recall that the Hubbard model is a particular case of the Shubin-Wonsowsky polaron model [5], which had appeared 30 years before [1,2,3]. In the Shubin-Wonsowsky model, along with the on-site Coulomb interaction, the interaction of electrons on neighboring sites is also taken into account.

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [6]. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is therefore of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [6].

The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [7].

The spectrum of the energy operator of system of four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state were studied in [8]. In the four-electron systems are exists quintet state, and three type triplet states, and two type singlet states. The spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard model in the quintet, and singlet states were studied in [9].

Here, we consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for sextet and quartet states.

The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m+\tau,\gamma}a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \qquad (2)$$

Here A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

In the five-electron systems exists sextet state, four type quartet states, and five type doublet states.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$.

In the system exists four type quartet states. This states is consists of the next states ${}^1q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^2q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^3q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$, ${}^4q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$, corresponding to the first five-electron quartet state is the set of all vectors of the form ${}^1\psi^q_{3/2} = \sum_{m,n,r,t,l\in Z^\nu} f(m,n,r,t,l){}^1q^{3/2}_{m,n,r,t,l\in Z^\nu}, f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^5)$. The restriction ${}^1H^q_{3/2}$ of operator H to the subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$, is called the five-electron first quartet state operator.

Theorem 1. *The subspace ${}^1\mathcal{H}^q_{3/2}$ is invariant under the operator H, and the operator ${}^1H^q_{3/2}$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^1\overline{H}^q_{3/2}$ acting in the space l^{as}_2. In the quasimomentum representation, the*

operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *acts in the Hilbert space* $L_2^{as}((T^\nu)^5)$ *as*

$$ {}^1\widetilde{H}^q_{3/2}\psi = \{5A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i + cos\mu_i + cos\gamma_i + cos\theta_i + cos\eta_i]\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta) + \quad (3)$$

$$ +U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta,\eta) + f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta) + f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta) +$$

$$ +f(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s)]ds, \text{ where } L_2^{as}((T^\nu)^5) \text{ is the subspace of antisymmetric functions in } L_2((T^\nu)^5). $$

Using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces, we can describe the structure of essential spectra and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$.

Let $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$, $\Lambda_3 = \lambda + \eta$, $\Lambda_4 = \lambda + \gamma$, $\Lambda_5 = \lambda + \theta$.

Theorem 2. *If* $\nu = 1$ *and* $U < 0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven segments:*

$$ \sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+$$

$$ +z_3, b+z_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_3], $$

and discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = \{z_1+z_2+z_3\}$, *or* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = \emptyset$.

Here and hereafter $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = A - 2B$, $f = A + 2B$, $z_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3 = A + 2\sqrt{U^2+B^2}$.

Theorem 3. *If* $\nu = 1$ *and* $U > 0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven segments:*

$$ \sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup $$

$$ \cup [a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3, b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3] \cup [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup $$

$$ \cup [c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3, d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2, f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3], $$

and discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = \{\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3\}$, *or* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = \emptyset$. *Here* $\widetilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\widetilde{z}_2 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $\widetilde{z}_3 = A - 2\sqrt{U^2+B^2}$.

Theorem 4. *a). If* $\nu = 3$ *and* $U < 0$, *or* $U > 0$, *then the essential spectrum of the first five-electron quartet state operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of the union of seven or four, or two, or single segments, and discrete spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ *is consists of no more one point.*

The analogously investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum the others quartet states.

References

1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Bands // Proc. Roy. Soc. A., **276** (1963), 238–257.

2. *Gutzwiller M.C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals // Phys. Rev. Lett., **10** (1963), 159–162.

3. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys., **30** (1963), 275–289.

4. *Anderson P.W.* Localized Magnetic States in Metals // Phys. Rev., **124** (1961), 41–53.

5. *Shubin S.P., Wonsowsky S.V.* On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A., **145** (1934), 159–180.

6. *Karpenko B.V., Dyakin V. V., and Budrina G. L.* Two electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr., **61** (1986), 702–706.

7. *Tashpulatov S. M.* Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theoretical and Mathematical Physics, **179** (2014), 712–728.

8. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model // Journal of Physics: Conference Series, **697** (2016), 012025 doi:10.1088/1742-6596/697/1/012025

9. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), 530–541.

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH COMPLEX WEIGHTS

V.A. Yurko

yurkova@info.sgu.ru

UDC 517.984

We study inverse problems of spectral analysis for second order differential operators on a finite interval with complex-valued weights and with an arbitrary number of jump conditions inside the interval. Uniqueness theorems are proved for this class of nonlinear inverse problems.

Keywords: Sturm-Liouville operators; complex weights; inverse spectral problems

Let $N \geqslant 2$ be fixed, and let $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ be the eigenvalues of the boundary value problem L for the differential equation

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \in [0,T], \tag{1}$$

on a finite interval $[0,T]$ with the boundary conditions

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(T) + Hy(T) = 0,$$

and with the discontinuity conditions in interior points $b_k \in (0,T)$, $k = \overline{1,N-1}$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{N-1} < T$:

$$y(b_k+0) = d_{k1}y(b_k-0), \quad y'(b_k+0) = d_{k2}y'(b_k-0)+d_{k3}y(b_k-0), \quad k = \overline{1,N-1}. \tag{2}$$

This work was supported in part by Grant 1.1660.2017/4.6 of the Russian Ministry of Education and Science and by Grant 19-01-00102 of Russian Foundation for Basic Research.

Vjacheslav Yurko (Saratov State University, Saratov, Russia)

Here $q(x)$ and $r(x)$ are complex-valued functions, $q(x) \in L(0,T)$, $r(x) = a_k$ for $x \in [b_{k-1}, b_k)$, $k = \overline{1,N}$, $b_0 := 0, b_N := T$, and h, H, a_k, d_{kj} are complex numbers, $a_k \neq 0$, $d_k := d_{k1}d_{k2} \neq 0$.

Let $\Phi(x,\lambda)$ be the solution of Eq. (1) satisfying jump conditions (2) and the boundary conditions $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$. Denote $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. We will call $M(\lambda)$ the Weyl-type function. Let $\{\lambda_{n0}\}_{n\geqslant 0}$ be the eigenvalues of the boundary value problem L_0 for Eq.(1) with jump conditions (2) and the boundary conditions $y(0) = V(y) = 0$. Let a_k and d_{kj}, $j = 1,2$ be known a priori. The inverse problem is formulated as follows.

Inverse problem 1. Given the Weyl-type function $M(\lambda)$, construct $q(x)$, h, H, d_{k3}.

Inverse problem 2. Given two spectra $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\lambda_{n0}\}_{n\geqslant 0}$, construct $q(x)$, h, H, d_{k3}.

These inverse problems are generalizations of the classical inverse problems for Sturm-Lioville operators with $r(x) \equiv 1$ and $d_{k1} = d_{k2} = 1, d_{k3} = 0$ (see [1]).

Let us formulate the uniqueness theorems for these inverse problems. For this purpose together with L we consider the boundary value problem $\tilde{L}$ of the same form but with different coefficients. We agree that if a certain symbol α denotes an object related to L, then $\tilde{\alpha}$ will denote the analogous object related to $\tilde{L}$. Let $a_k = \tilde{a}_k$, $d_{kj} = \tilde{d}_{kj}$, $j = 1,2$.

Theorem 1. *If $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, then $q(x) = \tilde{q}(x)$ a.e. on $(0,T)$, and $h = \tilde{h}, H = \tilde{H}, d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Thus, the specification of the Weyl-type function uniquely determines $q(x), h, H$ and d_{k3}.*

Theorem 2. *If $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\lambda_{n0} = \tilde{\lambda}_{n0}$, for all $n \geqslant 0$, then $q(x) = \tilde{q}(x)$ a.e. on $(0,T)$, and $h = \tilde{h}, H = \tilde{H}, d_{k3} = \tilde{d}_{k3}$. Thus, the specification of two spectra uniquely determines $q(x), h, H$ and d_{k3}.*

References

1. *Freiling G., Yurko V.A* Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. — New York: NOVA Science Publishers, 2001.

Секция 2

Дифференциальные уравнения

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННОЙ С НАГРУЖЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ

М.Ф. Абдукаримов, С.Х. Мирзоев
mahmadsalim_86@mail.ru

УДК 517.958

Данная работа посвящена изучению одной задачи граничного управления, связанной с нагруженным уравнением гиперболического типа. Доказана теорема существования решения рассматриваемой задачи. Показана также его устойчивость относительно функций, входящих в задачу.

Ключевые слова: граничное управление, нагруженное уравнение, априорная оценка, смещение.

On the existence of a solution to a single boundary control problem associated with a loaded equation

This paper is devoted to the study of one boundary control problem associated with a loaded hyperbolic equation type. An existence of solution for this problem and its stability with respect to the functions, included to the problem are proved.

Keywords: boundary control, loaded equation, apriori estimate, offset.

Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич, к.ф.-м.н., Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Душанбе, Таджикистан); Mahmadsalim Abdukarimov (Branch of Lomonosow Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan)

Мирзоев Сайъло Хабибулоевич, к.ф.-м.н., доцент, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Душанбе, Таджикистан); Say'lo Mirzoev (Branch of Lomonosow Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan)

В данной работе изучается вопрос существования решения задачи граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором процесса, описываемого одним гиперболическим уравнением. Постановка задачи такова: найти такую функцию $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, для которой существует в прямоугольнике $Q_T = (0 \leqslant x \leqslant l) \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ решение следующей задачи:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x_0,t) = f(x,t) \qquad в \qquad Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad при \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x) \qquad при \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = 0 \qquad при \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

в которой $\varphi(x),\ \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l],\ \psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l],\ f(x,t), q(x,t) \in L_2(Q_T)$, $0 < x_0 < l$ и выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0);\ \varphi(l) = 0;\ \varphi_1(0) = \mu(T);\ \varphi_1(l) = 0.$$

Отметим, что уравнение (1) относится к классу нагруженных уравнений гиперболического типа [1].

Решение задачи граничного управления (1)-(4) понимается в обобщенном смысле и ищется в классе $\hat{W}_2^1(Q_T)$, впервые введенном в [2].

Следующая теорема доказывается методом, предложенным в [3].

Теорема. *Пусть $T = 2l$. Тогда решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (1)-(4) существует.*

Следствие 1. *Из процесса доказательства приведенной теоремы вытекает оценка*

$$\|\mu - \hat{\mu}\|_{W_2^1[0,2l]} \leqslant C\|q\|_{L_2(Q_T)}, \tag{5}$$

где $\hat{\mu}(t) = \hat{u}(0,t)$ - граничное управление задачи для уравнения вынужденных колебаний струны [4].

Оценка (5) свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x_0,t)$ неоднородного волнового оператора с суммируемым коэффициентом $q(x,t)$.

Следствие 2. Имеет место априорная оценка $\|u\|_{W_2^1(Q_{2l})} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]})$, которая свидетельствует об устойчивости решения задачи (1)-(4) относительно начальных и финальных условий.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — Москва: Наука, 2012. — 233 с.

2. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения, **36**:11 (2000), 1513-1528.

3. *Абдукаримов М.Ф.* Некоторые задачи граничного управления смещением для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом. — Душанбе, 2018. — 240с.

4. *Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В.* Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце // Дифференциальные уравнения, **49**:6 (2013), 759-771.

ИНВАРИАНТНОЕ СВОЙСТВО ФУНКЦИИ РИМАНА

А.В. Аксенов
aksenov@mech.math.msu.su

УДК 517.951

Показано, что симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения. Предложен метод построения функции Римана. Приведены примеры его применения. В терминах инвариантов Лапласа сформулировано условие, когда предлагаемый метод построения функции Римана неприменим.

Ключевые слова: функция Римана, фундаментальное решение, оператор симметрии, алгебра Ли

Invariant property of the Riemann's function

It is shown that the symmetries of the fundamental solutions of the linear hyperbolic equation of the second order with two independent variables preserve the Riemann's function of the adjoint equation invariant. The method for construction the Riemann's function is proposed. Examples of its application are given. The condition, when the proposed method of the Riemann's function construction is inapplicable, is formulated in terms of Laplace's invariants.

Keywords: Riemann's function, fundamental solution, symmetry operator, Lie algebra

В работе [1] применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка предложен метод интегрирования Римана. Для его использования необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением характеристической задачи Гурса. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] дан подробный анализ шести известных способов ее построения для частных типов уравнений. В работе [3], на основе результатов работы [4] по групповой классификации гиперболических уравнений второго порядка, предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения. В настоящей работе показана инвариантность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00890).

Аксенов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Aksenov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Метод Римана основывается на следующем тождестве: $2(vLu - uL^*v) \equiv (vu_y - uv_y + 2auv)_x + (vu_x - uv_x + 2buv)_y$. Здесь $L^*v = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$ – сопряженное с Lu дифференциальное выражение. Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (1) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x,y;x_0,y_0)$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению $L^*R = 0$ и следующим условиям на характеристиках

$$(R_y - aR)\big|_{x=x_0} = 0\,, \qquad (R_x - bR)\big|_{y=y_0} = 0\,, \qquad R(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1\,.$$

С помощью функции Римана для уравнения (1) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Гурса, а также частное решение неоднородного уравнения.

Функция Римана обладает свойством взаимности

$$R^*(x,y;x_0,y_0) = R(x_0,y_0;x,y)\,, \tag{2}$$

где $R^*(x,y;x_0,y_0)$ – функция Римана сопряженного уравнения, которая является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет следующим условиям на характеристиках

$$(R^*_y + aR^*)\big|_{x=x_0} = 0\,, \qquad (R^*_x + bR^*)\big|_{y=y_0} = 0\,, \qquad R^*(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1\,.$$

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(\mathbf{x})\, D^\alpha u = 0\,, \qquad \mathbf{x} \in R^m\,. \tag{3}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}\,.$$

Фундаментальные решения уравнения (3) являются решениями уравнения

$$Mu = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\cdots\delta(x^m - x_0^m)\,. \tag{4}$$

Операторы симметрии уравнения (3), образующие конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии, имеют вид

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(\mathbf{x})\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{5}$$

Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора симметрии (5). Функция $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ удовлетворяет тождеству $\underset{p}{X}(Mu) \equiv \lambda(\mathbf{x})\, Mu$.

Сформулируем основной результат работы [5].

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения (4) является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения (3), выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad \lambda(\mathbf{x}_0) + \sum_i \frac{\partial \xi^i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_0^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{6}$$

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (4)) будем называть симметрии уравнения (3), удовлетворяющие соотношениям (6).

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\,, \tag{7}$$

описывающее фундаментальные решения уравнения (1).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений уравнения (1) (или симметрии уравнения (7)) оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным решением исходного однородного уравнения относительно симметрий фундаментальных решений. Функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (2).

На основании теоремы 2 предложен метод построения функции Римана. Приведены примеры его применения.

Приведено условие, когда предлагаемый метод построения функции Римана неприменим. Условие сформулировано в терминах инвариантов Лапласа. Дано некоторое уточнение результатов групповой классификации уравнения (1), приведенных в работе [4].

Литература

1. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948, 376-395.

2. *Copson E.T.* On the Riemann–Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis, **1**:1 (1957/58), 324-348.

3. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук, **47**:4 (1992), 83-144.

4. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики, 3 (1960), 126-145.

5. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН, **342**:2 (1995), 151-153.

О ТИПИЧНОСТИ И НЕТИПИЧНОСТИ СТЕПЕННОГО ПОВЕДЕНИЯ BLOW-UP РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СПЕКТРА ПОРОЖДЕННОГО ИМ ЯКОБИАНА

И.В. Асташова

ast.diffiety@gmail.com

УДК 517.923, 517.925.54

Исследуется асимптотика "blow-up"решений, то есть решений, уходящих в конечной точке на бесконечность вместе со своими производными до порядка n. Доказано, что асимптотическое поведение таких решений связано с характером спектра линейного оператора, возникающего при линеаризации связанной с уравнением динамической системы на $(n-1)$-мерном многообразии. Доказано, что для слабо нелинейных дифференциальных уравнений все blow-up решения имеют степенную асимптотику, а для сильно нелинейных уравнений степенное поведение таких решений нетипично: множество данных Коши, порождающих решения со степенным асимптотическим поведением имеет меру нуль.

Ключевые слова: асимптотическое поведение решений, качественные свойства, "blow-up спектр матрицы Якоби

On the typicality and atypicality of the power-law behavior of blow-up solutions to nonlinear Emden-Fowler type higher-order equations depending on the spectrum of a related Jacobian

We study the asymptotics of "blow-up" solutions, that is, solutions tending at the end point to infinity with their derivatives up to the n-th order. It is proved that the asymptotic behavior of such solutions is related to the nature of the spectrum of a related linear operator. This operator arises from linearization of a dynamical system on an $(n-1)$-dimensional manifold. It is proved that for weakly nonlinear differential equations all blow-up solutions have power-law asymptotic behavior, and for strongly non-linear equations the power-law behavior of such solutions is atypical: the set of Cauchy data generating solutions with power-law asymptotic behavior has null measure.

Keywords: asymptotic behavior of solutions, qualitative properties, "blow-up", Jacobi matrix spectrum

Рассматривается нелинейное уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка:

$$y^{(n)} = p(x, y, y', ..., y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \tag{1}$$

Асташова Ирина Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова; РЭУ имени Г.В. Плеханова (Москва, Россия) Irina Astashova (Lomonosov Moscow State University, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia)

где функция $p(x, \xi_1, ..., \xi_n)$ непрерывна по всем переменным, удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1, ..., \xi_n$, а также неравенству $0 < m \leqslant p(x, \xi_1, ..., \xi_n) \leqslant M < +\infty$. Введем обозначение

$$\alpha = n/(k-1). \tag{2}$$

Любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), положительное в некоторой точке вместе со всеми своими *младшими* (т.е. порядка меньше n) производными, имеет вертикальную асимптоту в правой границе своей области определения. Ранее было доказано, что для $n = 2$ (см. [1, глава V]), для $n \in \{3, 4\}$ (см.[2, глава 5.3] и ссылки там на более ранние работы), что любое такое решение имеет степенное асимптотическое поведение:

$$y(x) = \pm C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0, \; C^{k-1} = \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j), \tag{3}$$

где x^* — произвольная константа. И.Т.Кигурадзе (см. [1, задача 16.4]) был поставлен вопрос о справедливости такого утверждения для уравнения (1) более высокого порядка. Это предположение оказалось верным для слабо нелинейного уравнения (1)(см. [3–4]).

Теорема 1. *Пусть* $n > 4$, $p \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \bigcap \mathrm{Lip}_{y_0,\ldots,y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, $p \to p_0 > 0$ *при* $x \to x^*, y_0 \to \infty, \ldots, y_{n-1} \to \infty$. *Тогда существует такое* $K > 1$, *что для любого действительного* $k \in (1; K)$ *любое blow-up решение уравнения (1) имеет степенное асимптотическое поведение (3) для некоторого* x^*.

Однако было доказано для уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ (см. доказательство в [5] для сколь угодно высокого порядка n, в [6]— для $n = 12, 13, 14$, в [7]— для произвольного $n \geqslant 12$), что при некотором $k > 1$ это уравнение имеет нестепенное решение

$$y = (x^* - x)^{-\alpha} \; h(\log(x^* - x)), \tag{4}$$

где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция на $\mathbb{R}$.

Оказалось, что при $n \geqslant 12$ асимптотически степенные решения уравнения (1) порядка n с достаточно сильной нелинейностью даже при $p = p_0 > 0$ не только не исчерпывают множества всех blow-up решений, но и являются в некотором смысле нетипичными blow-up решениями этого уравнения.

При исследовании асимптотических свойств уравнения (1) при $p = p_0 > 0$ (см. [2, глава 5.3]) использовалось построение на $(n-1)$-мерной фазовой сфере динамической системы, у которой асимптотически степенным решениям уравнения (1) соответствовали траектории, стремящиеся к некоторой неподвижной точке системы. На координатной карте, покрывающей область сферы, соответствующую точкам с положительными значениями решения и его младших производных, эта система линеаризуется в окрестности особой точки, и собственные значения матрицы Якоби удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=0}^{n-1}(l + \alpha + j) = \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j + 1). \tag{5}$$

Характер спектра этой матрицы определяет поведение blow-up решений уравнения (1). Ранее было доказано (см.[2, глава 5.1]), что если уравнение (4) имеет m корней с отрицательной действительной частью, то уравнение (1) имеет m- параметрическое семейство blow-up решений со степенным асимптотическим поведением. Так, при $5 \leqslant n \leqslant 11$ доказано существование $(n-1)$-параметрического семейства blow-up решений со степенной асимптотикой у уравнения (1) при некоторых дополнительных предположениях относительно функции p (см. [2, глава 5.1]). Существование решений вида (4) для уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ связано с появлением для любого $n \geqslant 12$ при некоторых $k > 1$ пары чисто мнимых корней и некоторыми дополнительными свойствами спектра (см. [5–7]). Оказалось [8], что для доказательства нетипичности степенного поведения blow-up решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ также используются свойства корней уравнения (5).

Теорема 2. *Если среди корней уравнения (5) нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от* 1 *корень с положительной действительной частью, то для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Теорема 3. *Если среди корней уравнения (5) при $\alpha = 0$ нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от* 1 *корень с положительной действительной частью, то существует такое $k_n > 1$, что для любого $k > k_n$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Теорема 4. *Уравнение (5) при $\alpha = 0$*

для любого целого $n \geqslant 12$ имеет по крайней мере одну пару сопряженных корней с положительной действительной частью;

для любого натурального $n < 62$ не больше одной пары сопряженных корней с неотрицательной действительной частью;

при $62 \leqslant n \leqslant 203$ имеет ровно две пары сопряженных корней с положительной действительной частью и не имеет чисто мнимых корней.

Теорема 5. *Для любого целого $n \in [12, 203]$ найдется такое $k_n > 1$, что для любого вещественного $k > k_n$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (1) с $p = p_0 > 0$ имеет меру нуль.*

Литература

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. —М.: Наука, 1990.

2. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Научное издание под ред.И.В.Асташовой. —ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012, —22–290.

3. *Astashova I.* On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations // Georgian Mathematical Journal. . **24**:2 (2017), 185–191.

4. *Astashova I.* On Asymptotic Behavior of Blow-Up Solutions to Higher-Order Differential Equations with General Nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer International Publishing AG. 2018, —1–13.

5. *Kozlov V.A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. (1999), **37**:2, 305–322.

6. *Astashova I.V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. Springer Open Journal (2013), № 2013:220.

7. *I. Astashova, V.Vasilev.* On Nonpower-Law Behavior of Blow-up Solutions to Emden–Fowler Type Higher-Order Differential Equations // International Workshop QUALITDE - 2018, December 1 – 3, (2018), Tbilisi, Georgia, 11–15.

8. *Асташова И. В.* О нетипичности асимптотически степенных решений уравнения типа Эмдена-Фаулера высокого порядка, Алгебра и анализ, **31** (2019), 1–22.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ В КЛАССЕ ГЁЛЬДЕРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Е.А Бадерко, М.Ф. Черепова

baderko.ea@yandex.ru, cherepovamf@mpei.ru

УДК 517.956.4

Установлена единственность в классе Гёльдера классического решения первой начально-краевой задачи для одномерных по пространственной переменной параболических по Петровскому систем второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей.

Ключевые слова: параболические системы, первая начально-краевая задача, единственность классического решения, негладкая боковая граница

On uniqueness in Hölder class of solution to Dirichlet problem for parabolic systems in a semibounded domain on the plane

We establish the uniqueness in Hölder class of a classical solution to the first initial boundary value problem for spatially one-dimensional parabolic second-order systems (in sense of Petrovskii) in a semibounded domain with a nonsmooth lateral boundary.

Keywords: parabolic systems, the first initial boundary value problem, uniqueness of a classical solution, nonsmooth lateral boundary

Бадерко Елена Александровна, д-ф.-м.н., профессор, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Baderko Elena Aleksandrovna (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Черепова Марина Федоровна, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (Москва, Россия); Cherepova Marina Fedorovna (National Research University „Moscow Power Engineering Institute“, Moscow, Russia)

В полосе $D = \{(x,t) \in R^2 : x \in R, 0 < t < T\}, 0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно–параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A^{(k)}(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

a) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $Re\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}, r = \overline{1,m}$;

b) $a_{ij}^{(k)} \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \alpha \in (0,1), i,j = \overline{1,m}, k = 0,1,2$;

($H^{\beta,\beta/2}(\overline{D})$ — пространство Гёльдера, $\beta > 0$ — нецелое число).

В D выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяют условию:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leqslant K|\Delta t|^{(1+\alpha)/2},\ t, t + \Delta t \in [0,T]. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть для оператора L выполнены условия a), b) и для боковой границы Σ — условие (1). Пусть u — классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega,\ u|_{t=0} = 0,\ u|_{\Sigma} = 0$$

такое, что $u \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Литература

1. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифф. уравн. **52**:2 (2016), 198-208.

2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае. // ДАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247-249.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ш.А. Балгимбаева
sholpan.balgyn@gmail.com

УДК 517.95

Устанавливается L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов с символами, негладкими по пространственной переменной, на $d-$мерном торе при $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, символ, $d-$мерный тор

The boundedness of some classes of periodical pseudo-differential operator

L_p- boundedness of some classes of pseudo-differential operators with symbols that are nonsmooth in the spatial variable is established on the $d-$dimensional torus for $1 < p < \infty$.

Keywords: pseudo-differential operator, symbol, d-dimensional torus

Псевдодифференциальные операторы (ПДО), т.е. операторы имеющие представление

$$T_a u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{2\pi i x\xi} d\xi,$$

имеют важное значение в теории общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, а также в гармоническом анализе.

Исследование ограниченности (классов) ПДО между различными нормированными пространствами функций и распределений — одна из важных задач теории.

Обычно предполагается, что символ $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ оператора T_a является гладким, как по пространственной переменной x, так и по частотной переменной ξ, и удовлетворяет некоторым условиям роста (убывания).

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_d = \{1, 2, \ldots, d\}$ $(d \in \mathbb{N})$. Для $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$, $|x| := |x|_2 = \sqrt{xx}$, $\langle x \rangle = \sqrt{1 + xx}$; $x \leqslant y$ $(x < y)$ $\Leftrightarrow x_\kappa \leqslant y_\kappa$ $(x_\kappa < y_\kappa)$ для всех $\kappa \in \mathrm{z}_d$. Далее, $\mathbb{T}^d \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_d(f)$ — преобразование Фурье для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Далее для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{N}_0^d$, используем стандартные мультииндексные обозначения:

$$\partial^\alpha f(x) (\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f(x), \quad \text{где} \quad \partial_\kappa = \tfrac{\partial}{\partial x_\kappa},\ \kappa \in \mathrm{z}_d;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP05133257 МОиН РК.

Балгимбаева Шолпан Албановна, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Balgimbayeva Sholpan (Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan)

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \quad (\gamma \leqslant \alpha).$$

Пусть, далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^d$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^d$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^d \backslash \mathbb{Z}^d$.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d))$ имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d; \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

Фиксируем вектор $\mathtt{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}, n \leqslant d$. Тогда $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$ представим в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{k_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{k_\nu}) \in \mathbb{R}^{d_\nu}$.

Далее обозначим $k_\nu = d_1 + \ldots + d_\nu$, $k_0 = 0$ и введем множества $\mathrm{к}_\nu = \{l \in \mathbb{N} : k_{\nu-1} + 1 \leqslant l \leqslant k_\nu\}, \nu \in \mathrm{z}_n$.

Обозначим через Δ_y^ν разность первого порядка для функции $f(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ по ν-ой "пачке" переменной

$$\Delta_y^\nu f(x) = f(x^1, \ldots, x^\nu - y, \ldots, x^n) - f(x), \nu \in \mathrm{z}_n, y \in \mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Приведем обобщение определения модуля непрерывности

Определение. Набор функций $\{\omega_1(t_1), \omega_2(t_1, t_2), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_n)\}$ будем называть *модулем непрерывности*, если справедливы условия:
1. Для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ функции $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) : (\mathbb{R}_+)^\nu \to \mathbb{R}_+$ непрерывная, вогнутая, монотонно возрастающая по каждой переменной $t_l, l \in \mathrm{z}_\nu$;
2. $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu)$ инвариантна относительно любой перестановки переменных $t_1, \ldots, t_\nu$;
3. для каждых $\mu, \nu : 1 \leqslant \mu < \nu \leqslant n$ имеем $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) \leqslant 2^{\nu-\mu} \omega_\mu(t_1, \ldots, t_\mu)$.

Пусть символ $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям:
I. Для любого $\nu \in \mathrm{z}_n, l \in \mathrm{к}_\nu$ и $\alpha \in \nu \in \mathrm{z}_{d+1} \cup \{0\}$

$$|\partial_{\xi_l}^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C \langle \xi^\nu \rangle^{-\alpha}, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu};$$

II_μ. $(\mu \in \mathrm{z_n})$. Для любого $\nu \in \mathrm{z}_n, l \in \mathrm{к}_\nu$; $\alpha \in \nu \in \mathrm{z}_{d+1} \cup \{0\}$; $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\mu \leqslant n$; $y_1 \in \mathbb{R}^{d_{\nu_1}}, \ldots, y_\mu \in \mathbb{R}^{d_{\nu_\mu}}$

$$|\Delta_{y_1}^{\nu_1} \ldots \Delta_{y_\mu}^{\nu_\mu} \partial_{\xi_l}^\alpha a(x, \xi)| \leqslant \omega_\mu(|y_1|, \ldots, |y_\mu|) \langle \xi^\nu \rangle^{-\alpha}, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Отметим работы, которые имеют непосредственное отношение к нашему результату. В непериодическом случае — это результат Р. Койфмана и И. Мейера [1] и результат М. Ямазаки [2]. Сформулируем в наших обозначениях теорему из [2], периодическая версия которой является основным результатом сообщения.

Теорема А. *Следующие три условия относительно модулей непрерывности эквивалентны:*
1. Для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ *имеем*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu)^2}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_\nu} dt_1 \ldots dt_\nu < \infty,$$

2. Если символ $a(x, \xi)$ *удовлетворяет условиям* $\mathrm{II}_\mu, \mu \in \mathrm{z}_n$, *тогда соответствующий оператор* T_a *ограничен в* L_p *для каждого* $1 < p < \infty$,
3. Для каждого символа $a(x, \xi)$, *удовлетворяющего условиям* $\mathrm{II}_\mu, \mu \in \mathrm{z}_n$, *существует* $1 < p < \infty$ *такой, что оператор ограничен в* L_p.

В периодическом случае отметим работу Д.Б. Базарханова [3], в которой развиты, в частности, результаты из [1] на случай периодических ПДО с символами, которые являются негладкими по пространственной переменной и имеют достаточно малую гладкость по частнотной переменной.

Обозначим через $\Sigma_\omega^{(\mathrm{r})} = \Sigma_\omega(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d)$ пространство символов $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ таких, что выполнены условия I, II_μ $\forall \mu \in \mathrm{z}_n$.

Пусть $\Sigma_\omega^{(\mathrm{t})} = \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^d)$ — класс символов $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$, которые являются сужениями на $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d$ символов $a^{(\mathrm{r})} \in \Sigma_\omega^{(\mathrm{r})}$ таких, что $\forall \xi \in \mathbb{Z}^d$ функция $a^{(\mathrm{r})}(x, \xi)$ является периодической по пространственной переменной x.

Рассмотрим формальный псевдодифференциальный оператор, соответствующий периодическому символу $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$

$$T_a \colon u(x) \mapsto T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i \xi x}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор* T_a *ограничен на* $L_p(\mathbb{T}^d)$ *при всех* $1 < p < \infty$ *для любого* $a \in \Sigma_\omega(\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d)$ *тогда и только тогда, когда* ω_ν^2, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *удовлетворяет условию Дини:*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu)^2}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_\nu} dt_1 \ldots dt_\nu < \infty.$$

Литература

1. *Coifman R. R., Meyer Y.* Au–dela des operateurs pseudo-differentiels // Asterisque, **57** (1978), 1-185.

2. *Yamazaki M.* The L^p-boundedness of pseudo-differential operators satisfying estimates of parabolic type and product type // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, **60**:8 (1984), 279-282.

3. *Базарханов Д. Б.* L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов на m-мерном торе// Труды Института математики и механики УрО РАН, **22**:4 (2016), 64-80.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИМЕРОВ ПЕРРОНА И ВИНОГРАДА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА НА ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

bar@im.bas-net.by, vvbykov@gmail.com

УДК 517.926.4

Рассматривается класс правильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем и произвольные их линейные параметрические возмущения, убывающие к нулю на бесконечности равномерно относительно параметра, принадлежащего некоторому метрическому пространству, которое может быть любым. Получено полное описание спектров показателей Ляпунова таких систем как вектор-функций параметра.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова, правильная по Ляпунову система, бесконечно малые возмущения

Generalization of Perron's and Vinograd's examples of instability of Lyapunov exponents for linear differential systems with parametric perturbations

We consider the class of linear differential Lyapunov regular systems and their arbitrary linear parametric perturbations vanishing at infinity uniformly with respect to the parameter from a metric space, which might be arbitrary. A complete description of Lyapunov exponent spectra of such systems as vector functions of the parameter is obtained.

Keywords: linear differential system, Lyapunov exponents, Lyapunov regular system, infinitesimal perturbations

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Показатели Ляпунова [1, с. 27] системы (1) обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а через $\mathcal{P}_n$ – подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из правильных по Ляпунову систем [1, с. 51]. Далее мы отождествляем систему (1) с функцией $A(\cdot)$ и поэтому будем писать $A \in \mathcal{M}_n$ или $A \in \mathcal{P}_n$.

В работе [2] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова, для которой существует такая экспоненциально убывающая к нулю на бесконечности 2×2-матрица $Q(t)$

Барабанов Евгений Александрович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (Минск, Беларусь); Evgeny Barabanov (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus)

Быков Владимир Владиславович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Bykov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

($t^{-1}\ln\|Q(t)\| \to \text{const} < 0$ при $t \to +\infty$), что старший показатель Ляпунова возмущённой системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

положителен. Другими словами, показатели Ляпунова, отвечающие за устойчивость решения, сами устойчивыми не являются (даже при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов системы).

Вследствие примера Перрона естественно возникла задача о поиске достаточно широких подклассов класса $\mathcal{M}_n$, показатели Ляпунова систем которых были бы устойчивыми (не изменялись) при убывающих к нулю на бесконечности возмущениях матриц коэффициентов. Долгое время держалась гипотеза, что таким свойством обладает класс $\mathcal{P}_n$ правильных по Ляпунову систем – гипотеза, основанная в существенном на фундаментальном результате Ляпунова о том, что если у нелинейной системы (при естественных ограничениях на правую часть) система её первого приближения правильная и обладает свойством условной экспоненциальной устойчивости, то этим же свойством (с теми же размерностью устойчивого многообразия и показателем асимптотики) обладает и нулевое решение нелинейной системы [1, с. 53–55]. Тем не менее, в работе [3] Р.Э. Виноград привёл пример системы $A \in \mathcal{P}_2$, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором убывающем к нулю на бесконечности возмущении её матрицы коэффициентов (показатели Ляпунова правильных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов устойчивы, как это следует из теоремы Богданова–Гробмана).

Пусть M – метрическое пространство. Введём нужные в дальнейшем классы E_n и Z_n непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Класс E_n состоит из функций $Q(\cdot,\cdot)$, экспоненциально убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$ (т.е. $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t,\mu)\| < \text{const} < 0$), а класс Z_n – из функций $Q(t,\mu)$, убывающих к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$.

Обобщая ситуацию, рассмотренную в примерах Перрона и Винограда, для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ определим класс $P^n(A;M)$, состоящий из семейств

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t,\mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

линейных дифференциальных систем, где $\mu \in M$ – параметр и $Q(\cdot,\cdot) \in E_n$, а для каждой системы $A \in \mathcal{P}_n$ – класс $V^n(A;M)$, состоящий из семейств (2), в которых $Q(\cdot,\cdot) \in Z_n$. В силу этого при каждом фиксированном в семействе (2) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu;A,Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu;A,Q)$, а значит, для каждого $k = \overline{1,n}$ получаем функцию $\lambda_k(\cdot;A,Q)\colon M \to \mathbb{R}$, которую назовём k-ым показателем этого семейства, а также вектор-функцию $\Lambda(\cdot;A,Q)\colon M \to \mathbb{R}^n$, определённую равенством $\Lambda(\mu;A,Q) = (\lambda_1(\mu;A,Q),\ldots,\lambda_n(\mu;A,Q))^{\mathrm{T}}, \quad \mu \in M.$

Ставятся задачи полного описания для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического

пространства M классов вектор-функций

$$P_n(M) = \{\Lambda(\cdot; A, Q) \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\, Q \in E_n\},$$
$$V_n(M) = \{\Lambda(\cdot; A, Q) \,|\, A \in \mathcal{P}_n,\, Q \in Z_n\}.$$

Решения этих задач будут содержать как частные случаи примеры Перрона и Винограда соответственно. Если $n = 1$, то описания этих классов легко вытекают из определения показателя Ляпунова – для любого метрического пространства M каждый из классов $P_1(M)$ и $V_1(M)$ совпадает с классом постоянных функций $M \to \mathbb{R}$. Поэтому далее считаем, что $n \geqslant 2$.

Пусть вектор-функция $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))^{\mathrm{T}} \colon M \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $P_n(M)$ или классу $V_n(M)$. Приведём три свойства вектор-функции $f(\cdot)$, которым она необходимо должна удовлетворять (ниже эти свойства нумеруются как 1), 2), 3)). Одно свойство очевидно вытекает из определения этой вектор-функции: 1) для любого $\mu \in M$ справедливы неравенства $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$. Другое свойство вытекает из того, что матричнозначная функция A ограничена на временно́й полуоси: 2) вектор-функция $f(\cdot)$ ограничена на M. Например, $|\Lambda(\mu; A, Q)| \leqslant n \sup\{\|A(t)\| \,|\, t \in \mathbb{R}_+\}$ для каждого $\mu \in M$. Прежде чем привести третье свойство, напомним, что функция $g \colon M \to \mathbb{R}$ называется [4, с. 224] функцией класса $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}\big([r, +\infty)\big)$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M. Как следует из работы [5], в которой получено полное описание спектров показателей Ляпунова общих параметрических семейств линейных дифференциальных систем, равномерно зависящих от параметра на временно́й полуоси, имеет место свойство 3): компоненты $f_k(\cdot)$ вектор-функции $f(\cdot)$ принадлежат классу $(^*, G_\delta)$.

Теорема 1. *Для каждых $n \geqslant 2$, метрического пространства M и вектор-функции $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} \colon M \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет свойствам 1) – 3), существуют такие система $A \in \mathcal{M}_n$ и матричнозначная функция $Q \in E_n$, что для показателей Ляпунова $\lambda_k(\cdot)$ семейства (2) при всех $k = \overline{1, n}$ и $\mu \in M$ справедливы равенства $\lambda_k(\mu) = f_k(\mu)$.*

Теорема 2. *Для каждых $n \geqslant 2$, метрического пространства M и вектор-функции $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} \colon M \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет свойствам 1) – 3), существуют такие система $A \in \mathcal{P}_n$ и матричнозначная функция $Q \in Z_n$, что для показателей Ляпунова $\lambda_k(\cdot)$ семейства (2) при всех $k = \overline{1, n}$ и $\mu \in M$ справедливы равенства $\lambda_k(\mu) = f_k(\mu)$.*

Таким образом, из сказанного выше вытекает, что классы $P_n(M)$ и $V_n(M)$ совпадают между собой, а их полное описание содержит

Теорема 3. *Для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M вектор-функция $(f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} \colon M \to \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда принадлежит классу $P_n(M)$ (классу $V_n(M)$), когда она удовлетворяет свойствам 1) – 3). Для каждого метрического пространства M класс $P_1(M)$ (класс $V_1(M)$) совпадает с классом постоянных функций $M \to \mathbb{R}$.*

Литература

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. — М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr., **32**:1 (1930), 703–728.

3. *Виноград Р.Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика, **17**:5 (1953), 645–650.

4. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.–Л.: ОНТИ, 1937.

5. *Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В.* Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения, **54**:12 (2018), 1579– 1588.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(N)}$

С.И. Безродных

sbezrodnykh@mail.ru

УДК 517.5

Рассматривается проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ — обобщенной гипергеометрической функции N переменных. При произвольном N указан полный набор формул аналитического продолжения этой функции за границу единичного поликруга, где она первоначально определена в виде N–кратного гипергеометрического ряда. Такие формулы представляют функцию $F_D^{(N)}$ в подходящих подобластях $\mathbb{C}^N$ в виде других обобщенных гипергеометрических рядов, являющихся решениями той же системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет и $F_D^{(N)}$. Обсуждаются некоторые приложения.

Ключевые слова: гипергеометрические функции многих переменных, аналитическое продолжение, конформное отображение

Analytic continuation of the Lauricella hypergeometric function $F_D^{(N)}$

The problem of analytic continuation is considered for the Lauricella function $F_D^{(N)}$, which is a generalized hypergeometric function of N complex variables. For an arbitrary N, a complete set formulae is given for its analytic continuation outside the unite polydisk, where the function is defined originally as an N-variate hypergeometric series. Such formulae represent $F_D^{(N)}$ in suitable subdomains of $\mathbb{C}^N$ in terms of other generalized hypergeometric series, which satisfy the same system of partial differential equations as $F_D^{(N)}$. Some applications are discussed.

Keywords: multiple hypergeometric functions, analytic continuation, conformal mapping

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-00750).

Безродных Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН (Москва, Россия); Sergey Bezrodnykh (Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia)

Рассматриваемая в докладе функция $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b,\, c;\, \mathbf{z})$ была введена Дж. Лауричеллой [1] (см. также [2]) в качестве одного из наиболее естественных обобщений гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$ на случай N комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и комплексных параметров $(a_1, \ldots, a_N) =: \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, b и c. Определением функции $F_D^{(N)}$, служит сходящийся в единичном поликруге $\mathbb{U}^N := \left\{ \mathbf{z}\colon |z_j| < 1,\, j = \overline{1, N} \right\}$ N–кратный гипергеометрический ряд

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b,\, c;\, \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \cdots k_N!}\, z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}\,; \qquad (2.1)$$

суммирование в (2.1) ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, N$, для которого $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$. Символ Похгаммера $(a)_m := \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$; при неотрицательных m он равен $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1)$. В (2.1) предполагается, что $c \notin \mathbb{Z}^-$. Функция $F_D^{(N)}$ удовлетворяет следующей системе из N линейных уравнений с частными производными, см. [1], [2]:

$$z_j(1-z_j)\frac{\partial^2 u}{\partial {z_j}^2} + (1-z_j)\sum\nolimits'_{k=1}{}^{N} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} + \\ + \Big[c - (1 + a_j + b) z_j\Big]\frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum\nolimits'_{k=1}{}^{N} z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - \\ - a_j b\, u = 0, \qquad j = \overline{1, N}; \quad (2.2)$$

здесь "штрих" над суммой означает, что суммирование ведется по $k \neq j$; параметры $\mathbf{a}$, b и c входят в выражения для коэффициентов уравнений. Известно [1], [2], что общее решение системы (2.2) зависит лишь от $(N+1)$-й произвольной комплексной постоянной, таким образом, она является переопределенной. Особым множеством $\mathcal{M}$ этой системы является объединение гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \left\{ \mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau \right\}$, где $\tau \in \mathcal{S} := \{0, 1, \infty\}$, и гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,\,l} := \{ \mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l \}$; здесь $j,\, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$; расширенное пространство $\overline{\mathbb{C}}^N$ определяется как $\overline{\mathbb{C}}^N = \overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}}$.

Центральным нерешенным вопросом для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ оставалась *проблема ее аналитического продолжения*. Эта проблема заключающается в том, чтобы вне поликруга $\mathbb{U}^N$ указать представления вида

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c;\, \mathbf{z}) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \lambda_j\, u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N, \qquad (2.3)$$

где функции $u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ — обобщенные гипергеометрические ряды (отличные от исходной функции), которые, также как и $F_D^{(N)}$, удовлетворяют системе (2.2), а коэффициенты λ_j зависят от параметров $a_1, \ldots, a_N$, b, c и не обращаются в нуль одновременно. Представления вида (2.3) называют *формулами аналитического продолжения*. Отметим, что в правой части (2.3) фигурируют $(N+1)$ слагаемых, поскольку именно такое число линейно независимых решений имеет система (2.2). Эти формулы являются прямым обобщением соответствующих представлений [3] для функции Гаусса.

Доклад посвящен результатам работы [4], где при произвольном числе N переменных функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ представлен набор формул аналитического продолжения (2.3), области сходимости которых в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$ (за исключением некоторых гиперплоскостей). К настоящему моменту были известны частные результаты, соответствующие случаям 2-х и 3-х переменных функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, см. [2]. В докладе также дано приложение полученных формул аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ к эффективному построению конформного отображения многоугольных областей.

В качестве примера приведем формулы (см. [4]), позволяющие аналитически продолжить $F_D^{(N)}$ в область больши́х по модулю переменных, точнее в область $\mathbb{V}^N := \left\{ \mathbf{z} : |z_1| > \cdots > |z_N| > 1;\ |\arg(-z_j)| < \pi, j = \overline{1,N} \right\}$, а также в области вида $\mathbb{V}_\sigma^N := \left\{ \mathbf{z} : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^N \right\}$, где $\sigma(\mathbf{z})$ — результат действия некоторого элемента σ группы перестановок S_N множества из N элементов. Прежде чем перейти к такому продолжению, определим величины

$$\mathbf{h}_j := (a_1, \ldots, a_{j-1}, 1-c+b, a_{j+1}, \ldots a_N),\ \ |\mathbf{a}_{1,j}| := \sum\nolimits_{k=1}^{j} a_k,\ \ |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|,$$

$$\mathbf{z}^{-1} := \Big(\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_N}\Big), \qquad \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}) := \Big(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \frac{z_j}{z_{j+1}}, \ldots, \frac{z_j}{z_N}\Big),$$

и запишем следующий обобщенный гипергеометрический ряд [2]:

$$G^{(N,\,j)}\big(\mathbf{a};\, b;\, c;\, \mathbf{z}\big) := \sum\nolimits_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_j|}\,(a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}_j|}\,k_1! \cdots k_N!}\, z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}\,, \tag{2.4}$$

где выражение $|\mathbf{k}_j|$ для мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ означает

$$|\mathbf{k}_j| := \sum\nolimits_{s=\,j}^{N} k_s - \sum\nolimits_{s=1}^{j-1} k_s,$$

а параметр j может принимать значения $1, \ldots, N+1$. Областью сходимости ряда (2.4) при всех $j = \overline{1, N+1}$ является единичный поликруг $\mathbb{U}^N$. Справедливо следующее утверждение, позволяющее продолжить $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{V}^N$.

Теорема 1. *Если ни одно из чисел $b - \sum_{l=1}^{j} a_l$, $j = \overline{1,N}$, не является целым, то аналитическое продолжение ряда (2.1) в область $\mathbb{V}^N$ дается формулой*

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) \;=\; \sum\nolimits_{j=0}^{N} B_j \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}), \tag{2.5}$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(\infty)}$, $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) = \Big(\prod\nolimits_{l=1}^{N}(-z_l)^{-a_l}\Big) F_D^{(N)}\big(\mathbf{a};\, 1+|\mathbf{a}|-c,\, 1+|\mathbf{a}|-b;\, \mathbf{z}^{-1}\big), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(\infty)}(\mathbf{a};\, b,\, c;\, \mathbf{z}) = (-z_j)^{|\mathbf{a}_{1,j-1}|-b}\Big(\prod\nolimits_{l=1}^{j-1}(-z_l)^{-a_l}\Big) \times \\ \times\ G^{(N,j)}\Big(\mathbf{h}_j; b-|\mathbf{a}_{1,j-1}|, 1-|\mathbf{a}_{1,j}|+b; \mathcal{Y}_j(\mathbf{z}^{-1})\Big), \qquad j = \overline{1,N}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

в (2.6), (2.7) под $F_D^{(N)}$ *и* $G^{(N,j)}$ *понимаются ряды (2.1) и (2.4),* B_j *имеют вид*

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma\big(b-|\mathbf{a}|\big)}{\Gamma(b)\,\Gamma\big(c-|\mathbf{a}|\big)},$$
$$B_j = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma\big(b-|\mathbf{a}_{1,j-1}|\big)\Gamma\big(|\mathbf{a}_{1,j}|-b\big)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j=\overline{1,N}. \tag{2.8}$$

Функции (2.6), (2.7) образуют полную систему линейно независимых решений системы (2.2) в области $\mathbb{V}^N$.

Аналитическое продолжения функции $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{V}_\sigma^N$, $\sigma \in S^N$, дается формулой (2.5) с заменой в ее правой части $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$. При этом функции $\mathcal{U}_j^{(\infty)}(\sigma(\mathbf{a});\, b,\, c;\, \sigma(\mathbf{z}))$, $j=\overline{0,N}$, образуют полный набор линейно независимых решений системы (2.2) в области $\mathbb{V}_\sigma^N$.

В заключение отметим, что развитый в работе подход может быть применен для аналитического продолжения, по–видимому, достаточно широкого класса гипергеометрических функций многих переменных, в том числе, еще трех функций $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ и $F_C^{(N)}$, введенных Дж. Лауричеллой [1], [2].

Литература

1. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rendiconti Circ. math. Palermo, **7** (1893), 111-158.

2. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. — New York: J. Willey & Sons inc, 1976.

3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т.2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

4. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук, **73**:6 (2018), 3-94.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

А.В. Болтачев, А.Ю. Савин

boltachevandrew@gmail.com, antonsavin@mail.ru

УДК 517.9

Исследуются краевые задачи для волнового уравнения с данными на всей границе. Даны условия, при выполнении которых краевая задача является фредгольмовой в подходящих функциональных пространствах. Эти условия существенным образом зависят от структуры траекторий геодезического потока.

Ключевые слова: волновое уравнение, фредгольмов оператор, эллиптичность, геодезический поток

On a class of Fredholm boundary value problems for the wave equation with conditions on the entire boundary

We study boundary value problems for the wave equation with conditions on the entire boundary. We obtain conditions, which guarantee Fredholm property of the problem in suitable spaces of functions. These conditions depend on the structure of trajectories of the geodesic flow in an essential way.

Keywords: wave equation, Fredholm operator, ellipticity, geodesic flow

Рассматривается класс краевых задач для волнового уравнения с данными на всей границе. Исследование задач такого типа имеет давнюю историю (см. работы Бургина и Дюффина, Джона, Соболева, Арнольда и др.) Вместе с тем, задачи такого вида возникают и в приложениях (например, исследование задачи Дирихле играет важную роль при решении задачи о равновесии вращающейся жидкости).

Мы исследуем следующую краевую задачу для волнового уравнения с данными на всей границе. Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие, Δ — неотрицательный оператор Лапласа-Бельтрами, ассоциированный с римановой метрикой на M. Фиксируем некоторое положительное число τ. На цилиндре $[0,\tau]\times M$ с координатами (t,x) рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = g_1, \\ \left(Au + B\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=\tau} = g_2, \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00373, 19-01-00574) и DFG.

Болтачев Андрей Владимирович, студент, РУДН (Москва, Россия); Andrei Boltachev (RUDN University, Moscow, Russia)

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Anton Savin (RUDN University, Moscow, Russia)

где g_1, g_2 — известные функции на M, f — функция на $[0,\tau]\times M$, а A и B — (псевдо)дифференциальные операторы на M порядков 1 и 0 соответственно.

В случае одной пространственной переменной (т.е. $M=\mathbb{S}^1$) задача (1) была исследована Антоневичем. В настоящей работе мы исследуем общую ситуацию. Задачу (1) можно также интерпретировать как обратную задачу для волнового уравнения: задано начальное отклонение и необходимо найти начальную скорость по заданной линейной комбинации отклонения и скорости в момент времени $t=\tau$.

Основной результат работы состоит в указании условий на коэффициенты задачи (1), при выполнении которых данная задача является фредгольмовой в подходящих функциональных пространствах. Оказывается, что эти условия существенным образом связаны со свойствами динамики геодезического потока на косферическом расслоении многообразия.

Опишем кратко план решения задачи (1). Сначала мы проводим редукцию задачи на границу, пользуясь известными результатами об однозначной разрешимости задачи Коши. Какой же оператор получается в результате сведения задачи (1) на границу? Оказывается, что на границе получается оператор, равный линейной комбинации операторов $e^{\pm i\tau\sqrt{\Delta}}$ с некоторыми псевдодифференциальными операторами, выступающими в качестве коэффициентов. Надо отметить, что операторы $e^{\pm i\tau\sqrt{\Delta}}$ являются квантованными каноническими преобразованиями (см. работы Фока, Маслова, Хермандера) и ассоциированы с каноническим преобразованием кокасательного расслоения многообразия — геодезическим потоком. Таким образом, мы имеем дело с оператором, который ассоциирован с группой, порожденной степенями квантованного канонического преобразования. Фредгольмовость операторов такого вида была недавно исследована в работах [1,2]. В цитированных работах было показано, что в этой ситуации работает подход, связанный с локализацией, применением теории C^*-алгебр и их скрещенных произведений (см. работы Антоневича и его школы). Применяя результаты указанных работ, мы получаем условия фредгольмовости исходной задачи.

Литература

1. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю., Шроэ Э.,* Эллиптические операторы, ассоциированные с группами квантованных канонических преобразований // УМН, **73**:3 (2018), 179-180.

2. *Savin A., Schrohe E., Sternin B.* Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations // Bull. Sci. Math., (2019), (in print). arXiv:1612.02981.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИЙ К ОДНОМУ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Букжалёв
bukzhalev@mail.ru

УДК 517.928.4

На примере задачи Коши для одного нелинейного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения 2-го порядка продемонстрирована возможность построения приближений, сходящихся к точному решению как в обычном, так и в асимптотическом смыслах. Построение приближений и доказательство их сходимости основаны на идее полуобращения операторов и принципе сжимающих отображений.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций

Application of the method of asymptotic iteration to a certain second-order, singularly perturbed nonlinear differential equation

By an example of the Cauchy problem for a certain second-order, nonlinear singularly perturbed differential equation, the possibility of constructing approximations that converge to an exact solution in both ordinary and asymptotic senses is demonstrated. The construction of approximations and the proof of their convergence are based on the idea of the semi-inversion of operators and the principle of contraction mappings.

Keywords: singular perturbations, Banach contraction principle, method of asymptotic iterations

Рассмотрим задачу (штрих — производная по первому аргументу):

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\, y''(x;\varepsilon) = -\,[3+2\,y(x;\varepsilon)]\,\varepsilon\, y'(x;\varepsilon) - 2\,a(x)\,[y(x;\varepsilon)+y^2(x;\varepsilon)],\\ y(0;\varepsilon)=1, \quad y'(0;\varepsilon)=-1/\varepsilon,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in [0,1]$, $a \in C^1[0,1]$, $a > 0$ на $[0,1]$ и $a(0) = 1$.

Если бы $a \in C^\infty[0,1]$, то метод пограничных функций (см. [1]), позволил бы построить асимптотическое разложение решения задачи (1):

$$y(x;\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\,[\bar{y}_i(x) + \Pi_i(x/\varepsilon)].$$

Однако поскольку $a \in C^1[0,1]$, то, вообще говоря, можно определить только две пограничные функции — Π_0 и Π_1 (при этом возможность определения всех $\bar{y}_i$ не связана со степенью гладкости a, и $y_i(x) \equiv 0$, если $a \neq 0$ на $[0,1]$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00424).

Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Bukzhalev Evgeny (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Функция Π_0 удовлетворяет нелинейной автономной начальной задаче:

$$\Pi_0''(\xi;\varepsilon) = -[3+2\,\Pi_0(\xi;\varepsilon)]\,\Pi_0'(\xi;\varepsilon) - 2\,a(0)\,[\Pi_0(\xi;\varepsilon)+\Pi_0^2(\xi;\varepsilon)],$$
$$\Pi_0(0)=1, \quad \Pi_0'(0)=-1.$$

Учитывая равенство $a(0)=1$, несложно убедиться, что $\Pi_0(\xi)=e^{-\xi}$.

Для функции Π_1 получается линейная неавтономная начальная задача:

$$\Pi_1''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3+2\,e^{-\xi}\right\}\Pi_1'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(0)+[2\,a(0)-1]\,e^{-\xi}\right\}\Pi_1(\xi;\varepsilon) - \\ -2\,a'(0)\,\xi\,(e^{-\xi}+e^{-2\xi}), \quad \Pi_1(0)=\Pi_1'(0)=0, \tag{2}$$

решение которой может быть записано с помощью функции Коши $\widetilde{K}$:

$$\Pi_1(\xi) = -2\,a'(0)\int_0^\xi \widetilde{K}(\xi,\zeta)\,\zeta\,(e^{-\zeta}+e^{-2\zeta})\,d\zeta,$$

где $\widetilde{K}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\,e^{-\xi+\zeta}-\frac{1}{2}\,e^{-\xi+\zeta+2e^{-\xi}-2e^{-\zeta}}$.

Дальнейшее исследование задачи (1) проведём по схеме, предложенной в [2] для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения первого порядка (добавив необходимые усложнения). Начнём с замены переменных:

$$x=\varepsilon\,\xi, \quad y(x;\varepsilon)=\Pi_0(\xi)+\varepsilon\,z(\xi;\varepsilon)=e^{-\xi}+\varepsilon\,z(\xi;\varepsilon), \quad \xi\in[0,1/\varepsilon].$$

Для новой функции $z(\cdot;\varepsilon)$ имеем:

$$z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3+2\,e^{-\xi}\right\}z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(\varepsilon\,\xi)+[2\,a(\varepsilon\,\xi)-1]\,e^{-\xi}\right\}z(\xi;\varepsilon) + \\ +f(z'(\xi;\varepsilon),z(\xi;\varepsilon),\xi;\varepsilon), \quad z(0)=z'(0)=0, \tag{3}$$

где $f(v,z,\xi;\varepsilon)=2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi)-a(0)]\,(e^{-\xi}+e^{-2\xi})-2\,\varepsilon\,z\,v-2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$.

Задача (3) эквивалента интегральному уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon)=\int_0^\xi K(\xi,\zeta;\varepsilon)\,f(z'(\zeta;\varepsilon),z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)\,d\zeta =: A(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon),z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \tag{4}$$

где $K(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ — функция Коши дифференциального уравнения:

$$Z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3+2\,e^{-\xi}\right\}Z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(\varepsilon\,\xi)+[2\,a(\varepsilon\,\xi)-1]\,e^{-\xi}\right\}Z(\xi;\varepsilon). \tag{5}$$

Сведение задачи (3) к уравнению вида (4) — частный случай распространённого приёма, используемого для доказательства теорем существования и единственности и обоснования асимптотических разложений решений сингулярно возмущённых уравнений (см. [1]). Переход к уравнению (4) позволяет построить итерационную последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, сходящуюся к решению задачи (3): $z_n(\xi;\varepsilon):=A(\varepsilon)(z_{n-1}(\cdot;\varepsilon),z_{n-1}'(\cdot;\varepsilon))(\xi)$, $n\in\mathbb{N}$. Данный способ приближённого решения задачи (3) (а вместе с тем и задачи (1)) обладает тем недостатком, что для его реализации необходима функция Коши уравнения (5), не выражающаяся в элементарных функциях. Для устранения этого недостатка преобразуем дифференциальное уравнение для $z(\cdot;\varepsilon)$:

$$z''(\xi;\varepsilon) = -\left\{3+2\,e^{-\xi}\right\}z'(\xi;\varepsilon) - 2\left\{a(0)+[2\,a(0)-1]\,e^{-\xi}\right\}z(\xi;\varepsilon) + \\ +\tilde{f}(z'(\xi;\varepsilon),z(\xi;\varepsilon),\xi;\varepsilon), \quad z(0)=z'(0)=0, \tag{6}$$

где $\tilde f(v,z,\xi;\varepsilon) = 2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,[e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \varepsilon\,(1 + 2\,e^{-\xi})\,z] - 2\,\varepsilon\,z\,v - 2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$.

Задача (6) эквивалента интегральному уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon) = \int_0^\xi \widetilde K(\xi,\zeta)\,\tilde f(z'(\zeta;\varepsilon), z(\zeta;\varepsilon), \zeta;\varepsilon)\,d\zeta =: \tilde A(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi)$$

с той же функцией $\widetilde K$, что и в формуле для Π_1. Заметим, что $\tilde f$ отличается от f дополнительным слагаемым $2\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,(1 + 2\,e^{-\xi})\,z$, из-за которого итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью оператора $\tilde A(\varepsilon)$, вообще говоря, расходится при больших значениях ξ. Для получения сходящихся приближений ещё раз преобразуем дифференциальное уравнение для $z(\cdot;\varepsilon)$, добавив в него новый параметр $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} z''(\xi;\varepsilon) = {} & -3\,z'(\xi;\varepsilon) - 2\,a(x)\,z(\xi;\varepsilon) + \bar g(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon) - \\ & + \bar f(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\varepsilon), \quad z(0) = z'(0) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\bar f(v,z,\xi;x,\varepsilon) = 2\,[a(x) - 2(\varepsilon\,\xi)]\,z - 2\,\varepsilon^{-1}\,[a(\varepsilon\,\xi) - a(0)]\,(e^{-\xi} + e^{-2\xi}) - 2\,\varepsilon\,z\,v - 2\,\varepsilon\,a(\varepsilon\,\xi)\,z^2$, $\bar g(v,z,\xi;\varepsilon) = -2\,e^{-\xi}\,v - 2\,[2\,a(\varepsilon\,\xi) - 1]\,e^{-\xi} z$.

Задача (7) при каждом $x \in [0,1]$ эквивалента интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} z(\xi;x,\varepsilon) = {} & \int_0^\xi \bar K(\xi,\zeta;x)\,\bar h(z'(\zeta;x,\varepsilon), z(\zeta;x,\varepsilon), \zeta;x,\varepsilon)\,d\zeta = \\ & =: \bar A(x,\varepsilon)(z(\cdot;x,\varepsilon), z'(\cdot;x,\varepsilon))(\xi), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar h(v,z,\zeta;x,\varepsilon) = \bar g(v,z,\zeta;\varepsilon) + \bar f(v,z,\zeta;x,\varepsilon)$, $\bar K(\cdot,\cdot;x)$ — функция Коши дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Z''(\xi;x) = -3\,Z'(\xi;x) - 2\,a(x)\,Z(\xi;x).$$

Можно доказать, что если в уравнении (8) на место x подставить любую функцию ξ и ε со значениями на отрезке $[0,1]$, то получится уравнение, равносильное задаче (3). Полагая $x = \varepsilon\,\xi$, приходим к уравнению:

$$z(\xi;\varepsilon) = \bar A(\varepsilon\,\xi,\,\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi).$$

Заметим, что из-за слагаемого $\bar g$, входящего в $\bar h$, итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью оператора $\bar A(\varepsilon\,\xi,\,\varepsilon)$, вообще говоря, расходится при малых значениях ξ. Для устранения последнего препятствия на пути построения сходящихся приближений положим

$$\int_0^\xi \widetilde K'(\xi,\zeta)\,\tilde f(z'(\zeta;\varepsilon), z(\zeta;\varepsilon), \zeta;\varepsilon)\,d\zeta = \tilde A'(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

$$\bar g(\tilde A'(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \tilde A(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi), \xi;\varepsilon) = \hat g(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

$$\hat g(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi) + \bar f(z'(\xi;\varepsilon), z(\xi;\varepsilon), \xi;\,\varepsilon\,\xi,\,\varepsilon) = \hat h(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

и заменим в (8) функцию $\bar h$ на оператор $\hat h$ (сохранив при этом подстановку $x = \varepsilon\,\xi$ в ядре $K(\cdot,\cdot;x)$):

$$z(\xi;\varepsilon) = \int_0^\xi \bar K(\xi,\zeta;\,\varepsilon\,\xi)\,\hat h(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\zeta)\,d\zeta =: \hat A(\varepsilon)(z(\cdot;\varepsilon), z'(\cdot;\varepsilon))(\xi),$$

Можно доказать, что, во-первых, при всех достаточно малых положительных ε итерационная последовательность $\{z_n(\cdot;\varepsilon)\}$, построенная с помощью $\hat{A}(\varepsilon)$, сходится к решению задачи (3) по норме $C[0,1/\varepsilon]$: $\|z(\cdot,\varepsilon) - z_n(\cdot,\varepsilon)\| \to 0$ при $n \to \infty$, и что, во-вторых, $\|z(\cdot,\varepsilon) - z_n(\cdot,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

2. *Букжалёв Е.Е.* Об одном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущённого нелинейного дифференциального уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения, **54**:2 (2018), 155-167.

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

В.Ф. Бутузов

butuzov@phys.msu.ru

УДК 517.928.4, 517.956.8

На примере краевой задачи для сингулярно возмущенной частично диссипативной системы уравнений показаны особенности асимптотики (по малому параметру) решения, которые возникают в случае кратного корня вырожденного уравнения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные задачи с кратным корнем вырожденного уравнения, пограничный слой

On singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation

On the example of a boundary value problem for a singularly perturbed partially dissipative system of equations, the features of asymptotics (by a small parameter) of the solution arising in the case of a multiple root of the degenerate equation are shown.

Keywords: Singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation, boundary layer

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00424).

Бутузов Валентин Федорович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valentin Butuzov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения и системы уравнений активно исследуются, начиная с середины прошлого века после появления основополагающих работ А.Н. Тихонова [1], Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко (см. [2, 3]), М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [4].

Для решений многих сингулярно возмущенных начальных и краевых задач характерной особенностью является наличие пограничных и (или) внутренних переходных слоев, где происходит быстрое изменение решения. Одним из эффективных методов построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с пограничными (внутренними) слоями является метод, разработанный А.Б. Васильевой [5] и получивший дальнейшее развитие в ее работах, работах ее учеников и других ученых. Этот метод успешно работает в тех случаях, когда соответствующее вырожденное уравнение имеет простой (т.е. однократный) устойчивый корень. При этом условии быстрое изменение решения в пограничном (внутреннем) слое имеет экспоненциальный характер.

В последнее время ведется активное изучение сингулярно возмущенных задач, в которых вырожденное уравнение имеет двукратный или трехкратный корень (см., например, [6 - 9]). Оказалось, что во многих таких задачах поведение решения в пограничном (внутреннем) слое качественно отличается от поведения в случае простого корня вырожденного уравнения. Пограничный (внутренний) слой становится многозонным с различным поведением решения в разных зонах. В частности, в случае трехзонного пограничного слоя пограничные функции в первой зоне убывают степенным образом с ростом погранслойной переменной, затем следует вторая (переходная) зона, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания пограничных функций, и, наконец, в третьей зоне возникает погранслойная переменная с другим масштабом и с ее ростом пограничные функции убывают экспоненциально.

Описанное поведение решения делает неприменимым классический алгоритм А.Б. Васильевой. Разработан новый алгоритм, позволяющий строить единые пограничные функции сразу для всех зон пограничного слоя, что отличает новый подход от известного метода согласования (сращивания) асимптотических разложений, построенных раздельно в разных зонах. Новый класс задач потребовал также дальнейшего развития методов обоснования построенных асимптотик. Основным методом у нас стал асимптотический метод дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что нижнее и верхнее решения задачи конструируются на основе предварительно построенной формальной асимптотики.

Все эти особенности будут показаны в докладе на примере краевой задачи Дирихле для стационарной частично диссипативной системы двух уравнений.

$$\varepsilon^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - w(x)\frac{du}{dx} \right) = F(u, v, x, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{dv}{dx} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0; 1),$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, а вырожденное уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет двукратный корень $u = \varphi(v, x)$.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Матем. сб., **31(73)**:3 (1952), 575-586.

2. *Понтрягин Л.С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат, **21**:5 (1957), 605-626.

3. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — Москва: Наука, 1975.

4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, **12**:5 (1957), 3-122.

5. *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Успехи мат. наук, **18**:3 (1963), 15-86.

6. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки, **94**:1 (2013), 68-80.

7. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально - краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения, **49**:10 (2013), 1295-1307.

8. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сб., **207**:8 (2016), 73-100.

9. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // ЖВМиМФ, **58**:6 (2016), 961-987.

ДЕСКРИПТИВНЫЙ ТИП МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А.Н. Ветохин

anveto27@yandex.ru

УДК 517.93

Для семейства динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, получено описание множества точек полунепрерывности снизу и множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии его систем, рассматриваемой как функция параметра.

Ключевые слова: топологическая энтропия

Ветохин Александр Николаевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, проф. каф. ФН-1 "Высшая математика"МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Alexander Vetokhin (Lomonosov Moscow State University, Bauman Moscow State Technical University Moscow, Russia)

Descriptive type of sets of lower semicontinuity points and upper semicontinuity points of topological entropy with continuous dependence on a parameter

For a family of dynamical systems continuously dependent on the parameter, a description of the set of lower semi-continuity points and the set of upper semi-continuity points of the topological entropy of its systems, considered as a function of the parameter, is obtained.

Keywords: topological entropy

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N},\ x, y \in X.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n)-покрытия. *Топологической энтропией* динамической системы, порожденной непрерывным отображением f, называется величина [1, с. 120]

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X, \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \longmapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{2}$$

В работе [2] доказано, что в случае, когда $\mathcal{M}$ полно, для топологической энтропии семейства отображений (1) множество точек пространства $\mathcal{M}$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $\mathcal{M}$ множество типа G_δ.

Возникает естественный вопрос: что представляют собой множество точек полунепрерывности снизу и множество точек полунепрерывности сверху функции (2) с точки зрения дескриптивной теории множеств?

В работе [2] была получена формула для топологической энтропии, которая позволяет установить

Теорема 1. *Для произвольного пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции* (2) *является множеством типа G_δ, а множество ее точек полунепрерывности сверху — множеством типа $F_{\sigma\delta}$.*

Из результата работы [2] получаем следующую

Теорема 2. *В случае полноты пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции* (2) *является всюду плотным множеством типа G_δ.*

Через $\mathcal{B}$ обозначим множество Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$. Тогда для любого всюду плотного множества $\mathcal{G}$ типа G_δ метрического пространства $\mathcal{M}$ существует отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции (2) совпадает с множеством $\mathcal{G}$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$, тогда найдется отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции (2) является пустым.*

Литература

1. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.

2. *Ветохин А. Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения, **53**:6 (2017), 448–453.

АСИМПТОТИКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБЛАСТЯХ С УЗКОЙ ЩЕЛЬЮ

В.И. Власов

vlasov@ccas.ru

УДК 517.632.4

Изложен аналитико-численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоских областях, имеющих узкую щель с параллельными сторонами и дном произвольной формы. Метод обеспечивает эффективное вычисление решения и его производных вплоть до контура щели и позволяет находить коэффициенты интенсивности в угловых точках дна. С его помощью найдена асимптотика решения в области, его градиента на дне щели и асимптотика коэффициентов интенсивности при стремлении ширины щели к нулю. Для дна в виде дуги окружности или ломаной коэффициенты этих асимптотик найдены в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Пуассона, области с узкими щелями, коэффициенты интенсивности, асимптотики при стремлении ширины щели к нулю.

Власов Владимир Иванович, д.ф.-м.н., гл. научн. сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Информатика и Управление" РАН (Москва, Россия); Vlsdimir Vlasov (Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia)

Asymptotics and analytic–numerical method for solving the Poisson equation in domains with narrow slits

An analytic–numerical method is presented for solving the Dirichlet problem for Poisson's equation in planar domains containing a narrow slit with parallel sides and a bottom of arbitrary shape. The method provides effective calculation of the solution and its derivatives up to the contour of a slit, as well as computation of intensity factors at angle points of the bottom. By means of the method we obtained asymptotics of the solution in the domain, asymptotics of its gradient at the bottom of the slit and asymptotics of the intensity factors as the width of the slit tends to zero. Coefficients of these asymptotics have been obtaind in explicit form, when bottom of the slit is a circular arc or a polygonal line.

Keywords: the Dirichlet problems, Poisson's equation, domains with narrow slits, intensity factors, asymptotics as the width of the slit tends to zero.

Области с тонкими включениями и узкими щелями относятся к классу сингулярно деформируемых областей [1]-[3]. Краевые задачи в таких областях возникают в ряде проблем механики и физики и вызывают интерес как у математиков, так и у специалистов в соответствующих прикладных областях [4]-[8]. Важными вопросами являются разработка эффективных вычислительных методов для таких задач и исследование асимптотик их решения и его характеристик при сужении ширины щели.

В докладе рассматривается область g_ε, расположенная на комплексной плоскости $z = x + iy$ и имеющая узкую щель ширины 2ε с параллельными сторонами и дном произвольной формы. Чтобы определить ее, введем:

1) полубесконечную область G_ε с границей, состоящей из лучей $\gamma_\varepsilon^\pm := \{z : x \in [-\infty, 0], y = \pm\varepsilon\}$ и непересекающейся с ними жордановой дуги σ_ε с концевыми точками $\pm i\varepsilon$, играющей роль дна щели, причем $G_\varepsilon = \{z : \varepsilon z \in G_1\}$, и

2) жорданову область G, содержащую начало координат $z = 0$, граница которой ∂G (спрямляемая кусочно–гладкая кривая без точек заострения) пересекается с ∂G_ε только в точках A и D, расположенных соответственно на лучах γ_ε^+ и γ_ε^-.

Тогда область g_ε определяется как пересечение $G \cap G_\varepsilon$. Ее граница ∂g_ε состоит из двух звеньев, соединяющихся в точках A и D: первым звеном является контур щели $\gamma_\varepsilon \subset \partial G_\varepsilon$, содержащийся в G, а вторым звеном — дуга $\Gamma \subset \partial G$. Заменим, что область G_ε является расширением области g_ε через дугу Γ. При $\varepsilon \to 0$ первая из этих областей превращается в $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{x \in [-\infty, 0], y = 0\}$, а вторая — в $g_0 = G \setminus \{x \in [-\infty, 0], y = 0\}$. Бесконечно удаленную точку границы ∂G_ε обозначим через M.

Пусть в области g_ε задана задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U_\varepsilon(z) = \mathcal{P}(z),\ z \in g_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(z) = 0,\ z \in \gamma_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(z) = h(z),\ z \in \Gamma, \qquad (1)$$

где $\mathcal{P}(z)$ — полином от x и y с вещественными коэффициентами, а функция $h \in L_2(\Gamma)$. Ее решение $U_\varepsilon \in C^2(g_\varepsilon) \cap C(g_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon)$ удовлетворяет граничному

условию на Γ в смысле L_2 [9]. Решение задачи (1) существует и единственно в соответствующем пространстве Харди [9]. В дальнейшем изложении ограничимся случаем, когда полином в правой части уравнения (1) равен константе, $\mathcal{P}(z) = -a$; случай общего полинома изучается аналогично.

Для построения решения задачи (1) запишем его в виде суммы $U_\varepsilon(z) = Q_\varepsilon(z) + \Psi_\varepsilon(z)$ решения $Q_\varepsilon \in C^2(G_\varepsilon) \cap C(\overline{G}_\varepsilon \cap M)$ уравнения Пуассона в G_ε,

$$\Delta Q_\varepsilon = -a \text{ in } G_\varepsilon;\ Q_\varepsilon = 0 \text{ on } \partial G_\varepsilon \backslash M;\ Q_\varepsilon(z) = 0.5\, a(\varepsilon^2 - y^2) + o(1),\ z \to M, \quad (2)$$

и решения уравнения Лапласа в g_ε,

$$\Delta \Psi_\varepsilon(z) = -a,\ z \in g_\varepsilon; \quad \Psi_\varepsilon(z) = 0,\ z \in \gamma_\varepsilon; \quad \Psi_\varepsilon(z) = h(z) - Q_\varepsilon(z),\ z \in \Gamma. \quad (3)$$

Решение задач (2) и (3) строится с использованием конформного отображения $\zeta = \mathcal{F}_\varepsilon(z)$ области G_ε на $\mathbb{H} := \{y > 0\}$, подчиненного нормировке $\mathcal{F}_\varepsilon(N_\varepsilon) = 0$, $\mathcal{F}_\varepsilon(M) = \infty$, $\mathcal{F}_\varepsilon(z) \sim i\sqrt{z}$, где $N_\varepsilon = \varepsilon N_1$ —точка на дне щели σ_ε. Для ряда форм дна σ_ε (в том числе в виде дуги окружности или отрезка прямой) отображение $\mathcal{F}_\varepsilon$ было получено в явном виде, либо вначале было найдено обратное к нему $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}$ (например, для дна в виде дуги окружности — через гипергеомутрические функции, а для дна в виде ломаной — через интеграл Кристоффеля — Шварца), а затем оно было обращено.

Для общей формы дна использовалось следующее разложение. Пусть $\Phi_\varepsilon(z)$ — конформное отображение области $\mathbb{C} \setminus (\gamma_\varepsilon^+ \cup \gamma_\varepsilon^-)$ на $\mathbb{H}$, отвечающее условиям нормировки, аналогичным приведенным для $\mathcal{F}_\varepsilon$; оно выражается через функцию Ламберта. Тогда для $\mathcal{F}_\varepsilon$ справедливо разложение

$$\mathcal{F}_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z) + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} B_k L_\varepsilon^{k+1} \left[\Phi_\varepsilon(z)\right]^{-k}, \quad (4)$$

сходящееся в $\overline{G}_\varepsilon$, за исключением малой окрестности дна σ_ε. Для некоторых (в том числе упомянутых выше) форм дна получены разложения в окрестности дна, области сходимости которых в совокупности с (4) покрывают всю $\overline{G}_\varepsilon$. В (4) коэффициенты B_k определяются только формой дна и не зависят от ε, а $\Phi_\varepsilon(z) = \sqrt{\varepsilon}\, \Phi_1(\varepsilon^{-1} z)$, $L_\varepsilon = L_1 \varepsilon^{1/2}$, где $L_1 = \max |\Phi_1(\sigma_1)|$.

Решение задачи (2) строится следующим образом. С помощью подстановки $Q_\varepsilon(z) = 0.5\, a \left[\varepsilon^2 - y^2 + \theta_\varepsilon(z)\right]$ (в случае полинома $\mathcal{P}(z)$ общего вида в уравнении (1) — более сложной подстановки) задача (3) сводится к задаче Дирихле для уравнения Лапласа относительно функции $\theta_\varepsilon(z)$ в области G_ε с однородным условием Дирихле на всей ∂G_ε, за исключением дна σ_ε, на котором граничная функция равна $y^2 - \varepsilon^2$. Последняя задача легко решается с помощью отображения $\mathcal{F}_\varepsilon$.

После этого решение задачи (3) строится с помощью метода [9], опирающегося на следующие свойства система функций $\{\Omega_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$:

1) $\Delta \Omega_n(\varepsilon, z) = 0$, $z \in G_\varepsilon$;

2) $\Omega_n(\varepsilon, z) = 0$, $z \in \partial G_\varepsilon$;

3) система $\{\Omega_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$, является полной и минимальной в $L_2(\Gamma)$.

Приближенное решение $\Psi_\varepsilon^K(z)$ задачи (3) строится в виде линейной комбинации первых K функций $\Omega_n(\varepsilon, z)$, коэффициенты которой находятся из условия $||\Psi_\varepsilon^K(z) - h(z); L_2(\Gamma)|| = \min$. Доказано, что $\Psi_\varepsilon^K(z) \to \Psi(\varepsilon, z)$ при $K \to \infty$ на любом компакте внутри G_ε вместе со всеми производными, причем приближенное решение модно дифференцировать и в точках дуги γ_ε соответствующей гладкости. Это позволило дать выскоэффективный вычислительный метод решения задачи (1).

Кроме того, с помощью изложенного метода получена следующая, равномерная внутри g_0, асимптотика решения задачи (1) при сужении щели:

$$U_\varepsilon(z) = U_0(z) - (2\pi)^{-1} A_1(0)\, \Xi_1(z)\, \varepsilon \ln \varepsilon + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0;$$

здесь $A_1(0)$ — коэффициент интенсивности на конце разреза для решения U_0, а функция $\Xi_1(z) = \mathrm{Im}\mathcal{V}(z)$, где $\mathcal{V}$ — конформное отображение области g_0 на $\mathbb{H}$, удовлетворяюшего условию $\mathcal{V}(z) \sim i\, z^{1/2}$, $z \to 0$. Получена также асимптотика градиента в точке N_ε дна щели

$$\mathrm{grad}\, U_\varepsilon(N_\varepsilon) = i\, A_1\,(0)\, \overline{\mathcal{F}_1^{'}\,(N_1)}\, \varepsilon^{\,-1/2} + O(1), \qquad \varepsilon \to 0,$$

где предполагается, что $\mathcal{F}_1^{'}\,(N_1)$ существует. Кроме того, для дна в виде отрезка, образующего со стороной шели угол $\pi\alpha$, установлен вид асимптотики для коэффициента интенсивности в этом угле; главный член асимптотики имеет порядок $1/2 - 1/\alpha$.

Некоторые приведенные результаты были ранее получены в [10].

Литература

1. *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. — Waltham, Massachussetts - Toronto - London: Blaisdell Publ. Co., 1968.

2. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. — Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.

3. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.

4. *Ван–Дайк М.* Методы возмущений в межанике жидкости. — М.: Мир, 1967.

5. *Geer J.F., Keller J.B.* Uniform asymptotic solutions for potential flow around a thin airfoil and the electrostatic potential about a thin conductor // SIAM J. Appl. Math., **26**:3 (1974), 539-553.

6. *Ильин А.М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб., **99**:4 (1976), 514-537.

7. *Федорюк М.В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Известия АН СССР. Сер. матем., **45**:1 (1981), 167-186.

8. *Назаров С.А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

9. *Vlasov V.I.* Multipole method for solving some boundary value problems in complex–shaped domains // Z. Angew. Math. Mech., **76**, suppl. 1 (1996), 279–282.

10. *Власов В.И., Пальцев А.Б.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Ж. выч. мат. и матем. физ., **43**:12 (2003), 1786-1805.

ПРОБЛЕМА НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА С ТРЕНИЕМ В ШАРНИРЕ И ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский

victor.voytitsky@gmail.com, kopachevsky@list.ru

УДК 517.98, 517.955

Изучаются спектральные свойства линейной начально-краевая задачи о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, при учёте сил трения в сферическом шарнире. Доказана дискретность спектра, степенная асимптотика собственных значений и их локализация в полосе, примыкающей к мнимой оси, базисность по Абелю-Лидскому системы корневых элементов.

Ключевые слова: задача Коши, гильбертово пространство, линейный оператор, дискретный спектр, асимптотика собственных значений

Normal motions problem of a pendulum with friction in the hinge and cavity partially filled with an ideal liquid

We study spectral properties of the linear initial-boundary value problem on small motions of a pendulum with cavity partially filled with an ideal liquid, taking into account friction force in the spherical hinge. We prove discreetness of the spectrum, power asymptotics of the eigenvalues and its localization in the strip, Abel-Lidskii basis property of the system of root elements.

Keywords: Cauchy problem, Hilbert space, linear operator, discrete spectrum, eigenvalue asymptotics.

Рассмотрим находящуюся в поле сил тяжести гидромеханическую систему $G \subset \mathbb{R}^3$, состоящую из твердого тела (маятника) Ω_0 с плотностью ρ_0, закреплённого в неподвижной точке с помощью сферического шарнира, и однородной идеальной несжимаемой жидкости Ω с плотностью ρ, частично заполняющей полость в маятнике. Считаем, что граница $\partial\Omega$ в равновесном состоянии состоит из твердой стенки S и плоской свободной границы Γ, перпендикулярной прямой, соединяющей точку подвеса O_1 и центр масс маятника.

Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского (Симферополь, Россия); Voytitsky Victor (Taurida Academy of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia)

Копачевский Николай Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского (Симферополь, Россия); Kopachevsky Nikolay (Taurida Academy of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia)

В подвижной системе декартовых координат $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$, жестко связанных с маятником (с ортами $\{\vec{e}_1^{\,k}\}_{k=1}^3$) после линеаризации возникает следующая начально-краевая задача:

$$\int\limits_G \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)dm+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,d\Omega_1+\alpha\vec{\omega}+$$
$$+gmlP_2\vec{\delta}-g\rho_1\int_\Gamma(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r})\zeta\,d\Gamma=\vec{M}(t),$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\rho_1^{-1}\nabla p=\vec{f},\quad \operatorname{div}\vec{u}=0\quad(\text{в }\Omega_1),$$
$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S),\quad \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}^{\,3}=\vec{\omega}^{\,3},$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\rho_1 g(\zeta+\theta(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma),\quad \int_\Gamma\zeta\,d\Gamma=0,$$
$$\vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ x\in\Omega_1,\quad \zeta(0,x)=\zeta^0(x),\ x\in\Gamma,$$
$$\vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^{\,0},\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^{\,0}.$$

Здесь $\vec{\delta}(t)$ — угловое перемещение маятника, $\vec{\omega}(t)=d\vec{\delta}/dt$ — угловая скорость маятника, $\vec{u}(t,x)$ — поле относительных скоростей жидкости, $p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного, $\alpha\geqslant 0$ — коэффициент трения в шарнире, $m>0$ — масса маятника с жидкостью, l — расстояние от O_1 до центра тяжести системы в состоянии равновесия, $P_2\vec{\delta}$ — проекция δ на плоскость Γ, $P^3\vec{\delta}=I-P_2\vec{\delta}$, $\zeta(t,x)$ — малая функция, описывающая отклонения свободной поверхности жидкости от равновесного состояния вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ, $\vec{M}(t)$ — момент малого поля внешних сил $\vec{f}$, наложенных на гравитационное поле $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, $\theta:\ L_2(\Gamma)\to L_{2,\Gamma}$ ортопроектор на подпространство $L_{2,\Gamma}$ функций, ортогональных константам на Γ.

Отметим, что в случае, когда трение в шарнире не учитывается (случай $\alpha=0$), задача изучалась ранее (см., например, [1-3]). В частности, доказана теорема о существовании сильного решения задачи на конечном отрезке времени. Установлено, что при выполнении достаточных условий для статической устойчивости по линейному приближению:

$$\Delta_1:=ml-\rho\alpha_{11}>0,\quad \Delta_2:=(ml-\rho\alpha_{11})(ml-\rho\alpha_{22})-2\rho\alpha_{12}^2>0,\qquad(1)$$

где $\alpha_{jk}:=\int_\Gamma(\theta x_1^j)x_1^k\,d\Gamma=\alpha_{kj}$, соответствующая спектральная задача (для решений, зависящих от времени по закону $e^{-\lambda t}$) имеет дискретный спектр, состоящий из бесконечнократного нулевого собственного значения и двух ветвей мнимых взаимно сопряжённых собственных значений с предельной точкой $\pm i\infty$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{\pm}=\pm i\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi}\right)^{-1/4}k^{1/4}[1+o(1)],\quad k\to\infty.\qquad(2)$$

При этом половина собственных элементов образует ортогональный базис в пространстве $\widetilde{H}_1:=\vec{G}_{h,S}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3$, где $\vec{G}_{h,S}(\Omega_1):=\{\vec{u}=\nabla\Phi\in\vec{L}_2(\Omega_1):$

$\Delta\Phi = 0$ (в Ω_1), $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ (на S)}. При невыполнении условий (1) задача может иметь не более двух отрицательных собственных значений, а система корневых элементов образует базис Рисса в $\widetilde{H}_1$.

При учёте сил трения (т.е. для $\alpha > 0$) и выполнении неравенств (1) спектральная задача сводится к изучению операторного пучка в $\widetilde{H}_1$:

$$(\widetilde{C}_2 - \lambda\alpha P + \lambda^2\widetilde{C}_1)\widetilde{z}_1 = 0, \quad \widetilde{z}_1 = (\nabla\Phi;\ \vec{\omega})^\tau \in \widetilde{H}_1, \tag{3}$$

где $P := \operatorname{diag}(0;\ I_3)$, $\widetilde{C}_1$ положительно определен и ограничен, а $\widetilde{C}_2$ положительно определен и неограничен в $\widetilde{H}_1$. Эта задача имеет дискретный ненулевой спектр, состоящий из двух ветвей комплексно сопряженных собственных значений в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \text{const}$ с сохранением асимптотического поведения (2).

Задача (3) может быть сведена к поиску собственных значений оператора $A+B$, где неограниченный самосопряжённый оператор A имеет дискретный спектр с оценкой собственных значений $|\lambda_k| \leqslant \widetilde{c}k^{1/4}$, а B ограничен. Отсюда на основании теорем А.С. Маркуса и В.Э. Кацнельсона (см. [4], [5]) корневые элементы оператора $A + B$ образуют базис Абеля-Лидского со скобками порядка $\alpha > 3$ в пространстве $\widetilde{H}_1^2$.

Ожидается, что подобные спектральные свойства выполнены для начально-краевых задач, порождённых проблемами малых движений систем сочленённых маятников с полостями, частично либо целиком заполненных одной или несколькими идеальными жидкостями с учётом трения в шарнирах в случае статической устойчивости по линейному приближению ($C_2 \gg 0$). В операторной форме любая такая задача может быть приведена к задаче Коши для системы уравнений в сумме гильбертовых пространств $H_1 \oplus H_2$

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f(t); \\ gC_2\dfrac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{cases} \tag{4}$$

где $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \leqslant A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ неограниченные операторы, связанные с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы. В подготовленной к публикации работе [6] доказана теорема о сильной разрешимости задачи (4), изучены спектральные свойства консервативных систем, когда все жидкости являются идеальными и трение в шарнире не учитывается, в частности, получены новые вариационные принципы для нахождения собственных значений.

Литература

1. *С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей // Прикладная математика и механика, **21**:2 (1957), 169–174.

2. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Зб. праць Інституту математики НАН України, **2**:1 (2005), 158–194.

3. *Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 276 с.

4. *Маркус А. С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // ДАН СССР, **142**:3 (1962), 538–541.

5. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов // Функц. анализ и его приложения, №2 (1967), 39–51.

6. *Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий.* О колебаниях сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными жидкостями // Современная математика. Фундаментальные направления, **65**:2 (2019). (в печати)

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ РЕАКТОРА

Н.П. Волков

npvolkov@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматриваются некоторые задачи управления переходными процессами в ядерных реакторах. Исследуется математическая модель динамики реактора без обратной тепловой связи. Эта модель описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, состоящей из нестационарного анизотропного многоскоростного уравнения переноса и уравнения баланса запаздывающих нейтронов. Доказана управляемость поставленных задач.

Ключевые слова: Управление, переходные процессы в ядерных реакторах

The Control of Transient Processes in one Model Problem of Reactor Dynamics

On some problems controls of the transient processes in nuclear reactors is considered. The mathematical model of reactor dynamics without thermal feedback is investigated. This model is described by a system of integro-differential equations consisting of a nonstationary anisotropic multispeed transport equation and a delayed neutron balance equation. The controllability of these problems is proved.

Keywords: Control, transient processes in nuclear reactors

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Волков Николай Петрович, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Nikolay Volkov (National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia)

Рассматривается математическая модель динамики реактора без учета обратной температурной связи (см.[1]), которая описывается системой нестационарных интегро-дифференциальных уравнений:

1) нестационарным анизотропным многоскоростным кинетическим уравнением переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+(\mathbf{v},\nabla_x)u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=$$
$$=\int_V J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)u(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}'+\sum_{k=1}^{N} z_k R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+F(\mathbf{x},\mathbf{v},t),$$

2) уравнением баланса запаздывающих нейтронов

$$\frac{\partial R_k}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=-z_k R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+\int_V J_k(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)u(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}',\forall k=\overline{1,N},$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in D=G\times V\times(0,T).$$

В этой модели функция $u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ является функцией плотности распределения нейтронов, пролетающих через точку $\mathbf{x}\in G$ со скоростью $\mathbf{v}\in V$ в момент времени $t\in[0,T]$. Функции $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, $J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$, $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ характеризуют свойства среды, в которой происходит процесс массопереноса. Конкретно, $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ является коэффициентом поглощения, $J(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$ – индикатрисой рассеяния, а $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ – плотностью внутренних источников нейтронов. Здесь G есть область изменения пространственных координат, которая предполагается ограниченной строго выпуклой областью с границей ∂G класса C^1; V – диапазон изменений скоростей $\mathbf{v}$ частиц, являющийся ограниченным замкнутым множеством, содержащимся в сферическом слое $\{0<v_0\leqslant|\mathbf{v}|\leqslant v_1<\infty\}$. Ядра $J_k(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}',t)$ интегралов рассеяния характеризуют плотности распределения вторичных нейтронов, а функции $R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ – плотность распределения носителей запаздывающих нейтронов k-ой группы $\forall k=\overline{1,N}$.

Предположим, что рассматриваемый процесс происходит при отсутствии внешних источников частиц; т.е., например, внешнее излучение не проходит через стенки реактора. Это предположение математически выражается граничным условием

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=0,\qquad(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\gamma_-\times[0,T],$$

где $\gamma_-=\{(\mathbf{x},\mathbf{v})\in\partial G\times V:(\mathbf{v},n_x<0)\}$, and n_x - внешняя нормаль к границе ∂G области G в точке $\mathbf{x}$. Зададим начальные условия для функций $u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ и $R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},0)=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}),\qquad(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\overline{G}\times V,\tag{1}$$

$$R_k(\mathbf{x},\mathbf{v},0)=R_{k0}(\mathbf{x},\mathbf{v}),\quad\forall k=\overline{1,N},\qquad(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\overline{G}\times V.$$

Для постановки задач управления необходимо задать финальное условие:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{v},\ t_1)=\psi(\mathbf{x},\mathbf{v}),\qquad(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\overline{G}\times V,\tag{2}$$

Задачи управления переходным процессом для системы динамики реактора состоит в том, что необходимо найти некоторые управляющие воздействия, с помощью которых этот реактор может быть переведен за конечное время $\{t_1\} \in (0,T)$ из начального состояния $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ в финальное состояние $\psi(\mathbf{x},\mathbf{v})$.

Задача управления 1. *Найти достаточные условия на исходные данные, при которых исследуемый реактор из начального состояния (1) может быть переведен за время* $\{t_1\} \in (0,T)$ *в целевое состояние (2), будучи управляемым стационарной частью* $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ *функции источников* $F(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{v})g_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, *где* $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ *есть допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а* $g_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ *- априори заданная функция (функция коррекции).*

Задача управления 1 является линейной с точки зрения поиска распределенных управляющих воздействий $f(\mathbf{x},\mathbf{v})$ и в своей постановке идентична обратной задаче в работе автора [2].

Доказана теорема существования решения задачи управления 1, т.е. теорема об управляемости переходными процессами в исследуемой математической модели динамики реактора. Найдены достаточные условия единственности искомого управляющего воздействия. При доказательстве данной теоремы использован метод идентичный методу, примененному в работе автора [3].

Исследована также следующая задача управления:

Задача управления 2. *Найти достаточные условия на исходные данные, при которых исследуемый реактор из начального состояния (1) может быть переведен за время* $\{t_1\} \in (0,T)$ *в целевое состояние (2), будучи управляемым стационарной частью* $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$ *коэффициента поглощения* $\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})g_2(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, *где* $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$ *есть допустимое управляющее воздействие (распределенное стационарное управление), а* $g_2(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ *- априори заданная функция (функция коррекции поглощения).*

Задача управления 2 является нелинейной с точки зрения поиска распределенных управляющих воздействий $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})$.

Доказана локальная теорема существования и единственности решения задачи управления 2.

Литература

1. *Крянев А.В., Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов (Нелинейный анализ)// М.: Энергоатомиздат,1983.

2. *Volkov N/P/* Linear Inverse Prodlem of Dynamics of the Reactor // Journal of Physics: Conference Series **788**:1 (2017), 1-4.

3. *Волков Н.П.* Разрешимость некоторых обратных задач для нестационарного кинетического уравнения переноса. // Журнал вычислительной математики и математической физики, **56**:9 (2016), 1622-1627.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ ВЕСОМ

А.А. Гималтдинова
aa-gimaltdinova@mail.ru

УДК 517.927.25

Найдены собственные значения и собственные функции задач Штурма – Лиувилля со знакопеременной весовой функцией с разными комбинациями краевых или нелокальных условий. Построены соответствующие системы собственных функций и исследованы на полноту и базисность.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, спектральная задача, собственные значения и собственные функции

Spectral problems with non-local conditions with an alternating weight

The eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problems with an alternating weight function with different combinations of boundary or non-local conditions are found. The corresponding systems of eigenfunctions are constructed and investigated for completeness and basicity.

Keywords: ordinary differential operator, spectral problem, eigenvalues and eigenfunctions

Рассмотрим задачу для уравнения

$$LX(x) = X''(x) + \lambda \cdot \operatorname{sign} x \cdot X(x) = 0, \quad x \in (-l, 0) \cup (0, h), \ l, h > 0, \qquad (1)$$

с условиями сопряжения $X(0-0) = X(0+0)$, $X'(0-0) = X'(0+0)$ и одной из следующих пар краевых или нелокальных условий

$$X(-l) = X(h), \quad X'(h) = 0, \qquad (2)$$

$$X'(-l) = X'(h), \ X(h) = 0 \text{ или } \ X(-l) = X(h), \ X'(-l) = X'(h).$$

Для каждой из трех задач найдены собственные значения как корни соответствующих трансцендентных уравнений (например, собственные значения задачи (1)–(2) есть корни уравнения $\cos(\mu h)\operatorname{ch}(\mu l) - \sin(\mu h)\operatorname{sh}(\mu l) = 1$). Получены асимптотические формулы для корней этих уравнений, найдены соответствующие системы собственных функций и аналогично [1] исследованы их свойства.

Литература

1. *Гималтдинова А.А., Курман К.В.* О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, **19**:1 (2015), 7–18.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ - РБ (проект № 17-41-020516).

Гималтдинова Альфира Авкалевна, к.ф.-м.н., доцент, УГНТУ (Уфа, Россия); Al'fira Gimaltdinova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ю.В. Гласко
glaskoyv@mail.ru

УДК 517.946

Рассмотрена краевая задача относительно уравнения Пуассона. На ее основе сформулирована задача касательно распределения на границе. Рассмотрен геометрический метод решения указанной задачи. Метод применен к краевой задаче относительно параболического уравнения.

Ключевые слова: Уравнение Пуассона, balayage-метод Пуанкаре

Geometrical method for solution some boundary problems

We consider boundary problem for Poisson equation. Problem for boundary distribution is formulated on base of the Poison boundary problem. Geometrical solution method for the boundary distribution problem is considered. The method is used for boundary problem for parabolic equation.

Keywords: Poisson equation, Poincare balayage method

В данном сообщении мы рассмотрим стационарный процесс с источником $f(X),\ X \in \Omega \subset V,\ X \equiv \{x, y, z\},\ \partial V \equiv \Gamma$ в рамках следующей краевой задачи:

$$D\Delta u(X) = -f(X),\ X \in \Omega, \tag{1}$$

$$D\Delta u(X) = 0,\ X \in V \setminus \Omega, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(X)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

$$u(X) = u_0(X) = cf(X),\ X \in \Omega \tag{4}$$

Здесь D и c обеспечивают совпадение размерностей. Нам следует определить:

$$u(X)|_{\Gamma} = u_{\Gamma}(X) \tag{5}$$

Первым общепризнанным доказательством существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа относительно потенциала явился balayage-метод А. Пуанкаре. Мы используем его для решения указанной 3D задачи (1-5). Суть его в заполнении области V системой шаров $\{\Sigma_i\}, i = 1, ..., M$ и перераспределении $u(X)$ из шаров на их границы до тех пор пока все $u(X)$ окажутся на Γ. Предполагается, что объединение частей поверхностей обращенных к Γ граничных шаров из системы $\{\Sigma_i\}$ достаточно точно аппроксимирует Γ. Каждые 2 из пересекающихся шаров $\Sigma_i,\ \Sigma_j$ являются вариантом составной области рассматриваемой в альтернирующем методе Шварца. При этом в каждое $\Sigma_i \bigcap \Sigma_j$ можно поместить луночку- то есть выполнен критерий Шварца. В то же время дополнительные условия (3-4)

Гласко Юрий Владленович, к.ф.-м.н., НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yuri Glasko (Research Computing Center Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

по отношению к постановке А. Пуанкаре , имеют целью обеспечить единственность решения. При этом, в качестве V мы выбираем куб. В нашем случае мы имеем линейный оператор задачи. Для устойчивости следует обеспечить его компактность. Так же следует иметь значительную априорную информацию о источнике и распределении на границе (в соответствии с методом расширяющихся компактов). В качестве области Ω выбираем выпуклую область без дырок. Можно выбрать и несколько таких областей но они не должны пересекаться или граничить друг с другом. Кроме того, пространства должны быть нормированными. Возможно использование гильбертовых пространств.

Численно задача решается на сетке с шагом h на основе итерационного цикла по всей области V^h. V^h заполнена аппроксимациями системы шаров $\{\Sigma_i\}, i = 1, ..., M$, которые даются семиточечными схемами типа "крест" $\{\Sigma_i^h\}, i = 1, ..., M$.

Задача (5) рассмотрена и на основе краевой проблеммы для параболического уравнения. Для решения применяется указанный выше метод.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики — Москва: Наука, 1966.

2. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Том 3. — Москва: Наука, 1974.

3. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1979.

4. *Садовничий В.А.* Теория операторов. — Москва: Дрофа, 2001.

5. *Зидаров Д.* О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. — София: БАН, 1980.

6. *Yagola A.G., Dorofeev K.Yu.* Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Ramm A.G., Shivakumar P.N., Strauss A.V. (eds.) Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications. — Providence, RI: American Mathematical Society, **25**, 2000. — 543-550.

7. *Glasko Y.V.* Interpretation algorithms for hydrocarbon deposits // Nurgaliev D., Matveeva N. (eds.) Practical and theoretical aspects of geological interpretation of gravitational, magnetic and electric fields. — Switzerland: Springer, 2019. — 113-125.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Л. Гольдман
nlgold40@yandex.ru

УДК 517.958

Исследованы постановки нелинейных задач для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени. Одна из них представляет собой систему, состоящую из краевой задачи с граничными условиями первого рода и из уравнения, задающего закон изменения по времени искомого коэффициента. В других постановках аналогичная система отличается видом граничных условий. Доказана однозначная разрешимость таких нелинейных систем на основе метода Ротэ и априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера. Исследование связано с математическим моделированием физико-химических процессов с изменяющимися внутренними характеристиками материалов.

Ключевые слова: параболические уравнения, краевые задачи, классы Гельдера, метод Ротэ, априорные оценки, однозначная разрешимость

Some new statements of nonlinear problems for a parabolic equation

We study statements of nonlinear problems for a parabolic equation with an unknown coefficient at the time derivative. One of the statements is a system, which contains the boundary value problem of the first kind and the equation for a time dependence of the sought coefficient. In the other statements the corresponding system is distinguished by boundary conditions. For these nonlinear systems, conditions of uniqueness solvability in a class of smooth functions are proved by applying the Rothe method and a priori estimates in the difference-continuous analogs of Hölder spaces. The present investigation is connected with the mathematical modelling of physical-chemical processes in which inner characteristics of materials are subjected to changes.

Keywords: parabolic equations, boundary value problems, Hölder spaces, Rothe method, a priori estimates, uniqueness solvability

Одна из рассмотренных постановок является нелинейной системой для нахождения в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ функций $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ из условий

$$c(x,t,u)\rho(x,t)u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = w(t), \quad u(x,t)|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$\rho_t(x,t) = \gamma(x,t,u), \quad (x,t) \in Q, \quad \rho(x,t)|_{t=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

Гольдман Наталия Львовна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nataliya Gol'dman, Dr.Sci, Leading Scientist (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

в которых равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)u,$$

a, b, c, d, f, а также w, v, φ, γ и ρ^0 — известные функции своих аргументов, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $\rho^0 \geqslant \rho^0_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min}$, $\rho^0_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

В зависимости от функции $\gamma(x,t,u)$, которая предполагается знакопостоянной при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (где $M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$, M_0 — постоянная из принципа максимума для краевой задачи (1)–(3)), требование параболичности уравнения (1) приводит к ограничениям на искомое решение

$$0 < \rho^0_{\min} < \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) + T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \gamma(x,t,u) \text{ при } \gamma(x,t,u) > 0, \quad (5)$$

$$0 < \rho^0_{\min} - T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma(x,t,u)| \leqslant \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) \text{ при } \gamma(x,t,u) \leqslant 0. \quad (6)$$

Если $\gamma(x,t,u) \leqslant 0$ в области $\overline{D}$, то условие (6) накладывает ограничение на отрезок времени $[0,T]$, на котором ищется решение системы (1)–(4): $0 < T < \rho^0_{\min}(\max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma(x,t,u)|)^{-1}$.

Другие рассмотренные постановки отличаются от системы (1)–(4) видом граничных условий

$$a(x,t)u_x|_{x=0} = g(t),\ a(x,t)u_x|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad (7)$$

$$\begin{gathered} a(x,t,u)u_x - h(t,u)u|_{x=0} = g(t),\ h \geqslant 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ a(x,t,u)u_x + e(t,u)u|_{x=l} = q(t),\ e \geqslant 0, \quad 0 < t \leqslant T. \end{gathered} \quad (8)$$

Это новый вид нелинейных краевых задач для параболического уравнения по сравнению с классическими постановками таких задач в [1]. Для исследования условий существования их гладких решений используем метод прямых Ротэ. Для системы (1)–(4) аппроксимирующая ее нелинейная дифференциально-разностная система состоит в определении $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ — приближенных значений функций $u(x,t)$ и $\rho(x,t)\}$ в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l\} \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_\tau \in [0,T]$ — равномерная сетка узлов t_n с шагом $\tau = TN^{-1}$

$$c_n\rho_n u_{n\bar{t}} - (a_n u_{nx})_x + b_n u_{nx} + d_n u_n = f_n, \quad (x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l\} \times \omega_\tau, \quad (9)$$

$$u_n|_{x=0} = w_n, \quad u_n|_{x=l} = v_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \quad (10)$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (11)$$

$$\rho_{n\bar{t}} = \gamma_{n-1},\ (x,t_n) \in Q_\tau, \quad \rho_n|_{n=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (12)$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — значения соответствующих коэффициентов в точке (x,t_n,u_n), $f_n = f(x,t_n)$, $w_n = w(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, $\gamma_{n-1} = \gamma(x,t_{n-1},u_{n-1})$, $u_{n\bar{t}} = (u_n(x) - u_{n-1}(x))\tau^{-1}$, $u_{nx} = du_n(x)/dx$, $\rho_{n\bar{t}} = (\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x))\tau^{-1}$.

Для систем с граничными условиями (7), (8) дифференциально-разностная аппроксимация этих условий имеет соответствующий вид, в частности

$$a_n u_{nx} - h_n u_n|_{x=0} = g_n,\ a_n u_{nx} + e_n u_n|_{x=l} = q_n,\ 0 < t_n \leqslant T,$$

где h_n и e_n — значения коэффициентов в граничных услових при $t = t_n$, $u = u_n|_{x=0}$ и, соответственно, $u = u_n|_{x=l}$.

Доказательство разрешимости соответствующей исходной нелинейной системы методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи с соответствующими граничными условиями в предположении, что коэффициент $\rho_n(x)$ — известная функция. Получение априорных оценок в сеточно-непрерывных аналогах классов Гельдера для $u_n(x)$, не зависящих от x, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ всей дифференциально-разностной системы на основе результатов этапа 1. Получение априорных оценок для $u_n(x)$ и $\rho_n(x)$ в соответствующих сеточно-непрерывных пространствах, не зависящих от x, n.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в дифференциально-разностной системе на основе полученных априорных оценок, в силу которых семейство $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ является компактным. Завершение доказательства разрешимости исходной нелинейной системы в классе гладких функций.

Получение априорных оценок на этих этапах проводится в [2, 3] без требований дополнительной гладкости от входных данных, которые обычно накладываются методом Ротэ. Это позволяет установить точные дифференциальные зависимости в исходных нелинейных системах и получить условия их однозначной разрешимости в классе гладких функций. Такие условия для системы (1)–(4) формулирует следующая

Теорема. *Предположим, что:*

1) *при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *и любых* u, $|u| < \infty$, *все входные данные в соотношениях* (1)–(3) *являются ограниченными функциями в областях своего определения, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными по* x *и* u, *выполнены условия* $0 < a_{\min} \leqslant a \leqslant a_{\max}$, $0 < c_{\min} \leqslant c \leqslant c_{\max}$;

2) *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *функции* $a(x,t,u)$, $a_x(x,t,u)$, $a_u(x,t,u)$, $b(x,t,u)$, $c(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *и имеют ограниченные производные по* u; *кроме того, производная* $c_x(x,t,u)$ *ограничена, функция* $f(x,t)$ *принадлежит* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$;

3) *функции* $w(t)$ *и* $v(t)$ *принадлежат* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $\rho^0(x)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $C^1[0,l]$, $0 < \rho^0_{\min} \leqslant \rho^0(x) \leqslant \rho^0_{\max}$, $\rho^0_{\min}, \rho^0_{\max} = \mathrm{const} > 0$; *выполнены условия согласования*

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)w_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = f(x,0)|_{x=0},$$

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi|_{x=l,t=0} = f(x,0)|_{x=l};$$

4) *функция* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *знакопостоянна при* $(x,t,u) \in \overline{D}$, *имеет ограниченные производные по* x, u, *кроме того непрерывна в смысле Гельдера по* t *с показателем* $\lambda/2$.

Тогда нелинейная система (1)–(4) *имеет единственное решение* $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad |u(x,t)|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant M, \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

$$\rho(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_t(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$

и удовлетворяющее ограничениям (5), (6) *в зависимости от знака функции* $\gamma(x,t,u)$. *Это решение можно получить как предел решения* $\{u_n(x),\rho_n(x)\}$ *дифференциально-разностной системы* (9)–(12) *при стремлении шага сетки* τ *к нулю.*

Аналогичные условия однозначной разрешимости нелинейных систем с граничными условиями (7), (8) получены в [3].

Проведенное исследование связано с моделированием физико-химических процессов, которые сопровождаются изменениями внутренних характеристик материалов. В [3] рассмотрены модели деструкции теплозащитного композита (т.е., необратимых изменений его плотности и концентраций компонентов) под воздействием высоких температур.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

2. *Гольдман Н.Л.* О некоторых постановках нелинейных параболических задач с краевыми условиями первого рода и о методах их приближенного решения // Вычисл. методы и программирование, **19** (2018), 314-326.

3. *Gol'dman N.L.* Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient // J. Differential Equations, **266** (2019), 4925-4952.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И. Горбачев

vigorby@mail.ru

УДК 517.926.4

Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (исходные уравнения). Наряду с каждым исходным уравнением рассматривается точно такое же уравнение только с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение). Показано, что общее решение исходного уравнения представляется в интегральной форме через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение исходного уравнения. Фундаментальное решение находится методом возмущений в виде бесконечного знакопеременного ряда.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные формулы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00016а).

Горбачев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Gorbachev Vladimir Ivanovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассмотрим исходное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами [1]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0\,, \quad x \in (0, L). \tag{1}$$

Если функция $f_2(x)$, при любом x, не обращается в нуль, то уравнение (1) можно свести к самосопряженной форме [2, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$\big[C(x)u'\big]' + e(x)u + X(x) = 0\,,\ C = \exp\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\,,\ e = \frac{f_0}{f_2}\,,\ X = \frac{f_1 f}{f_2}\,, \tag{2}$$

Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения (2), то есть

$$\big[C(x)G'(x,\xi)\big]' + e(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \quad x, \xi \in (0, L)\,, \tag{3}$$

где $\delta(x-\xi)$ — дельта функция Дирака [3]. Решение уравнения (3) понимается в обобщенном смысле [4, 5]. В этом случае решение уравнения (2) можно представить в виде следующей интегральной формулы [6, 7]:

$$u(x) = v(x) + \int_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,v'(\xi)d\xi - \int_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi)v(\xi)d\xi\,, \tag{4}$$

где $\tilde{C}(\xi) = C^o - C(\xi)$, $\tilde{e}(\xi) = e^o - e(\xi)$, а $v(x)$ — решение, так называемого, сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами C^o и e^o

$$C^o v''(x) + e^o v(x) + X(x) = 0. \tag{5}$$

Общее решение сопутствующего уравнения (5) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda x} + K_2 e^{-i\lambda x} + \varphi(x)\,; \qquad \lambda = \sqrt{\frac{e^o}{C^o}}\,, \tag{6}$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (5) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda C^o}\left[e^{i\lambda x}\int X(x)e^{-i\lambda x}dx - e^{-i\lambda x}\int X(x)e^{i\lambda x}dx\right].$$

Подставив (6) в интегральную формулу (4), получим общее решение исходного уравнения (2)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x)\,, \tag{6}$$

где

$$A(x) = e^{i\lambda x} + i\lambda \int_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi - \int_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi\,,$$

$$B(x) = e^{-i\lambda x} - i\lambda \int_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi - \int_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi\,,$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_0^L G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, \varphi'(\xi) d\xi - \int_0^L G(x,\xi)\tilde{e}(\xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

Коэффициенты C^o и e^o положим равными эффективным характеристикам [5, 8] так, что

$$C^o = 1/\big\langle 1/C \big\rangle\,,\ e^o = \big\langle e \big\rangle\,,\ \big\langle f \big\rangle \equiv \int_0^L f(x)dx/L.$$

Построение фундаментального решения исходного уравнения. Общее решение исходного уравнения находится по формулам (6), если известно фундаментальное решение уравнения (3) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения в общем случае зависимости коэффициентов от координаты вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (3) методом возмущений [9, 10]. Для этого перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\big[C(x)G'(x,\xi)\big]' + \varkappa e(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \tag{7}$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным 1. Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда по степеням параметра $\varkappa$:

$$G(x,\xi,\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x,\xi).$$

Далее подставим этот ряд в уравнение (7), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений, каждое из которых легко интегрируется в общем виде. Константы интегрирования этих уравнений полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Опуская подробности всех выкладок, запишем представление фундаментального решения в виде следующего ряда:

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\Bigg[\int_\xi^x \frac{dz}{C(z)} - \int_\xi^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_\xi^{x_1} e(x_2)dx_2 \int_\xi^{x_2} \frac{dz}{C(z)} +$$

$$+ \int_\xi^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_\xi^{x_1} e(x_2)dx_2 \int_\xi^{x_2} \frac{dx_3}{C(x_3)} \int_\xi^{x_3} e(x_4)dx_4 \int_\xi^{x_4} \frac{dz}{C(z)} - \cdots \Bigg]. \tag{8}$$

Если $C = C^o = const. > 0$ и $e = e^o = const. > 0$, тогда ряд (8) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (5), которое понимается в обобщенном смысле. Это решение можно найти, например, в книгах [11 стр. 198], [12]

$$G^o(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)s^o}{C^o}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Big[\frac{x-\xi}{s^o}\Big]^{2n+1} = -\frac{h(x-\xi)\,s^o}{C^o}\,\sin\frac{x-\xi}{s^o}\,,$$

где $s^o = \sqrt{C^o/e^o} = 1/\lambda^o$. Сходимость ряда (8) исследована в работе [13].

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Москва: Наука, 1971.

2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.

3. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — Москва: Мир, 1978.

4. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1966.

5. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осредненние процессов в периодических средах. — Москва: Наука, 1984.

6. *Горбачев В.И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, **2**:2 (1991), 61-76.

7. *Горбачев В.И.* Averaging equations of mathematical physics with coefficients dependent on coordinates and time // Nanoscience and Technology: An International Journal, **8**:4 (2017), 345-353.

8. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. — Москва: Изд-во МГУ, 1984.

9. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. — Москва: Изд-во МГУ, 1976.

10. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. — Москва: Мир, 1976.

11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — Москва: Главная ред. физ.-мат. лит., 1971.

12. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — Москва: Наука, 1976.

13. *Горбачев В.И.* О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник МГУ. Сер. 1 математика, механика, 1 (2016), 31-39.

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Денисов
vdenisov2008@yandex.ru

УДК 517.518

Устанавливаются достаточные условия на рост коэффициентов параболического уравнения второго порядка, при которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте K в R^N. Также получаем достаточные условия на коэффициенты, при которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю со степенной скоростью, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Ключевые слова: математика, параболические уравнения, решение задачи Коши, стабилизация

On stabilization rate of a solution to the Cauchy problem for parabolic equation with increasing coefficients

We obtain sufficient conditions on the growth of coefficients of a second order parabolic equation under which a solutions of the Cauchy problem stabilize to zero uniformly in x on every compact K in R^N. Additionally, unimprovable sufficient conditions on the coefficients are obtained under which the solution of the Cauchy problem stabilize to zero at a power law rate uniformly on every compact K in R^N.

Keywords: mathematics, parabolic equations, solution of the Cauchy problem, stabilization

В полупространстве $\overline{E} = R^N \times [0,\infty), N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv Lu_1 + (b, \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \text{ в } E(1), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$L_1 u = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x) u''_{x_i x_k}, (b, \nabla u) = \sum_{k=1}^{N} b_i(x) u'_{x_i}. \tag{3}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) коэффициенты в (1) действительны, непрерывны, и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти D в $R^N, a_{ik} = a_{ki}$, $(i,k = 1,\dots,N)$, существуют положительные постоянные k_0, k_1,такие, что

$$k_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \leqslant k_1^2 b(|x|)|\xi|^2, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00223).

Денисов Василий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vasilii Denisov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

для $\forall(x)\xi \in R^N$,

$$b(|x|) = (1+|x|^2)^{\nu/2}, \text{ где } 1 < \nu < 2, |x|^2 = x_1^2 + ... + x_N^2. \tag{5}$$

2)коэффициенты $b_1(x)..., b_N(x)$ удовлетворяет условию (B): существует постоянная $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{N} |b_k(x)| \leqslant B(1+|x|^2)^{\frac{\nu-1}{2}}. \tag{6}$$

3)коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C), т.е. $\exists\beta > 0$

$$c(x) \leqslant -\beta^2 \text{ для } \forall x \in R^N. \tag{7}$$

4) начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в R^N:

$$|u_0(x)| \leqslant M, \forall x \in R^N. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если выполнены сформулированные выше условия (4)-(8), то решение задачи Коши (1), (2) имеет предел:*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{9}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Замечание 1. Теорема 1 является точной, в том смысле, что нельзя заменить в её утверждении компакт K на все R^N (См. [1]).

В случае, когда $\nu = 2$ в (5), то теорема 1 доказана в работе [2]. Положим

$$S = \frac{k_1^2(N-1) + k_0^2 + B}{k_0^2}, \lambda(\beta) = \frac{2 - S + \sqrt{D}}{2}, D = (2-S)^2 + \overline{\beta^2}, \overline{\beta} = \frac{\beta}{k_1}.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 2. *Пусть в (5) $\nu = 2$ и выполнено неравенство*

$$\beta^2 > k_1^2(S-1).$$

Тогда для любой начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию (8), для решения задачи Коши (1), (2) справедлива оценка:

$$|u(x,t)| \leqslant Mt^{-\frac{\lambda(\beta)}{3}}, \forall t \geqslant t_1 > 0, M > 0, \tag{10}$$

равномерная по x на любом компакте K в R^N) .

Замечание 2. Из предельного равенства

$$\lim_{\beta\to\infty} \lambda(\beta) = +\infty$$

и из оценки (10) вытекает, что для любого наперед заданного $m > 0$ можно найти $\beta > 0$ из условия $\lambda(\beta) = m$.

Обзору работ по стабилизации решений параболических уравнений посвящена работа [3]. Асимптотика решений нелинейных параболических уравнений изучалась в [4].

Литература

1. *Денисов В.Н.* Об асимптотике при большом времени решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами // Докл. РАН, **475**:1 (2017), 10-13.

2. *Денисов В.Н.* О стабилизации решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами // Труды семинара имени И.Г. Петровского, **32** (2019), 134-161.

3. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН, **60**:4 (2005), 145-212.

4. *Kon'kov A.A.* On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh, **136** (2006), 365-384.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И СВЯЗАННОМ С НЕЙ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, М.Г. Ергалиев

muvasharkhan@gmail.com, ramamur@mail.ru, ergaliev.madi.g@gmail.com

УДК 517.9

В случае осевой симметрии, в виде перевернутого конуса вырождающейся области, для граничной задачи теплопроводности установлены теоремы о разрешимости в весовых пространствах существенно ограниченных функций. Они основаны на результатах по исследованию вопросов разрешимости неоднородного вырождающегося интегрального уравнения Абеля второго рода. Применяется метод регуляризации Карлемана-Векуа из теории сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, вырождающаяся область, интегральный оператор Абеля

Работа выполнена при финансовой поддержке грантовых проектов AP05130928, AP05132262 и BR05236693 (2018–2020) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич, д.ф.-м.н., профессор, ИММ (Алматы, Казахстан); Muvasharkhan Jenaliyev (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

Рамазанов Мурат Ибраевич, д.ф.-м.н., профессор, КарГУ имени Е.А.Букетова (Караганда, Казахстан); Murat Ramazanov (Buketov State University of Karaganda, Kazakhstan)

Ергалиев Мади Габиденович, PhD, ИММ (Алматы, Казахстан); Madi Yergaliyev (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

On a boundary problem of heat conduction and a degenerating integral equation of Abel type of the second kind related to it

In the case of axial symmetry, in the form of an inverted cone of a degenerating domain, for the boundary value problem of heat conduction it has been established theorems of solvability in the weighted spaces of essentially bounded functions. They are based on the results on the study of the solvability questions of the inhomogeneous degenerating Abel integral equation of the second kind. It has been used the Carleman-Vekua regularization method from the theory of singular integral equations.

Keywords: heat equation, degenerating domain, Abel's integral operator

В конусе $G = \{(x; y, t) : x^2 + y^2 < t^2,\ 0 < t < T\}$ мы изучаем граничную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

с условием на поверхности конуса

$$u(x, y, t) = u_{\mathrm{c}}(x, y, t),\ \sqrt{x^2 + y^2} = t,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

где $u_{\mathrm{c}}(x, y, t)$ – заданная функция.

Переходя к полярным координатам в задаче (1)–(2) и предполагая выполнение свойства изотропности по угловой координате, получаем: найти в области $\Omega = \{(r, t) : 0 < r < t,\ 0 < t < T\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{3}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(r, t)}{\ln (1/r)} = u_0(t),\ 0 < t < T, \tag{4}$$

$$\lim_{r \to t} u(r, t) = u_1(t) \equiv u_{\mathrm{c}}(x, y, t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t},\ 0 < t < T. \tag{5}$$

Решение граничной задачи (3)–(5) сводится к изучению вопросов разрешимости неоднородного интегрального уравнения

$$t\,\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\,\tau}{\sqrt{t - \tau}} = f(t),\ 0 < t < T < \infty, \tag{6}$$

где λ – заданная положительная постоянная величина, $\{f(t),\ t \in (0, T)\}$ – заданная функция.

Уравнения вида (6) являлись предметом изучения многих работ. Мы здесь укажем только на следующие работы [1–5] и ссылаемся на многочисленные исследования, цитируемые в них. В работе [1] при предположении, что порядок вырождения, определяемая степенью независимой переменной t, является строго меньше, чем единица, установлена однозначная

разрешимость интегрального уравнения. В [2] установлены необходимые и достаточные условия, при которых оператор в пространстве квадратично суммируемых функций представляется в виде суммы оператора умножения на ограниченную функцию и интегрального оператора, и эта сумма называется интегральным оператором третьего рода. В уравнениях из [3], [4] и [5] ядра интегральных операторов не должны иметь особенностей.

Порядок вырождения в исследуемом нами уравнении (6) равен единице и ядро интегрального оператора имеет слабую особенность и определяет интегральный оператор Абеля. Мы изучаем вопросы разрешимости уравнения (6) в весовом классе существенно ограниченных функций. Мы также показываем, что граничная задача теплопроводности (3)–(5) сводится к изучению уравнения вида (6).

При определенных физико-технических допущениях [6] граничная задача (1)–(2) моделирует температурное поле в теле плазмы электрического разряда между размыкающимися контактами высокого напряжения, находившихся первоначально в замкнутом состоянии. В связи с тем, что измерить указанное температурное поле весьма затруднительно, остается надеяться, хотя бы качественно, оценить характер протекающих тепловых процессов с помощью методов математического моделирования.

Ранее нами изучались граничные задачи теплопроводности, подобные (1)–(2), в одномерных вырождающихся областях [7–10]. А изучаемые в работе [11] граничные задачи сводятся к особым интегральным уравнениям типа (6). Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть* $t^{-3/2}u_0(t)$, $t^{-1/2}u_1(t) \in L_\infty(0,T)$. *Тогда граничная задача (3)–(5) имеет общее решение* $u(r,t) = Cu_{hom}(r,t) + u_{part}(r,t) \in L_\infty(\Omega; r^{-1/2})$, *т.е.,* $r^{-1/2}u(r,t) \in L_\infty(\Omega)$, $C = const$, *где* $u_{hom}(r,t)$ *и* $u_{part}(r,t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $u_0(t) \equiv 0$, $u_1(t) \equiv 0$*) и неоднородного граничных задач (3)–(5).*

В случае осевой симметрии из теоремы 1 следует следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $t^{-1/2}u_1(t) \equiv t^{-1/2}u_c(x,y,t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} \in L_\infty(0,T)$. *Тогда граничная задача (1)–(2) имеет общее решение* $u(x,y,t) = Cu_{hom}(x,y,t) + u_{part}(x,y,t) \in L_\infty(G;(x^2+y^2)^{-1/4})$, *т.е.,* $(x^2+y^2)^{-1/4}u(x,y,t) \in L_\infty(G)$, $C = const$, *где* $u_{hom}(x,y,t)$ *и* $u_{part}(x,y,t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $u_c(x,y,t) \equiv 0$*) и неоднородного граничных задач (1)–(2).*

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $t^{-1/2}f(t) \in L_\infty(0,T)$. *Тогда интегральное уравнение (6) имеет общее решение* $\varphi(t) = C\varphi_{hom}(t) + \varphi_{part}(t) \in L_\infty((0,T);t^{-1/2})$, *т.е.,* $t^{-1/2}\varphi(t) \in L_\infty(0,T)$, $C = const$, *где* $\varphi_{hom}(t)$ *и* $\varphi_{part}(t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $f(t) \equiv 0$*) и неоднородного интегральных уравнений (6).*

Литература

1. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифф. уравн., **10**:1 (1974), 100-111.

2. *Коротков В.Б.* Об интегральных операторах третьего рода // Сиб. мат. журн., **44**:5 (2003), 829-832.

3. *Крейн С.Г., Сапронов И.В.* Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями // Усп. мат. наук, **50**:4 (2003), 140.

4. *Сапронов И.В.* Об одном классе решений уравнения Вольтерра второго рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве // Изв. ВУЗов. Математика, **48**:6 (2004), 45-55.

5. *Кожанов А.И.* Изучение разрешимости некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений третьего рода // Докл. РАН, **97**:1 (2018), 38-41.

6. *Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н.* Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: Наука, 1977.

7. *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.* Об однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. мат. журн, **56**:6 (2018), 982-995.

8. *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., and Zhanbolova A.K.* The solution of the singular Volterra integral equation of the thermal problem with a uniformly moving boundary // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, **82**:2 (2016), 40-47.

9. *Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M., and Ramazanov M.I.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations, **2015**:71 (2015).

10. *Jenaliyev M., and Ramazanov M.* On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // Filomat, **32**:3 (2018), 965-974.

12. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I, II // Дифференц. уравнения, **43**:4 (2007), 513-524; **43**:6 (2007), 806-812.

КВАЗИСЛУЧАЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СИСТЕМАХ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ S^1

С.А.Довбыш

sdovbysh@yandex.ru

УДК 517.913, 517.938

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные; наличие такой переменной равносильно существованию однопараметрической группы симметрий. Между тем, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведённой системы, получаемой редукцией по группе симметрий (исключением циклической переменной). Получены простые условия, при выполнении которых квазислучайным движениям приведённой системы соответствуют движения с аналогичными свойствами в исходной системе с группой симметрий S^1, что гарантирует неинтегрируемость последней.

Ключевые слова: первый интеграл, неинтегрируемость, квазислучайные движения, приведённая система

Довбыш Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э.Баумана (Москва, Россия); Sergei Dovbysh (Lomonosov Moscow State University and Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Quasi-random motions and non-integrability in systems with symmetry group S^1

In many mechanical problems there are cyclic variables. The presence of such a variable is equivalent to the existence of a one-parameter symmetry group. However, one usually considers dynamics in a corresponding reduced system obtained by reduction over the symmetry group (elimination of the cyclic variable), rather than that in the original system. Simple conditions are obtained, under which to quasi-random motions of a reduced system there correspond motions in a original system with symmetry group S^1, which guarantees the non-integrability of the latter.

Keywords: first integral, non-integrability, quasi-random motions, reduced system

Во многих известных задачах механики имеются циклические переменные. Однако, обычно рассматривают динамику не исходной системы, а соответствующей приведённой (или пониженной) системы, получаемой редукцией по группе симметрий. В частности, все результаты о неинтегрируемости (т.е. отсутствии непостоянного аналитического первого интеграла) относились именно к приведённым, а не исходным динамическим системам. Кажется естественным предположить, что из неинтегрируемости приведённой системы следует неинтегрируемость исходной. Целью работы доказательство результатов такого сорта при определённых предположениях.

Используется подход, в котором неинтегрируемость приведённой системы оказывается следствием наличия инвариантного гиперболического множества *квазислучайных* движений, описываемого методами символической динамики [1]. При этом мы ограничиваемся рассмотрением классического случая, когда пониженная система — гамильтонова с двумя степенями свободы. Этот случай охватывает многие задачи механики и здесь возникают следующие хорошо известные ситуации, когда присутствие трансверсально пересекающихся сепаратрис гиперболических периодических решений и/или гиперболических положений равновесия влечёт наличие в фазовом пространстве системы инвариантного множества квазислучайных движений и неинтегрируемость:

1) случай гиперболических периодических решений (В.М.Алексеев [1] — результат в наиболее общем виде)

2) случай положения равновесия типа седло-фокус (Р.Деваней [2])

3) случай положения равновесия типа седло-седло (Д.В.Тураев и Л.П.Шильников [3]; требуется наличие хотя бы двух гомоклинических траекторий и выполнение некоторых дополнительных условий на их расположение).

Пусть исходная система имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \Psi(z), \tag{1}$$

где $\psi \,(\mathrm{mod} 2\pi)$ — угловая (циклическая) переменная, а её приведённая система

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \tag{2}$$

полученная редукцией по ψ, является автономной гамильтоновой с гамильтонианом $H(z)$ и двумя степенями свободы, где z — фазовые переменные. Под неинтегрируемостью понимается отсутствие дополнительного (независимого с интегралом энергии приведённой системы) аналитического первого интеграла.

Пусть в системе (2) имеется инвариантное множество квазислучайных движений M. Тогда система (1) имеет инвариантное множество $\widetilde{M} = M \times S^1 = \{(z, \psi) : z \in M\}$, лежащее "над" M. Целью является получение простых конструктивно проверяемых условий, при которых множество $\widetilde{M}$ обладает следующим свойством: для любых окрестностей любых двух точек из $\widetilde{M}$ имеется траектория в $\widetilde{M}$, пересекающая обе эти окрестности. При наличии сформулированного свойства динамика на $\widetilde{M}$ оказывается аналогична динамике на M, хотя $\widetilde{M}$ не гиперболично (система нейтральна в направлении циклической координаты). Это позволяет непосредственно перенести на случай исходной системы известные аргументы, используемые для доказательства неинтегрируемости приведённой системы. Таким образом, обсуждаемое свойство гарантирует искомый результат, что система (1) не имеет аналитического первого интеграла, независимого с интегралом энергии приведённой системы (2).

Результаты формулируются отдельно для трёх упомянутых выше случаев, когда приведённая система имеет гиперболическое периодическое решение, либо неподвижную точку типа седло-фокус, либо неподвижную точку типа седло-седло.

1. Пусть приведённая система (2) имеет гиперболическое периодическое решение Γ. Тогда эта система сводится вблизи Γ на фиксированном уровне энергии к гамильтоновой системе с одной степенью свободы, периодически зависящей от нового "времени" $\varphi \,(\mathrm{mod} 2\pi)$. В некоторых канонически сопряжённых переменных ξ, η гамильтониан последней системы принимает вид $G(\xi, \eta) = \lambda\xi\eta + O_4$ (здесь O_k всюду означает члены порядков k и выше), а решение Γ задаётся уравнениями $\xi = 0, \eta = 0$. Пусть уравнение для ψ в новых переменных принимает вид $d\psi/d\varphi = F(\xi, \eta, \varphi)$.

Теорема 1. *Пусть сепаратрисы периодического решения* Γ *трансверсально пересекаются, следовательно, имеется инвариантное множество* M. *Если в разложении функции* $\int_0^{2\pi} F(\xi, \eta, \varphi)\, d\varphi$ *по степеням* ξ, η *квадратичный член* $\xi\eta$ *имеет ненулевой коэффициент, то множество* $\widetilde{M}$ *обладает сформулированным выше свойством.*

2. Пусть приведённая система (2) имеет положение равновесия O типа седло-фокус, т.е. с комплексными ляпуновскими показателями $\alpha \pm i\beta, -\alpha \pm i\beta$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Тогда в некоторых канонически сопряжённых переменных x_1, y_1, x_2, y_2 гамильтониан принимает вид $H(z) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) + \beta(x_1y_2 - x_2y_1) + O_4$.

Теорема 2. *Пусть сепаратрисы положение равновесия* O *трансверсально пересекаются, следовательно, имеется инвариантное множество* M. *Если в разложении функции* $\Psi(z)$ *по степеням* x_1, y_1, x_2, y_2 *квадратичные члены, линейные по паре переменных* x_1, x_2 *и по паре пере-*

менных y_1, y_2, имеют вид $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$, причём $\beta(a_{11}+a_{22})+\alpha(a_{21}-a_{12}) \neq 0$, то множество $\widetilde{M}$ обладает сформулированным выше свойством.

3. Пусть приведённая система (2) имеет положение равновесия O типа седло-седло, т.е. с действительными ляпуновскими показателями $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тогда в некоторых канонически сопряжённых переменных x_1, y_1, x_2, y_2 гамильтониан принимает вид $H(z) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + O_3$. Если числа λ_1, λ_2 близки так, что $\lambda_1^2 < \lambda_2$, то можно добиться, чтобы сепаратрисы задавались условиями $x_1 = x_2 = 0$ и $y_1 = y_2 = 0$, а система на них принимала линейный вид.

Теорема 3. *Пусть сепаратрисы положение равновесия O трансверсально пересекаются, причём гомоклинические траектории входят обоими концами в O, касаясь ведущих направлений (т.е. осей координат x_2, y_2, соответственно) и выполнены условия (Д.В.Тураев и Л.П.Шильников), гарантирующие, что приведённая система имеет инвариантное множество M квазислучайных движений. Пусть λ_1, λ_2 близки, а гомоклинические траектории на каждой из сепаратрис не лежат на неведущей линии $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, соответственно. Если $\lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{22} \neq 0$, где a_{11}, a_{22} — описанные в Теореме 2 коэффициенты в разложении $\Psi(z)$, то множество $\widetilde{M}$ обладает сформулированным выше свойством.*

Литература

1. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи матем. наук, **36**:4 (1981), 161-176.

2. *Devaney R.L.* Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Diff. Equat., **21** (1976), 431-438.

3. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла // Докл. АН СССР, **304**:4 (1989), 811-814.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ

А.В. Егорова

nastik.e@bk.ru

УДК 517.929

Рассматриваются модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные системой разностных уравнений. Ставится задача оптимального сбора ресурса на бесконечном промежутке времени при различных ограничениях на условия промысла. Исследуется средняя временная выгода от извлечения ресурса и описывается стратегия промысла, которая является оптимальной среди других способов эксплуатации популяции.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Егорова Анастасия Владимировна, магистрант, Владимирский государственный университет (ВлГУ) (Владимир, Россия); Anastasia Egorova (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

On calculation of the average time profit for exploited population

We consider models of dynamics of exploited population, given by the system of difference equations. The problem of optimal harvesting of renewable resource at an infinite time interval is put under various restrictions on extraction conditions. We investigate the average time profit from resource extracting and describe a harvesting strategy that is optimal among other methods of exploitation of the population.

Keywords: model of the population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation

На протяжении многих лет остается актуальной проблема рационального использования природных ресурсов. В последние годы множество работ посвящено исследованию режимов динамики структурированной популяции и максимизации дохода от промыслового воздействия на нее (см. [1] и обзор литературы в [2]). Так, в [3] аналитически показано, что для некоторых двухвозрастных популяций оптимальным является изъятие фиксированной доли от численности особей только одной из возрастных групп, а при одновременной эксплуатации обоих возрастов максимум дохода не достигается. Наряду с этим проводятся исследования дохода от извлечения ресурса для дифференциальных уравнений и систем, зависящих от случайных параметров [4]. Современное состояние работ по вопросам оптимальной добычи ресурса для различных моделей эксплуатируемых популяций более подробно описано в [1].

Предположим, что исследуемая неоднородная популяция разделена на $n \geqslant 2$ возрастных классов. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ количество ресурса каждого из класса в момент $k = 0, 1, 2, \ldots$. Введем множество $U \doteq \{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots\big)\}$, где $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n$ и рассмотрим последовательность $\overline{u} \in U$ как управление для достижения лучшего результата сбора. Тогда модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$x(k+1) = F\big((1-u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k) = \big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$, $(1-u_i(k))x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида, оставшееся после сбора в момент k, $F(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, $f_i(x)$ — вещественные неотрицательные функции, заданные для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $f_i(0) = 0$, $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ и матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ является невырожденной для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Пусть $C_i \geqslant 0$ — стоимости единицы ресурса каждого из классов, тогда стоимость всей добываемой продукции в момент k равна

$$z(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k) u_i(k).$$

Для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ определим *среднюю временную выгоду* от извлечения ресурса (см. [4])

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)\,. \tag{1}$$

Основная задача данной работы заключается в построении такого способа эксплуатации популяции, при котором значение функции (1) максимальное.

Стационарным режимом эксплуатации популяции называется такой способ добычи ресурса, при котором $u(k) = u^0 = (u^0_1, \ldots, u^0_n) \in [0,1]^n$.

Вначале рассмотрим однородную популяцию, заданную моделью

$$x(k+1) = f\big((1-u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}_+$ — количество ресурса до сбора в момент k, $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Без ограничения общности можем полагать $C_1 = 1$, поэтому из (1) следует, что средняя временная выгода равна

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x(j)u(j).$$

Утверждение 1. *Пусть $d(x) \doteq f(x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0)$ из некоторой окрестности точки $f(x^*)$ максимальное значение функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ равно $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = f(x^*) - x^*$ и достигается при стационарном режиме эксплуатации $u^*(k) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k = 0, 1, \ldots$.*

Пример 1. Предположим, что модель однородной эксплуатируемой популяции задана уравнением

$$x(k+1) = 4 \cdot (1-u(k))x(k) \cdot (1 - (1-u(k))x(k)), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Функция $d(x) = 4x(1-x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* = 0.375$. Согласно утверждению 1, максимальное значение функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигается при стационарном режиме эксплуатации и равно $f(x^*) - x^*$. Несложно посчитать, что для всех $x(0) \in (0,1)$ выполнены равенства

$$u^* = 1 - \frac{x^*}{f(x^*)} = 0.6 \quad \text{и} \quad H\big(\overline{u}, x(0)\big) = f(x^*) - x^* = 0.5625.$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *функция $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i\big)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ и $x^*_i < f_i(x^*) \neq 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$;*

2) *точка* $F(x^*)$ *является устойчивым положением равновесия системы* $x(k+1) = F\big((1-u^0)x(k)\big)$, $k \geqslant 0$ *при*

$$u^0 = u^* = \left(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\right).$$

Тогда для любого $x(0)$ *из некоторой окрестности точки* $F(x^*)$ *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает максимального значения*

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(x^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - x_i^*\big)$$

при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}^* = (u^*, \ldots, u^*, \ldots)$.

Пример 2. Пусть динамика двухвозрастной популяции описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 4\big(1-u_1\big)x_1(k) + \big(1-u_1\big)x_1(k)\big(1-u_2\big)x_2(k) - 2(1-u_1)^2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4\big(1-u_2\big)x_2(k) + \frac{1}{4}\big(1-u_1\big)x_1(k)\big(1-u_2\big)x_2(k) - 3(1-u_2)^2x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k)$ — численность младшего возрастного класса в момент k, $x_2(k)$ — численность старшего возрастного класса, в момент времени k, k — номер периода размножения, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $u_1 = u_1(k)$, $u_2 = u_2(k)$ — доли ежегодного промыслового изъятия для младшего и старшего возрастного класса соответственно.

Опишем оптимальный режим эксплуатации. Пусть $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, тогда функция

$$D(x_1, x_2) = 9x_1 + 6x_2 + \frac{7}{2}x_1x_2 - 6x_1^2 - 6x_2^2$$

достигает максимального значения в точке $(x_1^*, x_2^*) \approx (0.9791, 0.7856)$.

Согласно теореме 1, максимальное значение функции $H(\overline{u}, x(0))$ достигается при стационарном режиме эксплуатации. Здесь оптимальные управления $u_1^* \approx 0.6463$, $u_2^* \approx 0.4704$ и максимальная средняя временная выгода $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(x_1^*, x_2^*) \approx 6.7628$.

Литература

1. *Абакумов А.И., Израильский Ю.Г.* Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию // Математическое моделирование, **11**:2 (2016), 191–204.

2. *Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я.* Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика, **11**:1 (2016), 1–13.

3. *Жданова О.Л., Фрисман Е.Я.* Модельный анализ последствий оптимального промысла для эволюции двухвозрастной популяции // Информатика и системы управления, **40**:2 (2014), 12–21.

4. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **28**:1 (2018), 48–58.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.В. Зайцева
n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 517.95

Для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области исследованы начально-граничные задачи в зависимости от числового параметра, входящего в уравнение. Решения построены в виде рядов Фурье-Бесселя. Единственность решений задач проводится методом интегральных тождеств. Доказаны теоремы существования и устойчивости решений поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, сингулярный коэффициент, начально-граничная задача, ряд Фурье-Бесселя, равномерная сходимость.

Initial-boundary value problems for hyperbolic equation with singular coefficient

We research initial-boundary value problems in a rectangular domain for the hyperbolic equation with a singular coefficient. The solutions are obtained in the forms of the Fourier-Bessel series. The uniqueness of solutions of the problems are established by means of the method of integral identities. The existence and stability theorems for the solutions of the problems are proved.

Keywords: hyperbolic equation, singular coefficient, initial-boundary value problem, Fourier-Bessel series, uniform convergence.

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, что обусловлено использованием данного класса уравнений в многочисленных приложениях к задачам газовой динамики и акустики, теории струй в гидродинамике, механике, теории упругости и пластичности. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [1]. Особое место в данной теории занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя, изучение которых было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу. Обширное исследование уравнений трех основных классов с оператором Бесселя представлено в работах [2–5].

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, $l, T > 0$ – заданные действительные числа, гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \frac{k}{x}u_x = 0, \tag{1}$$

Зайцева Наталья Владимировна, старший преподаватель, Казанский федеральный университет (Казань, Россия); Natalya Zaitseva (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

где $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial}{\partial x} = x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right)$ – оператор Бесселя, $k \neq 0$ – заданное действительное число.

В данной работе исследованы первая и вторая начально-граничные задачи для гиперболического уравнения (1) в прямоугольной области D при всех $k \neq 0$.

Постановка первой начально-граничной задачи. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x,t) \in C(\overline{D}), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k < 1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – *заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям* $\varphi(l) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ *при* $k < 1$.

Постановка второй начально-граничной задачи. *Найти функцию* $u(x,t)$, *которая удовлетворяет (2)–(4) и условиям:*

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\lim_{x \to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad |k| < 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \leqslant -1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – *заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям* $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$.

Методом интегральных тождеств доказаны теоремы единственности решений поставленных задач. Для доказательства существования решения задачи используются оценки коэффициентов ряда и системы собственных функций, которые установлены на основании асимптотических формул для функции Бесселя и нулей этой функции. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений [6, 7]. Для каждой из задач доказана

Теорема. *Для решения задачи справедлива оценка* $||u|| \leqslant C(||\varphi|| + ||\psi||)$, *где постоянная* C *не зависит от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР, **77**:2 (1951), 181-183.

2. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and degenerate Cauchy problems. — New York: Academic Press, 1976.

3. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — Москва: Наука. Физматлит, 1997.

4. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Современная математика. Фундаментальные направления, **52** (2014), 3-141.

5. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления, **64**:2 (2018), 211-426.

6. *Zaitseva N.V.* First initial-boundary value problem for B-hyperbolic equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, **40**:2 (2019), 240-247.

7. *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика, (2019), [в печати].

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г.А. Закирова

zakirovaga@susu.ru

УДК 517.518

Разработан численный метод решения обратных спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов. В тезисах показано применение этого метода для решения модельных краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: спектральная теория, теория возмущений, обратная задача, оператор высокого порядка

Inverse spectral problem for a fourth order differential operator

A numerical method for solving inverse spectral problems for discrete semi-bounded operators is developed. The theses show the application of this method to the solution of model boundary value problems for ordinary differential operators of the fourth order. The results of computational experiments are presented.

Keywords: spectral theory, perturbation theory, inverse problem, high order operator

На основе [1]–[3] в работах [4]–[6] разработан численный метод решения обратных спектральных задач, позволяющий решать обратные задачи для дискретных полуограниченных операторов. При этом удалось построить алгоритмы, которые можно с малыми корректировками перенести на задачи с необходимым порядком, видом дифференциальных операторов и граничных условий.

Закирова Галия Амрулловна, к.ф.-м.н., доцент, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Galiya Zakirova (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Покажем применение данного метода на примере модельных краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка. Рассмотрим спектральную задачу

$$Lu = \mu u, \tag{1}$$

$$Gu|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

для дискретного полуограниченного оператора L, заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D_L \subset H$, Γ – граница области D_L.

Теорема 1.[4] *Пусть L – дискретный полуограниченный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H и удовлетворяет заданным для оператора L однородным граничным условиям. Тогда приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_n$ оператора L находятся по формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \quad n \in N, \tag{3}$$

где $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$.

Воспользовавшись теоремой 1, найдем

$$\int\limits_0^1 \Big[p_0(s)\varphi_n^{(4)}(s) + p_1(s)\varphi_n'''(s) + p_2(s)\varphi_n(s)'' + p_3(s)\varphi_n(s)' + \\ + p_4(s)\varphi_n(s)\Big]\varphi_n(s)ds = \widetilde{\mu}_n^\delta, \quad \widetilde{\mu}_n^\delta = \widetilde{\mu}_n(n) - \delta_n. \quad n \in N$$

Запишем полученное уравнение в матричном виде

$$A\widehat{P} \equiv \int\limits_a^b \widehat{K}(x,s)\widehat{P}(s)ds = \widetilde{f}(x), \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{4}$$

где A – оператор Фредгольма,
$\widehat{K}(x_k, s) = \Big(K_0(x_k,s) \ \ K_1(x_k,s) \ \ K_2(x_k,s) \ \ K_3(x_k,s) \ \ K_4(x_k,s)\Big)$, $K_j(x_n, s) = \varphi_n^{(4-j)}(s)\varphi_n(s)$, $\widehat{P}(s) = \begin{pmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ p_2(s) \\ p_3(s) \\ p_4(s) \end{pmatrix}$, $x_k \in [c,d]$, $\widetilde{f}(x_n) = \widetilde{\mu}_n^\delta$, $[c,d]$ – отрезок содержащий необходимое количество приближенных собственных значений спектральной задачи (1)–(2).

Допустим, что ядро $\widehat{K}(x,s)$ интегрального уравнения (4) непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, функции $\widetilde{f}(x) \in L_2[c,d]$, $p_j(s) \in W_2^n[a,b]$, $j = \overline{0,4}$, $n = \max(r_1, r_2, t_1, t_2)$. Точные значения правой части интегрального уравнения (4) $f(x)$ неизвестны. Известны только ее приближенные значения $\widetilde{f}(x_k)$ такие, что $||f - \widetilde{f}||_{L_2[c,d]} < \delta$. Для численного решения данной задачи используется регуляризация Тихонова.

В качестве иллюстрации рассмотрим спектральную задачу.

$$\begin{gathered} u^{(4)} + p_4(s)u = \mu u, \quad 0 < s < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = u'(1) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $u \in W_2^4(a,b)$, $p_4(s)$ - гладкая функция. За систему координатных функций $\{\varphi_k(s)\}_{k=1}^n$ в методе Галеркина возьмем собственные функции спектральной задачи

$$\begin{gathered} \varphi^{(4)} = \lambda\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \\ \varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

вид которых известен. Собственные значения спектральной задачи (5)–(6) вычисляются по формулам $\lambda_k = q_k^4, \quad k = \overline{1,\infty}$. В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента по нахождению значений потенциала p_{4n}^{α} в узловых точках дискретизации при следующих значениях параметров: $N_s = 17$ - число узлов дискретизации, $c = 504,3358$, $d = 9135911,1596$, $p_4(s) = s^2 + 3s + 2$. Через p_{2n}^{α} обозначены значения псевдорешения p_2^{α} в узлах дискретизации. Величины ζ_n определяет поточечную абсолютною погрешность полученного псевдорешения p_4^{α} и определяются по формулам $\zeta_n = \left| f(x_n) - \int\limits_a^b K_4(x_n,s)p_4^{\alpha}(s)ds \right|, \quad n = \overline{1,N_s}$.

Таблица 1

n	s_n	$p_4(s_n)$	p_{4n}^{α}	$\lvert p_4(s_n) - p_{4n}^{\alpha}\rvert$	ζ_n
1	0,0000	2,0000	3,7353	1,7353	$1,6703 \cdot 10^{-1}$
2	0,0625	2,1914	3,7778	1,5864	$1,0987 \cdot 10^{-2}$
3	0,1250	2,3906	3,7499	1,3593	$5,9071 \cdot 10^{-3}$
4	0,1875	2,5977	3,7100	1,1123	$5,4734 \cdot 10^{-3}$
5	0,2500	2,8125	3,7060	0,8935	$3,8745 \cdot 10^{-3}$
6	0,3125	3,0352	3,7834	0,7482	$2,6786 \cdot 10^{-3}$
7	0,3750	3,2656	3,9236	0,6580	$1,8679 \cdot 10^{-3}$
8	0,4375	3,5039	4,0571	0,5532	$1,3017 \cdot 10^{-3}$
9	0,5000	3,7500	4,1115	0,3615	$8,8254 \cdot 10^{-4}$
10	0,5625	4,0039	4,0571	0,0532	$5,5436 \cdot 10^{-4}$
11	0,6250	4,2656	3,9236	0,3420	$2,8582 \cdot 10^{-4}$
12	0,6875	4,5352	3,7834	0,7518	$5,8948 \cdot 10^{-5}$
13	0,7500	4,8125	3,7060	1,1065	$1,3703 \cdot 10^{-4}$
14	0,8125	5,0977	3,7100	1,3877	$3,0895 \cdot 10^{-4}$
15	0,8750	5,3906	3,7499	1,6407	$4,6141 \cdot 10^{-4}$
16	0,9375	5,6914	3,7778	1,9136	$5,9765 \cdot 10^{-4}$
17	1,0000	6,0000	3,7353	2,2647	$7,2014 \cdot 10^{-4}$

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты по восстановлению операторов Штурма-Лиувилля четвертого порядков по известным их собственным значениям, принадлежащих некоторым отрезкам, показали высокую вычислительную эффективность разработанного численного метода решения обратных спектральных задач порожденных дискретными полуограниченными операторами.

Литература

1. *Садовничий В.В, Дубровский В.В., КадченкоС.И., Кравченко В.Ф.* Вычисление собственных чисел задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при небольших числах Рейнольдса // Доклады Академии наук. 1998. Т. 363. № 6. - С. 748.

2. *Кадченко С.И.* Метод регуляризованных следов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2009. N 37 (170). - С. 4 – 23.

3. *Кадченко С.И., Какушкин С.Н* Численный метод нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2012. N 27 (286). - С. 45 - 57.

4. *Кадченко С.И.*Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия - 2013. - N 9-1(100). - С. 5 - 11.

5. *Кадченко С.И.* Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математическое моделирование и программирование 2013. - Т. 6, N 4. - С. 15 - 25.

6. *Kadchenko S.I., Zakirova G.A.* A numerical method for inverse spectral problems // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. N 3. С. 116-126.

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.П. Иванова

elpaliv@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с возмущениями в сдвигах аргументов. Получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гордингa в алгебраическом виде. Исследована непрерывная зависимость решений этих задач от сдвигов аргументов.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, краевые задачи, сильная эллиптичность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17–01–00401).

Иванова Елена Павловна, к.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (МАИ), Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва, Россия); Elena Ivanova (Moscow Aviation Institute, RUDN University, Moscow, Russia)

On coercivity of perturb differential-difference equations

Boundary value problems for differential-difference equations with perturbations in the shifts of the arguments are considered. The algebraic criterion of fulfillment of the Garding-type inequality was established. We investigated continuous dependence of solutions of these boundary-value problems on the shifts of arguments.

Keywords: differential-difference equations, boundary-value problems, strong ellipticity

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(R_{ij\varepsilon} u_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(Ru_{x_i}\right)_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q)\,, \tag{2}$$

где $Q-$ ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, $f \in L_2(Q)$.

Разностные операторы $R_{ij\varepsilon}, R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{ij\varepsilon}u(x) = a_{ij0}u(x) + \sum_{k=1}^{J} a_{ijk}(u(x_1 + k\varepsilon, x_2, ..., x_n) + u(x_1 - k\varepsilon, x_2, ..., x_n))$$

$$Ru(x) = b_0 u(x) + \sum_{h \in M \setminus 0} b_h (u(x+h) + u(x-h)).$$

Здесь $a_{ijk}, b_h \in \mathbb{R}, a_{ijk} = a_{jik}$; $M-$ множество векторов с целочисленными координатами, $\varepsilon > 0-$ малый параметр (далее $\varepsilon \to 0$). Решение u задачи (1)-(2) ищется в пространстве Соболева $\mathring{H}^1(Q)$ и определяется стандартным образом.

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально - разностных уравнений с целочисленными сдвигами аргументов в старших членах построена в работах А.Л. Скубачевского [1],[2].

Назовем уравнение (1) сильно эллиптическим, если выполнено неравенство типа Гординга:

$$\operatorname{Re}\left(Au, u\right)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(Q)} \quad (\forall u \in C_0^\infty(\Omega),\ c_1 > 0).$$

Получим условия равномерной (по $\varepsilon > 0$) сильной эллиптичности уравнений (1). Вопрос о непрерывной зависимости константы эллиптичности и решений функционально-дифференциальных уравнений от параметра ε при $\varepsilon \to 0$ впервые рассматривался в [3]. Краевые задачи для возмущенных дифференциально-разностных уравнений в одномерном случае исследованы в [4].

Обозначим $a_R(\eta, \xi) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij0} + 2\sum\limits_{k=1}^{J} a_{ijk}\cos(k\eta))\xi_i\xi_j \quad (\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n)$ $a_{\min} := \inf\limits_{\eta,\xi} \operatorname{Re}\ a_R(\eta, \xi)$ $(\eta \in \mathbb{R}, |\xi| = 1)$. Введем операторы $R^C : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^C u(x) = a_{\min} u(x) + Ru(x)$, $R^C_Q = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где

$I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)-$ оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)-$ оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Теорема 1. *Уравнение (1) является сильно эллиптическим в $\bar{Q}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда контрольный оператор R_Q^C является положительно определенным.*

Обозначим $a_{ij}^{\lim} = a_{ij0} + 2\sum\limits_{k=1}^{J} a_{ijk}$ и рассмотрим предельную задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^{\lim} u_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(Ru_{x_i}\right)_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{3}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q)\,. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ и любом фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ задача (1)-(2) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in \mathring{H}^1(Q)$. При этом $\|u_\varepsilon - u_{\lim}\|_{\mathring{H}^1(Q)} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, где $u_{\lim} \in \mathring{H}^1(Q)-$ решение задачи (3),(4).*

Литература

1. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel – Boston – Berlin: Birkhauser, 1997.

2. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально - разностных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук, **71**:5 (2016), 3-112.

3. *Rossovskii L.E.* Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function // J. of Mathematical Sciences, **223**:4 (2017), 351–493.

4. *Ivanova E.P.* Continouse dependence on translations of the independent variables for solutions of boundary-value problems for differential-difference equations // Journal of Mathematical Sciences, **233**:6 (2018), 828-852.

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

М.Ю. Игнатьев

ignatievmu@info.sgu.ru

УДК 517.984

Изучается задача рассеяния на полуоси для систем дифференциальных уравнений, имеющих регулярную особую точку в нуле. Устанавливаются существование, единственность и некоторые свойства решений типа Вейля, играющих ключевую роль при исследовании прямых и обратных спектральных задач.

Ключевые слова: задачи рассеяния, системы дифференциальных уравнений, особенность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6).

Игнатьев Михаил Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия); Mikhail Ignatiev (Chernyshevsky Saratov State University, Saratov, Russia)

On scattering problem for the systems of differential equations with a singularity

The scattering problem on the semi-axis for the systems of the differential equations with a regular singularity at the origin is studied. We establish the existence, the uniqueness and some properties of the Weyl-type solutions which play an important role in investigation of direct and inverse spectral problems.

Keywords: scattering problems, systems of differential equations, singularity

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = \rho By + x^{-1}Ay + q(x)y,\ x \in (0,\infty) \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где $A, B, q(x) - n \times n$ - матрицы, $n > 2$, A, B постоянны, $q_{jk}(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$. В дальнейшем через X_p будем обозначать множество внедиагональных матриц-функций с элементами из $L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$.

Будем считать, что $B = diag(b_1, \dots, b_n)$, $q_{jj}(x) \equiv 0$, $a_{jj} = 0$, $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, не лежащие на одной прямой и такие, что $\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$. Пусть, кроме того, собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы A таковы, что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, $\mathrm{Re}\mu_j \neq 0$ и $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \dots < \mathrm{Re}\mu_n$.

Определение. Обозначим через $R_1, \dots, R_n$ перестановку чисел $b_1, \dots, b_n$ такую, что $\mathrm{Re}\,\rho R_1 < \mathrm{Re}\,\rho R_2 < \dots < \mathrm{Re}\,\rho R_n$, через $f_1, \dots, f_n$ – соответствующую перестановку векторов $e_1, \dots, e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$. k-м решением типа Вейля назовём решение $\psi_k(q,x,\rho)$ системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\psi_k(q,x,\rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,\ \psi_k(q,x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(f_k + o(1)), x \to \infty.$$

Обозначим

$$\Sigma := \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Пусть S - некоторый сектор с вершиной в начале координат, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, и пусть $c(z) = (c_1(z), \dots, c_n(z))$ и $e(z) = (e_1(z), \dots, e_n(z))$ фундаментальные матрицы невозмущенной системы

$$\frac{dy}{dz} = By + z^{-1}Ay,\ z \in S,$$

такие что

$$e_k(z) = \exp(zR_k)(f_k + o(1)),\ z \to \infty, \quad c_k(z) = z^{\mu_k}(h_k + o(1)),\ z \to 0,$$

где h_k - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению μ_k. Будем говорить, что в секторе S выполнено *условие информативности*, если для каждого $k = \overline{2,n}$ $\det(e_1(z), \dots, e_{k-1}(z), c_k(z), \dots, c_n(z)) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть в секторе S выполнено условие информативности. Тогда для каждого $k = \overline{1,n}$ k-е решение типа Вейля существует и единственно при всех $\rho \in S$, за исключением, быть может, некоторого не более чем счётного множества. Если $q = 0$, то решение типа Вейля существует и единственно при всех $\rho \in S$.*

Определим функции:

$$W_0(\xi) := (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2,\ |\xi| \leqslant 1,\ W_0(\xi) := (W_0\left(\xi^{-1}\right))^{-1},\ |\xi| > 1,$$

$$W_k(\xi) := W_0\left(\xi^{\mu_k}\right)\exp(R_k\xi),\ |\xi| \leqslant 1, \quad W_k(\xi) := \exp(R_k\xi),\ |\xi| > 1,$$

$k = \overline{1,n}$. Через $W(\xi)$ обозначим матрицу

$$W(\xi) := diag(W_1(\xi), \ldots, W_n(\xi)).$$

Условимся через $C_0(\overline{S})$ обозначать пространство функций, непрерывных по $\rho \in \overline{S}$ и стремящихся к 0 при $\rho \to \infty$. Аналогично, через $C_0(l)$, где l - некоторый луч вида $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{S} \setminus \{0\}$ будем обозначать пространство функций, непрерывных на l и стремящихся к 0 при $\rho \to \infty$. Через $H(l)$ обозначим пространство $C_0(l) \cap L_2(l)$.

Составим из решений типа Вейля матрицу

$$\psi(q, x, \rho) := (\psi_1(q, x, \rho), \ldots, \psi_n(q, x, \rho)).$$

Теорема 2. *Пусть в секторе S выполнено условие информативности. Тогда справедливо представление:*

$$\psi(q, x, \rho) = W(\rho x)\psi(0, x, \rho)(W(\rho x))^{-1}\beta(q, x, \rho),$$

где

$$\beta_{jk}(q, x, \rho) = \frac{\delta_{jk} + d_{jk}(q, x, \rho)}{1 + d_k(q, x, \rho)},$$

δ_{jk} - символ Кронекера, $d_{jk}, d_k \in C(X_p, BC([0,\infty), C_0(\overline{S})))$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{S} \setminus \{0\}$ ограничения $d_{jk}|_l$, $d_k|_l$ принадлежат $C(X_p, BC([0,\infty), H(l)))$.

Полученные результаты являются обобщением результатов [3], где исследовалась система (1) с абсолютно непрерывными коэффициентами $q_{jk}(\cdot)$.

Литература

1. *Beals R., Deift P. and Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.

2. *Yurko V.A.* On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems, **9** (1993), 495—502.

3. *Ignatyev M.* Spectral analysis for differential systems with a singularity // Results in Mathematics, **71** (2017), 1531–1555.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Е.В. Игонина
elenaigonina7@mail.ru

УДК 517.91

Исследована устойчивость системы управления обратным маятником, описываемой моделью Такаги–Сугено, с помощью метода функций Ляпунова и построения логического регулятора.

Ключевые слова: обратный маятник, логический регулятор, устойчивость, стабилизация, модель Такаги–Сугено.

On the study of the stability of the control system of the pendulum type

The stability of an inverse pendulum control system described by the Takagi-Sugeno model is investigated using the Lyapunov function method and the construction of a logic controller.

Keywords: reverse pendulum, logical controller, stability, stabilization, Takagi-Sugeno model

Изучению дифференциальных моделей маятниковых систем в настоящее время уделяется огромное внимание в связи с тем, что они используются для описания широкого класса управляемых объектов (шагающие роботы, технические средства – пожарные вертолеты с водосбросным ковшом, портальные краны, гироскутеры) и процессов (управление запуском и полетом ракет).

В работе предложен подход к исследованию устойчивости системы управления маятникового типа, основанный на аппроксимации исходной модели моделью Такаги–Сугено и построении логического регулятора, осуществляющего управление. Рассматривается дифференциальная модель, описывающая динамику обратного маятника, прикрепленного к горизонтально двигающейся тележке:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g\sin(x_1(t)) - \frac{aml x_2^2(t)\sin(2x_1(t))}{2}}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))} - \frac{a\cos(x_1(t))u(t)}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))}, \qquad (1)$$

где $x_1(t)$ — угол (в радианах) отклонения маятника от вертикальной оси, $x_2(t)$ — угловая скорость, $g = 9,8$ м/c^2 — гравитационная постоянная, m — масса маятника, M — масса тележки, $2l$ — длина маятника, u — сила, прикладываемая к тележке (в Ньютонах), $a = \frac{1}{m+M}$. Задача заключается в стабилизации и удержании маятника в верхнем неустойчивом вертикальном положении за счет воздействия, оказываемого регулятором на тележку.

Игонина Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий, ЕГУ имени И.А. Бунина (Елец, Россия); Elena Igonina (Bunin Yelets State University, Yelets, Russia)

С помощью процедуры аппроксимации, описанной в работе [1], система дифференциальных уравнений (1) приводится к виду модели Такаги–Сугено:

П1: Если $x_1(t)$ приблизительно равно 0, то $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$.

П2: Если $x_1(t)$ приблизительно равно

$$\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

то $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$, где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2}, \end{bmatrix} \quad \beta = \cos 88^\circ.$$

Логический регулятор, полученный с помощью процедуры параллельной распределенной компенсации [2], определяется правилами вида:

П1: Если $x_1(t)$ приблизительно равно 0, то $u(t) = F_1x(t)$.

П2: Если $x_1(t)$ приблизительно равно $\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right)$, то $u(t) = -F_2x(t)$, где F_1, F_2 — матрицы коэффициентов усиления.

Тогда общее задание логического регулятора, стабилизирующего систему, представимо в виде

$$u(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - h_2(x_1(t)F_2x(t), \tag{3}$$

где h_1 и h_2 — функции принадлежности для правил П1 и П2 соответственно, и $h_1 + h_2 = 1$. Для исследования устойчивости модели (2) с логическим регулятором (3) использованы результаты работы [2]. Построена функция Ляпунова вида:

$$V(x(t)) = h_1(x_1(t))x^T(t)P_1x(t) + h_2(x_2(t))x^T(t)P_2x(t),$$

где P_1, P_2 — положительно определенные матрицы. С помощью численного метода Лоусона [3, 4] проведено качественное исследование решений системы дифференциальных уравнений (2) с учетом (3) — (4). Для конкретных начальных условий и значений параметров системы $m = 2$ кг, $M = 8$ кг, $2l = 1$ м определены положительно определенные матрицы P_1, P_2, и матрицы F_1, F_2, обеспечивающие условие асимптотической устойчивости системы (2).

Литература

1. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber. 1985. V. 15. P. 116–132.

2. *Abdelmalek I., Golea N., Hadjili M.* A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. № 1. P. 39–51.

3. *Lawson D. J.* Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipshitz constants // SIAM J. Numer. Anal. 1967. V. 4. № 3. P. 372–380.

4. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Общее описание подпрограмм решения обыкновенных дифференциальных уравнений библиотеки численного анализа

НИВЦ МГУ // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т.4. С. 7–15.

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ (ПЯТОЙ) СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

М. Исмати, Н.М. Исматов

mismati@mail.ru, ismatov.n.m@ mail.ru

УДК 517.934-948

В настоящей работе устанавливается почти-периодичность обобщенного и классического решения пятой (в частности, четвертой) смешанных задач для уравнения динамики трехмерного упругого тела (уравнения Ламе).

Ключевые слова: почти периодичность, обобщенные и классические решения, смешанные задачи, уравнения Ламе

On the almost-periodicity solution of the fourth (fifth) mixed problem for the system of the Lame equations

In this paper, we establish almost periodic generalized and classical solutions of fifth (in particular, fourth) mixed problems for the equations of dynamics of a three-dimensional elastic body (the equation of Lame).

Keywords: almost-periodicity, generalized and classical solutions,mixed problems, Lame's equation

Пусть — некоторое банахово пространство (в частности, гильбертово пространство). Напомним [1] определение почти- периодичности:

Определение 1. Функция $f(t)$, непрерывная при $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$, со значением из B называется почти-периодической (в дальнейшем сокращенно п.-п.) функцией в B, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число l_ε такое, что в любом интервале $l_\varepsilon = (a; a + l_\varepsilon)$ длины l_ε , $l_\varepsilon \in J \equiv (-\infty, \infty)$, найдется число $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ (ε-почти период), для которого неравенство $\|f(t+\tau) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$ выполняется для всех $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$. ($\|\cdot\|$-норма в B). С. Бохнер [2] доказал, что если множество значений $R_{f(t)}$ функции $f(t)$, $t \in J \equiv (-\infty, \infty)$ относительно компактно в B и существует постоянная $\sigma > 0$ такая, что для любого $t \in J$ имеет место неравенство

$$\inf_t \|f(t+\tau) - f(t)\| > \sigma \sup_t \|f(t+\tau) - f(t)\|, \tag{1}$$

Исмати Мухаммаджон, д.ф.-м.н, профессор, ИПС (Душанбе, Таджикистан); Muhammadjon Ismati (Institute of Enterpreneurship and Service of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Исматов Набиджон Мухаммаджонович, к.ф.-м.н, доцент, ИПС (Душанбе, Таджикистан); Nabijon Ismatov Muhammadjonovich (Institute of Enterpreneurship and Service of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

то $f(t)$-п.-п. функция в B.

Пусть теперь требуется найти решение пятой смешанной задачи для системы уравнений динамики изотропного однородного упругого тела:

$$\rho u_{tt} = \Delta^* u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \cup S \tag{3}$$

$$[N^{(n)} + \sigma(x)]u \mid_{\Gamma_T} = 0, \tag{4}$$

Здесь φ, ψ и $f(x,t)$ — заданные вектор-функции, Ω — конечная трехмерная связная область с границей S типа Ляпунова,

$$N^{(n)} \equiv \overset{k}{T}{}^{(n)} = \left\| \overset{k}{T}{}^{(n)}_{ij} \ (\frac{\partial}{\partial x}, n(x)) \right\|_{3\times 3}$$

— оператор псевдонапряжения, в котором

$$\overset{k}{T}_{ij} = \mu(\nu+\mu) n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + k(n_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - n_i(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{ij}\mu \frac{\partial}{\partial n(x)},$$

$k = \mu(\nu+\mu)(\nu+3\mu)^{-1}$, $\sigma(x)$ — вещественная непрерывная положительно определенная матрица размера 3×3, заданная на S. Известно [3], что при $k = \mu$ получим оператор напряжения $T^{(n)}$ В частности, при $\sigma(x) \equiv 0$ получим четвертое краевое условие $N^{(n)}u \mid_\Gamma = 0$.

Для классического решения смешанной задачи (2)-(4) имеет место

Теорема. *Пусть начальные вектор-функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*
1) Вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывна в области Ω и обладает в этой области непрерывными производными до 3-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными четвертого порядка. Кроме того, $[N^{(n)} + \sigma]\varphi(x)|_S = [N^{(n)} + \sigma]\Delta^*\varphi(x)|_S = 0$.
2) Вектор-функция $\psi(x)$ непрерывна в области Ω и обладает в этой области непрерывными производными до 2-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными третьего порядка. Кроме того, $[N^{(n)} + \sigma]\psi(x)|_S = 0$.
3) Вектор-функция $f(x,t)$ непрерывна в области Q_T и для $\forall t \in [0,T]$ по x обладает в этой области непрерывными производными до 2-го порядка и интегрируемыми с квадратом производными третьего порядка и $[N^{(n)} + \sigma]f(x,t)|_\Gamma = 0$. Кроме того $f(x,t)$ функция является почти периодической по t со значением в пространстве L_2.

Тогда существует единственное почти периодическое классическое решение смешанной задачи (2)-(4).

Доказательство теоремы основывается на результатах работ [4-6].

Замечания.

1. Аналогичное утверждение при более слабых ограничениях имеет место и для обобщенного решения задачи (2)-(4).

2. Полученные результаты аналогичным образом переносятся для $N = 2$ и $N(>3)$-мерных областей.

Литература

1. *Бор Г.* Почти-периодические функции. — ГТТИ, 1934.
2. *Bochner S., Neuman J.* // Trans. AMS. **2**:37 (1935); Ann. Math. **36**:1 (1935).
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. — "Наука 1963.
4. *Исматов М.* О разрешимости смешанной задачи теории упругости с граничным оператором псевдонаппряжения // Тез. докл. Респуб. науч.-практ. конф. — Душанбе, ИБО, 1994. — 119-120.
5. *Исматов М., Исматов Н.М.* Обобщенные решения смешанных задач для уравнения динамики упругого тела и некоторых локальных и нелокальных задачах математической физики. — Душанбе, ИПС, 2009. — 160.
6. *Amerio L.* // Bolletiodel Un. Matem. Zanichelli, 1965. —19-325.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б.Т. Калимбетов, В.Ф. Сафонов

burkhan.kalimbetov@ayu.edu.kz, SafonovVF@yandex.ru

УДК 517.95

Целью исследования являются разработка алгоритма метода регуляризации Ломова для интегро-дифференциальных систем с быстро осциллирующими коэффициентами и описание эффектов, вызванных наличием интегрального члена. В докладе обсуждается случай отсутствия резонанса, т. е. случай, когда целочисленная линейная комбинация частот быстро осциллирующего коэффициента не совпадает с частотой спектра предельного оператора.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегро-дифференциальные уравнения, быстро осциллирующие коэффициенты, регуляризация, асимптотическая сходимость

Integro-differential singularly perturbed equations with rapidly oscillating coefficients

The aim of the study is to develop the Lomov's regularization algorithm for integro-differential systems with rapidly oscillating coefficients and a description of the effects caused by the presence of an integral term. The report discusses the case of lack of resonance, i.e. the case when the integer linear combination of frequencies of the fast oscillating coefficient does not coincide with the frequency of the spectrum of the limit operator.

Keywords: singularly perturbed, integro-differential equations, rapidly oscillating coefficients, regularization, asymptotic convergence

---

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект АР 05133858).

Калимбетов Бурхан Тешебаевич, д.ф.-м.н., доцент, Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан; Kalimbetov Burkhan Teshebaevich (H.A.Yasawi International Kazakh-Turkish university, Turkestan, Kazakhstan)

Сафонов Валерий Федорович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия; Safonov Valeriy Fedorovich (The National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia)

При исследовании различных вопросов, связанных с динамической устойчивостью, со свойствами сред с периодической структурой, при исследовании других прикладных задач, приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами. Асимптотические интегрирование дифференциальных систем уравнений с такими коэффициентами проводились методом расщепления Фещенко-Шкиля-Николенко [1-2] и методом регуляризации Ломова [3-4]. В настоящей работе впервые исследуется система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{dz}{dt} - A(t)z - \varepsilon g(t)\cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}B\,(t)\,z - \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)z(s,\varepsilon)ds = h(t), \\ &z(t_0,\varepsilon) = z^0, \quad t \in [t_0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

где $z = \{z_1, z_2\}$, $h(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$, $\beta'(t) > 0$, $\omega(t)>0$ $(\forall t \in [t_0,T])$, $g(t)$ — скалярная функция, а $A(t)$ и $B(t)$ —(2×2)- матрицы, причем $A\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}$, $z^0 = \left\{z_1^0, z_2^0\right\}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предельный оператор $A\,(t)$ имеет спектр $\lambda_1(t) = -i\omega(t)$, $\lambda_2(t)= + i\omega(t)$, частота быстро осциллирующего косинуса равна $\beta'(t)$. Функции $\lambda_3(t) = -i\beta'(t)$, $\lambda_4(t) = +i\beta'(t)$ обычно называют спектром быстро осциллирующего коэффициента. Целью исследования являются разработка алгоритма метода регуляризации для таких систем и описание эффектов, вызванных наличием интегрального члена. В докладе обсуждается случай отсутствия резонанса, т. е. случай, когда целочисленная линейная комбинация частот быстро осциллирующего коэффициента не совпадает с частотой спектра предельного оператора. Предполагаются выполненными следующие условия:

1) $\omega(t), \beta(t), g(t) \in C^\infty\left([t_0,T]\,,\mathbb{C}^1\right)$, $h(t) \in C^\infty\left([t_0,T]\,,\mathbb{C}^2\right)$,
$B(t) \in C^\infty\left([t_0,T]\,,\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$, $K(t,s) \in C^\infty\left([t_0,T]\,,\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$,

2) для $\forall t \in [t_0,T]$ и всех $n_3 \neq n_4$ имеют место неравенства

$$n_3\lambda_3(t) + n_4\lambda_4(t) \neq \lambda_j(t),\ \lambda_k(t) + n_3\lambda_3(t) + n_4\lambda_4(t) \neq \lambda_j(t),\ k \neq j, k, j = 1,2,$$

для всех мультииндексов $n = (n_3, n_4)$ с $|n| \equiv n_3 + n_4 \geqslant 1$ (n_3 и n_4 — целые неотрицательные числа).

Условие 2) называют условием отсутствия резонанса. После введения регуляризирующих переменных $\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_j(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,4}$ и регуляризации интегрального оператора строится расширенная система, имеющая вид регулярно возмущенной задачи, решение которой определяется в виде степенного ряда по степеням малого параметра. Разрабатывается теория нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач для коэффициентов этого ряда и доказывается асимптотическая сходимость сужения этого ряда (на регуляризирующих переменных) к точному решению исходной задачи (1), обсуждается влияние интегрального члена на структуру асимптотики.

Литература

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966.

2. *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР, **143**:5 (1962), 1026-1029.

3. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

4. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Издательство Московского университета, 2011.

ОТСУТСТВИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Ш. Кальменов, Н. Кахарман

kalmenov@math.kz, n.kakharman@math.kz

УДК 517.984.56

В докладе рассматриваются спектральные свойства линейного оператора L_Q, соответствующего краевой задаче для линейного дифференциального уравнения, заданного дифференциальным выражением в области $\Omega \subset R^n$ и однородными граничными условиями. Предполагается, что коэффициенты дифференциального выражения бесконечно дифференцируемы, оператор L_Q обратим, а его обратный L_Q^{-1} является компактным в $L_2(\Omega)$. Рассматривается вопрос, когда спектр оператора L_Q является либо пустым, либо бесконечным множеством. То есть исследуется вопрос об отсутствии конечного спектра у краевых задач для общих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейный оператор, спектр, дифференциальный оператор, краевая задача

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (гранты AP05133239, BR05236656).

Кальменов Тынысбек Шарипович, академик НАН РК, д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Kal'menov Tynysbek (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

Кахарман Нурбек, PhD докторант, Институт математики и математического моделирования, Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан); Kakharman Nurbek (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Absence of a finite spectrum of regular boundary value problems for differential equations

In this work it is discussed the spectral properties of the linear operator L_Q corresponding to the boundary value problem for a linear differential equation defined by a differential expression in the domain $\Omega \subset R^n$ with homogeneous boundary conditions.The coefficients of a differential expression are assumed to be infinitely differentiable, the operator L_Q is invertible, and its inverse L_Q^{-1} is compact in $L_2(\Omega)$. A question when the spectrum of the operator L_Q is either empty or an infinite set is considered. It is studied a question of the absence of a finite spectrum of boundary value problems for general differential equations.

Keywords: linear operator, spectrum, differential operator, boundary value problem

Хорошо известно, что спектральное разложение дифференциальных операторов имеет и фундаментальную и прикладную значимость.

В тоже время проблема конечности спектра дифференциальных операторов, порожденных регулярными краевыми условиями остается открытой проблемой. До сих пор не известно примеров корректных линейных краевых задач, имеющих конечное число собственных значений. В работе [1] Кальменов Т.Ш. и Сураган Д. доказали отсутствие конечного спектра у краевых задач для широкого класса дифференциальных уравнений при предположении, что в некоторой достаточно малой части области коэффициенты исследуемого уравнения являются постоянными. В настоящем докладе это ограничение снимается, но требуется бесконечная дифференцируемость коэффициентов уравнения.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – конечная область. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача Q. *Найти решение уравнения*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$Qu|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Q – линейный граничный оператор, определенный на следах функции u и ее производных до порядка $p-1$ на границе $\partial\Omega$.

Через L_Q обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного выражением (1) на линейном многообразии функций $u \in C^p(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (2). В докладе предполагается, что обратный оператор L_Q^{-1} существует, определен на всем $L_2(\Omega)$ и является компактным. В этом случае спектр оператора L_Q может состоять только из собственных значений.

Основным результатом доклада является доказательство, что при некоторых общих предположениях относительно дифференциального оператора L_Q, он будет либо вольтерровым (т.е. не имеет собственных значений), либо количество его собственных значений будет бесконечно.

Для доказательства этого факта модернизируется методика работы [1] с использованием оценок антиприорного типа (см., например, [2]).

Доклад основан на результатах совместных исследований с М.А. Садыбековым.

Литература

1. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиприорных оценок В.А. Ильина // Докл. РАН, **423**:6 (2008), 730–732.

2. *Ильин В.А.* О точных по порядку соотношениях между L_2-нормами собственных и присоединенных функций эллиптического оператора второго порядка // Дифференц. уравнения, **18**:1 (1982), 30–37.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В.Л. Камынин

vlkamynin2008@yandex.ru

УДК 517.95

Исследована однозначная разрешимость обратных задач одновременного определения двух младших коэффициентов в параболическом уравнении с одной пространственной переменной при различных условиях интегрального наблюдения.

Ключевые слова: обратные задачи, параболические уравнения, интегральное наблюдение

On inverse problems of simultaneous determination of the lower coefficients in a parabolic equation

We investigate the unique solvability of simultaneous determination of two lower coefficients in a parabolic equation with one spatial variable under various conditions of integral observation.

Keywords: inverse problems, parabolic equations, integral observation

---

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Камынин Виталий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Vitaly Kamynin (National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia)

В докладе рассматриваются две обратные задачи одновременного определения коэффициентов перед u и u_x в параболическом уравнении с двумя независимыми переменными.

Обратная задача 1.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(x), c(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv [0,T] \times [-l,l]$ уравнению

$$\rho u_t - u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [-l,l]; \quad u(t,-l) = \mu_1(t),\ u(t,l) = \mu_2(t),\ t \in [0,T]; \tag{2}$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\omega(t)\,dt = \varphi(x), \ \int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \psi(t), \quad x \in [-l,l]. \tag{3}$$

Обратная задача 2.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(t), d(t)\}$, удовлетворяющих в Q уравнению

$$u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + d(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{4}$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [-l,l]; \quad u(t,-l) = u(t,l) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{5}$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_{-l}^{l} u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t), \ \int_{-l}^{l} u_x(t,x)\omega(x)\,dx = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

В обоих случаях рассматриваются обобщенные решения: $u(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, функции b и c ограничены, соответственно, на $[-l,l]$ в случае обратной задачи 1 и на $[0,T]$ в случае обратной задачи 2.

Доказаны теоремы существования и единственности решения данных обратных задач.

Для каждой из рассматриваемых обратных задач мы также получаем оценки максимумов модулей неизвестных коэффициентов уравнения с константами, явно выписанными через входные данные обратных задач.

Кроме того приводятся нетривиальные примеры обратных задач, к которым применимы доказанные теоремы существования и единственности.

Работа является продолжением исследований автора [1, 2], где были получены теоремы об однозначной разрешимости обратных задач одновременного определения правой части и одного из младших коэффициентов в параболическом уравнении.

Литература

1. *Камынин В.Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференц. уравнения, **50**:6 (2014), 795-806.

2. *Камынин В.Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многим пространственными переменными // Матем. заметки, **97**:3 (2015), 368-381.

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.Х. Каримов

karimov_olim72@mail.ru

УДК 517.948

Работа посвящена коэрцитивной разрешимости нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве.

Ключевые слова: Коэрцитивная оценка, разрешимость, нелинейный оператор, весовое пространство.

Coercitive solvability of nonlinear systems of differential equations of second order with matrix coefficients in the weight space

The work is dedicated to the coercitive solvability of nonlinear systems of differential equations of second order with matrix coefficients in the weight space.

Keywords: Coercitive estimates, the solvability of nonlinear operator, weighted space.

Пусть $\rho(x)$ - положительная функция, определенная в R^n, l - некоторое натуральное число. Символом $L_{2,\rho}(R^n)^l$ - обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), ..., u_l(x)), u_j(x) \in L_2(R^n), (j = \overline{1, l})$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)^l\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{R^n} \rho(x)|u_j(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Каримов Олимджон Худойбердиевич, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики им. А.Джураева (Душанбе, Таджикистан); Olimjon Karimov (A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u,\upsilon)_\rho = \sum_{j=1}^{l} \int_{R^n} \rho(x) u_j(x) \overline{\upsilon_j(x)} dx \quad .$$

Рассмотрим в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$ дифференциальный оператор

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + V(x,u)u(x) = f(x), \quad (x \in R^n) \qquad (1)$$

Предположим, что коэффициенты a_{ij} оператора являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij} \equiv a_{ji}, \quad Ima_{ij} \equiv 0,$$

$$|a_{ij}| \leqslant \sigma_1, \quad \nabla a_{ij} \leqslant \sigma_2, \quad (x \in R^n, i,j = \overline{1,n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} |s_i; C^l|^2 \leqslant \chi_1 \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) s_i, s_j; C^l \rangle \quad ((x \in R^n), \forall s = (s_i)_{i=1}^n, s_i \in C^l),$$

а значения $V(x,\omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ являются квадратными положительно-определёнными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$, константы σ_1,σ_2,χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

Определение. Уравнение (1) и соответствующий ему дифференциальный оператор называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)^l$, если $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)$, $V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)^l$ для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Учитывая результат о разделимости оператора (1)(Теорема 1 [6]), получим следующий результат:

Теорема 1. *Пусть оператор (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$, а весовая функция $\rho(x)$ и положительная функция $\Psi(x) \in C^1(R^n)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\|\Psi^{-1}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_1,$$

$$\|\rho^{-1}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \delta_2.$$

Тогда при выполнении условий

$$n(\delta_1^2 + \delta_2^2) < 2\alpha, \quad n\alpha\sigma_1\chi_1 < 1, \quad \alpha > 0$$

система дифференциальных уравнения (1) при всех $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)^l$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)^l$.

Литература

1. *Everitt W.N., Giertz M.* Some properties of the domains of certain differential operators // London Math.Soc. **23**:3 (1971), 301-324.

2. *Бойматов К.Х.* О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Докл. РАН. **356**:1 (1997), 10-12.

3. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР. **170** (1984), 37-76.

4. *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. **161** (1983), 195-217.

5. *E.M.E.Zayed.* Separation for an elliptic differential operator in a weighted Hilbert space with its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamics of Contionuous, Discrete and Impulsive systems series A:Mathematical Analysis, **22** (2015), 409-421.

6. *Каримов О.Х.* О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффицентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. **58**:8 (2015), 665-673.

7. *Каримов О.Х.* О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. **9**:1 (2017), 55-62.

8. *Каримов О.Х.* Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник. **18**:4 (2017), 245-254.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО АНАЛОГА НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРЫЙ ЗАДЕЛАН, А ДРУГОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕН, В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ш.Г. Касимов, У.С. Мадрахимов

shokiraka@mail.ru, umadraximov@mail.ru

УДК 517.958:624.04

В данной работе изучена задача с начально-граничными условиями для уравнения колебаний балки один конец, которой заделан, а другой шарнирно закреплен в многомерном случае. Доказаны теоремы единственности, существования поставленной задачи в классах Соболева. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена теорема единственности решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд.

Работа выполнена при финансовой поддержке РУзФФИ (проект № ОТ-Ф-4-(36+32)).

Касимов Шакирбай Гаппарович, д.ф.-м.н., и.о. профессора, НУУз имени Мирзо Улугбека (г.Ташкент, Узбекистан); Kasimov Shakirbay Gapparovich (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Мадрахимов Умрбек Собирович, докторант, НУУз имени Мирзо Улугбека (г.Ташкент, Узбекистан); Madraximov Umrbek Sabirovoch (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

On the unique solvability of a generalized analogue of the initial-boundary problem of beam oscillations with one end, which is embedded, and the other is hinged fixed ends in Sobolev classes in the multidimensional case

In this paper, we study a problem with initial-boundary conditions for the equation of beam oscillations, one end of which is embedded and the other is pivotally fixed in the multidimensional case. The theorems of uniqueness, the existence of the problem in Sobolev classes are proved. The solution of the initial-boundary problem is constructed as a sum of a series in the system of eigenfunctions of the multidimensional spectral problem. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev spaces. On the basis of the completeness of the system of eigenfunctions, a uniqueness theorem is obtained for the solution of the initial-boundary value problem posed.

Keywords: beam equation, initial-boundary problem, spectral method, proper values, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, uniqueness, existence, row.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [1]–[6]. В данной работе рассматривается более общее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}=f(y,t),\ (y,t)\in\Pi\times(0,T), \tag{1}$$

$p-1<\alpha\leqslant p;\ m,\ p\in\mathbb{N}$, с начальными и краевыми условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=1,2,...,p, \tag{2}$$

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,N},\end{cases} \tag{3}$$

где $(y,t)=(y_1,...,y_j,...,y_N,t)\in\Pi\times(0,T)$, $\Pi=(0,l)^N$, $T>0$ – заданные положительные числа и $f(y,t)$, $\varphi_i(y)$, $i=1,2,...,p$ – заданные функции. Здесь $D_{0t}^{\alpha}u(y,t)$ дробная производная в смысле Римана–Лиувилля.

Будем искать решение $u(y,t)$ задачи (1)–(3) в виде разложения в ряд Фурье $u(y,t)=\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum\limits_{n_N=0}^{\infty}T_{n_1\ldots n_N}(t)\,v_{n_1\ldots n_N}(y)$, где $T_{n_1\ldots n_N}(t)$ – коэффициенты ряда, $\left\{v_n(y),\ n\in\overline{\mathbb{Z}}_+^{\,N}\right\}$ – система собственных функций многомерной спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}v(y)}{\partial y_j^{4m}}-\lambda v(y)=0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+1}v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0, \\ \left.\frac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+2}v(y)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0, \quad k=\overline{0,\ m-1}, \quad j=\overline{1,N}. \end{cases} \tag{5}$$

Собственные значения задачи (4), (5) определяются по формуле $\lambda_{m_1\ldots m_N}=a^2\sum\limits_{j=1}^{N}d_{m_j}^{4m}$, где d_{m_j} - корень трансцендентного уравнения $tgld=thld$. Это уравнение имеет счетного множество корней $d_0<d_1<\cdots<d_n<\cdots$, при этом справедлива при больших n асимптотическая формула $d_n=\frac{\pi n}{l}+\frac{\pi}{4l}+O\left(e^{-2\pi n}\right)$. В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$\left\{v_{m_1\ldots m_N}(x_1,\ldots,x_N)\right\}_{(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^N}=\left\{\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(x_j)\right\}_{(m_1,\ldots,m_N)\in\overline{\mathbb{Z}}_+{}^N}, \tag{6}$$

где

$$X_{m_j}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+d_{m_j}^{4s}}}\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{\sin d_{m_j}(l-x)}{\sin d_{m_j}l}-\frac{shd_{m_j}(l-x)}{shd_{m_j}l}\right),\ m_j=0,1,\ldots. \tag{7}$$

Норма в пространстве $W_2^s(0,l)$ вводится по формуле $\|f\|^2_{W_2^s(0,l)}=\|f\|^2_{L_2(0,l)}+\|D^sf\|^2_{L_2(0,l)}$, где s - произвольное натуральное число.

Теорема 1. *Система собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированный системой в классе Соболева* $W_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. *Система собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева* $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$.

Следствие 1. *Если* $s_j>k+\frac{N}{2}, k\geqslant 0, k\in Z$, *то ряд Фурье функции* $f(x)\in H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)\cap C^k(\Pi)$ *по системе собственных функций (6) спектральной задачи (4), (5) сходится по норме пространства* $C^k(\Pi)$ *к функции* $f(x)$.

Мы получим единственное решение задачи (1) – (3) в виде ряда

$$u(y,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{p}\varphi_{j,(m_1\ldots m_N)}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(\mu_{m_1\ldots m_N}t^{\alpha})+\right. \tag{8}$$

$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\mu_{m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha}]f_{m_1\ldots m_N}(\tau)d\tau\right]\cdot v_{m_1\ldots m_N}(y_1,\ldots,y_N).$$

Выясним условия существования решения из класса $W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N,\theta}(\Pi\times(0,l))$. По теореме вложения Соболева условие

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{p}\varphi_{j,(m_1\ldots m_N)}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(\mu_{m_1\ldots m_N}t^{\alpha})+\right. \tag{9}$$

$$+\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1\ldots m_N}(\tau)\,d\tau\Bigg|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(1+d_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty.$$

является достаточным условием сушествования регулярного решения задачи (1) – (3) из класса $W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N,\theta}(\Pi\times(0,l))$ с показателем $s_1=\ldots=s_N=4m+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$.

Теорема 3. *Пусть начальные функций $\varphi_i(y), i=1,2,\ldots,p$, и правую часть $f(y,t)$ удовлетворяет условию (9) при каждом $t>0$. Тогда регулярные решение задачи (1) – (3) из класса $W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=\ldots=s_N=4m+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда (8).*

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. *Рэлей Л.* Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: Наука, 1955. 504 с.

3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.

5. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференциальные уравнения, **53**:1 (2017), 89-100.

6. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения, **53**:5 (2017), 665-671.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ БОЛЬШИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

И.С. Кащенко

iliyask@uniyar.ac.ru

УДК 517.9

В работе изучается локальная динамика дифференциального уравнения с двумя асимптотически большими пропорциональными запаздываниями. В зависимости от параметров выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Во всех критических случаях построены специальные уравнения (квазинормальные формы), решения которых определяют асимптотику решений исходного уравнения.

Ключевые слова: запаздывание, дифференциальные уравнения, сингулярное возмущение, нормальная форма

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10043).

Кащенко Илья Сергеевич, д.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Ilia Kashchenko (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Behavior of solutions of equation with two large delays

The local dynamics of differential equations with two asymptotically large proportional delays is studied. Depending on the parameters critical cases in the problem of the stability of the equilibrium state are identified. In all critical cases special equations (quasinormal forms) are built. Their nonlocal dynamics determines the local behavior of solutions of the original equations.

Keywords: delay, differential equations, singular perturbation, normal form

Рассмотрим уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + F(x, x(t-T), x(t-T_1)), \quad T, T_1 > 0. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ скалярная функция, a и b некоторые постоянные. Функция $F = F(x, y, z)$ предполагается нелинейной, т. е. $F(0,0,0) = F'_x(0,0,0) = F'_y(0,0,0) = F'_z(0,0,0) = 0$. Основное предположение состоит в том, что оба запаздывания T и T_1 пропорциональны друг другу и достаточно велики, т. е.

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad T_1 = T(k_0 + \varepsilon^{1+\alpha} k_1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad k_0 \geqslant 1, \quad \alpha > 0.$$

Поставим задачу определить поведение решений в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояние равновесия. Метод исследования базируется на так называемом методе квазинормальных форм [1].

Введем в рассмотрение функцию

$$R(\Omega) = a\cos\Omega + b\cos k_0\Omega$$

и обозначим через $R_0 = R_0(a, b)$ супремум (для иррациональных k_0) или максимум (для рациональных k_0) этой функции.

Теорема 1. *Пусть $R_0 < 1$, тогда для всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия (1) асимптотически устойчиво.*

Если же $R_0 > 1$, то для всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия (1) неустойчиво.

Основное содержание работы посвящено случаю $R_0 = 1$. При этом условии бесконечное количество корней характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, таким образом все критические случаи в задаче об устойчивости стационара имеют бесконечную размерность. В каждом из них исходная задача сводится к аналогу нормальной формы – уравнению параболического типа, которое не содержит малый параметр [1]. Решения этих уравнение доставляют главный член асимтотического по невязке приближения исходной задачи.

Литература

1. *Kashchenko I.* Normalization of a system with two large delays // International Journal of Bifurcation and Chaos, **24**:8 (2014), 1440021.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Кожанов

kozhanov@math.nsc.ru

УДК 517.946

Изучается корректность краевых задач для квазигиперболических уравнений высокого порядка.

Ключевые слова: квазигиперболические уравнения, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Boundary-value problems for quasihyperbolic equations

We study the correctness of boundary value problems for high order quasihyperbolic equations.

Keywords: quasihyperbolic equations, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness

Квазигиперболическими уравнениями будем называть дифференциальные уравнения вида

$$Lu \equiv (-1)^{p+1}\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - Au = f(x,t)$$

с эллиптическим оператором A второго порядка, действующим по пространственным переменным ($A \sim \Delta$), и с натуральным числом p таким, что $p > 1$ (при $p = 1$ данные уравнения являются обычными гиперболическими уравнениями).

В настоящем докладе излагаются результаты последнего времени, связанные с постановкой и разрешимостью краевых задач для квазигиперболических уравнений в ограниченном цилиндре. В частности, описываются новые корректные задачи — задачи, в которых при $t = 0$ задаются $p + 1$ условие, при $t = T$ — $p - 1$ условие. Далее показывается, что задачи на собственные значения для квазигиперболических уравнений с этими же условиями при $t = 0$ и при $t = T$ имеют счетное множество действительных собственных чисел. Дополнительно изучаются краевые задачи для некоторых классов квазигиперболических уравнений с разрывными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-51-41009).

Кожанов Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Kozhanov Alexandr (Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia)

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И ДАННЫМИ В ВИДЕ МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^N$

Л.М. Кожевникова

kosul@mail.ru

УДК 517.956.25

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваются анизотропные эллиптические уравнения второго порядка с переменными показателями нелинейностей и правой частью в виде диффузной меры. В анизотропных пространствах Соболева-Орлича с переменными показателями доказано существование энтропийного решения. Установлено, что построенное энтропийное решение является ренормализованным решением.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, ренормализованное решение, существование решения, переменный показатель, диффузная мера

On solutions of elliptic equations with variable exponent nonlinearity and and measure data in space $\mathbb{R}^n$

In the space $\mathbb{R}^n$, second-order anisotropic elliptic equations are considered with nonlinear variables of exponents, and the right-hand side as a diffuse measure. The existence of an entropy solution is proved in anisotropic Sobolev – Orlicz spaces with variable exponents. It is established that the obtained entropy solution is a renormalized solution.

Keywords: anisotropic elliptic equation, entropy solution, renormalized solution, existence solution, variable exponent, diffuse measure

В пространстве $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, рассматривается анизотропное эллиптическое уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с ограниченной мерой Радона μ специального вида.

Введем пространство

$$C^+(\mathbb{R}^n) = \{p \in C(\mathbb{R}^n) \ : \ 1 < p^- \leqslant p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathrm{x})$, $p^+ = \sup\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathrm{x})$. Положим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \ldots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^n$, $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), \overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ и определим

$$p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428).

Кожевникова Лариса Михайловна, д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$, анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}.$$

Через $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство $L_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times L_{p_n(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|\mathrm{v}\|_{\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)} = \|v_1\|_{p_1(\cdot)} + \ldots + \|v_n\|_{p_n(\cdot)},\ \mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Множество ограниченных мер Радона обозначим $\mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$. Меру $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ назовем диффузной по емкости $\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}$ ($\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости), если $\mu(B) = 0$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(B, \mathbb{R}^n) = 0$. Здесь $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ — емкость компакта K по отношению к $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(K, \mathbb{R}^n) = \inf_{S_{p(\cdot)}(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}(\mathrm{x}, v, \nabla v) d\mathrm{x},$$

$$S_{p(\cdot)}(K) = \left\{ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; v \geqslant \chi_K \right\},$$

где $\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})}$, $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$, χ_K — характеристическая функция множества K. Тогда $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкость борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ по отношению к $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(B, \mathbb{R}^n) = \sup\{\mathrm{Cap}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(K, \mathbb{R}^n) \;\big|\; B \supset K,\ K \text{ компакт}\}.$$

Через $\mathcal{M}^b_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех ограниченных мер Радона диффузных по $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости. Доказано, что если $\mu \in L_1(\mathbb{R}^n) + W^{-1}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ($W^{-1}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ — пространство сопряженное к $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$), то $\mu \in \mathcal{M}^b_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Представление диффузной меры $\mu \in \mathcal{M}^b_{p(\cdot)}(\Omega)$ для ограниченной области Ω получено в работах [1], [2].

Предполагаем, что

$$p_+(\mathrm{x}) \leqslant p_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

и функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывные неубывающие

функции $\widehat{a}_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},\ i = 1, \dots, n$, положительное число $\overline{a}$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, для всех $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{a}_i(|s_0|) \left((\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}))^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}) \right), \quad i = 1, \dots, n; \tag{3}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{4}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a}\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}). \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $\mathrm{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \dots, t_n)$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, для всех $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{b}(|s_0|) \left(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + \Phi_0(\mathrm{x}) \right); \tag{6}$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_0 \geqslant 0. \tag{7}$$

Будем считать, что мера μ имеет вид

$$\mu = f + f_0 - \operatorname{div} \mathrm{f},\ f \in L_1(\mathbb{R}^n),\ f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

По доказанному такая мера μ является диффузной по $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)$ – емкости.

Вводя обозначение $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) + \mathrm{f}$, из уравнения (1) получаем

$$-\operatorname{div} \widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2} u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f + f_0.$$

Применяя неравенство Юнга, легко заметить, что функция $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ также подчиняется условиям вида (3)–(5). Поэтому в работе рассматривается уравнение (1) с мерой

$$\mu = f + f_0, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u d\mathrm{x}$. Через $\mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при любом $k > 0$.

Определение 1. *Энтропийным решением уравнения* (1), (8) называется функция $u \in \mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

1) $B(\mathrm{x}) = b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n)$;

2) при всех $k > 0,\ \xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2} u - f - f_0) T_k(u - \xi) \rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leqslant 0.$$

Определение 2. *Ренормализованным решением уравнения* (1), (8) называется функция $u \in \mathcal{T}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ такая, что выполнено условие 1) определения 1,

2) $\lim_{h \to \infty} \int\limits_{\{h \leqslant |u| < h+1\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u) d\mathrm{x} = 0,$

3) для любой гладкой функции $S \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $\xi \in C^1_0(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u - f - f_0)S(u)\xi\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot\nabla(S(u)\xi)\rangle = 0.$$

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2)–(7), тогда существует энтропийное решение уравнения (1), (8).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2)–(7), тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением уравнения (1), (8).*

Литература

1. *Nyanquini I., Ouaro S., Soma S.* Entropy solution to nonlinear multivalued elliptic problem with variable exponents and measure data // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, **40**:2 (2013), 1—25.

2. *Zhang C.* Entropy solutions to nonlinear elliptic equations with variable exponents // Electronic Journal of Differential Equations, **2014**:92 (2014), 1—14.

ВЕКТОРНЫЙ ВАРИАНТ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

Ю.А. Комаров, А.Б. Куржанский

ykomarov94@gmail.com, kurzhans@mail.ru

УДК 517.97

Доклад посвящен методам решения задач многокритериальной оптимизации для моделей систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями. Подобные задачи нередко решаются путем сведения их к оптимизации совокупности скаляризованных сверток векторного критерия. В то же время, в реальных векторных задачах необходим анализ всей границы Парето. С этой целью, в данной работе предлагается метод векторного динамического программирования, позволяющий описать эволюцию паретовского фронта при помощи векторного аналога эволюционного уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Ключевые слова: Гамильтонов формализм, векторная оптимизация, динамическое программирование, фронт Парето

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-29-04191 офи_м).

Комаров Юрий Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yury Komarov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Куржанский Александр Борисович, д.ф.-м.н., проф., акад., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Kurzhanski (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

A vector-valued version of the Hamiltonian formalism

This report introduces methods of optimalizing the solutions to problems of controlled dynamics under multiple criteria. Though such problems are usually approached by scalarization of the vector-valued cost, in most realistic cases, the actual demand is the the analysis of the whole Pareto front and its evolution. Such demand is reached in this paper by introducing a vector-valued multiobjective dynamic programming, based on vector-valued version of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

Keywords: Hamiltonian formalism, multiobjective optimization, dynamic programming, Pareto front

В первой части доклада рассматривается дискретная динамическая система с векторным критерием следующего вида:

$$x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, \vartheta - 1,$$
$$x_0 = x^0,$$
$$u_t \in \mathcal{P}_t,$$
$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(\vartheta, x, u) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(\vartheta, x, u) \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u) = \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \to \mathcal{M}\text{in},$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m;\ \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{L}}, \vec{\varphi} \in \mathbb{R}^p,$$

где под $\vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u) \to \mathcal{M}\text{in}$ понимается задача отыскания границы Парето множества всех возможных (в силу условий системы) значений многомерного функционала $\vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u)$. Следуя терминологии [2], под паретовским фронтом множества в упорядоченном пространстве будем понимать подмножество его недоминируемых по порядку точек.

Для этой системы был введен векторный аналог функции цены в виде

$$\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\text{in}\left\{ \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \middle| x_0 = x^0, u_t \in \mathcal{P}_t \right\}$$

и показано, что при выполнении определенных условий регулярности для паретовского фронта многокритериальной оптимизационной задачи справедлив векторный принцип оптимальности в следующей форме:

$$\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\text{in}\left\{ \sum_{\tau=0}^{t} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \right\}, \quad t = 0, \dots, \vartheta - 1.$$

Был получен дискретный векторный аналог уравнения Беллмана для введенной функции цены:

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{V}}(t, x) = \mathcal{M}\text{in}\left\{ \vec{\mathcal{L}}(t, x, u) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u \in \mathcal{P}_t \right\}, \quad t = 0, \dots, \vartheta - 1, \\ \vec{\mathcal{V}}(\vartheta, \cdot) = \vec{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

На примере одномерной стационарной линейной системы с дискретным временем продемонстрировано, что, в силу векторной природы задачи, построенная система уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана является лишь необходимым, но не достаточным условием для отыскания функции цены. В общем случае она не позволяет однозначно определить искомую границу Парето решаемой задачи.

В связи с этим был предложен метод гарантированного точечного оценивания границы Парето, позволяющий свести полученный ранее векторный аналог уравнения Беллмана к набору скалярных задач, решение каждой из которых представляет собой единственную точку искомого паретовского фронта.

Затем была рассмотрена многомерная постановка задачи достижимости для системы с дискретным временем и установлено взаимно-однозначное соответствие между решениями задачи в классической (скалярной) и векторной постановках. В частности, было продемонстрировано совпадение линий уровня двух соответствующих функций цены:

$$\mathcal{X}(t;0,A\cap B)=\left\{x\colon \min_{u(\cdot),x_0}\left\{d^2(x_0,A\cap B)\;\middle|\; x_t=x\right\}\leqslant 0\right\}=$$
$$=\left\{x\colon \mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\begin{pmatrix}d^2(x_0,A)\\ d^2(x_0,B)\end{pmatrix}\;\middle|\; x_t=x\right\}\leqslant 0\right\},$$

где $\mathcal{X}(t;0,A\cap B)$ — искомое множество достижимости системы в момент времени t при заданном начальном множестве $\mathcal{X}^0=A\cap B$.

В заключительной части доклада была рассмотрена задача управления системой в непрерывном времени при наличии векторного критерия следующего вида:

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\in[0,\vartheta],$$
$$x(0)=x^0,$$
$$u(t)\in\mathcal{P}(t),$$
$$\begin{bmatrix}\mathcal{J}_1(\vartheta,x,u)\\ \vdots\\ \mathcal{J}_p(\vartheta,x,u)\end{bmatrix}=\vec{\mathcal{J}}(\vartheta,x,u)=\int_0^{\vartheta}\vec{\mathcal{L}}(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\vec{\varphi}(x(\vartheta))\to\mathcal{M}\mathrm{in},$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m;\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{L}},\vec{\varphi}\in\mathbb{R}^p,$$

Для такой постановки задачи был введён векторный аналог функции цены, продемонстрировано выполнение принципа оптимальности для границы Парето и получен векторный аналог уравнения Гамитона-Якоби-Беллмана в форме эволюционного уравнения:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to+0}\dfrac{1}{\delta}\mathbf{h}\left(\vec{\mathcal{V}}(t,x),\mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\displaystyle\int_t^{t+\delta}\vec{\mathcal{L}}(s,x(s),u(s))ds+\vec{\mathcal{V}}(t+\delta,x(t+\delta))\right\}\right)=0,\\ \vec{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot)=\vec{\varphi}(\cdot),\end{cases}$$

где $\mathbf{h}(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа.

Литература

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. — Basel, Birkhäuser, 2014. 445 p.

2. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of Multiobjective Optimization. — London, Academic Press Inc., 1985. 296 p.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

А.Н. Конёнков

a.konenkov@365.rsu.edu.ru

УДК 517.956.4

Рассматривается параболическая система второго порядка на плоскости в области с негладкой боковой границей. Методом граничных интегральных уравнений установлена разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными функциями. Исследована гладкость полученного решения, если граничные функции удовлетворяют условию Гельдера.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений параболического типа, задача Дирихле, анизотропные пространства Гельдера

Solvability of the Dirichlet problem for a parabolic system on a plane

A second order parabolic system is considered in a domain with a non-smooth lateral boundary on a plane. The boundary integral equations method is used to establish the solvability of the problem with continuous boundary data. The smoothness of the obtained solution is studied if the boundary functions satisfy the Hölder condition.

Keywords: systems of parabolic type, Dirichlet problem, anisotropic Hölder spaces

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболическая система

$$Lu = \partial_t u - A(x)\partial_x^2 u,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^m$. Для оператора L предполагается выполненными условия а) равномерной параболичности, то есть собственные значения $\lambda_k(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_k(x) \geqslant \mu > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

Конёнков Андрей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, РГУ (Рязань, Россия); Andrey Konenkov (Ryazan State University, Ryazan, Russia)

б) принадлежности коэффициентов пространству Гельдера:

$$a_{ij} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

В полуограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D \,|\, x > g(t)\}$ рассматриваем задачу Дирихле

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Lu & = & 0 & \text{в } \Omega, \\ u(x,0) & = & 0, & x > g(t), \\ u(g(t),x) & = & \psi(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{array} \right. \tag{3}$$

В [1] для широкого класса параболических систем установлено существование и единственность решений краевых задач. Боковая граница области предполагалась достаточно гладкой. В частности, для параболических систем второго порядка исследовались решения из шкалы анизотропных пространств Гельдера $H^{m+\alpha,(m+\alpha)/2}(\Omega)$, $m \geqslant 2$.

В [2], [3] установлена разрешимость задачи Дирихле для параболической системы на плоскости в пространстве $C^{1,1/2}(\bar{\Omega})$. Также была исследована гладкость полученного решения в $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$. При этом рассматривались области с негладкими боковыми границами вида $x = g(t)$, где функция g удовлетворяет условию Жевре

$$g \in H^{(1+\alpha)/2}([0,T]). \tag{4}$$

Методом граничных интегральных уравнений было доказано существование решения и его представимость в виде суммы потенциалов простого слоя.

Обозначим через $\Gamma(x,\xi,t-\tau)$ фундаментальное решение оператора L. Для плотности φ, заданной на боковой границе области Ω, мы вводим модифицированный потенциал двойного слоя

$$W\varphi(x,t) = \int_0^t \partial_\xi(\Gamma(x,\xi,t-\tau)A(\xi))|_{x=g(\tau)}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Отметим, что при наложенных условиях на коэффициенты оператора L фундаментальное решение не имеет, вообще говоря, производной по переменной ξ. Мы устанавливает, что функция $\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)$ является непрерывно дифференцируемой по ξ при $t > 0$.

Теорема. *Пусть для оператора L выполнены условия (1), (2), для боковой границы выполнено условие (4), граничная функция $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(0) = 0$. Тогда существует ограниченное в Ω решение $u \in C(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле (3), представимое в виде модифицированного потенциала двойного слоя с плотностью $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(0) = 0$. Для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\psi\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Если при этом $\psi \in H^{\alpha/2}([0,T])$, то указанное решение принадлежит пространству $H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\psi\|_{H^{\alpha/2}([0,T])}.$$

Аналогичное утверждение получено и для ограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D \,|\, g_1(t) < x < g_2(t)\}$.

Литература

1. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН СССР, **83** (1965), 3–163.

2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН, **458**:4 (2014), 379-381.

3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения, **52**:2 (2016), 198-208.

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

М.В. Коровина

betelgeuser@yandex.ru

УДК 517.911,517.925.7,517.928.1

Работа посвящена описанию асимптотических разложений решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки. Приводится вид асимптотики решения в окрестности бесконечно удаленной особой точки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения

Poincare problem. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of irregular singular points

This study is devoted to the description of the asymptotic expansions of solutions to ordinary differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an irregular singular point. An example of irregular singular point in infinity is consider.

Keywords: differential equations

Коровина Мария Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maria Korovina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре в работах [1],[2]. В этих работах рассматривались уравнения нефуксова типа и впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в некоторых случаях может разлагаться в асимптотический ряд. Проблема Пуанкаре состоит в том, чтобы найти вид асимптотических разложений для произвольных линейных уравнений с голоморфными коэффициентами.

В данной работе приводится классификация особых точек, и рассматриваются соответствующие им асимптотические разложения. А именно рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$b_n(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + ... + b_i(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + ... + b_0(r)\,u(r) = 0, \qquad (2.1)$$

здесь $b_i(r)$ являются голоморфными функциями.

Если коэффициент при старшей производной $b_n(r)$ обращается в ноль в некоторой точке, без ограничения общности можно считать, что эта точка $r = 0$, то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае ноль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0, \qquad (2.2)$$

где $\hat{H}$ – дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r,p) = \sum_{i=0}^{n} b_i'(r)\,p^i$$

Здесь $b_i'(r)$ – соответствующие голоморфные функции. k – целое число, причем $k >= -1$. Очевидно, что значение k определяется неоднозначно. В зависимости от минимального значения k можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик.

К первому типу отнесем те уравнения, для которых $k = -1$. В этом случае мы имеем невырожденные дифференциальные уравнения, решения которых не имеют особенностей в нуле.

В случае $k = 0$ уравнения являются вырожденными. $k = 0$ – регулярная особая точка, асимптотика решения является конормальной.

$k \in N$ – иррегулярные особенности. Эти уравнения называются уравнениями нефуксова типа. Примером асимптотик нефуксова типа являются асимптотики вида

$$\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i \qquad (2.3)$$

Нефуксовы асимптотики вида (3) соответствуют случаю, когда многочлен $H(0,p)$ имеет только простые корни. Здесь через $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$ обозначен

асимптотический ряд, $p_j, j = 1, ..., n$ – корни многочлена, α_{k-i}^j, σ_j – некоторые числа.

Если многочлен $H(0,p)$ имеет кратные корни, и $k = 1$ то асимптотика в окрестности иррегулярной точки p_j соответствующей кратному корню, будет представима в виде суммы конормальной асимптотики и асимптотичского разложения вида

$$\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{p_j}{r} + \sum_{i=1}^{m-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{\infty} b_l^j r^l \tag{2.4}$$

Примером такой особой точки является бесконечно удаленная точка для уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + ... + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x) u(x) = 0 \tag{2.5}$$

здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x), i = 0, 1, ..., n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$. Уравнение (5) путем замены $x = \frac{1}{r}$ приводится к уравнению (2) при $k = 1$. А значит представляет собой сумму асимптотики (4) и конормальной асимптотики. Впервые эта задача рассматривалась в работе Томэ[3].

Если $k > 1$ и p_j корень многочлена $H(0,p)$ является кратным, то асимптотика решения может быть представима в виде конормальной асимптотики и асимптотического разложения

$$\sum_{j} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{km-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{l=0}^{\infty} b_l^j r^l \tag{2.6}$$

Гипотеза. *Все асимптотики решения уравнения (1) представимы в виде суммы нефуксовой асимптотики (6) и конормальной асимптотики.*

Литература

1. *Poincare H.* Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. //Acta math. 1886, v. 8, p. 295-344.

2. *Анри Пуанкаре.* Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре. Изд-во «Наука», 1974 г.

3. *Thome L.W.* Zur Theorie der linearen differentialgelichungen. //Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1872

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Б.Д. Кошанов
koshanov@list.ru

УДК 517.9

Для эллиптического уравнения $2l-$го порядка, старшие коэффициенты которого постоянны, в односвязной области с гладкой границей рассмотрена краевая задача с нормальными производными $(k_j-1)-$го порядка, $j=1,\ldots,l$, где $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$. При $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j+1$ – в задачу Неймана. В работе доказана эквивалентность условии фредгольмовости с условием дополнительности, т.е. с условием Шапиро-Лопатинского.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, нормальные производные, фредгольмовость задачи, формула индекса

On the generalized Neumann problem for the high order elliptic equation on a plane

For the elliptic equation of $2l-$th order with of constant real coefficients we consider boundary value problem of the normal derivatives (k_j-1) order, $j=1,\ldots,l$, where $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$. When $k_j = j$ it moves into the Dirichlet problem, and when $k_j = j+1$ it moves into the Neumann problem. In this paper, we prove the equivalence of the Fredholm condition with the complementarity condition, i.e. with the condition of Shapiro-Lopatinskij.

Keywords: elliptic equation, boundary value problem, normal derivatives, Fredholm problem, index formula

В докладе исследуется эллиптическое уравнение $2l$-го порядка в односвязной области D

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant k \leqslant 2l-1} a_{rk}(x,y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = f(x,y), (x,y) \in D \quad (1)$$

с коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$ и $a_{rk} \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\Gamma = \partial D \in C^{2l,\mu}$, $0 < \mu < 1$.

Задача S. Обобщенная задача Неймана заключается в отыскании решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j - 1} u}{\partial n^{k_j - 1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1, \ldots, l, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (грант AP05135319).

Кошанов Бакытбек Данебекович, д.ф.-м.н., профессор, Главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Bakytbek Koshanov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль и натуральные k_j подчинены условию $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leqslant 2l$.

Нормальная производная $(\partial/\partial n)^r$ порядка r понимается граничный оператор

$$\left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r$$

и аналогичный смысл имеет граничный оператор $(\partial/\partial e)^r$ по отношению к единичному касательному вектору $e = e_1 + ie_2 = i(n_1 + in_2)$.

Постановка этой задачи при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ для полигармонического уравнения была изучена А.В. Бицадзе в работе [1], где при $k_1 \geqslant 2$ она названа обобщенной задаче Неймана. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А. Дезиным [2]. В классе

$$u \in C^{2l}(D) \cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}), \quad \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} \in C^{\mu}(\overline{D}),$$

задача (1), (2) была исследована в [3]. Очевидно, этот класс зависит от старших коэффициентов a_r уравнения (1). В более узком классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ эта задача была рассмотрена в [4]. В докладе доказывается, что условие фредгольмовости задачи (1),(2) эквивалентно известному [5] условию дополнительности (или Шапиро– Лопатинского). Также приведена формула ее индекса $\operatorname{ind} S$ удобного для использования.

Теорема 1. *Пусть многочлен* $\det W_g(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ *переменных* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ *определяется в (4) по вектор- функции*

$$g_j(z) = z^{k_j - k_1}, \ 1 \leqslant j \leqslant l, \tag{3}$$

и пусть n_j *– наивысшая степень, с которой* ζ_j *входит в этот многочлен. Тогда функция*

$$P(t) = \prod\nolimits_{j=1}^{m} (1 + t\nu_j)^{n_j} \det W_g \left(\frac{\nu_1 - t}{1 + t\nu_1}, \ldots, \frac{\nu_m - t}{1 + t\nu_m}\right) \tag{4}$$

является многочленом степени $n = n_1 + \ldots + n_m$.

В этих обозначениях условие фредгольмовости задачи (1), (2) сводится к тому, что многочлен P *не имеет нулей на вещественной оси, а ее индекс дается формулой*

$$\varkappa = 4\left(-N + \sum\nolimits_{i<j} l_i l_j\right), \tag{5}$$

где N *есть число нулей этого многочлена в верхней полуплоскости, взятое с учетом их кратности.*

Доклад основан на результатах совместных исследований с профессором А.П. Солдатовым.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения, **24**:5 (1988), 825–831.

2. *Дезин А.А.* Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве W_2^m // Докл. АН СССР, **96**:5 (1954), 901–903.

3. *Кошанов Б.Д., Солдатов А.П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. уравнения **52**:12 (2016), 1666–1681.

4. *Солдатов А.П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Владикав. мат. журнал **19**:3 (2017), 51–58.

5. *Schechter M.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Comm. Pure and Appl. mathem. **12** (1950), 467–480.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРИЗОВАННЫЕ ЦЕПОЧКИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

М.Н. Кузнецова

mariya.n.kuznetsova@gmail.com

УДК 517.518

Описаны интегрируемые случаи квазилинейных двумеризованных цепочек вида $u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$. В качестве критерия интегрируемости понимается наличие бесконечного числа редукций в виде систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу. При исследовании гиперболических систем применяются характеристические алгебры Ли-Райнхарта.

Ключевые слова: двумеризованная цепочка, интегрируемая редукция, характеристическая алгебра Ли, вырожденное условие обрыва, интегрируемая по Дарбу система

Integrable quasilinear two-dimensional chains and characteristic algebras

Integrable cases of quasilinear two-dimensional chains of the form $u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ are described. As an integrability criterion we accept the existence of an infinite number of reductions, which are hyperbolic type systems integrable in the sense of Darboux. Hyperbolic systems are studied by means of the characteristic algebras Lie-Rinehart.

Keywords: two-dimensional lattice, integrable reduction, characteristic Lie algebra, degenerate cutting off condition, Darboux integrable system

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

Кузнецова Мария Николавена, к.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mariya Kuznetsova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

В настоящее время актуальной является задача классификации уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad -\infty < n < \infty. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f = f(x_1, x_2, \cdots x_5)$ является аналитической в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^5$. Искомая функция $u_n = u_n(x, y)$ зависит от вещественных переменных x, y и целой переменной n.

В настоящей работе исследуется подкласс цепочек (1) следующего вида:

$$u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}). \tag{2}$$

Функции $p(x_1, x_2, x_3)$, $r(x_1, x_2, x_3)$, $q(x_1, x_2, x_3)$ предполагаются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$.

Многомерные уравнения являются сложными объектами для исследования и, тем более, для классификации. Известно, что существование большого числа интегрируемых редукций указывает на интегрируемость уравнения (см., например, работу [1], в которой существование интегрируемых редукций гидродинамического типа рассматривается в качестве признака интегрируемости). В настоящей работе мы используем аналогичную идею - называя уравнение интегрируемым, если оно допускает бесконечный класс редукций в виде систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу.

При описании интегрируемых по Дарбу систем уравнений гиперболического типа давно используется понятие характеристической алгебры Ли [2]. Переход к более общим алгебрам Ли-Райнхарта [3] открывает новые возможности [4, 5, 6].

Условие обрыва $u_0 = \varphi(x, y)$ называется вырожденным условием обрыва для цепочки (1), если оно сводит (1) к двум независимым полубесконечным цепочкам, определенным на интервалах $-\infty < n < 0$ и $0 < n < +\infty$, соответственно.

Допустим, что для цепочки (1) существуют вырожденные условия обрыва в двух разных точках $n = N_1$, $n = N_2$. Тогда цепочка (1) сводится к конечной системе гиперболического типа:

$$\begin{aligned} &u_{N_1} = \varphi_1(x, y), \\ &u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \\ &u_{N_2} = \varphi_2(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Определение 1. *Цепочка (1) называется интегрируемой, если существуют функции φ_1 и φ_2, такие, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (3) является интегрируемой по Дарбу.*

Большой класс интегрируемых цепочек вида (1) представлен в работе [7], где они были исследованы в рамках симметрийного подхода. Важным является тот факт, что все уравнения из этого класса являются интегрируемыми в смысле Определения 1. Как известно, интегрируемые по Дарбу системы обладают точным решением. Следовательно, гиперболическая система (3) обладает точным решением, которое может быть продолжено до

решения исходной цепочки (1). В силу того, что выбор N_1, N_2 произволен, исходная цепочка имеет множество частных решений.

В работах [5, 6] были описаны интегрируемые в смысле Определения 1 двумеризованные квазилинейные цепочки вида

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + p_n u_{n,x} + r_n u_{n,y} + q_n, \tag{4}$$

при условии, что $\frac{\partial \alpha_n}{\partial u_{n\pm1}} \neq 0$. Здесь коэффициенты зависят от трех последовательных переменных $\alpha_n = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $p_n = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $r_n = r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $q_n = q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$.

В данной работе рассматривается частный случай (2) цепочки (4), когда α_n тождественно равна нулю. Мы требуем, чтобы выполнялись следующие условия: хотя бы одна из производных

$$\frac{\partial p_n}{\partial u_{n+1}} \neq 0, \quad \frac{\partial p_n}{\partial u_{n-1}} \neq 0 \tag{5}$$

не равна нулю.

Главным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Если цепочка (2), (5) интегрируема в смысле Определения 1, тогда она приводится посредством точечных преобразований к одной из следующих:*

$$u_{n,xy} = \left(e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}\right) u_{n,x}, \tag{6}$$

$$u_{n,xy} = \left(-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}\right) u_{n,x}. \tag{7}$$

Цепочки (6), (7) были известны ранее (см. [7]).

Литература

1. *Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R.* On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems // Commun. Math. Phys. **248**:1 (2004), 187-206.

2. *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 376стр.

3. *Millionshchikov D.* Lie algebras of slow growth and Klein-Gordon PDE // Algebr. Represent. **21**:5 Theor. (2018), 1037-1069.

4. *Habibullin I.T.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices // Physica Scripta **87**:6 (2013), 065005.

5. *Habibullin I.T., Poptsova (Kuznetsova) M.N.* Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic Lie rings // SIGMA **13** (2017), 073, 26 p.p.

6. *Habibullin I.T., Poptsova (Kuznetsova) M. N.* Algebraic properties of quasilinear two-dimensional lattices connected with integrability // Ufa Math. J., **10**:3 (2018), 86-105.

7. *Shabat A.B., Yamilov R.I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // Phys. Lett. A **227**:1-2. (1997), 15-23.

ЛОКАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЯ КАНА – ХИЛЛИАРДА

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов
kulikov_d_a@mail.ru, anat_kulikov@mail.ru

УДК 517.518

Рассматривается уравнение Кана – Хиллиарда вместе с тремя типами краевых условий. Во всех краевых задачах изучен вопрос о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных состояний равновесия. Использован метод качественной теории бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: уравнение Кана – Хиллиарда, устойчивость, бифуркации, асимптотика

Local attractors of Cahn – Hilliard equation

The Cahn – Hilliard equation is considered with 3 types of boundary conditions. For all boundary value problem the questions about existence, stability and asymptotically representation of spatial nongomogeneous solutions are studied. Qualitative theory methods for infinite-dimensional dynamical systems are used.

Keywords: Cahn – Hilliard equation, stability, bifurcations,asymptotic

Рассмотрено известное в математической физике уравнение

$$u_t = (-u_{xx} - au + u^3)_{xx}, \tag{1}$$

которое принято называть уравнением Кана – Хиллиарда [1] и впервые появилось в физической химии в связи с изучением реакций в двухкомпонентных средах [2]. В уравнении (1) неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной x. Для приложений, быть может, более актуален вариант, когда $u = u(t, x, y)$ и рассматривается уравнение

$$u_t = \Delta(-\Delta u - au + u^3),$$

где Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным, но в рамках данного сообщения ограничимся изучением уравнения Кана – Хиллиарда в форме (1) вместе с краевыми условиями следующих трёх типов [1,2]

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00672).

Куликов Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Anatoly Kulikov (Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Куликов Дмитрий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ имени П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Dmitry Kulikov (Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Если обратиться к краевой задаче (КЗ) (1), (2), то при ее анализе возникает достаточно стандартная бифуркационная задача. КЗ (1), (2) имеет пространственно однородное состояние равновесия $u(t,x) = 0$. При $a \in (-\infty, 1]$ оно асимптотически устойчиво и при переходе a в интервал $(1, \infty)$ теряет устойчивость.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $a = 1+\varepsilon$ КЗ (1), (2) имеет два асимптотически устойчивых пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$u_\pm(x,\varepsilon) = \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon^{1/2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}\sin 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

В иных терминах при указанных a реализуется бифуркация типа "вилка"(или бифуркация Тьюринга–Пригожина).

Иная ситуация возникает при анализе КЗ (1), (3). КЗ (1), (3) имеет однопараметрическое семейство однородных состояний равновесия $u(t,x) = \alpha$, а также интеграл $M_0(u) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi u(t,x)dx = \alpha, \alpha \in R$ и произвольно. Наличие интеграла $M_0(\alpha) = \alpha$ означает, что сохраняется пространственное среднее, а при наличии условий непроницаемости (3) может быть проинтерпретировано как следствие закона сохранения массы.

Пусть $a \in (1, \infty)$. Положим $\alpha = \alpha(\varepsilon) = \pm\sqrt{\dfrac{a-1-\gamma\varepsilon}{3}}, \alpha_0 = \alpha(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, \gamma = \pm 1$ и соответствующий знак у γ будет выбран позднее.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и любом $a > 1$ КЗ (1), (3) имеет два пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$u_\pm(x,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) \pm \varepsilon^{1/2}v_1(x) + \varepsilon v_2 \pm \varepsilon^{3/2}v_3(x) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{5}$$

$$v_1(x) = (\frac{\gamma}{d})^{1/2}\cos x, v_2(x) = -\frac{\alpha_0\gamma}{2d}\cos 2x,$$
$$v_3(x) = (\frac{\gamma}{d})^{3/2}\frac{1}{32}(6\alpha_0^2 - 1)\cos 3x,\ d = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \alpha_0^2).$$

Решения (5) существуют, если $d \neq 0$ и при $d > 0$ (выбираем $\gamma = 1$) состояния равновесия (5) устойчивы, а при $d < 0 (\gamma = -1)$ они неустойчивы. Подчеркнём, что $d > 0$, если $\alpha_0^2 < 1/2$.

Итак, при $\alpha_0 \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия (5) формируют два локальных аттрактора $M_\pm(\varepsilon)(dimM_\pm(\varepsilon) = 1)$. При $|\alpha_0| > 1/\sqrt{2}$ получаем уже пару локально инвариантных седловых многообразия $M_\pm(\varepsilon)$. При таких $\alpha_0(\alpha(\varepsilon))$ будут устойчивыми пространственно однородные состояния равновесия $u(t,x) = \alpha(\varepsilon)$.

Аналогичный результат имеет место для КЗ (1), (4). Она имеет при соответствующем выборе $\alpha_0(\alpha(\varepsilon))$ и $a > 1$ двупараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия

$$u(x,\varepsilon,\varphi) = \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^{1/2}v_1(x+\varphi) + \varepsilon v_2(x+\varphi) + \varepsilon^{3/2}v_3(x+\varphi) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{6}$$

где $\varphi \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$, а функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$ были указаны в формулировке теоремы 2.

При $|\alpha_0| < 1/\sqrt{2}$ двупараметрическое семейство (6) образует двумерный аттрактор $M_2(\varepsilon)$ и его формирующие пространственно неоднородные состояния равновесия устойчивы (при этом в соответствующих формулах $\gamma = 1$).

Если же $|\alpha_0| > 1/\sqrt{2}$, то получаем двумерное локальное инвариантное многообразие, сформированное неустойчивыми пространственно неоднородными состояниями равновесия.

Обоснование результатов использует метод интегральных многообразий, теорию нормальных форм [3,4].

Литература

1. *Cahn J.W., Hilliard J.E.* Free energy of a Nonuniform system. I.Interfacial Free Energy // J. Chim. Phys, **28**:2 (1958), 258-267.

2. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New-York: Springer-Verlag, 1997.

3. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана-Хиллиарда, Курамото-Сивашинского и их обобщениях // ЖВМиМФ, **59**:4 (2019), 670-683.

4. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Пространственно неоднородные решения в двух краевых задачах для уравнения Кана-Хиллиарда // Научные ведомости БелГУ, **51**:2 (2019), в печати.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ – НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА

А.Н. Кучкарова

kuchkarova_ aigul@mail.ru

УДК 517.518

Найдены собственные значения спектральной задачи для вырождающегося оператора смешанного типа и построена соответствующая система собственных функций

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, спектральная задача, собственные числа, собственные функции, полнота

Construction of a system of eigenfunctions of the Tricomi-Neumann type problem for a degenerate operator of mixed type

Eigenvalues of the spectral problem for the degenerate operator of mixed type are found and the corresponding eigenfunctions system is constructed.

Keywords: equation of mixed type, spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions, completeness

Кучкарова Айгуль Наилевна, к.ф.-м.н., доцент, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Aigul Kuchkarova (Bashkir State University ,Ufa , Russia)

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m > 0$, в области D, ограниченной: 1) "нормальной"кривой Γ_0 : $x^2 + \frac{1}{\alpha^2} y^{2\alpha} = 1$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$; 2) характеристиками OC $(x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 0)$ и CA_2 $(x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$, где $C = (\frac{1}{2}, -(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}})$, $O = (0, 0)$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Задача. *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1, \tag{3}$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad -1 < x < 0, \tag{5}$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OC. \tag{6}$$

Пусть $\gamma_n = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} + n$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$. Тогда собственные значения $\lambda_{n,m}$ определяются как нули функции Бесселя $J_{\gamma_n}(\lambda)$, т.е. m –й корень уравнения $J_{\gamma_n}(\lambda) = 0$. Соответствующая система собственных функции задачи (2)-(6) имеет вид

$$u_{n,m}(x, y) =$$

$$= \begin{cases} c_{n,m} r^{-\beta} J_{\gamma_n}(\lambda_{n,m} r)(\sin\frac{\varphi}{2})^{1-2\beta}(F(\frac{1}{2}+\gamma_n, \frac{1}{2}-\gamma_n, \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\frac{\varphi}{2}) \\ + \dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(\frac{3}{2}-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)\Gamma(1+\gamma_n-\beta)} F(\beta+\gamma_n, \beta-\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\beta; \sin^2\dfrac{\varphi}{2})), \quad (r, \varphi) \in D_0, \\ c_{n,m}\sigma^{-\beta}\theta^{-(\beta+\gamma_n)} J_{\gamma_n}(\lambda_{n,m}\sigma) \dfrac{\Gamma(\gamma_n+\beta)\Gamma(\frac{1}{2}+\gamma_n)}{\Gamma(1+2\gamma_n)\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)} \\ F(\beta+\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\gamma_n, 1+2\gamma_n; \dfrac{1}{\theta}), \quad (\sigma, \theta) \in D_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $c_{n,m}$ – действительные числа.

Отметим, что ранее в работах [1]-[4] построены собственные функции задач Трикоми, Трикоми–Неймана и Геллерстедта.

Литература

1. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

2. *Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.* Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение //Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 76-87.

3. *Кучкарова А.Н.* Решение краевой задачи методом спектрального анализа // Ученые записки. Сборник научных статей физико-математического факультета

Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. Уфа, 2007. Выпуск 8. с. 15-22

4. *Сабитов К.Б.* К теории уравнения смешанного типа М.ФИЗМАТЛИТ. 2014. 304с. (гл.2)

АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.С. Леонов

asleonov@mephi.ru

УДК 519.642.8

Обратная задача нахождения источника решается по схеме регуляризованного проекционного метода с апостериорной оценкой точности, которая вычисляется с помощью нового, «быстрого», алгоритма.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, некорректные задачи, апостериорная оценка точности

A-posteriori error estimate in source recovery for linear PDEs

The inverse source problem is solved according to the scheme of a regularized projection method with an a-posteriori error estimate, which is calculated using a new "fast" algorithm.

Keywords: partial differential equations, ill-posed problems, a-posteriori error estimate

1. Рассмотрим *прямую задачу*: найти решение $u(\mathbf{x},t) \in U$ уравнения в частных производных $D_t u(\mathbf{x},t) = L_x u(\mathbf{x},t) + g(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$, $t > 0$ в области $G \subset \mathbb{R}^N$ при выполнении граничных условий $l_x u(\mathbf{x},t) = a(t)$, $\mathbf{x} \in \partial G$, $t \geqslant 0$, и начальных условий $d_t u(\mathbf{x},t)|_{t=0} = b(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$. Здесь D_t, L_x – линейные дифференциальные операторы по переменным t и $\mathbf{x}$ соответственно, действующие из банахова пространства U в банахово пространство V, l_x, d_t – линейные дифференциальные операторы, действующие из U в банаховы пространства V_x и V_t. Функции источника $g(\mathbf{x},t)$, $f(\mathbf{x})$ таковы, что $g(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x}) \in V$, $f(\mathbf{x}) \in V_x$. Считаем, что прямая задача корректно поставлена в указанных функциональных пространствах, т.е. она однозначно разрешима и устойчива для данных $g(\mathbf{x},t), f(\mathbf{x}), a(t), b(\mathbf{x})$ из этих пространств. В дальнейшем мы фиксируем известные функции $g(\mathbf{x},t), a(t), b(\mathbf{x})$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00159-а и 19-51-53005-ГФЕН-а), а также Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (Московского инженерно-физического института), проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Леонов Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ (Москва, Россия); Alexander S. Leonov (National research nuclear university MEPhI, Moscow, Russia)

и будем обозначать линейный ограниченный оператор решения прямой задачи с различными допустимыми функциями $f(\mathbf{x})$ как A: $u = Af$.

2. Нас интересует *обратная задача*: считая, что решение прямой задачи удовлетворяет дополнительному условию $Bu = F$, найти неизвестную функцию источника $f(\mathbf{x}) \in V_x$. Здесь B – линейный ограниченный оператор, действующий из U в банахово пространство W, а $F \in W$ – известный элемент. Задачи такого рода интенсивно изучаются (см., например, [1]). Они часто оказываются некорректно поставленными, и для их решения требуется применять методы регуляризации. В данном случае мы используем следующий подход. Предположим, что обратная задача, т.е. линейное операторное уравнение $B(Af) = F$, имеет единственное решение $\bar{f}(\mathbf{x}) \in V_x$. Будем решать уравнение формально с помощью разновидности проекционного метода, описанной, например, в [2]. Для этого предположим, что справедливо разложение $\bar{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(\mathbf{x})$ по базису $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty} \subset V_x$. Аппроксимируем $\bar{f}$ элементами $f_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(\mathbf{x})$ и вычислим приближенно разложения элементов $B(A\varphi_k)$ и F по базису $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W$: $B(A\varphi_k) \approx \sum_{l=1}^{m} A_{lk}\psi_l$, $F \approx \sum_{l=1}^{m} F_l \psi_l$. Тогда приближенное уравнение для нахождения источника принимает вид $\sum_{k=1}^{n} A_{lk} f_k = F_l$, $l = 1, ..., m$. Итак, точное операторное уравнение обратной задачи $B(Af) = F$ сводится к конечномерному уравнению $\hat{A}\hat{f} = \hat{F}$ с матрицей $\hat{A} = [A_{lk}]$ и столбцами $\hat{f} = [f_k] \in \mathbb{R}^n$, $\hat{F} = [F_l] \in \mathbb{R}^m$. При этом данные $\hat{F}$ этого уравнения могут быть заданы с ошибкой, т.е. известен приближенный элемент $\hat{F}_\delta \in \mathbb{R}^m$ и оценка его точности $\delta > 0$ такие, что $||\hat{F} - \hat{F}_\delta|| \leqslant \delta$.

Решим уравнение $\hat{A}\hat{f} = \hat{F}$ с приближенными данными $\hat{F}_\delta$, используя, например, метод регуляризации А.Н.Тихонова, и получим конечномерное приближенное решение $\hat{f}_\eta = [f_k^{(\eta)}]$, $\eta = (\delta, 1/n, 1/m)$ нашей задачи, и далее – приближенный элемент $f_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(\eta)} \varphi_k(\mathbf{x})$. При адекватном выборе параметра регуляризации такой подход обеспечивает сходимость $f_\eta(\mathbf{x}) \to \bar{f}(\mathbf{x})$ в пространстве V_x при $\eta \to 0$ (см., например, [2]).

3. Получив приближенное решение $f_\eta(\mathbf{x})$ рассматриваемой некорректно поставленной задачи, мы сталкиваемся с проблемой оценки его точности. В большинстве работ по решению некорректных задач даются *теоретические априорные оценки точности*. Они, как правило, получаются при очень жестких дополнительных ограничениях на искомое решение. Кроме того, эти оценки зачастую содержат константы, практическое вычисление которых затруднительно. Поэтому получить априорную оценку точности в виде числа в большинстве случаев невозможно. Как альтернатива, в последнее время развита теория *апостериорных оценок точности* решений некорректных задач. Мы будем использовать для оценки подход из [3].

Далее везде $||\cdot||$, $(\cdot,\cdot)$ – нормы и скалярные произведения в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^m$. Зная $f_\eta(\mathbf{x})$, вычислим величины $\Delta_\eta = ||\hat{A}\hat{f}_\eta - \hat{F}_\delta||$, $R_\eta = ||\hat{f}_\eta||$. Введем множество $\mathcal{F}_\eta = \{\hat{f} \in \mathbb{E}^n : ||\hat{A}\hat{f} - \hat{F}_\delta|| \leqslant C\Delta_\eta, ||\hat{f}|| \leqslant CR_\eta\}$, где $C > 1$ заданная константа, и предположим, что элемент $\widehat{\bar{f}} \in \mathbb{E}^n$, определяющий проекцию точного решения $\bar{f}(\mathbf{x})$ на подпространство $\mathrm{span}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, принадлежит множеству $\mathcal{F}_\eta$. Тогда справедливо неравен-

ство

$$||\hat{f}_\eta - \widehat{\hat{f}}|| \leqslant \sup\{||\hat{f}_\eta - \hat{f}|| : \ \hat{f} \in \mathcal{F}_\eta\} \stackrel{def}{=} \hat{\varepsilon}(\eta), \tag{1}$$

и функция $\hat{\varepsilon}(\eta)$ есть *глобальная апостериорная оценка точности* [3] конечномерного приближенного решения $\hat{f}_\eta$. Ее можно найти, решая экстремальную задачу (1) с помощью известных численных методов оптимизации.

4. В докладе предлагается новый алгоритм приближенного решения задачи (1). Пусть $\hat{v}_\eta = \hat{F}_\delta - \hat{A}\hat{f}_\eta$, $D_\eta^2 = (C^2-1)\,\|\hat{v}_\eta\|^2$, $r_\eta^2 = (C^2-1)R_\eta^2$. Для элементов $\hat{w} \in \mathbb{E}^n, ||\hat{w}|| = 1$, введем функционалы $t_\eta^{(I)}(\hat{w}) = \frac{\sqrt{(\hat{w},\hat{f}_\eta)^2 + r_\eta^2} - (w,\hat{f}_\eta)}{||\hat{w}||} > 0$, $t_\eta^{(A)}(\hat{w}) = \frac{\sqrt{(\hat{A}\hat{w},\hat{v}_\eta)^2 + D_\eta^2||\hat{A}\hat{w}||^2} + (\hat{A}\hat{w},\hat{v}_\eta)}{||\hat{A}\hat{w}||^2} > 0$. Определим также величину

$$\rho_\nu(\eta) = \sup_{\hat{w}}\{\xi_\nu[t_\eta^{(A)}(\hat{w}), t_\eta^{(I)}(\hat{w})] : \ ||\hat{w}|| = 1\}, \tag{2}$$

где $\xi_\nu(a,b) = \frac{ab}{\sqrt[\nu]{a^\nu + b^\nu}}$, $a, b > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Справедливо неравенство* $\rho_\nu(\eta) \leqslant \hat{\varepsilon}(\eta) \leqslant 2^{\frac{1}{\nu}}\rho_\nu(\eta)$.

Таким образом, величина $\rho_\nu(\eta)$ есть оценка для $\hat{\varepsilon}(\eta)$ с относительной точностью $\epsilon = 2^{\frac{1}{\nu}} - 1$, которая управляется числом ν (например, взяв $\nu = 60$, получим $\epsilon \approx 0.0116$). Число $\rho_\nu(\eta)$ можно принять как приближенную апостериорную оценку точности решений рассматриваемой обратной задачи определения источника. Такой метод апостериорной оценки точности является гораздо более быстродействующим (в среднем, в $3-5$ раз, в зависимости от решаемой задачи), чем ранее предложенные. Это связано с тем, что, в отличии от задачи (1), в экстремальной задаче (2) нахождения числа $\rho_\nu(\eta)$ имеется лишь одно простое ограничение. Детали решения задачи (2), кратко изложенные в работе [4], конкретизируются в докладе для обратной задачи определения источника.

5. В докладе приводятся примеры численного решения по предлагаемой методике обратной задачи нахождения источника в начально-краевых задачах для уравнения теплопроводности и колебаний, включая апостериорную оценку точности получаемых решений с помощью величины $\rho_\nu(\eta)$. В применяемом варианте проекционного метода используются сплайновые базисы метода конечных элементов. Предлагаемая методика применима с небольшими изменениями и для нахождения источника вида $g(\mathbf{x},t)f(t)$ с неизвестной функцией $f(t)$.

Литература

1. *Prilepko A.I., Kamynin V.L. and Kostin A.B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **26**:4 (2017), 523-539.

2. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. Изд. 2. — Москва: Либроком, 2013.

3. *Леонов А.С.* Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы их решения // Сиб. журн. вычисл. матем. **15**:1 (2012), 85-102.

4. *Leonov A.S., Yanfei Wang, Yagola A.G.* Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate // Inverse Problems in Science and Engineering, (2018) DOI: 10.1080/17415977.2018.1561676.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова

miro73@mail.ru, lbmironova@yandex.ru

УДК 517.956, 517.958

Получены нелокальные преобразования типа Коула-Хопфа, переводящие уравнения Лиувилля с тремя и четырьмя независимыми переменными в простейшие уравнения Бианки. Построены решения указанных уравнений Лиувилля, содержащие произвольные функции.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, уравнение Бианки, нелокальное преобразование

On nonlocal substitutions for Liouville equations

We obtained the non-local transformations of the Cole-Hopf type, which transfer the Liouville equations with three and four independent variables into the Bianchi equations. The solutions with arbitrary functions of these Liouville equations are constructed.

Keywords: Liouville equation, Bianchi equation, non-local transformation

Уравнение

$$u_{xyz} = \lambda e^u \tag{1}$$

может рассматриваться как трехмерный аналог уравнения Лиувилля

$$u_{xy} = \lambda e^u. \tag{2}$$

Уравнение (2), в частности, играет ключевую роль в задаче групповой классификации гиперболических уравнений второго порядка [1, с. 116–125]

$$v_{xy} + a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v = 0.$$

Миронов Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, Елабужский институт КФУ (Елабуга, Россия); Alexey Mironov (Yelabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Yelabuga, Russia)

Миронова Любовь Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт КФУ (Елабуга, Россия); Lyubov Mironova (Yelabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Yelabuga, Russia)

Уравнение (1) используется при изучении групповых свойств уравнения Бианки третьего порядка [2]

$$v_{xyz} + a(x,y,z)v_{xy} + b(x,y,z)v_{yz} + c(x,y,z)v_{xz} + \\ + d(x,y,z)v_x + e(x,y,z)v_y + f(x,y,z)v_z + g(x,y,z)v = 0.$$

Здесь построено нелокальное преобразование, переводящее уравнение (1) в простейшее уравнение Бианки

$$v_{xyz} = 0, \tag{4}$$

которое имеет зависящее от трех произвольных функций общее решение вида

$$v = \alpha(x,y) + \beta(x,z) + \gamma(y,z). \tag{5}$$

При этом используется алгоритм, основанный на применении групповых методов [3, с. 237–241].

Уравнение (1) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ — произвольные функции.

С другой стороны, уравнение (4) допускает алгебру Ли операторов

$$X_0 = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z,$$

где $\xi(x)$, $\eta(y)$, $\zeta(z)$ также произвольны. Кроме того, как всякое линейное уравнение, уравнение (4) допускает оператор растяжения $Y = v\partial_v$.

В связи с этим предположим, что существует нелокальное преобразование

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) \tag{6}$$

такое, что система уравнений (1), (4), (6) допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(y)\partial_y + \zeta(z)\partial_z - (\xi'(x) + \eta'(y) + \zeta'(z))\partial_u, \quad Y = v\partial_v.$$

Должны выполняться соотношения

$$\underset{1}{X}(u-\varphi)|_{u=\varphi} = v\varphi_v + v_x\varphi_{v_x} + v_y\varphi_{v_y} + v_z\varphi_{v_z} = 0, \tag{7}$$

$$\underset{1}{X}(u-\varphi)|_{u=\varphi} = -(\xi' + \eta' + \zeta') + \xi' v_x\varphi_{v_x} + \eta' v_y\varphi_{v_y} + \zeta' v_z\varphi_{v_z} = 0, \tag{8}$$

где $\underset{1}{X}$, $\underset{1}{Y}$ — первые продолжения операторов X, Y.

Учитывая, что функция v имеет вид (5), из (7)–(8) получаем систему

$$(\alpha + \beta + \gamma)\varphi_v + (\alpha_x + \beta_x)\varphi_{v_x} + (\alpha_y + \gamma_y)\varphi_{v_y} + (\beta_z + \gamma_z)\varphi_{v_z} = 0,$$
$$-(\xi' + \eta' + \zeta') + \xi'(\alpha_x + \beta_x)\varphi_{v_x} + \eta'(\alpha_y + \gamma_y)\varphi_{v_y} + \zeta'(\beta_z + \gamma_z)\varphi_{v_z} = 0,$$

которой удовлетворяет соотношение

$$u = \varphi(v, v_x, v_y, v_z) = \ln\frac{cv_xv_yv_z}{v^3}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в уравнение (1) с учетом (5) приводит к формуле, определяющей класс решений уравнения (1), зависящих от трех произвольных функций

$$u = \ln\left(-\frac{6}{\lambda}\frac{f_1'(x)f_2'(y)f_3'(z)}{(f_1(x)+f_2(y)+f_3(z))^3}\right).$$

Здесь $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Аналогично может быть рассмотрено уравнение

$$u_{xyzt} = \lambda e^u.$$

С помощью нелокальной подстановки построено его решение

$$u = \ln\left(\frac{24}{\lambda}\frac{f_1'(x)f_2'(y)f_3'(z)f_4'(t)}{(f_1(x)+f_2(y)+f_3(z)+f_4(t))^4}\right),$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$, $f_4(t)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978.

2. *Миронов А.Н.* Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка // Матем. заметки, **94**:3 (2013), 389-400.

3. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка, 1989.

О КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФУЗНОЙ МЕРОЙ

Ф.Х. Мукминов

mfkh@rambler.ru

УДК 517.954,517.956.45,517.958:531.72

Рассматривается первая смешанная задача для анизотропного параболического уравнения с диффузной мерой в правой части. Уравнение имеет переменные показатели нелинейности. Установлена новая версия формулы интегрирования по частям в виде двух неравенств. Она позволила упростить доказательство существования решения задачи. Оно не использует осреднение Ландеса. Доказана также единственность решения задачи.

Ключевые слова: диффузная мера, существование решения, единственность решения, параболическое уравнение, формула интегрирования по частям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428 а).

Мукминов Фарит Хамзаевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Farit Mukminov (Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences State , Ufa, Russia)

On the correctness of a mixed problem for an anisotropic parabolic equation with a diffuse measure

The first mixed problem for an anisotropic parabolic equation with a diffuse measure on the right-hand side is considered. The equation has variable nonlinearities. A new version of the integration by partformula is established in the form of two inequalities. It allowed us to simplify the proof of the existence of a solution to the problem. It does not use the Landes averaging. The uniqueness of the solution of the problem is also proved.

Keywords: diffuse measure, existence of a solution, uniqueness of a solution, parabolic equation, integration formula by parts.

Пусть Ω — произвольная ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. В цилиндрической области $D^T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$u_t = \mathrm{div} a(x,u,\nabla u) + b(x,u,\nabla u) + \mu,\ a = (a_1,...,a_n), \tag{1}$$

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_1(\Omega). \tag{3}$$

Функция $a(x,r,y)$ – удовлетворяет условиям

$$a(x,r,y) \cdot y \geqslant \delta_0 S(x,y) - CF(x), \quad \forall r \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n, \quad S(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p_i(x)},$$

$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)} \leqslant C(F(x) + |r|^q + S(x,y)),\ \frac{1}{\overline{p}_j} + \frac{1}{p_j} = 1,\ j = 1,...,n,$$

при всех $r \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$; здесь $F(x) \in L_1(\Omega)$,

$$q < p_\infty = \max\{p_i\}, \quad p_i = \inf\{p_i(x), x \in \Omega\}.$$

Выполнено условие монотонности

$$(a(x,r,y) - a(x,r,z)) \cdot (y - z) > 0,\ y \neq z.$$

Пусть

$$|b(x,r,y)| \leqslant F(x); \quad \forall r \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega;$$

Пространство $\mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ определяется как пополнение пространства $C^1_0(D^T)$ по норме

$$||u||_{W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)} = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),D^T} = \|\nabla u\|_{\mathbf{p},D^T}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда существует ренормализованное решение задачи (1) – (3) с правой частью вида* $\mu = f + \mathrm{div} G + g_t$, *где* $f \in L_1(D^T)$, $G_i \in L_{p(\cdot)}(D^T)$, $g \in \mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Доказательство опирается на установленную в работе лемму об интегрировании по частям :

Лемма 1. *Пусть* $\beta(r)$ *– непрерывная неубывающая функция, и измеримые функции* $v : D^T \to \mathbb{R}$, $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ *таковы, что* $\beta(v) \in L_1(D^T)$, $\beta(x, v_0) \in L_1(\Omega)$. *Пусть* $z \in (\mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T))' + L_1(D^T)$, $k = 0, 1$, *и выполнено неравенство*

$$(-1)^k[(\beta(v) - \beta(v_0))\varphi_t] \geqslant (z, \varphi)_{D^T} - c\|\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$(-1)^k[\varphi_t \int_{v_0}^{v} h(r) d_r\beta(r)] \geqslant (z, h(v)\varphi)_{D^T} - c\|h(v)\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ *и неотрицательных ограниченных функциях* $h(s)$, *монотонных и липшицевых по* s, *таких, что* $\nabla h(v) \in \mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

При дополнительном условии

$$(a(t, x, r, y) - a(t, x, \widetilde{r}, z)) \cdot (y - z) +$$
$$+C(m)(F(t, x) + |a(t, x, r, y) \cdot y| + |a(t, x, \widetilde{r}, z) \cdot z|)|r - \widetilde{r}| \geqslant 0,$$

где $C(m)$ – непрерывная функция, $|r|, |\widetilde{r}| \leqslant m$, – доказана единственность решения задачи.

Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [1].

Литература

1. *Bouajaja A., Redwane H. and Marah A.* Existence and Uniqueness of Renormalized Solutions to Nonlinear Parabolic Equations with Lower Order Term and Diffuse Measure Data // Mediterr. J. Math., **178**:15 (2018), https://doi.org/10.1007/s00009-018-1223-8.

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ВОЗНИКАЮЩИЕ В МОДЕЛЯХ НЕЙРОСЕТЕЙ: ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

А.Б. Муравник
amuravnik@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматривается задача Коши для сингулярных квазилинейных дифференциально-сверточных неравенств параболического типа, возникающих при описании нейронных сетей, процессов реакции–диффузии и нелокальных фазовых переходов. Устанавливаются достаточные условия отсутствия ее глобальных решений задачи Коши, т. е. необходимые условия ее глобальной разрешимости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения в частных производных, квазилинейные уравнения, параболические уравнения, отсутствие глобальных решений

Singular inequalities arising in neural-network models: global solvability

The Cauchy problem for singular quasilinear parabolic differential-convolutional inequalities describing neural networks, reaction–diffusion processes, and nonlocal phase transitions is considered. Sufficient conditions of the nonexistence of its global solutions, i. e., necessary conditions of its global solvability, are found.

Keywords: partial functional-differential equations, quasilinear equations, parabolic equations, nonexistence of global solutions

В полупространстве $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant \Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t,u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + b(x,t,u)\, K * u^{\omega}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Дифференциальные операторы рассматриваемой задачи возникают при математическом моделировании нейронных сетей, процессов реакции–диффузии и нелокальных фазовых переходов (см., напр., [2]).

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что* $\alpha > -1$, $0 < \beta < n$, $u_0^{\alpha+1} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ *и существуют такие положительные* C *и* R_0 *и такое неотрицательное* γ, *что неравенство* $\int_{|x|<R} u_0^{\alpha+1}(x)dx \geqslant CR^{\gamma}$ *выполняется для любого*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг, а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., руководитель проекта, АО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия); Andrey Muravnik (JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia)

R из $(R_0, +\infty)$. Предположим, что $a_j(x,t,s) \geqslant \dfrac{\alpha}{s}$, $j = \overline{1,n}$, $b(x,t,s) \geqslant \dfrac{1}{(\alpha+1)s^{\alpha}}$, а функция $K(x)$ ограничена снизу ядром Рисса $|x|^{\beta-n}$. Тогда, если $\gamma \geqslant n$, то задача (1)-(2) не имеет классических положительных решений при условии, что $\omega > \alpha + 1$, а если $\gamma < n$, то задача (1)-(2) не имеет классических положительных решений при условии, что $1 < \dfrac{\omega}{\alpha+1} < 1 + \dfrac{\beta+2}{n - \max\{\gamma, \beta\}}$.

Это утверждение (обобщающее результаты работы [1]) дает более сильные результаты, чем аналогичное утверждение для соответствующих *уравнений* — если условие гарантирует отсутствие глобальных решений (нестрогого) *неравенства*, то при том же самом условии соответствующее *уравнение* тем более не имеет глобальных решений.

Литература

1. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Лиувиллевы теоремы для некоторых классов нелинейных нелокальных задач // Тр. МИАН, **248** (2005), 164-184.

2. *Chen F.* Almost periodic traveling waves of nonlocal evolution equations // Nonlinear Analysis, **50** (2002), 807-838.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н.Т. Орумбаева, А.Б. Кельдибекова

OrumbayevaN@mail.ru, keldibekova_a_b@mail.ru

УДК 517.956

В настоящей работе исследуются вопросы существования решения периодической краевой задачи для системы дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка и предлагается метод построения ее приближенного решения. Установлены достаточные условия существования и единственности решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, алгоритм, периодическая краевая задача

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP05132262, грант "Лучший преподаватель ВУЗа").

Орумбаева Нургул Тумарбековна, к.ф.-м.н., доцент, КарГУ имени академика Е.А. Букетова (Караганда, Казахстан); Nurgul Orumbayeva (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)

Кельдибекова Алия Болатовна, PhD докторант, КарГУ имени академика Е.А. Букетова (Караганда, Казахстан); Aliya Keldibekova (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)

Solubility of a periodic boundary value problem for a differential equation in partial derivatives of the third order

In this paper, we study the existence of a solution to the periodic boundary value problem for a system of partial differential equations of the third order and propose a method for constructing its approximate solution. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the studied problem are established.

Keywords: differential equations in partial derivatives, an algorithm, a periodic boundary value problem

На $\Omega = [0, X] \times [0, T]$ рассматривается периодическая краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)u + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,X], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(x,t), B(x,t)$, n-вектор-функции $f(x,t)$ непрерывны на Ω, n-вектор-функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,T]$, здесь $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Для нахождения решения введем функцию $v(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и применяем метод параметризации [1]. По шагу $h > 0 : Nh = T$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$, $N = 1, 2, ...$ При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t)$, $z_r(x,t)$, $u_r(x,t)$ обозначим, соответственно, сужение функции $v(x,t)$, $u(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$.

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t = (r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену[2] $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x), r = \overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\widetilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + B(x,t)u_r(x,t) + f(x,t), \tag{4}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,N}, \tag{5}$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \to T-0} \widetilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \to sh-0} \widetilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1,N-1}. \tag{7}$$

$$u_r(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v_r(\eta,t)d\eta d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{8}$$

где (7)- условие склеивания функций во внутренних линиях разбиения.

Задача (8),(9) при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x,t)$ является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$, и эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,u_r)d\tau, \qquad (9)$$

где

$$\int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,u_r)d\tau = \int\limits_{(r-1)h}^{t} B(x,\tau)u_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau.$$

Переходя в правой части уравнения (9) к пределу при $t \to rh-0$ и подставляя в уравнения (6), (7), для неизвестных функций $\lambda_r(x), r = \overline{1,N}$ получим систему функциональных уравнений:

$$Q(x,h)\lambda(x) = -F(x,h,u) - G(x,h,\widetilde{v}). \qquad (10)$$

Здесь элементы матрицы $Q(x,h)$ определяются через $A(x,t)$. Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x), \widetilde{v}_r(x,t),\ u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1,N}$, имеем замкнутую систему состоящую из уравнений (10), (9) и (8).

Предполагая обратимость матрицы $Q(x,h)$ при всех $x \in [0,\omega]$, из уравнения (10), где $u_r(x,t) = \varphi(t)$, $\widetilde{v}_r(x,t) = 0$, находим

$$\lambda^{(0)}(x) = -[Q(x,h)]^{-1}\big\{F(x,h,\varphi) + G(x,h,0)\big\}.$$

Используя уравнение (9), при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, найдем функции

$$\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r^{(0)}(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau,\varphi)d\tau,\ r = \overline{1,N}.$$

Функции $u_r^{(0)}(x,t), r = \overline{1,N}$, определяются из соотношения (8).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость и сходимость предложенного алгоритма, а также однозначную разрешимость задачи (4)-(8).

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $h > 0 : Nh = T, N = 1,2,...,$ $(nN \times nN)$ *матрица* $Q(x,h)$ *обратима при всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства*
1) $\|[Q(x,h)]^{-1}\| \leqslant \gamma(x,h)$;
2) $a(x)q(x,h) \leqslant \mu < 1, \quad q(x,h) = h[1 + a(x)\gamma(x,h)h], a(x) = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(x,t)\|.$

Тогда существует единственное решение задачи (4)-(8) и справедливы оценки

$$a)\ \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sigma(x,h)b(x)\sum_{j=2k-1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\int_0^x\int_0^\xi\sigma(\eta,h)b(\eta)d\eta d\xi\right)^j\int_0^x\int_0^\xi\chi(\eta,h)d\eta d\xi\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{(x,t)\in\Omega}\|f(x,t)\|\right\},$$

$$b)\ \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^*(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^x\int_0^\xi\left(\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(\eta)-\lambda_r^{(k)}(\eta)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\eta,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(\eta,t)\|\right)d\eta d\xi,$$

$k=1,2,...,$ *где* $b(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|,\quad\sigma(x,h)=\frac{[q(x,h)+\gamma(x,h)h]}{1-a(x)q(x,h)}$,

$$\chi(x,h)=\Big[\sigma(x,h)q(x,h)+\gamma(x,h)h\Big][a(x)+b(x)]\rho(x),$$

$$\rho(x)=\max\left\{[b(x)+1]q(x,h),x+\int_0^x\int_0^\xi\Big[b(\eta)+1][q(\eta,h)+\gamma(\eta,h)h\Big]d\eta d\xi\right\}\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{(x,t)\in\Omega}\|f(x,t)\|\right\}.$$

В силу эквивалентности задач (1)-(3) и (4)-(8) из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение* $u^*(x,t)$ *задачи (1)-(3).*

Литература

1. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики, **29**:1 (1989), 50-66.

2. *Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T.* Well-posedness of a periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations with delayed argument // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, **89**:1 (2018), 8–14. DOI: 10.31489/2018M1/8-14.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР

Г.С. Осипенко
george.osipenko@mail.ru

УДК 517.938

Рассматривается дискретная динамическая система, порожденная гомеоморфизмом f на компактном многообразии M. Символический образ G динамической системы это ориентированный граф определенный по конечному покрытию многообразия замкнутыми ячейками. Потоки на графе G являются аналогами инвариантных мер. Если диаметр покрытия достаточно мал, то потоки аппроксимируют инвариантные меры. Простой поток на G порожден циклом без повторений. Показано, что простые потоки аппроксимируют эргодические меры.

Ключевые слова: символический образ, потоки на графе, слабая топология, простой поток.

Approximation to the ergodic measures

The discrete dynamical system generated by the f homeomorphism on the compact manifold M is considered. The symbolic image G of the dynamical system is an oriented graph defined by the finite covering of a manifold by closed cells. The flows on the graph G are analogues of invariant measures. If the diameter of covering is small enough then the flows approximate invariant measures. A simple flow on G is generated by a loop without repetitions. It is shown that simple flows approximate ergodic measures.

Keywords: symbolic image, flow on graph, weak topology, simple flow.

Пусть $f : M \to M$ гомеоморфизм компактного многообразия M, который порождает дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{1}$$

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа динамической системы [1], которое соединило в себе символическую динамику [2] и численные методы [3].

Пусть $C = \{M(1), ..., M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i. Символический образ динамической системы для покрытия C есть ориентированный граф G с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \to j$ тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \bigcap M(j) \neq \emptyset.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № А 19-01-00388).

Осипенко Георгий Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, Филиал МГУ в Севастополе (Крым, Россия); George Osipenko (Sevastopol Branch of Lomonosov Moscow State University, Crimea, Russia)

Не ограничивая общности, можно считать, что ячейки $M(i)$ являются многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Пусть число $d = diam(C)$ есть наибольший из диаметров ячеек, которое назовем диаметром покрытия C. Обозначим множество всех f-инвариантных нормированных мер $\mathcal{M}(f)$. Множество $\mathcal{M}(f)$ является выпуклым замкнутым компактом в слабой топологии, крайними точками этого множества являются эргодические меры.

Потоком на графе G называется распределение $\{m_{ij}\}$ на дугах $\{i \to j\}$ такое, что $m_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{ij} m_{ij} = 1$ и для любой вершины i имеет место равенство

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}. \tag{2}$$

Множество потоков на графе G образуют выпуклое множество $\mathcal{M}(Q)$ с естественной операцией сложения.

Из покрытия C построим разбиение $C^* = \{M^*(i)\}$, приписывая граничные диски к одной из примыкающих ячеек. Если имеется инвариантная мера μ, то приписывая каждой дуге $i \to j$ меру

$$m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)), \tag{3}$$

получим поток на символическом образе. Так определено отображение из пространства инвариантных мер $\mathcal{M}(f)$ в пространство потоков $\mathcal{M}(G)$ на символическом образе G. Рассмотрим обратное построение. Пусть на символическом образе G определен поток $m = \{m_{ij}\}$, тогда на многообразии M можно определить меру μ, полагая для любого измеримого $A \subset M$

$$\mu(A) = \sum_i \frac{m_i v(A \cap M(i))}{v(M(i))}, \tag{4}$$

где v — нормированная на M мера Лебега. Вообще говоря, построенная мера μ не является инвариантной для f, однако, следующая теорема утверждает, что построенная мера μ аппроксимирует инвариантную меру.

Теорема 1. [4] *Для любой окрестности (в слабой топологии) U множества $\mathcal{M}(f)$ найдется положительное число d_0 такое, что для всякого разбиения C с максимальным диаметром $d < d_0$ и любого потока m на символическом образе G, построенного относительно разбиения C, мера μ, построенная согласно (4) по m, лежит в окрестности U.*

Периодический путь $\omega = (i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k = i_0)$ на G называется простым или циклом, если все вершины $\{i_t,\ t = 1, 2, \ldots, k\}$ различны. Простой путь ω порождает простой поток $m(\omega)$, сосредоточенный на ω такой, что $m_{ij} = 1/k$ для всех дуг периодического пути ω и $m_{ij} = 0$ для всех остальных дуг. Простой поток не раскладывается в сумму других потоков и является крайней точкой множества потоков $\mathcal{M}(G)$ на G.

Пусть Q и G — ориентированные графы, $s:\ Q \to G$ является отображением ориентированных графов и существует поток m на Q. Тогда отображение s индуцирует поток $m^* = s^* m$ на G такой, что мера дуги $i \to j\ \in G$ вычисляется как

$$m^*_{ij} = \sum_{s(p \to q) = i \to j} m_{pq},$$

где сумма берется по всем дугам $p \to q$, которые отображаются на $i \to j$. Если дуга $i \to j$ не имеет прообразов, то $m^*_{ij} = 0$. Образ $s^*(\mathcal{M}(Q))$ является выпуклым многогранником в $\mathcal{M}(G)$.

Пусть покрытие C подвергается подразбиению, т.е. каждая ячейка $M(i)$ разбивается на несколько ячеек $M(i1)$, $M(i2)$, ... так, что $M(i) = \bigcup_k M(ik)$. Таким образом, мы получаем новое покрытие NC и новый символический образ NG. Нумерация вершин на G и NG задается в виде $\{i\}$ и $\{(ik)\}$, соответственно. Естественное отображение $s: NG \to G$ имеет очень простой вид $s(ik) = i$. Это отображение является отображением ориентированных графов. Отображение s позволяет перенести любой поток заданный на NG в поток заданный на G, как это описано выше, т.е. построить отображение

$$s^* : \mathcal{M}(NQ) \to \mathcal{M}(G),$$

где $\mathcal{M}(G)$ и $\mathcal{M}(NG)$ множество потоков на G и NG, соответственно.

Теперь рассмотрим последовательные подразбиения C_1, C_2, C_3, ... такие, что максимальный диаметр ячеек разбиений d_1, d_2, d_3, ... сходится к нулю. При этом, каждое покрытие C_k состоит из ячеек, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Такая последовательность порождает последовательность символических образов G_1, G_2, G_3, ..., их отображений $s: G_k \to G_{k-1}$ и отображений потоков

$$s^* : \mathcal{M}(G_k) \to \mathcal{M}(G_{k-1}).$$

Пусть на каждом символическом образе G_k выбран поток $m^k \in \mathcal{M}(G_k)$, причем потоки $\{m^k\}$ согласованы, т.е.

$$s^*(m^{k+1}) = m^k.$$

Используя меру Лебега, построим меру μ_k по формуле (4) для каждого k. В результате получена последовательность мер $\{\mu_k\}$ на многообразии M.

Теорема 2. *Пусть C_k — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек $d_k \to 0$. Если m^k согласованная последовательность простых потоков на символических образах G_k, то существует инвариантная мера*

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_k,$$

которая является эргодической.

Литература

1. *Osipenko G.* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. Lectures Notes in Mathematics, **1889**. — Springer, Berlin, 2007.

2. *Lind Douglas, Marcus Brian.* An introduction to symbolic dynamics and coding. — Cambridge University Press, 1995.

3. *Hsu C. S.* Cell-to-Cell Mapping. — Springer-Verlag, N.Y., 1987.

4. *Osipenko G.* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems // Ergodic Theory and Dynamical Systems, **30** (2010), 1217-1237.

О МАКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ

К.Н. Оспанов
kordan.ospanov@gmail.com

В докладе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости в гильбертовом пространстве одной полупериодической задачи на полосе для двумерного сингулярного эллиптического уравнения второго порядка с неограниченным промежуточным коэффициентом. Предполагается, что некоторое среднее от промежуточного коэффициента уравнения быстро растет около бесконечности и не контролируется другими коэффициентами. Исследуемое уравнение встречается в задачах стохастического анализа, биологии и финансовой математики. Для решения уравнения получена оценка максимальной регулярности. Ранее такие результаты получены только в случае линейного и близкого к линейному роста промежуточного коэффициента в работах A. Lunardi и V. Vespri (1997), P.J. Rabier (2005), M. Hieber, L. Lorenzi, J. Prüss, A. Rhandi и R. Schnaubelt (2009).

УСРЕДНЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СТЕПЕННОГО РОСТА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

С.Е. Пастухова
pas-se@yandex.ru

УДК 517.956.25

Получено усреднение задачи Дирихле в области из $\mathbb{R}^n$ для эллиптического максимального монотонного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$, удовлетворяющего степенным оценкам роста с переменным показателем, когда показатель роста $p_\varepsilon(x)$, а также символ оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ осциллируют с малым периодом ε по пространственной переменной x. Предельным при $\varepsilon \to 0$ будет максимальный монотонный оператор $\mathcal{A}$, символ которого не зависит от x и подчинён оценкам роста нестепенного типа с выпуклой функцией $f(\xi)$ – результатом усреднения степени $|\xi|^{p_\varepsilon(x)}$.

Ключевые слова: периодическое усреднение, максимальный монотонный оператор, переменный показатель роста

Оспанов Кордан Наурызханович, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); L.N.Gumilyov Eurasian National University

Пастухова Светлана Евгеньевна, д.ф.-м.н., профессор, МИРЭА–РТУ (Москва, Россия); Svetlana Pastukhova (MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia)

Homogenization of maximal monotone operators with oscillating growth exponent

We consider the Dirichlet problem for an elliptic maximal monotone operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ satisfying growth estimates of power type with a variable exponent. This exponent $p_\varepsilon(x)$ and also the symbol of the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ oscillate with a small period ε with respect to the space variable x. We prove a homogenization result for this problem obtaining, in the limit as $\varepsilon \to 0$, a maximal monotone operator $\mathcal{A}$. The symbol of $\mathcal{A}$ does not depend on x and satisfies new type growth estimates casted in terms of a convex function $f(\xi)$ which arises via homogenization of the polinomial $|\xi|^{p_\varepsilon(x)}$.

Keywords: periodic homogenization, maximal monotone operator, growth conditions with a variable exponent

1° В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, введём классы функций

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{v \in L^1(\Omega) : |v(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)\},$$

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : Du \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

где показатель $p : \Omega \to \mathbb{R}$ есть измеримая функция, удовлетворяющая условию $1 < \alpha \leqslant p(\cdot) \leqslant \beta < \infty$. Наделённые нормами Люксембурга

$$||v||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\},$$

$$||u||_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = ||Du||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

это будут рефлексивные сепарабельные Банаховы пространства. Теория этих пространств изложена, например, в обзорной статье [1] и книге [2]. Отметим особенность пространства Соболева $W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным порядком: в нём, вообще говоря, не плотны функции класса $C_0^\infty(\Omega)$. Если определить другое пространство Соболева $H = H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ как замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в W, то в общем случае $W \neq H$. Несовпадение этих пространств принято называть *эффектом Лаврентьева*, и говорят, что показатель $p(\cdot)$ *регулярен*, если $W = H$.

2° Для заданной вектор-функции $h \in L^\infty(\Omega)$ рассмотрим в области Ω дифференциальное включение с нулевым граничным условием Дирихле

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \\ g_\varepsilon(x) \in a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega g_\varepsilon \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функции $p(\cdot)$ and $a(\cdot, \xi)$ периодичны на $\mathbb{R}^n$, их ячейка периодичности – единичный куб $Y = (0,1)^n$; гомотетией получаем ε-периодические функции

$$p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon),\ a_\varepsilon(x,\xi) = a(x/\varepsilon, \xi),\ \varepsilon \in (0,1].$$

Отображение $a : Y \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ многозначное (т.е. в качестве "значений отображения"имеем множества из $\mathbb{R}^n$, необязательно точечные) и удовлетворяет условиям максимальной монотонности по ξ, а также измеримости по совокупности переменных, кроме того, выполнены оценки коэрцитивности и роста

$$c_1|\xi|^{p(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_1, \quad c_2|\eta|^{p'(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_2 \tag{2}$$

для п.в. $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in a(x, \xi)$ с константами $c_1, c_2, > 0$ и $m_1, m_2 \geqslant 0$ (здесь и всюду далее штрихом обозначаем сопряженный по Гёльдеру показатель, т.е. $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$). Такого рода многозначные монотонные по ξ отображения, зависящие также от пространственной переменной x, более детально описаны в [3], где изучалась G-сходимость монотонных операторов с подобными символами. Из (2) вытекают оценки для $a_\varepsilon(x, \xi)$ с показателем $p_\varepsilon(x)$ и теми же константами c_i, m_i, а именно,

$$c_1|\xi|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_1, \quad c_2|\eta|^{p'_\varepsilon(x)} \leqslant \xi \cdot \eta + m_2 \tag{3}$$

для п.в. $x \in \Omega$, а также всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in a_\varepsilon(x, \xi)$.

В задаче (1) надо найти пару функций $(u_\varepsilon, g_\varepsilon)$, удовлетворяющих трём указанным условиям. При сделанных выше предположениях существует, по крайней мере, одно решение задачи (1), при этом справедливы оценки

$$\int_\Omega |Du_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)}\, dx \leqslant c, \quad \int_\Omega |g_\varepsilon|^{p'_\varepsilon(x)}\, dx \leqslant c,$$

где $c > 0$ не зависит от ε. Благодаря этим оценкам, имеем слабую сходимость (хотя бы по подпоследовательности)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad g_\varepsilon \rightharpoonup g \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega). \tag{4}$$

Основная трудность – найти связь между предельными элементами в (4).

3° В случае однозначного отображения $a(x, \cdot)$ задача (1) упрощается: поток $g_\varepsilon = a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon)$ находится по функции u_ε однозначно и дифференциальное включение превращается в уравнение в слабой форме

$$u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \int_\Omega a_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega). \tag{5}$$

В (5) введено так называемое W-решение задачи Дирихле для монотонного уравнения

$$\operatorname{div} \mathrm{a}_\varepsilon(\mathrm{x}, \mathrm{Du}_\varepsilon) = \operatorname{div} \mathrm{h} \tag{6}$$

в области Ω. Заменяя в (5) пространство $W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ на $H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, приходим к H-решению уравнения (6). W- и H-решения могут не совпадать. Таким образом, эффект Лаврентьева влечёт особого рода неединственность для уравнений с переменным порядком нелинейности: задачу Дирихле для уравнения можно ставить, по крайней мере, двумя способами и обе постановки корректны. Задача (5), а также её аналог для H-решения исследованы в [4], где доказан результат об усреднении уравнения (6) с учетом эффекта Лаврентьева. Для каждого типа решений найдена своя процедура

усреднения. Например, установлена сходимость (в определенном смысле) при $\varepsilon \to 0$ решений u_ε задачи (5) к решению u задачи

$$u \in W_0^f(\Omega), \quad \int_\Omega a(Du) \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^f(\Omega). \tag{7}$$

Здесь $W_0^f(\Omega) = \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : f(Dv) \in L^1(\Omega) \right\}$ есть пространство Соболева, в котором интегрируемость по Орличу задана выпуклой функцией $f(\xi)$. Монотонный символ $a(\xi)$ и выпуклая функция $f(\xi)$ определяются с помощью задач на ячейке периодичности Y, каждая из которых корректна. Корректность задачи (7) обеспечена оценками

$$a(\xi) \cdot \xi \geqslant c(f(\xi) - 1), \quad f^*(a(\xi)) \leqslant C(f(\xi) + 1), \tag{8}$$

где константы $C, c > 0$ и f^* – функция, сопряжённая по Фенхелю для f.

4° В общем случае усредненной для (1) будет однородная задача

$$\begin{cases} u \in W_0^f(\Omega), \\ g(x) \in a(Du(x)) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega g \cdot Dv\, dx = \int_\Omega h \cdot Dv\, dx \quad \forall v \in W_0^f(\Omega). \end{cases} \tag{9}$$

Предельные элементы из (4) являются решением задачи (9). Условия роста (3) трансформируются в пределе в условия нестепенного типа

$$c_1 f(\xi) \leqslant \xi \cdot \nu + m_1, \quad c_2 f^*(\nu) \leqslant \xi \cdot \nu + m_2$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in a(\xi)$. Это аналог соотношений (8) при усреднении максимальных монотонных операторов.

Исследование предельного поведения решений задачи (1) в случае регулярного показателя $p(\cdot)$ проведено совместно с В. Кьядо Пиат.

Литература

1. *Zhikov V.V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci., **173**:5(2011), 463–570.

2. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017. – Berlin: Springer, 2011.

3. *Chiadò Piat V., Dal Maso G., Defranceschi A.* G-convergence of monotone operators // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **7**(1990), 123–160.

4. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка // Матем. заметки, **90**:1 (2011), 53–69; Math. Notes, 90:1 (2011), 48–63.

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

С.В. Пикулин
spikulin@gmail.com

УДК 519.632.4

Задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с оператором типа p–лапласиана в главной части рассматривается в областях Ω_ε, содержащих шаровую полость малого размера ε, причем функция в краевом условии на границе полости зависит от параметра ε, а условие на границе $\partial\Omega$ соответствующей области без полости является однородным. Установлены достаточные условия сходимости к нулю семейства решений $\{u_\varepsilon(x)\}$ этой задачи при $\varepsilon \to 0$ в интегральной норме, и получена оценка скорости этой сходимости.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические уравнения, p–лапласиан, задача Дирихле, обобщенные решения, сходимость решений

Convergence of the solutions of a quasilinear elliptic equation in a domain with a spherical cavity

The Dirichlet problem for a second order quasilinear elliptic equation containing an operator of p–Laplacian type in its main part is considered in domains Ω_ε with a spherical cavity of small size ε. The form of the function in the condition on the cavity's boundary depends on ε, while the condition on the boundary $\partial\Omega$ of the domain with no cavity is homogeneous. For ε tending to zero sufficient conditions are established for the convergence of the family of solutions $\{u_\varepsilon(x)\}$ to the zero solution in Ω with respect to an integral norm. A convergence rate estimate is obtained.

Keywords: quasilinear elliptic equations, p–Laplacian, Dirichlet problem, generalized solutions, convergence of solutions

В липшицевых областях Ω_ε евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, полученных при каждом значении малого параметра ε исключением из ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шара $B(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в некоторой фиксированной точке $y \in \Omega$, рассмотрим следующую задачу Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения:

$$\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^{p-2}\, A(x) \cdot \operatorname{grad} u_\varepsilon(x)\right) - a(x)\,|u_\varepsilon(x)|^{q-1}\, u_\varepsilon(x) = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) \quad \text{на} \quad \partial B(\varepsilon), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) \in W_2^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $\varphi_\varepsilon(x) \in W_2^{1-1/p}\big(\partial B(\varepsilon)\big)$ — некоторые (заданные) ограниченные функции коэффициент $a(x)$ — измеримая функция на Ω, удовлетворяющая неравенству

$$a(x) \geqslant a_0 = \text{const}, \qquad x \in \Omega,$$

Пикулин Сергей Владимирович, к.ф.-м.н., старший научн. сотр., ВЦ ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия); Sergey Pikulin, (CC RAS, Moscow, Russia)

$A(x)$ — симметричная положительно определенная матрица $\|a_{ij}(x)\|, i, j = 1, \ldots, n$, с измеримыми коэффициентами $a_{ij}(x)$ и со спектром, отделенным от нуля, т.е.

$$a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \quad \lambda^{-1} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant \lambda\, |\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Определение. *Функция* $u_\varepsilon(x) \in W_2^p(\Omega_\varepsilon) \cap L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *называется обобщенным решением задачи (1), (2), если граничные условия (2) удовлетворяются в смысле следа, и* $\forall \psi(x) \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *выполнено интегральное тождество*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx + \\ + \int_{\Omega_\varepsilon} a(x)\, |u_\varepsilon(x)|^{q-1}\, u_\varepsilon(x)\, \psi(x)\, dx = 0.$$

Обобщенное решение задачи (1), (2) существует и единственно (см., например, [1, Ch. 4]).

В работе [2] получены достаточные условия сходимости при $\varepsilon \to 0$ решений $u_\varepsilon(x)$ задачи (1), (2) при $n \geqslant 3$ и $p = 2$ к решению $u(x)$ задачи Дирихле в области Ω для уравнения (1) с краевым условием $u(x) = \varphi(x)$ на $\partial\Omega$. А именно, при условии, что показатель q достаточно велик, показана сходимость таких решений к указанному пределу в норме L^∞, а также в подходящей интегральной норме, где норму вычислены по области Ω_ε с исключенной окрестностью полости $B(\varepsilon)$ определенного размера (малого при $\varepsilon \to 0$). При этом факт сходимости решений остается справедливым независимо от того, насколько быстро растут нормы функций $\varphi_\varepsilon(x)$ в краевом условии (2) при $\varepsilon \to 0$. Полученные результаты опираются, в частности, на априорную оценку Кондратьева — Ландиса решения полулинейного уравнения через расстояние до границы области (см. [3]).

В настоящем докладе некоторые из результатов работы [2] распространены на случай $n \geqslant 2, p \in (1, n)$. В частности, справедлив следующий результат.

Теорема. *Рассмотрим задачу (1), (2) при* $n \geqslant 2, p \in (1, n)$, $\varphi(x) \equiv 0$ *на* $\partial\Omega$, *и предположим, что выполнено неравенство*

$$q > \frac{n+p}{n-p}. \tag{3}$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(2\varepsilon)} \left(|\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)|^p + a(x)\, |u_\varepsilon(x)|^{q+1} \right) dx = O\big(\varepsilon^{n-p\,(q+1)/(q-1)}\big). \tag{4}$$

Отметим, что показатель степени в правой части соотношения (4) положителен в силу (3), следовательно его левая часть стремится к нулю.

Литература

1. *Diaz J.I.* Nonlinear partial differential equations and free boundaries. — Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

2. *Пикулин С.В.* Сходимость семейства решений уравнения типа Фуджиты в областях с полостями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **56**:11 (2016), 1902–1930.

3. *Кондратьев В.А., Ландис Е.М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник, **135(177)**:3 (1988), 346–360.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ВИДА ФРОНТА ЗАДАЧИ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Е.В. Полежаева, Н.Т. Левашова, Д.И. Кузнецова

pel789@yandex.ru, natasha@npanalytica.ru, dora13ku@gmail.com

УДК 519.633.2

Рассматривается вопрос о стабилизации решения вида фронта начально-краевой задачи типа реакция-диффузия-адвекция на бесконечно большом временном промежутке к решению соответствующей стационарной задачи. Теорема о стабилизации решения доказывается с использованием понятий верхнего и нижнего решений и следствий из теорем сравнения. Верхнее и нижнее решения каждой из задач строятся как модификации асимптотических приближений решений этих задач.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия-адвекция, решение вида фронта, внутренний переходный слой, верхнее и нижнее решения, асимптотическое приближение

Stabilization of a front form solution of the reaction-diffusion-advection problem

The question of stabilization of a front form solution to the initial-boundary value problem of reaction-diffusion-advection type at infinitely large time interval to the solution of the corresponding stationary problem is considered. The theorem on stabilization of a solution is proved using the concepts of upper and lower solutions and comparison theorems corollaries. The upper and lower solutions are constructed as modifications of the asymptotic approximations of problem solutions.

Keywords: reaction-diffusion-advection problem, front form solution, internal transition layer, upper and lower solutions, asymptotic approximation

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-11-00042).

Полежаева Елена Вячеславовна, к.ф.-м.н., электроник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Elena Polezhaeva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Левашова Наталия Тимуровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nataliya Levashova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кузнецова Дарья Игоревна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Daria Kuznetsova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Исследование решений уравнений реакция-диффузия-адвекция является важной задачей математической физики. В частности, большой интерес представляют решения, обладающие большим градиентом в некоторой области, ширина которой много меньше линейных размеров множества, на котором поставлена задача. Эта область называется внутренним переходным слоем. Если положение переходного слоя изменяется со временем, то его также называют фронтом.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения реакция-диффузия-адвекция:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(u,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(u,x), \quad x \in (0;1), \quad t \in (0;T], \\ &u(0,t,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,t,\varepsilon) = u^1, \quad t \in [0;T], \\ &u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $A(u,x)$ и $B(u,x)$ – достаточно гладкие функции в области $(u,x) \in I_u \times [0;1]$, I_u – некоторый промежуток изменения переменной u, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $T > 0$.

Будем исследовать вопрос о стабилизации при $t \to \infty$ решения вида фронта начально-краевой задачи (1) к решению с внутренним переходным слоем соответствующей стационарной задачи

$$\varepsilon\frac{d^2 u}{dx^2} = A(u,x)\frac{du}{dx} + B(u,x), \quad x \in (0;1), u(0,\varepsilon) = u^0,\ u(1,\varepsilon) = u^1. \tag{2}$$

Потребуем выполнения следующих условий.

Условие А1. *Уравнение*

$$A(u,x)\frac{du}{dx} + B(u,x) = 0$$

с дополнительными условием $u(0) = u^0$ *имеет на отрезке* $[0;1]$ *решение* $u = \varphi^{(-)}(x)$, *а с дополнительным условием* $u(1) = u^1$ *– решение* $u = \varphi^{(+)}(x)$, *причем*

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [0;1],$$

и

$$A\left(\varphi^{(-)}(x), x\right) > 0, \quad A\left(\varphi^{(+)}(x), x\right) < 0, \quad x \in [0;1].$$

Рассмотрим существование решения в виде движущегося фронта, т.е. решения, имеющего внутренний переходный слой, который в каждый момент времени t локализован в окрестности точки $\hat{x}(t,\varepsilon) \in (0;1)$. Слева от указанной окрестности решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, а справа – к функции $\varphi^{(+)}(x)$. Будем предполагать, что в начальный момент времени уже существует сформированный фронт, т.е. функция $u_{init}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки x_{00} отрезка $[0;1]$.

Условие А2. *Пусть существует множество $X \subset (0;1)$ функций $x(t)$, таких, что при $\varphi^{(-)}(x(t)) < \tilde{Q} < \varphi^{(+)}(x(t))$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(x(t))}^{\tilde{Q}} (A(s,x(t)) - V)\,ds > 0, \quad \text{где } V = \frac{dx}{dt}.$$

Условие А3 *Пусть задача Коши*

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} A(u,x_0)du}{\varphi^{(+)}(x_0) - \varphi^{(-)}(x_0)}, \quad x_0(0) = x_{00}$$

имеет решение $x_0(t)$, такое что $x_0(t) \in (0;1), \quad t \in [0;T]$.

В работе [1] построено асимптотическое приближение, $U_n(x,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) как сумма функции $\bar{u}(x,\varepsilon)$, описывающей поведение решения вдали от переходного слоя, и функции переходного слоя, $Q(\xi,t,\varepsilon)$, где $\xi = (x - \hat{x}(t))/\varepsilon$ – растянутая переменная. Также в [1] доказано, что при выполнении условий **А1-А3** при достаточно малых ε существует решение задачи (1) с таким асимптотическим приближением. Доказательство проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого заключается в построении верхнего и нижнего решений задачи (1), а именно, функций $\beta_n(x,t,\bar{x},\bar{V})\varepsilon)$ и $\alpha_n(x,t,\underline{x},\underline{V},\varepsilon)$ соответственно, которые строятся как модификации асимптотического приближения:

$$\beta_n(x,t,\bar{x},\bar{V},\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n-1}\left(\mu(x) + q_0(\bar{\xi}) + \varepsilon q_1(\bar{\xi})\right),$$
$$\alpha_n(x,t,\underline{x},\underline{V},\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) - \varepsilon^{n-1}\left(\mu(x) + q_0(\underline{\xi}) + \varepsilon q_1(\underline{\xi})\right),$$

где $\bar{x} = X_{n-1}(t,\varepsilon) - \varepsilon^{n-1}\delta$, $\underline{x} = X_{n-1}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{n-1}\delta$, $X_{n-1}(t,\varepsilon)$ – асимптотическое приближение положения фронта $\hat{x}(t)$, $\bar{V} = d\bar{x}/dt$, $\bar{\xi} = (x - \bar{x})/\varepsilon$, $\underline{V} = d\underline{x}/dt$, $\underline{\xi} = (x - \underline{x})/\varepsilon$. Константа $\delta > 0$, а также функции $\mu(x)$ и $q_i(\xi)$, $i = 0,1$ определяются таким образом, чтобы функции α_n и β_n удовлетворяли определению нижнего и верхнего решений соответственно.

В работе [2] доказано существование и асимптотическая устойчивость решения задачи (2) как стационарного решения задачи (1) при выполнении условий **А1**, **А2** (при $V = 0$) и следующего условия **А3'**:

Условие А3'. *Пусть уравнение*

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} A(u,x_0)du = 0 \;\; \text{имеет решение } x_0 \in (0;1).$$

Тем же способом, что и в работе [3] легко устанавливается, что область влияния решения стационарной задачи не меньше отрезка $\alpha_1(x,\infty,\underline{x}_s,0,\varepsilon), \beta_1(x,\infty,\bar{x}_s,0,\varepsilon)$, где $\underline{x}_s$ и $\bar{x}_s$ – значения $\underline{x}$ и $\bar{x}$ при $t \to \infty$.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *При любой гладкой начальной функции u_{init} задачи (1), лежащей между верхним решением $\beta_1(x,0,\bar{x},\bar{V},\varepsilon)$ задачи (1) и нижним решением $\alpha_1(x,\infty,\bar{x}_s,0,\varepsilon)$ задачи (2), решение задачи (1) стремится к решению задачи (2) при $t \to \infty$.*

Литература

1. *Антипов Е.А, Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **54**:10 (2014), 1594–1607.

2. *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **35**:4 (1995), 520–531.

3. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференциальные уравнения., **53**:4 (2017), 524–537.

О ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФОРМУЛАХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.П. Половинкин, М.В. Половинкина, А.Л. Мугланов

muglanov_ artem@mail.ru, polovinkin@yandex.ru, polovinkina-marina@yandex.ru

УДК 517.518

С помощью метода спуска Адамара, формулы среднего значения Бицадзе-Нахушева, преобразований Лакса-Филлипса, получены двухточечные формулы среднего значения для эллиптических уравнений на сфере и в пространстве Лобачевского

Ключевые слова: формула среднего, оператор Лапласа-Бельтрами, метод спуска

On two-point mean-value formulas for some elliptic equations in non-Euclidean spaces

Using the Hadamard descent method, the Bitsadze-Nakhushev mean-value formula, the Lax-Phillips transformations, we obtained two-point mean-value formulas for elliptic equations on the sphere and in the Lobachevskiy space

Keywords: mean-value formula, Laplace-Beltrami operator, descent method

---

Половинкин Игорь Петрович, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Igor Polovinkin (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Половинкина Марина Васильевна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий (Воронеж, Россия); Marina Polovinkina (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Мугланов Артем Леонидович, аспирант, Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия); Artem Muglanov (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Следуя известной конструкции А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева, рассмотрим две точки $(\chi^{(j)}, \tau^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, 2$, где $\chi^{(j)} = (\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \ldots, \chi_n^{(j)})$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие условию непустого пересечения световых конусов $|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| < |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|$. Построим матрицу $A(\dim A = n \times n)$ по следующему правилу. Зафиксируем какой-нибудь индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и положим $a_{ij} = (\chi_j^{(1)} - \chi_j^{(2)})/|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|$, $j = 1, \ldots, n$. Оставшиеся позиции матрицы A заполним исходя из условий $AA^T = I$, $\det A = 1$, где A^T — матрица, транспонированная к матрице A, $I = \|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть A_i — матрица, полученнуя из матрицы A заменой i-го столбца нулями. Введем усредняющий оператор S_ϱ и оператор B_ϱ^n по формулам

$$S^n v = S_\varrho^n v = \sqrt{\pi^{1-n}} \int_{|\xi|=\varrho} v\,(\eta,\, \sigma)\; d\omega_\xi,\;\; |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| > 0,$$

$$S^n = S_\varrho^n v = \gamma(n) \int_{|\xi|=\varrho} v\left(\chi^{(2)} + \xi, (\tau^{(1)} + \tau^{(2)})/2\right)\; d\omega_\xi,\;\; \chi^{(1)} = \chi^{(2)},$$

$$B^n v = B_\varrho^n\, v = \varrho\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{(n-1)/2}\,(1/\varrho S_\varrho v)\,,\;\; n = 1(\mathrm{mod}2),$$

$$B^n v = B_\varrho^n\, v = \pi^{-1/2}\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{n/2} \int_0^\varrho S_\varrho v\, d\theta/\sqrt{\varrho^2 - \theta^2},\;\; n = 0(\mathrm{mod}2),$$

где $d\omega_\xi$ — элемент площади поверхности сферы $|\xi| = \varrho$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\eta = \frac{|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|\,\xi_i(\chi^{(1)} - \chi^{(2)})}{|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|\sqrt{(\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|^2}} + \frac{\chi^{(1)} + \chi^{(2)}}{2} + A_i\xi,$$

$$\sigma = \left(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}\right)/2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|\xi_i/\sqrt{(\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|^2}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n, z) = (x, z)\}, n \geqslant 2$, множество $S_n^+ = \{(x, z) \in S_n : z = \sqrt{1 - |x|^2}\}$ — верхнюю половину сферы с метрикой $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\delta_{ik} + x_i x_k/z^2)dx_i dx_k$ и оператором Лапласа-Бельтрами в этой метрике Δ_ω.

Введем в рассмотрение отображение $S_n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (преобразование П. Лакса и Р. Филлипса) с помощью формул $\tau = \tau_\pm(x, z, t) = \pm\sin t/(z \mp \cos t)$, $\chi = \chi_\pm(x, z, t) = \pm x/(z \mp \cos t)$, где $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Введем также замену функции $u(x, z, t) = (z - \cos t)^{-(n-1)/2} v(\chi(x, z, t), \tau(x, z, t))$.

Теорема 1. *Для любых двух точек $(x^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, z^{(2)}) \in S_n$ и любых двух значений $t^{(1)}$, $t^{(2)} \in (0, 2\pi]$, удовлетворяющих условию*

$$(z^{(1)}z^{(2)} + x^{(1)}x^{(2)} - \cos(t^{(1)} - t^{(2)}))/((z^{(1)} - \cos t^{(1)})(z^{(2)} - \cos t^{(2)})) > 0,$$

регулярное решение $u(x)$ уравнения $\Delta_\omega u - ((n-1)/2)^2\, u = 0$ удовлетворяет формуле среднего значения

$$(z^{(1)} \mp \cos t^{(1)})^{(n-1)/2} u(x^{(1)}, z^{(1)}) + (z^{(2)} \mp \cos t^{(2)})^{(n-1)/2} u(x^{(2)}, z^{(2)}) =$$

$$= B_\varrho^n(v(x(\chi, \tau), z(\chi, \tau)),\;\; \varrho = \sqrt{(\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|^2}/2.$$

Рассмотрим реализацию П геометрии Лобачевского на полупространстве $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) : x_n > 0\}, n \geqslant 2$, с метрикой $ds^2 = dx^2/x_n^2$ и оператором Лапласа-Бельтрами Δ_Π.

Теорема 2. *Для любых двух точек* $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in \Pi$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$ *и* $t^{(2)} \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих условию*

$$(x_n^{(2)}\, e^{t^{(1)}} - x_n^{(1)}\, e^{t^{(2)}})\,(x_n^{(1)}\, e^{t^{(1)}} - x_n^{(2)}\, e^{t^{(2)}}) - e^{t^{(1)}+t^{(2)}}|\triangle x'|^2 > 0,$$

регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\Pi u + ((n-1)/2)^2\, u = 0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*

$$e^{t^{(1)}(1-n)/2} u(x^{(1)}) + e^{t^{(2)}(1-n)/2} u(x^{(2)}) = B_\varrho^n(fu(x(\chi,\tau))),$$

$x' = \chi'/(\tau + \chi_n), x_n = \sqrt{\tau^2 - |\chi|^2}/(\tau - \chi_n), t = \ln\sqrt{\tau^2 - |\chi|^2}, f = (\tau^2 - |\chi|^2)^{(1-n)/4}$.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В (B) – ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Прилепко

prilepko.ai@yandex.ru

УДК 517.977.1, 517.977.5

Применяется BUME метод и метод монотонных отображений к изучению задач наблюдения и управления. В (B) – пространстве исследуется уравнение первого рода, как задача наблюдения, при этом сопряжённое уравнение называется задачей управления. Для случая рефлексивных (B) – пространств доказан критерий управляемости и абстрактный принцип максимума.

Ключевые слова: задача управления, задача наблюдения, оптимальное управление, принцип максимума

Optimal control and maximum principle in (B) – spaces

The BUME method and the monotone mapping method are applied to the study of observation and control tasks. In (B) – space, an equation of the first kind is investigated as a problem of observation, and the adjoint equation is called a control problem. For the case of reflexive (B) – spaces, the criterion of controllability and the abstract maximum principle are proved.

Keywords: control problem, observation problem, optimal control, maximum principle

Прилепко Алексей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksey Prilepko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Введём задачи наблюдения и управления в (B)−пространствах, считая пространства рефлексивными и вещественными. Пусть дано число $T \in (0, +\infty)$; $J = (0, T)$. Введём (B)−пространства E, E_1 и их сопряжённые E', E_1', предполагая их независящими от времени t. Кроме того, введём (B)−пространство элементов, зависящих от времени и принимающих значения в E_1, обозначив его $U_T \equiv B(J, E_1)$, а также сопряжённое к нему пространство $U_T' = (B(J, E_1))'$. В силу рефлексивности пространств имеем $(U_T')' = U_T$, а (B)−пространство U_T' будем называть пространством управлений.

Для линейного оператора A_T и его сопряжённого (по Банаху) A_T' рассмотрим соответствующие уравнения первого рода как задачи наблюдения и управления.

Задача наблюдения. Получить обратное неравенство (т.е. ограниченность снизу) для уравнения

$$A_T\, e = u, \qquad \text{где} \quad e \in E, \quad u(t) \in U_T = B(J, E_1), \quad A_T \in \mathcal{L}(E, U_T) \tag{1}$$

Задача управления. Для данного элемента $e' \in E' \setminus \{0\}$ найти функцию $u' \in U_T'$ из уравнения

$$A_T'\, u' = e', \qquad \text{где} \quad A_T' \in \mathcal{L}(U_T', E') \tag{2}$$

Решение задачи (2) $u_* \in U_T'$ при фиксированном $e' \neq 0$ называем точным управлением (или управлением), а через $\mathcal{U}_*$ обозначим множество всех управлений $\mathcal{U}_* \subset U_T'$. Управление с минимальной нормой (т.е. нормальное по Тихонову решение (2)) называем оптимальным управлением задачи (2) и обозначаем u_*^o, таким образом, $\|u_*^o\|_{U_T'} = \inf\{\|u_*\|_{U_T'} \mid \forall u_* \in \mathcal{U}_*\}$.

Теорема 1. [Критерий управляемости и оптимальной управляемости] *Пусть дано рефлексивное (B)−пространство $U_T \equiv B(J, E_1)$ и его сопряжённое U_T'. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *существует постоянная $\mu_T > 0$ такая, что для всех $e \in E$ выполняется неравенство $\|A_T\, e\|_{U_T} \geqslant \mu_T \|e\|_E$;*
2. *$R(A_T) = \overline{R(A_T)}$, $N(A_T) = 0$;*
3. *$\|(A_T)_\ell^{-1}\| \leqslant 1/\mu_T$, т.е. задача (1) непрерывно наблюдаема;*
4. *решение задачи наблюдения (1) единственно и устойчиво;*
5. *существует решение задачи управления $u_* \neq 0$ при $e' \in E' \setminus \{0\}$;*
6. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ множество всех управлений $\mathcal{U}_* \neq \emptyset$, где $\mathcal{U}_* = (A_T')_r^{-1} e'$ — есть замкнутое выпуклое множество в U_T';*
7. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ существует оптимальное управление $u_*^o \neq 0$ причём множество всех оптимальных управлений $\mathcal{U}_*^o \neq \emptyset$ есть замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{U}_* \subseteq U_T'$, если пространства U_T, U_T' выпуклые;*
8. *при любом $e' \in E' \setminus \{0\}$ существует единственное оптимальное управление $u_*^o \neq 0$, т.е. минимальное по норме управление, если пространства U_T, U_T' строго выпуклые.*

Для исследования свойств оптимальных управлений, кроме BUME метода [1, 2] мы привлекаем метод нелинейных монотонных отображений и оператор Рисса.

Литература

1. *Прилепко А. И.* Метод Банаха и метод монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных (B) – пространствах // Доклады АН, **476**:4 (2017), 377-380.

2. *Prilepko A. I.* Controllability and Optimal Controllability for Operator Equations of the First Kind in (B)-Spaces: Examples for ODE in $\mathbb{R}^n$ // Doklady Mathematics, **99**:2 (2019), 1-4.

3. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed parameter systems // SIAM Review, **30** (1988), 1-64.

4. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В.* Приближённые решения двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Макс Прес, 2010.

5. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга. 1999.

6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л.С. Пулькина

louise@samdiff.ru

УДК 517.95

В докладе рассматривается задача для гиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями. Выбор метода исследования разрешимости нелокальной задачи зависит от вида интегрального условия. В процессе разработки методов, эффективных именно для нелокальных задач, были выделены интегральные условия различных типов, отличающиеся видом внеинтегральных слагаемых или даже их отсутствием. Дальнейшие исследования показали, что условия разрешимости нелокальных задач аналогичны условиям регулярности краевых условий для дифференциального оператора.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, нелокальные задачи, регулярные краевые условия

Людмила Степановна Пулькина, д.ф.-м.н., профессор, (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия); Ludmila Pulkina (Samara Samara National Research University, Samara, Russia)

On certain conditions for solvability of nonlocal problems for hyperbolic equations

In this talk, we consider a problem with nonlocal integral conditions for a hyperbolic equation. A method we choose to prove the solvability of certain nonlocal problem depends on a kind of integral conditions. The kind of an integral condition is defined by a form of the terms outside the integral. Following analysis shows that conditions for solvability of the nonlocal problem are analogous to regularity of boundary conditions for differential operator.

Keywords: hyperbolic equations, nonlocal problems, regular boundary conditions

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ задачу для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

с начальными данными $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$ и нелокальными условиями

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = 0,\ i = 1,2. \tag{2}$$

Условия (2) называются интегральными условиями первого рода. Исследование разрешимости задач с условиями такого вида сталкивается с многими трудностями и демонстрирует неприменимость классических методов обоснования разрешимости краевых задач [1]. Однако если интегральные условия имеют вид

$$u_x(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0,\ u_x(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0 \tag{3}$$

или

$$u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0,\ u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0, \tag{4}$$

то есть являются условиями второго рода, то можно модифицировать известные методы доказательства разрешимости так, что удается получить априорные оценки, на которых базируется доказательство, применяя многие классические приемы. Возник вопрос, нельзя ли свести условия (2) к условиям (3) или (4). Оказалось, что при определенных ограничениях на функции $K_i(x)$ это сделать можно [2]. Неизбежно возникло желание ослабить условия на $K_i(x)$ и рассмотреть более общие случаи сведения условий первого рода к условиям второго рода, т.е. к таким, которые содержат кроме интегрального оператора след решения или его производных.

Предположив, что $u(x,t)-$ решение нелокальной задачи с условиями (2), проинтегрируем (1), умноженное предварительно на $K_i(x)$ по x от 0 до l. Получим соотношения $a_1u_x(0,t) + b_1u_x(l,t) + a_0u(0,t) + b_0u(l,t) + \int_0^l P_1udx = g_1(t)$ и $c_1u_x(0,t) + d_1u_x(l,t) + c_0u(0,t) + d_0u(l,t) + \int_0^l P_2udx = g_2(t)$, в которых коэффициенты, ядра $P_i(x,t)$ и правые части $g_i(t)$ выражаются через коэффициенты уравнения (1) и $K_i(x)$. Эти соотношения

при $P_i = 0, g_i = 0$ совпадают с краевыми условиями ([3], с. 53), которые при выполнении некоторых условий являются регулярными. Оказалось, что условия регулярности краевых условий, записанные в терминах поставленной задачи, являются условиями разрешимости нелокальных задач с соответствующими интегральными условиями. Например, условие регулярности $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ для нашей задачи принимает вид $K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$ и позволяет свести условия (2) к условиям второго рода $u_x(0,t) + \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t)$, $u_x(,t) + \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t)$. Однозначная разрешимость задачи с такими условиями доказана в [2]. Там же получены условия, при выполнении которых следует и разрешимость задачи с интегральными условиями первого рода (2).

Литература

1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения, **13**:2 (1977), 294-301.

2. *Пулькина Л.С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Математика, № 4 (2012), 74-83.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: 1954.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

Н.А. Раутиан

nrautian@mail.ru

УДК 517.968.72

Установлена корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и теории распространения тепла в средах с памятью.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оператор-функции, спектральный анализ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект № НШ-6222.2018.1).

Раутиан Надежда Александровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nadezhda Rautian (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels

We establish the correct solvability of the abstract integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space are studied. The spectral analysis of operator-functions that are the symbols of the considered equations are developed. These equations are the abstract form of the linear partial integro-differential equations arising in viscoelasticity theory and the theory of heat transfer in media with memory.

Keywords: integro-differential equations, operator-functions, spectral theory

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau}d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ - положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1], [2]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Well-posedness and spectral analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels // Doklady Mathematics, **98**:2 (2018), 502-505.

2. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. **75** (2014), 185-204.

ОЦЕНКА ПРОМЫСЛОВОГО ДОХОДА В СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

Л.И. Родина
LRodina67@mail.ru

УДК 517.935

Рассматриваются модели эксплуатируемой популяции, заданные уравнениями со случайными параметрами. Предполагаем, что ценность позднее получаемой выгоды от извлечения ресурса снижается, поэтому рассматриваем промысловый доход за бесконечное число сборов с учетом дисконтирования. Получены оценки среднего дохода от промысла, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: стохастические модели сбора, возобновляемый ресурс

Estimation of the trade income in stochastic models of harvesting of a renewable resource

We consider the models of exploited population given by the equations with random parameters. We assume that value after received profit from resource extraction decreases, therefore we consider the trade income for infinite number of gathering taking into account discounting. We received the estimations of the average trade income, true with probability one.

Keywords: stochastic models of harvesting, renewable resource

Задачи моделирования и оптимизации эксплуатации возобновляемого ресурса начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов прошлого века. Так, в одной из первых работ [1] показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать только до достижения определенного уровня, не зависящего от текущего размера популяции. В [2], [3] описан способ добычи ресурса, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и с вероятностью единица существует положительный предел средней временной выгоды. Множество работ посвящено вопросам оптимальной эксплуатации популяций, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции (см. обзор литературы в [4]).

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции задано уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени τ_k происходит сбор ресурса, при этом из популяции извлекается некоторая случайная доля v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Считаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами изъятий τ_k являются случайными величинами и количество извлеченного ресурса зависит от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора таким образом, чтобы остановить заготовку, если ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), тогда часть ресурса сохранится

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., профессор, ВлГУ имени А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия); Lyudmila Rodina (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k) = v_k$, если $v_k < u_k$ и $\ell_k = u_k$, если $v_k \geqslant u_k$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k,$$
$$x(\tau_k) = (1 - \ell_k) \cdot x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau_0 = 0$, $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1$; $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$. Предполагаем, что решения данного уравнения непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \geqslant 0$.

Обозначим $\bar{\theta}_k \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\bar{\ell}_k \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k)$,

$$x(\tau_k - 0) = X_k = X_k(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_{k-1}, x_0), \quad x(\tau_k) = x_k = x_k(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_k, x_0),$$

тогда $x_k = (1 - \ell_k)X_k$, где $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\bar{\theta} \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_\alpha(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha\tau_k} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\bar{\theta}_k, \bar{\ell}_{k-1}, x_0)\ell_k e^{-\alpha\tau_k},$$

равную доходу от извлечения ресурса на бесконечном промежутке времени. Показатель дисконтирования $\alpha > 0$ указывает здесь на то, что ценность позднее получаемого дохода снижается.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in \Omega_1$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_1 \in I_1, \ldots, \theta_k \in I_k\}, \quad \text{где } I_i \doteq (t_i, s_i], \ i = 1, \ldots, k,$$

а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_1(I_i) = F_1(s_i) - F_1(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ с помощью функции распределения F_1. На алгебре цилиндрических множеств построим меру $\widetilde{\mu}_1(E_k) = \widetilde{\mu}_1(I_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}_1(I_k)$, тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$. Таким же образом определяем вероятностное пространство $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, где $\Sigma_2 \doteq \{v : v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots)\}$, $v_k \in \Omega_2$ и мера $\widetilde{\mu}_2$ задана с помощью функции распределения F_2. Отметим, что $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)\}$, где $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$. Пусть $\theta \in \Omega_1$, тогда функция $\varphi(\theta, x)$ является случайной величиной, заданной на множестве Ω_1. Положим $u(x, \varphi(\theta, x)) = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta, x)}$. Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, x) = \ell\big(v, u(x, \varphi(\theta, x))\big) = \begin{cases} v, & \text{если } \ v < u(x, \varphi(\theta, x)), \\ u(x, \varphi(\theta, x)), & \text{если } \ v \geqslant u(x, \varphi(\theta, x)), \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Условие 1. *Уравнение* $\dot{x} = g(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$ *и интервал* (K_1, K_2) *является областью асимптотической устойчивости этого решения* $(0 \leqslant K_1 < K < K_2)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие 1. Тогда для любых* $x \in (K_1, K)$, $x_0 \in [x, K]$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для всех* $\sigma \in \Sigma$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x)e^{-\alpha\tau_k} \leqslant H_\alpha\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \leqslant K \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\omega_k, x)e^{-\alpha\tau_k}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\theta}^p \doteq (\theta_1^p, \ldots, \theta_k^p, \ldots), \;\; \bar{\ell}^p \doteq (\ell_1^p, \ldots, \ell_k^p, \ldots), \;\; \tau_k^p = \theta_1^p + \ldots + \theta_k^p, \;\; p = 1, 2, \ldots.$$

Тогда $H_\alpha\big(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0\big) \doteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k\big(\bar{\theta}_k^p, \bar{\ell}_{k-1}^p, x_0\big)\ell_k^p e^{-\alpha\tau_k^p}$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Тогда для любых* $x \in (K_1, K)$, $x_0 \in (x, K)$ *найдется управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{M\big(\varphi(\theta, x)\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta}\big)}{1 - Me^{-\alpha\theta}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} H_\alpha\big(\bar{\theta}^p, \bar{\ell}^p, x_0\big) \leqslant \frac{K \cdot M\big(\ell(\omega, x)e^{-\alpha\theta}\big)}{1 - Me^{-\alpha\theta}}.$$

Рассматривается также задача выбора управления $\bar{u}^* \in U$, при котором оценка снизу для среднего дохода от извлечения ресурса является максимальной.

Литература

1. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management, **6** (1979), 350-363.

2. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, **28**:1 (2018), 48-58.

3. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, **28**:2 (2018), 213-221.

4. *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy, **21** (2017), 167-178.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Б. Сабитов
sabitov_fmf@mail.ru

УДК 517.95

В работе для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде изучена начально-граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. Установлена оценка об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, начально-граничная задача, критерий единственности, существование, ряд, малые знаменатели, устойчивость

Initial-boundary problem for a three-dimensional equation of a mixed parabolic-hyperbolic type

Short abstract. In the work for the mixed parabolic-hyperbolic type equation in a rectangular parallelepiped, the initial boundary problem was studied. The uniqueness criterion is established. The solution is constructed as the sum of the orthogonal series. In justifying the convergence of the series, the problem of small denominators arose. An estimate on separation from zero with the corresponding asymptotics is established, which allowed us to prove the convergence of a series in the class of regular solutions and the stability of the solution with respect to boundary functions.

Keywords: equation of mixed type, initial boundary problem, uniqueness criterion, existence, series, small denominators, stability

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области

$$Q = \{(x, y, t) |\, (x, y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\},$$

где

$$D = \{(x, y) |\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020516).

Сабитов Камиль Басирович, д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал БашГУ; Стерлитамакский филиал ИСИ РБ (Стерлитамак, Россия); Kamil Sabitov (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia)

α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, и b – заданное любое действительное число.

Начально-граничная задача. *Найти функцию* $u(x,y,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q_+ \cup Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = u(x,y,t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0} = u(x,y,t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $\psi(x,y)$ *– заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющие условиям согласования с граничными данными* (4) *и* (5).

Отметим, что задача Трикоми и ее аналоги для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами [1–3] (см. библиографию указанных работ) в двумерных областях, в которых гиперболическая часть представляет собой "треугольник", ограниченный характеристиками уравнения и линией изменения типа $t = 0$. В работах [4–7] изучены аналоги начально-граничных задач для уравнений параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях.

В данной работе установлен критерий единственности решения, а само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям двумерной спектральной задачи оператора Лапласа. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от двух переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах. В связи с чем установлена оценка об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которой доказана сходимость ряда у классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функции $\psi(x,y)$, а также получены оценки об устойчивости решения по отношению граничному условию.

Здесь приведем ряд результатов.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (6), *то оно единственно только тогда, когда при всех* m *и* n *выполнены условия*

$$\delta_{mn}(\alpha) = \cos\lambda_{mn}\alpha + \lambda_{mn}\sin\lambda_{mn}\alpha \neq 0, \tag{7}$$

где

$$\lambda_{mn}^2 = b + \pi^2\left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Отметим, что в дальнейшем в (8) будем считать, что $b = \mu^2 \geqslant 0$ ($\mu \geqslant 0$), так как если $b < 0$, то начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$ правая часть (8) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на полученные результаты.

При соблюдении условий (7) решение задачи (2) – (6) формально определяется рядом Фурье

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{9}$$

где коэффициенты находятся по формуле

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda_{mn}^2 t}, & t \geqslant 0, \\ \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} \Big(\cos \lambda_{mn} t - \lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t \Big), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\psi_{mn} = \iint\limits_D \psi(x,y) v_{mn}(x,y)\, dxdy, \quad v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Заметим, что выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов ряда (9) и легко показать, что уравнение $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счетное множество нулей относительно α. В связи с этим возникает проблема малых знаменателей от двух переменных n и m более сложной структуры, чем в плоском случае [4–7].

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant m$ и отношение q/p рационально. Если $\widetilde{\alpha} = \alpha/q$ – произвольное положительное рациональное число, т.е. $\widetilde{\alpha} = r/s$, r, $s \in \mathbb{N}$, $(r,s) = 1$, и выполнено неравенство*

$$\mu(2\,r\,p\,q)^2 + (2p)^2 \pi\, q\, r\, s < 3\pi^2,$$

то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$), такие, что при всех $n > n_0$ и любом фиксированным m справедлива оценка

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| \geqslant C_0.$$

Теорема 2. *Пусть постоянные $\widetilde{\alpha}$, μ, $p = q$ удовлетворяют условиям леммы 1, а функция $\psi(x,y) \in C^6(\overline{D})$ и $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi''_{xx}(p,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant q$, $\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $\psi_{xxyy}(x,0) = \psi_{xxyy}(x,q) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant p$. Тогда, если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) \neq 0$ при $n = \overline{1,n_0}$, то существует единственное решение задачи (2) – (6) и оно определяется рядом (9).*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (9) задачи (2) – (6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} \leqslant C_1 \|\psi(x,y)\|_{W_2^1(D)},$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C_2 \|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от функции $\psi(x,y)$.

Литература

1. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамаджанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. — Ташкент: Изд. ФАН, 1986.

2. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью I. II. // Дифференц. уравнения, **23**:1 (1987), 72-78; **24**:8 (1988), 1379-1386.

3. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения, **25**:1 (1989), 117-126.

4. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. — М.: Наука, 2016.

5. *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения, **44**:9 (2008), 1175-1181.

6. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, **50**:3 (2014),356-365.

7. *Сидоров С.Н.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика, 12 (2015), 55-64.

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ D_E-СИСТЕМЫ

Ж. Сартабанов, А.А. Кульжумиева

sartabanov42@mail.ru, aiman-80@mail.ru

УДК 517.925

Рассмотрена линейная система с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали пространства временных переменных. Установлены условия существования многопериодического решения линейной системы.

Ключевые слова: линейная система, дифференциальный оператор, матрица монодромии, мультипликатор, многопериодическое решение

Multiperiodic solution of a semi-linear D_e-system

We considered a linear system with differentiation operator in the direction of the main diagonal of the space of time variables. The conditions for existence of a multiperiodic solution of the linear system are established.

Keywords: linear system, differentiation operator, monodromy matrix, multiplier, multiperiodic solution

Сартабанов Жайшылык, д.ф.-м.н., профессор, АРГУ им. К. Жубанова (Актобе, Казахстан); Zhaishylyk Sartabanov (K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan)

Кульжумиева Айман Амангельдиевна, к.ф.-м.н., ЗКГУ им. М. Утемисова (Уральск, Казахстан); Aiman Kulzhumiyeva (M. Utemisov West-Kazakhstan State University, Uralsk, Kazakhstan)

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$D_e x = P(\tau, t)x + f(\tau, t) \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, где $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ и $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$ – временные переменные, $\langle , \rangle$ – скалярное произведение m-векторов $e = (1, ..., 1)$ и $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ – искомая функция.

Допустим, что матрица $P(\tau, t)$ и заданная вектор-функция $f(\tau, t)$ обладают следующими свойствами:

$$P(\tau + \theta, t + k\omega) = P(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m), \quad k \in Z^m, \tag{2}$$

$$f(\tau + \theta, t + k\omega) = f(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m), \quad k \in Z^m, \tag{3}$$

где $\theta = \omega_0$, $\omega_1, ..., \omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, $k = (k_1, ..., k_m) \in Z^m$, Z – множество целых чисел.

Поставим задачу о выяснении условий существования многопериодического решения системы (1).

Для решения поставленной задачи сначала исследуем условия существования многопериодического решения соответствующей однородной системы

$$D_e x = P(\tau, t)x. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что матрицант $X(\tau, t, \sigma)$ системы (4) обладает свойствами:

$$X(\tau + \theta, t, \sigma) = X(\tau, t, \sigma)X(\theta, \sigma, \sigma),$$

$$X(\tau, t + k\omega, \sigma + k\omega) = X(\tau, t, \sigma), \quad k \in Z^m,$$

где $\sigma = t - e\tau$.

Матрицу $X(\theta, \sigma, \sigma)$ назовем матрицей монодромии. Предположим, что матрица монодромии $X(\theta, \sigma, \sigma)$ имеет вещественный логарифм. Значит можно выбрать замкнутый контур γ, который будет окружать спектр матрицы монодромии, но не будет охватывать нуль, а затем определить на нем однозначную ветвь $\ln \lambda$ и построить логарифм матрицы монодромии соотношением

$$\ln X(\theta, \sigma, \sigma) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \ln \lambda \left[X(\theta, \sigma, \sigma) - \lambda E \right]^{-1} d\lambda, \tag{5}$$

где $\lambda_j = \rho_j(\sigma)$ – собственные значения, имеющие кратности n_j, $j = \overline{1, l}$.

Собственные значения $\rho_j(\sigma)$, матрицанта $X(\theta, \sigma, \sigma)$, определяемые вековым уравнением

$$\det \left[\rho E - X(\theta, \sigma, \sigma) \right] = 0$$

назовем мультипликаторами системы (4), E – единичная матрица.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы система (4) при условиях (2) и (5) имела нетривиальное многопериодическое решение необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из мультипликаторов её был равен единице.*

Для исследования многопериодического решения системы (1) предположим выполненным условие

$$\det\left[X(\tau+\theta,t,\sigma)-X(\tau,t,\sigma)\right]\neq 0,\quad (\tau,t,\sigma)\in R\times R^m\times R^m \tag{6}$$

об отсутствии θ-периодического по τ решения системы (4), отличного от нулевого.

В частности, условие (6) имеет место если все мультипликаторы $\rho(\sigma)$ содержатся внутри единичного круга комплексной плоскости.

Пусть матрица $G(\tau,t,s,\sigma+es)$ имеет вид

$$G(\tau,t,s,\sigma+es)=\left[X^{-1}(\tau+\theta,t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)\right]^{-1}X^{-1}(s,\sigma+es,\sigma). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2), (3), (5). Тогда при условии (6), в частности, когда все мультипликаторы системы (4) находятся внутри единичного круга $|\rho(\sigma)|<1$, то система (1) имеет единственное многопериодическое решение $x^*(\tau,t)$, которое с помощью матрицы (7) можно представить в виде*

$$x^*(\tau,t)=\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta}G(\tau,t,s,\sigma+es)f(s,\sigma+es)\,ds.$$

Далее, методом сжатых отображений теорема 2 обобщается на случай полулинейной системы, когда вектор-функция f наряду с (τ,t) зависит от искомой функции x.

Доклад посвящен дальнейшему развитию результатов работ [1-2].

Литература

1. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal, **8**:1 (2017), 67-75.

2. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* General bounded multiperiodic solutions of linear equation with differential operator in the direction of the main diagonal // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, **92**:4 (2018), 44-53.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО ЛЯПУНОВУ И ПО ПЕРРОНУ

И.Н. Сергеев
igniserg@gmail.com

УДК 517.926.4

Новое понятие устойчивости по Перрону сравнивается с классическим понятием устойчивости по Ляпунову. Получен полный список логических связей между ними и указаны их особенности для некоторых типов систем. Обнаружено совпадение возможностей для исследования различных видов устойчивости по первому приближению.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, показатели Перрона, первое приближение

Lyapunov and Perron stability of solutions to differential systems

The new concept of Perron stability is compared with the classical concept of stability according to Lyapunov. A complete list of logical connections between them is obtained and their features for some types of systems are indicated. The coincidence of the possibilities in studying various types of stability by the first approximation is found.

Keywords: Lyapunov stability, Perron exponents, first approximation

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим допускающую *нулевое решение* систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G), \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty). \tag{1}$$

Через $\mathcal{S}_\delta(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений x системы (1) с *начальными условиями* $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что для системы (1) имеет место следующее *перроновское свойство устойчивости*:

1) *устойчивость по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

(если решение определено не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, то требование (2), как и требование (3) ниже, считаем *невыполненным* по определению);

2) *асимптотическая устойчивость по Перрону*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| = 0; \tag{3}$$

3) *неустойчивость по Перрону*, если нет устойчивости по Перрону;

Сергеев Игорь Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Sergeev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

4) *полная неустойчивость по Перрону*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Определение 2 [3]. Для каждого из четырёх перроновских свойств устойчивости из определения 1 установим его *ляпуновский* аналог: *устойчивость*, *асимптотическую устойчивость*, *неустойчивость* и *полную неустойчивость по Ляпунову*, — все они получаются заменой нижнего предела в требованиях (2) и (3) точной верхней гранью и соответственно точным пределом с добавлением условия устойчивости по Ляпунову.

Определение 3 [3–5]. *Показателями Перрона* (1930) и *Ляпунова* (1892) функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ называются соответственно величины

$$\pi(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|, \quad \lambda(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|.$$

Перроновские свойства устойчивости связаны с показателями Перрона *аналогично* тому, как ляпуновские — с показателями Ляпунова.

Теорема 1 [2]. *Если для некоторого $\delta > 0$ показатели Перрона (Ляпунова) всех решений $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ системы (1) отрицательны, то она асимптотически устойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову, правда, при дополнительном условии её устойчивости по Ляпунову), а если положительны — то она вполне неустойчива по Перрону (по Ляпунову).*

Между перроновскими и ляпуновскими свойствами устойчивости из определений 1 и 2 действуют естественные *логические связи*.

Теорема 2 [1, 2]. *Любая система (1):*

1) либо устойчива по Перрону (по Ляпунову), либо неустойчива;

2) если асимптотически устойчива по Перрону (по Ляпунову), то и устойчива, а если вполне неустойчива, то и неустойчива;

3) если устойчива (асимптотически) по Ляпунову, то и по Перрону, а если неустойчива (вполне) по Перрону, то и по Ляпунову.

Теорема 3 [2]. *Любое сочетание свойств устойчивости по Перрону и по Ляпунову, не противоречащее теореме 2, реализуется на некоторой линейной системе*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\| < \infty. \tag{4}$$

Наиболее *содержательными* представляются следующие два сочетания:

1) устойчивость по Ляпунову вместе с асимптотической — по Перрону;

2) полная неустойчивость по Перрону (а тогда и по Ляпунову).

В случае *автономной* системы логические связи между различными свойствами устойчивости оказываются несколько более жесткими [2, 6].

Теорема 4. *Одномерная автономная система устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Перрону, если и только если она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 5. *Автономная система вполне неустойчива по Перрону, если и только если она вполне неустойчива по Ляпунову.*

Теорема 6 [7]. *Существует двумерная автономная система, асимптотически устойчивая по Перрону, но неустойчивая по Ляпунову.*

В случае *линейной* системы вида (4) (с не обязательно ограниченной функцией A) свойства устойчивости также имеют свои особенности [8].

Теорема 7 [1]. *Линейная автономная система (4) устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Перрону, если и только если она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

Теорема 8 [2].*Существует правильная (см. [3]) система (4), асимптотически устойчивая по Перрону, но вполне неустойчивая по Ляпунову.*

Одним из основных *методов Ляпунова* является исследование устойчивости системы по её первому приближению.

Определение 4 [3, 4]. Пусть в системе (1) выделена *линейная* часть

$$f(t,x) \equiv A(t)x + h(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \tag{5}$$

при дополнительном условии *равномерной малости* нелинейной добавки

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |h(t,x)| = o(x), \quad x \to 0. \tag{6}$$

Тогда соответствующую линейную систему назовём её *первым приближением*, а если всякая система (5) с фиксированным первым приближением обладает данным перроновским или ляпуновским свойством устойчивости, то скажем, что это первое приближение *обеспечивает* данное свойство.

Без требования равномерной малости добавки последнее определение оказывается *бессодержательным*.

Теорема 9 [9, 10]. *Если в определении 4 снять условие (6), то никакое первое приближение не сможет обеспечить ни одного из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости вообще.*

Все свойства устойчивости, в отличие от свойств неустойчивости, обеспечиваются в точности *одними и теми же* первыми приближениями.

Теорема 10 [2, 9, 10]. *Если данное первое приближение обеспечивает хотя бы одно из четырёх свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость по Перрону или устойчивость или асимптотическую устойчивость по Ляпунову, — то оно обеспечивает и остальные три.*

Теорема 11 [9, 10]. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону система (4), обеспечивающая полную неустойчивость по Ляпунову.*

Теорема 12 [9, 10]. *Существует не вполне неустойчивая ни по Перрону, ни по Ляпунову система (4), обеспечивающая неустойчивость и по Перрону, и по Ляпунову.*

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения, **54**:6 (2018), 855-856.

2. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения, **55**:5 (2019), 636-646.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

4. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. — Мн.: БГУ, 2006.

5. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.

6. *Сергеев И.Н.* Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения, **54**:11 (2018), 1561-1562.

7. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

8. *Сергеев И.Н.* Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения, **54**:11 (2018), 1571-1572.

9. *Сергеев И.Н.* Об исследовании по первому приближению перроновских и ляпуновских свойств устойчивости // Дифференц. уравнения, **55**:6 (2019).

10. *Сергеев И.Н.* Устойчивость по Перрону и её исследование по первому приближению // Доклады Акад. наук, **486**:1 (2019).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.Н. Сидоров

stsid@mail.ru

УДК 517.95

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа изучены начально-граничная и обратная задачи по определению сомножителей правых частей, зависящих от времени. На основе формулы решения прямой задачи решение обратной задачи эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений, доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной обратной задачи и указана явная формула решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, обратная задача, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, интегральные уравнения.

Сидоров Станислав Николаевич, к.ф.-м.н., снс, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ; Стерлитамакский филиал БашГУ(Стерлитамак, Россия); Stanislav Sidorov (Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Boundary value problems for a degenerate equation of a mixed parabolic-hyperbolic type

Short abstract. For the equation of a mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneration on the type change line, the initial-boundary and inverse problems of determining the factors of the right-hand parts depending on time are studied. Based on the formula for solving a direct problem, the solution of the inverse problem is equivalently reduced to the solvability of loaded integral equations. Using the theory of integral equations, the theorems of uniqueness and the existence of a solution to the inverse problem are proved and an explicit formula for the solution is given.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, existence, series, small denominators, integral equations.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt}, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) |\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\},$$

где n, m, l, α, β – заданные положительные действительные числа, $f_i(x)$, $i = 1, 2$, – известные функции и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \quad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $F(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (4) *и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta], \quad g_2(t) \in C[-\alpha, 0];$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

здесь $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $h(t)$ – известные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$.

Отметим, что начально-граничная задача 1 для однородного уравнения (1), т.е. когда $F(x,t) \equiv 0$ изучена в работах [1 – 3], а когда $F(x,t) \neq 0$ – в работах [4, 5]. В работах [6, 7] были изучены обратные задачи для уравнения (1) по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. А в статьях [8,

9] рассмотрена обратная задача 2 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$.

В данной работе изучена обратная задача 2 по отысканию сомножителей правой части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа, исследование которой проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1. Решение этой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда, при обосновании сходимости которого возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем, установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволяют обосновать сходимость ряда в классе регулярных решений уравнения (1). На основе формулы решения этой задачи решение обратной задачи 2 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Литература

1. *Сидоров С.Н.* Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, **14**:3 (2012), 30-40.

2. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, **50**:3 (2014),356-365.

3. *Сидоров С.Н.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика, 12 (2015), 55-64.

4. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. — М.: Наука, 2016.

5. *Sabitov K.B., Sidorov S.N.* Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type // J. Math. Sci. (N.Y.), **236**:6 (2019), 603-640.

6. *Сидоров С.Н.* Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 19 (190) (2014), С. 91-104.

7. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1 (2015), 46-59.

8. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв., 16 (2019), 144-157.

9. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский математический журнал, **11**:1 (2019), 72-86.

О ТЕОРЕМЕ БОЛЯ – ПЕРРОНА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛОВ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

П.М. Симонов

simpm@mail.ru, simonov@econ.psu.ru

УДК 517.977

В тезисах продолжается изучение гибридной линейной системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛСФДУП). Гибридность здесь понимается так: первая система уравнений по части переменных является система линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛФДУП), по другой части переменных — система линейных разностных уравнение с последействием (ЛРУП), вторая система уравнений по части переменных является система ЛРУП, по другой части переменных — система ЛФДУП. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В.Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно — это система ЛФДУП, второе — это система ЛРУП. Изучены банаховы пространства правых частей и решений. Это пространства функций исчезающих на бесконечности, и другое — пространства функций, имеющий предел на бесконечности. Известны теоремы Боля — Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений для ЛФДУП из работ Н. В. Азбелева, Л. М. Березанского, П. М. Симонова и А. В. Чистякова [1], [2]. Эти результаты были получены в статье для ЛРУП и для ГЛСФДУП. В тезисах такие результаты получены были переносом с систем ЛФДУП. В случае системы ГЛСФДУП удалось свезти к одному уравнению в пространстве функций на полуоси (к ЛФДУП) или свезти к одному уравнению в пространстве функций на счётном множестве (к ЛРУП).

Ключевые слова: теорема Боля – Перрона, гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием, метод модельных уравнений, разрешимость в парах пространств, существование пределов решений.

On a Bohl – Perron theorem on the existence of solution limits for hybrid linear functional differential systems with aftereffect

The theses continue the study of a hybrid linear system of functional differential equations with aftereffect (HLSFDEA). Hybridism here is understood as follows: the first system of equations with respect to a part of the variables is a system of linear functional differential equations with aftereffect (LFDEA), the other part of the variables is a system of linear difference equations with aftereffect (LDEA), the second system of equations with respect to some variables is the LDEA system, for the other part of the variables is the LFDEA system. There is a system of two equations with two unknowns. The W-method of N. V. Azbelev is applied to two

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

Симонов Пётр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Pyotr Simonov (Perm State National Research University, Perm, Russia)

equations. Two model equations are studied: one is the LFDEA system, the other is the LDEA system. Banach spaces of right-hand sides and solutions are studied. These are spaces of functions vanishing at infinity, and the other is a space of functions having a limit at infinity. Known Bohl — Perron theorems on asymptotic stability and on the existence of the limits of solutions for LFDEA from the works of N. V. Azbelev, L. M. Berezanskii, P. M. Simonov and A. B. Chistyakov [1], [2]. These results were obtained in an article for LDEA and for the HLSFDEA. In the theses, such results were obtained by transfer from LFDEA systems. In the case of the HLSFDEA system, it was possible to reduce to one equation in the space of functions on the semi-axis (to LFDEA) or to reduce to one equation in the space of functions on the countable set (to LDEA).

Keywords: theorem of Bohl – Perron, hybrid linear system of functional differential equations with aftereffect, method of model equations, solvability in pairs of spaces, asymptotic stability, existence of the limits of solution.

Воспользуемся обозначением статей [3]–[6].

Ниже предполагаем, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции константы, а подпространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля констант.

Будем говорить, что вектор $z(\infty)$=($\mathbf{B}$)-$\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ есть "$\mathbf{B}$-*предел*" функции $z \in \mathbf{B}$, если разность $z - z(\infty)$ принадлежит пространству $\mathbf{B}_0$, т.е. если $\lim\limits_{s\to\infty} \|[z - z(\infty)]^s\|_{\mathbf{B}} = 0$.

Если $\mathbf{B} = L_\infty$, то тогда $z(\infty) = \operatorname{vrai}\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$. Через $\mathbf{B}_l$ обозначим пространство функций $z \in \mathbf{B}$, для каждой из которых существует $\mathbf{B}$-предел с нормой $\|z\|_{\mathbf{B}_l} = \|z\|_{\mathbf{B}}$. Аналогично определим пространство C_l таких функций $x \in C$, для каждой из которых существует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C_l} = \|x\|_C$.

Относительно модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространства $\mathbf{B}$ будем предполагать, что

а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_l$ в пространство C_l и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} принадлежат пространству C_l.

Эти условия означают, что имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l) \subset C_l$. Следовательно, предполагается, что фундаментальная матрица U_{11} имеет конечный предел $U_{11}(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} U_{11}(t)$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \subset \mathbf{C}$.

Здесь предполагаем, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции константы, а подпространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля констант. Через $\mathbf{b}^l$ обозначим пространство функций $g \in \mathbf{b}$, для каждой из которых существует $\mathbf{b}$-предел $g(\infty)$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}^l}$=$\|g\|_{\mathbf{b}}$.

Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^l$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, пределу $g(\infty)$ по метрике пространства $\mathbf{b}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{b}^l$ является замкнутым подпространством

пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $||\cdot||_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$ и функций констант. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^l$.

Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = u$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^l$ в пространство $\ell_{\infty 0}^l$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = 0$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^l$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l) \subset \ell_{\infty 0}^l$ и существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \lim\limits_{n\to\infty} y[n] = y(\infty)$ всех решений уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ в случае $g \in \mathbf{b}^l$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty 0}$.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема. *Операторы* $\mathcal{L}_{12} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \to \mathbf{b}$ *действуют и ограничен, причем* $\mathcal{L}_{12}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)) \subset \mathbf{B}_l$, $\mathcal{L}_{21}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)) \subset \mathbf{b}^l$. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}_{11} x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$*устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22} y = g$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})-$*устойчиво, а операторы* $\mathcal{L}_{11} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ *действует из пространства* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)$ *и* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)$ *в пространства* $\mathbf{B}_l$ *и* $\mathbf{b}^l$ *и ограничены. Пусть, далее, уравнение* $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_l \to \mathbf{B}_l$ *ограничен. Или, пусть уравнение* $\mathcal{L}_2 x = (\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12})y = g_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{b})-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_2 W_{22} : \mathbf{b}^l \to \mathbf{b}^l$ *ограничен. Тогда уравнение* $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ *будет* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_l \times \mathbf{b}^l)-$*устойчивым.*

Литература

1. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения, **27**:10 (1991), 1659-1668.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Перм. ун-т, 2001.

3. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем и её обращение // Вестник Тамбовского университета, Серия «Естественные и технические науки», **23**:124 (2018), 726-737.

4. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета, Математика. Механика. Информатика, **41**:2 (2018), 38-43.

5. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Вестник РАЕН, Темат. номер «Дифференциальные уравнения», **16**:3 (2018), 55-59.

6. *Симонов П.М.* Теорема Боля — Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения : материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17 – 19 мая 2017 г.). — Пермь, ПНИПУ, 2018. — 230-235.

О КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник
sitnik@bsu.edu.ru

УДК 517.95

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. В докладе будут изложены результаты, полученные в этом направлении в последние годы.

Ключевые слова: операторы преобразования, интегральные преобразования, специальные функции, композиционный метод

On composition method in transmutation theory

The importance of transmutation theory is demonstrated by many applications. The most valuable its role is in differential equations theory. In the report the results will be considered in transmutation theory which were stated recently.

Keywords: transmutations, integral transforms, special functions, composition method

В докладе будет рассказано основное содержание монографий [1] и [2], при этом достаточно подробно изложен композиционный метод операторов преобразований. Монография [1] составлена из докторской диссертации Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010) и части докторской диссертации С.М.Ситника, защищённой в 2016 г. Следует отметить, что оба автора, учитель и его ученик, принадлежат школе известного воронежского математика Ивана Александровича Киприянова, получившего фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя по одной или части переменных.

Изложим более подробно содержание [1]. Монография посвящена приложениям метода операторов преобразования к исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Особое внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных с операторами Бесселя. Монография содержит подробное введение в теорию операторов преобразования и достаточно обширный список литературы.

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова. К числу важных результатов В.В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования.

Ситник Сергей Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, Белгородский государственный университет (Белгород, Россия); Sergei Sitnik (Belgorod State University, Belgorod, Russia)

Особо следует выделить введённый В.В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана—Лиувилля, В.В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С.Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В.В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «К-следом» в честь В.В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «К-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

Приведём содержание книги по главам.

Глава 1. Введение (исторические сведения, функциональные пространства, специальные функции, интегральные преобразования).

Глава 2. Операторы преобразования Сонина—Пуассона—Дельсарта и их модификации.

Глава 3. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи.

Глава 4. Общие весовые краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.

Глава 5. Новые краевые задачи для уравнения Пуассона с особенностями в изолированных точках.

Глава 6. Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Глава 7. Приложения метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М. Ландиса.

Список литературы в [1] содержит около 650 ссылок.

В монографии [2] излагаются как известные, так и недавно полученные результаты теории операторов преобразования, представляющей собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функ-

ций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния.

Литература

1. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления, **64**:2 (2018), 211-426.

2. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В.В. Соловьев

soloviev.vyacheslav@gmail.com

УДК 517.95

Рассматривается обратная задача определения источника в уравнении теплопроводности для случая первой краевой задачи в одномерном случае. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи (переопределении) предполагается известным след её решения в финальный момент времени на некотором отрезке. Получены достаточные условия существования единственного решения обратной задачи. Рассмотрение задачи проводится в классах функций удовлетворяющих условиям Гёльдера.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, переопределение.

Solvabiliti of the inverse problem of finding source with compact support in the heat equation.

The inverse problem of source determination for the heat equation in case of the first boundary problem in one dimensional case is studied. The trace of the solution to the direct problem on a segment in the last time is used as additional information (overdetermination) about this solution. Existance and uniqueness therems for the solution to the inverse problem are proved. The inverse problems are considered in the class of smooth functions with the derivatives satisfying the Holder condition.

Keywords: inverse problem, heat equation, overdetermination

Соловьев Вячеслав Викторович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (Москва, Россия); Vyacheslav Solov'ev (National Research Nuclear University «MIPhI», Moscow, Russia)

Пусть $T > 0, l > 0, 0 < a < b < l, 0 < \alpha < 1$- фиксированные числа, $\Omega_T = (0,l) \times (0,T]$- прямоугольник на плоскости переменных (x,t). В прямоугольнике $\overline{\Omega}_T = [0,l] \times [0,T]$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций (u,f) из условий:

$$u_t - u_{xx} = f(x)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t), t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,T) = \chi(x), x \in [a,b]. \tag{3}$$

Будем предполагать, что входящая в уравнение (1) функция $f(x)$ может быть отличной от нуля только на отрезке $[a,b]$, то есть носитель этой функции принадлежит этому отрезку. Определим прямоугольники $P_T = [a,b] \times (0,T], Q_T = [0,a] \times (0,T] \cup [b,l] \times (0,T]$. Определим пространство функций:

$$U(\Omega_T) = \{u \in C(\overline{\Omega}_T) : u \in C^{1,0}_{x,t}(\Omega_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(P_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\}.$$

Так как данное пространство функций не является общепринятым при изучении задач (1)-(2) то, сформулируем сначала, теорему существования м единственности решения прямой задачи (1)-(2) в этом классе функций.

Теорема 1. *Пусть справедливы условия $h, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in C^{\alpha}[a,b]$. Тогда прямая задача (1)-(2), для любых функций $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T], \varphi \in C[0,l]$, удовлетворяющих условиям согласования $\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)$, имеет единственное решение в классе функций $U(\Omega_T)$.*

Решением обратной задачи (1)-(3) будем называть пару функций $(u,f) \in U(\Omega_T) \times C^{\alpha}[a,b]$ удовлетворяющую условиям (1)-(3).

Теорема 2. *Пусть справедливы условия $h, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $h(x,t)h_t(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \Omega_T$. Тогда обратная задача (1)-(3) не может иметь двух различных решений в том и только в тои случае, когда отрезок $[a,b]$ принадлежит носителю функции $h(x,T)$. Если, дополнительно к этим условиям на функцию h, выполнено неравенство $|h(x,T)| \geqslant h_T > 0$, то обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение для любых функций $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T], \varphi \in C[0,l], \chi \in C^2[a,b]$ удовлетворяющих условиям согласования.*

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.Х. Турметов
turmetovbh@mail.ru

УДК 517.956

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости некоторых нелокальных краевых задач для полигармонического уравнения. В качестве граничных операторов рассматриваются операторы дробного дифференцирования типа Адамара. Доказаны теоремы о существования и единственности решения исследуемых задач.

Ключевые слова: дробная производная, нелокальная задача, ортогональная матрица, полигармоническое уравнение

On some nonlocal boundary value problems with fractional-order boundary operators

In this paper, we study the solvability of some non-local boundary value problems for a polyharmonic equation. Fractional differentiation operators of the Hadamard type are considered as boundary operators. The theorems on the existence and uniqueness of the solution of the studied problems are proved.

Keywords: fractional derivative, nonlocal problem, orthogonal matrix, polyharmonic equation

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geqslant 2$, $\partial\Omega$ — единичная сфера, $u(x)$ — гладкая функция в Ω, $r = |x|, \theta = \frac{x}{r}, \delta = r\frac{d}{dr}$ и $\mu \geqslant 0$.

Введем операторы типа Адамара [1]:

$$J_\mu^\alpha[u](x) = \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} u(\tau\theta) d\tau, \alpha > 0,$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} J_0^{p-\alpha} \left[\delta^p [r^\mu u]\right](x), p-1 < \alpha \leqslant p, p \geqslant 1.$$

Пусть S - действительная ортогональная матрица $SS^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l \in N$ что $S^l = E$.

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) + a_k D_\mu^{\alpha+k} u(Sx) = g_k(x),\ x \in \partial\Omega, k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2}$$

Решением задачи (1),(2) назовем функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $D_\mu^{\alpha+k} u(x) \in C(\bar{\Omega}), k = 0, 1, ..., m-1$ и удовлетворяющую условиям (1),(2) в классическом смысле.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (проект № AP05131268).

Турметов Батирхан Худайбергенович, д.ф.-м.н., профессор, Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави (Туркестан, Казахстан) Batirkhan Turmetov (A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

Задача (1),(2) в случае $\mu > 0$ является нелокальным аналогом задачи Робена, а в случае $\mu = 0$ нелокальным аналогом задачи Неймана. При $a_k = 0, k = 0, 1, ..., m-1$ данная задача изучена в работе [2].

Теорема 1. *Пусть* $\mu > 0, a_k^l \neq \pm 1$, $k = 0, 1, ..., m-1, 0 < \lambda < 1$ *и* $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_k(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. *Тогда решение задачи (1),(2) существут и единственно.*

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 2 & 4 & ... & 2(m-1) \\ 0 & 2^2 & 4^2 & ... & [2(m-1)]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 2^{m-1} & 4^{m-1} & ... & [2(m-1)]^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Через $\Delta_j, j = 0, ..., m-1$, обозначим определитель матрицы, полученной из матрицы A удалением первого столбца и строки $(j+1)$. В частности, $\Delta_0 = |A| = detA$. Легко показать, что $|A| \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu = 0, 0 < \alpha \leqslant 1, a_k^l \neq \pm 1, 0 < \lambda < 1$ *и* $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_k(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. *Тогда для существования решения задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(1 - |x|^2\right)^{m-1} f_{1-\alpha}(x) dx = \sum_{k=1}^{m} c_{k,m} \int\limits_{\partial\Omega} g_{k-1}(x) dS_x$$

где

$$f_{1-\alpha}(x) = J_{2m}^{1-\alpha}[f](x), c_{k,m} = (-1)^{k+1} \Delta_k \frac{4^{m-1}((m-1)!)^2}{(1+a_k)|A|}.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

В случае $\alpha = 1$ используя результаты работы [3] условие разрешимости задачи (1),(2) можно уточнить.

Теорема 3. Пусть $\alpha = 1, \mu = 0, a_k^l \neq \pm 1$, $k = 0, 1, ..., m-1, 0 < \lambda < 1$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_{k-1}(x) \in C^{\lambda+m-1-k}(\partial\Omega), k = 0, 1, ..., m-1$. Тогда для существования решения задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\left(1 - |x|^2\right)^{m-1}}{(2m-2)!!} f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 2m-k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \frac{(2m-2k-1)!!}{1+a_k} g_{k-1}(x)\, dS_x.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — North-Holland: Elsevier, 2006.

2. *Турметов Б.Х.* О разрешимости некоторых краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения с граничными операторами типа Адамара // Дифф. урав. , **53**:3 (2014), 343–354.

3. *Карачик В.В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр.матем., **16**:4 (2013), 61-74.

ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К. Уринов, К.Т. Каримов

urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

УДК 517.518

Краткая аннотация. Для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде исследована краевая задача типа задачи Дирихле. Единственность и существование решения задачи, доказана с использованием метода спектрального анализа.

Ключевые слова: сингулярный коэффициент, полубесконечный параллелепипед, спектральный метод.

The problem of the type Dirichlet problem in a semi-infinite parallelepiped for an elliptic equation with three singular coefficients

Short abstract. For a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, a problem of the Dirichlet problem type was investigated. The uniqueness and existence of the solution of the problem is proved using the method of spectral analysis.

Keywords: singular coefficient, semi-infinite parallelepiped, spectral method.

Уринов Ахмаджон Кушакович, д.ф.-м.н., профессор, Ферганский государственный университет (Фергана, Узбекистан); Akhmadjon Urinov (Ferghana state University, Ferghana, Uzbekistan)

Каримов Камолиддин Туйчибаевич, к.ф.-м.н., Ферганский государственный университет (Фергана, Узбекистан); Kamoliddin Karimov (Ferghana state University, Ferghana, Uzbekistan)

Рассмотрим следующее трехмерное эллиптическое уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$, где $\alpha, \beta, \gamma, a, c \in R$, причем $\alpha, \beta, \gamma < 1/2$, $a > 0, c > 0$; $u = u(x, y, z)$ – неизвестная функция.

Задача D^∞. Найти функцию $u \in C([0, a] \times [0, \infty) \times [0, c]) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(0, y, z) = 0, \ \ u(a, y, z) = 0, \ 0 \leqslant y < \infty, \ 0 \leqslant z \leqslant c;$$

$$u(x, y, 0) = 0, \ \ u(x, y, c) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y < \infty;$$

$$u(x, 0, z) = f(x, z), \ \lim_{y \to \infty} u(x, y, z) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant z \leqslant c,$$

где $f(x, z)$ – заданная непрерывная функция.

В работе доказана следующая

Теорема. Пусть функция $f(x, z)$ удовлетворяет условиям

$$f(0, z) = f(a, z) = f(x, 0) = f(x, c) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{xz}(x, z) \right] \in C([0, a] \times [0, b]),$$

$$\lim_{x \to 0} x^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{2\alpha} f_x(x, z) \right] = \lim_{x \to a} \frac{\partial}{x^{2\alpha} \partial x} \left[x^{2\alpha} f_x(x, z) \right] = 0,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\partial}{z^{2\gamma} \partial z} \left[z^{2\gamma} f_z(x, z) \right] = \lim_{z \to c} \frac{\partial}{z^{2\gamma} \partial z} \left[z^{2\gamma} f_z(x, z) \right] = 0.$$

Тогда решение задачи D^∞ существует, единственно и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^{1/2-\alpha} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a} \right) J_{1/2-\gamma}\left(\frac{\delta_{nm} z}{c} \right) \times$$

$$\times \bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y \right) f_{nm},$$

где $J_l(x)$ – функция Бесселя порядка l первого рода,

$$f_{nm} = \frac{4}{J^2_{3/2-\alpha}(\sigma_n) J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})} \int_0^c \int_0^a f(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) \, dx dz,$$

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x / a), \ n \in N,$$

$$Z_{nm}(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm} z / c), \ n, m \in N,$$

σ_n и δ_{nm} – занумерованные в порядке возрастания положительные нули функций $J_{1/2-\alpha}(x)$ и $J_{1/2-\gamma}(z)$ соответственно; $\bar{K}_\nu(z) =$

$2^{1-\nu}z^{\nu}K_{\nu}(z)/\Gamma(\nu)$, $\nu > 0$[2]; $\Gamma(x)$ – Гамма функция Эйлера, $K_l(x)$– функция Макдональда [1].

Литература

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. –Изд. ИЛ.: Москва, 1949.

2. *Капилевич М.Б.* Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник, **30**:72 (1952),11-38.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ РОБЕНА

А.В. Филиновский

flnv@yandex.com

УДК 517.956.226, 517.956.227

Изучается поведение первого собственного значения краевой задачи Робена $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, $x \in \Gamma$, в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ (ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, α — вещественный параметр). Устанавливается асимптотическое разложение первого собственного значения по степеням спектрального параметра при $\alpha \to +\infty$. Доказываются также двусторонние оценки разности собственных функций задач Робена и Дирихле.

Ключевые слова: оператор Лапласа, задача Робена, собственные значения, собственные функции, параметр, асимптотическое разложение, двусторонние оценки

Asymptotic representation for the first eigenvalue of the Robin problem

We study the behavior of first eigenvalue of the Robin boundary value problem $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, $x \in \Gamma$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, is a bounded domain with smooth boundary Γ, ν is the outward unit normal vector to $\partial\Omega$, α is a real parameter. We obtain the power-type asymptotic expansion to the first eigenvalue of this problem for $\alpha \to +\infty$. Also we prove two-side estimates to the difference between Robin and Dirichlet eigenfunctions.

Keywords: Laplace operator, Robin problem, eigenvalues, eigenfunctions, asymptotic expansion, two-side estimates

---

Филиновский Алексей Владиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Alexey Filinovskiy (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Будем рассматривать спектральные задачи Робена

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right)\Big|_{x\in\Gamma} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{x\in\Gamma} = 0, \tag{4}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ. Обозначим через $\lambda_1^R(\alpha)$ первое собственное значение задачи Робена (1) — (2), а через λ_1^D – первое собственное значение задачи Дирихле (3) — (4). В работах [1] – [3] было получено следующее равенство:

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\, \frac{1}{\alpha} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{5}$$

где $u_1^D(x)$ – нормированная в $L_2(\Omega)$ первая собственная функция задачи Дирихле (3) — (4).

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ и выполняется равенство*

$$\int_\Omega u_1^D f dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} g ds = 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $v \in H^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\Delta v + \lambda_1^D v = f, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$v|_{x\in\Gamma} = g, \tag{7}$$

удовлетворяющее условию

$$\int_\Omega v u_1^D dx = 0, \tag{8}$$

и для него имеет место оценка

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right).$$

Применяя теорему 1, получаем следующее асимптотическое разложение, уточняющее (5).

Теорема 2. *Для собственного значения λ_1^R справедливо асимптотическое представление*

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\, \frac{1}{\alpha} - \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds\, \frac{1}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right), \tag{9}$$

$$\alpha \to +\infty,$$

где v – обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta v + \lambda_1^D v = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} \right)^2 ds\, u_1^D, \quad x \in \Omega,$$

$$v|_{x\in\Gamma} = -\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu},$$

удовлетворяющее условию (8).

Так как поверхность Γ гладкая, то все входящие в правую часть формулы (9) интегралы имеют смысл (см., например, [5], теорема 7.1.3).

Обозначим через $\{\lambda_k^R(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ последовательность собственных значений задачи Робена, а через $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^\infty$ – последовательность собственных значений задачи Дирихле $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \Omega$, $u = 0$, $x \in \Gamma$. Собственные значения считаем занумерованными в порядке возрастания с учетом кратностей. Пусть $\{u_{k,\alpha}^R\}_{k=1}^\infty$ и $\{u_k^D\}_{k=1}^\infty$ – соответствующие ортонормированные (в $L_2(\Omega)$) последовательности собственных функций задач Робена и Дирихле. Обозначим через $m(\lambda)$ кратность собственного значения λ. Для всех $\alpha \in R$ будем полагать

$$\int_\Omega u_{k,\alpha}^R u_k^D\, dx \geqslant 0.$$

Теорема 3. (см. [4]) *Пусть $m(\lambda_k^D) = 1$. Тогда существует $\alpha_k \in R$, такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ выполнено $m(\lambda_k^R(\alpha)) = 1$ и справедливы оценки*

$$\frac{C_2}{\alpha} \leqslant \|u_{k,\alpha}^R - u_k^D\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \frac{C_3}{\alpha},$$

где C_2, C_3 – положительные постоянные, не зависящие от α.

Литература

1. *Filinovskiy A.V.* On the asymptotic behavior of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // J. ellipt. parab. equ., **1**:1 (2015), 123-135.

2. *Филиновский А.В.* Об асимптотическом поведении собственных значений краевой задачи с параметром // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия,**128**:6 (2015), 135-140.

3. *Filinovskiy A.V.* On the Asymptotic Behavior of Eigenvalues and Eigenfunctions of the Robin Problem with Large Parameter // Math. Model. Anal. **22**:1 (2017), 37-51.

4. *Филиновский А.В.* О двусторонних оценках собственных функций эллиптических краевых задач // Дифф. уравнения, **53**:11 (2017), 1574-1575.

5. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАРЫ ЛАКСА

А.Р. Хакимова
aigulya.khakimova@mail.ru

УДК 517.9

В работе обсуждается прямой метод поиска пары Лакса для нелинейного интегрируемого уравнения. В качестве первого уравнения пары Лакса берется линеаризация рассматриваемого нелинейного уравнения. Вторым уравнением пары будет обыкновенное дифференциальное уравнение совместное с линеаризованным уравнением. Это ОДУ можно выбрать так, что полученная пара действительно будет парой Лакса для исходного нелинейного уравнения, в том смысле, что она совместна тогда и только тогда, когда выполняется уравнение. Полученная пара Лакса имеет более высокий порядок, чем обычная пара, однако понижением порядка она сводится к обычной.

Ключевые слова: нелинейные интегрируемые уравнения, линеаризованное уравнение, инвариантное многообразие, пара Лакса

On a method for constructing a Lax pair

The paper discusses the direct search method for the Lax pair for a nonlinear integrable equation. The linearization of the nonlinear equation under consideration is taken as the first equation of the Lax pair. The second equation of the pair will be an ordinary differential equation consistent with the linearized equation. This ODE can be chosen in such a way that the resulting pair is indeed a Lax pair for the original nonlinear equation, in the sense that it is consistent if and only if the equation is satisfied. The resulting Lax pair has a higher order than a regular pair, but by decreasing the order it reduces to the usual one.

Keywords: nonlinear integrable equations, linearized equation, invariant manifold, Lax pair

Пара Лакса является важным инструментом исследования нелинейных уравнений. Она позволяет находить гамильтонову структуру, интегралы движения, высшие симметрии, точные и асимптотические решения и т.д. Разработка новых методов поиска пар Лакса остается актуальной, несмотря на то, что имеются различные способы решения этой задачи (см., например, [1] - [4]).

Доклад основан на результатах, полученных в наших работах [5] - [10], в которых разработан способ построения представления Лакса, использующий понятие симметрии. Кратко изложим суть метода.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

Хакимова Айгуль Ринатовна, инженер-исследователь, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

Линеаризуем уравнение (1)

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k \right) U. \tag{2}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_n), \tag{3}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся некоторым решением уравнения (1), входит в (3) в качестве функционального параметра.

Определение *Уравнение (1) определяет обобщенное инвариантное многообразие (ОИМ) для уравнения (1), если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(1),(2),(3)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$ *и* U, U_x, $\ldots$, U_{m-1}.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1) и (2), а переменные $U_m, U_{m+1}, \ldots$ – в силу равенства (3). Поскольку переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, $\ldots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\ldots$, u_n, u_{n+1}, $\ldots$ в уравнении (3) являются независимыми, задача отыскания функции $F(x, t, U, U_x, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, \ldots, u_n)$ является переопределенной и эффективно решается.

В наших работах рассматриваются следующие два класса обобщенных инвариантных многообразий:

$$1. \sum_{i,j=0}^{s} \alpha_{ij}(\lambda, u, u_1, \ldots) U_i U_j + k = 0;$$

$$2. \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\lambda, u, u_1, \ldots) U_j = 0,$$

где k, λ – произвольные постоянные.

В первом случае, когда ОИМ задается нелинейным уравнением, система уравнений (2)-(3) образует нелинейную пару Лакса для уравнения (1), которая простыми преобразованиями сводится к линейной. Во втором случае, когда ОИМ задается линейным уравнением, из равенства (2) легко выводится такой важный в теории интегрируемости объект, как оператор рекурсии. Эффективность метода построения пары Лакса и оператора рекурсии апробирована на многочисленных примерах (см. [5] - [10]).

Литература

1. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ **61**:1 (1971), 118-134.

2. *Wahlquist H.D., Estabrook F.B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations // Journal of Mathematical Physics **16**:1 (1975), 1-7.

3. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial differential equations // Journal of Mathematical Physics, **24**:3 (1983), 522-526.

4. *Nijhoff F.W., Walker A.J.* The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system // Glasgow Mathematical Journal **43**:A (2001), 109-123.

5. *Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M. N.* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **49**:3 (2016), 35 pp.

6. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // Теоретическая и математическая физика, **191**:3 (2017), 369-388.

7. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **50**:30 (2017), 19 pp.

8. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей // Теоретическая и математическая физика, **196**:2 (2018), 294-312.

9. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On the recursion operators for integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51**:42 (2018), 22 pp.

10. *Хакимова А.Р.* К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений // Уфимский математический журнал, **10**:3 (2018), 110-122.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА С.М. НИКОЛЬСКОГО ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.Р.Халмухамедов, Э.И.Кучкоров, К.К.Тургунов

e-mail:khalmukhamedov@gmail.com; e_kuchkorov@mail.ru; komilturgunov@mail.ru

УДК 517.946

В настоящей работе найдены условия равномерной суммируемости средних Рисса спектральных разложений функций, принадлежащих классу Никольского H_p^α.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, спектральные разложения, средние Рисса.

Халмухамедов Алимджан Рахимович, д.ф.-м.н., профессор, Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан);

Кучкоров Эркин Иброхимович, к.ф.-м.н., доцент, Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан);

Тургунов Комил Курбаналиевич, старший преподаватель, Ташкентский Архитектурно Строительный институт (Ташкент, Узбекистан);

On spectral decompositions of functions from Nikolsky spaces with respect to eigenfunctions of the Schrödinger operator in 3-dimensional domain

This paper is devoted to establish uniformly summability conditions for the Riesz means of spectral decompositions of functions from Nikolsky spaces H_p^α.

Keywords: the Schrödinger operator, spectral decompositions, the Riesz means.

В произвольной трехмерней области Ω рассмотрим неотрицательную функцию $q(x) \geqslant 0$ и $q(x) \in L_2(\Omega)$. Обозначим через $\{u_n(x)\}$ полную ортонормированную систему собственных функций произвольного неотрицательного самосопряженного расширения оператора Шрёдингера $-\Delta + q(x)$ с чисто точечным спектром, состоящим из собственных чисел $\lambda_n \geqslant 0$.

Для любой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ и обозначим через f_n ее коэффициенты Фурье по системе $\{u_n(x)\}$ и введем средние Рисса ряда Фурье функции f порядка $s > 0$:

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) \tag{1}$$

Для каждого компактного подмножества $K \subset \Omega$ обозначим через $S_K(t)$ следующую величину:

$$S_K(t) = \left(\sup_{x \in K \subset \Omega} \int\limits_{|y-x| \leqslant t} |q(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Пусть

$$Q(\Omega) = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int\limits_0^1 \frac{S_K(t)}{t} dt < +\infty,\ K \subset \Omega, t > 0. \right\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая:

Теорема. *Пусть Ω - произвольная область, $q \in Q(\Omega)$, $\{u_n(x)\}$ - полная ортонормированная система собственных функций произвольного неотрицательного самоспряженного расширения оператора $-\Delta + q(x)$ с чисто точечным спектром $\lambda \geqslant 0$.*

Пусть $f(x)$ - произвольная функция, удовлетворяющая следующим трем требованиям: 1) $f(x)$ финитна в области Ω; 2) $f(x)$ принадлежит в области Ω классу $H_2^\alpha(\Omega)$ при $\alpha \geqslant 1 - s$, где s заключено в интервале $0 \leqslant s < 1$; 3) в некоторой содержащей в Ω области D функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^\alpha(D)$ при $\alpha \geqslant 1 - s$, $p\alpha > 3$. Тогда равномерно относительно x в каждой сторого внутренней подобласт D' области D имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Доказательство теоремы проводится методом разработанным академиками Ильиным В.А и Алимовым Ш.А (см [1]-[4]), на основе формулы среднего значения для собственных функций.

Литература

1. *Ильин В.А.,* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991. 368 С.

2. *Ильин В. А., Алимов Ш.А.*, Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов.// Дифференциальные уравнения, 1974, Т.10, №3, С.481-506.

3. *Алимов Ш.А.*, О разложении по собственным функциям оператора Шредингера.// Дифференц. уравнения, 1971, Т.7, №2, С. 286–296.

4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Точная по порядку и равномерная в $N = 2$ при $N = 3$ и оценка квадратов фундаментальных функций самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Като // Дифференц. уравнения. 1996, №3, Т.32, С.357-374.

5. *Садовничий В.А.* Теория операторов, М., Дрофа, 2004.384 С.

6. *Никольский С. М.*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.,1969.

О СИТЕ СТЕКЛОВА

Г.А. Чечкин

chechkin@mech.math.msu.su

УДК 517.946

В работе рассматривается спектральная задача типа Стеклова на соединении двух областей. Построены асимптотики собственных значений при стремлении малого параметра, характеризующую микроструктуру на интерфейсе, к нулю.

Ключевые слова: задача Стеклова, дифференциальные уравнения, спектральная теория

On the Steklov Sieve

We consider the Steklov type spectral problem on a junction of two domains. We construct the asymptotics of eigenvalues as the small parameter characterizing the microstructure of the interface, tends to zero.

Keywords: Steklov problem, differential equations, spectral theory

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00046).

Чечкин Григорий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Gregory A. Chechkin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, граница которой Γ является гладкой и в окрестности концов отрезка $\Gamma_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс совпадает с прямыми $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно. Обозначим непустой участок границы $\Gamma_2 = \{x \in \Gamma : x_2 > c\}$ для некоторого фиксированного $c > 0$ и пусть $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_2$.

Пусть Q — прямоугольник $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(-\frac{h\varepsilon}{2}; \frac{h\varepsilon}{2}\right)\right\}$ и B — прямоугольник $\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \xi_2 \in \left(-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right)\right\}$. Напомним, что $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$, где $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_j B_\varepsilon^j$ и рассмотрим полосу с каналами $Q_\varepsilon := Q \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Вертикальную границу каналов обозначим $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cap Q$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{Q_\varepsilon}$ (см. рис. 1). Обозначим $\Gamma_3^\varepsilon = \left\{x \in \Gamma_3 : |x_2| > \frac{h\varepsilon}{2}\right\}$ и $\Upsilon_\varepsilon = \left\{x \in \partial Q_\varepsilon : |x_2| = \frac{h\varepsilon}{2}\right\}$.

Пространство $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_2)$ определим как замыкание множества $C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ функций, равных нулю в окрестности Γ_2, по норме $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

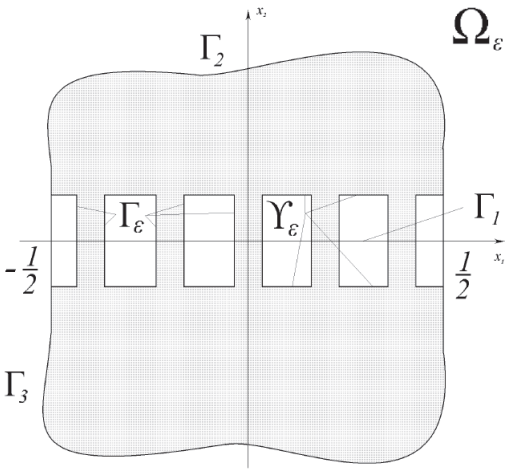


Рис. 2.1: Структура области Ω_ε

Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Стеклова

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Upsilon_\varepsilon \cup \Gamma_3^\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь и далее ν — вектор единичной внешней нормали.

Спектральная задача для оператора Лапласа в ограниченной области с условием Стеклова на части границы является самосопряженной, резольвента соответствующего оператора компактна и положительна. Поэтому, задача (1) имеет дискретный спектр, уходящий в ∞. Обозначим собственные значения этой задачи, перенумерованные с учетом кратности, через

$\lambda_{\varepsilon,1}$, $\lambda_{\varepsilon,2}, \ldots, \lambda_{\varepsilon,j}, \cdots \to \infty$, а соответствующие собственные функции через $u_{\varepsilon,1}$, $u_{\varepsilon,2}, \ldots, u_{\varepsilon,j}, \ldots$ Следующее условие нормировки является естественным для задачи (1):

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u_{\varepsilon,i} u_{\varepsilon,j}\, dx_2 = \delta_i^j,$$

где $\delta_i^j = 1$ если $i = j$, и 0, если $i \neq j$.

В дальнейшем мы также используем обозначение $[u]$ для скачка функции u на Γ_1. Задачу (1) и возникающие ниже задачи со скачком на Γ_1 будем понимать в смысле интегрального тождества, соответствующие решения принадлежат пространству $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_2)$.

В [1] было показано, что усредненная задача для (1) принимает вид

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma_3, \\ [u_0] = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ \left[\dfrac{\partial u_0}{\partial x_2}\right] = -2h\lambda_0 u_0 & \text{на } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2}$$

Эта задача самосопряженная и имеет дискретный спектр. Соответствующие собственные числа $\lambda_{0,k}$, занумерованные с учетом кратности, стремятся к $+\infty$ при $k \to \infty$. Более того, как частный случай [1, Theorem 3.1] получаем следующее утверждение.

Отметим интересную особенность предельной задачи (2). Коэффициент в спектральном условии в этой задаче зависит от параметра h (толщины перегородки), но не зависит от параметра a, характеризующего ширину отверстий (см. формулу (11) в [1]). Зависимость от a проявляется только в следующих членах асимптотического разложения собственных пар. Это связано с тем, что коэффициент в предельном спектральном условии определяется эффективной длиной вертикальной части границы перегородки в допредельной задаче. Эта эффективная длина не зависит от параметра a.

Имеет место следующая теорема (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть λ_0 — n-кратное собственное значение задачи (2), $u_0^{(l)}$ — соответствующие нормированные собственные функции. Тогда асимптотики собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ задачи (1), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, имеют вид*

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(l)} + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-\mu}),$$

где $\lambda_1^{(l)}$ определяется равенством

$$\lambda_1^{(l)} = \frac{1-a}{2}\left(B_{ah}\lambda_0^2 + \left\|\left\langle \frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial x_2} \right\rangle\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + (1-3A_{ah})\left\|\frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right),$$

константы A_{ah}, B_{ah} явно вычисляются, а μ — сколь угодно малое положительное число.

Благодарности. Результаты работы получены совместно с Р.Р. Гадыльшиным, А.Л. Пятницким, Y. Amirat, O. Bodard.

Литература

1. *Amirat Y., Bodard O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L.* Asymptotics of a spectral-sieve problem // J. Math. Anal. Appl., **435** (2016), 1652–1671.

2. *Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Об асимптотическом поведении собственных пар краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Известия РАН, **82**:6 (2018), 37–64.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЕ МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ С НЕОДНОРОДНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Л.Г. Шагалова

shag@imm.uran.ru

УДК 517.955

Рассматривается терминальная задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с неоднородным гамильтонианом. Гамильтониан и терминальная функция предполагаются кусочно-линейными, а размерность фазового пространства равна двум. Предложен и обоснован конечный алгоритм точного построения минимаксного и/или вязкостного решения. Алгоритм состоит из конечного числа последовательных этапов, на каждом из которых решаются элементарные задачи нескольких типов и осуществляется непрерывная склейка решений этих задач. Решение, построенное в результате реализации алгоритма, является кусочно-линейной функцией.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона – Якоби, минимаксное решение, вязкостное решение, кусочно-линейные функции, алгоритм

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00074).

Шагалова Любовь Геннадьевна, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия); Lyubov Shagalova (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)

Piecewise linear minimax solution of Hamilton – Jacobi equation with nonhomogeneous Hamiltonian

The terminal value Cauchy problem is considered for Hamilton - Jacobi equation with nonhomogeneous Hamiltonian. The Hamiltonian and the terminal function are piecewise linear, and the dimension of state space is two. A finite algorithm for the exact construction of the minimax and/or viscosity solution is proposed and justified. The algorithm consists of a finite number of consecutive stages, at each of which elementary problems of several types are solved and the continuous gluing of these solutions are carried out. The solution built by the algorithm is a piecewise linear function.

Keywords: Hamilton – Jacobi equation, minimax solution, viscosity solution, piecewise linear functions, algorithm

Рассматривается следующая терминальная задача Коши.

$$\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial x}\right) = 0, \quad t \leqslant \vartheta,\ x \in \times R^n, \tag{1}$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Здесь ϑ — заданное положительное число, гамильтониан $H(\cdot)$ непрерывен, а функция $\sigma(\cdot)$ — липшицева.

Известно [1], что минимаксное (вязкостное [2]) решение $\omega(\cdot)$ задачи (1),(2) существует и единственно. Если хотя бы одна из функций $H(\cdot)$ или $\sigma(\cdot)$ является выпуклой или вогнутой, можно выписать явные формулы для решения, используя известные формулы Хопфа – Лакса [3,4] и Пшеничного – Сагайдак [5]. Однако в общем случае получить явные формулы для решения не удается.

В [6,7] был разработан конечный алгоритм точного построения минимаксного решения в случае, когда размерность фазового пространства равна двум, а гамильтониан $H(\cdot)$ и функция $\sigma(\cdot)$ являются кусочно-линейными и удовлетворяют условиям положительной однородности

$$\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x), \quad x \in R^n, \quad \lambda \in R,\ \lambda > 0, \tag{3}$$

$$H(\lambda s) = \lambda H(s), \quad s \in R^n, \quad \lambda \in R,\ \lambda > 0. \tag{4}$$

В [6,7] условие (4) было существенным. В настоящей работе задача (1),(2) также рассматривается в случае двумерного фазового пространства и кусочно-линейных входных данных. Но сейчас не требуется выполнение условия (4) однородности гамильтониана.

Предлагается алгоритм точного построения решения. Алгоритм заключается в последовательном решении элементарных задач нескольких типов и непрерывной склейке этих решений. Построенное минимаксное решение является кусочно-линейной функцией.

Предлагаемый алгоритм, представляющий самостоятельный интерес, может быть использован для кусочно-линейной аппроксимации минимаксных (вязкостных) решений уравнений Гамильтона-Якоби с гамильтонианами общего вида.

Литература

1. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. — Москва: Наука, 1991.

2. *Crandall M., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton Jacobi equations. // Trans. Amer. Math. Soc., **277**:1 (1983), 1-42.

3. *Hopf E.* Generalized solutions of nonlinear equations of first order // J. Math. Mech., **14** (1965), 951-973.

4. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Appl., **8**:11 (1984), 1373-1381.

5. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, **2** (1970), 54-63.

6. *Субботин А.И., Шагалова Л.Г.* Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби // Доклады Академии Наук, **325**:5 (1992), 144-148.

7. *Shagalova L.G.* A piecewise linear minimax solution of the Hamilton – Jacobi equation // Kirillova F.M., Batukhtin V.D. (eds.) Proceedings of IFAC Conference on Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization. — Oxford: Pergamon, Elsevier Science, 1998. — 193-197.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ СО МНОГИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

УДК 517.9, 531.01

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл

Integrable dynamical systems with many degrees of freedom and dissipation

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multi-dimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral

---

Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maxim V. Shamolin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Выделим также задачи о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства.

Рассмотрим системы с n степенями свободы $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, $(z_n, \dots, z_1)$ — квазискорости, наличие диссипации (знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении, $F(\alpha)$ — внешнее силовое поле:

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \dots\\
\dots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \dots\\
\dots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \dots,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \dots\\
\dots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\dots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \dots\\
\dots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \dots,\\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2});
\end{gathered}
\tag{1}
$$

здесь всевозможные Γ — коэффициенты связности фазового пространства, D — дифференцирование, функции $f, g, h, i, \dots$ — гладкие.

Потребуем выполнение следующих равенств:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \dots = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\dots =\\
= \Gamma_n(\alpha),\ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$
w_n = z_n,\ w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2},\ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},
$$

$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},\ \ldots,\ w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (1) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha = -w_n + b\delta(\alpha),\ \dot w_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2,$$

$$\dot w_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1} w_n, \tag{3}$$

$$\dot w_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2} f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right],$$

$$\dot\beta_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}} f(\alpha)\ldots, s = 1,\ldots,n-2, \tag{4}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{5}$$

где в системе (4) символом "..." показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для систем (4) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5) (т.е. всего $n+1$).

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства* $\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa d\ln|\delta(\alpha)|/d\alpha$, $F(\alpha) = \lambda d\delta^2(\alpha)/2d\alpha$. *Тогда система (1) при выполнении условий (2) обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В частности, при $\kappa = -1$ система (3) имеет следующий первый интеграл:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b w_n \delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}.$$

Дополнительный первый интеграл для системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры ($u_n = w_n/\delta(\alpha)$)

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - b u_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - b u_n + \lambda)}\}/2}.$$

Первые интегралы для систем (4) имеют вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const},\ s = 1,\ldots,n-2,$$

где $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1,\ldots,n-2$, — некоторые гладкие функции. А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5), имеет вид

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \text{const}.$$

Для систем с диссипацией трансцендентность функций как первых интегралов наследуется из наличия притягивающих предельных множеств.

Выделим важные случаи для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{7}$$

Случай (6) формирует системы, соответствующие движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле [1, 2]. Случай (7) формирует системы, соответствующие движению материальной точки на n-мерной сфере также в неконсервативном поле. В случае (6), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [3]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Литература

1. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем., **16**:4 (2010), 3–229.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, **479**:3 (2018), 270–276.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН, **474**:2 (2017), 177–181.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ БЕССЕЛЯ

Э.Л. Шишкина

ilina_ dico@mail.ru

УДК 517.9

В докладе рассматривается метод решения дифференциального уравнения с левосторонней дробной производной Бесселя, основанный на применении преобразования Мейера.

Ключевые слова: дробный оператор Бесселя, дробное дифференциальное уравнение, гипергеометрическая функция, преобразование Мейера

Шишкина Элина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия); Elina Shishkina (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Method for differential equations with fractional Bessel derivative

In the report we discuss a method for solving a differential equation with a left-sided fractional Bessel derivative. This method is based on the application of the Meijer transform.

Keywords: fractional Bessel operator, fractional differential equation, hypergeometric function, Meijer transform

Дифференциальные уравнения с дробной производной Бесселя появляются в различных областях исследований и инженерных приложений (см. [1,2]), но, до настоящего момента, не существовало простых и общих методов для решения таких уравнений. В этой работе представлен метод, который подходит для широкого класса начальных задач для дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя. Метод использует метод преобразования Мейера и основан на формуле преобразования Мейера для дробной производной Бесселя.

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \qquad \nu \geqslant 0, \quad D := \frac{d}{dx},$$

и его дробные степени $(B_\nu)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть f интегрируема по $(0,\infty)$ с весом $x^{4\alpha+\nu}$, $\alpha > 0$. Интеграл

$$(B^{-\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = (IB^{\alpha}_{\nu,0+}f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy \qquad (1)$$

называется **левосторонним дробным интегралом Бесселя** на полуоси $[0,\infty)$ порядка α.

В (1) функция ${}_2F_1(a,b;c;z)$ — это гипергеометрическая функция, определеннвя для $|z| < 1$ степенным рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Для комплексного аргумента z с $|z| \geqslant 1$ функция ${}_2F_1(a,b;c;z)$ может быть аналитически продолжена по любому пути в комплексной плоскости, который избегает точек ветвления 1 и ∞.

Левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси $[0,\infty)$ порядка α определяется равенством

$$(B^{\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = (DB^{\alpha}_{\nu,0+}f)(x) = B^n_\nu (IB^{n-\alpha}_{\nu,0+}f)(x), \qquad n = [\alpha]+1$$

Подробнее о дробных производных Бесселя см. [3–7].

Пусть $C^\infty = C^\infty(0,\infty)$. В [4] представлены пространства

$$F_p = \left\{\varphi \in C^\infty : x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k} \in L^p(0,\infty) \text{ при } k = 0,1,2,...\right\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$F_\infty = \left\{ \varphi \in C^\infty : x^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \to 0 \,\text{при}\, x \to 0+ \,\text{и при}\, x \to \infty \,\text{для}\, k = 0,1,2,... \right\}$$

и

$$F_{p,\mu} = \left\{ \varphi : x^{-\mu}\varphi(x) \in F_p \right\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \qquad \mu \in \mathbb{C},$$

приспособленные для работы с операторами вида $B^\alpha_{\nu,0+}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Приведем теорему из [4].

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для всех p, μ и $\nu > 0$ таких, что $\mu \neq \frac{1}{p} - 2m$, $\nu \neq \frac{1}{p} - \mu - 2m + 1$, $m = 1, 2...$ оператор $B^\alpha_{\nu,0+}$ является непрерывным линейным отображением из F_p, μ в $F_{p,\mu-2\alpha}$. Если, кроме того, $2\alpha \neq \mu - \frac{1}{p} + 2m$ и $\nu - 2\alpha \neq \frac{1}{p} - \mu - 2m + 1$, $m = 1, 2...$, то $B^\alpha_{\nu,0+}$ — гомеоморфизм из F_p, μ на $F_{p,\mu-2\alpha}$ с обратным $B^{-\alpha}_{\nu,0+}$.*

Интегральное преобразование с ядром, представляющим собой модифицированную функцию Бесселя второго рода $K_{\frac{\nu-1}{2}}$, $\nu \geqslant 1$ называется **преобразованием Мейера** и имеет вид

$$\mathcal{K}_\nu[f](\xi) = F(\xi) = \int_0^\infty k_{\frac{\nu-1}{2}}(x\xi)\, f(x) x^\nu \, dx, \quad \text{где} \quad k_\beta(t) = \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1)}{t^\beta} K_\beta(t).$$

Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ и $f(t) = o\left(t^{\beta - \frac{\nu}{2}}\right)$ при $t \to +0$, где $\beta > \frac{\nu}{2} - 2$ если $\nu > 1$ и $\beta > -1$ если $\nu = 1$. Кроме того, пусть $f(t) = 0(e^{at})$ при $t \to +\infty$. Тогда преобразование Мейера такой функции существует почти всюду для $\operatorname{Re}\xi > a$ (см. [8], стр. 94).

Если $0 < \nu < 2$ и $F(\xi)$ аналитическая на полуплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{C} :$ p $\geqslant a$, $a \leqslant 0$ и $s^{\frac{\nu}{2}-1}F(\xi) \to$, $|\xi| \to +\infty$, равномерно по $\arg s$ то для всех c, $c > a$ обратное преобразование Мейера $\mathcal{K}_\nu^{-1}$ определяется равенством

$$\mathcal{K}_\nu^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{f}(\xi) i_{\frac{\nu-1}{2}}(x\xi) \xi^\nu d\xi, \quad \text{где} \quad i_\beta(t) = \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1)}{t^\beta} I_\beta(t),$$

I_β — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Теорема 1. *Если $f \in C^{2n}$, $n = [\alpha]+1$ и она такова, что преобразование Мейера от нее сущетсвует, то*

$$\mathcal{K}_\nu[B^\alpha_{\nu,0+} f](\xi) = \xi^{2\alpha} \mathcal{K}_\nu[f](\xi) - 2^{\nu-1}\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2k+1-\nu} B^{\alpha-1-k}_{\nu,0+} f(0). \quad (2)$$

Формула (2) используется для решения дифференциальных уравнений с левосторонней дробной производной Бесселя.

Пример. Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим задачу

$$B^\alpha_{2,0+} f(x) = \lambda f(x), \quad (3)$$

$$B^{\alpha-1}_{2,0+} f(0) = a. \quad (4)$$

Применяя преобразование Мейера, учитывая формулу (2), получим

$$\xi^{2\alpha}F(\xi) - \lambda F(\xi) = \frac{a}{\xi} \qquad \text{или} \qquad F(\xi) = a\frac{\xi^{-1}}{\xi^{2\alpha} - \lambda},$$

где

$$F(\xi) = \mathcal{K}_2[f](\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{1}{2}}(x\xi)\, f(x)x^\nu\, dx = \frac{\pi}{2\xi}\int\limits_0^\infty f(x)e^{-x\xi}x\, dx = \frac{\pi}{2\xi}L[xf(x)](\xi),$$

а L — преобразование Лапласа. Тогда

$$L[xf(x)](\xi) = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{\xi^{2\alpha} - \lambda}$$

Имеет место формула (см. [9], стр. 21, формула 1.80)

$$\int\limits_0^\infty e^{-\xi x}x^{\beta-1}E_{\gamma,\beta}(\pm\lambda x^\gamma)dx = \frac{\xi^{\gamma-\beta}}{\xi^\gamma \mp \lambda}, \qquad \mathrm{Re}(\xi) > |\lambda|^{1/\gamma}.$$

В нашем случае имеем

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}x^{2\alpha-2}E_{2\alpha,2\alpha}(\lambda x^{2\alpha}),$$

что и дает решение задачи (3)–(4).

Литература

1. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications. — Longman & J. Wiley: New York, 1994.

2. *Garra R., Orsingher E.* Random flights related to the Euler-Poisson-Darboux equation // Markov Processes and Related fields, **22** (2016), 87-110.

3. *Sprinkhuizen–Kuyper I.G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math.Analysis and Applications, **75** (1979), 674–702.

4. *McBride A. C.* Fractional Powers of a Class of Ordinary Differential Operators // Proceedings of the London Mathematical Society, **3:45** (1982), 519-546.

5. *Ситник С.М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, **12:2** (2010), 69-75.

6. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* On fractional powers of Bessel operators // Journal of Inequalities and Special Functions. **8:1** (2017), 49–67.

7. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси // Сибирские Электронные Математические Известия, **15** (2018), 1–10

8. *Glaeske H. J., Prudnikov A.P., Skornik K. A.* Operational calculus and related topics. — Chapman and Hall/CRC: USA, 2006.

9. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — Academic Press: San Diego, 1999.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов
yum_mg@mail.ru, fazlitdin_marat@mail.ru

УДК 517.91

В докладе обсуждаются новые формулы и алгоритмы построения центральных многообразий в задаче о локальных бифуркациях в динамических системах. Предлагаемые алгоритмы и формулы позволяют проводить эффективный качественный анализ бифуркаций в терминах исходных уравнений.

Ключевые слова: динамическая система, точка равновесия, бифуркация, центральное многообразие.

Approximate formulas and algorithms for constructing central manifolds

In this paper, new algorithms for constructing central manifolds in problem on local bifurcations in dynamical systems are obtained. The proposed algorithms and formulas allow for an efficient qualitative analysis of bifurcations in terms of the original equations.

Keywords: dynamical systems, equilibrium point, bifurcation, central manifold.

В докладе предлагается общая схема, позволяющая получить новые приближенные формулы для центральных многообразий динамических систем в терминах исходных уравнений. Основными объектами исследования являются:

– Динамические системы с непрерывным временем, описываемые дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + a(x), \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 1$) и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений.

– Динамические системы с дискретным временем, описываемые уравнением

$$x_{n+1} = Ax_n + a(x_n), \ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 1$) и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точка

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Yumagulov Marat Gayazovich (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Фазлытдинов Марат Флюрович, аспирант, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Главный специалист, Газпромнефть НТЦ (Санкт-Петербург, Россия); Fazlytdinov Marat Flurovich (Bashkir State University, Ufa, Russia; Gazpromneft STC, St. Petersburg, Russia)

равновесия $x = 0$ системы (2) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько собственных значений, равных 1 по модулю.

Ограничимся здесь приведением некоторых результатов относительно задачи построения центрального многообразия для системы (1). Будем считать, что нелинейность в правой части уравнения (1) представима в виде $a(x) = a_2(x) + a_3(x) + \widehat{a}_4(x)$, где $a_2(x)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x)$ – слагаемые третьей степени, а $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Множество σ^0 также состоит из двух частей: $\sigma^0 = \sigma_- \cup \sigma^+$, где множество σ_- содержит собственные значения, вещественные части которых отрицательны, а σ^+ – собственные значения, вещественные части которых положительны. Обозначим через E_0, E_- и E^+ – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ_- и σ^+ ее спектра. Пусть k_0, k_- и k^+ – это размерности подпространств E_0, E_- и E^+; тогда $k_0 + k_- + k^+ = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N - 1$.

Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E_- \bigoplus E^+$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0, E_- и E^+. Положим также $E^0 = E_- \bigoplus E^+$; тогда $R^N = E_0 \bigoplus E^0$. Обозначим, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Теорема о центральном многообразии (см., например, [1]) утверждает, что существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система (1) имеет в шаре $T(0, \delta_0)$ гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, которое в точке $x = 0$ касается подпространства E_0. Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (1). В естественном смысле вся нетривиальная динамика системы (1) в окрестности точки равновесия $x = 0$ сосредоточена на центральном многообразии.

Центральное многообразие W_c системы (1) может быть локально задано равенством

$$W_c = \{x : x = u + \psi(u) \mid u \in E_0\,,\ \psi(u) \in E^0\,,\ \psi(0) = \psi'(0) = 0\}\,,$$

где функция $v = \psi(u)$ является гладкой.

Ограничимся для простоты рассмотрением случая, когда матрица A имеет простое собственное значение 0 и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае существуют собственные векторы e и g матрицы A и транспонированной матрицы A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам $\|e\| = 1\,, (e, g) = 1$. Подпространство E_0 является одномерным; оно содержит вектор e. Операторы проектирования здесь определяются равенствами $P_0 x = (x, g)e\,, P^0 = I - P_0$.

Положим $B_0 = -A + P_0$. По построению оператор $B_0 : R^N \to R^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него. Положим, далее, для краткости: $a_2 = a_2(e)\,, a_3 = a_3(e)\,, a_2' = a_2'(e)$; здесь $a_2'(x)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x)$.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение 0, а вещественные части остальных ее собственных значений не равны нулю. Тогда центральное многообразие W_c системы (1) может быть описано равенством*

$$W_c = \{x : x = \varepsilon e + \varepsilon^2\psi_2 + \varepsilon^3\psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)\},$$

где ε - малый параметр,

$$\psi_2 = B_0^{-1}P^0 a_2\,, \quad \psi_3 = B_0^{-1}P^0[-2(a_2, g)\psi_2 + a_2'\psi_2 + a_3]\,,$$

а функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

ON THE SOLVABILITY OF PERIODIC PROBLEM FOR LOADED PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF FOURTH ORDER

A.T. Assanova, Z.M. Kadirbayeva

assanova@math.kz, apelman86pm@mail.ru

UDC 517.95

A periodic problem for a system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order is considered. By method of introduction additional functions original problem is reduced to equivalent problem, consisting of periodic problem for the system of loaded hyperbolic equations of second order and integral relations. Algorithms for finding solution to equivalent problem are proposed and conditions of their convergence are obtained. Conditions of unique solvability to periodic problem for the system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order are established in the terms of initial data.

Keywords: loaded pseudoparabolic equation of fourth order, periodic problem, loaded hyperbolic equation of second order, algorithm, solvability
MSC: 35G35, 35G40, 35G46, 35L53, 35L55, 35L57

This work is supported by Grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (no. AP 05131220).

Anar T. Assanova, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Zhazira M. Kadirbayeva, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling & International Information Technologies University, Almaty, Kazakhstan

Consider on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ the periodic problem for the system of loaded pseudoparabolic equations of fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = \sum_{i=1}^{3} \Big\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{4-i}} + B_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{3-i} \partial t} \Big\} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{3} \Big\{ K_{i,j}(x) \frac{\partial^{4-i} u(t,x)}{\partial x^{4-i}} + L_{i,j}(x) \frac{\partial^{4-i} u(t,x)}{\partial x^{3-i} \partial t} \Big\} + M_j(x) u(t,x) \Big] \Big|_{t=t_j}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^3 u(0,x)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial x^3}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \psi_0(t), \ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \ u(t,0) = \psi_2(t), \ t \in [0,T], \qquad (3)$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $n \times n$ matrices $K_{i,j}(x)$, $L_{i,j}(x)$, $M_j(x)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,\omega]$, $\quad 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$, the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,2}$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Let $C(\Omega, R^n)$ be the space of continuous vector functions $u : \Omega \to R^n$ on Ω with norm $||u||_0 = \max\limits_{(t,x)\in\Omega} ||u(t,x)||$.

A function $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, having partial derivatives

$\dfrac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial x^i \partial t^j} \in C(\Omega, R^n), \qquad i = \overline{1,3}, \quad j = 0,1,$

is called a *classical solution* to problem (1)–(3) if it satisfies to system of loaded pseudoparabolic equations (1) for all $(t,x) \in \Omega$ and meets the conditions (2) and (3).

Various problems for the different classes of partial differential equations of fourth order are investigated in the works of many authors [1-7].

Introduce a new unknown functions in the following form

$v_1(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad v_2(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad v_3(t,x) = u(t,x).$

Taking into account of second and third conditions in (3), we have

$$v_2(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x v_1(t,\xi)d\xi, \ v_3(t,x) = \psi_2(t) + \psi_1(t)x + \int_0^x \int_0^\xi v_1(t,\xi_1)d\xi_1 d\xi.$$

Then problem (1)–(3) is reduced to a following problem

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_2(t,x)v_1 + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Big\{ K_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} + L_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} + K_{2,j}(x)v_1(t,x) \Big\}\Big|_{t=t_j} +$$

$$+ F_1(t,x,v_2,v_3) + F_2(x,v_2,v_3), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial v_1(0,x)}{\partial t} = \frac{\partial v_1(T,x)}{\partial t}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (5)$$

$$v_1(t,0) = \psi_0(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (6)$$

$$v_s(t,x) = \psi_{s-1}(t) + \sum_{i=1}^{s-2} \psi_{s-1-i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{s-2}}{(s-2)!} v_1(t,\xi)d\xi, \quad s = 2,3, \qquad (7)$$

where $\quad F_1(t,x,v_2,v_3) =$

$$= A_3(t,x)v_2(t,x) + B_2(t,x)\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + B_3(t,x)\frac{\partial v_3(t,x)}{\partial t} + C(t,x)v_3(t,x),$$

$$F_2(x,v_2,v_3) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big\{K_{3,j}(x)v_2(t,x) + L_{2,j}(x)\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + L_{3,j}(x)\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} + M_j(x)v_3(t,x)\Big\}\Big|_{t=t_j}.$$

We also consider an auxiliary system of loaded hyperbolic equations second order

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + A_2(t,x)v_1 +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Big\{K_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} + L_{1,j}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} + K_{2,j}(x)v_1(t,x)\Big\}\Big|_{t=t_j} + g(t,x) \quad (8)$$

with conditions (5) and (6).

Here the function $g(t,x) \in C(\Omega, R^n)$.

The following assertion is true.

Theorem 1. *Let*

1) the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω;

2) the $n \times n$ matrices $K_{i,j}(x)$, $L_{i,j}(x)$, $M_j(x)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,\omega]$;

3) the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,2}$ are continuously differentiable on $[0,T]$;

4) the periodic problem for system of loaded hyperbolic equations second order (8), (5), (6) is uniquely solvable for any $g(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, and $\psi_0(t) \in C^1([0,T], R^n)$.

Then periodic problem for the system of loaded pseudo-parabolic equations of fourth order (1)–(4) has a unique classical solution.

Proof of Theorem 1 is proved analogously of proof Theorem 1 in [8].

A questions of unique solvability, well-posedness to system (8) with conditions (5), (6) and impulse effects are investigated in [9-10]. Conditions of unique solvability to considered problem are established in the terms of initial data.

References

1. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On the Dirichlet problem for fourth order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis, **49** (2002), No. 2 , 197–219.

2. *Midodashvili B.* A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics // Electr. J. of Differential Equations, 2002, No. 85, 1–7.

3. *Midodashvili B.* Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proc. of A. Razmadze Math. Institute, **138** (2005), 43–54.

4. *Kiguradze T.* On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order // Georgian Math. J., **15** (2008), No. 3 , 555–569.

5. *Mamedov I.G.* On correct solvability of a problem with loaded boundary conditions for a fourth order pseudoparabolic equation // Memoires on Differ. Edu. and Math. Phys., **43** (2008), 107–118.

6. *Mamedov I.G.* A fundamential solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation // Comput. Math. and Math. Phys., **49** (2009), No. 1, 93–104.

7. *Ferraioli D.C., Tenenblat K.* Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces // J. Differential Equations, **257** (2014), 3165–3199.

8. *Assanova A.T.* On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // Georgian Math. J., DOI: 10.1515/gmj-2019-2011. Published Online: 02/ 19/ 2019.

9. *Asanova A.T., Kadirbaeva Z.M., Bakirova E.A.* About of an unique solvability of a nonlocal boundary value problem for the loaded systems of hyperbolic equations with impulse effects // Ukrainian Math. J., **69** (2018), No. 8, 1175–1195.

10. *Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M.* Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electr. J. of Differential Equations, 2018, No. 72, 1–8.

AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL PENCILS WITH DELAY

S.A. Buterin, M.A. Malyugina, C.-T. Shieh

buterinsa@info.sgu.ru, margarita.malyugina@tele2.ru, ctshieh@mail.tku.edu.tw

UDC 517.984

We consider a second order functional-differential pencil with delay and study the inverse problem of recovering its coefficients from subspectra of two boundary value problems with one common boundary condition.

Keywords: functional-differential equation, deviating argument, constant delay, inverse spectral problem
MSC: 34A55, 34B07, 34K29

Consider the functional-differential equation

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = (q_0(x) + 2\rho q_1(x))y(x-a), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

where ρ is the spectral parameter and $a \in [\pi/2, \pi)$, while $q_\nu(x) \in W_2^\nu[0,\pi]$ are complex-valued functions and $q_\nu(x) = 0$ on $(0,a)$, $\nu = 0,1$. For simplicity we assume that $\int_a^\pi q_1(x)\,dx = 0$. For $j = 0,1$ let $\{\rho_{n,j}\}$ be the spectrum of the boundary value problem $L_j(q_0,q_1)$ for equation (1) with the boundary conditions

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0. \tag{2}$$

Theorem 1. *For $j = 0,1$ and $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ the following asymptotics holds:*

$$\rho_{n,j} = \rho_{n,j}^0 + \frac{\omega_0}{\pi n}\cos\rho_{n,j}^0 a + (-1)^j \frac{\omega_1}{\pi n}\sin\rho_{n,j}^0 a + \frac{\varkappa_{n,j}}{n}, \quad \omega_j \in \mathbb{C},\ \{\varkappa_{n,j}\} \in l_2,$$

where $\rho_{n,j}^0 = n - \operatorname{sgn}(n) j/2$. Moreover, $\omega_0 = \int_a^\pi q_0(x)\,dx$ and $\omega_1 = q_1(\pi)/2$.

Let $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of natural numbers. Consider the following *inverse problem* (**IP**): Given the subspectra $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1$, find the functions $q_0(x)$, $q_1(x)$.

The classical results in the inverse spectral theory are known for differential operators (see, e.g., the survey in [1]). For example, the inverse problem for the pencils (1), (2) without delay (i.e. when $a = 0$) from the complete spectra was studied in [2]. For functional-differential operators and pencils as well as for other classes of

This work was supported in part by the Russian Ministry of Education and Science (Grant no. 1.1660.2017/4.6) and by RFBR (Grant no. 19-01-00102).

Sergey Buterin, Saratov State University, Saratov, Russia
Margarita Malyugina, Saratov State University, Saratov Russia,
Chung-Tsun Shieh, Tamkang University, Taipei, Taiwan

nonlocal ones the classical methods of the inverse spectral theory usually do not work. For Sturm–Liouville-type operators (i.e. when $q_1(x) \equiv 0$) with delay inverse problems were studied in [3–12]. We note that the case $a \in (0, \pi/2)$ is much more difficult. Some aspects of the inverse problem for $a \in (2\pi/5, \pi/2)$ when $q_1(x) \equiv 0$ were studied in [8–11].

Lemma 1. *Specification of the subspectra* $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$, *uniquely determines the numbers* ω_j, $j = 0, 1$, *by the formula*

$$\begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \pi \sin^{-1} \frac{a}{2} \lim_{k\to\infty} n_k \begin{bmatrix} \sin \rho^0_{-n_k,1} a & \sin \rho^0_{n_k,0} a \\ \cos \rho^0_{-n_k,1} a & -\cos \rho^0_{n_k,0} a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{n_k,0} - \rho^0_{n_k,0} \\ \rho^0_{-n_k,1} - \rho_{-n_k,1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Put $n_0 := 0$, $n_{-k} := -n_k$ for $k \in \mathbb{N}$ and introduce the sequences $\{\theta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$, $j = 0, 1$, where $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ and $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}$, in the following way:

$$\theta_{k,0} = \rho_{n_{k+1},0},\ k \leqslant -2,\ \ \theta_{k,0} = \rho_{n_{k-1},0},\ k \geqslant 3, \qquad \theta_{k,1} = \rho_{n_k,1}, \quad |k| \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$\theta_{-1,0} = \rho_{n_1,0},\ \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 0, \qquad \theta_{0,1} = 0. \tag{5}$$

Without loss of generality we assume that $\theta_{-k,0} \neq \theta_{n,0}$ and $\theta_{-k,1} \neq 0$ for all $n, k \in \mathbb{N}$ and that multiple values in the sequences $\{\theta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$ are neighboring, i.e. $\theta_{k,j} = \theta_{k+1,j} = \ldots \theta_{k+m_{k,j}-1,j}$, where $m_{k,j}$ is the multiplicity of $\theta_{k,j}$.

We also introduce the sets

$$\mathcal{S}_0 = \{k : \theta_{k,0} \neq \theta_{k-1,0}, k \in \mathbb{Z}_0 \setminus \{1\}\} \cup \{1\}, \quad \mathcal{S}_1 = \{k : \theta_{k,1} \neq \theta_{k-1,1}, k \in \mathbb{Z}\}$$

and the systems of vector-functions $\Lambda_j = \{(c_{kj}(x), s_{kj}(x))\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$, $j = 0, 1$, where

$$c_{k+\nu,j}(x) = \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} \cos \rho x \Big|_{\rho=\theta_{k,j}}, \quad s_{k+\nu}(x) = \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} \sin \rho x \Big|_{\rho=\theta_{k,j}}$$

for $k \in \mathcal{S}_j$ and $\nu = \overline{0, m_{k,j} - 1}$.

Lemma 2. *(i) The system* Λ_0 *is complete in* $(L_2(0, b))^2$ *if and only if the system* $\{\cos n_k x\}_{k+1\in\mathbb{N}}$ *is complete in* $L_2(0, b)$.

(ii) The system Λ_1 *is complete in* $(L_2(0, b))^2$ *if and only if the system* $\{\sin(n_k - 1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ *is complete in* $L_2(0, b)$.

(iii) The system Λ_0 *is a Riesz basis in* $(L_2(0, b))^2$ *if and only if so is the system* $\Lambda^0_0 = \{(0, x)\} \cup \{(\cos n_k x, \sin n_k x\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

(iv) The system Λ_1 *is a Riesz basis in* $(L_2(0, b))^2$ *if and only if so is the system* $\Lambda^0_1 = \{(\cos \rho^0_{n_k,1} x, \sin \rho^0_{n_k,1} x\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *where* $\rho^0_{0,1} = 0$.

Theorem 2. *Specification of the subspectra* $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$, *uniquely determines the functions* $q_0(x)$ *and* $q_1(x)$ *if and only if each of the systems* $\{\cos n_k x\}_{k+1\in\mathbb{N}}$ *and* $\{\sin(n_k - 1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ *is complete in* $L_2(0, \pi - a)$.

Corollary 1. *For any fixed* $a \in [\pi/2, \pi)$, *specification of the subspectra* $\{\rho_{2k,j}\}_{|k|\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$, *uniquely determines the functions* $q_0(x)$ *and* $q_1(x)$.

The following theorem gives sufficient conditions for solvability of IP.

Theorem 3. *Fix* $a \in [\pi/2, \pi)$. *Then two arbitrary sequences of complex numbers* $\{\mu_{k,j}\}_{|k|\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$, *are subspectra of some boundary value problems* $L_j(q_0, q_1)$, $j = 0, 1$, *respectively, if the following two conditions are fulfilled:*

(i) There exists an increasing sequence of natural numbers $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *such that*

$$\mu_{k,j} = \rho^0_{n_k,j} + \frac{\omega_0}{\pi n_k} \cos \rho^0_{n_k,j} a + (-1)^j \frac{\omega_1}{\pi n_k} \sin \rho^0_{n_k,j} a + \frac{\varkappa_{k,j}}{n_k}, \quad \{\varkappa_{k,j}\} \in l_2,$$

where $|k| \in \mathbb{N}$, $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{C}$ *and* $n_{-k} = -n_k$ *for* $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Each of the systems Λ_j^0, $j = 0, 1$, *constructed by the sequence* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *from (i), is a Riesz basis in* $(L_2(0, \pi - a))^2$.

Under assumption (ii) of Theorem 3 the solution of the inverse problem can be found by the following algorithm.

Algorithm 1. *Let the subspectra* $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$, *be given. Then:*
1) Find the numbers ω_0 *and* ω_1 *by formula (3);*
2) Construct the sequences $\{\beta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_j} \in l_2$, $j = 0, 1$, *by the formula*

$$\beta_{k+\nu,j} = \Theta_j^{(\nu)}(\theta_{k,j}), \quad k \in \mathcal{S}_j, \quad \nu = \overline{0, m_{k,j} - 1},$$

where the numbers $\theta_{k,j}$ *are determined in (4) and (5), while*

$$\Theta_0(\rho) = -\rho \sin \rho\pi + \omega_0 \cos \rho(\pi - a) - \omega_1 \sin \rho(\pi - a),$$

$$\Theta_1(\rho) = -\rho \cos \rho\pi - \omega_0 \sin \rho(\pi - a) + \omega_1 \cos \rho(\pi - a);$$

3) Find the functions $w_{j\nu}(x) \in L_2(0, \pi - a)$, $j, \nu = 0, 1$, *by the formulae*

$$w_{j0}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_j} \beta_{kj} c_{kj}^*(x), \quad w_{j1}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_j} \beta_{kj} s_{kj}^*(x),$$

where the system $\{(c_{kj}^*(t), s_{kj}^*(t))\}_{k\in\mathbb{Z}_j}$ *is biorthogonal to the Riesz basis* Λ_j;
4) Construct the functions $q_0(x)$ *and* $q_1(x)$ *by the formulae*

$$q_0(x) = 2 \begin{cases} w_{00}(\pi + a - 2x) - w_{11}(\pi + a - 2x), & x \in \left(a, \dfrac{\pi - a}{2}\right), \\ w_{00}(2x - \pi - a) + w_{11}(2x - \pi - a), & x \in \left(\dfrac{\pi - a}{2}, \pi\right), \end{cases}$$

$$q_1(x) = 2\omega_1 - \int_x^\pi u(t)\, dt,$$

$$u(t) = 2 \begin{cases} w_{10}(\pi + a - 2x) + w_{01}(\pi + a - 2x), & x \in \left(a, \dfrac{\pi - a}{2}\right), \\ w_{10}(2x - \pi - a) - w_{01}(2x - \pi - a), & x \in \left(\dfrac{\pi - a}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Analogous results for Sturm–Liouville-type operators with delay were obtained in [12].

References

1. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2002.

2. *Buterin S.A., Yurko V.A.* Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. **20** (2012), 855–881.

3. *Pikula M.* Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra // Mat. Vesnik **43**:3-4 (1991), 159–171.

4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 1999–2004.

5. *Vladičić V., Pikula M.* An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay // Sarajevo J. Math. **12**:1 (2016), 83–88.

6. *Buterin S.A., Pikula M., Yurko V.A.* Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Tamkang J. Math. **48**:1 (2017), 61–71.

7. *Ignatiev* Ignatiev M.Yu. On an inverse Regge problem for the Sturm-Liouville operator with deviating argument // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. **22**:2 (2018), 203–211.

8. *Bondarenko N., Yurko V.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Appl. Math. Lett. **83** (2018), 140–144.

9. *Bondarenko N.P., Yurko V.A.* Partial inverse problems for the Sturm–Liouville equation with deviating argument // Math. Meth. Appl. Sci. **41** (2018), 8350–8354.

10. *Vladičić V., Pikula M., Vojvodić B.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions // Res. Math. **74**:45 (2019).

11. *Yurko V.A.* An inverse spectral problem for second order differential operators with retarded argument // Res. Math. **74**:71 (2019).

12. *Buterin S.A., Yurko V.A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large delay // Anal. Math. Phys. **9**:1 (2019), 17–27.

MICROLOCAL GEOMETRY MAKES GLOBAL STRUCTURES IN POROUS MEDIUM

V.A. Galkin

val-gal@yandex.ru

UDC 531.3,517.958

We consider the problem of connectedness in the metric space which model is "porous medium". The main question is the description of measure for quantity of global connections between two points in the space provided the local distribution of connections in microstructure is given. A porous medium is a network of intergrain channels formed by internally connected intermediate spaces between particles.

Keywords: porous medium, intergrain channels

Mathematically this problem directly connected with behavior of solutions for the conservation laws systems of quasilinear Equations

$$\frac{\partial u_\beta(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \mathrm{R}_n, \quad t > 0, \quad \beta \in C. \tag{1}$$

Here the given typically nonlinear functions $F_j^{(\beta)}$ define the local connectivity in the medium. The analysis of global geometry in "porous medium" is directly related to the structure of singularities of solutions to the Eq. (1). The main description of above is based on so-called functional solutions theory in the algebraically adjoint space to the L_1^{loc} equipped by the Tikhonov topology [1].

Natural examples of above problems are investigated in description of global structures produced by connected pores in matrix of oil-containing sands and similar problems arise in research of materials of nuclear reactors under influence of neutron flow.

Those problems are close to the description of structures in multidimensional billiard game.

The Russian Foundation for Basic Research supported this work (project nos. 16-29-15105, 18-01-00343).

Valeriy Galkin, Scientific Research Institute for System Studies, Federal Research Center, Russian Academy of Sciences (Moscow, Surgut); Tyumen Industrial University (Tyumen)

The description of global structures in the above examples connected with solutions of Smoluchowskii kinetic Equation [2], which is directly leads to the non-local Hopf Equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F - F(0,t)]\,\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad (p > 0,\ t > 0),$$

for density distribution function of global conductivity paths in structure of porous medium.

Directly these phenomena involve processes of cracks growth in the structure of materials due to their mutual intersections (coagulation of growing cracks with the formation of defects, comparable to the size of the engineering objects is the phenomenon of their destruction). This is related to the tasks of destruction dynamics and its prognosis to prevent possible disasters on aerospace devices and pipelines of the first circuit of nuclear power plants during their cyclic freezing-thawing. The latter is especially true for nuclear reactors with heavy metal coolant, where phase transitions are a source of pressure surges on the pipes, generating the development of cracks.

The above phenomenon connected with transition of the conservation relationship into relation of dissipation in Eqs. (1). The great interest is the study of the stationary problem for the size distribution function of pores f, which is written as [2]:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\mu} \Phi(\mu-\mu_1,\mu_1) f(\mu-\mu_1) f(\mu_1)\,d\mu_1 - \\ - f(\mu)\int_0^{\infty} \Phi(\mu,\mu_1) f(\mu_1)\,d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathrm{R}^+, \quad (2)$$

where given a non-negative function $q(\mu)$ defines the intensity, with which pores of size $\mu \geqslant 0$ are introduced into the medium containing growing pores due to their mutual crossings.

Such solutions do not belong to the conservative set of Smoluchowski collision operator (2), and therefore they lie in the set of dissipation. Such problems arise when describing the growth of pores in metals when irradiated by fast neutron flux that during collisions with atoms in crystal lattice provide holes. In this case, neutrons are source of particles (holes). These holes during their thermal movement meet each other and coagulate. Mathematical modelling of jet engines has to take into account coagulation of sticky particles, which arise in the combustion process.

References

1. *Galkin V.A.* Analysis of Mathematical Models: Conservation Law Systems, Smoluchowski and Boltzmann Equations. — Moscow: BINOM, 2009.

2. *Galkin V.A.* Smoluchowski Equation. — Moscow: FIZMATLIT, 2001.

CONFORMAL SPECTRAL ESTIMATES OF THE DIRICHLET-LAPLACIAN

V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, A. Ukhlov

vladimir@math.bgu.ac.il, vpchelintsev@vtomske.ru, ukhlov@math.bgu.ac.il

UDC 517.984

We study spectral estimates of the Dirichlet-Laplacian in bounded planar domains and obtain spectral gap estimates in terms of the conformal (hyperbolic) geometry.

Keywords: Dirichlet-Laplacian, spectral gap, conformal mappings
MSC: 35P15, 30C65

This note is dedicated to estimates of the eigenvalues of the Dirichlet-Laplacian

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ (x,y) \in \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$$

in terms of the conformal geometry of $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

By Riemann's mapping theorem there exists a conformal mapping $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ of a simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, onto the unit disc $\mathbb{D}$. Recall that Ω is called a conformal α-regular domain if φ' belongs to the Lebesgue space $L^\alpha(\mathbb{D})$, for some $\alpha > 2$ [1]. This definition does not depend on choice of a conformal mapping $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ and can be reformulated in terms of the hyperbolic metrics [1]. A class of conformal regular domains includes Lipschitz domains and also some fractal domains like snowflakes.

Our machinery is based on the spectral stability estimates of the Dirichlet-Laplace operator [1] and the geometric theory of composition operators on Sobolev spaces [3]. On this way we obtain asymptotically sharp lower estimates of the spectral gap between the first two Dirichlet eigenvalues in conformal α-regular domains [2].

Introduce the notations:

$$\gamma_\alpha = \inf_{p \in \left(\frac{4\alpha}{3\alpha-2}, 2\right)} \left(\frac{p-1}{2-p}\right)^{\frac{2(p-1)}{p}} \frac{\pi^{-\frac{\alpha+2}{2\alpha}} 4^{-\frac{1}{p}}}{\Gamma(2/p)\Gamma(3-2/p)},$$

$$V^0_\alpha(\Omega, \widetilde{\Omega}) = \inf_{\varphi, \widetilde{\varphi}} \left[\left(\|\varphi' \mid L^\alpha(\mathbb{D})\| + \|\widetilde{\varphi}' \mid L^\alpha(\mathbb{D})\|\right) \|\varphi' - \widetilde{\varphi}' \mid L^2(\mathbb{D})\|\right],$$

where the infimum is taken over all conformal mappings $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ and $\widetilde{\varphi} : \mathbb{D} \to \widetilde{\Omega}$. The quantity $V^0_\alpha(\Omega, \widetilde{\Omega})$ measures a "distance" between Ω and $\widetilde{\Omega}$ in terms of L^2-norms of conformal homeomorphisms.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a conformal α-regular domain of area π. Then the spectral gap for Dirichlet-Laplacian satisfies*

$$\lambda_2(\Omega) - \lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_2(\mathbb{D}) - \lambda_1(\mathbb{D}) - (\lambda_*^2 + 1)\lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V^0_\alpha(\mathbb{D}, \Omega),$$

where $\lambda_* \approx 2.539$ and $\mathbb{D}_\rho$ is the largest disc inscribed in Ω.

This work is supported by the United States-Israel Binational Science Foundation (BSF Grant no. 2014055) and RFBR (no. 18-31-00011).

Vladimir Gol'dshtein, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel

Valerii Pchelintsev, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel; Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

Alexander Ukhlov, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel

Also we obtain asymptotically sharp lower estimates of the Payne-Pólya-Weinberger ratio of eigenvalues of the Dirichlet-Laplace operator in conformal α-regular domains [2].

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a conformal α-regular domain of area π. Then the ratio of the first two eigenvalues of the Dirichlet-Laplacian satisfies*

$$\frac{\lambda_2(\Omega)}{\lambda_1(\Omega)} \geqslant \frac{\lambda_2(\mathbb{D}) - \lambda_*^2 \lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V_\alpha^0(\mathbb{D},\Omega)}{\lambda_1(\mathbb{D}) + \lambda_1^2(\mathbb{D}_\rho)\gamma_\alpha V_\alpha^0(\mathbb{D},\Omega)},$$

where $\lambda_* = \frac{\lambda_2(\mathbb{D})}{\lambda_1(\mathbb{D})} \approx 2.539$ and $\mathbb{D}_\rho$ is the largest disc inscribed in Ω.

References

1. *Burenkov V.I., Gol'dshtein V., Ukhlov A.* Conformal spectral stability for the Dirichlet-Laplace operator // Math. Nachr., **288** (2015), 1822-1833.

2. *Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A.* On conformal spectral gap estimates of the Dirichlet-Laplacian // Algebra i Analiz, **31**:2 (2019), 189-203.

3. *Ukhlov A.* On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces // Siberian Math. J., **34**:1 (1993), 185-192.

ON STABILIZATION PROBLEM FOR A LOADED HEAT EQUATION: THE TWO-DIMENSIONAL CASE

K. Imanberdiyev, A. Kassymbekova

kanzharbek75ikb@gmail.com, kasar08@mail.ru

UDC 517.95

The problem of stabilization (of forming a cylinder) of a solution of boundary value problem for heat equation with the loaded two-dimensional Laplace operator is considered. An algorithm is proposed for approximate construction of boundary controls providing the required stabilization of the solution. The work continues the research of the authors carried out earlier for the loaded one-dimensional heat equation.

Keywords: loaded Laplace equation, heat equation, boundary value problems, spectrum, eigenfunction
MSC: 35K05, 39B82, 47A75

This work is supported by Ministry of Science and Education of the RK (no. AP05130928).

Kanzharbek Imanberdiyev, Al-Farabi Kazakh National University, Institute Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Arnay Kassymbekova, Al-Farabi Kazakh National University, Institute Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

The idea of reducing the stabilization problem for a parabolic equation by means of boundary controls to the solution of an auxiliary boundary value problem (BVP) in the extended domain of independent variables belongs to A.V. Fursikov [1]. At the same time, recently, the so-called loaded differential equations [2], [3] are actively used in problems of mathematical modeling and control of nonlocal dynamical systems. In this paper, we investigate stabilization problems for the loaded two-dimensional thermal conductivity equation.

Statement of the problem. Let $\Omega = \{x, y : -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ be a domain with a boundary $\partial\Omega$. In the cylinder $Q = \Omega \times \{t > 0\}$ with lateral surface $\Sigma = \partial\Omega \times \{t > 0\}$ we consider the BVP for the loaded heat equation

$$u_t - \Delta u + \alpha u(0, y, t) + \beta u(x, 0, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),\ \{x, y\} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, y, t) = p(x, y, t),\ \{x, y, t\} \in \Sigma, \tag{3}$$

where $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ are given (in general case are complex) constants, $u_0(x, y)$ is given function. The aim is to find a function $p(x, y, t)$ such that a solution of the BVP (1)–(3) satisfies the inequality

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_0 e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t > 0. \tag{4}$$

Note that here σ is a given constant and C_0 is an arbitrary bounded constant.

Auxiliary BVP. Let $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x, y < \pi\}$ and $Q_1 = \Omega_1 \times \{t > 0\}$.

$$z_t - \Delta z + \alpha z(0, y, t) + \beta z(x, 0, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q_1, \tag{5}$$

$$z(x, y, 0) = z_0(x, y),\ \{x, y\} \in \Omega_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(-\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}},\ \{y, t\} \in (-\pi, \pi) \times \{t > 0\},$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(x, -\pi, t)}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(x, \pi, t)}{\partial y^{(j)}},\ \{x, t\} \in (-\pi, \pi) \times \{t > 0\},\ j = 0, 1. \tag{7}$$

The problem is to find an initial function $z_0(x, y)$ such that a solution of the BVP (5)–(7) satisfies the inequality

$$\|z(x, y, t)\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant C_0 e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t > 0. \tag{8}$$

We recall, as we indicated above, that here σ is a given constant and C_0 is an arbitrary bounded constant.

Spectral problem for the loaded twodimensional Laplace operator. Let us search a solution of the problem (5)–(7) in the form

$$z(x, y, t) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} Z_{kl}(t) \psi_{kl}(x, y), \tag{9}$$

where $\{\psi_{kl}(x, y), k, l \in \mathbb{Z}\}$ is a biorthogonal basis of the space $L_2(\Omega_1)$ and $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. The following two spectral problems are considered for the construction of the biorthogonal basis $\{\psi_{kl}(x, y), k, l \in \mathbb{Z}\}$ in the domain $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi\}$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x, y) + \alpha\varphi(0, y) = \lambda\varphi(x, y), \\ \dfrac{\partial^j \varphi(-\pi, y)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^j \varphi(\pi, y)}{\partial x^j},\ \dfrac{\partial^j \varphi(x, -\pi)}{\partial y^j} = \dfrac{\partial^j \varphi(x, \pi)}{\partial y^j}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x,y)+\alpha\varphi(0,y)+\beta\varphi(x,0)=\lambda\varphi(x,y), \\ \dfrac{\partial^j\varphi(-\pi,y)}{\partial x^j}=\dfrac{\partial^j\varphi(\pi,y)}{\partial x^j},\ \dfrac{\partial^j\varphi(x,-\pi)}{\partial y^j}=\dfrac{\partial^j\varphi(x,\pi)}{\partial y^j}, \end{cases} \tag{11}$$

where $j=0,1$, Δ is the Laplace operator, α, $\beta\in\mathbb{C}$ are given complex numbers, $\lambda\in\mathbb{C}$ is a spectral parameter. The following propositions are valid.

Theorem 1. *(a). Let $\forall\, l\in\mathbb{Z}:\ \alpha\neq l^2$. Then a system of eigenfunctions and eigenvalues of the problem (10) is defined in the form:*

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)e^{iky},\ \lambda_{kl}=l^2+k^2,\ l\in\mathbb{Z}'\equiv\mathbb{Z}\backslash\{0\};$$

$$\varphi_{k0}(x,y)=e^{iky},\ \lambda_{k0}=\alpha+k^2\ (l=0),\ k\in\mathbb{Z}\Big\}. \tag{12}$$

(b). Let $\exists\, l_0\in\mathbb{Z}:\ \alpha=l_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with $\sim$) and eigenvalues of the problem (10) is defined in the form:

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)e^{iky},\ \lambda_{kl}=l^2+k^2,\ l\in\mathbb{Z}_1'\equiv\mathbb{Z}'\backslash\{\pm l_0\};$$

$$\varphi_{kl_0}(x,y)=e^{iky},\ \tilde\varphi^{\pm}_{kl_0}(x,y)=e^{\pm il_0x+iky},\ \lambda_{kl_0}=\alpha+k^2\ (\alpha=l_0^2),\ k\in\mathbb{Z}\Big\}. \tag{13}$$

Theorem 2. *(a). Let $\forall\, k,\, l\in\mathbb{Z}:\ \beta\neq k^2,\ \alpha\neq l^2$. Then a system of eigenfunctions and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form:*

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),$$

$$\lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k,\ l\in\mathbb{Z}';\ e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \lambda_{0l}=\beta+l^2,\ l\in\mathbb{Z}';$$

$$e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta},\ \lambda_{k0}=k^2+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}';\ 1,\ \lambda_{00}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{14}$$

(b). Let $\forall\, k\in\mathbb{Z}:\ \beta\neq k^2$ and $\exists l_0\in\mathbb{Z}:\ \alpha=l_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with $\sim$) and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form (where $\mathbb{Z}_1'=\mathbb{Z}'\backslash\{\pm l_0\}$):

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k\in\mathbb{Z}',\ l\in\mathbb{Z}_1';$$

$$\varphi_{kl_0}(x,y)=e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta},\ \tilde\varphi^{\pm}_{kl_0}(x,y)=e^{\pm il_0x}\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl_0}=k^2+\alpha,$$

$$\alpha=l_0^2,\ k\in\mathbb{Z}';\ \varphi_{0l_0}(x,y)=1,\ \tilde\varphi^{\pm}_{0l_0}(x,y)=e^{\pm il_0x},\ \lambda_{0l_0}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{15}$$

(c). Let $\forall\, l\in\mathbb{Z}:\ \alpha\neq l^2$ and $\exists\, k_0\in\mathbb{Z}:\ \beta=k_0^2$. Then a system of eigenfunctions, associated (marked with $\sim$) functions and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form (where $\mathbb{Z}_2'=\mathbb{Z}'\backslash\{\pm k_0\}$):

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y)=\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky}+\frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl}=k^2+l^2,\ k\in\mathbb{Z}_2',\ l\in\mathbb{Z}';$$

$$\varphi_{k_0l}(x,y)=e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \tilde\varphi^{\pm}_{k_0l}(x,y)=e^{\pm ik_0y}\Big(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big),\ \lambda_{k_0l}=\beta+l^2,$$

$$\beta=k_0^2,\ l\in\mathbb{Z}';\ \varphi_{k_00}(x,y)=1,\ \tilde\varphi_{k_00}(x,y)=e^{\pm ik_0y},\ \lambda_{k_00}=\alpha+\beta\Big\}. \tag{16}$$

(d). Let $\exists\ k_0,\ l_0 \in \mathbb{Z}:\ \beta = k_0^2,\ \alpha = l_0^2$. *Then a system of eigenfunctions, associated functions (marked with* $\sim$*) and eigenvalues for the problem (11) is defined in the form:*

$$\Big\{\varphi_{kl}(x,y) = \Big(e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big)\Big(e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \lambda_{kl} = k^2 + l^2,\ k \in \mathbb{Z}_2',\ l \in \mathbb{Z}_1';$$

$$\varphi_{k_0 l}(x,y) = e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha},\ \tilde{\varphi}^{\pm}_{k_0 l}(x,y) = e^{\pm ik_0 y}\Big(e^{ilx} + \frac{\alpha}{l^2-\alpha}\Big),\ \lambda_{k_0 l} = \beta + l^2,$$

$$\beta = k_0^2,\ l \in \mathbb{Z}_1';\ \varphi_{kl_0}(x,y) = e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta},\ \alpha + k^2,\ k \in \mathbb{Z}_2';\ \varphi_{k_0 l_0}(x,y) = 1,$$

$$\tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm ik_0 y},\ \lambda_{k_0 l_0} = \alpha + \beta;\ \tilde{\varphi}_{kl_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x}\Big(e^{iky} + \frac{\beta}{k^2-\beta}\Big),\ \alpha + k^2,$$

$$k \in \mathbb{Z}_2';\ \tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x},\ \tilde{\varphi}_{k_0 l_0}(x,y) = e^{\pm il_0 x \pm ik_0 y},\ \lambda_{k_0 l_0} = \alpha + \beta\Big\}. \qquad (17)$$

References

1. *Fursikov A.V.* Stabilizability a quasilinear parabolic equation by using the boundary control with feedback // Mathematicheskii sbornik, **192**, no. 4 (2001), 115–160 (in Russian).

2. *Amangaliyeva M., Jenaliyev M., Imanberdiyev K., Ramazanov M.* On spectral problems for loaded two-dimension Laplace operator // AIP Conference Proceedings, **1759** (2016), 020049. https://doi.org/10.1063/1.4959663.

3. *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* Stabilization of solutions of loaded on zero-dimensional manifolds heat equation with using boundary controls // Mathematical journal, **15**, no. 4 (2015), 33–53 (in Russian).

ON PROJECTOR APPROACH TO CONSTRUCTING ASYMPTOTIC SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEMS FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS IN CRITICAL CASE

G. Kurina

kurina@math.vsu.ru

UDC 517.928.4

The algorithm by A.B. Vasil'eva and V.F. Butuzov (Differ. Uravn. 1970, 6(4), 650-664 (in Russian)) for constructing asymptotic solution of the initial value problem for weakly non-linear differential equation with a small parameter standing before the derivative in the case of a singular matrix $A(t)$ standing in front of the unknown function is formulate here with the help of the orthogonal projectors onto $kerA(t)$ and $kerA(t)'$ (the prime denotes the transposition). Such approach essentially simplifies understanding the algorithm of the asymptotics construction.

Keywords: singular perturbations, critical case, projector approach
MSC: 34E15

This work is supported by the Russian Science Foundation (no. 17-11-01220).

Galina Kurina, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

An asymptotic solution, containing boundary functions, for the initial value problem for weakly non-linear differential equation in a real m-dimensional space

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

where $x = x(t,\varepsilon) \in X$, the matrix $A(t)$ is singular, and for its discrete analogue has been constructed in [1]. The results from this paper are also presented in [2] and [3]. In these publications, the cause of studying equations of the last form is also explained.

Here and further $\varepsilon \geqslant 0$ means a small parameter and the $m \times m$ matrix $A(t)$ and the m-dimensional vector-functions $f(x,t,\varepsilon)$ are sufficiently smooth with respect to their arguments.

In contrast [1], we use the projector approach for constructing asymptotic solution of problem (1),(2). It allows us to represent the algorithm of boundary functions method for constructing asymptotic solution of initial value singularly perturbed problems in a critical case more clearly than in [1].

Note that the projector approach has been used in [4] for constructing the zero order asymptotic solution for a singularly perturbed linear-quadratic control problem in the critical case.

We will assume the same assumptions as in [1] that the matrix $A(t)$ has for each $t \in [0,T]$ m eigenvalues $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_m(t)$ and they satisfy the conditions

1. $\lambda_j(t) = 0$ for $j = 1,2,...,k$, $k < m$.

2. All k eigenvectors $v_1(t), v_2(t), ..., v_k(t)$ of the matrix $A(t)$, corresponding to $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1,2,...,k$, are linearly independent.

We will use here eigenvectors having the same smoothness as the matrix $A(t)$.

Following to [1], we will seek for the asymptotic solution of problem (1), (2) in the form

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

where $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j\overline{x}_j(t)$ is a so-called regular series, $\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j\Pi_j x(\tau)$ is a so-called boundary series, $\tau = t/\varepsilon$. Functions $\Pi_j x(\tau)$ are boundary functions in the vicinity of $t = 0$. They will be find as in [1] with the help of the additional condition $\Pi_j x(\tau) \to 0$ as $\tau \to +\infty$.

Further we will use the decompositions of the space X into the orthogonal sums

$$X = kerA(t) \oplus imA(t)' = kerA(t)' \oplus imA(t).$$

The prime denotes the transposition. Orthogonal projectors $P(t)$ and $Q(t)$ of the space X onto the subspaces $kerA(t)$ and $kerA(t)'$, respectively, corresponding to the decompositions of the space X into two last orthogonal sums, will be applied.

The following two conditions are yet assumed.

3. For each $t \in [0,T]$ the operator $(I - P(t))A(t)(I - P(t)) : imA(t)' \to imA(t)'$ is stable, i. e. all eigen values of this operator have negative real parts.

By I, as usually, we mean the identity operator.

4.The initial value problem

$$\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t)(-\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t)+$$

$$+f(P(t)\overline{x}_0(t),t,0)) + (I - P(t))\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t),$$

$$P(0)\overline{x}_0(0) = P(0)(x^0 - \Pi_0 x(0))$$

has a unique solution on the segment $[0,T]$.

Substituting expansion (3) into (1),(2) and equating terms of the same order of ε, separately depending on t and τ, we get as in [1] equalities for terms of series (3). Decomposing them with the help of the orthogonal projectors $P(t)$ and $Q(t)$ we obtain the next assertion.

Theorem 1. *Under assumptions 1-4 the asymptotic solution of problem (1),(2) in form (3) can be constructed with the help of orthogonal projectors onto $kerA(t)$ and $kerA(t)'$. The order of finding asymptotics terms is following:* $(I - P(t))\overline{x}_j(t)$, $(I - P(0))\Pi_j x(\tau)$, $P(0)\Pi_j x(\tau)$, $P(t)\overline{x}_j(t)$, $j \geqslant 0$.

In particular, for finding the zero order approximation we have the following relations $(I - P(t))\overline{x}_0(t) = 0$, $\frac{d(I-P(0))\Pi_0 x(\tau)}{d\tau} = (I - P(0))A(0)(I - P(0))\Pi_0 x(\tau)$, $(I-P(0))\Pi_0 x(0) = (I-P(0))x^0$, $P(0)\Pi_0 x(\tau) = -\int_\tau^{+\infty} P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_0 x(s)\,ds$. The function $P(t)\overline{x}_0(t)$ is determined with the help of equalities from condition 4.

References

1. *Butuzov V.F., Vasil'eva A.B.* Differential and difference systems of equations with a small parameter in the case when the unperturbed (degenerate) system is situated on the spectrum // Differ. Uravn., **6**(4) (1970), 650–664 (in Russian).

2. *Vasil'eva A.B, Butuzov V.F.* Singularly Perturbed Equations in Critical Cases. — Moscow: Moscow Univ., 1978 (in Russian).

3. *Vasil'eva A.B, Butuzov V.F, Kalachev L.V.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. — SIAM: Philadelphia, 1995.

4. *Kurina G.A., Hoai N.T.* Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. Int Conf Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). **1**997 (2018), 020073-1–020073-7 (430–436).

THE PERIODIC SOLUTIONS WITH AN INTERIOR LAYER OF BURGERS TYPE EQUATIONS WITH MODULAR ADVECTION: ASYMPTOTIC APPROXIMATION AND ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SOME INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS

N. Nefedov

nefedov@phys.msu.ru

UDC 517.9

We consider a new class of singularly perturbed parabolic periodic boundary value problems for reaction-advection-diffusion equations: Burgers type equations with modular advection. We construct the interior layer type formal asymptotics and prove the existence of a periodic solution with an interior layer. The accuracy of its asymptotics and asymptotic stability of this solution is also established.

Keywords: singularly perturbed parabolic periodic problems, Burgers type equations, exponential asymptotic stability, lower and upper solutions
MSC: 35K20.

This work is supported by Russian Science Foundation [grant number 18-11-00042].

Nikolay Nefedov, Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Currently, there is a growing interest in the reaction-diffusion-advection equations with the so-called modular nonlinearity or modular advection. This is due to interesting applications of such mathematical models. The details of derivation of Burgers equation with modular nonlinearity one can find in [1]. Such problems are typical for numerous applications of nonlinear wave theory where they describes modular waves propagating in a non-dispersive medium (see [2], [1], [3] and references therein). The present work extends these models to a new class of mathematical and applied problems and provide rigorous mathematical results in the study of such problems. We consider the singularly perturbed periodic boundary value problem

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial |u|}{\partial x}-B(u,x,t)=0$$

$$\begin{gathered}\text{for}\quad (x,t)\in\mathcal{D}:=\{(x,t)\in R^2:-1<x<1, t\in R\},\\ u(-1,t,\varepsilon)=u^{(-)}(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=u^{(+)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R,\\ u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon)\quad\text{for}\quad t\in R,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\end{gathered}\tag{1}$$

where ε is a small parameter. The functions B, $u^{(-)}$ and $u^{(+)}$ are sufficiently smooth and T-periodic in t. The equation in (1) has so-called modular nonlinearity or modular advection.

Define the domains $D_T := (t,x)\in(R]\times(-1;1)$, $D_T^{(-)} := (t,x)\in(R]\times(-1;x^*)$, $D_T^{(+)} := (t,x)\in(R]\times(x^*;1)$, where $x^*=x^*(t)$ is a T-periodic function, $-1<x^*(t)<1$, $t\in R$.

Definitin.
The periodic function $u(x,t,\varepsilon)\in C\left(\overline{D}_T\right)\cap C^1(D_T)\cap C^{1,2}\left(D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)}\right)$ is called a solution to the problem for (1), if it satisfies the equation (1) in each of the $D_T^{(\mp)}$, as well as the boundary conditions.

We assume

(A_0). *B, $u^{(-)}$ and $u^{(+)}$ are sufficiently smooth and T-periodic in t. Suppose also that $u^{(-)}(t)<0,\quad u^{(+)}(t)>0\quad$ for $\quad t\in R$.*

If we put $\varepsilon=0$ in equation (1) we get the so-called degenerate equation

$$\frac{\partial |u|}{\partial x}+B(u,x,t)=0,\tag{2}$$

where t has to be considered as a parameter. Equation (2) is studied with one of the following initial conditions from problem (1)

$$u(-1,t)=u^{(-)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R,\tag{3}$$

$$u(1,t)=u^{(+)}(t)\quad\text{for}\quad t\in R.\tag{4}$$

Concerning these initial value problems we assume

(A_1). *The problems (2), (3) and (2), (4) have the solutions $u=\varphi^{(-)}(x,t)$ and $u=\varphi^{(+)}(x,t)$, respectively, which are defined for $(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}$, are T-periodic in t and satisfy*

$$\varphi^{(-)}(x,t)<0<\varphi^{(+)}(x,t)\quad\text{for}\quad (x,t)\in\overline{\mathcal{D}}.$$

To formulate the next assumptions we introduce the function $I(x,t)$ by

$$I(x,t):=\varphi^{(-)}(x,t)+\varphi^{(+)}(x,t),$$

and suppose

(A_2). *The equation $I(x,t)=0$ has a smooth solution $x=x_0(t)$ which is T-periodic and obeys the conditions $-1<x_0(t)<1\quad$ for $\quad t\in R$.*

(A_3). *The function $x_0(t)$) satisfies the condition*

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x_0(t),t) < 0 \quad for \quad t \in R,$$

that is, $x_0(t)$ is a simple root of the equation $I(x,t) = 0$ for all $t \in R$.

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *Let the assumptions (A_0)–(A_3) be satisfied. Then, for sufficiently small ε, there exists a solution $u(x,t,\epsilon)$ of problem (1) such that for any small but fixed δ we have the limit relation*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x,t) & for \quad x \in [0, x_0(t) - \delta],\ t \in R, \\ \varphi^{(+)}(x,t) & for \quad x \in [x_0(t) + \delta, 1],\ t \in R. \end{cases}$$

We can give a more precise description of the solution with an interior layer by using proposed asymptotic approximation construction.

The constructed asymptotic can be used to get asymptotic solution of some inverse coefficient problems. In particular, we illustrate our approach by considering the problem (1) for the reaction term $B(u,x,t) = q(x)f(t)$ for some natural data of observations and a priori information.

References

1. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // Nonlinear Dyn., **90** (2017), 2083-2091.

2. *Nefedov N.N., Rudenko O.V.* On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // Dokl. Math., **97** (2018), 99-103.

3. *Rudenko O.V.* Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic and quadratically cubic nonlinearities// Dokl. Math., **94** (2016), 703-707.

SPECTRAL PROBLEMS FOR ELLIPTIC OPERATORS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

V.S. Serov

vserov@cc.oulu.fi

UDC 517.518

Some classical (spectral direct and spectral inverse) problems for elliptic differential operator with singular coefficients are considered. The Green's function approach and the estimates for the normalised eigenfunctions played the crucial role in this work.

Keywords: elliptic operators, spectral expansions, inverse spectral problem

Valery S. Serov (University of Oulu, Oulu, Finland)

This work deals with the spectral problems (direct and inverse) for elliptic differential operators with singular coefficients. We consider on the smooth bounded domain $\Omega \subset R^n, n \geqslant 1$, the differential operators of order $2m$

$$H_{2m}(x,\partial) := (-\Delta)^m + \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\partial^\beta),$$

where $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$, $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\alpha\beta}} \in L^p(\Omega)$ with

$$\begin{cases} & & p = \frac{n}{2m-|\alpha|-|\beta|}, & |\beta| > m - \frac{n}{2}, \\ & p = \frac{2n}{2m-2|\alpha|+n}, & |\alpha| > m - \frac{n}{2}, & |\beta| < m - \frac{n}{2}, \\ p > \frac{2n}{2m-2|\alpha|+n}, & |\alpha| = m - \frac{n}{2}, & |\beta| < m - \frac{n}{2} \quad or & |\beta| = m - \frac{n}{2}, \\ & & p = 1, & |\alpha| < m - \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Under these (quite weak) conditions for the coefficients of H_{2m} the Gårding's inequality is proved

$$(H_{2m}u, u)_{L^2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{W_2^m(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

where $0 < c_1 < 1, c_2 > 0$. It implies the existence of the Friedrichs self-adjoint extension with pure discrete spectrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ and corresponding normalized eigenfunctions $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ which form the o.n.b in $L^2(\Omega)$.

Assuming some additional conditions for the coefficients of H_{2m}, namely $a_{\alpha\beta} \in W_p^{|\alpha|}(\Omega)$ with $(|\alpha| \geqslant |\beta|)$

$$\begin{cases} p = \frac{n}{2m-|\beta|}, & |\beta| > 2m - \frac{n}{2}, \\ p > 2, & |\beta| = 2m - \frac{n}{2}, \\ p = 2, & |\alpha| < 2m - \frac{n}{2}, \end{cases}$$

the following result holds

Theorem 1. *Suppose that the coefficients of H_{2m} satisfy all above mentioned conditions. Then for any function $f \in W^{2m}_{2,0}(\Omega)$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f(x) - \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)} = 0.$$

In particular, if $4m > n$ then

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x) = f(x)$$

holds uniformly in x up to the boundary of Ω.

The classical estimates of the Green's function allows to obtain the following classical (but for operators with singular coefficients) result.

Theorem 2. *Suppose that the coefficients $a_{\alpha\beta}(x)$ of H_{2m} satisfy the conditions $(|\alpha| \geqslant |\beta|)$*

$$a_{\alpha\beta}(x) \in W_p^{|\alpha|}(\Omega), \quad n < p \leqslant \infty, \quad |\beta| \geqslant 1,$$

$$a_\alpha(x) \in W_q^{|\alpha|}(\Omega), \quad \frac{n}{2m} < q \leqslant \infty, \quad 2m \leqslant n; \quad p = 1, \quad 2m > n.$$

Then for any function $f \in W^s_{2,0}(\Omega)$, $s > \frac{n}{2}$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k\phi_k(x) = f(x)$$

holds uniformly in x up to the boundary of Ω.

Let H_2 be an operator on the finite interval (a,b) of the form

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + (q(x) - \overline{p'(x)})$$

where $q \in L^2(a,b)$ is real, $p \in L^r(a,b), p' \in L^2(a,b), 1 < r \leqslant \infty$, is complex. Then for any function $f \in W^s_{2,0}(a,b)$ with $s > \frac{1}{2}$ its Fourier series in eigenfunctions of the Dirichlet problem converges uniformly and absolutely on $[a,b]$.

Another part of this work concerns to the inverse spectral problems for H_4 and H_2 from above. Such problems can be formulated as follows: (1) do the Dirichlet-to-Neumann map for H_4 and H_2 uniquely determine the coefficients of these operators? (2) do the Dirichlet eigenvalues and the derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary of these operators uniquely determine their coefficients? It turned out that these two problems are very connected to each other. The first result is: the knowledge of the Dirichlet eigenvalues and the derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary up to some order uniquely determine the Dirichlet-to-Neumann map corresponding to these operators. The second result is: the knowledge of the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determine the coefficients of H_4 and H_2. These results state an analogue of the Borg-Levinson theorem for the Schrödinger and for the magnetic Schrödinger operators. Rewriting H_4 in the equivalent form as $(n \geqslant 2)$

$$H_4 = \Delta^2 + i\nabla(\nabla(A\nabla)) + i\nabla(A\Delta) - \nabla(F\nabla) - 2iG\nabla - i\nabla G + V$$

with vector-valued functions A and G, and with scalar functions F and V, we assume now that all these coefficients are real-valued and satisfy the following quite general conditions:

$$A(x) \in W^3_p(\Omega), \quad F(x) \in W^2_p(\Omega), \quad G(x) \in W^1_p(\Omega),$$
$$V(x) \in L_p(\Omega), \quad p > \frac{n}{2}, \quad n \geqslant 2$$

with the same value of p.

The Dirichlet-to-Neumann map Λ_λ, which is defined as

$$\Lambda_\lambda\{f_0, f_1\}(x) := \{\partial_\nu(\Delta u)(x), -\Delta u(x)\}, \quad x \in \partial\Omega,$$

plays the crucial role in our considerations.

Theorem 3. *Under the conditions for the coefficients and under the following conditions: for each $k = 1, 2, \ldots$ and for $x \in \partial\Omega$*

$$\lambda_k(A_1, F_1, G_1, V_1) = \lambda_k(F_2, G_2, V_2),$$

$$\partial_\nu(A_1\nabla\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1)) = \partial_\nu(A_2\nabla\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2)),$$
$$\Delta\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1) = \Delta\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2).$$
$$\partial_\nu\Delta\phi_k(x; A_1, F_1, G_1, V_1) = \partial_\nu\Delta\phi_k(x; A_2, F_2, G_2, V_2)$$

we have that for all λ big enough

$$\Lambda^{(1)}_\lambda\{f_0, f_1\} = \Lambda^{(2)}_\lambda\{f_0, f_1\}.$$

The next theorem states the main result of the inverse spectral problem for operator H_4.

Theorem 4. *If $A_j = 0$, $F_j \in W^2_\infty(\Omega)$, $G_j \in W^1_\infty(\Omega)$ and $V_j \in L^\infty(\Omega)$, and for each $k = 1, 2, \ldots$ and $x \in \partial\Omega$*

$$\lambda_k(F_1, G_1, V_1) = \lambda_k(F_2, G_2, V_2),$$

$$\Delta\phi_k(x; F_1, G_1, V_1) = \Delta\phi_k(x; F_2, G_2, V_2),$$
$$\partial_\nu\Delta\phi_k(x; F_1, G_1, V_1) = \partial_\nu\Delta\phi_k(x; F_2, G_2, V_2),$$

then

$$F_1(x) = F_2(x), \quad G_1(x) = G_2(x), \quad V_1(x) = V_2(x)$$

a.e. in Ω.

References

1. *Serov V.S.* Borg-Levinson theorem for magnetic Schrödinger operator // Bull. Greek Math. Soc., **57** (2010), 321-332.

2. *Serov V.S.* Borg-Levinson theorem for perturbations of the biharmonic operator // Inverse Problems, **32** (2016), 045002 (19 PP).

3. *Serov V.S.* On some inverse spectral problems for an arbitrary perturbation of the biharmonic operator with singular coefficients //Programnye produkty i sistemy (Software & Systems), **106**:2 (2014), 192-198.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATION FOR SOLUTIONS OF ILL- POSED PROBLEMS

A.G. Yagola

yagola@mail.physics.msu.ru

UDC 519.6

We will describe three approaches for constructing error estimates for solutions of ill-posed problems and also their practical applications.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, error estimation
MSC: 97N40, 45Q05

In order to calculate a priori or a posteriori error estimates for solutions of an ill-posed operator equation with an injective operator we need to describe a set of approximate solutions that contains an exact solution. After that we have to calculate a diameter of this set or maximal distance from a fixed approximate solution to any element of this set.

We will describe three approaches for constructing error estimates and also their practical applications.

1) Error estimates for quasisolutions on a given compact set [1, 2]. This method can be generalized for inverse problems on Banach lattices [3].

2) A posteriori error estimates in the method of extending compacts [2, 4]. This method can be generalized for nonlinear ill-posed problems [5]. Using the Lagrange principle optimal a posteriori error estimates can be constructed [6, 7].

3) Extra-optimal regularizing algorithms proposed by A.S. Leonov [8].

References

1. *Yagola A., Titarenko V.* Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // Inverse Probl. in Sci. and Eng., **15** (2007), 3–17.

This work is supported by RFBR (no. 17-01-00159).

Anatoly Yagola, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

2. *Titarenko V., Yagola A.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // J. Inverse Ill-Posed Probl., **16** (2008), 625–638.

3. *Korolev Y., Yagola A.* Making use of a partial order in solving inverse problems // inv. Probl., **29** (2013), doi:10.1088/0266-5611/29/9/095012.

4. *Dorofeev K.Y., Titarenko V.N., Yagola A.G.* Algorithms for constructing a posteriori errors of solutions to ill-posed problems // Comp. Math. Math. Phys., **43** (2003), 12–25.

5. *Dorofeev K.Y., Yagola A.G.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl., **12** (2004), 627–636.

6. *Bayev A.V. Yagola A.G.* Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with a priori information // J. Inverse Ill-Posed Probl., **15** (2007), 569–586.

7. *Zhang Y, Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel // Inverse Probl. in Sci. and Eng., **23** (2015), 465–475.

8. *Leonov A.S* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl., **20** (2012), 637–665.

Секция 3

Теория функций и вычислительная математика

НОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПОЛНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА 3-ГО РОДА

Е.С. Алексеева, А.Э. Рассадин
kometarella@mail.ru, brat_ras@list.ru

УДК 517.16, 519.651

Для полного эллиптического интеграла 3-го рода представлены его оценки сверху и снизу, выражающиеся через элементарные функции. Эти оценки одинаковы как для гиперболического, так и для кругового случаев. Показано, что предложенные аппроксимации эффективны для инженерных приложений.

Ключевые слова: неравенство Коши-Буняковского, гипергеометрическая функция, вычет

New approximations for a complete elliptic integral of the third kind

For a complete elliptic integral of the third kind its upper and lower bounds expressing via elementary functions have been presented. These estimations are identical both for hyperbolic case and for circular one. It is shown that suggested approximations are effective for engineering applications.

Keywords: the Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii inequality, hypergeometric function, residue

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-01356-а).

Алексеева Елена Сергеевна, член Нижегородского математического общества (Нижний Новгород, Россия); Elena Alekseeva (Nizhni Novgorod Mathematical Society, Nizhni Novgorod, Russia)

Рассадин Александр Эдуардович, член Правления Нижегородского математического общества (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (Nizhni Novgorod Mathematical Society, Nizhni Novgorod, Russia)

Полные эллиптические интегралы 3-го рода (ПЭИ-3) [1, 2]:

$$\Pi(k,l)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{1}$$

часто встречаются в различных разделах математики и механики [3-5], таким образом, задача вычисления их значений с заданной точностью при различных параметрах — модуле k и характеристике l — является актуальной [3-5]. Продвижению в эффективном решении этой задачи может помочь следующая

Теорема. *Пусть $k\in[0,1)$ и $l\in[0,1]$. Тогда функция (1) удовлетворяет неравенствам:*

$$\Pi^-(k,l)\leqslant\Pi(k,l)\leqslant\Pi^+(k,l)\,,$$

где

$$\Pi^-(k,l)=\frac{\pi}{2}\frac{k^2}{l+k^2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\frac{l}{l+k^2}\sqrt{\frac{1-k^2}{1+l}} \tag{2}$$

и

$$\Pi^+(k,l)=\frac{k^2}{l+k^2}\frac{\pi-\ln(1-k^2)}{2}+\frac{\pi l}{4}\frac{\sqrt{(2-k^2)(2+l)}}{(l+k^2)(1+l)^{\frac{3}{4}}}\,. \tag{3}$$

В основе доказательства этой теоремы лежит представление ПЭИ-3 в виде следующей суммы [1]:

$$\Pi(k,l)=\frac{k^2}{l+k^2}\,K(k)+\frac{l}{l+k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+l\,\sin^2\varphi}\,d\varphi\,, \tag{4}$$

где

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,,\qquad k\in[0,1) \tag{5}$$

— полный эллиптический интеграл 1-го рода (ПЭИ-1) [1, 2].

Хорошо известно, что при $k\in[0,1)$ функция (5) выражается через гипергеометрическую функцию [1, 2]:

$$K(k)\equiv\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n)!)]^2}{2^{4n}(n!)^4}k^{2n}\,. \tag{6}$$

Поскольку в ряде (6) все члены положительны, то любая из частичных сумм этого ряда даёт оценку снизу для ПЭИ-1. Для наших целей достаточно учесть в формуле (6) только квадратичный член, то есть выбрать:

$$K(k)\geqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k^2}{8}\,. \tag{7}$$

Оценка сверху для ПЭИ-1 дана Ф. Трикоми (см. [2] и ссылки там):

$$K(k)\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln(1-k^2)\,. \tag{8}$$

Далее, так как $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} \geqslant \sqrt{1-k^2}$ при $k \in [0,1)$ и $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+l\,\sin^2\varphi}\,d\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1-k^2}{1+l}}\,. \tag{9}$$

Наконец, с помощью неравенства Коши-Буняковского найдём, что:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+l\,\sin^2\varphi}\,d\varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{(2-k^2)(2+l)}}{(1+l)^{\frac{3}{4}}}\,. \tag{10}$$

Определённые интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+l\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+l}}\,, \qquad l \in (-1,1],$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2+l}{(1+l)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad l \in (-1,1],$$

необходимые для получения оценок (9) и (10), легко вычисляются с помощью теории вычетов.

Комбинируя неравенства (7) и (9) с формулой (4), находим оценку снизу (2) для ПЭИ-3. Поступая аналогичным образом с неравенствами (8) и (10), получим для ПЭИ-3 оценку сверху (3).

В докладе приведены графики относительной погрешности оценки ПЭИ-3 снизу:

$$\delta^-(k,l) = \frac{\Pi(k,l) - \Pi^-(k,l)}{\Pi(k,l)} \tag{11}$$

и сверху:

$$\delta^+(k,l) = \frac{\Pi^+(k,l) - \Pi(k,l)}{\Pi(k,l)} \tag{12}$$

для $k \in [0,1)$ и $l \in [0,1]$.

Исследование линий уровня поверхностей (11) и (12) показало наличие множеств ненулевой меры на рассматриваемой области значений параметров ПЭИ-3 k и l, для которых относительная погрешность не превышает значения 0,01. В частности, $\delta^-(k,l) \leqslant 0,01$ на прямоугольнике $R^- = [0,\,0,18]\times[0,\,1]$ и $\delta^+(k,l) \leqslant 0,01$ на прямоугольнике $R^+ = [0,\,0,38]\times[0,\,0,49]$. Эти прямоугольники обладают примерно равной площадью, более того, их пересечение непусто: $R^- \cap R^+ = [0,\,0,18] \times [0,\,0,49]$, следовательно, на нём оценки ПЭИ-3 (2) и (3) могут использоваться одновременно. Однако в целом характер поведения относительных погрешностей (11) и (12) различен: $\delta^+(k,l) \leqslant 0,0561$ при всех рассматриваемых значениях k и l, а $\lim_{k\to 1-0}\delta^-(k,l) = 1$. Наконец, отметим, что добавление в формулу (7) дополнительных членов из ряда (6) не даёт ощутимого увеличения точности формулы (2), и, соответственно, заметных изменений в характере поведения функции (11).

В заключение подчеркнём, что в статье [3] аппроксимации ПЭИ-3 основаны на его представлении дзета-функцией Якоби (для гиперболического случая) и лямбда-функцией Хеймана (для кругового случая) с последующим применением к этим функциям так называемых приближённо-гидромеханических решений [3]. Культивируемый в работе [4] метод оценки ПЭИ-3 базируется на сведении задачи к решению линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с полиномиальными коэффициентами. Основная идея статьи [5] заключается в разбиении интервала интегрирования в интеграле (1) на несколько частей, разложения сомножителей в подинтегральном выражении по формуле Тейлора до членов второго порядка по φ включительно, точном вычислении получившихся определённых интегралов и их последующем суммировании [5]. Таким образом, доказанная в данном докладе по сути элементарными средствами теорема является вполне конкурентноспособной альтернативой подходам, развитым в статьях [3-5].

Литература

1. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы. — Москва: Наука, 1964.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — Москва: Наука, 1967.

3. *Анахаев К.Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Докл. АН, **473**:2 (2017), 151-153.

4. *Боголюбский А.И., Скороходов С.Л., Христофоров Д.В.* Быстрое вычисление эллиптических интегралов и их обобщений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **45**:11 (2005), 1938-1953.

5. *Пархомовский Я.М.* Приближённые формулы для эллиптических интегралов 3-го рода // Учёные записки ЦАГИ, **10**:3 (1979), 78-86.

О РЕГУЛЯРНОСТИ $P(X)$-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ИЗМЕРИМЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ P

Ю.А. Алхутов, М.Д. Сурначёв

yurij-alkhutov@yandex.ru, peitsche@yandex.ru

УДК 517.956.25

Получено достаточное условие на измеримый показатель $p(\cdot)$, обеспечивающее гёльдеровскую непрерывность и неравенство Харнака для $p(x)$-гармонических функций.

Ключевые слова: $p(x)$-лапласиан, переменный показатель, гёльдеровская непрерывность, неравенство Харнака

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00184).

Алхутов Юрий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия); Yuriy Alkhutov (Vladimir State University, Vladimir, Russia)

Сурначёв Михаил Дмитриевич, д.ф.-м.н., с.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Mikhail Surnachev (Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia)

On regularity of $p(x)$-harmonic functions with measurable exponent p

We obtain a sufficient condition for a measurable variable exponent $p(\cdot)$ that guarantees the Hölder continuity and Harnack inequality for $p(x)$-harmonic functions.

Keywords: $p(x)$-Laplacian, variable exponent, Hölder continuity, Harnack's inequality

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}\bigl(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\bigr) = 0, \tag{1}$$

с измеримым показателем $p(\cdot)$ таким, что

$$1 < p_1 \leqslant p(x) \leqslant p_2 < +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in D. \tag{2}$$

Основополагающие результаты по уравнениям такого типа и связанным с ними задачам вариационного исчисления, усреднения, теории функциональных пространств принадлежат В.В. Жикову [1], [2]. С современным состоянием этой теории и её приложениями можно ознакомиться, например, по обзорной статье [3] и книге [4].

Для определения решения уравнения (1) введём класс

$$W(D) = \{u \in W^{1,1}(D) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\}.$$

Будем говорить, что последовательность $u_j \in W(D)$ сходится к функции $u \in W(D)$, если

$$\int_D |u_j - u|^{p_1}\,dx + \int_D |\nabla u_j - \nabla u|^{p(x)}\,dx \to 0$$

при $j \to \infty$. Определим класс $W_0(D)$ как замыкание множества функций из $W(D)$ с компактным носителем в D относительно введённой сходимости. Обозначим через $H(D)$ замыкание $C^\infty(D) \cap W(D)$ в $W(D)$, а через $H_0(D)$ замыкание $C_0^\infty(D)$ в $W(D)$.

Будем говорить, что функция $u \in W(D)$ является W-решением (H-решением) уравнения (1) в D, если интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi\,dx = 0$$

выполнено для всех $\varphi \in W_0(D)$ ($\varphi \in H_0(D)$).

Через B_r^x будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Для измеримого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ через $|F|$ обозначается n-мерная мера Лебега множества F.

Предположим, что $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, где $R_0 \in (0, 1/2)$, и для измеримого множества $E \subset D$ существует $p_0 \in [p_1, p_2]$, такое, что

$$|p(x) - p_0| \leqslant \frac{L}{\ln|x - x_0|^{-1}} \quad \text{для п.в.} \quad x \in B_{R_0}^{x_0} \setminus E. \tag{3}$$

На множестве E показатель p удовлетворяет лишь условию (2), при этом предполагается, что

$$|B_r^{x_0} \cap E| \leqslant C_E r^{n+2\alpha n}, \quad 0 < r < R_0, \tag{4}$$

где $\alpha = (p_2 - p_1)\max(1, 1/(p_1 - 1))$. Данное условие например выполнено, если E является пересечением шара $B_{R_0}^{x_0}$ с воронкой вращения вида $|x' - x_0'| \leqslant \text{const} \cdot |x_n - (x_0)_n|^\gamma$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$, $\gamma = 1 + 2\alpha n/(n-1)$.

Далее через $\operatorname{ess\,osc}\limits_{B_r^{x_0}} u$ будем обозначать существенную осцилляцию функции u в шаре $B_r^{x_0}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда любое ограниченное W- или H-решение уравнения (1) непрерывно по Гёльдеру в точке x_0. При этом имеет место оценка* $\operatorname{ess\,osc}\limits_{B_r^{x_0}} u \leqslant C(r/R_0)^\nu (\operatorname{ess\,osc}\limits_{B_{R_0}^{x_0}} u + R_0)$, $0 < r < R_0$, *где положительные постоянные C и ν зависят только от n, p_1, p_2, L, C_E, и от существенной осцилляции решения в шаре $B_{R_0}^{x_0}$.*

Решение будет локально ограниченным, например, при выполнении условия $p_2 \leqslant np_1/(n-1)$.

Кроме того, в работе установлено неравенство Харнака слабого типа. Будем говорить, что функция $u \in W(D)$ является W-суперрешением (H-суперрешением) уравнения (1) в D, если интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \geqslant 0$$

выполнено для всех неотрицательных $\varphi \in W_0(D)$ (неотрицательных $\varphi \in H_0(D)$).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда для любого ограниченного неотрицательного W- или H-суперрешения уравнения (1) в шаре $B_{4R}^{x_0}$, где $0 < R < R_0/4$, выполняется оценка* $\left(R^{-n} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}} (u+R)^q \, dx \right)^{1/q} \leqslant C \operatorname{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} (u+R)$, *где $0 < q < n(p_0 - 1)/(n-1)$, а положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, и точной верхней грани функции u в шаре $B_{4R}^{x_0}$.*

Доказательство теоремы 2 основано на методе [5], развитом авторами в [6], [7]. Из теоремы 2 легко получить неравенство типа Харнака для решений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда для любого ограниченного неотрицательного W- или H-решения уравнения (1) в шаре $B_{4R}^{x_0}$, где $0 < R < R_0/4$, выполняется оценка* $\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} u \leqslant C \operatorname{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} (u + R)$, *где положительная постоянная C зависит только от n, p_1, p_2, L, C_E, и точной верхней грани решения в шаре $B_{4R}^{x_0}$.*

Литература

1. *Жиков В.В.* Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем., **50**:4 (1986), 675-711.

2. *Zhikov V.V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys., **3**:2 (1994), 249–269.

3. *Zhikov V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci., **173**:5 (2011), 463–570.

4. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017. — Berlin: Springer, 2011.

5. *Trudinger N.S.* On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations // Arch. Rational Mech. Anal., **42** (1971), 50–62.

6. *Алхутов Ю.А., Сурначёв М.Д.* Регулярность граничной точки для $p(x)$-лапласиана // Проблемы математического анализа, **92** (2018), 5–25.

7. *Алхутов Ю.А., Сурначёв М.Д.* Поведение в граничной точке решений задачи Дирихле для $p(x)$-лапласиана // Алгебра и анализ, **31**:2 (2019), 88–117.

РАСПОЗНАВАНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЕДИНИЧНЫХ ЧАСТИЦ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА РЕНТГЕНОВСКИХ ЛАЗЕРАХ

Г.А. Армеев, Г.М. Кобельков, А.В. Кудрявцев, М.А. Ложников, В.Н. Новоселецкий, А.К. Шайтан, К.В. Шайтан

armeev@molsim.org, kobelkov@dodo.inm.ras.ru, aleks.kudrjavcev@gmail.com, lozhnikovma@gmail.com, valeryns@gmail.com, alexeyshaytan@gmail.com, shaytan49@yandex.ru

УДК 519.6

Предложен алгоритм распознавания геометрических характеристик единичных частиц по дифракционным изображениям, полученным в экспериментах на рентгеновских лазерах. Решена задача классификации типов частиц по их дифракционным изображениям.

Ключевые слова: структурная биология, рентгеновские лазеры, эксперименты с единичными частицами, распознавание изображений, нейронные сети

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-02-40010).

Армеев Григорий Алексеевич, к.ф.-м.н., мнс, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Grigoriy Armeev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кобельков Георгий Михайлович, д.ф.-м.н., зав. каф., профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Georgiy Kobelkov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кудрявцев Александр Викторович, аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kudriavtsev Aleksandr (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Ложников Михаил Андреевич, аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Lozhnikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Новоселецкий Валерий Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Valery Novoseletsky (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шайтан Алексей Константинович, к.ф.-м.н., внс, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Shaytan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шайтан Константин Вольдемарович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Konstantin Shaitan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Recognition of single particle's diffraction images generated in XFEL experiments

An algorithm of sigle particle's geometric properties recognition by diffraction images generated in XFEL experiments is suggested. The problem of particle type classification by its diffraction image is solved.

Keywords: structural biology, x-ray lasers, single particle experiments, image recognition, neural networks

В настоящей работе предлагается алгоритм определения геометрических характеристик биологических макромолекул по двумерным дифракционным изображениям[1, 2]. Физический эксперимент по получению дифракционного изображения состоит в следующем: через макромолекулярную частицу проходит пучок рентгеновских квантов, рассеяние которых регистрируется детектором. Плоскость детектора расположена перпендикулярно направлению падающего пучка. На выходе получается изображение в некотором определённом разрешении, в точках которого содержится интенсивность потока, зарегистрированного сенсорами детектора.

Интенсивность, регистрируемая детектором, в точке с радиус-вектором $\mathbf{R}$ имеет вид

$$I(\mathbf{R}) = \left| \int\limits_V \frac{A_0}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \exp\left(ik\,|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\right) e^{i\mathbf{k_0}\mathbf{r}}\,\mathrm{d}\mathbf{r} \right|^2, \tag{1}$$

где V — объём исследуемой частицы, A_0 — амплитуда интенсивности рентгеновского лазерного излучения, $\mathbf{k_0}$ — вектор направления исходного пучка, $|\mathbf{k_0}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathbf{R}}{R}$.

В условиях эксперимента $R \gg r$, и вместо равенства (1) всегда используется приближенное выражение

$$I(\mathbf{R}) \approx \frac{A_0^2}{R^2} \left| \int\limits_V \exp(-i(\mathbf{k}-\mathbf{k_0})\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \right|^2. \tag{2}$$

В данной работе предлагается разбить множество изучаемых объектов на несколько непересекающихся классов. Каждый класс объектов представляет из себя набор некоторых определённых геометрических тел, различного размера, повёрнутых к детектору под своим заданным диапазоном углов. Задача заключается в определении класса, к которому принадлежит объект по его дифракционному изображению.

Для решения данной задачи предлагается использовать сверточные нейронные сети, которые, как известно, хорошо справляются с задачами классификации (например, [3]). Как правило, такую нейронную сеть можно условно разделить на две части: первая часть, в которую входят помимо прочих сверточные слои, служит для выделения признаков, а вторая часть занимается классификацией объектов по выделенным признакам. На входе нейронной сети подается изображение, на выходе получается вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$, где k — количество различных классов в задаче, y_i — вероятность

принадлежности объекта к i-му классу. Таким образом, задача сводится к минимизации функции ошибки

$$-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(1-y^i_{c(i)}\right)$$

по набору параметров нейронной сети, где N — количество дифракционных изображений в обучающей выборке, $\mathbf{y}^i$ — вектор вероятностей, полученный на выходе нейронной сети от i-го элемента выборки, $c(i)$ — класс, к которому принадлежит i-ый элемент выборки.

Обучающая выборка составлялась по формуле (2) для различных геометрических тел таких как шар, цилиндр и тор, расположенных под различными углами к детектору. При помощи комбинации этих геометрических тел может быть представлен целый ряд интересных биологических объектов в условиях дифракционных экспериментов (в том числе α-спирали и другие элементы вторичной структуры, витки ДНК, вирусы и прочие). В рамках предложенного подхода была решена задача по определению пространственных характеристик объектов такого типа.

Литература

1. *Каули Дж.* Физика дифракции. — Москва: Мир, 1979.

2. *Bobkov S.A., Teslyuk A.B., Kurta R.P., et al.* Sorting algorithms for single-particle imaging experiments at X-ray free-electron lasers// J. Synchrotron Rad., 22, (2015), 1345–1352.

3. *Alex Krizhevsky, Sutskever Ilya, Hinton Geoffrey E.* ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // F. Pereira, C. J. C. Burges, L. Bottou, K. Q. Weinberger (ed) Advances in Neural Information Processing Systems 25. — Curran Associates, Inc., 2012. — 1097–1105.

О КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТЫХ РОСТКОВ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.А. Асташов

ast-ea@yandex.ru

УДК 512.761.5

Доклад посвящен классификации ростков аналитических функций многих переменных, эквивариантно простых относительно действий конечных абелевых групп. Получена полная классификация таких ростков функций двух и трех переменных для всевозможных нетривиальных действий группы порядка 3.Сформулированы необходимые условия существования эквивариантно простых ростков для случая конечной циклической группы.

Ключевые слова: пространства с действием группы, эквивариантные отображения, классификация особенностей, простые ростки.

Работа выполнена за счет средств гранта РНФ (проект № 16-11-10018).

Асташов Евгений Александрович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Evgeny Astashov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

On the classification of equivariant simple function germs

The talk is devoted to the classification of multivariate analytic function germs that are equivariant simple under actions of finite abelian groups. We classify such function germs of two and three variables for all possible non-trivial actions of the order-three cyclic group.We present a necessary existence condition for singular cyclically equivariant holomorphic function germs.

Keywords: spaces with group actions, equivariant maps, classification of singularities, simple germs.

Отображение $f\colon M \to N$ многообразий с заданными действиями группы G называется *эквивариантным*, если для всех точек $x \in M$ и всех элементов $\sigma \in G$ выполнено равенство $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$. Два эквивариантных отображения G-многообразий $f, g\colon M \to N$ называются *$\mathcal{R}^G$-эквивалентными*, если существует эквивариантный диффеоморфизм $\Phi\colon M \to M$, для которого $g = f \circ \Phi$.

Существует большое количество работ, в которых изучаются классы $\mathcal{R}^G$-эквивалентности эквивариантных отображений вещественных или комплексных G-многообразий и нормальные формы их представителей. При этом, как правило, класс рассматриваемых отображений ограничивается в терминах коразмерности или модальности отображений или размерностей прообраза и образа (см., например, [1]–[6]).

Пусть G — конечная абелева группа, действия которой заданы на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{O}_n^G$ обозначим кольцо ростков аналитических функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантных относительно заданных действий группы G. Через $\mathcal{D}_n^G$ обозначим группу ростков автоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, эквивариантных относительно заданного действия группы G на $\mathbb{C}^n$. Росток $f \in \mathcal{O}_n^G$ назовем *эквивариантно простым* (или *G-простым*) относительно заданных представлений группы G на прообразе и образе, если при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой точки его орбиты (относительно действия группы $\mathcal{D}_n^G$) в пространстве r-струй ростков из $\mathcal{O}_n^G$ пересекается лишь с конечным числом других орбит, и это число ограничено при $r \to \infty$.

Классификация $\mathbb{Z}_3$-простых ростков аналитических функций двух и трех комплексных переменных для всех нетривиальных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на прообразе и образе дается следующими двумя теоремами (см. [7]).

Теорема 1. *Пусть действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ задано формулами*

$$\sigma \cdot (x, y) = (\tau^p x, \tau^q y); \quad \sigma \cdot z = \tau^r z \quad (p, q, r \in \mathbb{N}),$$

где $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ — образующая, $\tau = \exp(2\pi i/3)$. Тогда список нормальных форм $\mathbb{Z}_3$-простых ростков $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^2$ в зависимости от $(p, q; r) \bmod 3$ дается следующей таблицей.

№	$(p,q;r)$ mod 3	Нормальные формы $\mathbb{Z}_3$-простых ростков
1	(0, 1; 1)	xy; x^ky+y^4 $(k\geqslant 2)$; x^3y+y^7; x^ky+xy^4 $(k\geqslant 3)$; x^2y+y^{3k+1} $(k\geqslant 3)$.
2	(0, 1; 2)	y^2; xy^2; $x^ky^2+y^5$ $(k\geqslant 2)$; $x^3y^2+y^8$; $x^ky^2+xy^5$ $(k\geqslant 3)$; $x^2y^2+y^{3k+2}$ $(k\geqslant 3)$.
3	(1, 1; 1)	—
4	(1, 1; 2)	$x^{3k+2}+y^2$ $(k\geqslant 0)$.
5	(1, 2; 1)	$x^{3k+1}+y^2$ $(k\geqslant 1)$; x^2y+y^{3k-1} $(k\geqslant 2)$; x^4+xy^3; x^4+y^5.

Теорема 2. *Пусть действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^3$ и на $\mathbb{C}$ задано формулами*

$$\sigma\cdot(x,y,z)=(\tau^p x,\tau^q y,\tau^r z);\quad \sigma\cdot w=\tau^s w\quad (p,q,r,s\in\mathbb{N}),$$

где $\sigma\in\mathbb{Z}_3$ — образующая, $\tau=\exp(2\pi i/3)$. Тогда список нормальных форм $\mathbb{Z}_3$-простых ростков $(\mathbb{C}^3,0)\to(\mathbb{C},0)$ с критической точкой $0\in\mathbb{C}^3$ в зависимости от $(p,q,r;s)$ mod 3 дается следующей таблицей.

№	$(p,q,r;s)$ mod 3	Нормальные формы $\mathbb{Z}_3$-простых ростков
1	(0, 0, 1; 1)	xz; $F_1(x,y)\cdot z+z^4$; $(x^2+y^3)\cdot z+z^7$; $(x^2+y^2)\cdot z+z^{3k+1}$ $(k\geqslant 3)$.
2	(0, 0, 1; 2)	z^2; xz^2; $F_1(x,y)\cdot z^2+z^5$; $(x^2+y^3)\cdot z^2+z^8$; $(x^2+y^2)\cdot z^2+z^{3k+2}$ $(k\geqslant 3)$.
3	(0, 1, 1; 1)	$xy+z^{3k+1}$ $(k\geqslant 1)$.
4	(0, 1, 1; 2)	—
5	(0, 1, 2; 1)	$F_2(x,y)+z^2$; $xy+z^{3k+2}$ $(k\geqslant 1)$; xz^2+y^{3k+1} $(k\geqslant 1)$; $xz^2+y^{3k+2}z$ $(k\geqslant 0)$.
6	(1, 1, 1; 1)	—
7	(1, 1, 1; 2)	$x^{3k+2}+y^2+z^2$, $k\geqslant 0$.
8	(1, 1, 2; 1)	—
9	(1, 1, 2; 2)	$x^2+F_3(z,y)$.

Здесь F_1 — любой (неэквивариантно) простой росток функции двух переменных (см. [1]); F_2 — любой эквивариантно простой росток функции двух переменных (см. теорему 1, случай 1); F_3 — любой эквивариантно простой росток функции двух переменных (см. теорему 1, случай 5).

Пусть действие группы $G=\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$ задано формулами

$$\sigma\cdot(z_1,\dots,z_n)=(\tau^{p_1}z_1,\dots,\tau^{p_n}z_n);\quad \sigma\cdot w=\tau^q w\quad (p_1,\dots,p_n,q\in\mathbb{Z}),\qquad (1)$$

где $\sigma\in\mathbb{Z}_m$ — образующая, $\tau=\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ (числа $p_1,\dots,p_n,q$ можно рассматривать по модулю m и считать взаимно простыми в совокупности). Набор весов $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ назовем *допустимым* относительно действий (1), если он удовлетворяет следующим условиям:

1) НОД$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$;

2) для всех $s\in[1,n]$ выполнены неравенства $1\leqslant\alpha_s\leqslant m$;

3) моном инвариантнен относительно действий (1) на $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда его квазистепень с весами $\underline{\alpha}$ делится на m.

Действие группы $\mathcal{D}_n^G$ на пространстве $\mathcal{O}_n^G$ порождает действие конечномерной группы преобразований на конечномерном пространстве квазиоднородных многочленов квазистепени r (с весами $\underline{\alpha}$), эквивариантных относительно действий (1). Обозначим через $D_r^{\underline{\alpha}}$ размерность этой группы, а через $d_r^{\underline{\alpha}}$ — размерность указанного пространства многочленов. В выбранных обозначениях имеет место следующее необходимое условие существования эквивариантно простых ростков (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — допустимый набор весов относительно действий* (1) *группы $G = \mathbb{Z}_m$. Если выполняются условия*

$$0 = d_0^{\underline{\alpha}} = d_1^{\underline{\alpha}} = \ldots = d_{r-1}^{\underline{\alpha}} \neq d_r^{\underline{\alpha}} > D_r^{\underline{\alpha}},$$

то не существует ростков голоморфных функций из $\mathcal{O}_n^{\mathbb{Z}_m}$, эквивариантно простых относительно действий (1).

Литература

1. *Арнольд В.И.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности //Функциональный анализ и его приложения, **6**:4 (1972), 3–25.

2. *Siersma D.* The singularities of C^∞-functions of right-codimension smaller or equal than eight // Indagationes Mathematicae (Proceedings), **76**:1 (1973), 31–37.

3. *Арнольд В.И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН, **33**:5 (1978), 91–107.

4. *Siersma D.* Singularities of functions on boundaries, corners, etc. // The Quarterly Journal of Mathematics, **32**:1 (1981), 119–127.

5. *Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M.* The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // J. of Geometry and Physics, **71** (2013), 58–72.

6. *Baines C.E., Goryunov V.V.* Cyclically equivariant function singularities and unitary reflection groups $G(2m, 2, n), G_9, G_{31}$ // St-Petersburg Mathematical Journal, **11**:5 (2000), 761–774.

7. *Асташов Е.А.* Классификация ростков функций, эквивариантно простых относительно группы порядка 3 // Мат. заметки, **105**:2 (2019), 163–178.

8. *Astashov E.* Equivariant simple singularities and admissible sets of weights // WSEAS Transactions on Mathematics, **17** (2018), 404–410.

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

А.О. Багапш
a.bagapsh@gmail.com

УДК 517.956.2, 517.53

С помощью ранее полученных автором интегральных представлений типа Пуассона в круге для решений сильно эллиптических систем исследуется граничное поведение таких решений на примерах функций с характерными особенностями на границе круга. Дается формула для вычисления некасательных пределов в зависимости от угла, по которому точка стремится к границе. Рассматривается отображение круга с помощью ядра типа Пуассона. Поведение решений сильно эллиптических систем во многом напоминает поведение гармонических функций, которые являются здесь частным случаем. При этом предельные множества в общем случае систем выглядят несколько сложнее.

Ключевые слова: эллиптические системы, интеграл Пуассона, граничное поведение.

On boundary behavior of solutions to strongly elliptic systems on the plane

We study a boundary behavior of solutions to strongly elliptic systems in the unit circle using the Poisson type representations recently obtained by the author. Some examples of such solutions with typical character of boundary features are investigated. A formula for non-tangential angular limits is given. The behavior of solutions of strongly elliptic systems in many ways resembles the behavior of harmonic functions, which are a partial case here. At the same time, the limit sets look more complicated in the general case.

Keywords: elliptic systems, Poisson integral, boundary behavior.

Рассматриваются решения системы уравнений эллиптического типа

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{1}$$

относительно функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ с постоянными вещественными 2×2 матрицами A, B, C. Условие эллиптичности состоит в том, что $\det(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)\neq 0$ при всех $(\xi,\eta)\neq(0,0)$. Среди эллиптических систем (1) выделяется подкласс сильно эллиптических систем; это системы, удовлетворяющие условию $\det(A+2B\xi+C\eta)\neq 0$ при $(\xi,\eta)\neq(0,0)$ (см. [1], [2]).

С помощью линейных преобразований в плоскостях (x,y) и (u,v), а также линейной комбинации уравнений можно свести эллиптическую систему

Багапш Астамур Олегович, к.ф.-м.н., Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"(Москва, Россия), Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Astamur Bagapsh (Federal research center "Computer Science and Control", Moscow, Russia; Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

(1) к уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ относительно некоторой функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с оператором

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} := \begin{cases} (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}, & |\sigma| < 1, \\ (\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial})\mathcal{I} + \sigma^{-1}(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\mathcal{C}, & |\sigma| > 1, \end{cases}$$

зависящим от параметров $\tau \in [0, 1)$ и $\sigma \neq \pm 1$. Здесь ∂ и $\overline{\partial}$ — операторы Коши — Римана, а $\mathcal{I}$ и $\mathcal{C}$ — тождественный оператор и оператор комплексного сопряжения (см. [3]).

В работе автора [4] было получено интегральное представление типа Пуассона для решений сильно эллиптических систем (1), записанных в приведенном выше двухпараметрическом виде, в единичном круге. Соответствующее выражение выглядит относительно просто в двух частных случаях: при $\sigma = 0$ (т.н. кососимметричная система, которую можно записать в виде $af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$) и при $\tau = 0$ (изотропная система Ламе). Если функция f непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяет внутри этого круга уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, то в случае $\sigma = 0$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1 - |z|^2)(\zeta + \tau\overline{\zeta})}{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})} f(\zeta)|d\zeta|, \tag{2}$$

где $z_\tau := z - \tau\overline{z}$, а при $\tau = 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} (1 - |z|^2) \left(\frac{1}{|\zeta - z|^2}\mathcal{I} + \sigma \frac{2 - \overline{\zeta}z}{(\zeta - z)^2}\mathcal{C} \right) f(\zeta)|d\zeta|.$$

Легко видеть, что первая формула при $\tau = 0$ и вторая при $\sigma = 0$ превращаются в классическую формулу Пуассона для гармонических функций.

Пусть μ — комплекснозначная конечная борелевская мера, заданная на единичной окружности. Введем преобразование

$$F_\mu(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1 - |z|^2)(\zeta + \tau\overline{\zeta})}{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})} d\mu$$

и исследуем граничное поведение решений эллиптических систем на двух характерных примерах функций, получаемых с помощью такого преобразования.

Пример 1. Пусть, $d\mu = \chi|d\zeta|$, где χ — характеристическая функция верхней половины единичной окружности. Тогда $F_\mu(z) = f(z)$, где

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{-(1 + z)_\tau (1 - \overline{z})(1 + \tau\overline{z})}{(1 - z)_\tau (1 + \overline{z})(1 - \tau\overline{z})} \tag{3}$$

есть функция, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}_{\tau,0} f = 0$ в единичном круге $|z| < 1$. Несложно проверить, что $f(z) \to 1$ при $z \to e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$, и $f(z) \to 0$ при $z \to e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, 0)$. Более интересное поведение функции f наблюдается при $z \to \pm 1$. Для произвольных углов $\theta \in (-\pi, \pi)$ и $\alpha \in (0, \pi)$ обозначим через $\Lambda_{\theta,\alpha}$ прямую, проходящую через точку $e^{i\theta}$ под углом α с

касательной к единичной окружности в этой точке. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть функция $f(z)$ представлена в виде (2), где $f(\zeta) = f(e^{it})$ как функция угла t является кусочно–непрерывной и имеет разрыв первого рода в точке $t = \theta$, т.е. существуют различные $\lim_{t\to\theta\pm} f(e^{i\theta}) =: f_{\pm}(e^{i\theta}) \neq \infty$. Тогда*

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\theta,\alpha}}} f(z) = p(\theta,\alpha)f_+(e^{i\theta}) + (1-p(\theta,\alpha))f_-(e^{i\theta}), \tag{4}$$

где

$$p(\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau e^{-2i\theta}}{1+\tau e^{2i(\alpha-\theta)}}.$$

В соответствии с Предложением 1, для функции (3) получаем

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Lambda_{0,\alpha}}} f(z) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau}{1+\tau e^{2i\alpha}}, \qquad \lim_{\substack{z\to -1\\ z\in\Lambda_{\pi,\alpha}}} f(z) = 1 - \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau}{1+\tau e^{2i\alpha}}.$$

Последние соотношения при всевозможных значениях $\alpha \in (0,\pi)$ определяют две гладкие кривые, соединяющие точки 0 и 1. Отметим, что при $\tau = 0$, т.е. в гармоническом случае, этими кривыми являются отрезки.

Пример 2. Пусть, $d\mu = \delta_1|d\zeta|$ где δ_1 — мера единичной массы, сосредоточенная в точке $\zeta = 1$. Тогда $F_\mu(z) = f(z)$, где функция

$$f(z) = \frac{(1+\tau)(1-|z|^2)}{2\pi(1-z)_\tau(1-\overline{z})(1+\tau\overline{z})}, \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,0}f = 0$ в единичном круге. Ясно, что $f(z) \to 0$ при $z \to e^{i\theta}$, $\theta \neq 0$. При $z \to 1$ по некасательным кривым получаем $f(z) \to \infty$. Рассмотрим семейство окружностей, касающихся единичной окружности $|z| < 1$ в точке $z = 1$. С помощью отображения $\zeta = (1+z)/(1-z)$, где $\zeta = \xi + i\eta$, такие окружности переводятся в вертикальные прямые $\xi = \xi_0 = const$, а весь единичный круг $|z| < 1$ переводится в правую полуплоскость $\xi > 0$. При этом

$$f(z) = \frac{(1+\tau)\xi[(\xi+1)^2 - \eta^2 - 2i\eta(\xi+1)]}{2\pi[(1-\tau)(\xi+1) - i(1+\tau)\eta][1-\tau+(1+\tau)\xi - i(1+\tau)\eta]}. \tag{6}$$

При $z \to 1$ вдоль касательной окружности имеем $\eta \to \pm\infty$, так что $f(z) \to \frac{\xi_0}{2\pi(1+\tau)}$ с соответствующим данной окружности значением ξ_0. При всевозможных значениях $\xi_0 > 0$ получаем в качестве множества пределов полупрямую $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$. Отметим, что такая же картина возникает и в случае соответствующей гармонической функции f, однако в этой ситуации каждая касательная окружность отображается в точку на $\mathbb{R}_+$, а в общем случае параметра $\tau \in [0,1)$, как видно из (6), функция (5) отображает каждую касательную окружность в замкнутую кривую.

Литература

1. *Hua Loo Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian.* Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.

2. *Verchota G.C., Vogel A.L.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. №11. P. 4501–4535.

3. *Багапш А.О., Федоровский К.Ю.* C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 42–57.

4. *Багапш А.О.* Функция Грина и интеграл Пуассона в круге для сильно эллиптических систем с постоянными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. №6. С. 4–18.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРОСТОГО И ДВОЙНОГО СЛОЕВ

М.Н. Бахшалыева

mehpare.93@hotmail.com

УДК 517.2; 519.64

Построены квадратурные формулы для логарифмических потенциалов и нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя. Кроме того, даны оценки погрешностей построенных квадратурных формул.

Ключевые слова: квадратурные формулы, логарифмические потенциалы, криволинейный интеграл, кривая Ляпунова.

Quadrature formulas for logarithmic potentials of simple layer

Quadrature formulas for logarithmic potentials and normal derivative of simple layer logarithmic potential are constructed. Error estimations for the constructed quadrature formulas are given.

Keywords: quadrature formulas, logarithmic potentials, curvilinear integral, Lyapunov curve.

Известно, что одним из методов решения краевых задач для уравнения Лапласа является метод граничных интегральных уравнений. Так как во многих случаях невозможно найти точное решение интегральных уравнений краевых задач для уравнения Лапласа, то возникает интерес обосновать метод коллокации для этих интегральных уранений, а для этого сначала надо построить квадратурные формулы для логарифмического потенциала простого слоя

$$P(x) = \int_L \Phi(x,\, y)\, \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1,\, x_2) \in L, \tag{3.1}$$

Мехпара Н. Бахшалыева, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности (Баку, Азербайджан)

и для логарифмического потенциала двойного слоя

$$W(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x,\, y)}{\partial \vec{n}(y)}\, \rho(y) dL_y, \quad x \in L, \tag{3.2}$$

где $L \subset R^2-$ простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$, $\vec{n}(y)-$внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $\rho(y)-$непрерывная функция на кривой L, $\Phi(x,\, y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, т.е.

$$\Phi(x,\, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, x, y \in R^2, x \neq y,$$

а $\Delta-$ оператор Лапласа.

Предположим, что простая замкнутая кривая Ляпунова $L \subset R^2$ задана параметрическим уравнением $x\,(t) = (x_1\,(t)\ , x_2\,(t))\ , t \in [a, b]$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на $n > 2M_1\,(b-a)\,/d$ равных частей: $t_k = a + \frac{(b-a)\,k}{n}\,,\ \ k = \overline{0, n}$, где $d-$радиус стандартной окружности. В качестве опорных точек возмем $x\,(\tau_k)$, где $\tau_k = a + \frac{(b-a)\,(2k-1)}{2n}$, $k = \overline{1, n}$.

Через $C\,(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{x \in L} |\rho\,(x)\,|$, и для функции $\varphi(x) \in C\,(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\, \delta) = \delta \sup_{\tau \geqslant \delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi,\, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\bar{\omega}(\varphi,\, \tau) = \max\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \tau \\ x,\, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|\,.$

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Выражение*

$$P_n\,(x\,(\tau_k)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \Phi\,(x\,(\tau_k)\,,\, x\,(\tau_j))\ \sqrt{(x_1'\,(\tau_j))^2 + (x_2'\,(\tau_j))^2}\, \rho\,(x\,(\tau_j))$$

в опорных точках $x\,(\tau_k)\,,\ \ k = \overline{1, n}$, *является квадратурной формулой для интеграла (1), причем справедливы следующие оценки:*
$\max\limits_{k=\overline{1, n}} |P\,(x\,(\tau_k)) - P_n\,(x\,(\tau_k))| \leqslant M\left(\omega\,(\rho,\, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *при* $0 < \alpha < 1$,
$\max\limits_{k=\overline{1, n}} |P\,(x\,(\tau_k)) - P_n\,(x\,(\tau_k))| \leqslant M\left(\omega\,(\rho,\, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right)$ *при* $\alpha = 1$.

Здесь и далее через M обозначаем положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Теорема 2. *Выражение*

$$W_n\,(x\,(\tau_k)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\partial \Phi\,(x\,(\tau_k)\,,\, x\,(\tau_j))}{\partial \vec{n}\,(x\,(\tau_j))}\ \sqrt{(x_1'\,(\tau_j))^2 + (x_2'\,(\tau_j))^2}\, \rho\,(x\,(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_k)$, $k = \overline{1, n}$, *является квадратурной формулой для интеграла (2), причем справедлива следующая оценка:*

$$\max_{k=\overline{1,n}} |W(x(\tau_k)) - W_n(x(\tau_k))| \leqslant M\left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Теорема 3. *Выражение*

$$Q_n(x(\tau_k)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\partial\Phi(x(\tau_k), x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_k))} \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, \rho(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_k)$, $k = \overline{1, n}$, *является квадратурной формулой для нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя*

$$Q(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial\vec{n}(x)} = \int_L \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\vec{n}(x)} \rho(y) dL_y, \quad x \in L,$$

причем

$$\max_{k=\overline{1,n}} |Q(x(\tau_k)) - Q_n(x(\tau_k))| \leqslant M\left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СЕМЕЙСТВУ ПАРАБОЛ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

Краткая аннотация. В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение. Показано что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Ключевые слова: задачи интегральной геометрии, некорректные задачи, интегральные преобразования, формула обращения, теорема существования

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Begmatov Akram Hasanovich (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, аспирант, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Ismoilov Alisher (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

About the restoration of the function, given by the integrals by the family parabola

Short abstract. In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

Keywords: integral geometry problems, ill-posed problems, integral transforms, inversion formula, existence theorem

Задачи интегральной геометрии — это интенсивно развивающееся направление современной математики, которое является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электроразведки, акустики и компьютерной томографии. Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым [2]. Задачи не вольтерровского типа изучались в работах М.М.Лаврентьева и А.Л. Бухгейма [3,4], Р.Г. Мухометова [5].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [6,7].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [8-11].

В работах [12,13] отображения плоских областей, осуществляемые решениями этой системы названные h -конформными отображениям.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$(x,y) \in R^2, (\xi,\eta) \in R^2, \lambda \in R^1, \mu \in R^1$$

$$\Omega = \{(x,y), x \in R^1, y \in (0,1), l < \infty\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y), x \in R^1, y \in [0,1]\}$$

Постановка задачи. В полосе $\overline{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин (x,y), произвольная кривая семейства $P(x,y)$ определяется соотношениями

$$P(x,y) = \{(\xi,\eta) : y - \eta = (x-\xi)^2, 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant l, l < \infty\}$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x,y)$, если для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(\cdot)$ по кривым $P(x,y)$:

$$\int\limits_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} g(x,\xi)u(\xi,\Psi(x,y,\xi))d\xi = f(x,y) \qquad (1)$$

где $g(x,\xi) = 2|x-\xi| = 2(x-\xi)sgn(x-\xi)$.

Функция $u(x,y)$ - функция из класса U, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R^2_+ :

$$supp\ u \subset D = \{(x,y) : -a < x < a, 0 < a < \infty, 0 < y < l, l < \infty\}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех (x,y) из полосы $\overline{\Omega}$. Тогда решение задача 1 в классе U единственно, имеет место представление*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_2(x-\xi, y-\eta)(E + \frac{\partial^4}{\partial\eta^4})(E + \frac{\partial^4}{\partial\xi^4})f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (2)$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_0\|f_1\|_{W_2^{4,4}(\Omega)}$$

где C_0 - некоторая постоянная.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:*

1)$f(x,y)$ финитна по переменной x;

2) $f(x,y)$ имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

3) $\frac{\partial^m}{\partial y^m}f(x,y)|_{y=0} = \frac{\partial^m}{\partial y^m}f(x,y)|_{y=l} = 0, m = 0,1,2.$

Тогда существует решение уравнения (1) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу x, определенное формулой (2).

Литература

1. *Романов В.Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. // Новосибирск: Наука, 1972.

2. *Лаврентьев М.М.* Интегральная геометрия и обратные задачи // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, (1984), 81-86.

3. *Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л.* Об одном классе задач интегральной геометрии // Докл. АН СССР, **311**:3 (1973), 38-39.

4. *Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л.* Об одном классе операторных уравнений первого рода // Функцион. анализ и его прил, **7**:4 (1973), 44-53.

5. *Мухометов Р.Г.* О задаче интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики, **6**:2 (1975), 212-242.

6. *Бегматов Акрам Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журнал., **36**:2 (1995), 243-247.

7. *Begmatov Akram H.* On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems, **3**:3 (1995), 231-235.

8. *Бегматов Акрам Х.* Вольтеровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журнал, **38**:4 (1997), 723-737.

9. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН, **358**:2 (1998), 151-153.

10. *Begmatov Akbar H., Begmatov Akram H.* Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, (2003), 1-8.

11. *Begmatov Akram H., Ochilov Z.H.* Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // ДIll-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston (2003), 191-198.

12. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН, **429**:3 (2009), 295-297.

13. *Begmatov Akram H., Muminov M.E., Ochilov Z.H.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type// Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics, **3**:5 (2015), 113-120.

СУММЫ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ МОРРИ

Е.И. Бережной

ber@uniyar.ac.ru

УДК 513.88+517.5

Показано, что вычисление сумм и пересечений пространств Морри можно свести к вычислению сумм и пересечений пространств функций, входящих параметрами в определение пространств Морри. Такая редукция позволяет получить новые теоремы экстраполяции для пространств Морри.

Ключевые слова: суммы и пересечения банаховых пространств, пространства Морри, экстраполяционные теоремы

Sums and intersections Morrey's spaces

It is shown that the calculation of the sum and the intersection of Morrey's spaces can be reduced to calculating the sum and intersections of spaces of functions included by a parameter in the definition Morrey's spaces. This reduction allows us to obtain new extrapolation theorems for Morrey's spaces.

Keywords: sums and intersections of Banach spaces, Morrey's spaces, extrapolation theorems

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-51-06005).

Бережной Евгений Иванович, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Evgenii Berezhnoĭ (Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

Пусть задана последовательность банаховых пространств $\{B_i\}$, такая, что каждое из них непрерывно вложено в полное топологическое отделимое пространство V. Такую последовательность мы будем называть $V-$ последовательностью. Если дополнительно задана последовательность положительных чисел $\{\gamma_i\}$, то, как обычно, через $\Sigma\gamma_i B_i$ обозначают новое банахово пространство, норма в котором задается равенством

$$\|b|\Sigma\gamma_i B_i\| = \inf\{\Sigma\gamma_i\|b_i|B_i\| : b = \Sigma b_i \ \text{ ряд сходится в } \ V\},$$

(символом $\|b|B\|$ обозначается норма элемента b в пространстве B).

Пусть теперь вместо последовательности задан набор банаховых пространств $\{B_\beta\}$, $(\beta \in (\beta_0, \beta_1)$, $-\infty \leqslant \beta_0 < \beta_1 \leqslant \infty)$, такой, что каждое из них непрерывно вложено в полное топологическое отделимое пространство V. По аналогии, такой набор мы будем называть V- набором.

Если задан V- набор банаховых пространств $\{B_\beta\}$, $(\beta \in (\beta_0, \beta_1))$, и измеримая функция $\{\xi : (\beta_0, \beta_1) \to R_+\}$, то через $\sum\{\xi, B_\beta\}$ обозначают новое пространство, норма в которых задается равенством

$$\|b|\sum\{\xi, B_\beta\}\| = \inf\{\|b|\sum \xi(\beta_i)B_{\beta_i}\| :$$

$$\beta_0 < ... < \beta_{-i} < \beta_{-i+1} ... < \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_i < ... < \beta_1\}.$$

Наряду с пространством $\sum\{\xi, B_\beta\}$ введем пространство $\bigcap\{\xi, B_\beta\}$, норма в котором задается равенством $\|b|\bigcap\{\xi, B_\beta\| = \sup_{\beta\in(\underline{\beta},\overline{\beta})} \xi(\beta)\|b|B_\beta\|$. Пространство $\bigcap\{\xi, B_\beta\}$ также является банаховым пространством.

Пусть μ - мера Лебега в R^n, $S(\mu)$ - пространство измеримых функций $f : R^n \to R$, $\chi(D)$ - характеристическая функция множества D, X – идеальное пространство измеримых на R^n функций.

Наряду с пространствами функций нам потребуются идеальные пространства последовательностей. Пусть $e^i = \{..., 0, 1, 0, ...\}$ (единица стоит на i-ом месте), $(i \in Z)$, – стандартный базис в пространстве двусторонних последовательностей. Символом l будем обозначать идеальное пространство последовательностей: $x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i e^i$ с нормой $\|x|l\|$.

Пусть $U(0, 1)$ звездное множество положительной меры, содержащее точку 0. Через Υ обозначим множество неотрицательных числовых последовательностей $\tau = \{\tau_i\}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$\forall i : \quad \tau_i < \tau_{i+1}, \quad \bigcup_i (\tau_i, \tau_{i+1}] = R_+.$$

Если $\tau_{i+1} = \infty$, то условимся считать, что $(\tau_i, \infty] = (\tau_i, \infty)$. По каждой последовательности $\tau = \{\tau_i\}$ построим набор множеств $U(0, \tau_i) \equiv \tau_i U(0, 1)$ и набор непересекающихся слоев $R(0, \tau_{i-1}, \tau_i) = U(0, \tau_i)\backslash U(0, \tau_{i-1})$.

Определение обобщенного дискретного локального пространства Морри будет иметь следующий вид.

Определение [1]. *Пусть задано идеальное пространство X на R^n, идеальное пространство l двусторонних последовательностей со стандартным базисом $\{e^i\}$, звездное множества $U(0, 1)$ и последовательность $\tau \in \Upsilon$.*

Локальным дискретным пространством Морри $M^\tau_{l,X}$ *будем называть множество функций* $f \in L^{1,loc}(R^n)$, *для каждой из которых конечна норма* $\|f|M^\tau_{l,X}\| = \|\sum e^i \|f\chi(U(0,\tau_i))|X\||l\|$. *Аппроксимационным локальным дискретным пространством Морри* $\overline{M^\tau_{l,X}}$ *будем называть множество функций* $f \in L^{1,loc}(R^n)$, *для каждой из которых конечна норма* $\|f|\overline{M^\tau_{l,X}}\| = \|\sum e^i \|f\chi(R(0,\tau_{i-1},\tau_i))|X\||l\|$.

Следующая теорема является ключевой, в ней даются естественные условия для выполнения равенства

$$M^\tau_{l,X} = \overline{M^\tau_{l,X}}. \tag{1}$$

Теорема B [1]. *Пусть по пространствам* X, l, *звездному множеству* $U(0,1)$ *и последовательности* $\tau \in \Upsilon$ *построены пространства* $M^\tau_{l,X}$ *и* $\overline{M^\tau_{l,X}}$.

Определим оператор $T : l \to l$ *равенством*

$$T(\sum e^i x_i) = \sum e^k y_k, \ \text{где} \quad y_k = \sum_{-\infty}^{k} x_i. \tag{2}$$

Если $\|T|l \to l\| = c_1 < \infty$, *то справедливо равенство (1), причем для каждой* $f \in \overline{M^\tau_{l,X}}$ *справедливы неравенства* $\|f|\overline{M^\tau_{l,X}}\| \leqslant \|f|M^\tau_{l,X}\| \leqslant c_1\|f|\overline{M^\tau_{l,X}}\|$.

Следующие две теоремы являются основными.

Теорема 1. *Зафиксируем идеальное пространство* X, *звездное множество* $U(0,1)$ *и последовательность* $\tau \in \Upsilon$. *Пусть задан набор идеальных пространств последовательностей* $\{l_\beta\}$, $(\beta \in (\beta_0,\beta_1))$, *по каждому* $\{l_\beta\}$ *построим локальное пространство Морри* $M^\tau_{l_\beta,X}$ *и аппроксимационное локальное пространство Морри* $M^\tau_{l_\beta,X}$, $(\beta \in (\beta_0,\beta_1))$. *Пусть задана измеримая функция* $\xi : (\beta_0,\beta_1) \to R_+$. *Положим* $\bar{l} = \sum\{\xi, l_\alpha\}$.

Тогда справедливо равенство

$$\sum\{\xi, \overline{M^\tau_{l_\beta,X}}\} = \overline{M^\tau_{\bar{l},X}},$$

и нормы в этих пространствах совпадают.

Если в каждом из пространств $\{l_\beta\}$, $(\beta \in (\beta_0,\beta_1))$ *ограниченно действует оператор* T, *определенный равенством (2), и выполнено условие*

$$\sup_\beta \|T|l_\beta \to l_\beta\| = c_2 < \infty, \tag{3}$$

то справедливо равенство $\sum\{\xi, M^\tau_{l_\beta,X}\} = M^\tau_{\bar{l},X}$, *и для каждой* $f \in M^\tau_{\bar{l},X}$ *справедливы неравенства*

$$\|f|\sum\{\xi, M^\tau_{l_\beta,X}\}\| \leqslant \|f|M^\tau_{\bar{l},X}\| \leqslant c_2\|f|\sum\{\xi, M^\tau_{l_\beta,X}\}\|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Положим* $\underline{l} = \bigcap\{\xi, l_\beta\}$.

Тогда справедливо равенство $\bigcap\{\xi, M^{\tau}_{l_\beta,X}\} = M^{\tau}_{\underline{l},X}$, *и нормы в этих пространствах совпадают.*

Если в каждом из пространств $\{l_\beta\}$, $(\beta \in (\beta_0, \beta_1))$ *ограниченно действует оператор* T, *и выполнено условие (3), то справедливо равенство*

$$\bigcap\{\xi, \overline{M^{\tau}_{l_\beta,X}}\} = \overline{M^{\tau}_{\underline{l},X}}$$

и для каждой $f \in M^{\tau}_{\underline{l},X}$ *справедливы неравенства*

$$\|f|\bigcap\{\xi, M^{\tau}_{l_\beta,X}\}\| \leqslant \|f|M^{\tau}_{\underline{l},X}\| \leqslant c_2\|f|\bigcap\{\xi, M^{\tau}_{l_\beta,X}\}\|.$$

Из теорем 1-2 получаются новые теоремы экстраполяции для операторов, действующих в локальных пространствах Морри.

Литература

1. *Berezhnoĭ E.I.* A discrete version of local Morrey spaces. // Izvestiya: Mathematics **81**:1 (2017), 1-28.

ОЦЕНКИ НОРМ ОДНОГО КЛАССА ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Т.М. Вуколова, Б.В. Симонов

tmvukolova@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

УДК 517.5

Исследованы суммы двойных рядов по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям. Получены достаточные условия принадлежности этих сумм классам $L_p(0 < p < \infty)$.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, монотонность, последовательность, сумма

Norm's estimates for one class of double series

Sums of double sine and cosine series with multiply monotonic coefficients are investigated. Sufficient conditions are got under which this sums belong to L_p classes $(0 < p < \infty)$.

Keywords: series, coefficients of series, monotoness, sequence, sum

---

Вуколова Татьяна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatiana Vukolova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Симонов Борис Витальевич, к.ф.-м.н., доцент, ВолгГТУ (Волгоград, Россия); Boris Simonov (Volgograd State Technical University, Russia)

Будем рассматривать двойные тригонометрические ряды вида

$$\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{0,n_2}\sin n_2x_2+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1,0}\sin n_1x_1+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2. \tag{2}$$

При изучении сходимости двойных рядов (1) и (2) рассматривается их сходимость по Прингсхейму, определяемая следующим образом. Для числового ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu\nu} \tag{3}$$

рассматривается его прямоугольная сумма $S_{mn}=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sum\limits_{\mu=0}^{m} c_{\mu\nu}$.

Если существует число S и для любого $\varepsilon>0$ найдутся натуральные числа k и l такие, что $|S_{mn}-S|<\varepsilon$ при любом $n>k$ и любом $m>l$, то говорят, что ряд (3) сходится по Прингсхейму к своей сумме S (см. [1]).

Будем писать, что $f(x_1,x_2)\in L_p, 0<p<\infty$, если $f(x_1,x_2)$ есть $2\pi-$ периодическая по каждой переменной и измеримая на $[-\pi,\pi]^2$ функция, и $\|f(x_1,x_2)\|_p=\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty$.

Определим понятие разбиения последовательности коэффициентов по подпоследовательностям.

Пусть дано натуральное число r. Последовательность коэффициентов $\{a_n\},\ n\in\mathbb{N}$, можно разбить на r подпоследовательностей

$$\{a_{rk}\},\{a_{rk-1}\},...,\{a_{rk-r+1}\},k\in\mathbb{N}$$

В частности, при $r=1$ имеется одна подпоследовательность: это сама последовательность $\{a_n\},\ n\in\mathbb{N}$; при $r=2$ имеется две подпоследовательности : $\{a_{2k}\}$ и $\{a_{2k-1}\},\ k\in\mathbb{N}$; при $r=3$ имеется три подпоследовательности : $\{a_{3k}\}$, $\{a_{3k-1}\}$ и $\{a_{3k-2}\},\ k\in\mathbb{N}$ и т.д..

Пусть даны натуральные числа r_1 и r_2. Если в одномерном случае последовательность коэффициентов $\{a_n\},\ n\in\mathbb{N}$, разбивается на r подпоследовательностей, то в двумерном последовательность коэффициентов $\{a_{n_1n_2}\},n_1\in\mathbb{N},n_2\in\mathbb{N}$, можно разбить на $r_1\cdot r_2$ подпоследовательностей

$\{a_{r_1n_1,r_2n_2}\},\{a_{r_1n_1,r_2n_2-1}\},...,\{a_{r_1n_1,r_2n_2-r_2+1}\},\{a_{r_1n_1-1,r_2n_2}\},...,$
$\{a_{r_1n_1-r_1+1,r_2n_2-r_2+1}\}$.

В частности, при $r_1=2,r_2=3$ получим 6 подпоследовательностей:
$\{a_{2n_1,3n_2}\},\{a_{2n_1,3n_2-1}\},\{a_{2n_1,3n_2-2}\},\{a_{2n_1-1,3n_2}\},\{a_{2n_1-1,3n_2-1}\},$
$\{a_{2n_1-1,3n_2-2}\}$.

Перейдем к формулировке основных теорем для рядов (1) и (2) с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям.

Пусть $r_1\in\mathbb{N},\ r_2\in\mathbb{N},\ j_1=1,2;j_2=1,2;\ [a]-$ целая часть числа a, $k_1=0,1,...,[\frac{r_1}{2}];k_2=0,1,...,[\frac{r_2}{2}]$. Введем следующие обозначения:

$\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2})=a_{n_1n_2}-a_{n_1+r_1n_2}$,

$\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2}) = a_{n_1n_2} - a_{n_1n_2+r_2},$
$\Delta_{20}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{10}^{(r_1,0)}(\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2})),$
$\Delta_{02}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{01}^{(0,r_2)}(\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$
$\Delta_{i_1i_2}^{(r_1,r_2)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{i_10}^{(r_1,0)}(\Delta_{0i_2}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$
$\delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(a_{n_1,n_2}) = a_{r_1n_1,r_2n_2} + (-1)^{j_1+1}a_{r_1n_1+(r_1-k_1)\mathrm{sign}k_1,r_2n_2},$
$\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2}) = a_{r_1n_1,r_2n_2+k_2} + (-1)^{j_2+1}a_{r_1n_1,r_2n_2+(r_2-k_2)\mathrm{sign}k_2};$
$\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}) = \delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2})),$
$\Sigma_1(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}) =$
$= \Big(\sum\limits_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum\limits_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum\limits_{j_2=1}^{2}\sum\limits_{j_1=1}^{2}\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1-\mathrm{sign}k_2}^{\infty}|\Delta_{2-j_1,j_2-1}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))|^p\cdot$
$\cdot(n_2+1)^{j_2p-2}(n_1+1)^{(3-j_1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}},$
$\Sigma_2(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}) =$
$= \Big(\sum\limits_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum\limits_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum\limits_{j_2=1}^{2}\sum\limits_{j_1=1}^{2}\sum\limits_{n_2=0}^{\infty}\sum\limits_{n_1=1-\mathrm{sign}k_1}^{\infty}|\Delta_{j_1-1,2-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))|^p\cdot$
$\cdot(n_1+1)^{j_1p-2}(n_2+1)^{(3-j_2)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < \infty; r_1 \in N; r_2 \in N$; *последовательность* $\{a_{n_1n_2}\}$ *такова, что* $a_{n_1n_2} \to 0$ *при* $n_1+n_2 \to \infty$ *и для каждого* $k_1 = 0,1,...,[\frac{r_1}{2}]$; *каждого* $k_2 = 0,1,...,[\frac{r_2}{2}]$; *каждого* $j_1 = 1,2$; *каждого* $j_2 = 1,2$ *справедливы неравенства:*
$\Delta_{3-j_1,j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2})) \geqslant 0$ *для всех* n_1,n_2 *или*
$\Delta_{3-j_1,j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}(a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)})) \leqslant 0$ *для всех* n_1,n_2.
Тогда ряд (1) сходится почти всюду по Прингсхейму и для его суммы справедливы оценки

$$C_1\cdot\Sigma_1(r_1,r_2,p,)\{a_{n_1n_2}\}) \leqslant \|\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{0,n_2}\sin n_2x_2 +$$

$$+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2\|_p \leqslant C_2\cdot\Sigma_1(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}), \qquad (4)$$

где положительные постоянные C_1, C_2 *не зависят от последовательности* $\{a_{n_1n_2}\}$.

Теорема 2 *Пусть* $0 < p < \infty; r_1 \in N; r_2 \in N$; *последовательность* $\{a_{n_1n_2}\}$ *такова, что* $a_{n_1n_2} \to 0$ *при* $n_1+n_2 \to \infty$ *и для каждого* $k_1 = 0,1,...,[\frac{r_1}{2}]$; *каждого* $k_2 = 0,1,...,[\frac{r_2}{2}]$; *каждого* $j_1 = 1,2$; *каждого* $j_2 = 1,2$ *справедливы неравенства:*
$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2})) \geqslant 0$ *для всех* n_1,n_2 *или*
$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}(a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)})) \leqslant 0$ *для всех* n_1,n_2.
Тогда ряд (2) сходится почти всюду по Прингсхейму и для его суммы справедливы оценки

$$C_3 \cdot \Sigma_2(r_1, r_2, p, \{a_{n_1 n_2}\}) \leqslant \| \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1,0} \sin n_1 x_1 +$$

$$+ \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 \|_p \leqslant C_4 \cdot \Sigma_2(r_1, r_2, p, \{a_{n_1 n_2}\}), \qquad (5)$$

где положительные постоянные C_3, C_4 не зависят от $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Для $r_1 = r_2 = 1$ оценки (4) и (5) доказаны в работе [2].

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами рассматривались в [3].

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с коэффициентами, монотонными по подпоследовательностям, рассматривались в [4].

Рассмотрим в качестве примера следующие ряды ($i = 1, 2$):

$$f_i(x_1, x_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\ln(3n_1+2)} \frac{1}{\ln(3n_2+2)} \cos(3n_1+1)x_1 \sin(3n_2+1)x_2 +$$
$$+ (-1)^i \frac{1}{\ln(3n_1+2)} \frac{1}{\ln(3n_2+3)} \cos(3n_1+1)x_1 \sin(3n_2+2)x_2 +$$
$$+ \frac{1}{\ln(3n_1+3)} \frac{1}{\ln(3n_2+2)} \cos(3n_1+2)x_1 \sin(3n_2+1)x_2 +$$
$$+ (-1)^i \frac{1}{\ln(3n_1+3)} \frac{1}{\ln(3n_2+3)} \cos(3n_1+2)x_1 \sin(3n_2+2)x_2 .$$

Тогда, применяя теорему 1, получим, что эти ряды сходятся почти всюду и $f_1(x_1, x_2) \in L_1$, а $f_2(x_1, x_2) \overline{\in} L_1$.

Литература

1. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч.1. — М.: Физматгиз, 1962.

2. *Вуколова Т.М., Дьяченко М.И.* Оценки норм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика, № 7 (1994), 20-28.

3. *Вуколова Т.М., Дьяченко М.И.* О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 3 (1995), 22-32.

4. *Симонов Б.В.* О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Математика, № 10 (2013), 24-42.

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СИСТЕМАМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

УДК 517.518.32, 517.521.2

Приводится краткий обзор результатов о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по функциональным системам. Для систем сжатий и сдвигов указывается возможность усиления ранее известного результата, связанная с отказом от знакопостоянства порождающей функции.

Ключевые слова: орторекурсивные разложения, системы сжатий и сдвигов, сходимость почти всюду

On convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of translates and dilates of an alternating-sign function

We briefly review results on convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in functional systems. For systems of translates and dilates we point out that a previously known result on convergence almost everywhere can be improved by excluding the condition of non-negativity of a generating function.

Keywords: orthorecursive expansions, systems of translates and dilates, convergence almost everywhere

Орторекурсивные разложения [1–3] представляют собой естественное обобщение разложений в ряды Фурье по ортогональным системам. Сохраняя такие свойства, как тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность сходимости к разлагаемому элементу равенству Парсеваля, для широкого класса переполненных систем орторекурсивные разложения обеспечивают абсолютную устойчивость к ошибкам в вычислении коэффициентов, а также устойчивость к изменениям самой системы [4].

К настоящему времени получен целый ряд результатов о сходимости орторекурсивных разложений по норме, порожденной скалярным произведением — как общих [2–4], так и сфокусированных на конкретных функциональных системах [2,5,6]. Сходимость почти всюду орторекурсивных разложений остается менее изученной. Говоря об общих результатах, связанных со сходимостью орторекурсивных разложений почти всюду, следует

Работа выполнена при поддержке проекта “Многомерные приближения, восстановление и сжатие с приложениями к анализу больших объёмов данных” (ПП 220, договор 14.W03.31.0031).

Галатенко Владимир Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir V. Galatenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Лукашенко Тарас Павлович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Taras P. Lukashenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Садовничий В.А., акад., ректор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Victor A. Sadovnichy (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

обратить внимание на теоремы о множителях Вейля для орторекурсивных разложений [7,8]. Эти теоремы могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 1 [7]. *Пусть коэффициенты* $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *орторекурсивного разложения функции* $f(x) \in L^2$ *по нормированной функциональной системе удовлетворяют следующему условию: для некоторой последовательности положительных чисел* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|\widehat{f}_n\right|^2$ *сходится. Тогда это орторекурсивное разложение абсолютно сходится почти всюду.*

Необходимо отметить, что Теорема 1 утверждает факт наличия сходимости почти всюду, но не утверждает, что пределом являются значения разлагаемой функции $f(x)$.

Теорема 2 [8]. *Пусть коэффициенты* $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *орторекурсивного разложения функции* $f(x) \in L^2$ *по нормированной функциональной системе удовлетворяют условию* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left|\widehat{f}_n\right|^2 < \infty$ *и при этом орторекурсивное разложение сходится к разлагаемой функции в* L^2. *Тогда имеет место и сходимость к ней почти всюду.*

В совокупности Теоремы 1 и 2 показывают, что в общей ситуации множителями Вейля для орторекурсивных разложений являются последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ (причем это условие ослаблено быть не может [7]), но при наличии сходимости разложения к разлагаемой функции в L^2 множителем Вейля является последовательность $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Говоря о результатах, связанных со сходимостью почти всюду орторекурсивных разложений по конкретным функциональным системам, следует упомянуть работы [1,2,5], рассматривающие орторекурсивные разложения по системам характеристических функций промежутков и их обобщения, а также выделить результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов. В частности, в работе [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 3 [9]. *Пусть функция* φ *непрерывна и неотрицательна на отрезке* $[0,1]$ *и при этом удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\varphi}^2\left(2^{-k}\right) < \infty$$

(*здесь через* $\omega_{\varphi}(\,\cdot\,)$ *обозначен модуль непрерывностb функции* φ *на отрезке* $[0,1]$). *Тогда для каждой функции* $f \in L^2[0,1]$ *ее орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов, порожденной функцией* φ, *сходится к* $f(x)$ *почти во всех точках непрерывности функции* f.

Авторам удалось установить, что в утверждении этой теоремы можно отказаться от условия неотрицательности порождающей функции φ, заменив его условием $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx \neq 0$. При этом если $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, то система

сжатий и сдвигов функции φ, очевидно, неполна (и, например, для тождественно единичной разлагаемой функции все коэффициенты орторекурсивного разложения равны нулю).

Доказательство усиленного результата аналогично доказательству, изложенному в работе [9], и дополнительно использует лишь следующую лемму.

Лемма. *Пусть Δ — отрезок числовой прямой, функция $r(x)$ измерима и ограничена на Δ. Пусть также $\psi \in L^1(\Delta)$, $\int\limits_\Delta \psi\, d\mu \neq 0$ и $\int\limits_\Delta r\psi\, d\mu = 0$. Тогда всюду на Δ выполняется неравенство $|r(x)| \leqslant C_\psi \operatorname{osc}(r, \Delta)$, где в качестве C_ψ можно взять $\left(\int\limits_\Delta |\psi|\, d\mu \;\Big/\; \left|\int\limits_\Delta \psi\, d\mu\right|\right)$.*

Открытыми пока остаются вопросы о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов в случае, когда рассмотрение не ограничивается точками непрерывности разлагаемой функции, а также в случае, когда разлагаемая функция лежит в $L^1 \setminus L^2$.

Литература

1. *Лукашенко Т.П.* Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова. — Казань: Казанск. мат. об-во, 1999. — 142-143.

2. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ., № 1 (2001), 6-10.

3. *Политов А.В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах // Матем. заметки, **93**:4 (2013), 637-640.

4. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем., **69**:1 (2005), 3-16.

5. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб., **195**:7 (2004), 935-949.

6. *Кудрявцев А.Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки, **92**:5 (2012), 707-720.

7. *Galatenko V.V., Lukashenko T.P., Sadovnichiy V.A.* Convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in functional systems // Sadovnichiy V., Zgurovsky M. (eds) Advances in Dynamical Systems and Control. Studies in Systems, Decision and Control, vol 69. — Cham: Springer, 2016. — 3-11.

8. *Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ., № 5 (2016), 20-25.

9. *Galatenko V.V., Lukashenko T.P., Sadovnichiy V.A.* Convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of translates and dilates // Sadovnichiy V., Zgurovsky M. (eds) Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. — Cham: Springer, 2019. — 3-11.

ФОРМУЛЫ ТИПА БИНЕ – КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

А.С. Гаспарян
armenak.gasparyan@yandex.ru

УДК 512.643.2

Вводится понятие многомерно-матричного дерева и формулируется теорема, обобщающая классическую теорему Бине-Коши, а также теоремы Гегенбауэра и Олденбургера, на древовидные композиции многомерных матриц. Теорема допускает краткую формулировку в терминах введённых автором сигма-миноров и сигма-ассоциированных матриц.

Ключевые слова: многомерные матрицы, многомерные определители, теорема Бине-Коши, многомерно-матричное дерево, σ-миноры, σ-ассоциированные матрицы.

Cauchy-Binet Type Formulae for Matrix Trees

A new notion, namely the notion of multidimensional-matrix tree, is introduced and a theorem is formulated that generalizes the classical Cauchy-Binet theorem and more general, Gegenbauer and Oldenburger theorems, to tree-like multidimensional-matrix compositions.

Keywords: multidimensional matrices, multidimensional determinants, Cauchy-Binet theorem, multidimensional matrix tree, σ-minors, σ-compound matrices.

Одним из важнейших соотношений в теории определителей является формула Бине-Коши, нашедшая применение почти во всех разделах математики.

Теорема 1 (Бине – Коши [1]). *Для заданных матриц $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ и $B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, где K — произвольное коммутативное кольцо с единицей, и матрицы $C \in \mathcal{M}_{m,m}(K)$, равной $C = AB$, имеет место детерминантное тождество*

$$det(C) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} det\left(A[1, \ldots m | i_1, \ldots, i_m]\right) det\left(B[i_1, \ldots, i_m | 1, \ldots m]\right).$$

Известна почти такая же формула для перманентов тех же матриц:

$$per(C) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n} \left(\prod_{r=1}^{n} \mu(r)!\right)^{-1} per\left(A[1, \ldots m | i_1, \ldots, i_m]\right) \cdot \\ \cdot per\left(B[i_1, \ldots, i_m | 1, \ldots m]\right).$$

Определение 1. *Пусть $A = \|a_{i_1 \ldots i_p}\|$ — p-мерная кубическая матрица n-го порядка, и пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \{0; 1\}^p$.*

Гаспарян Арменак Сократович, к.ф.-м.н., Институт программных систем РАН им. А.К. Айламазяна (Переславль-Залесский, Россия); Armenak S. Gasparyan (Program System Institute of RAS, Pereslavl-Zalesskii, Russia)

Определителем сигнатуры σ (или σ-детерминантом) матрицы A называется выражение

$$|A|^{(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi_1,\dots,\pi_p \in S_n} \prod_{r=1}^{p} (sgn(\pi_r))^{\sigma_r} \prod_{s=1}^{n} a_{\pi_1(s),\dots,\pi_1(s)}.$$

Число единиц в сигнатуре σ, $d = \sum_{r=1}^{p} \sigma_r$, принято считать только чётным и называется родом определителя.

σ-Миноры. Пусть $Q_{m,n}$ — множество строго возрастающих m-последовательностей над множеством $\{1,\dots,n\}$, и пусть $G_{m,n}$ — множество неубывающих m-последовательностей над $\{1,\dots,n\}$. Для удобства изложения мы вводим единое обозначение $\Omega^{(r)}_{m,n} = Q_{m,n}$ при $r = 1$ и $= G_{m,n}$ при $r = 0$.

Пусть заданы: сигнатура $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_p)$, $n_1,\dots,n_p \geqslant 2$, $\omega^{(r)} \in \Omega^{(\sigma_r)}_{m,n_r}$, где $m \geqslant 1$ при $\sigma = (0,\dots,0)$ и $m \leqslant min(n_r)$ при $\sigma \neq (0,\dots,0)$.

Определение 2. *σ-минорной подматрицей m-го порядка p-мерной $n_1 \times \dots \times n_p$-матрицы $A = \|a_{i_1\dots i_p}\|$ называется p-мерная m-кубическая матрица*

$$A[\omega^{(1)}|\dots|\omega^{(p)}] = \|a_{\omega^{(1)}_{j_1}\dots\omega^{(p)}_{j_p}}\|, \qquad j_r = 1,\dots,m.$$

σ-минором m-го порядка матрицы A с заданным набором $\omega^{(r)} \in \Omega^{(\sigma_r)}_{m,n_r}$ называется σ-детерминант σ-минорной подматрицы $A\left[\omega^{(1)},\dots,\omega^{(p)}\right]$, умноженный на нормирующий коэффициент:

$$A^{(\sigma)}_{\omega^{(1)},\dots,\omega^{(p)}} = \prod_{k=1}^{p} \left(\mu(\omega^{(r)})\right)^{-1} \left|A\left[\omega^{(1)},\dots,\omega^{(p)}\right]\right|^{(\sigma)}.$$

Здесь $\mu(\omega) = \prod \mu_s!$, где μ_s — кратности повторений элементов в ω .

σ-Ассоциированные матрицы. σ-миноры m-го порядка $A^{(\sigma)}_{\omega^{(1)},\dots,\omega^{(p)}}$ заданной $n_1 \times \dots \times n_p$-матрицы A образуют p-мерную $N_1 \times \dots \times N_p$-матрицу, где $N_r = |\Omega^{(\sigma_r)}_{m,n_r}|$, если упорядочить множества $\Omega^{(\sigma_r)}_{m,n_r}$ лексикографически. Эту новую матрицу назовём m-ой σ-ассоциированной матрицей матрицы A и обозначим через $\tilde{A}^{(\sigma)}_m$:

$$\tilde{A}^{(\sigma)}_m = \|A^{(\sigma)}_{\omega^{(1)},\dots,\omega^{(p)}}\|, \qquad \omega^{(r)} \in \Omega^{(\sigma_r)}_{m,n_r}.$$

Умножение матриц. Уже для обычных двумерных матриц можно насчитать десяток существующих бинарных умножений. История теории многомерных матриц также насчитывает множество операций, введённых в тех или иных целях. Среди них тензорные (или кронеккеровы) произведения, кэлиевы, скоттовы, адамаровы и некоторые другие. Н.П. Соколов [2] ввёл понятие (λ,μ)-свёрнутого произведения двух многомерных матрицы, λ — число связанных индексов, μ — число индексов суммирования. Пример многоместной операции над многомерными матрицами, основанный на суперпозициях полилинейных отображений, был предложен автором [3]. Важным частным случаем является $(0,1)$-свёрнутое умножение.

Определение 3. $(0,1)$-*свёрнутым произведением матриц* $A \in \mathcal{M}_{n_1,\dots,n_{r-1},n,n_{r+1},\dots,n_p}$ *и* $B \in \mathcal{M}_{m_1,\dots,m_{s-1},n,m_{s+1},\dots,m_q}$ *по их* r*-тому и* s*-тому индексам соответственно называется матрица* $C = A^{(r,s)}B$, $C \in \mathcal{M}_{n_1,\dots,n_{r-1},n_{r+1},\dots,n_p,m_1,\dots,m_{s-1},m_{s+1},\dots,m_q}$, *элементы которой определяются по формуле*

$$C_{I_1 I_2 J_1 J_2} = \sum_{i=1}^{n} A_{I_1 i I_2} B_{J_1 i J_2}.$$

(Здесь мы использовали сокращённые обозначения для последовательностей индексов $(i_1,\dots,i_{r-1})$, $(i_{r+1,\dots,i_p})$ *и т.д.)*

Теорема 2 (Гегенбауэр, Олденбургер [4,5]). *Если сигнатуры* σ *и* τ *согласованы по* r*-тому и* s*-тому индексам, т.е. если* $\sigma_r = \tau_s$, *то имеет место следующее детерминантное тождество*

$$\left(\widetilde{A(r,s)B}\right)_m^{(\sigma')} = \tilde{A}_m^{(\sigma)}(r,s)\tilde{B}_m^{(\tau)},$$

где $\sigma' = (\sigma \sqcup \tau)\backslash\{\sigma_r, \tau_s\}$.

Последовательно производя $(0,1)$-свёрнутые умножения над конечным множеством матриц, мы приходим к древовидным композициям. Пусть $T = (V,E)$ — дерево с множеством вершин $V = \{v_1,\dots,v_t\}$ и множеством рёбер $E = e_1,\dots,e_{t-1}$, и пусть p_u — валентность вершины v_u, $u = 1,\dots,t$. Пусть, кроме того, задано t многомерных матриц $A^{(1)},\dots,A^{(t)}$, размерности которых равны $dim(A^{(u)}) = q_u$, $q_u \geqslant p_u$. В каждой матрице $A^{(u)}$, из q_u её индексов выберем произвольным образом p_u индексов $i_1^{(u)},\dots,i_{p_u}^{(u)}$, по одному индексу на каждое полуребро, инцидентное вершине v_u. Далее потребуем, чтобы индексы $i_r^{(u)}$ и $i_s^{(v)}$, соответствующие ребру (u,v), пробегали один и тот же ряд значений $1,\dots,n_{(u,v)}$, тем самым отождествляя все такие пары индексов: $(i_r^{(u)}, i_s^{(v)}) \to i_{(u,v)}$, затем в произведении $\prod_{u=1}^{t} a^{(u)}_{i_1^{(u)}\dots i_{p_u}^{(u)} j_1^{(u)}\dots j_{q_u-p_u}^{(u)}}$ произведём суммирование по всем индексам $i_{(u,v)}$. В результате получится некоторая многомерная матрица $C = \|C_{J^{(1)}\dots J^{(t)}}\|$, $J^{(u)} = (j_1^{(u)}\dots j_{q_u-p_u}^{(u)})$.

Определение 4. *Пусть* $T = (V,E)$ *— дерево и* $\{A^{(u)}\}_{u=1}^{t}$ *— семейство матриц, и пусть выполнены описанные выше условия и обозначения. Тогда матрицу* C, *элементы которой равны*

$$C_{J^{(1)}\dots J^{(t)}} = \sum_{i_{(u,v)},(u,v)\in E} \prod_{u=1}^{t} a^{(u)}_{I^{(u)}J^{(u)}},$$

назовём матричным деревом и обозначим через $T(A^{(1)},\dots,A^{(t)})$.

Теорема 3 (Теорема Бине-Коши для матричных деревьев).

Пусть $C = T(A^{(1)},\dots,A^{(t)})$, *где* $A^{(u)} = \|a^{(u)}_{I^{(u)}J^{(u)}}\|$, $u = 1,\dots,t$, *и пусть для каждой из матриц* $A^{(u)}$ *задана сигнатура её миноров* $\sigma^{(u)} = (\sigma_1^{(u)},\dots,\sigma_{q_u}^{(u)})$, *причём сигнатуры* $\sigma^{(u)}$ *попарно согласованы в следующем смысле: если индексы* $i_r^{(u)}$ *и* $i_s^{(v)}$ *соответствуют одному и тому же ребру, то* $\sigma_r^{(u)} = \sigma_s^{(v)}$. *Тогда имеют место тождества*

$$\tilde{C}_m^{(\sigma)} = T\left((\tilde{A}^{(1)})_m^{(\sigma^{(1)})},\dots,(\tilde{A}^{(t)})_m^{(\sigma^{(t)})}\right),$$

где $\sigma = \bigsqcup_{u=1}^{t} \sigma^{(u)} \backslash \{\sigma_{i_1}^{(u)}, \ldots, \sigma_{i_{p_u}}^{(u)}\}$, m — *произвольный допустимый порядок* σ*-миноров матриц* $A^{(u)}$.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — Наука, М.,1967.

2. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. — Наукова думка, Киев, 1972.

3. *Гаспарян А.С.* Аналог формулы Бине–Коши для многомерных матриц // Докл. АН СССР, **273**:2 (1983) 270-275.

4. *Gegenbauer L.* Einige Satze über Determinanten hoheren Ranges // Denkschr. Akad. Wiss. Vien Math.-naturwiss. C1 57 (1890) 735-752.

5. *Oldenburger R.* Composition and rank of n-way matrices and multilinear forms // Ann. Math. 35 (1934), 622-657.

РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СТРАТЕГИИ МАРКОВИЦА

С.Ю. Гоголева, А.Х. Ишмаметов

gogoleva_s@mail.ru, ishmametov.aleksander@yandex.ru

УДК 519.6

Рассматривается новый подход для решения задач наименьших квадратов. Данный подход позволяет эффективно вычислять нормальные решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и находить приемлемое по точности решение. Его модификация для данной задачи с учетом разреженности расширенной системы позволяет существенно сократить количество шагов алгоритма, а также уменьшить объемы затрачиваемой оперативной памяти и арифметических операций. Стратегия Марковица в рассмотренной модификации позволяет уменьшить заполнение разреженной матрицы.

Ключевые слова: разреженная матрица, расширенная система, метод регуляризации, стратегия Марковица, заполнение

Гоголева Софья Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Самара, Россия); Gogoleva Sofia Yuryevna, associate professor, (Samara National Research University, Samara, Russia)

Ишмаметов Александр Харисович, студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Самара, Россия); Ishmametov Aleksandr Kharisovich, student, (Samara National Research University, Samara, Russia)

Ill-conditioned least-squares problems solutions with sparse matrices based on the regularization method using the Markowitz strategy

A new approach to solving least-squares problems is considered. This approach makes it possible to effectively calculate solutions of ill-conditioned linear equations systems and to find an acceptable solution in accuracy. Its modification for this problem, taking into account the sparseness of the augmented system, allows to significantly reduce the number of steps of the algorithm, as well as to reduce the amount of random-access memory and arithmetic operations. The Markowitz strategy in this modification allows to reduce the fill-in of a sparse matrix.

Keywords: sparse matrix, augmented system, regularization method, Markowitz strategy, filling

Постановка задачи. Рассмотрим произвольную СЛАУ (1).

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A \in R^{m \times n}, m \geqslant n, x \in R^n, b \in R^m$.
Регуляризованное решение (1) находится как [1]:

$$\arg\min_{x \in R^n} \left\{ ||Ax - b||_2^2 + \alpha ||x||^2 \right\}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ - параметр регуляризации, $|| \cdot ||_2$ - евклидова норма вектора. Уравнение (2) является эквивалентным решению нормальной системы:

$$(A^T A + \alpha^2 E_n)x = A^T b, \tag{3}$$

где T — знак транспонирования, E — единичная матрица порядка n.

Число обусловленности системы (3) $cond_2(A^T A + \alpha^2 E_n) = \dfrac{\sigma_1^2 + \alpha^2}{\sigma_m^2 + \alpha^2}$.

С учётом того, что число обусловленности задачи (3) равно приблизительно квадрату числа обусловленности исходной задачи (2), многие плохо обусловленные задачи вида (2) решить известными методами практически невозможно. Регуляризованную нормальную систему уравнений (2) можно записать в виде [2]:

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ A^T & -\alpha^2 E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

где $r = f - Ax$ вектор невязки. Число обусловленности матрицы системы (4) незначительно меньше числа обусловленности матрицы нормальной системы уравнений (3). Поэтому с целью снижения числа обусловленности в систему (4) вводится параметр $\beta > 0$:

$$\begin{pmatrix} \beta E_m & A \\ A^T & -\alpha^2 E_n/\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r/\beta \\ x \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

Параметр β будем искать по формулам: $\beta_* = \sqrt{\frac{\sigma_{\min}^2}{2} + \alpha^2}$, $\beta_{**} = \sqrt{\alpha}$, где $\sigma_{\min}^2$ минимальное сингулярное число матрицы A.

Таким образом, рассматриваемый подход позволяет повысить численную устойчивость рассматриваемой задачи и снизить погрешности при нахождении решения системы уравнений (2).

Применение метода регуляризации и стратегии Марковица к решению задач с разреженными матрицами. Рассмотрим стратегию Марковица выбора ведущего элемента [3].

Чтобы процесс был численно устойчивым, мы не будем допускать на роль главных очень малые элементы. С этой целью введем коэффициент устойчивости $u \geqslant 1$ и будем требовать выполнения одного из трех неравенств

$$u|a_{kk}^{(k)}| \geqslant |a_{ik}^{(k)}|, i = k+1, ..., n \tag{6}$$

$$u|a_{kk}^{(k)}| \geqslant |a_{kj}^{(k)}|, j = k+1, ..., n \tag{7}$$

$$u|a_{kk}^{(k)}| \geqslant |a_{ij}^{(k)}|, i, j = k, ..., n \tag{8}$$

Обобщенная стратегия Марковица состоит в том, что на k-м шаге гауссова исключения в качестве главного элемента выбирается произвольный элемент.

Улучшенная обобщенная стратегия Марковица состоит в том, что на $k - m$ шаге гауссова исключения в качестве главного элемента выбирается наибольший по модулю из элементов.

В таблице 1 приведены результаты вычислений расширенной системы размером 1100x1100 (погрешность/заполнение) для матрицы e20r0100 размером 600x500 с количеством ненулевых элементов 13277 [4].

Таблица 1 — Результаты вычислений для матрицы e20r0100

	$\alpha = 10^{-15}$		
u	$\beta = 1$	β_*	β_{**}
1	$5.67^{-13}/26454$	$5.87^{-13}/26454$	$6.36^{-13}/26454$
2	$5.67^{-13}/23867$	$5.59^{-13}/22982$	$5.62^{-13}/22409$
5	$8.95^{-12}/25523$	$5.64^{-13}/23474$	$5.62^{-13}/23456$
10	$6.30^{-12}/24954$	$5.64^{-13}/22384$	$5.62^{-13}/23323$
	$\alpha = 10^{-25}$		
u	$\beta = 1$	β_*	β_{**}
1	$2.92^{-13}/26454$	$1.90^{-13}/26454$	$2.32^{-13}/26454$
2	$3.63^{-12}/22679$	$6.99^{-15}/23429$	$2.21^{-15}/13335$
5	$8.27^{-12}/25132$	$5.01^{-15}/22771$	$3.22^{-15}/14407$
10	$9.47^{-12}/24694$	$1.09^{-14}/23184$	$3.83^{-15}/14761$

Заключение. В статье был рассмотрен метод регуляризации со стратегией Марковица выбора ведущего элемента применительно к задаче наименьших квадратов.

Подбор параметров регуляризации и выбор ведущего элемента по стратегии Марковица позволяет уменьшить заполнение и снизить погрешность для данной задачи. Этот факт существенно упрощает решение задачи и уменьшает время поиска ее решения, позволяет получить решение нужной точности, что является довольно существенным преимуществом.

Литература

1. *Жданов А.И.* Метод решения регуляризованных нормальных уравнений // Журнал выч. мат. и матем. физики, **52**:2 (2012), 205-208.

2. *Bjork A.* Numerical stability of methods for solving augmented system // Contemporary Math. 1997. Vol. 204. P. 51–60.

3. *Златев, З., Эстербю О.* Прямые методы для разреженных матриц: Пер. с англ.- М.: Мир 1987. - 120 с

4. SPARSKIT Collection. [Электронный ресурс] // MatrixMarket: [сайт]. [2000]. URL: https://math.nist.gov/MatrixMarket/data/SPARSKIT/ (1.02.19).

БАЛАНСНО – ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В.М. Головизнин, Б.Н. Четверушкин

gol@ibrae.ac.ru

При переходе к массивным параллельным вычислениям все большую популярность приобретают явные вычислительные алгоритмы, которые легко масштабируются на тысячи и сотни тысяч процессоров с распределенной памятью. Однако все явные схемы обладают условной устойчивостью, ограничивающей выбор величины временного шага интегрирования. Для уравнений гиперболического типа, характеризующихся конечной скоростью распространения малых возмущений, допустимая величина шага по времени сопоставима со временем распространения сигнала на характерный размер расчетной ячейки. Такое ограничение является естественным и позволяет корректно отображать области зависимости решения. Для уравнений параболического типа условия устойчивости явных схем во многих случаях оказываются излишне жесткими, поскольку величина допустимого шага по времени пропорциональна квадрату характерного размера расчетной сетки. При совместном решении гиперболических и параболических уравнений именно последние становятся «узким местом» и приводят к катастрофической потере вычислительной эффективности явных алгоритмов.

При прямом моделировании турбулентных течений с большими числами Рейнольдса на подробных расчетных сетках по явным схемам процессы

Головизнин Василий Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir M. Goloviznin (Lomonosov Moscoe State University, Moscow, Russia)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir M. Goloviznin (Lomonosov Moscoe State University, Moscow, Russia)

диффузии импульса и внутренней энергии часто оказываются лимитирующими, несмотря на малость коэффициентов вязкости и теплопроводности. В таких случаях может оказаться полезной искусственная гиперболизация диссипативных процессов.

Искусственная гиперболизация параболических уравнений заключается в следующем. Уравнение параболического типа записывается в виде системы уравнений, содержащей только производные первого порядка. В соотношения, определяющие потоки (обобщенные законы Фурье) добавляются производные от этих потоков по времени с малым параметром, зависящем от размеров расчетных ячеек. Это меняет тип системы, и она становится гиперболической. Аппроксимация при этом сохраняется, только уменьшается ее порядок.

Для численного решения гиперболизованной системы предлагается использовать консервативные сеточно – характеристические алгоритмы (Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н.) разработанные для систем законов сохранения гиперболического типа.

В консервативных сеточно – характеристических алгоритмах используются т.н. G-сетки, в которых рассчитываемые величины относятся как к центрам ячеек, так и к серединам их граней. Расширенное число степеней свободы позволяет разрешать тонкие особенности вихревых и турбулентных течений на относительно грубых расчетных сетках. При совместном решении на таких сетках гиперболических и параболических уравнений достигается синэргетический эффект, связанный с использованием единой сеточной инфраструктуры. Кроме того, допустимая величина шага по времени оказывается пропорциональной характерному сеточному размеру в степени три вторых.

Приводятся результаты расчета модельных задач, иллюстрирующие особенности предложенного метода.

ОБОБЩЕННАЯ ДВОИЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЕЕ РЯДА ФУРЬЕ – УОЛША

Б.И. Голубов, С.С. Волосивец

golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

УДК 517.518

Вводится понятие обощенной двоичной производной, для которой доказываются аналоги неравенства Бернштейна для полиномов Уолша и обратной теоремы приближения. Изучается равномерная сходимость ряда Фурье-Уолша обощенной двоичной производной.

Ключевые слова: обобщенная двоичная производная, ряд Фурье-Уолша, равномерная сходимость, наилучшее приближение.

Голубов Борис Иванович, д.ф.-м.н., профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Долгопрудный, Россия); Boris Golubov (Moscow Institute of Physical Technologies (State University), Dolgoprudnyi, Russia)

Волосивец Сергей Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н.Г.Чернышевского (Саратов, Россия); Sergey Volosivets (Saratov State University, Saratov, Russia)

Generalized dyadic derivative and uniform convergence of its Walsh – Fourier series

Short abstract. The notion of generalized dyadic derivative is introduced. Analogues of Bernstein inequality for Walsh polynomials and inverse theorem of approximation are proved for it. The uniform convergence of Walsh – Fourier series of generalized dyadic derivative is studied.

Keywords: generalized dyadic derivative, Walsh – Fourier series, uniform convergence, best approximation.

Рассмотрим на $[0,1)$ функцию $r_0(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x)$, где χ_E — индикатор множества E. Продолжим ее на действительную ось как 1-периодическую функцию и положим $r_k(x) = r_0(2^k x)$, $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Каждое число $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ имеет двоичное разложение $n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$ и ε_i равны 0 или 1 при $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Положим $w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$ в этом случае и $w_0(x) \equiv 1$. Система $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой Уолша. Известно, что система Уолша ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$. Рядам Фурье – Уолша посвящена монография [1].

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье – Уолша и частичные суммы ряда Фурье – Уолша задаются формулами

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(x) w_k(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Понятие двоичной производной введено П.Л. Бутцером и Х. Вагнером [2], которые использовали специальный разностный оператор. Другие подходы к определению и связи между различными определениями двоичной производной и интеграла см. в [3].

Пространство $L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, определяется, как обычно, а пространство $C^*[0,1)$ двоично непрерывных функций вводится как замыкание множества $\mathcal{P}$ полиномов Уолша в раномерной норме $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1)} |f(x)|$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(k) = 0, k \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $f \in L^p[0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($L^\infty[0,1) = C^*[0,1)$), можно определить n-е наилучшее приближение по системе Уолша $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ является неубывающей неотрицательной последовательностью, такой что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Если $f \in L^p[0,1)$, $p \in [1,\infty]$, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \widehat{f}(n) w_n(x)$ представляет собой ряд Фурье – Уолша функции $\varphi \in L^p[0,1)$, то φ называется λ-производной f в $L^p[0,1)$ (обозначение $\varphi = f_p^{(\lambda)}$). Подобные обобщенные производные в тригонометрическом случае изучались А.И. Степанцом [4]. Для $\lambda_n = n^\alpha$, $\alpha > 0$, λ-производная сводится к дробной двоичной производной порядка α.

Следующий результат является аналогом неравенства Бернштейна для обобщенной двоичной производной.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ является неотрицательной, неубывающей и вогнутой, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда для полинома Уолша $t_{2^r} = \sum_{k=0}^{2^r-1} c_k w_k \in \mathcal{P}_{2^r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство $\|t_{2^r}^{(\lambda)}\|_p \leqslant C\lambda_{2^r} \|t_{2^r}\|_p$.*

Теорема 2 является аналогом обратной теоремы приближения для дифференцируемых функций (см. [5, гл. 7, теорема 3.2]).

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является неотрицательной, неубывающей и вогнутой,* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$ *и сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\lambda_k E_k(f)_p$. *Тогда существует* $f_p^{(\lambda)}$ *и*

$$E_n(f_p^{(\lambda)})_p \leqslant C\left(\lambda_n E_n(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1}\lambda_k E_k(f)_p\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является неотрицательной, неубывающей и вогнутой,* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$ *и сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p-1}\lambda_k E_k(f)_p$. *Тогда существует* $f_p^{(\lambda)}$, *которая эквивалентна (т.е. равна п.в.)* $f^{(\lambda)} \in C^*[0,1)$ *и при этом* $\lim_{n\to\infty} \|f^{(\lambda)} - S_n(f^{(\lambda)})\|_{\infty} = 0$.

Литература

1. *Голубов Б.И., Ефимов А,В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — Москва: Наука, 1987.

2. *Butzer P.L., Wagner H.J.* Walsh series and the concept of a derivative // Applic. Anal., **3**:1 (1973), 29-46.

3. *Golubov B.I.* On some properties of fractional dyadic derivative and integral // Analysis Math., **32**:3 (2006), 173-205.

4. *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Известия АН СССР. Сер. матем., **50**:1 (1986), 101-136.

5. *DeVore R., Lorentz G.G.* Constructive approximation. — Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.

О ЧИСЛЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Звягин, Г.М. Кобельков, М.А. Ложников

zvsasha@rambler.ru, kobelkov@dodo.inm.ras.ru, lozhnikovma@gmail.com

УДК 519.6

Реализован и обоснован численный алгоритм построения оптимального управления для стабилизации нестационарных процессов, описываемых одномерными уравнениями в частных производных, основанный на принципе максимума Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление, численная стабилизация, метод стрельбы

Звягин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Zvyagin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Кобельков Георгий Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Georgiy Kobelkov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Ложников Михаил Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Lozhnikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

On numerical stabilization for non-steady problems of mathematical physics

The paper proposes and proves a numerical algorithm based on Pontryagin's maximum principle for obtaining an optimal control for stabilization of non-steady processes described by 1D partial differential equations.

Keywords: optimal control, numerical stabilization, shooting method

Рассматривается метод построения оптимального управления с обратной связью для численной стабилизации решений нестационарных одномерных уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов. Исходная дифференциальная задача аппроксимируется системой оду, для которой на основе принципа максимума Понтрягина строится оптимальное управление. Полученная в результате нелинейная краевая задача для системы дифференциальных уравнений приближенно решается методом стрельбы с нормировкой Федоренко [2]. Данный алгоритм позволяет в том числе строить управление для решения задач численной стабилизации по граничным условиям, правой части, коэффициентам уравнения. Приводятся результаты расчетов, показывающие эффективность данного подхода.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и дуффузионными процессами. — Москва: Наука, 1978.

2. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — Москва: Наука, 1978.

3. *Фурсиков А.В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сб. **192**:4 (2001), 115–160.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЙ И.М. ГЕЛЬФАНДА, Б.М. ЛЕВИТАНА, М.Г. КРЕЙНА И В.А. МАРЧЕНКО

С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков

Kabanikhin@sscc.ru, Maxim.Shishlenin@sscc.ru, Nikita.Novikov@sscc.ru

УДК 517.518

Метод И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и В.А. Марченко (ГЛКМ) является уникальным инструментом математической физики, позволяющим решать спектральные обратные задачи (ОЗ), ОЗ рассеяния, ОЗ для гиперболических уравнений и систем, а также интегрировать нелинейные уравнения. Численнное решение многомерных аналогов уравнений ГЛКМ позволяет находить параметры исследуемой среды по данным Коши, измеренным на части границы области. Одной из важнейших проблем численного решения дискретных многомерных аналогов уравнений ГЛКМ является размерность матриц (порядка 10^{16} элементов). Рассматриваются два основных подхода: быстрое обращение блочно-теплицевых матриц и метод Монте-Карло.

Ключевые слова: метод Гельфанда-Левитана-Крейна, обратные задачи, линейная регуляризация

Algorithms for solving multidimensional analogues of the equations I.M. Gelfand, B.M. Levitan, M.G. Kerina and V.A. Marchenko

Method of I.M. Gelfand, B.M. Levitan, M.G. Krein and V.A. Marchenko is a unique tool of mathematical physics, allowing to solve spectral inverse problems (IP), scattering IP, IP for hyperbolic equations and systems, as well as integrate nonlinear equations. The numerical solution of multidimensional analogues of GLKM equations allows finding the parameters of the medium under investigation according to Cauchy data, measured on a part of the boundary of the region. One of the most important problems in the numerical solution of discrete multidimensional analogues of GLKM equations is the dimension of the matrices (of the order of 10^{16} elements).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Кабанихин Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия); Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Новосибирский государственный университет (Россия); Sergey Kabanikhin (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Шишленин Максим Александрович, д.ф.-м.н., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия); Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Новосибирский государственный университет (Россия); Maxim Shishlenin (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;)

Новиков Никита Сергеевич, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия); Новосибирский государственный университет (Россия); Novikov Nikita (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;)

Two main approaches are considered: fast inversion of block-greenhouse matrices and the Monte Carlo method.

Keywords: Gelfand-Levitan-Krein method, inverse problems, linear regularization

Работы И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, М.Г. Крейна, В.А. Марченко [1–3] положили начало развитию теории и практических применений обратных задач. Многомерные аналоги уравнений Гельфанда-Левитана построили Л.Д. Фаддеев [4] и R.G. Newton [5]. C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal и R.M. Miura проинтегрировали уравнение Кортевега–де Фриза методом обратной задачи рассеяния [6]. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат применили метод обратной задачи рассеяния к нелинейному уравнению Шредингера [7]. С.П. Новиков [8], P.D. Lax [9] и В.А. Марченко [10] исследовали периодическую обратную задачу Коши для уравнения КдФ. R.G. Novikov и G.M. Khenkin адаптировали метод обратной задачи рассеяния для получения слабо локализованных решений уравнения КдФ [12].

Задача определения плотности среды

Рассмотрим последовательность прямых задач:

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x,y)\, \nabla u^{(k)}, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}^2,\ t > 0;$$

$$u^{(k)}|_{t<0} \equiv 0, \qquad u_x^{(k)}(+0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,y)}\, \delta(t).$$

Здесь $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Обратная задача акустики: требуется определить плотность среды $\rho(x,y)$ по дополнительной информации

$$u^{(k)}(+0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \qquad k \in \mathbb{Z}^2.$$

Пусть все функции — 2π периодические. Тогда решение вспомогательной последовательности прямых задач

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - \nabla \ln \rho(x,y)\, \nabla w^{(m)}, \qquad x > 0, y \in (-\pi,\pi)^2, t \in \mathbb{R},$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}my}\delta(t), \qquad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0.$$

После нечетного продолжения всех функций на $t < 0$ нечетным образом нетрудно получить соотношение

$$u^{(k)}(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_m f_m^{(k)}(t-s) w^{(m)}(x,y,s)\mathrm{d}s, \quad x > 0,\ k \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Применим операцию

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^x \frac{(.)}{\rho(\xi,y)}\mathrm{d}\xi$$

к соотношению (1) и обозначим

$$V^{(m)}(x,y,t) = \int\limits_0^x \frac{w^{(m)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\mathrm{d}\xi, \qquad \Phi^{(m)}(x,t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} V^{(m)}(x,y,t)\mathrm{d}y,$$

и получим многомерный аналог уравнения М.Г. Крейна [13]

$$2\Phi^{(k)}(x,t) - \sum_m \int_{-x}^{x} (f_m^{(k)})'(t-s)\Phi^{(m)}(x,s)ds = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}}{\rho(0,y)}\mathrm{d}y, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Искомая плотность связана с решением уравнения М.Г. Крейна по формуле

$$\rho(x,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)}\Big[\sum_m \Phi^m(x,x-0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}my}\Big]^{-2}.$$

Восстановление скорости $c(x,y)$

Восстановление функции скорости приводит к более сложным многомерным аналогам уравнения М.Г. Крейна.

Численные методы решения

Метод Монте-Карлопозволяет найти решение интегрального уравнения в требуемой точке [14]. Метод быстрого обращения тёплицевых матриц (метод Воеводина-–Тыртышникова) основан на структуре матриц, обратных к тёплицевым. Реализованный алгоритм является более эффективным по сравнению со стандартными методами решения систем с плотными матрицами и позволяет найти решение соответствующих подзадач для уравнений ГЛК на меньших значений глубин [15].

Литература

1. *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72, № 3. С. 457–460.

2. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР. 1951. Т. 15, № 4. С. 309–360.

3. *Крейн М.Г.* Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // Доклады АН СССР. 1951. Т. 76, № 1. С. 21–24.

4. *Л.Д. Фаддеев.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. 1974. Т. 3. С. 93–180.

5. *Newton R. G.* Inverse Schrødinger scattering in three dimensions. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

6. *C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura.* Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.

7. *В.Е. Захаров, А.Б. Шабат.* Тонкая теория двумерной самофокусировки и од- номерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.

8. *С.П. Новиков.* Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, № 3. С. 54–66.

9. *Lax P.D.* Periodic solutions of the KdV equation // Lectures Appl. Math. 1974. Vol. 15. P. 85–96.

10. *В.А. Марченко.* Периодическая задача Кортевега–де Фриса // Матем. сб. 1974. Т. 95(137), № 3(11). С. 331–356.

11. *А.П. Веселов, С.П. Новиков.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 20–24.

12. *Novikov R. G., Khenkin G. M.* Oscillating weakly localized solutions of the Korteweg–de Vries equation // Theoretical and Mathematical Physics. 1984. Vol. 61, no. 2. P. 1089–1099.

13. *Кабанихин С.И.* О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Доклады РАН. 1989. Т. 309, № 4. С. 791– 795.

14. *Kabanikhin S.I., Novikov N.S., Oseledets I.V., Shishlenin M.A.* Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 23:6 (2015), 687–700

15. *Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerical solution of the multidimensional Gelfand-Levitan equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 23:5 (2015), 439–450

ВЛИЯНИЕ МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ НА СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ХЕНСТОКА – КУРЦВЕЙЛЯ

С.Н. Копылов

ksergei16@yandex.ru

УДК 517.518.126

Рассматриваются свойства интеграла Хенстока – Курцвейля при наложении ограничений на масштабную функцию. Представлено доказательство утверждения о связи классов интегрируемых функций и классов масштабных функций в ряде частных случаев.

Ключевые слова: математика, теория функций, теория интегрирования

Influence of gauge on the Henstock – Kurzweil integral properties

Investigation of the Henstock – Kurzweil integral properties with a gauge under imposed restrictions. Proof of the statement about connection between classes of integrable functions and classes of gauges in a number of particular cases.

Keywords: mathematics, real analysis, theory of integration

Интеграл Хенстока – Курцвейля представляет собой обобщение интеграла Римана. Конструктивно, построение интеграла Хенстока – Курцвейля отличается введением так называемых масштабных функций. Известно, что если ограничиться только лишь непрерывными масштабными функциями, то полученная конструкция будет эквивалентна интегралу Римана. Также, доказано, что выбор только лишь измеримых масштабных функций не изменяет свойств интеграла Хенстока – Курцвейля [1]. Существует предположение о том, что для для построения интеграла на $L_p([a,b])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ для каждого фиксированного p можно использовать масштабные функции $\delta(x)$ такие, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a,b])$.

Копылов Сергей Николаевич, студент 2-го курса магистратуры, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergei Kopylov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Теорема 1. *Пусть f - $\mathcal{H}$-интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$, $\delta(x)$ - масштаб, обеспечивающий приближение значения интеграла интегральными суммами с некоторой заданной точностью. Тогда, если f не принадлежит пространству $L_p([a,b])$, то $\frac{1}{\delta(x)}$ тоже не принадлежит $L_p([a,b])$.*

Другими словами, для каждого фиксированного p, масштабных функций $\delta(x)$ таких, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a,b])$ недостаточно для того, чтобы построить интеграл функции, не принадлежащей $L_p([a,b])$. Для некоторых частных случаев доказано, что для интегрирования функции из $L_p([a,b])$ можно ограничиться выбором масштабов $\delta(x)$ таких, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a,b])$.

Литература

1. *Russel A. Gordon.* The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock // Graduate studies of mathematics (1994), 153-154.

О ТЕОРЕМЕ АДАМАРА – ПЕРРОНА И МЕТОДАХ ТИПА ДЕФЛЯЦИИ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.А. Корнев

kornev@mech.math.msu.su

УДК 519.63, 519.626.2

Предлагается и обосновывается метод исследования глобальной картины динамики для нестационарных уравнений градиентного типа. Результаты применяются для стабилизации траекторий в окрестности неустойчивых решений двумерных уравнений Навье – Стокса и стационарного решения одномерных уравнений вязкого баротропного газа.

Ключевые слова: инвариантные многообразия, полудинамические системы, численная стабилизация

On the Hadamard – Perron theorem and deflation-type methods for the stabilization of nonlinear unstable processes

The method for studying the global phase portrait of nonstationary gradient-type equations is proposed and justified. The algorithm is formally applied for the 2d Navier – Stokes equations and for the 1d viscous barotropic gas.

Keywords: invariant manifolds, semidynamical systems, numerical stabilization

Корнев Андрей Алексеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrei Kornev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Предлагается и обосновывается метод исследования общей картины динамики для нестационарных уравнений градиентного типа, однозначно определяемой "усами Адамара". Полученные результаты используются для построения метода с обратной связью, позволяющего для некоторых физических задач (в том числе, описываемых уравнениями типа Чафе-Инфанта, двумерными уравнениями Навье–Стокса, одномерными уравнениями динамики вязкого газа) обеспечить процесс стабилизации формально на сколь угодно большом временном отрезке основного решения и вторичных мод. Процесс стабилизации может осуществляться как по начальным данным, так и по правой части и краевым условиям. В рамках данного подхода при построении стабилизирующего управления в некоторых случаях удается учитывать только часть неустойчивых мод, что качественно упрощает реализацию алгоритма.

Литература

1. *Fursikov A.V., Kornev A.A.* Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lecture notes series, Cambridge University Press, (2012), 130-172.

2. *Kornev A.A.* The structure and stabilization by boundary conditions of an annular flow of Kolmogorov type // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling, **32**:4 (2017), 245-251.

3. *К.А. Жуков, А.А. Корнев, М.А. Ложников, А.В. Попов* Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. **2** (2019), 14-21.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДОМ МАКСИМУМА КОМПАКТНОСТИ, ЕГО АВТОМАТИЗАЦИЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Н.Г. Корыткин, П.Г. Корыткин

korytkinn@gmail.com, pkorytkin@gmail.com

УДК 512.644, 519.688

Приводятся результаты исследования и программной реализации метода максимума компактности, который ориентирован на выполнение на вычислительных машинах.

Ключевые слова: математическая модель, объект измерений, погрешности неадекватности, размерностная идентификация, модульный критерий, критерий воспроизводимости

Корыткин Николай Георгиевич, студент, Филиал «Стрела» МАИ (Жуковский, Россия); Nikolai Korytkin (National Research University (Moscow Aviation Institute), Strela Branch, Zhukovsky, Russia)

Корыткин Павел Георгиевич, студент, Филиал «Стрела» МАИ (Жуковский, Россия); Pavel Korytkin (National Research University (Moscow Aviation Institute), Strela Branch, Zhukovsky, Russia)

Constructing calibration curves for means of measurement by the maximum-compactness method and its software implementation

The results of research and program implementation of the method of maximum compactness which is oriented on execution on computers are given.

Keywords: mathematical model, measurement object, inadequacy errors, dimensional identification, modular criterion, reproducibility criterion

В настоящее время, с развитием вычислительной техники, всё чаще возникает необходимость в поиске наиболее целесообразных способов решения практических задач. В качестве примера можно привести задачу метрологической аттестации средств измерений (СИ), которая связана с построением их градуировочных характеристик. Особый интерес представляет метод максимума компактности (ММК) [1].

Пусть известны значения измеряемой величины x и регистрации выходного сигнала y, подверженного изменениям как вследствие вариации параметров схемы, так и влияния внешних факторов, характеризующих условия эксплуатации СИ [2]. В общем случае зависимость $y(x)$ можно выразить в виде функции

$$y = f(\Theta, Z, x), \tag{1}$$

где Θ — множество параметров схемы СИ; Z - множество условий эксплуатации СИ.

Для аппроксимации (1) (для большинства СИ) используются интерполяционные полиномы в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}, i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где a_i - соответствующие коэффициенты степенного ряда.

В этом случае, цель градуировки состоит в определении достоверных значений a_i и оценке точности полученных решений.

В докладе продемонстрирована целесообразность использования ММК для построения градуировочных характеристик по сравнению с методом наименьших квадратов (МНК), ввиду упрощения, по сравнению с МНК, вычислительной процедуры определения параметров a_i n степенного ряда (2), устойчивости к ошибкам округления и аномальным результатам в измерениях. Более того, было показано, что для нахождения параметров a_i, определяемых решением системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{x}^{i-1} = \overline{y_i}$ использование метода Крамера замедляло работу алгоритма. Для достижения максимальной эффективности, для решения СЛУ использовался метод Гаусса. Кроссплатформенность и высокопроизводительность обеспечивается благодаря реализации алгоритма на языке C/C++.

Литература

1. *Блинов А.П.* Построение градуировочных характеристик средств измерений методом максимума компактности // Измерительная техника, (1987), № 7.

2. *Дубов Б.С., Копытин Н.М.* Метрология, (1986), № 3, 13.

ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ

О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов

Kudryavceva_OS@mail.ru, apsolodov@mail.ru

УДК 517.54

В работе изучаются голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками. Получена двусторонняя оценка областей однолистности на классе функций с внутренней и граничной неподвижными точками. Найдена асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности на классе функций с двумя граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности

Domains of univalence for some classes of holomorphic mappings of the disk into itself

The paper is concerned with holomorphic mappings of the unit disk into itself with two fixed points. Two-sided estimate of univalence domains on class of functions with interior and boundary fixed points is obtained. An asymptotically sharp two-sided estimate of univalence domains on class of functions with two boundary fixed points and an invariant diameter is found.

Keywords: holomorphic mapping, fixed points, angular derivative, domain of univalence

Пусть $\mathcal{B}$ — класс голоморфных функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. Известно, что функция $f \in \mathcal{B}$, $f(z) \not\equiv z$, может иметь не более одной неподвижной точки внутри круга $\mathbb{D}$ и множество неподвижных точек (в смысле углового предела) на его границе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. При этом, в граничной неподвижной точке b, $b \in \mathbb{T}$, всегда существует (конечный или бесконечный) угловой предел $\angle\lim_{z\to b}(f(z) - b)/(z - b)$. Если этот предел конечен, то он является положительным числом и $f'(z)$ имеет тот же угловой предел при $z \to b$. В этом случае предел $\angle\lim_{z\to b}(f(z) - b)/(z - b)$ называется *угловой производной* функции f в граничной неподвижной точке b и обозначается $f'(b)$.

Замечательным фактом является то, что расположение неподвижных точек и значение производных в них оказывают влияние на область однолистности аналитической функции.

Исследование А.П. Солодова выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6222.2018.1).

Кудрявцева Ольга Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Волгоградский государственный технический университет (Волгоград, Россия); Olga Kudryavtseva (Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia)

Солодов Алексей Петрович, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksei Solodov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассмотрим сначала случай внутренней точки q, $q \in \mathbb{D}$. Не ограничивая общности, будем полагать $q = 0$. Хорошо известно, что локальная однолистность зависит только от значения производной в точке: если $f'(0) \neq 0$, то f однолистна в некоторой окрестности нуля. При этом радиус окрестности однолистности неизвестен, он определяется самой функцией. В то же время оказывается, что если производная в точке не просто ненулевая, но ещё и не слишком маленькая, то имеет место однолистность на классе функций. А именно: Э. Ландау показал, что на классе функций $\mathcal{B}_N[0] = \{f \in \mathcal{B}[0]\colon |f'(0)| \geqslant 1/N\}$, $N > 1$, где $\mathcal{B}[0] = \{f \in \mathcal{B}\colon f(0) = 0\}$, наибольшей областью однолистности является круг и указал его радиус.

Теорема A (Э. Ландау [1]). *Пусть $N > 1$, $f \in \mathcal{B}_N[0]$. Тогда f однолистна в круге $\mathcal{L}(N) = \{z \in \mathbb{D}\colon |z| < R(N)\}$, где $R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}$. При этом для каждого $\varkappa$, $\varkappa \in \mathbb{T}$, функция $f_\varkappa(z) = z\,(\varkappa - Nz)/(N\varkappa - z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}_N[0]$ и имеет в точке $z(\varkappa) = \varkappa R(N)$ нулевую производную.*

Результат Э. Ландау окончателен: не только круг большего радиуса, но и никакую другую область, содержащую круг $\mathcal{L}(N)$, в качестве области однолистности класса $\mathcal{B}_N[0]$ взять нельзя.

Перейдём к случаю граничной точки b, $b \in \mathbb{T}$. Здесь, как показал Ж. Валирон [2], условием локальной однолистности является конечность угловой производной: если f из класса $\mathcal{B}[b] = \{f \in \mathcal{B}\colon \angle\lim_{z\to b} f(z) = b,\ f'(b) < \infty\}$, то f однолистна в некотором секторе раствора сколь угодно близкого к π. При этом радиус сектора однолистности зависит не только от раствора угла, но и от самой функции. Ситуация с однолистностью на классе функций с граничной неподвижной точкой отличается от случая внутренней точки. Нами показано, что даже если потребовать, чтобы угловая производная была не слишком большой, выделить единую область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[b] = \{f \in \mathcal{B}[b]\colon f'(b) \leqslant \alpha\}$, $\alpha > 1$, невозможно.

Таким образом, условие на производную в граничной точке оказывается слабее условия на производную во внутренней точке и, для продвижения в вопросе выделения областей однолистности, нуждается в усилении дополнительным условием. В качестве такого условия естественно потребовать наличие второй неподвижной точки. В зависимости от её расположения внутри или на границе круга возникают модельные классы $\mathcal{B}[0,1] = \mathcal{B}[0] \cap \mathcal{B}[1]$ и $\mathcal{B}[-1,1] = \mathcal{B}[-1] \cap \mathcal{B}[1]$.

В.В. Горяйнов, рассматривая класс $\mathcal{B}_\alpha[0,1] = \{f \in \mathcal{B}[0,1]\colon f'(1) \leqslant \alpha\}$, $\alpha > 1$, показал, что при некоторых ограничениях на значение угловой производной в граничной неподвижной точке все функции этого класса однолистны в некоторой области, содержащей отрезок, соединяющий неподвижные точки.

Теорема B (В.В. Горяйнов [3]). *Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $1 < \alpha < 2$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

При этом функция $f(z) = z\,\big(\alpha z + (2-\alpha)\big)/\big(\alpha + (2-\alpha)z\big)$ принадлежит классу

$\mathcal{B}_\alpha[0,1]$ *и имеет в точке* $z_\alpha = -(1-\sqrt{\alpha-1})/(1+\sqrt{\alpha-1})$, *расположенной на границе области* $\mathcal{A}(\alpha)$, *нулевую производную.*

Результат теоремы B нами усилен: расширены области однолистности, а также получены близкие к неулучшаемым двусторонние оценки точных областей однолистности.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $1 < \alpha < 4$. *Тогда* f *однолистна в области*

$$\underline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon 6\,\frac{1+|z|^2}{|1-z|^2} < \alpha - 1 + \frac{2\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^4} \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 1$. *Для каждой точки* z_0 *границы области*

$$\overline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z|^2\,(1+|z|^2)}{(1-|z|^2)^2} < \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \right\}$$

найдётся функция $f_{z_0} \in \mathcal{B}_\alpha[0,1]$, *производная которой в точке* z_0 *обращается в нуль.*

В.В. Горяйнов обнаружил также нетривиальные области однолистности на классах $\mathcal{B}_\alpha[-1,1] = \{f \in \mathcal{B}[-1,1]\colon f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha\}$, $1 < \alpha < 9$. Отметим здесь справедливость неравенства $f'(1)f'(-1) \geqslant 1$ для любой функции $f \in \mathcal{B}[-1,1]$.

Теорема C (В. В. Горяйнов [4]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. *Тогда* f *однолистна в области*

$$\mathcal{J}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\cos y^*(\alpha)} \right\},$$

где $y^*(\alpha)$ — *единственный в интервале* $0 < y < \pi/2$ *корень уравнения* $\cos^2 y = (\alpha-1)\cos^3\bigl((\pi-2y)/3\bigr)$.

Области $\mathcal{J}(\alpha)$ не являются неулучшаемыми. Верхняя оценка, полученная нами, не даёт ответ на вопрос, сколь точны области $\mathcal{J}(\alpha)$. Тем не менее, на подклассе $\mathcal{D}_\alpha[-1,1] = \{f \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]\colon \operatorname{Im} f(x) = 0 \text{ при } x \in (-1,1)\}$ получена асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathcal{D}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. *Тогда* f *однолистна в области*

$$\underline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1 + \left(\sqrt{k(\alpha)+1} + \operatorname{sgn}(25-9\alpha)\sqrt{k(\alpha)}\right)^2} \right\},$$

где

$$k(\alpha) = \frac{(9\alpha-25)^2\,(183-37\sqrt{\alpha})}{128(\alpha-1)(9-\alpha)(85-12\sqrt{\alpha})}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 1$. *Для каждой точки* z_0 *границы области*

$$\overline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3+\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha}-1)}} \right\},$$

найдётся функция $f_{z_0} \in \mathcal{D}_\alpha[-1,1]$, *производная которой в точке* z_0 *обращается в нуль.*

Литература

1. *Landau E.* Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstant // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl., **32** (1926), 467-474.

2. *Валирон Ж.* Аналитические функции — Москва: ГИТТЛ, 1957.

3. *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сборник, **208**:3 (2017), 54-71.

4. *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности // Тр. МИАН, **298** (2017), 101-110.

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТИПА ДЖЕКСОНА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М.Р. Лангаршоев

mukhtor77@mail.ru

УДК 517.5

В работе вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций, определяемых усредненной характеристикой гладкости функции в весовом пространстве Бергмана.

Ключевые слова: аналитическая функция, наилучшее приближение, комплексный алгебраический полином, n-поперечники.

Sharp inequality of Jackson type in the weighted Bergman space

In the article the exact value of n-widths of some classes of analytical in the unit disc functions whose determined by the averaged smoothness characteristic of the function in the weight Bergman's space are calculated.

Keywords: analytical function, best approximation, complex algebraic polynomial, n-widths.

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, к.ф.-м.н., МБОУ ЦО №44, имени Г.К.Жукова (Тула, Россия); Mukhtor Langarshoev (MBEI CE №44 by name G.K.Zhukov, Tula, Russia)

Говорят, что аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \leqslant \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}, 1 \leqslant q \leqslant \infty$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma \right)^{1/q} < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная интегрируемая весовая функция, $d\sigma$ — элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Под модулем непрерывности m-го порядка функции $f(z) \in B_{2,\gamma}$ будем понимать

$$\omega_m(f,t)_{B_{2,\gamma}} = \sup_{|h| \leqslant t} \|\Delta_m(f;\cdot,\cdot,h)\|_{B_{2,\gamma}},$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(u+kh)})$$

— разность m-го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t с шагом h.

Исходя из [1] и [2] равенством

$$\Lambda_m(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_m(f;\cdot,\cdot,h)\|_{B_{2,\gamma}} dh \right\}^{1/2},\ t > 0$$

определяем интегральным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in B_{2,\gamma}$. Очевидно, что $\Lambda_m(f,t) \leqslant \omega_m(f,t)$ для любого $t > 0$.

Введем также обозначения:

$$\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} :\ \|z^r f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty \right\},\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

$$\alpha_{n,r} = n!\{(n-r)!\}^{-1},\ n \geqslant r,$$

$$\varphi_{k,m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right\}^{1/2},\ k,m \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

Множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n обозначим через $\mathcal{P}_n$. Символом

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ полиномами из $\mathcal{P}_{n-1}$. Для $r \in \mathbb{N}$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$.

Теорема 1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ z^r f^{(r)} \neq const}} \frac{\alpha_{n,r} E_n(f)_{2,\gamma}}{\Lambda_m(z^r f^{(r)}, t)} = \frac{1}{2^{m/2} \varphi_{1,m}(nt)}.$$

Далее, через $b_n(m, B_{2,\gamma})$, $d^n(m, B_{2,\gamma})$, $d_n(m, B_{2,\gamma})$, $\lambda_n(m, B_{2,\gamma})$ и $\pi_n(m, B_{2,\gamma})$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники некоторого центрально-симметричного подмножества m из $B_{2,\gamma}$ (см. напр. [3]).

Пусть $\Phi(t) (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — непрерывная возрастающая функция, такая что $\Phi(0) = 0$. Символом $W^r(\Lambda_m, \Phi)$, $m, r \in \mathbb{N}$ обозначим следующий класс аналитических функций

$$W^r(\Lambda_m, \Phi) = \left\{ f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} : \Lambda_m(z^r f^{(r)}, t) \leqslant \Phi(t) \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < t \leqslant 2\pi$ *и функция* Φ *удовлетворяет условию* $(C_{2m}^m)^{1/2} \Phi(t) \geqslant 2^{m/2} \varphi_{1,m}(nt) \Phi(\pi/n)$. *Тогда справедливы равенства* $\gamma_n\left(W^r(\Lambda_m, \Phi), B_{2,\gamma}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \Phi(\pi/n)$, *где* $\gamma_n(\cdot)$ — *любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Литература

1. *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб., **185**:8 (1994), 81–102.

2. *Вакарук С.Б.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Мат. заметки, **99**:2 (2016), 215–238.

3. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Москва, Изд-во МГУ, 1976.

НЕХААРОВСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

С.Ф. Лукомский

lukomskiiSF@info.sgu.ru

УДК 517.518

Известно, что если в поле -адических чисел ступенчатая масштабирующая функция порождает ортогональный КМА, то этот КМА обязательно будет хааровским, т.е. существует масштабирующая функция $\varphi = \mathbf{1}_{G_0}$, которая порождает тот же самый КМА. Мы показываем, что можно построить нехааровский отогональный КМА в поле -адических чисел, который порождается набором из нескольких ступенчатых масштабирующих функций .

Ключевые слова: мультивейвлеты, p-адические числа, нульмерные группы

Лукомский Сергей Федорович, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия); Sergey Lukomskii (Saratov State University, Saratov, Russia)

Non-Haar wavelets on zero-dimensional groups

It is known, that in the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ there exists a unique orthogonal MRA generated by an orthogonal scaling step functions and this is Haar MRA. We show, that in $\mathbb{Q}_p$ there exists non-Haar orthogonal MRA generated by some set of step scaling functions.

Keywords: multiwavelets, p-adic numbers, zero-dimensional groups

Пусть $(G, \dot{+})$ локально компактная нульмерная абелева группа со второй аксиомой счетности, $(G_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ основная цепочка подгрупп с условиями

$$G_n \subset G_{n+1},\ (G_n/G_{n+1})^\sharp = p,\ \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n = G,\ \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n = \{0\},$$

Символом $E^\sharp$ здесь обозначено количество элементов конечного множества E. Пусть $g_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ базисная последовательность, т.е. $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p-1}$, $\mathcal{A}$ оператор растяжения в G, определенный равенством $\mathcal{A}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_{n-1}$. Через $H_0 = \{a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots a_{-s}g_{-s}\dot{;}\ s \in \mathbb{N}\}$ обозначим множество сдвигов. Отметим, что если операция сложения в G удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$, то G есть аддитивная группа поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть далее X группа характеров, $G_n^\perp$ – аннуляторы подгрупп G_n, (χ, x) – значение характера χ на элементе x, $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ – функции Радемахера. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$.

Совокупность замкнутых в $L_2(G)$ подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ называется мульти-кратномасштабным анализом (коротко мульти-КМА) кратности d, если выполнены аксиомы:
A1) $V_n \subset V_{n+1}$,
A2) $\cap V_n = \{0\}$,
A3) $\cup V_n = L_2(G)$,
A4) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$,
A5) существуют функции $\varphi_1, ..., \varphi_d \in L_2(G)$, сдвиги которых образуют ОНБ подпространства V_0.
Функции $\varphi_1, ..., \varphi_d$ называют мультимасштабирующими (multi-scaling). Совокупность Ψ функций ψ_l, $(l = 1, ..., L)$, сдвиги которых образуют ОНБ ортогонального дополнения V_0 до V_1 называют мультивейвлетом. Если $d = 1$ то (V_n) называют КМА.

В [1] доказано, что если маска m_0 постоянна на смежных классах по $G_{-s+1}^\perp$ и принимает значения по модулю равные 1, $m_0(G_0^\perp) = 1$, $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$, то соответствующая масштабирующая функция φ порождает ортогоналный КМА (V_n), где V_n есть подпространства функций, постоянных на смежных классах по подгруппе G_n.

Албеверио, Евдокимов и Скопина [2] доказали, что если G есть аддитивная группа поля $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел, и ступенчатая масштабирующая функция φ порождает ортогональный КМА, то этот КМА порожден функцией $\phi = \mathbf{1}_{G_0}$ и значит подпространства V_n те же, что и в [1]. Такой КМА называют Хааровским.

Хренников и Шелкович [3] доказали, что при любом натуральном $m > 1$ функции

$$\varphi_j(x) = r_0^{\alpha_0}(x) r_1^{\alpha_1}(x) \dots r_{m-2}^{\alpha_{m-2}}(x) \mathbf{1}_{G_0}(x) \tag{1.1}$$

есть p-адические мультимасштабирующие функции, а функции

$$\psi_l(x) = r_0^{\alpha_0}(x) r_1^{\alpha_1}(x) \dots r_{m-1}^{\alpha_{m-1}}(x) \mathbf{1}_{G_0}(x), \alpha_{m-1} \neq 0 \tag{1.2}$$

есть соответствующие мультивейвлеты в поле p-адических чисел. Кратномасштабный анализ (V_n), соответствующий функциям (1.1) совпадает с КМА, порожденным одной масштабирующей функцией $\phi = \mathbf{1}_{G_0}$, но занумерованным в другом порядке, т.е. фактически является Хааровским.

Возникает вопрос: существует ли в поле p-адических чисел нехааровский мульти-КМА? Мы даем положительный ответ на этот вопрос и строим такой КМА в более общей ситуации, когда G есть нульмерная группа.

Будем строить мультимасштабирующие функции (φ_j) и мультивейвлеты (ψ_k) следующим образом. Представим множество $\{0, 1, \dots, p-1\}$ в виде объединения $J \cup I$, где $J \neq \emptyset, I \neq \emptyset, I \cap J = \emptyset$. Определим функции

$$\varphi_j^{(J)}(x) = \sqrt{p} \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j g_0}(x),\ j \in J,$$

$$\varphi_i^{(I)}(x) = p \cdot \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} k g_1 \dot{+} i g_0}(x),\ i \in I, k = \overline{0, p-1}$$

и образуем подпространства

$$\tilde{V}_n = \overline{(p^{\frac{n}{2}} \varphi_j^{(J)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), p^{\frac{n}{2}} \varphi_i^{(I)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h))_{i \in I, j \in J, h \in H_0}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом

$$f \in \tilde{V}_n \Leftrightarrow f(x) = \sum_{j \in J, h \in H_0} a_{j,h} p^{\frac{n}{2}} \varphi_j^{(J)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h) + \sum_{i \in I, h \in H_0} b_{i,h} p^{\frac{n}{2}} \varphi_i^{(I)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h).$$

Теорема 1. *Пусть $(G, \dot{+})$ нульмерная группа. Подпространства $(\tilde{V}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют нехааровский обобщенный КМА с $J^\sharp + pI^\sharp$ мультимасштабирующими функциями $\varphi_j^{(J)}(x)$, $\varphi_i^{(I)}(x)$. При этом $V_{n+1} \subset \tilde{V}_n \subset V_{n+2}$, $V_{n+1} \neq \tilde{V}_n \neq V_{n+2}$.*

Для любого множества $G_1 + j g_0$ $(j \in J)$, на котором $\varphi_j^{(J)} = \sqrt{p}$, определим функции

$$\psi_{j,\alpha}^{(J)}(x) = \sqrt{p} \mathbf{1}_{G_1 \dot{+} j g_0}(x) \cdot r_1^{\alpha}(x \dot{-} j g_0),\ j \in J,\ \alpha = \overline{1, p-1},$$

$$\psi_{i,j,\alpha}^{(J)}(x) = p \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} j g_0 \dot{+} i g_1}(x) \cdot r_2^{\alpha}(x \dot{-} j g_0 \dot{-} i g_1),\ j \in J, i \in I, \alpha = \overline{1, p-1}.$$

Для любого множества $G_1 + j g_0$ $(j \in I)$ определим функции

$$\psi_{i,j,\alpha}^{(I)}(x) = p \mathbf{1}_{G_2 \dot{+} j g_0 \dot{+} i g_1}(x) \cdot r_2^{\alpha}(x \dot{-} j g_0 \dot{-} i g_1),\ j \in I, i \in I, \alpha = \overline{1, p-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $(G, \dot{+})$ нульмерная группа. Функции $\psi_{j,\alpha}^{(J)}$, $\psi_{i,j,\alpha}^{(J)}$, $\psi_{i,j,\alpha}^{(I)}$ образуют мультивейвлеты для обобщенного КМА $(\tilde{V}_n)$ с мультимасштабирующими функциями $\varphi_j^{(J)}(x)$, $\varphi_i^{(I)}(x)$.*

Литература

1. *Лукомский С.Ф.* Кратномасштабный анализ и всплесковые базисы на нульмерных группах// Матем. Сборник, **201**:5 (2010), 41-64.

2. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames//J. Fourier Anal. Appl., **16**:5 (2010), 693-714.

3. *A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich* Non-Haar p-adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations// Appl. Comput. Harmon. Anal.,**28**:1 (2009), 1- 23.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СУММАМИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ И ГЛОБАЛЬНАЯ ГОЛОМОРФНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

С.Г. Мерзляков, С.В. Попенов

mesege1956@gmail.com, spopenov@gmail.com

УДК 517.98

Изучается проблема кратной интерполяции на бесконечном множестве узлов с помощью сумм абсолютно сходящихся рядов экспонент с заданным множеством показателей. Для целых функций найдены условия на узлы и показатели, при которых эта проблема разрешима. Найден новый подход к проблеме интерполяции, позволяющий для функций, голоморфных в области, получать критерии разрешимости для некоторых классов множеств показателей и специального класса множеств узлов. Получена разрешимость глобальной задачи Коши для оператора свертки с данными на множестве узлов в области, в терминах рядов экспонент, с показателями из разреженного подмножества нулей характеристической функции этого оператора.

Ключевые слова: интерполяция, ряд экспонент, оператор свертки, задача Коши

Мерзляков Сергей Георгиевич, д.ф.-м.н., в.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Sergey Merzlyakov (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Попенов Сергей Викторович, к.ф.-м.н., н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН и УГАТУ (Уфа, Россия); Sergey Popenov, (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, and USATU, Ufa, Russia)

Interpolation by sums of series of exponentials and global Cauchy problem for convolution operators

The study is made of the problem of multiple interpolation on an infinite nodes set by the sums of absolutely convergent series of exponentials whose exponents are from a given set. For entire functions conditions on nodes and exponents are obtained that give solubility of the problem. A new approach is demonstrated that enable us, for the case of holomorphic function in a domain, to obtain criteria of solubility of the problem for some class of exponents set and for a special class of nodes set. Solubility is obtained of the global Cauchy problem for convolution operator with data on the nodes set in domain, in the form of the series of exponentials whose exponents belong to a sparse subset of zero set of characteristic function of the operator.

Keywords: interpolation, exponentials series, convolurion operator, Cauchy problem

Пусть $M = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$ это счетное множество узлов, дискретное в $\mathbb{C}$; $m_k \in \mathbb{N}$ это кратности узлов μ_k, а $\Lambda \subset \mathbb{C}$ это некоторое неограниченное множество показателей. Обозначим $\Sigma(\Lambda, \mathbb{C}) = \{U : U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}, \lambda_n \in \Lambda\}$, ряды абсолютно сходятся для $z \in \mathbb{C}$. Известно, что такие ряды сходятся равномерно на всех компактных подмножествах в $\mathbb{C}$, так что $\Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$ это линейное подпространство пространства $H = H(\mathbb{C})$ целых функций.

Наша цель описать классы множеств M и Λ, которые дают разрешимость следующей проблемы: для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}, k \in N, j = 1, \ldots, m_k - 1$, существует $U \in \Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$, $U^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$.

Представления для Н. Пусть $\psi_M \in H$ это функция с нулевым множеством $\mathbb{Z} = M = \{\mu_k\}$ с учетом кратностей m_k. Обозначим через $(\psi_M) = \{h \in H : h = r\psi_M, r \in H\}$ идеал в H, порождаемый ψ_M. Для заданного множества узлов M разрешимость проблемы интерполяции рядами экспонент равносильна существованию представления $H = \Sigma(\Lambda, \mathbb{C}) + (\psi_M)$.

Определение. Обозначим $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ неограниченное множество. Множество $P(X) \subset \mathbb{S}$ предельных направлений X это все такие $s \in \mathbb{S}$, что $s = \lim_{k\to\infty} x_k/|x_k|$, где $\{x_k\} \subset X,\ x_k \to \infty$.

Выберем произвольно разреженную последовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, такую что $|\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|$ и $P(\{\lambda_n\}) = P(\Lambda)$. Пусть G_1 это целая функция минимального типа при порядке роста 1 с нулями $\{\lambda_n\}$, она порождает в H оператор свертки M_{G_1}. В силу результата А. Ф. Леонтьева о фундаментальном принципе для M_{G_1}, $Ker M_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C})$. Итак, следует изучать представления $H = Ker M_{G_1} + (\psi_M)$, так как $\Sigma(\{\lambda_n\}, \mathbb{C}) \subset \Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$. Такие представления дают разрешимость, в терминах рядов экспонент, глобальной задачи Коши для любого оператора свертки M_G, спектр которого содержит $\{\lambda_n\}$, с данными на множестве $\{\mu_k\}$ с учетом кратностей.

Условия. Далее $s_\tau = e^{i\tau}$ и $s_\omega = e^{i\omega}$, $\omega, \tau \in [0, 2\pi)$, это элементы $P(M)$ и $P(\Lambda)$, соответственно. Для каждого элемента $s_\tau \in P(M)$ выполнено одно из двух условий:

(А) Существуют такой элемент $s_\omega \in P(\Lambda)$, что $Re(s_\omega, s_\tau) > 0$, и число $T(s_\omega) \in \mathbb{R}$, что для всех $c > T(s_\omega)$ каждая прямая $l(s_\omega, c) = \{Re(s_\omega z) = c\}$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$.

(B) Существуют такой элемент $s_\omega \in P(\Lambda)$, что $Re(s_\omega s_\tau) = 0$, и число $T(s_\omega) \in \mathbb{R}$, что для всех $c > T(s_\omega)$ каждая прямая $l(s_\omega, c)$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$; для каждой подпоследовательности $\{\mu_{k_l}\} \subset M$, такой, что $|\mu_{k_l}| \to \infty$ и $s_\tau = \lim_{k_l \to \infty} \mu_{k_l}/|\mu_{k_l}|$, существует предел $\lim_{k_l \to \infty} Re(s_\omega \mu_{k_l}) = +\infty$.

Обозначим через $P_M(\Lambda) \subset P(\Lambda)$ множество всех тех предельных направлений $s_\omega \in P(\Lambda)$, которые связаны с $s_\tau \in P(M)$ в условиях (A) and (B). Из этих условий следует, что множество $D_M = \cap_{s_\omega \in P_M(\Lambda)} \{\mu_k \in M : Re(s_\omega \mu_k) \leqslant T(s_\omega)\}$ конечное или пустое. Рассмотрим квазиполиномы $q(z)$, порождаемые мономами $z^j exp(\mu_k z)$, где $\mu_k \in D_M, j = 0, \ldots, m_k - 1$. Пусть $d_M \in \mathbb{Z}_+$ это размерность подпространства всех q, обращающихся в нуль на $\{\Lambda_n\}$. В некоторых случаях $d_M = 0$; если $D_M \neq \emptyset$ это условие означает, что $\{\lambda_n\}$ является множеством единственности для таких q.

Теорема 1. *Пусть условия (A) и (B) выполнены, тогда для любой последовательности* $\{\lambda_n\} \in \Lambda, |\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|, P(\{\lambda_n\}) = P_M(\Lambda)$,

1) подпространство $KerM_{G_1} + (\psi_M)$, *замкнутое; если* $d_M > 0$ *оно имеет конечную коразмерность* d_M *в* H; *существуют такие* $\xi_1, \ldots, \xi_{d_M} \in \mathbb{C}$, *что* $H = KerM_{G_1} + (\psi_M) + span\{exp(\xi_l z)\}_{l=1}^{d_M}$;

2) если $d_M = 0$, *тогда* $H = KerM_{G_1} + (\psi_M)$;

3) подпространство $KerM_{G_1} \cap (\psi_M)$ *имеет бесконечную размерность.*

Если $D_M = \emptyset$ утверждение 2) дает разрешимость рассматриваемой проблемы интерполяции и задачи Коши для общего оператора свертки M_G, спектр которого содержит $\{\lambda_n\}$, ведь в таком случае $KerM_{G_1} = \Sigma(\{\Lambda_n\}, \mathbb{C}) \subset KerM_G$. Если $D_M \neq \emptyset$, несложно привести легко проверяемые признаки для $d_M = 0$. Например, $d_M = 0$, если существует такое направление s_ω, что каждая прямая $l(s_\omega, z) = \{Re(s_\omega z) = c\}$ содержит не более одного узла $\mu_k \in M$. Утверждение 3) указывает на отсутствие единственности. Используя известные результаты об асимптотическом расположении и локализации нулей квазиполиномов, можно привести более общие признаки, как для замкнутости суммы, так и для выполнения условия $d_M = 0$.

Рассмотрим общий подход к проблеме интерполяции. Для иллюстрации, предположим, что Λ имеет только одно предельное направление s_ω.

Изменим класс рассматриваемых множеств узлов: далее счетные множества $M \subset \mathbb{C}$ могут иметь конечные предельные точки, но не содержат их. Кроме этого, будем предполагать, что ряды экспонент, привлекаемые для интерполяции, абсолютно сходятся всего лишь в окрестностях $\mu_k \in M$, так что их суммы это локально аналитические функции на множестве M.

Но любой такой ряд сходится абсолютно в области $\Pi = \Pi_{\omega,M} = \{z \in \mathbb{C} : Re(s_\omega z) < d(s_\omega, M) = \sup_{\mu_k \in M}(s_\omega \mu_k)\}$, а его сумма является голоморфной в ней. Это обобщение на ряды экспонент леммы Абеля для степенных рядов.

Если $d(s_\omega, M) = +\infty$, область Π есть вся плоскость $\mathbb{C}$ и, как и ранее, для интерполяции используются суммы рядов из $\Sigma(\Lambda, \mathbb{C})$. Это целые функции. Если же $d(s_\omega, M) < \infty$, область Π это полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : Re(s_\omega z) < d(s_\omega, M)\}$, и используются, согласно новому подходу, суммы рядов из $\Sigma(\Lambda, \Pi)$, абсолютно сходящихся в Π; это функции, голоморфные в Π. Далее следует изучать представления $H(\Pi) = \Sigma(\Lambda, \Pi) + (\psi_M)_\Pi$, где

$\psi_M \in H(\Pi), \mathbb{Z}_{\psi_M} = M$, идеал $(\psi_M)_\Pi \subset H(\Pi)$. Таким образом изучается проблема интерполяции суммами рядов экспонент с показателями, имеющими одно направление сгущения, в произвольной области, ведь она сводится к интерполяции либо во всей плоскости, либо в полуплоскости.

Рассмотрим специальный класс множеств M узлов, выделяемый условием: произвольная прямая $l(s_\omega, c) = \{Re(s_\omega z) = c\}, c \in \mathbb{R}$, содержит не более одного узла $\mu_k \in M$. Удалось получить критерии разрешимости проблемы интерполяции суммами рядов экспонент для этого класса множеств M в области.

Необходимость условий доказана в большой общности: для произвольных множеств узлов и для проблемы интерполяции функциями U, представимыми как преобразования Лапласа мер Радона $d\sigma$ на Λ, $U(z) = \int_\Lambda e^{\lambda z}\, d\sigma_\lambda$.

Наши методы позволяют изучать и более общие множества M и Λ.

Результаты содержат некоторые известные результаты В.В.Напалкова и учеников об общей интерполяции функциями (которые, вообще говоря, не представляются в виде каких-либо рядов экспонент) из ядра сверточного оператора (это глобальная задача Коши), а также часть предшествующих результатов авторов об интерполяции суммами рядов экспонент. Подробная библиография приведена в публикациях авторов из списка литературы.

Литература

1. *Напалков В.В., Нуятов А.А.* Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки // Матем. сб., **203**:2. 2012, 77-86.

2. *Напалков В.В., Нуятов А.А.* Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле // ТМФ, **180**:2 (2014), 264-271.

3. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Интерполяция суммами рядов экспонент и глобальная задача Коши для операторов свертки // Доклады РАН. Математика, **485**:2 (1019), 1-3.

4. *Мерзляков С. Г.* Интерполяция и абсолютно сходящиеся ряды в пространствах Фреше // Матем. сб., **210**:1 (2019), 113-154.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ В КАСКАДЕ РЕАКТОРОВ

С.И. Мустафина, В.А. Михайлов, Т.А. Михайлова
T.A.Mihailova@yandex.ru

УДК 519.245, 678.7

В статье приводится вывод распределения частиц продукта полимеризации по реакторам каскада. Применение распределения по времени пребывания в задаче моделирования процесса сополимеризации методом Монте-Карло позволяет имитировать ведение процесса полимеризации в каскаде реакторов и прогнозировать характеристики образующегося продукта.

Ключевые слова: распределение по времени пребывания, сополимеризация, каскад реакторов, моделирование, метод Монте-Карло

On the use of the residence time distribution of particles in the problem of modeling the copolymerization process in a cascade of reactors

The article presents the conclusion of the distribution of particles of the product of polymerization in the cascade reactors. The use of time distribution in the task of modeling the process of copolymerization by the Monte Carlo method allows to simulate the conduct of the polymerization process in the cascade of reactors and to predict the characteristics of the resulting product.

Keywords: residence-time distribution, polymerization, cascade of reactors, modeling, Monte Carlo method

Обширную группу нефтехимической продукции составляют синтетические каучуки, которые представляют собой полимеры, способные перерабатываться в резину в процессе вулканизации. Бутадиен-стирольные синтетические каучуки являются одними из самых распро-страненных крупнотоннажных синтетических каучуков общего назначения. В основе промышленного производства лежит процесс низкотемпературной свободнорадикальной сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии. В промышленных условиях данный процесс ведется в каскаде реакторов идеального смешения непрерывного действия. Моделирование позволит прогнозировать свойства и модифицировать качественные показатели получаемого продукта, что является актуальной задачей на сегодняшний день.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-47-020068).

Мустафина Софья Ильшатовна, студент, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Sofia Mustafina (Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Михайлов Владимир Анатольевич, студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Казань, Россия); Vladimir Mikhailov (Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia)

Михайлова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Tatiana Mikhailova (Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

При моделировании периодического процесса сополимеризации все молекулы на протяжении времени моделирования находятся в одном реакторе, и, следовательно, каждая реакция кинетической схемы можем быть охарактеризована временем моделирования, которое рассчитывается согласно формуле:

$$\Delta t = \frac{\ln(1/r_p)}{R_{sum}}, \tag{1}$$

где R_{sum} - сумма скоростей возможных элементарных реакций кинетической схемы процесса, r_p - случайное число, сгенерированное на отрезке [0;1]. Но при переходе к непрерывному процессу полимеризации, проводящемуся в каскаде реакторов идеального смешения со средним временем пребывания, равным θ (ч), становится ясно, что не все молекулы, входящие в реактор, проведут в нем одинаковое время θ. Вследствие интенсивного перемешивания некоторые из них пройдут реактор почти мгновенно. В этом случае стоит говорить о некотором среднем времени пребывания как о случайной величине, которая характеризуется вероятностной функцией распределения.

Для определения функции распределения времени пребывания в реакторе каскада ставится следующий эксперимент. В начальный момент времени $t = 0$ в реактор впрыскивается короткий импульс нейтрального трассирующего вещества и измеряется концентрация этого вещества в выходящем из реактора потоке. При этом предположим, что количества трассирующего вещества достаточно для того, чтобы не нарушить существующую структуру потока. Обозначим концентрацию трассирующего вещества в момент времени τ во входящем в реактор потоке через c_f, а в выходящем из реактора потоке через $c(\tau)$. Общее число молекул, вышедших из реактора, пропорционально $\int\limits_0^\infty c(t)\,dt$. Таким образом, величина

$$p(\tau)d\tau = \frac{c(\tau)d\tau}{\int\limits_0^\infty c(t)\,dt}$$

равна доле молекул, выходящих из реактора за интервал времени от τ до $\tau + d\tau$, а величина

$$P(\tau) = \int\limits_0^\tau p(t)\,dt, \tag{2}$$

характеризует долю молекул, выходящих из реактора за интервал времени от 0 до τ.

В результате решения уравнения материального баланса для реактора с постоянным объемомвыведем распределение по времени пребывания в реакторе идеального смешения непрерывного действия:

$$p(\tau) = \frac{1}{\theta}e^{-\tau/\theta}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда имеется n последовательно соединенных реакторов идеального смешения. Предположим, что в первый из них подается короткий импульс трассирующего вещества, который в дальнейшем переходит из реактора в реактор. Данному случаю соответствует цепочка уравнений:

$$\theta\frac{dp_n}{dt} + p_n = p_{n-1}, \tag{4}$$

где $p_n(0) = 0, p_0 = c_f$. Применяя метод математической индукции, получаем решение уравнения (3) в общем виде:

$$p_n(\tau) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!\theta^n}e^{-\tau/\theta}. \tag{5}$$

При этом, переходя от одиночного реактора к реактору каскада, будем считать, что каждый из n реакторов каскада имеет среднее время пребывания θ/n. В этом случае распределение по времени пребывания для каскада из n реакторов идеального смешения непрерывного действия принимает вид:

$$p_n(\tau) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^n \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\tau/\theta}. \tag{6}$$

Таким образом, для моделирования непрерывного процесса полимеризации, проводящегося в каскаде реакторов идеального смешения, необходимо каждую частицу системы (молекулу, макромолекулу) дополнительно характеризовать временем пребывания в реакторе, которое определяется с использованием распределения (6). Для этого для отрезка времени от 0 до t_{max} подобрать шаг разбиения dt, чтобы сумма вероятностей для каждого варианта времени пребывания была равна единице.

$$(p + q) + r = p + (q + r). \tag{7}$$

После этого необходимо сгенериро-вать случайное числ$o r_p$ из отрезка $[0, 1]$ и подобрать такое значение порядкового номера f, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{i=1}^{f-1} p((f-1)dt) < r_p < \sum_{i=1}^{f} p(fdt) \tag{8}$$

Следовательно, в результате розыгрыша выбранной частице соответствует время пребывания fdt.

Литература

1. *Rawlings J.B., Ekerdt J.G.* Chemical Reactor Analysis and Design Fundamnentals. — Madison: Nob Hill Publishing, 2002. — P. 610.

2. *Михайлова Т.А.* Моделирование периодического и непрерывного процессов сополимеризации бутадиена со стиролом методом Монте-Карло: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баш. гос. университет, Уфа, 2016. 22 с.

МЕРА ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ СУММЫ НЕВЫРОЖДЕННОГО СИНУС-РЯДА С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОТРЕЗКЕ $[0,\pi]$

К.А. Оганесян
oganchris@gmail.com

УДК 517.52

Рассматриваются ненулевые синус-ряды со стремящимися к нулю монотонными коэффициентами. Показано, что на отрезке $[0,\pi]$ сумма такого ряда $f(x)$ положительна на множестве меры $\pi/2+0.24$. Также показано, что для произвольного натурального числа n выполняется неравенство $nf(x) > f(nx)$ во всех точках интервала $(0, 2\pi/n)$, кроме конечного множества, на котором $f(x) = f(nx) = 0$.

Ключевые слова: синус-ряд, монотонные коэффициенты, мера множества

The measure of the set of positivity of the sum of a nondegenerate sine series with monotone coefficients on the closed interval $[0,\pi]$

Nonzero sine series with monotone coefficients tending to zero are considered. It is shown that on the closed interval $[0,\pi]$ the sum of such a series $f(x)$ is positive on a set of measure $\pi/2+0.24$. It is shown as well that for an arbitrary natural number n the inequality $nf(x) > f(nx)$ holds on the interval $(0, 2\pi/n)$, except for a finite set, on which $f(x) = f(nx) = 0$.

Keywords: sine series, monotone coefficients, measure of a set

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ a_1 > 0,\ a_n \searrow 0, \tag{1}$$

Изучению вопроса о том, "насколько велико"может быть множество нулей такого ряда на отрезке $[0,\pi]$ посвящено много работ по тригонометрическим рядам с монотонными коэффициентами. В своей работе [1] М.И. Дьяченко показал, что ряд вида (1) может сходиться к нулю на множестве положительной меры. Также в этой работе было показано, что верна следующая оценка для меры нулей $f(x)$ на $[0,\pi]$

$$\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} < \pi - 1,4.$$

Затем А. С. Белов [2] и М. И. Дьяченко [3] независимо показали, что имеет место оценка

$$\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} \leqslant \pi/2,$$

а в работе [2] А. С. Беловым также был приведён пример функции $f(x)$ вида (1), равной нулю на отрезке $[2\pi/3,\pi]$.

Оганесян Кристина Артаковна, студентка, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kristina Oganesyan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В работе [4] автором было показано, что значение $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} = \pi/3$ максимально, и, более того, если $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} = \pi/3$, то почти всё множество нулей лежит на отрезке $[2\pi/3, \pi]$. При доказательстве этого факта важную роль играло следующее

Утверждение А. *Для любого $x \in (0,\pi)$ выполняется*

$$2f(x) - f(2x) \geqslant 0,$$

причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

В данной работе доказано обобщение этого утверждения, а именно

Теорема 1. *Для любого натурального n на интервале $(0, 2\pi/n)$ выполняется неравенство*

$$nf(x) > f(nx),$$

всюду, кроме конечного числа точек, в которых $f(x) = f(nx) = 0$.

Далее возникает вопрос: верно ли, что $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant 2\pi/3$? А.С. Беловым в работе [2] было показано, что $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant \pi/2$. В настоящей работе показано, что $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant \pi/2 + 0.24$, то есть имеет место следующая теорема

Теорема 2. *Верно неравенство*

$$\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant \pi/2 + 0.24.$$

Также приведены несколько утверждений, позволяющих доказать неравенство $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant 2\pi/3$ в случае выполнения некоторых условий.

Теорема 3. *Имеет место неравенство*

$$\mu\{x \in [0,\pi/2] : f(x) > 0\} + 3\mu\{x \in [\pi/2,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant \pi.$$

Следствие 1. *Верно неравенство*

$$\mu\{x \in [\pi/2,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant \frac{\pi}{6}.$$

Теорема 4. *Если $\mu\{x \in [0,\pi/2] : f(x) > 0\} = \pi/2$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant 2\pi/3$.*

Следствие 2. *Если $(a_1 - a_2)/a_1 \geqslant 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant 2\pi/3$.*

Следствие 3. *Если $(a_2 - a_3)/a_1 \geqslant 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geqslant 2\pi/3$.*

Литература

1. *Дьяченко М.И.* О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторых вопросах гладкости сопряженных функций // Сообщ. АН Груз. ССР, **104**:3 (1981), 533-536.

2. *Белов А.С.* Степенные ряды и кривые Пеано // Изв. А СССР. Сер. матем., **49**:4 (1985), 675-704.

3. *Дьяченко М.И.* ... // Теория функций и приближений. Труды 2-й Саратовской зимней школы 24 января - 5 февраля 1984 года, часть 2. — Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 101-104.

4. *Оганесян К.А.* Мера множества нулей суммы невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ // Матем. заметки, **103**:4 (2018), 576-581.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ В КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Б.П. Осиленкер

b_osilenker@mail.ru

УДК 517.538.3

Получены результаты о мультипликаторах сходимости рядов Фурье по многочленам, ортонормированным в континуально-дискретных пространствах Соболева.

Ключевые слова: континуально-дискретные пространства Соболева, ортонормированные многочлены, ряды Фурье, мультипликаторы сходимости

On multipliers of the Fourier series with respect to polynomials orthogonal in continuously-discrete Sobolev spaces

Some results about multipliers of convergence of the Fourier series in polynomials orthonormal in continuously-discrete Sobolev spaces were obtained.

Keywords: continuously-discrete Sobolev spaces, orthonormal polynomials, Fourier series, multipliers of convergence

Осиленкер Борис Петрович, д.ф.-м.н., профессор (Московский государственный строительный университет, Москва, Россия); Osilenker Boris (Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)

Рассмотрим нестандартное скалярное произведение

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\theta(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i}f^{(i)}(a_k)g^{(i)}(a_k) \qquad (1)$$

где $\theta(x)$ положительная неубывающая на $[-1,1]$ функция с бесконечным числом точек роста и точки $a_k, -1 \leqslant a_k \leqslant 1$; $M_{k,i} > 0$, $i = 0, 1, \dots N_k$; $k = 1, 2, \dots, m$. Пространство Соболева со скалярным произведением (1) называется *континуально-дискретным пространством Соболева.*

Обозначим через $q_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots; x \in [-1, 1])$ систему многочленов n-ой степени с положительным старшим коэффициентом, ортонормированных по отношению к скалярному произведению (1)

$$< q_n, q_m >= \int_{-1}^{1} q_n(x)q_m(x)d\theta(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i}q_n^{(i)}(a_k)q_m^{(i)}(a_k) = \delta_{n,m}$$
$$(n, m = 0, 1, \dots).$$

Многочлены $q_n(x)$ привлекают внимание многих исследователей в связи с задачами теории функций, функционального анализа, математической физики, теории вероятностей, квантовой механики и вычислительной математики и их приложениям. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество функций, определенных на $[-1, 1]$:

$$\mathfrak{R} = \left\{ f, \int_{-1}^{1} |f(x)|d\theta(x) < \infty; \right.$$
$$\left. f^{(i)}(a_k)(i = 0, 1, \dots N_k; k = 1, 2, \dots, m) - \text{существуют} \right\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие ряд Фурье – Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\, q_k(x),$$

где

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} f(t)q_k(t)d\theta(t) + \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_s} M_{s,i}f^{(i)}(a_s)q_k^{(i)}(a_s)(k = 0, 1, 2, \dots),$$

и рассмотрим вопрос о мультипликаторах поточечной и равномерной сходимости рядов Фурье – Соболева.

Введем числа $N_k^*(k = 0, 1, \dots)$

$$N_k^* = \begin{cases} N_k + 1, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ N_k + 2, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases}$$

и

$$\omega_N(x) = \sum_{k=1}^{m}(x - a_k)^{N_k^*}, N = \sum_{k=1}^{m} N_k^*; \pi_{N+1}(x) = \int_{-1}^{x} \omega_N(t)dt.$$

Многочлены $q_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\pi_{N+1}(x)q_n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} d_{n+j,j}q_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N+1} d_{n,j}q_{n-j}(x) \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где

$$q_{-j}(x) = 0, j = 1, 2, \ldots; d_{n,s} = 0, n = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Обозначим $E_m = (-1, 1)\backslash \cup_{k=1}^{m}\{a_k\}$.
Рассмотрим последовательность вещественных чисел

$$\Phi = \{\phi_k, k = 0, 1, 2, \ldots; \phi_0 = 1\}, \{\phi_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^{\infty}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ по ее ряду Фурье$-$Соболева поставим в соответствие линейный оператор T, задаваемый соотношением

$$T(f; x; \Phi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k c_k(f) q_k(x). \tag{2}$$

T называется *мультипликаторным оператором*, последовательность Φ — *мультипликатором ряда Фурье$-$Соболева*, ряд (2) — *мультипликаторным рядом*. Положим

$$\Delta\phi_k = \phi_k - \phi_{k+1}, \Delta^2\phi_k = \phi_k - 2\phi_{k+1} + \phi_{k+2} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Последовательность Φ называется *квазивыпуклой*, если

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\phi_k| < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть ортонормированная система многочленов $\{q_n(x)\}$ удовлетворяет условию*

$$|q_n(t)| \leqslant h(t) \quad (t \in E_m; n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где $h(t)$ – непрерывная функция, и для рекуррентных коэффициентов выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{s=0}^{\infty}(|d_{s+j,j} - d_{s+j+l,j}| + |d_{s+l,l} - d_{s+j+l,l}|) < \infty. \tag{4}$$

Если для квазивыпуклой последовательности Φ имеет место соотношение

$$\phi_k = O\Big(\frac{1}{\ln k}\Big) \quad (k \to \infty),$$

то справедливы следующие утверждения:
(i) *пусть для функции $f \in \mathfrak{R}$ выполняется*

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|h(t)d\theta(t) < \infty,$$

тогда в каждой точке Лебега $x \in E_m$ (и, следовательно, почти всюду) сходится мультипликаторный ряд (2);
(ii) *пусть функция $f \in \mathfrak{R}$ непрерывна на $[-1,1]$ и мера $d\theta(x)$ абсолютно непрерывна и ограничена на E_m, тогда равномерно на всех компактных подмножествах из E_m сходится мультипликаторный ряд (2).*

Теорема 2. *Если $f \in L^2_{d\theta}([-1,1])$, то ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k c_k(f) q_k^{(i)}(x_s)(i = 0,1,2,\ldots,N_s, s = 1,2,\ldots,m)$$

сходится, если последовательность Φ квазивыпукла и сходится (к конечному пределу).

Замечание. Симметричные многочлены Гегенбауэра–Соболева $B_n^{(\alpha)}(x)$ $(n = 0,1,\ldots;\ x \in [-1,1])$, ортонормированные в скалярном произведении

$$< f,g >_\alpha = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w_\alpha(x)dx + \\ + M[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)] + N[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)],$$

где $M > 0, N > 0$ и

$$w_\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)}(1-x^2)^\alpha \quad (\alpha \geqslant -1/2),$$

удовлетворяют условиям (3) и (4).

ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Г. Петров
petrovipmech@gmail.com

УДК 517.518

Представлен алгоритм вывода квадратурных формул без насыщения для вычисления линейных операторов, действующих на периодические функции. Алгоритм прилагается к построению схем без насыщения для решения разнообразных краевых задач гармонического и бигармонического уравнений на плоскости, а также общего полигармонического уравнения.

Ключевые слова: численные схемы без насыщения, полигармоническое уравнение

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17–01–00901).

Петров Александр Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, ИПМех РАН имени А.Ю. Ишлинского (Москва, Россия); Alexander Petrov (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

The numerical scheme without saturation for polyharmonic equations

An algorithm for deriving quadrature formulas without saturation to compute linear operators acting on periodic functions is presented. The algorithm is applied to the construction of schemes without saturation for solving various boundary value problems of harmonic and biharmonic equations on the plane, as well as the General polyharmonic equation.

Keywords: numerical schemes without saturation, polyharmonic equation

Рассматриваются линейные операторы

$$\Phi(z) = \int_0^1 H(z' - z)F(z')dz', \tag{1}$$

ядро которого имеет единичный период и представляется рядом Фурье

$$H(z) = \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(h_n \cos nx + r_n \sin nx), \quad x = 2\pi z. \tag{2}$$

Линейные операторы действуют на функции $F(z)$ единичного периода, и в результате действия получается функция $\Phi(z)$ единичного периода.

Для вычисления линейных операторов строится сетка $z_i = i/N$, $i = 1, 2, \ldots, N$ и значения $\Phi(z_i)$ в узлах сетки определяются по квадратурной формуле вида $\Phi(z_i) = \sum_{j=1}^{N} L_{ij}\Phi(z_j)$. К.И. Бабенко [1] ввел понятие тригонометрического порядка точности квадратурной формулы m, которое для периодических функций можно сформулировать так.

Определение 1. *Если квадратурная формула для тригонометрических полиномов степени $n \leqslant m$*

$$F_m(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x = 2\pi z$$

дает точные значения в узлах сетки z_i, $i = 1, \ldots N$ и неточные для полиномов степени $n > m$, то целое число m называется тригонометрическим порядком точности квадратурной формулы.

Определение 2. *Если алгебраический порядок точности квадратурной формулы не зависит от числа узлов сетки N и не растет с увеличением числа узлов сетки N, то она называется квадратурной формулой с насыщением.*

Доказана следующая основная теорема

Теорема. *Для ядра H, который определяется рядом Фурье (2), квадратурная формула линейного оператора (1) имеет вид*

$$\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} g_{j-i}F_j, \quad \Phi_i = \Phi(z_i), \quad F_i = F(z_i),$$
$$z_j = j/N, \quad j = 1, 2, \ldots, N = 2M,$$
$$g_m = \frac{1}{N}\left[\frac{h_0}{2} + \frac{h_M}{2}(-1)^m + \sum_{n=1}^{M-1}(h_n \cos(2\pi nm/N) + r_n \sin(2\pi nm/N))\right].$$

В дискретных точках $x_i = 2\pi z_i = 2\pi i/N,\ i = 1, 2, \ldots, N$ *она определяет точные значения оператора (1), действующего на функции*

$$F(z) = 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots, \cos(M-1)x,\ \cos Mx,$$
$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots, \sin(M-1)x, \quad x = 2\pi z, \quad M = N/2.$$

С помощью *Теоремы* строятся квадратурные формулы без насыщения для дифференцирования и интегрирования функций, для интегральных операторов с логарифмическими особенностями. Далее, применяя метод граничных элементов, строятся квадратурные формулы без насыщения для линейных операторов граничных интегральных уравнений.

Примеры применения *Теоремы*.

Пример 1. Получим квадратурную формулу для ядра $H = 1$. Тогда коэффициент разложения в ряд $h_0 = 2$, все остальные равны нулю. По *Теореме* квадратурная формула примет вид $\int_0^1 F(z)dz = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i$.

Она в точках $z_i, \quad i = 1, \ldots N$ дает точные значения интеграла для функций: $1,\ \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos(N-1)x,\ \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin(N-1)x,\ (x = 2\pi z)$. Ее порядок точности по Бабенко равен $N-1$. Квадратурная формула ненасыщаема.

Пример 2. Получим квадратурную формулу для ядра с логарифмической особенностью, которая имеет место в функции Грина для уравнения Лапласа $H = \ln|\sin \pi z|$.

По *Теореме* находим квадратурную формулу $\int_0^1 \ln|\sin \pi(z - z_i)|F(z)dz = \sum_{j=1}^{N} g_{j-i}F_j$,

$$g_m = -\frac{1}{N}\left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{1}{k}\cos\frac{2\pi km}{N}\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots N.$$

Она в точках $x_i = 2\pi z_i, \quad i = 1, \ldots N$ дает точные значения интеграла для функций $\cos nx,\ \sin nx, \quad n = 0, 1, \ldots M$. Ее порядок точности по Бабенко равен $M = N/2$. Квадратурная формула ненасыщаема.

Схема без насыщения для решения гармонического уравнения $\Delta\Phi(x, y) = 0$. В теории Ньютоновского потенциала для функции $\Phi(x, y)$, гармоническую внутри области S, ограниченной гладким замкнутым контуром ∂S известно линейное соотношение $AV(s) + B\Phi(s) = 0$ между функцией $\Phi(s)$ и ее нормальной производной $V(s)$. Интегральные операторы A и B действуют на функции $\Phi(s)$ и $V(s)$, определенные на замкнутом контуре, имеющих период равный длине дуги. Ядро оператора A содержит логарифмическую особенность, а ядро оператора B – периодическая гладкая функция. К ним применяются квадратурные формулы примеров 1 и 2, с помощью которых интегральное уравнение приводится к системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}V_j + B_{ij}\Phi_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

относительно дискретных значений на контуре функций Φ и V. Для решения задачи Дирихле нужно разрешить систему относительно значений V_i,

а для решения задачи Неймана – разрешить систему относительно значений Φ_i. При росте числа элементов сетки по арифметической прогрессии погрешность численных расчетов уменьшается по геометрической прогрессии.

Схема без насыщения для решения полигармонического уравнения $\Delta^m\Phi(x,y)=0$ строится на базе системы интегральных уравнений Векуа [2], которые имеют следующую структуру:

$$\sum_{i=1}^{m}(A^{i-1}V^{i-1}+B^{i-1}\Phi^{i-1})=0,\quad \sum_{i=1}^{m-1}(A^{i-2}V^{i-1}+B^{i-2}\Phi^{i-1})=0,$$
$$\dots$$
$$AV^{(m-1)}+B\Phi^{(m-1)}=0,$$
$$A^{(k)}V^{(k)}(s)=-\int_0^l G^{(k)}(s,s')V^{(k)}(s')ds',$$
$$B^{(k)}\Phi^{(k)}(s)=\int_0^l \frac{\partial G^{(k)}}{\partial n'}(s,s')\,\Phi^{(k)}(s')ds',\quad k=1,2,\dots,m-1,$$
$$\Phi^{(k)}(M')=\Delta^{(k)}\Phi(M'),\quad V^{(k)}(M')=\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial n'},$$

где операторы $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ действуют на функцию $\Phi^{(k)}(s')$ и ее нормальную производную $V^{(k)}(s')$, определенные на границе, а для ядер операторов $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ Векуа приводит аналитические выражения.

С помощью *Теоремы* каждое слагаемое

$$A^{i-1}V^{i-1}+B^{i-1}\Phi^{i-1}$$

в сумме Векуа аппроксимируется системой уравнений для дискретных значений функций

$$\sum_{j=1}^{N}\left(A_{kj}^{i-1}V_j^{i-1}+B_{kj}^{i-1}\Phi_j^{i-1}\right),\quad k=1,2,\dots,N$$

Также как и для гармонического уравнения полученная линейная система уравнений позволяет решать задачи Дирихле, Неймана и смешанную задачи. При росте числа элементов сетки по арифметической прогрессии погрешность численных расчетов уменьшается по геометрической прогрессии.

Полигармонические уравнения встречаются во многих задачах гидродинамики, теории упругости, электродинамике, теплопроводности, фильтрации и других. Метод позволяет с большой точностью решать возникающие в них краевые задачи с высокой точностью для любых гладких областей.

Литература

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. — Москва – Ижевск: РХД, 2002.

2. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.: Физматлит, 1948.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НАИБОЛЬШЕМ ЗНАЧЕНИИ МИНИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Ю. Попов

УДК 517

Получена оценка снизу наибольшего значения минимума модуля на окружности аналитической функции, когда радиус окружности пробегает отрезок вида $[qR, R]$, где $0 < q < 1$. Оценка дана через отрицательную степень интегральной нормы на окружности радиуса AR, где $A > 1$ зависит от q и показателя степени

Ключевые слова: минимум модуля, аналитическая функция на окружности, оценка снизу, интегральная норма

The extremal point of the largest minimum value of the modulus of an analytic function on a circular curve

The extremal point of the largest minimum value of the modulus of an analytic function on a circular curve is obtained.

Keywords: minimum value of the modulus, analytic function, lower bound, integral norm

Рассмотрим пространства H^1 и H^∞ функций, аналитических в круге $|z| < 1$ со стандартными нормами $||f||_1 = \sup\limits_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi$, $||f||_\infty = \sup\limits_{|z|<1} |f(z)|$. Обозначим $m(f;r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $\mathfrak{M}(f;[R_1,R_2]) = \max\limits_{R_1 \leqslant r \leqslant R_2} m(f;r)$.

Цель исследования — выяснить, при каких $q \in (0,1)$, $R \in (0,1)$ и $d > 0$ набольшее значение $m(f;r)$ на отрезке $qR \leqslant r \leqslant R$ допускает оценку снизу через $||f||_1^{-d}$.

Положим $s = \frac{1+q}{1-q}$,

$$B = B(q,d) = \frac{1}{2}\left[(s + \sqrt{s^2-1})^{\frac{d+1}{d}} + (s - \sqrt{s^2-1})^{\frac{d+1}{d}} \right],$$

$A_+ = A_+(q,d) = \frac{1-q}{2} B + \frac{1+q}{2}$, $A_- = A_-(q,d) = A_+ - 1 - q$.

Замечание. Поскольку $B > s$, то $A_+ > 1 + q > 1$. Величина $A_-(q,d)$ не всегда превосходит 1. Например, $A_-(q,1) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - 2 < q < 1$.

Теорема 1. *Каковы бы ни были числа $q \in (0,1)$ и $d > 0$, справедливы следующие утверждения.*

1. При любом $R \in (0, 1/A_+]$ положительна величина

$$\inf \left\{ \mathfrak{M}(f;[qR,R]) ||f||_1^d \;\middle|\; f \in H^1, f(0) = 1 \right\}.$$

Попов Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anton Popov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

2. Если выполнено условие $A_-(q,d) \geqslant 1$, *то при любом* $R \in \left[\frac{1}{A_-+(1+q)/18}, 1\right)$ *справедливо равенство*

$$\inf\left\{\mathfrak{M}(f;[qR,R])||f||_\infty^d \;\middle|\; f \in H^\infty, f(0)=1\right\} = 0.$$

Из первой части теоремы и равенства $A_+(1/3,1)=3$ выводится

Следствие. *Для любой целой функции* $F \not\equiv 0$ *существуют последовательность положительных чисел* $r_n \to +\infty$ *и постоянная* $C>0$ *такие, что выполняются неравенства* $r_{n+1} < 3r_n+1$, $m(F,r_n) > \frac{C}{M(F;9r_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *где* $M(F;x) = \max\limits_{|z|\leqslant x}|F(x)|$. Следствие дополняет многочисленные исследования, связанные с оценками снизу минимума модуля целых функций [1] (гл. 3) , [2].

Относительно оценки снизу наибольшего значения $m(f;r)$ на отрезке $R/3 \leqslant r \leqslant R$ через (-1)-ю степень интегральной нормы функции f получен более детальный результат.

Теорема 2. *Пусть* $R>0$, *функция* $f(z) = \sum\limits_{k=\nu}^{\infty} a_k z^k$, $a_\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, *аналитична в круге* $|z|<3R$,

$$\mathrm{M} = \sup_{0<x<3R} \int_0^{2\pi} |f(xe^{i\varphi})|d\varphi < +\infty.$$

Тогда существует точка $r \in (R/3,R)$, *в которой выполняется неравенство*

$$m(f;r) > \frac{|a_\nu|^2 R^{2\nu}}{6\mathrm{M}}.$$

С помощью первой части теоремы 1 доказана следующая теорема об оценке снизу $\mathfrak{M}(F;[qR,R])$ через мажоранту максимума модуля функции F в случае, когда F имеет нормальный тип при порядке $\rho \in (0,+\infty)$.

Теорема 3. *Если функция* F *имеет тип* $\sigma \in (0,+\infty)$ *при порядке* $\rho \in (0,+\infty)$, $q \in (0,1)$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $R_0 = R_0(\varepsilon,q,F)$, *что при любом* $R>R_0$ *верно неравенство*

$$\mathfrak{M}(F;[qR,R]) > \exp(-K(q,\rho)(\sigma+\varepsilon)R^\rho), \tag{1}$$

где в качестве $K(q,\rho)$ *можно взять*

$$K(q,\rho) = \mathrm{P}(\rho)\left(\frac{1+q}{2}\right)^\rho \ln(s+\sqrt{s^2-1}),\ \mathrm{P}(\rho) = \min_{t>0}\frac{(1+e^t)^\rho}{t} \tag{2}$$

Оценка снизу вида (1) была давно известна [3] (гл. 1, § 1, п. 4), но явное выражение $K(q,\rho)$ в (2) является новым результатом, ранее вид величины

$K(q,\rho)$ не был указан. Гельфонд [4] в частном случае $\rho = 1$ вывел оценку, которая в наших обозначениях выглядит так:

$$\mathfrak{M}(F;[qR,R]) > \exp(-K_1(q)(\sigma+\varepsilon)R),\ R > R_0(\varepsilon,q,F), \tag{3}$$

где $K_1(q) = 2(1+q)\ln(2s)$. Оценка (3) слабее (1), (2), поскольку

$$K(q,1) < 1.8(1+q)\ln(s+\sqrt{s^2-1}) < K_1(q).$$

Литература

1. *Boas R.P.* Entire functions. — New York, Academic Press, 1954.

2. *Hayman W.K.* Subharmonic functions. V. 2. — Academic press, London, 1989.

3. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М., Наука, 1976.

4. *Гельфонд А.О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций. // Труды МИАН, **38**(1951), 42-67.

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДРОБНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ

М.К. Потапов, Б.В. Симонов

mkpotapov@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

УДК 517.5

Для функций одного переменного хорошо известны оценки снизу и сверху их модулей гладкости либо через их наилучшие приближения, либо через частичные суммы их рядов Фурье. При этом оценки снизу и сверху разные. В этой работе для дробных модулей гладкости функций одного и двух переменных приведены их конструктивные характеристики. Эти характеристики дают оценки, которые сверху и снизу одинаковы с точностью до констант.

Ключевые слова: модуль гладкости, частичные суммы, ряд Фурье

Constructive characteristics of fractional moduli of smoothness

For functions of one variable lower and upper bounds for their moduli of smoothness are well-known, either through their best approximations or through partial sums of their Fourier series. But the upper and lower bounds are different. Constructive characteristics for fractional moduli of smoothness for functions of one and two variables are given in this paper. These characteristics provides estimates that are just the same for lower and upper bounds accurate to the constants

Keywords: moduli of smoothness, partial sums, Fourier series

Потапов Михаил Константинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Michail Potapov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Симонов Борис Витальевич, к.ф.-м.н., доцент, ВолгГТУ (Волгоград, Россия); Boris Simonov (Volgograd State Technical University, Russia)

I. Обозначим через

• L_p $(1 < p < \infty)$– множество 2π– периодических измеримых функций $f(x)$ одного переменного таких, что $||f||_p = \Big(\int\limits_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

• L_p^0– множество функций $f(x) \in L_p$, для каждой из которых $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$,

• $S_n(f)$– частичную сумму ряда Фурье функции $f(x) \in L_p$, т.е.

$S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+t)D_n(t)dt$, где $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t}{2}}$,

• $f^{(\rho)}(x)$–производную в смысле Вейля положительного порядка ρ функции $f \in L_p$,

• $\omega_\alpha(f,\delta)_p$– модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p$, т.е. $\omega_\alpha(f,\delta)p = \sup\limits_{|h|\leqslant\delta} || \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x+(\alpha-\nu)h)||_p$,

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$.

Теорема 1([1], [2], [3]). *Пусть* $f \in L_p^0, 1 < p < \infty, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$.

Тогда справедливы неравенства

$C_1\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p \leqslant n^{-\alpha}||S_n^{(\alpha)}(f)||_p + ||f - S_n(f)||_p \leqslant C_2\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p$,

где положительные постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* n *и* f.

II. Обозначим через

• $L_{p_1p_2}$ $(1 < p_i < \infty,\ i = 1,2)$– множество измеримых функций $f(x_1,x_2)$ двух переменных, 2π– периодических по каждому переменному, и таких, что

$$||f||_{p_1p_2} = \Big(\int\limits_0^{2\pi} \Big[\int\limits_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \Big]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \Big)^{\frac{1}{p_2}} < \infty,$$

• $L_{p_1p_2}^0$– множество функций $f \in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2,

• $S_{n_1\infty}(f), S_{\infty n_2}(f), S_{n_1n_2}(f), n = 0,1,2,...,$ – частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L_{p_1p_2}$, т.е.

$S_{n_1\infty}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2)D_{n_1}(t_1)dt_1$,

$S_{\infty n_2}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2)D_{n_2}(t_2)dt_2$,

$S_{n_1n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{n_1}(t_1)D_{n_2}(t_2)dt_1dt_2$,

• $f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2) \in L_{p_1p_2}^0$ порядка $\rho_1(\rho_1 \geqslant 0)$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2(\rho_2 \geqslant 0)$ по переменной x_2,

• $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)$– разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f \in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1}f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1,x_2),$$

• $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)-$ разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f\in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2}f(x_1,x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2),$$

• $\Delta_{h_1h_2}^{\alpha}(f)-$ полную разность с шагами h_1 и h_2 положительного порядка α функции $f\in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\Delta_{h_1h_2}^{\alpha}(f)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu}f(x_1+(\alpha-\nu)h_1,x_2+(\alpha-\nu)h_2),$$

• $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1p_2}-$ смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1p_2}=\sup_{|h_i|\leqslant\delta_i,i=1,2}\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_{p_1p_2}.$$

• $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{p_1p_2}-$ частный модуль гладкости по переменной x_1 положительного порядка α_1 функции $f\in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{p_1p_2}=\sup_{|h_1|\leqslant\delta}||\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)||_{p_1p_2},$$

• $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1p_2}-$ частный модуль гладкости по переменной x_2 положительного порядка α_2 функции $f\in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1p_2}=\sup_{|h_2|\leqslant\delta}||\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)||_{p_1p_2},$$

• $\omega_{\alpha}(f,\delta)_{p_1p_2}-$ полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f\in L_{p_1p_2}$, т. е.

$$\omega_{\alpha}(f,\delta)_{p_1p_2}=\sup_{|h_1|\leqslant\delta,|h_2|\leqslant\delta}||\Delta_{h_1h_2}^{\alpha}(f)||_{p_1p_2}.$$

Теорема 2([4], при $p_1=p_2$ [1], [5], [6]). *Пусть* $f\in L^0_{p_1p_2}$, $1<p_i<\infty,\alpha_i>0,n_i\in\mathbb{N},i=1,2$. *Тогда справедливы неравенства*

$$C_3\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\Big(f,\tfrac{\pi}{n_1},\tfrac{\pi}{n_2}\Big)_{p_1p_2}\leqslant n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{n_1,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}+$$
$$+n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f-S_{\infty,n_2}(f))\big\|_{p_1p_2}+n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f-S_{n_1,\infty}(f))\big\|_{p_1p_2}+$$
$$+\big\|f-S_{n_1,\infty}(f)-S_{\infty,n_2}(f)+S_{n_1,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}\leqslant C_4\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\Big(f,\tfrac{\pi}{n_1},\tfrac{\pi}{n_2}\Big)_{p_1p_2},$$

где положительные постоянные C_3 *и* C_4 *не зависят от* f *и* n_1,n_2.

Теорема 3([7], при $p_1=p_2$ [1], [8]). *Пусть* $f\in L^0_{p_1p_2},1<p_i<\infty$, $\alpha_i>0,n_i\in\mathbb{N},i=1,2$. *Тогда справедливы неравенства*

а) $C_5\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2}\leqslant\big\|f-S_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2}+n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2}\leqslant$

$\leqslant C_6\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2}$,

б) $C_7\omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2}\leqslant\big\|f-S_{\infty n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}+n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}\leqslant$

$\leqslant C_8\omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2}$,

где положительные постоянные C_5,C_6,C_7 *и* C_8 *не зависят от* f *и* n_1,n_2.

Теорема 4([9], при $p_1=p_2$ [1], [8]). *Пусть* $f\in L^0_p,1<p<\infty,\alpha>0$, $n\in\mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$C_9\omega_{\alpha}\Big(f,\tfrac{1}{n}\Big)_p\leqslant n^{-\alpha}||S^{(\alpha,0)}_{nn}(f)||_p+n^{-\alpha}||S^{(0,\alpha)}_{nn}(f)||_p+||f-S_{nn}(f)||_p\leqslant$$

$\leqslant C_{10}\omega_\alpha\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$,

где положительные постоянные C_9 *и* C_{10} *не зависят от* f *и* n.

Литература

1. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости. — М.: МАКС Пресс, 2016.

2. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Модули гладкости дробных порядков. — М.: Изд-во Попечительского совета при мех.-мат. ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014.

3. *Симонов Б.В.* О свойствах преобразованного ряда Фурье // Деп. в ВИНИТИ. 22.06.1981. № 3031-81. М., 1981.

4. *Симонов Б.В.* Смешанные модули гладкости в смешанных метриках // Матем. заметки, **95**:5 (2012), 747-761.

5. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Свойства смешанных модулей гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 6 (2014), 36-40.

6. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Модули гладкости дробных порядков. Часть II. — М.: Изд-во Попечительского Совета при мех.-мат. ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015.

7. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Свойства частного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики: **X**:1 (К 60-летию семинара "Тригонометрические и ортогональные ряды") (2014), 58-71.

8. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Модули гладкости дробных порядков. Часть III. — М.: Изд-во Попечительского Совета при мех.-мат. ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015.

9. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Усиленное неравенство Ульянова для полных модулей гладкости функций из пространств со смешанной метрикой. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 6 (2018), 8-20.

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ХАУСДОРФА – ЮНГА И ПЭЛИ – ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

А.В. Прошкина

proschkina_a@mail.ru

УДК 517, 518

Известны аналоги теорем Хаусдорфа – Юнга и Пэли – Винера для преобразований Фурье вида

$$F(z) = \int\limits_{\mathrm{R}} e^{-izt} g(t) f(t) dt, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \;\; p \geqslant 1,$$

где $g(t) = \exp(-a|t|^\alpha)$. Здесь рассмотрен более сложный случай, когда вес $g(t)$ усложнен медленно меняющимися функциями.

Ключевые слова: математика, преобразование Фурье, целые функции

Прошкина Анастасия Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anastasia Proshkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

On some Hausdorff – Young's and Paley – Wiener's type theorems for Fourier transfoms of rapidly decreasing functions

Hausdorff – Young's and Paley – Wiener's type theorems for Fourier transfoms

$$F(z) = \int\limits_{\mathrm{R}} e^{-izt} g(t) f(t) dt, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \;\; p \geqslant 1,$$

for the weight $g(t) = \exp(-a|t|^\alpha)$ are already known. In this paper we consider more general case of the weight $g(t)$ – the weight which is complicated with slowly varying functions.

Keywords: mathematics, Fourier transfoms, entire functions

Пусть везде далее $p \geqslant 1$, $1/p+1/q = 1$, $\alpha > 1$, $1/\alpha+1/\beta = 1$; $a > 0$, $z = x+iy$. Через $\|F_y\|_q$ мы обозначим норму в $L^q(\mathbb{R})$ функции $F(x+iy) = F_y(x)$. Интерес к преобразованиям Фурье вида

$$F(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-izt} g(t)\, f(t) dt, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \;\; p \geqslant 1, \tag{1}$$

с быстро убывающим весом $g(t)$ (т.е. таким, что функция (1) является целой порядка выше первого), в частности, вызван приложениями к теории аппроксимации. К настоящему моменту наиболее изучен класс преобразований Фурье (1) в случае $g(t) = \exp(-a|t|^\alpha)$ (Р. Залик, Т.А. Саад [1], Б. Факсен [2], А.М. Седлецкий [3,4]).

Автором получены теоремы типа Хаусдорфа–Юнга и Пэли–Винера для преобразований Фурье более общего вида [5], а именно

$$F(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itz} \Big(|t|+1\Big)^{\eta} \;\; \mu(|t|) \;\; e^{-\,|t|^\alpha l(|t|)} \; f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $\eta \in \mathbb{R}$; $\mu(t)$, $l(t)$, $t \geqslant 0$ — медленно меняющиеся функции, ограниченные и отделенные от нуля на каждом конечном полуинтервале $[0, h)$, $h \in (0, +\infty)$. Пусть также $l(t), \mu(t) \in C^3[A, +\infty)$, $\exists A > 0$. Будем писать

$$f(t) \in U_k, \quad \text{если} \quad \frac{t^k f^{(k)}(t)}{f(t)} \to 0, \qquad t \to +\infty.$$

Обозначим

$$\sigma(t) = \frac{t\, l'(t)}{l(t)} - \frac{p\eta + \alpha/2 - 1}{p} \cdot \frac{1}{t^\alpha l(t)} - \left(\frac{1}{2p} \frac{t\, l'(t)}{l(t)} + \frac{t\, \mu'(t)}{\mu(t)}\right) \cdot \frac{1}{t^\alpha l(t)}.$$

Если дополнительно потребовать

$$l(t) \in U_k, \;\; k = 1,2,3; \quad \mu(t) \in U_k, \;\; k = 1,2; \quad \frac{t^3 \mu^{(3)}(t)}{\mu(t)} = O(1), \; t \to +\infty; \tag{3}$$

то при выполнении указанных условий у функции

$$y = t^{\alpha-1} l(t)[\alpha + \sigma(t)], \qquad t \geqslant t_0,$$

существует обратная функция вида

$$t = \tau(y) = y^{\beta-1} M(y), \quad y \geqslant y_0, \quad M(y)\text{– медленно меняющаяся.}$$

Фиксируем $\alpha,\ p,\ l(t),\ \mu(t),\ \eta < \frac{\alpha}{2p}$. Введем пространство $\mathcal{P}^p_{l(t),\mu(t)}(\alpha,\ \eta)$ целых функций $F(z)$ с нормой

$$\|F(z)\|_{\mathcal{P}^p_{\alpha,\ l}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |y|^{-\frac{p\eta}{\alpha-1}+\beta/2-1}\ M^{-p\eta-\alpha/2+1}(|y|)\ \mu^{-p}(\tau(|y|))\ l^{-1/2}(\tau(|y|)) \times \right.$$

$$\left. \times\ \exp\Big(-p\ |y|^{\beta}\ \ M(|y|)\ \ \Big[1 - \frac{1}{\alpha + \sigma(\ \tau(|y|)\ )}\Big]\Big)\ \times\ \|F_y\|^p_q\ dy \right)^{1/p}.$$

Верны следующие аналоги теоремы Хаусдорфа–Юнга.

Теорема 1. *Пусть* $l(t),\ \mu(t) \in C^3[A,\ +\infty)\ \ (\exists A > 0)$, *и для функций* $l(t),\ \mu(t)$ *выполнены условия* (3). *Пусть функция* $M(y)$ *такова, что*

$$\exists B > 0 \quad M(y) \in C^2[B, +\infty); \qquad \frac{y^2\ M''(y)}{M(y)} \to\ C_0 \geqslant 0, \qquad y \to +\infty. \quad (4)$$

Если $f(t) \in L^p(\mathbb{R}),\ \ p \in [1,2]$, *то функция* (2) *принадлежит пространству* $\mathcal{P}^p_{l(t),\mu(t)}(\alpha,\eta)$, *причем* $\|F(z)\|_{\mathcal{P}^p_{\alpha,\ l}} \leqslant C\ \|f\|_p$, *где* C *не зависит от* f.

Теорема 2. *Пусть* $l(t),\ \mu(t) \in C^3[A,\ +\infty)\ \ (\exists A > 0)$, *функции* $l(t),\ \mu(t)$ *удовлетворяют условиям* (3). *Пусть для функции* $M(y)$ *выполнены условия* (4). *Если функция* $F(z) \in\ \mathcal{P}^p_{l(t),\mu(t)}(\alpha,\eta),\ \ p \geqslant 2$, *то она представима в виде* (2) *с* $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$. *При этом* $\|f\|_p \leqslant C\|F(z)\|_{\mathcal{P}^p_{\alpha,\ l}}$, *где* C *не зависит от* F.

При $p = 2$, $\eta < \alpha/4$ из теорем 1 и 2 получаем

Следствие (теорема типа Пэли–Винера). *При выполнении перечисленных условий на* $l(t),\ \mu(t),\ M(y)$ *класс функций, представимых в виде* (2) *с* $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, *совпадает с пространством* $\mathcal{P}^2_{l(t),\mu(t)}(\alpha,\eta)$. *При этом нормы* $\|F(z)\|_{\mathcal{P}^2_{\alpha,\ l(t)}}$ *и* $\|f\|_2$ *эквивалентны.*

Введем обозначения для формулировки второй группы теорем. Пусть медленно меняющиеся функции $l(t),\ S(t),\ \ t \geqslant 0$, ограничены и отделены от нуля на каждом полуинтервале $[0,h),\ \ h \in (0,+\infty)$; Пусть $l(t), S(t) \in C^2[A,\ +\infty)\ \ (\exists A > 0)$, также $l(t), S(t) \in U_k,\ \ k = 1,2$.

Пусть $L(y)$ – медленно меняющаяся функция, такая, что произведение

$$T(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}\ L(y), \qquad y \geqslant y_0,$$

является обратной функцией к $\ y = t^{\alpha-1} l(t)[\alpha + \delta(t)]$, где

$$\delta(t) := \frac{t\ l'(t)}{l(t)} - \frac{\gamma}{t^\alpha l(t)} - \ \frac{tS'(t)}{S(t)} \cdot \frac{1}{t^\alpha l(t)}$$

(если $l(t),\ S(t) \in U_k,\ \ k = 1,2$, то такая функция существует).

Фиксируем $\alpha,\ p,\ l(t),\ S(t),\ \gamma > -1/p$. Рассмотрим

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itz}(|t|+1)^{-\frac{\gamma}{\alpha-1}+\frac{1-\beta/2}{p}}\ S^{-1}(\,T(|t|)\,)\ L^{-\gamma-1/(2p)}(|t|)\times$$

$$\times \exp\left(-|t|^{\beta}L(|t|)\ \Big[1-\frac{1}{\alpha+\delta(\,T(|t|)\,)}\Big]\right)\ \ f(t)dt. \tag{5}$$

Введем пространство $\mathcal{E}^{p}_{l(t),\,S(t)}(\alpha,\gamma)$ целых функций $F(z)$ с нормой

$$\|F(z)\|_{\mathcal{E}^{p}_{\alpha,\,l}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |y|^{p\gamma}S^{p}(|y|)\ e^{-p|y|^{\alpha}l(|y|)}\ \|F_y\|_q^p\ dy\right)^{1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $l(t),\ S(t) \in C^2[A,\ +\infty)\ (\exists A > 0)$, *пусть* $l(t),\ S(t) \in U_k,\ \ k = 1,2$. *Тогда если* $f(t) \in L^p(\mathbb{R}),\ \ p \in [1,2]$, *то функция* (5) *принадлежит пространству* $\mathcal{E}^{p}_{l(t),\,S(t)}(\alpha,\gamma)$, *причем*

$$\|F(z)\|_{\mathcal{E}^{p}_{\alpha,\,l}} \leqslant C\,\|f\|_p,$$

где C *не зависит от* f.

Теорема 4. *Пусть* $l(t),\ \ S(t) \in C^2[A,\ +\infty)\ \ (\exists A > 0)$, *пусть* $l(t),\ S(t) \in U_k,\ \ k = 1,2$. *Тогда если функция* $F(z)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{E}^{p}_{l(t),\,S(t)}(\alpha,\gamma),\ \ p \geqslant 2$, *то она представима в виде* (5) *с* $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, *причем*

$$\|f\|_p \leqslant C\,\|F(z)\|_{\mathcal{E}^{p}_{\alpha,\,l}},$$

где C *не зависит от* F.

Аналогично первой паре теорем, при $p = 2,\ \gamma > -1/2$ из теорем типа Хаусдорфа–Юнга 3 и 4 получаем соответствующий аналог теоремы Пэли–Винера.

Литература

1. *Zalik R.A., Abuabara Saad T.* Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms // J. Math. Anal. and Appl. **126** (1987), 483-493.

2. *Faxén B.* On approximation by translates and related problems in function theory // Ark. Math. **19** (1981), 271-289.

3. *Sedletskii A.M.* Theorems of Paley-Wiener-Pitt's type for Fourier transforms of rapidly decreasing functions // Integr. Transf. Spec. Func. **2**:2 (1994), 153-164.

4. *Седлецкий А.М.* Преобразования Фурье быстро убывающих функций // Изв. РАН. Сер. матем., **61**:3 (1997), 187-202.

5. *Proshkina A.V.* Теоремы типа Хаусдорфа-Юнга и Пэли-Винера для преобразований Фурье быстро убывающих функций // Analysis Mathematica. Akademiai Kiado **41** (2015), 207-240.

О НУЛЯХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДЭВЕНПОРТА – ХЕЙЛБРОННА В КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

З.Х. Рахмонов, А.С. Аминов

zarullo-r@rambler.ru, aminov.as@bk.ru

УДК 511.332

Задача о количестве нулей функции Дэвенпорта – Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой сводится к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

Ключевые слова: функция Дэвенпорта – Хейлбронна, экспоненциальная пара, гипотеза Римана, успокаивающие множители Сельберга

On the zeros of an odd order of the Davenport – Heilbron function in short intervals of the critical line

The problem of the number of zeros of the Davenport–Heilbron function in short intervals of the critical line reduces to the problem of finding exponential pairs for estimating special exponential sums.).

Keywords: Davenport-Heilbron function, exponential pair, Riemann hypothesis, Selberg's soothing factors

Функцией Дэвенпорта – Хейльбронна называется функция

$$f(s)=\frac{1-i\varkappa}{2}L(s,\chi)+\frac{1+i\varkappa}{2}L(s,\bar{\chi}),\qquad \varkappa=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1},$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi(2)=i$, $L(s,\chi)$ – функция Дирихле.

Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1]. Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет уравнению римановского типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)f(1-s),$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s=0.5$) не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s>1$, $0<Im\, s\leqslant T$ превосходит cT, $c>0$ — абсолютная постоянная.

В 1980 г. С.М.Воронин [2,3] доказал, что критическая прямая $Re\, s=0.5$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для функции

Рахмонов Зарулло Хусенович, д.ф.-м.н., профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им. А.Джураева (Душанбе, Таджикистан); Zarullo Rakhmonov (A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Dushanbe, Tajikistan)

Аминов Асламбек Собирович, Института математики им. А.Джураева (Душанбе, Таджикистан); Aslambek Aminov (A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Dushanbe, Tajikistan)

$N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка $f(s)$ на промежутке $Re\, s = 0.5$, $0 < Im\, s \leqslant T$, имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(0,05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$. Количество нулей функции $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А.Карацуба. Он 1989 г. доказал [4], что при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{1}$$

где ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и $T \geqslant T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$. В 1993 г. А.А.Карацуба [5,6]получил несколько более точную оценку: множитель $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ в неравенстве (1) он заменил на $(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$, следствием которого является неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

В 2017 г. С.А.Гриценко [7] усилил последнюю оценку и получил неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Затем он [8] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Целью настоящей статьи являюсь уточнение неравенства (1). Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.001, *c_4, c_5, c_g – абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geqslant T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geqslant 1.$$

Поэтому из теоремы 1 получим:

Следствие 1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0.001. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geqslant T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы проводится методом работы А.А.Карацубы [4]. Основным утверждением, позволившим доказать теорему 1, является лемма 1 о новых оценках тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, которую мы приводим также без доказательства. Введем параметры и обозначения, от которых зависят эти суммы: $P = \sqrt{5T/(2\pi)}$, $X = T^{0.01\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0.0001$, ε_1 — постоянное число; $\mathcal{L} = \ln P$; $k = [\ln \mathcal{L}]$; $\eta = c_1 k \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$; $0 < H < T^{\frac{1}{3}}$; $0 < \varepsilon_2 < 0.01$, ε_2 и c_1 – постоянные числа, λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta}-1}{\ln \varphi}\right)^k, \qquad A(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda \\ \nu_1,\nu_2<X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},$$

$$h(\nu) \equiv \beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu), \quad \beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \leqslant \nu < X, \\ 0, & \nu \geqslant X, \end{cases}$$

вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad Re\, s > 1.$$

Пользуясь введенными параметрами и обозначениями сумм $W_j(T)$, определим равенствами

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Приводимые ниже оценки сумм $W_j(T)$ будут равномерными по введенным параметрам и, тем самым, постоянные в знаках $\ll$ и O будут абсолютными.

Лемма 1. *Пусть ε_1 и ε_2 – произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее* 0.01, *k — натуральное число, $0 < \eta < 1$, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad \varkappa(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varkappa(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j = 0, \quad j = 2;$$
$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathcal{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathcal{L}\right) T^{-0{,}5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2-\varepsilon_1}.$$

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)$ также появляется в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leqslant N$, $x > 0$, $y > 0$ и в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leqslant R$.

Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М.Хаксли [9]. Он доказал, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda} \theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \leqslant \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3\cdot 416} \approx 0.31490.$$

Отсюда из леммы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *– произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящее* 0.01, k *— натуральное число,* $0 < \eta < 1$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \qquad j = 0, \quad j = 2;$$
$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathcal{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathcal{L}\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

Литература

1. *Davenport H. Heilbronn H.* On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc, **11** (1936), 181-185 and 307-312.

2. *Воронин С.М.* О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., **44**:1 (1980), 63-91.

3. *Воронин С.М.* О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН, **163** 1984, 74-77.

4. *Карацуба А.А.* О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:2 (1990), 303-315.

5. *Карацуба А.А.* О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Изв. АН СССР. Сер. матем., **5**:5 (1993), 3-14.

6. *Карацуба А.А.* Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН, **207** (1994), 180-196.

7. *Гриценко С.А.* О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Труды МИАН, **296** (2017), 72-94.

8. *Гриценко С.А.* О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле // Чебышевский сборник, **18**:4 (2017), 168-187

9. *Huxley M.N.* Sums and Lattice Points III // Proc. London Math. Soc., **87** (2003), 591-609.

О МИНИМАЛЬНОСТИ И НЕПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ПОЛУПРЯМОЙ И НА ПРЯМОЙ

А.М. Седлецкий
sedlet@mail.ru

УДК 517.518.32

Для широкого класса весов доказана равносильность минимальности и неполноты системы экспонент в весовых пространствах на полупрямой и на прямой.

Ключевые слова: весовое пространство, полнота, минимальность, система экспонент

On minimality and noncompleteness of the system of exponentials in weighted spaces on halfline and line

We present wide class of weights with following property. The minimality of the system of exponentials in the corresponding weighted spaces on line and halfline is equivalent to its noncompleteness.

Keywords: weighted space, completeness, minimality, system of exponentials

Речь пойдёт о связи между минимальностью и неполнотой системы экспонент

$$\exp\Lambda = (e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \lambda_n \in \mathbb{C} \tag{1}$$

в весовых пространствах на полупрямой $\mathbb{R}_+$ и на прямой $\mathbb{R}$.

Тригонометрическая система $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ даёт ходовой пример системы (1), являющейся полной и минимальной в пространстве $L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$. Полные и минимальные системы экспонент общего вида (1) в пространствах L^p на конечном интервале первым систематически стал изучать Н. Левинсон [1].

Будем рассматривать весовые пространства

$$L^p(\mathbb{R}_+, \omega(t)dt) =: L^p_\omega(\mathbb{R}_+),\ 1 \leqslant p < \infty, \quad C_{0,\omega}[0,\infty) =: C_{0,\omega}(\mathbb{R}_+). \tag{2}$$

$$L^p(\mathbb{R}, \omega(t)dt) =: L^p_\omega(\mathbb{R}),\ 1 \leqslant p < \infty, \quad C_{0,\omega}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Здесь $\omega(t)$ – положительный и непрерывный вес на полупрямой $[0,\infty)$ (на прямой $\mathbb{R}$). А пространство $C_{0,\omega}(\mathbb{R}_+)$ ($C_{0,\omega}(\mathbb{R})$) определяется как пространство непрерывных на $[0,\infty)$ (на $\mathbb{R}$) функций $f(t)$ с условием $f(t)\omega(t) \to 0$, $t \to +\infty$ ($t \to \pm\infty$) и с нормой

$$\|f\| = \max(|f(t)|\omega(t) : t \geqslant 0)\ (= \max(|f(t)|\omega(t) : t \in \mathbb{R})).$$

Работа выполнена при поддержке МГУ имени М.В. Ломоносова (грант "Современные проблемы фундаментальной математики и механики").

Седлецкий Анатолий Мечиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anatoly Sedletskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть выполнено условие

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\omega(t)}{t}=a,\quad -\infty\leqslant a<+\infty. \tag{4}$$

Имеет смысл рассматривать лишь указанные значения a. Действительно, если в (4) не верхний, а обычный предел равен $+\infty$, то очевидно, что ни при каком $\lambda\in\mathbb{C}$ функция $e^{-\lambda t}$ не может принадлежать $L^p_\omega(\mathbb{R}_+)$ или $C_{0,\omega}(\mathbb{R}_+)$.

Ясно, что в случае (4) условие $\mathrm{Re}\lambda_n > a/p$, $n\in\mathbb{N}$ есть условие принадлежности всех функций системы (1) пространству $L^p_\omega(\mathbb{R}_+)$, т.е. случаю (4) отвечает следующая согласованная с ним (в смысле L^p) система экспонент

$$\exp\Lambda=(e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty},\quad \mathrm{Re}\lambda_n > a/p. \tag{5}$$

Когда речь идёт о пространстве $C_{0,\omega}(\mathbb{R}_+)$, то в (5) следует полагать $p=1$. Если $a=-\infty$, то (5) надо понимать как отсутствие каких-либо ограничений на расположение точек λ_n, т.е. тогда речь идёт о системе (1).

Если $\omega(t)$ – вес на всей прямой, то принимаем условие

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\omega(\pm t)}{t}=a,\quad -\infty\leqslant a<0. \tag{6}$$

Здесь важно, что $a<0$. С весом (6) согласована (в смысле L^p) система

$$\exp\Lambda=(e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty},\quad a/p<\mathrm{Re}\lambda_n<|a|/p. \tag{7}$$

В случае пространства $C_{0,\omega}(\mathbb{R})$ здесь снова $p=1$.

Если $\omega(t)$ – быстро убывающий вес, т. е. $\omega(t)=\exp(-a|t|^\alpha)$, $a>0$, $\alpha>1$, то в пространствах (2) и (3) существуют полные и одновременно минимальные системы (1) (см. [2], глава 12).

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы предъявить широкий класс весов ω, таких, что минимальность системы (1) в пространстве(2) (в пространстве (3))равносильна её неполноте.

Примем ещё следующее условие: вес $\omega(t)$ непрерывен и положителен на полупрямой $[0,\infty)$ (на прямой $\mathbb{R}$) и

$$\omega(t)\leqslant C\omega(x),\quad t\in J(x),\ x\geqslant 0\,(x\in\mathbb{R}), \tag{8}$$

где $C>0$ не зависит от x, а $J(x)=(\max(0,x-1),x)$, $x>0$ $(J(x)=(x-1,x),\ x\in\mathbb{R})$. Верна

Теорема 1. *Пусть B_+* (соответственно, *B*) *– какое-нибудь из пространств (2)* (*какое-нибудь из пространств (3)*). *Пусть вес $\omega(t)$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$* (*на прямой $\mathbb{R}$*) *удовлетворяет условию (8) и условию (4) с $a\in(-\infty,\infty)$* (*условию (6) с $a\in(-\infty,0)$*). *Пусть, кроме того, для любого $a_1>a$ функция $e^{-a_1 t}\omega(t)$ не возрастает при всех достаточно больших t* (*функции $e^{-a_1 t}\omega(\pm t)$ не возрастают при всех достаточно больших положительных t*).

Тогда минимальность системы (5) (*системы (7)*) *в B_+* (*в B*) *равносильна её неполноте.*

Насколько известно автору, утверждение о равносильности неполноты и минимальности в литературе не встречалось даже для в случае невесовых пространств $L^p(\mathbb{R}_+)$ и систем $\exp\Lambda$, $\mathrm{Re}\lambda_n > 0$.

Доказательство теоремы 1 содержится в [3].

Следствие 1. *Пусть вес* $\omega(t)$, $t \geqslant 0\,(t \in \mathbb{R})$ *дифференцируем при всех достаточно больших* $t\,(|t|)$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = a,\ -\infty < a < \infty \quad \left(\pm \lim_{t\to+\infty} \frac{\omega'(\pm t)}{\omega(t)} = a,\ -\infty < a < 0\right). \quad (9)$$

Тогда неполнота системы (5) (системы (7)) в каком-нибудь из пространств (2) (из пространств (3)) равносильна её минимальности.

Замечание 1. *Примеры весов, удовлетворяющих условиям (9), дают функции* $\omega(t) = e^{a|t|}\exp(b|t|^\alpha)(1+t^2)^{\beta/2}$, $\quad b, \beta \in \mathbb{R},\ -1 < \alpha < 1, \quad t \geqslant 0\ (t \in \mathbb{R})$, *где* a *то же, что и в (9).*

Литература

1. *Levinson N.* Gap and density theorems. —- New York: Proc. Amer. Math. Soc., 1940.

2. *Седлецкий А.М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. —- Москва: Физматгиз, 2005.

3. *Седлецкий А.М.* О неполноте и минимальности систем экспонент в весовых пространствах на полупрямой и на прямой // Analysis Mathematica, **41** (2015), 81-103.

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА

Т.Ю. Семенова

station@list.ru

УДК 517.15, 517.521

В одномерном случае для интеграла Фейнмана в представлении Ли–Померанского определены вид и способ получения асимптотического ряда, проведена оценка его остаточного члена.

Ключевые слова: интеграл Фейнмана, асимптотическое разложение по параметру.

Estimation of the residual term of the asymptotic expansion of the Feynman integral

In the one-dimensional case for the Feynman integral in the representation of Lee–Pomeransky the type and method of obtaining the asymptotic series are determined, the estimation of its residual term is made.

Keywords: Feynman integral, asymptotic expansion in a parameter.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-02-00175).

Семенова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatiana Semenova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Исследуем поведение при $t \to 0+$ интеграла

$$\mathcal{F}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} (P(x,t))^{-\alpha}\, dx,$$

где $P(x,t) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^k t^m$ — многочлен, $S = \{w = (k,m) \mid k,m \in \mathbb{Z}_+\}$ – конечное подмножество $\mathbb{R}^2$, $c_w > 0$, $\alpha > 0$. Рассматриваем такие α, для которых интеграл $\mathcal{F}(t)$ является сходящимся.

Данная задача имеет значительный практический интерес и возникает в квантовой теории поля при изучении интегралов Фейнмана, соответствующих некоторому графу. В случае, если подынтегральная функция зависит от квадрата внешнего чётырех-импульса q^2 и квадрата массы m^2, при этом $q^2 \gg m^2$, введение нового параметра $t = m^2/q^2$ позволяет свести вопрос к получению асимтотического разложения интеграла при малых значениях t, причём в большинстве случаев бывает достаточно несколько первых членов такого разложения (см. [1]).

Опишем способ получения асимптотического разложения для $\mathcal{F}(t)$, который уже использовался при решении практических задач (см. [2]), но ранее не имел строгого математатического обоснования.

Пусть $\mathcal{N}_P$ – многогранник Ньютона многочлена $P(x,t)$ – выпуклая оболочка множества S в $\mathbb{R}^2$. Грани γ этого многогранника, для которых векторы нормали, направленные внутрь $\mathcal{N}_P$, имеют положительную вторую координату, будем называть существенными. И пусть существенные грани γ являются отрезками прямых, заданных уравнениями $m = a_\gamma \cdot k + b_\gamma$. Грани, имеющие общую точку $w \in S$, — соседние грани.

Обозначим расстояние по оси t от точки $w \in S$ до прямой, содержащей грань γ, через $\varepsilon(w,\gamma) = m - a_\gamma \cdot k - b_\gamma \geqslant 0$. Определим $L_\gamma = -b_\gamma \cdot \alpha - a_\gamma$, множества

$$\mathcal{E}_\gamma = \{L_\gamma + \sum_{S \setminus \gamma} p_w \cdot \varepsilon(w,\gamma) \mid p_w \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Способ получения асимптотического разложения следующий:
(I) для каждой существенной грани γ сделаем замену $x = y \cdot t^{-a_\gamma}$ в подынтегральном выражении:

$$Q_\gamma(y,t)dy = (P(x,t))^{-\alpha}\, dx = t^{L_\gamma} \cdot \Big(\sum_{w \in \gamma} c_w y^k + \sum_{w \in S \setminus \gamma} c_w y^k t^{\varepsilon(w,\gamma)} \Big)^{-\alpha} dy;$$

(II) разложим функции $Q_\gamma(y,t)$ в формальные ряды по степеням t:

$$Q_\gamma(y,t) = \sum_j \varphi_{\gamma,j}(y) \cdot t^{\beta_{\gamma,j}};$$

(III) формально проинтегрируем ряды почленно, причем в случае расходимости интегралов от функций $\varphi_{\gamma,j}(y)$ будем проводить стандартную процедуру регуляризации, то есть вычислять значения интегралов для тех α, при которых это имеет смысл, а потом делать аналитическое продолжение (см., например, [3], гл. 1);
(IV) сложим полученные результаты по всем существенным граням γ.

Теорема. *Если любые два множества $\mathcal{E}_\gamma$, соответствующие соседним существенным граням γ, не пересекаются, тогда*

$$\mathcal{F}(t) \sim \sum_{\gamma} \Big(\sum_{j} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \varphi_{\gamma,j}(y)dy \cdot t^{\beta_{\gamma,j}} \Big). \tag{1}$$

В противном случае асимптотическое разложение $\mathcal{F}(t)$ можно получить из представления (1) *предельным переходом по α.*

Следствие. Упорядочим элементы множества $\bigcup\limits_{\gamma} \mathcal{E}_\gamma$ по возрастанию – $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_i < \ldots$. Каждому i поставим в соответствие пару $(\overline{p}, \gamma)$ (возможно, не одну) такую, что $\beta_i = L_\gamma + \sum\limits_{S \setminus \gamma} p_w \cdot \varepsilon(w, \gamma)$. Если любые два множества $\mathcal{E}_\gamma$, соответствующие соседним существенным граням γ, не пересекаются, тогда асимптотический ряд для $\mathcal{F}(t)$ выглядит следующим образом: $\mathcal{F}(t) \sim \sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i \cdot t^{\beta_i}$, при этом

$$\mathcal{F}(t) - \sum_{i=1}^{i_0} l_i \cdot t^{\beta_i} = O(t^{\beta_{i_0+1}}) \text{ или } \mathcal{F}(t) - \sum_{i=1}^{i_0} l_i \cdot t^{\beta_i} = o(t^{\beta_{i_0}}).$$

Нужные для приближения

$$\mathcal{F}(t) \approx \sum_{i=1}^{i_0} l_i \cdot t^{\beta_i}$$

существенные грани γ определяются из соответствия $i \mapsto (\overline{p}, \gamma)$.

Если же $\mathcal{E}_\gamma$ пересекаются для некоторых соседних существенных граней γ, тогда асимптотический ряд для $\mathcal{F}(t)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} (l_i + s_i \cdot \ln t) \cdot t^{\beta_i},$$

причём $s_i = 0$, если индексу i сопоставлены либо одна пара $(\overline{p}, \gamma)$, либо пары с несоседними γ. Соответственно вычисляется и оценка погрешности асимптотического приближения.

Литература

1. *Semenova T. Yu., Smirnov A. V., Smirnov V. A.* On the status of expansion by regions // European Physical Journal C, **79** (2019), 136–147.

2. *Pak A., Smirnov A. V.* Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals // European Physical Journal C, **71** (2011), 1626–1631.

3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

П.А. Терехин
terekhinpa@mail.ru

УДК 517.518

Пусть X сепарабельное симметричное пространство. Используя понятие мультипликатора $\mathcal{M}(X)$ с.п. X относительно тензорного произведения в сочетании с фреймовым подходом, мы рассматриваем вопрос об условиях на функцию $f \in X$ при которых система ее сжатий и сдвигов является системой представления в X. Основной результат утверждает, что таким условием является принадлежность $f \in \mathcal{M}(X)$ наряду с $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$. При этом условие $f \in \mathcal{M}(X)$ окончательно в определенном смысле.

Ключевые слова: система сжатий и сдвигов, симметричное простанство, тензорное произведение, фрейм

Sequences of dilations and translations in symmetric spaces

Let X be an arbitrary separable symmetric space. By using a combination of the frame approach and the notion of the multiplicator space $\mathcal{M}(X)$ of X with respect to the tensor product, we investigate the problem when the sequence of dyadic dilations and translations of a function $f \in X$ is a representing system in the space X. The main result reads that this holds whenever $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$ and $f \in \mathcal{M}(X)$. Moreover, the condition $f \in \mathcal{M}(X)$ turns out to be sharp in a certain sense.

Keywords: sequence of dilations and translations, symmetric space, tensor product, frame

Пусть X — сепарабельное симметричное пространство на $I = [0,1]$. При каких условиях на функцию $f \in X$ система ее сжатий и сдвигов

$$f_{k,i}(t) = \begin{cases} f(2^k t - i), & t \in [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad i = 0, \dots, 2^k - 1, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

является *представляющей системой* в с.п. X? Последнее означает, что для каждой функции $x \in X$ существует последовательность коэффициентов $\{\xi_{k,i}\}$ такая, что $x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \xi_{k,i} f_{k,i}$ (сходимость в X). Если, дополнительно, имеем $\sum_{k=0}^{\infty} \| \sum_{i=0}^{2^k-1} \xi_{k,i} f_{k,i} \|_X \leqslant C \|x\|_X$, то будем говорить об *абсолютно представляющей системе* с константой представления $C > 0$.

Вопросы представления функций посредством орторекурсивных разложений по подпространствам гильбертова пространства были изучены в статье [1]. Для пространств $X = L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, ответ на поставленный вопрос был получен в работе В.И. Филиппова и П. Освальда [2], в которой доказано, что очевидное необходимое условие $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$ является одновременно и достаточным для того, чтобы система сжатий и сдвигов функции

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414).

Терехин Павел Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Саратовский государственный университет (Саратов, Россия); Pavel Terekhin (Saratov State University, Saratov, Russia)

$f \in L_p$ была представляющей системой в L_p. При этом ключевую роль в доказательстве играет тот факт, что для любой $f \in L_p$, $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$, существует такая константа $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $\|1 - \lambda_0 f\|_{L_p} < 1$. При исследовании возможности представления функций по системам сжатий и сдвигов в произвольном симметричном пространстве выяснилось, что последнее, вообще говоря, не выполнено уже в степенном пространстве Лоренца Λ_{t^α}, $0 < \alpha < 1$. Более эффективным оказался другой подход, основанный на использовании неожиданной связи исследуемой проблемы с мультипликатором симметричного пространства относительно тензорного произведения. В частности, показано, что аналог теоремы Филиппова – Освальда верен для пространства Лоренца Λ_φ при условии, что функция φ субмультипликативна, т.е. $\varphi(st) \leqslant C\varphi(s)\varphi(t)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in I$.

Пусть X — с.п. на $I = [0, 1]$. Тогда соответствующее с.п. $X(I \times I)$ на квадрате $I \times I$ состоит из всех измеримых функций $z(s, t)$ на $I \times I$ таких, что $z^\circledast \in X$ с нормой $\|z\|_{X(I\times I)} = \|z^\circledast\|_X$, где $z^\circledast(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, — невозрастающая перестановка функции $|z(s, t)|$ относительно меры Лебега на квадрате. Если функции x и y измеримы на I, то их *тензорное произведение* определяется как $(x \otimes y)(s, t) = x(s)y(t)$, $s, t \in I$. Под *мультипликатором* $\mathcal{M}(X)$ с.п. X на I относительно тензорного произведения понимается множество всех измеримых функций $x(s)$ таких, что оператор $B_x y = x \otimes y$ ограничен из X в $X(I \times I)$. Вместе с естественной нормой $\|x\|_{\mathcal{M}(X)} = \|B_x\|_{X\to X(I\times I)}$ $\mathcal{M}(X)$ становится с.п. на I. При этом $\mathcal{M}(X) = X$ тогда и только тогда, когда оператор тензорного произведения $(x, y) \mapsto x \otimes y$ ограниченно действует из $X \times X$ в $X(I \times I)$. Очевидно, что $\mathcal{M}(L_p) = L_p$. В то же время $\mathcal{M}(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi$, если и только если функция $\varphi(t)$ является субмультипликативной.

В работах [3], [4], [5] дано описание мультипликатора классических с.п. Лоренца, Марцинкевича, Орлича и установлена роль мультипликатора с.п. X в вопросе о равномерной дополняемости подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами.

Использование понятия мультипликатора в сочетании с фреймовым подходом к построению систем представления [6], [7] приводит к следующим результатам.

Теорема 1. *Пусть X — сепарабельное с.п., $f \in X$ и $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $f \in \mathcal{M}(X)$;

(ii) для любого $k_0 \geqslant 0$ сжатия и сдвиги $f_{k,i}$, $i = 0, \ldots, 2^k - 1$, $k \geqslant k_0$, функции f образуют абсолютно представляющую систему в X с константой представления C, не зависящей от k_0.

Так как $\mathcal{M}(L_p) = L_p$, то упомянутая во Введении теорема Филиппова–Освальда является частным случаем теоремы 1.

В случае пространств Лоренца мы получаем более точный результат.

Теорема 2. *Пусть $f \in \Lambda_\varphi$, $f \neq 0$, $f^* = f$. Последовательность сжатий и сдвигов функции f является абсолютно представляющей системой в пространстве Лоренца Λ_φ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{M}(\Lambda_\varphi)$.*

Следствие. *Для того, чтобы каждая функция $f \in \Lambda_\varphi$, $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$, порождала абсолютно представляющую систему сжатий и сдвигов в про-*

странстве Λ_φ необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(t)$ была субмультипликативной.

Приведенные результаты получены совместно с С.В. Асташкиным.

Литература

1. *Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // Тр. МИАН **284** (2014), 138–141.

2. *Filippov V.I., Oswald P.* Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory, **82** (1995), 15–29.

3. *Асташкин С.В.* О мультипликаторе симметричного пространства относительно тензорного произведения // Функц. анал. и его прил. **30**:4 (1996), 58–60.

4. *Astashkin S.V.* Tensor product in symmetric function space // Collect. Math. **48** (1997), 375–391.

5. *Astashkin S.V., Maligranda L., Semenov E.M.* Multiplicator space and complemented subspaces of rearrangement invariant space // J. Funct. Anal. **202** (2003), 247–276.

6. *Терехин П.А.* Системы представления и проекции базисов // Матем. заметки **75**:6 (2004), 944–947.

7. *Терехин П.А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. **44**:3 (2010), 50–62.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОЖИТЕЛЯХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.Т. Тлеуханова, А. Бахыт

tleukhanova@rambler.ru, amangulbakhyt@gmail.com

УДК 517.518

В данной работе, посвященной изучению тригонометрических задач о факторах в весовых пространствах λ_{pq}. Изучаются вложение известных функциональных пространств в классы множителей $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$.

Ключевые слова: тригонометрические коэффициенты Фурье, классы множителей, дискретные весовые пространства Лебега

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Тлеуханова Назерке Тулековна, Профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики, доктор физико-математических наук д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан);

Бахыт Амангуль, докторант, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан);

Работа посвящена изучению тригонометрический проблемы множителей в весовых пространствах λ_{pq}.

Классическая постановка тригонометрической проблемы множителей заключается в следующем: пусть $f \in L_1[0,2\pi]$ и $\{a_k(f)\}$ ее последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе. При этом предполагается, что f обладает свойстами, достаточными, чтобы $\{a_k(f)\} \in l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Требуется определить гладкостные и метрические характеристики функции ϕ для того, чтобы $T_\phi f = \{a_k(f \cdot \phi)\} \in l_p$, то есть определить условия на функцию ϕ, гарантирующие ограниченность оператора $T_\phi : l_p \longrightarrow l_p$. Класс таких функций обозначается через M_p.

Эта задача рассматривалась в работах Стечкина С.Б. [1], Хиршмана И.И. [2], Эдельштейна С.Л. [3], Бирмана М.Ш. и Соломяка М.З. [4], Караджова Г.Е. [5].

Пусть $0 < q,p < \infty$. Будем говорить, что последовательность $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу $\lambda_{p,q}$, если конечна величина:

$$\|a\|_{\lambda_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q |\bar{k}|^{(\frac{q}{p}-1)} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \bar{k} = \max(|k|,1).$$

Если $q = \infty$, то $\|a\|_{\lambda_{p,\infty}} = \sup |a_k||\bar{k}|^{\frac{1}{p}}$.

Будем говорить, что функция ϕ принадлежит классу $M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}$, если линейный оператор T_ϕ ограничен из λ_{p_0,q_0} в λ_{p_1,q_1} и

$$\|\phi\|_{M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}} = \|T_\phi\|_{\lambda_{p_0,q_0} \longrightarrow \lambda_{p_1,q_1}}.$$

Лемма 1. *Пусть* $1 < r,p,q < \infty$, $0 < s \leqslant \infty$, $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{s}$ *и* $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\|a * b\|_{\lambda_{qs}} \leqslant c \|a\|_{\lambda_{r_1 t_1}} \|b\|_{\lambda_{r_2 t_2}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_0 < 2 < p_1$, $q_1 \leqslant p_1$, $p_0 \leqslant q_0, 0 < s, q_0, q_1 < \infty$, $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}$.
Тогда имеет место вложение

$$L_{rs}[0,1] \hookrightarrow M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_0 \leqslant q_0 \leqslant q_1 \leqslant p_1 < 2, 1 < s, q_0, q_1 < \infty$ $\alpha = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}$.
Тогда справедливо следующее вложение

$$B^{\alpha}_{rs}[0,1] \hookrightarrow M^{p_1,q_1}_{p_0,q_0}.$$

Литература

1. *Стечкин С.Б.* О билинейных формах // ДАН СССР, **71**:3 (1950), 237–240.

2. *I.I. Hirshman* On multiplier transformations // Duke Math. J. **26**:2, (1959) 221-242.

3. *Эдельштейн С.Л.* Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символе оператора // Мат. заметки, **22**:6, (1977), 873–884

4. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева приложение к спектральной теории // -В: X мат. школа, Киев, (1974), 5–189

5. *Караджов Г.Е.* Тригонометрические проблема множителей // Конструктивная теория функций'81 София, (1983), 82–86

О НАИЛУЧШЕЙ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОКРЕСТНОСТИ КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА

Ю.А. Фарков

farkov-ya@ranepa.ru

УДК 517.538.5, 517.518.224

Пусть Ω – открытое множество на комплексной плоскости и пусть E – компактное множество в Ω. Приведены примеры пар (Ω, E), для которых удается получить асимптотические оценки линейных поперечников единичного шара пространства $H^\infty(\Omega)$ в метрике $C(E)$. Соответствующие оптимальные методы приближения обобщают методы аппроксимации Фабера, Ерохина, Якоби и Уолша.

Ключевые слова: ограниченные аналитические функции, равномерные приближенния, линейные поперечники

On the best linear approximation of functions analytic in a neighborhood of a compact set

Let Ω be an open set on the complex plane and let E be a compact set in Ω. Examples of pairs (Ω, E) are given, for which it is possible to obtain asymptotic estimates of the linear widths of the unit ball of the space $H^\infty(\Omega)$ in the $C(E)$ metric. The corresponding optimal approximation methods are generalizations of the Faber, Erohin, Jacobi, and Walsh approximations.

Keywords: bounded analytic functions, uniform approximations, linear widths

Фарков Юрий Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Москва, Россия); Yuri Farkov (Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia)

Пусть Ω – открытое множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащее компактное множество E. Будем говорить, что аналитическая функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $A(\Omega)$, если $|f(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in \Omega$. Класс $A(\Omega)$ является единичным шаром пространства $H^\infty(\Omega)$. Задача о вычислении поперечников класса $A(\Omega)$ в метрике $C(E)$ поставлена А.Н. Колмогоровым и изучалась многими авторами (см. [1, § 7.5], [2], [3] и цитированную в этих работах литературу). Обозначим через $\operatorname{cap}(\Omega, E)$ емкость множества E относительно Ω. Для широкого класса пар (Ω, E) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} [d_n(A(\Omega); C(E))]^{1/n} = \exp(-1/\operatorname{cap}(\Omega, E)),$$

где d_n – колмогоровский n-поперечник. Такое же равенство верно для линейного n-поперечника λ_n. Точные значения n-поперечников класса $A(\Omega)$ в метрике $C(E)$ известны только для двух случаев:

1) E и Ω – концентрические круги (*случай Тейлора*);

2) $E = [-1, 1]$, а область Ω ограничена эллипсом с фокусами в точках -1 и 1 (*случай Чебышёва*).

Соотношение $a_n \asymp b_n$ означает, что существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 b_n \leqslant a_n \leqslant c_2 b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\alpha = 1/\operatorname{cap}(\Omega, E)$. В настоящем сообщении приводятся пары (Ω, E), для которых

$$\lambda_n(A(\Omega); C(E)) \asymp \exp(-n\alpha) \tag{1}$$

и указываются соответствующие оптимальные линейные методы приближения. Отмечаются связи задачи об оценках поперечников классов аналитических функций с методами приближения Фабера, Ерохина, Якоби и Уолша.

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг и K – компактное множество в $\mathbb{C}$, содержащее более одной точки и имеющее односвязное дополнение в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Далее, пусть $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus K \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ – конформное отображение, нормированное условием $\lim\limits_{z\to\infty} (\Phi(z)/z) > 0$. Для фиксированного $R > 1$ внутренность кривой $\Gamma_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$ обозначим через G_R. В случае, когда множество K выпуклое, соотношение (1) для поперечников $\lambda_n(A(G_R); C(K))$ доказывается [4] приближением произвольной функции $f \in A(G_R)$ частичными суммами ряда по многочленам Фабера. Хорошо известно, что метод Фабера обобщает классические методы Тейлора и Чебышёва (см., например, [5,6]). На основе фаберовских разложений и аппроксимаций типа Паде и Каратеодори-Фейера построены (см. библиографию в [3]) эффективные численные алгоритмы для вычисления значений аналитических функций (например, функций Бесселя), для решения некоторых задач линейной алгебры и для решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Примеры применений поперечников классов аналитических и гладких функций для построения оптимальных алгоритмов представления функций с заданной точностью имеются в [4, 7, 8].

Пару (Ω, E) назовем *допустимой*, если

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j, \quad \Omega_j \cap \Omega_{j'} = \emptyset \quad (j \neq j'), \quad E = \bigcup_{s=1}^{l} E_s, \quad E_s \cap E_{s'} = \emptyset \quad (s \neq s'),$$

и

$$E \subset \Omega, \quad E \cap \Omega_j \neq \emptyset \quad (j = 1, \ldots, m),$$

где Ω_j – односвязные жордановые области и E_s – замкнутые односвязные жордановы области. Для каждой допустимой пары (Ω, E) существует [9] последовательность функций $\{f_n\}$ такая, что каждая аналитическая в Ω функция f единственным образом представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z), \quad z \in \Omega, \tag{2}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве в Ω. Более того, если $f \in A(\Omega)$, то

$$\limsup_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_k||^{1/n}_{C(E)} \leqslant \exp(-\alpha).$$

В частных случаях разложение (2) совпадает с разложениями в *ряды Ерохина* (в случае, когда область $\Omega \setminus E$ двусвязная), *рядами Якоби* (в случае, когда границы $\partial\Omega$ и ∂E являются линиями уровня фиксированного полинома), *рядами Уолша* (в случае, когда ∂E состоит из конечного числа непересекающихся жордановых кривых, а $\partial\Omega$ является линией уровня функции Грина для $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ с полюсом в ∞). Пользуясь (2), определим n-мерное линейное пространство $X_n = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ и проектор

$$F_n : A(\Omega) \to X_n, \quad F_n f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пару (Ω, E) будем называть $*$-*допустимой*, если $\sup\limits_n \|f_n\|_{C(E)} < \infty$ и существуют положительные константы M_1 и M_2 такие, что для любой функции $g \in X_n$ выполнены неравенства

$$\sup\{|\, g(z)| : z \in \Omega\} \leqslant M_1 \exp(n\alpha)||\, g||_{C(E)},$$

$$||\, g||_{L^p(\partial E)} \leqslant M_2 n^{1/p} ||g||_{L^p(E)}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Например, пара (Ω, E) будет $*$-допустимой, если все границы ∂E_s являются аналитическими кривыми Жордана.

Теорема. *Предположим, что пара (Ω, E) является $*$-допустимой и пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда существуют $b_1, b_2 > 0$ такие, что для любой функции $f \in A(\Omega)$ и любого натурального n имеют место неравенства*

$$||f - F_n f||_{C(E)} \leqslant b_1 \exp(-n\alpha), \qquad ||f - F_n f||_{L^p(E)} \leqslant b_2 n^{-1/p} \exp(-n\alpha).$$

Более того,

$$\lambda_n(A(\Omega); C(E)) \asymp \exp(-n\alpha), \qquad \lambda_n(A(\Omega); L^p(E)) \asymp n^{-1/p} \exp(-n\alpha)$$

и такие же соотношения верны для колмогоровских n-поперечников.

В заключение отметим, что соотношения вида (1) для голоморфных функций многих переменных известны [3] лишь в простейших случаях.

Литература

1. *Fisher S.D.* Function Theory on Planar Domains: A Second Course in Complex Analysis. — Mineola, NY: Dover Publications, 2007.

2. *Тихомиров В.М.* Теория приближений // Анализ – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 14. — Москва: ВИНИТИ, 1987. — 103–260.

3. *Фарков Ю.А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем., **19**:5 (2014), 185–212; J. Math. Sci. (N. Y.), **218**:5 (2016), 678–698

4. *Farkov Yu.A.* n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity, **12**:1 (1996), 58-79.

5. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. — Москва: Наука, 1984.

6. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. — Москва: Мир, 1986.

7. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. 2-е изд., испр. и доп. — М.; Ижевск: РХД, 2002.

8. *Ehler M., Filbir F.* Metric entropy, n-widths, and sampling of functions on manifolds // J. Approx. Theory, **225** (2018), 41-57.

9. *Фарков Ю.А.* Базисные функции Фабера–Ерохина в окрестности нескольких континуумов // Матем. заметки, **36**:6 (1984), 883–892; Math. Notes, **36**:6 (1984), 941–946.

О КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Г.В. Федоров

fedorov@mech.math.msu.su

УДК 511.6

В основу нового подхода к проблеме поиска и построения фундаментальных S-единиц в эллиптических и гиперэллиптических полях легли функциональные непрерывные дроби. В рамках этого подхода мы даем классификацию эллиптических полей, содержащих ключевые элементы с периодическими функциональными непрерывными дробями.

Ключевые слова: эллиптические поля, функциональные непрерывные дроби, теорема Лагранжа, группа классов дивизоров, фундаментальные S-единицы, параметризация Куберта, быстрые алгоритмы, высокопроизводительные вычисления

Федоров Глеб Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, с.н.с. НИИСИ РАН (Москва, Россия); Gleb Fedorov (Lomonosov Moscow State University, SRISA/NIISI RAS, Moscow, Russia)

On classes of periodic functional continued fractions in elliptic fields

The basis of the new approach to the problem of finding and constructing fundamental S-units in elliptic and hyperelliptic fields was formed by functional continued fractions. In the framework of this approach, we give a classification of elliptic fields containing key elements with periodic functional continued fractions.

Keywords: elliptic fields, functional continued fractions, Lagrange theorem, divisor class group, fundamental S-units, Kubert parametrization, fast algorithms, high performance computing

В статьях [1]-[4] доказан критерий квазипериодичности функциональных непрерывных дробей в гиперэллиптическом поле L, согласно которому элемент $\alpha \in L$ имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь, связанную с линейным нормированием, тогда и только тогда, когда есть нетривиальные решения определенного вида у норменного уравнения — функционального аналога уравнения типа Пелля. Разрешимость норменного уравнения равносильно наличию фундаментальной S_h-единицы в поле L для множества S_h, состоящего из двух неэквивалентных сопряженных линейных нормирований.

В случае числовых непрерывных дробей теорема Лагранжа утверждает, что любая квадратичная иррациональность имеет периодическое разложение в числовую непрерывную дробь. Гиперэллиптическое поле L — поле функций гиперэллиптической кривой — есть квадратичное расширение поля рациональных функций $K(x)$. Если в поле L нет нетривиальных S_h-единиц, то функциональные непрерывные дроби элементов поля L неквазипериодические. Если же в поле L существует фундаментальная S_h-единица, то в поле L могут быть элементы с периодическими, с квазипериодическими, но не периодическими, и неквазипериодическими функциональными непрерывными дробями. Естественным образом возникает вопрос, о выделении классов элементов имеющих периодические функциональные непрерывные дроби и классов элементов имеющих квазипериодические функциональные непрерывные дроби. В статье [7] доказано, что наличие фундаментальной S_h-единицы в поле $L = K(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 1$, равносильно условию периодичности непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$. Для гиперэллиптического поля $L = K(x)(\sqrt{f})$ с многочленом f произвольной степени $2g+1 \leqslant \deg f \leqslant 2g+2$ в статье [4] показано, что наличие фундаментальной S_h-единицы, равносильно условию периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$. В связи с этим элементы вида $\sqrt{f}/h^s$, $s \in \mathbb{Z}$, мы называем *ключевыми* в поле L. Для случая $\deg f = 2g + 1$ в статьях [3], [6] доказано, что для фиксированного $s \in \mathbb{Z}$ непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^s$ и $\sqrt{f}/h^{2g+1-s}$ одновременно периодические или неквазипериодические.

В текущем сообщении мы отвечаем на вопрос о квазипериодичности и квазипериодичности функциональных непрерывных дробей ключевых элементов эллиптического поля $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 3$. Достаточно описать два класса многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, для которых соответственно элементы $\sqrt{f}/h$ и $\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь.

Ясно, что если для некоторого многочлена $f \in \mathbb{Q}[h]$ элемент $\sqrt{f(h)}/h$ или $\sqrt{f(h)}$ обладает периодическим разложением в непрерывную дробь, то элемент $\sqrt{a^2 f(bh)}/h$ или $\sqrt{a^2 f(bh)}$ соответственно имеет периодическое разложение в непрерывную дробь для любых $a, b \in \mathbb{Q}^*$. Поэтому мы можем искать многочлены $f \in \mathbb{Q}[h]$ с точностью до указанной замены.

Для описания первого класса многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$, для которых $\sqrt{f}/h$ имеет периодическое разложение в непрерывную дробь, мы выписываем полную параметризацию всех многочленов $f(h)$, $\deg f = 3$, таких, что в группе классов дивизоров степени ноль $\Delta^\circ(L)$ гиперэллиптического поля $L = \mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ порядок класса дивизора $P_h^- - P_h^+$ равен n, где точки $P_h^\pm$ соответствуют нормированиям $\nu_h^\pm$. Последнее условие равносильно тому, что точки P_h^- и P_h^+ имеют порядок n на эллиптической кривой $C_n(\mathbb{Q})$, заданной уравнением $C_n:\ y^2 = f_n(h)$. Согласно теореме Мазура [8] достаточно рассматривать $2 \leqslant n \leqslant 10$, $n = 12$.

Мы используем известную параметризацию Куберта [9]. Напомним, что *нормальная форма Тейта* уравнения неособой плоской кубической кривой имеет вид $Y^2 + (1-c)XY - bY = X^3 - bX^2$ с дискриминантом $\Delta = b^3(16b^2 - 8bc^2 - 20bc + b + c^4 - 3c^3 + 3c^2 - c)$. В статье [9] для $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ приведена явная параметризация $b = b(t)$, $c = c(t)$ всех эллиптических кривых $C_n = C_{n,t}$, заданных в нормальной форме Тейта с точкой $(0, 0)$ порядка n. С помощью замены $y = Y + \frac{(1-c)X - b}{2}$, $h = X$ мы можем для кривой C_n получить параметрическое уравнение вида $y^2 = f(h)$ с точкой $P = (x_1, y_1) = (0, \sqrt{f(0)})$ порядка n. Для $n = 2$ и $n = 3$ мы находим явную параметризацию с помощью теории функциональных непрерывных дробей.

Полная параметризация искомых многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$ приведена в статье [1].

Следующая теорема описывает второй класс многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$, для которых $\sqrt{f}$ имеет периодическое разложение в непрерывную дробь.

Теорема 1 [5]. *Существует бесконечная серия многочленов $f_c = ch^3 + 1$, $c \in \mathbb{Q}^*$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. За исключением этой серии существует только три неэквивалентных свободных от квадратов многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$, $\deg f = 3$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь:*

$$f = 12h^3 - 8h^2 + 4h + 1, \quad f = 12h^3 - 5h^2 + 2h + 1, \quad f = -120h^3 + 25h^2 + 2h + 1.$$

Поиск свободных от квадратов многочленов f, $\deg f \geqslant 4$, с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $\mathbb{Q}((h))$ является трудной задачей. В статье [6] были найдены два примера многочленов f степени 5 с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. Далее, в статье [4] для каждого целого m, начиная с 3, найдены 3 неэквивалентных примера многочленов f степени m, обладающих периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. В случае $\deg f = 4$ в статье [4] найдены 5 нетривиальных примеров многочленов с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. В статье [1] найден новый пример многочлена f степени 6 с периодическим разложением

$\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. Все указанные результаты были найдены с помощью наших новых алгоритмов, символьных компьютерных вычислений и высокопроизводительных параллельных кластерных вычислений.

Литература

1. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб., **209**:4 (2018), 54–94.

2. *Федоров Г.В.* Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник, **19**:3 (2018).

3. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН, **302**, (2018), 354–376.

4. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Докл. РАН, **474**:5 (2017), 540–544.

5. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // Докл. РАН, **475**:2 (2017), 133–136.

6. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН, **71**:5 (431) (2016), 181–182.

7. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Докл. РАН, **465**:5 (2015), 537–541.

8. *Mazur B.* Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Modular Forms of One Variable V (Proc. Internat. Conf., University of Bonn), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **601** (1977), 107–148.

9. *Kubert D. S.* Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc., **33**:2 (1976), 193–237.

ТЕОРЕМА О НУЛЯХ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ХАРДИ

Ш.А. Хайруллоев

shamsullo@rambler.ru

УДК 511.375

Получена новая оценка длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка производных n–го порядка функции Харди.

Ключевые слова: функция Харди, экспоненциальная пара, дзета-функция Римана, критическая прямая, тригонометрическая сумма.

A theorem on the zeros of the derivative of the function Hardy

A new estimate is obtained for the length of the interval of the critical line, which contains a zero of odd order of the derivatives of the n–th order of the Hardy function.

Keywords: Hardy function, exponential pair, the Riemann zeta function, critical line, trigonometric sum.

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич, к.ф.-м.н., доцент, Институт математики им. А.Джураева (Душанбе, Таджикистан); Shamsullo Khayrulloev (A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Функция Харди $Z(t)$ задается равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1}$$

и принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой. Одним из вопросов относительно этих нулей является вопрос о величине промежутка, на котором заведомо лежит нуль функции $Z(t)$. Существует гипотеза о том, что промежуток $(T, T+H)$, при $H = T^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, содержит нуль функции $Z(t)$. В настоящее время эта гипотеза не доказана.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. показал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [4] доказал теорему Харди-Литтлвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

А.А.Карацуба, наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассмотрел более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(n)}(t)$. Он показал, что с увеличением n длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(n)}(t)$, уменьшается и доказал следующее: *если n–натуральное число, $T \geqslant T_0(n) > 0$, $H \geqslant cT^{1/(6n+6)}\ln^{2/(n+1)} T$, $c = c(n) > 0$, тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$* [4].

В работе [5] найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции, и она выражена через константу Ранкина, то есть доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ множество всех экспоненциальных пар (k,l), отличных от $(1/2, 1/2)$, и*

$$\theta_1(k;l) = \frac{l}{0.5-k}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}} \theta_1(k;l) = R+1,$$

где $R = 0.829021356859133592409239777283112 0\ldots$ – постоянная Ранкина.

Полученный результат в рамках данного метода является окончательным.

В работе [6] задача о величине промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка функции $Z^{(n)}(t)$, $n \geqslant 1$, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть доказана

Теорема 2. *Пусть (k,l)– произвольная экспоненциальная пара, n– целое неотрицательное число, $c = c_0(n) > 0$–постоянное число, $T \geqslant T_0(n) > 0$,*

$$\delta_n(k;l) = \frac{l+n}{0.5-k+n}, \qquad \theta_n(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\delta_n^{-1}(k;l)}\right).$$

Тогда при $H \geqslant cT^{\theta_n(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{n+1}}$ *промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z^{(n)}(t)$.

Заметим, что теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 2, при

$$(k,l) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = AB(0,1), \quad \delta_n\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3n+1}, \quad \theta_n\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6n+6}.$$

В работе [7] получен новый результат для величин $\delta_n(k;l)$ и $\theta_n(k;l)$ при следующих экспоненциальных парах

$$(k,l) = \left(\frac{13}{106}, \frac{75}{106}\right) = ABA^2BA^2B(0,1),$$

то есть доказано, что имеет место теорема 2 при

$$\delta_n\left(\frac{13}{106}, \frac{75}{106}\right) = 1 + \frac{35}{40+106n}, \quad \theta_n\left(\frac{13}{106}, \frac{75}{106}\right) = \frac{35}{220+212n}, \quad n \in N.$$

В настоящей работе автору удалось улучшить результат работы [7], что уточняет соответствующие результаты А.А.Карацубы при любом натуральном числе n.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть* $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant cT^{\varkappa_n}\ln T$,

$$\varkappa_n = \frac{1469}{9264+8876n}, \quad c = c_0 > 0, \quad n \in N.$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z^{(n)}(t)$.

Отметим, что $\varkappa_n$ получается при следующих экспоненциальных парах:

$$(k,l) = \left(\frac{525}{4438}, \frac{3163}{4438}\right) = ABA^2BA^2BABA^2BA^2B(0,1),$$

$$\delta_n\left(\frac{525}{4438}, \frac{3163}{4438}\right) = 1 + \frac{1469}{1694+4438n},$$

$$\theta_n\left(\frac{525}{4438}, \frac{3163}{4438}\right) = \frac{1469}{9264+8876n} = \varkappa_n.$$

Полученный результат

$$\varkappa_n = \frac{1469}{9264+8876n} = \frac{1}{6+6n} - \frac{225+31n}{12(1+n)(2316+2219n)}$$

является уточнением оценок работы [7] и теоремы А.А.Карацубы при любом $n \in N$.

Литература

1. *Hardy G.H.* Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci **158** (1914), 1012-1014.

2. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math.Z. **10** (1921), 283-317.

3. *Мозер Я.* Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. **31** (1976), 31-43.

4. *Карацуба А.А.* О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. **157** (1981), 49-63.

5. *Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А.* Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // ДАН РТ. **52**:5 (2009), 331-337.

6. *Хайруллоев Ш.А.* Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН РТ. **49**:9 (2006), 803-809.

7. *Хайруллоев Ш.А.* Расстояние между соседними нулями производной j-го порядка функции Харди // ДАН РТ. **59**:5-6 (2016), 185-187.

ПАРА ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И АСИМПТОТИКА ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

А.В. Цветкова

annatsvetkova25@gmail.com

УДК 517.928

Обсуждаются два подхода, позволяющие получить асимптотику полиномов Эрмита. Первый хорошо известный подход основан на представлении полиномов Эрмита как решений спектральной задачи для уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Второй – на сведении конечно-разностного уравнения для полиномов к псевдодифференциальному. Каждому из подходов соответствуют лагранжевы многообразия, которые с помощью канонического оператора Маслова дают асимптотику полиномов Эрмита.

Ключевые слова: полиномы Эрмита, лагранжевы многообразия, канонический оператор Маслова, асимптотика

A pair of Lagrangian manifolds and the asymptotics of Hermite polynomials

We discuss two approaches allowing one to obtain the asymptotics of Hermite polynomials. The first well-known approach is based on the representation of Hermite polynomials as solutions of a spectral problem for Shrödinger equation for the harmonic oscillator. The second approach is based on a reduction of the finite-difference equation for the Hermite polynomials to a pseudodifferential equation. Lagrangian manifolds associated with each of the approaches give the asymptotics of Hermite polynomials via Maslov canonical operator.

Keywords: Hermite polynomials, Lagrangian manifolds, Maslov canonical operator, asymptotics

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10282).

Цветкова Анна Валерьевна, к.ф.-м.н., младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Anna Tsvetkova (Ishlinsky institute for problems in mechanics RAS, Moscow, Russia)

Обсуждаются два подхода к построению равномерной асимптотики полиномов Эрмита $H_n(y)$ при $n \to \infty$. Эти подходы используют теорию канонического оператора Маслова.

Первый подход основан на представлении функций Эрмита

$$\psi_n(y) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)$$

в виде решения уравнения Шредингера для гармонического осциллятора

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi_n}{dy^2} + \frac{y^2}{2}\psi_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\psi_n,\ ||\psi_n||_{L_2(\mathbb{R}_y)} = 1.$$

Второй подход основан на том, что полиномы Эрмита могут быть получены из рекуррентного соотношения с начальными условиями

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y), H_0(y) = 1, H_1(y) = 2y.$$

Чтобы получить асимптотику полиномов, мы используем канонический оператор Маслова. Этот оператор связан с лагранжевыми многообразиями, которые определяются траекториями соответствующих систем Гамильтона. В первом случае лагранжево многообразие – окружность, во втором случае лагранжевы многообразия представляют из себя семейство "искаженных" горизонтальных парабол.

Описанные подходы дают равномерную асимптотику полиномов Эрмита через функцию Эйри Ai. Авторы предполагают, что описанные подходы могут быть использованы для построения асимптотик и других ортогональных полиномов.

Доклад основан на совместной работе с С.Ю. Доброхотовым.

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1966.

2. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1967.

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГРАДИЕНТНЫХ КАТАСТРОФ В ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ПЛАЗМЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Е.В. Чижонков
chizhonk@mech.math.msu.su

УДК 519.63

В докладе обсуждается численное моделирование градиентных катастроф в плазменных колебаниях, основанное на использовании лагранжевых и эйлеровых переменных. Для нахождения приближенного решения задачи Коши формулируются необходимые искусственные граничные условия. Результаты расчетов хорошо согласуются с асимптотическим анализом, проведенном в слабо нелинейном случае.

Ключевые слова: градиентная катастрофа, квазилинейные гиперболические уравнения, плазменные колебания, эффект опрокидывания

On numerical modelling of gradient catastrophes in plasma oscillations

The report discusses numerical modelling of gradient catastrophes in plasma oscillations based on the use of Lagrangian and Eulerian variables. To find an approximate solution to the Cauchy problem, the necessary artificial boundary conditions are formulated. The calculation results are in good agreement with asymptotic analysis carried out in the weakly nonlinear case.

Keywords: gradient catastrophe, quasilinear hyperbolic equations, plasma oscillations, breaking effect

Эффект образования неограниченных производных при ограниченности решения системы квазилинейных гиперболических уравнений принято называть градиентной катастрофой [1].

Существуют классы задач, в которых возникновение градиентной катастрофы, по существу, означает предел применимости используемой математической модели. Другими словами, если из гладких начальных данных, например, непрерывно дифференцируемых, формируется разрывное решение системы, это означает потерю физического смысла искомых функций. Поясним это на примере плазменных колебаний.

При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода — Лагранжа и Эйлера: метод частиц, позволяющий отслеживать их индивидуальные траектории, и гидродинамическое описание на базе уравнений с частными производными. В рамках обоих подходов давно и хорошо известен эффект опрокидывания колебаний. В первом случае критерием опрокидывания колебаний является пересечение электронных траекторий, а во втором — обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов.

Чижонков Евгений Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Evgenii Chizhonkov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Имеется строгое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц.

Физическая суть эффекта опрокидывания достаточно проста. Электроны каким-либо способом выводятся из положения равновесия, т.е. искусственно формируется электрическое поле разделения зарядов. Далее под действием кулоновских сил частицы стремятся вернуться в положение равновесия, однако, двигаясь все время с ускорением подобно маятнику, электроны регулярно проскакивают мимо указанного положения. В силу нелинейности уравнений, разница в частотах колебаний различных частиц с течением времени становится существенной, что приводит к пересечению соседних траекторий. Когда две различные частицы занимают одно и то же положение в пространстве и времени, то дальнейшее отслеживание их движения требует привлечения более сложных моделей, чем классическая электродинамика, так как бесконечная концентрация электрического заряда требует специальной интерпретации. Следует заметить, что описанная ситуация принципиально отличается от моделирования в газовой динамике, где разрывные решения физически естественны и точное или приближенное решение задачи Римана является основой для построения численных алгоритмов [2].

По-видимому, простейшей постановкой для изучения эффекта опрокидывания плазменных колебаний является задача Коши для плоских одномерных релятивистских колебаний в холодной плазме. Соответствующая система уравнений в безразмерной форме имеет вид [3]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + E + V\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - V + V\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}.$$

Здесь V и P — соответственно скорость и импульс электронов, E — функция, описывающая электрическое поле. Для постановки задачи Коши эта система дополняется гладкими начальными условиями

$$P(x,0) = P^0(x), \quad E(x,0) = E^0(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

В докладе для моделирования градиентной катастрофы предлагается подход, основанный как на асимптотическом исследовании возможности пересечения электронных траекторий в слабо нелинейном случае, так и на численном решении системы квазилинейных уравнений с частными производными гиперболического типа.

Обратим внимание, что рассматриваемая задача об опрокидывании колебаний является достаточно сложной с вычислительной точки зрения. Во-первых, при гидродинамическом описании в эйлеровых координатах при приближении к моменту опрокидывания в окрестности точек сингулярности возникают очень большие значения электронной плотности. Во-вторых, само значение координаты по времени разрушения колебаний весьма чувствительно к входным данным: в слабо-нелинейном приближении оно обратно пропорционально третьей степени (кубу!) начальной амплитуды. Это означает, что определение физических параметров вычислительно доступного варианта уже является непростой задачей. В-третьих, пространственная координата опрокидывания в умеренно нелинейном режиме, т.е. даже

когда возмущение электронной плотности всего лишь на порядок превосходит фоновое значение, составляет порядка $1-2\%$ от характерного размера расчетной области. Другими словами, с целью адекватного отображения процесса требуются по порядку тысячи точек по каждой пространственной координате даже при условии гладкости и ограниченности искомых функций. В связи с этим отдельной важной проблемой является формулировка искусственных граничных условий, которая существенно опирается на свойства решения исходной задачи и ориентирована, в первую очередь, на то, чтобы заданные условия на границе оказывали минимальное влияние на решение внутри области, а в идеале — не оказывали никакого влияния вообще.

Основное внимание в докладе уделено численному моделированию градиентной катастрофы на примере плоской двумерной релятивистской задачи. Вычислительные эксперименты показывают, что наличие круговой симметрии у начальных данных приводит к эффекту опрокидывания на окружности ненулевого радиуса. Если же сечениями начального возмущения электрического поля являются эллипсы, то независимо от отношения их полуосей опрокидывание происходит всего в двух точках плоскости. Асимптотические выкладки в слабо нелинейном случае служат хорошим пояснением для результатов расчетов, проведенных с использованием суперкомпьютеров вычислительного комплекса МГУ.

Литература

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — Москва: Наука, 1968.

2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012.

3. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2018.

МЕТОД ЗИГЕЛЯ–ШИДЛОВСКОГО В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ P-АДИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В.Г. Чирский

vgchirskii@yandex.ru

УДК 511.36

В работе рассказывается о распространении метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел на прямое произведение p–адических полей.

Ключевые слова: метод Зигеля–Шидловского, поля p–адических чисел.

Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Chirskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Siegel-Shidlovsky method in direct product of p–adic fields

The paper deals with the extension of Siegel-Shidlovsky method in transcendental number theory to the direct product of p–adic fields.

Keywords: Siegel–Shidlovsky method, p-adic fields.

Метод Зигеля–Шидловского изначально использовался для исследования арифметической природы так называемых E-функций, т.е. целых функций, представимых рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, коэффициенты которых удовлетворяют определенным арифметическим условиям. Этот метод применим также к G-функциям, т.е. рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с похожими условиями на коэффициенты. Эти ряды, отличные от многочленов, имеют конечные радиусы сходимости в поле комплексных чисел. В работах автора доклада, его учеников и ряда других исследователей рассмотрены F-ряды, имеющие вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$. Эти ряды, отличные от многочленов, имеют нулевой радиус сходимости в поле комплексных чисел. Однако они сходятся во всех, кроме конечного числа, полях p-адических чисел, что позволяет модифицировать метод Зигеля–Шидловского и применить его к значениям этих рядов, представляющих собой элементы прямого произведения упомянутых полей. В докладе формулируются основные результаты полученной теории и их приложения к практическим задачам.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА, ОПРЕДЕЛЕННОГО В НЕЧЕТНОМ ЧИСЛЕ УЗЛОВ

И.А. Шакиров

iskander@tatngpi.ru

УДК 517.518.85

Рассматриваются фундаментальные характеристики классического интерполяционного полинома Лагранжа, определенного в нечетном числе узлов. Уточнены известные для них асимптотические формулы.

Ключевые слова: полином Лагранжа, функция и константа Лебега, асимптотические формулы.

Шакиров Искандер Асгатович, к.ф.-м.н., доцент, Набережночелнинский государственный педагогический университет (Набережные Челны, Россия); Iskander Shakirov (Naberezhnye Chelny state pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia)

Asymptotic formulas for the fundamental characteristics of the Lagrange polynomial defined in an odd number of nodes.

The fundamental characteristics of the classical Lagrange interpolation polynomial defined in an odd number of nodes are considered. The asymptotic formulas known for them are specified.

Keywords: Lagrange polynomial, Lebesgue function and constant, asymptotic formulas.

Интерполяционные проблемы и другие важнейшие вопросы теории функций подробно изучены в классических монографиях отечественных авторов Н.П.Натансона, С.М.Никольского, В.Л.Гончарова, Н.И.Ахиезера, А.Ф.Тимана, А.Х.Турецкого, Н.П.Корнейчука, В.К.Дзядыка, А.А.Привалова, К.И.Бабенко, а также в многочисленных трудах зарубежных авторов. При исследовании аппроксимативных качеств тригонометрического интерполяционного полинома Лагранжа

$$L_n(x,t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}x(t_k)D_n(t_k-t)\qquad(D_n(t)=\frac{\sin(n+0.5)t}{2\sin 0.5t})$$

интерполирующего исходную функцию $x(t), t\in[0;2\pi]$ в нечетном числе узлов $t_k=2\pi k/(2n+1), k=\overline{0,2n}$, первостепенное значение имеют соответствующие ему фундаментальные характеристики (функция и константа Лебега)

$$\lambda_n(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|D_n(t_k-t)|, \lambda_n=\max_{t\in T}|\lambda_n(t)|\ (t\in T=[0,\frac{2\pi}{2n+1}], n\in N). \tag{1}$$

На их основе были получены асимптотические формулы (см., например, [1])

$$\lambda_n(t)=\frac{2}{\pi}\ln n\sin nt+\tilde{O}(1),\quad \lambda_n=\frac{2}{\pi}\ln n+O(1),\quad n\to+\infty \tag{2}$$

правые части которых содержат ограниченные (неоцененные) величины.

Сказанное связано с издержками при исключении модулей в формулах (1) при больших значениях параметра n. Возникают и более сложные вопросы: как ведут себя соответствующие формулам (2) остаточные члены

$$\tilde{O}_n(t)=\lambda_n(t)-\frac{2}{\pi}\ln n\sin nt,\quad O_n=\lambda_n-\frac{2}{\pi}\ln n\quad(t\in T,\ n\in N) \tag{3}$$

при произвольно выбранных конечных значениях параметра , то есть в не асимптотическом случае?

На эти вопросы позволяют ответить явные виды характеристик (1) (см. [2]. [3]), которые здесь строго оценены снизу и сверху. На их основе затем получены более точные, чем в (2), асимптотические формулы, а также оценены остаточные члены (3) равномерно относительно t и n.

Теорема 1. *Константа Лебега λ_n при произвольно взятых значениях параметра n представима в виде*

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\ln n + \beta_0 + O_n^1, \quad n \in N \quad (\beta_0 = \frac{2}{\pi}(\gamma + \ln\frac{16}{\pi}) = 1.403794027\ldots),$$

где γ - константа Эйлера;

для остаточного члена $O_n^1 \equiv O_n - \beta_0$ верна двусторонняя оценка

$$0 < O_n^1 \leqslant \frac{5}{3} - \beta_0 \quad \forall n \in N \quad (\lim_{n\to+\infty} O_n^1 = 0, \quad \frac{5}{3} - \beta_0 = 0.262872639\ldots). \quad (4)$$

Полученная в теореме 1 асимптотическая формула для константы Лебега (см. [4]), а также двусторонняя оценка (4) являются окончательными (не улучшаемыми).

Теорема 2. *Для функции Лебега $\lambda_n(t), t \in T$ верна асимптотическая формула*

$$\lambda_n(t) = \frac{2}{\pi}\ln n \sin\frac{2n+1}{2}t + a\sin\frac{2n+1}{2}t + b, \quad n \to +\infty, \qquad (5)$$

где $a = \frac{5}{6} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} = 0.751070750\ldots$, $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0.818309886\ldots$.

***Следствие* 1.** *Если в условиях теоремы 2 значение аргумента t равно серединному значению $\pi/(2n+1)$ периода функции Лебега, то формула (5) преобразуется в асимптотическую формулу для константы Лебега вида*

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\ln n + \bar{\beta}_0, \quad n \to +\infty \quad (\bar{\beta}_0 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} = 1.569380636\ldots).$$

Она незначительно отличается от асимптотически точной формулы

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\ln n + \beta_0, \quad n \to +\infty \quad (\bar{\beta}_0 - \beta_0 = 0.1655866609\ldots)$$

для константы λ_n, что является одним из показателей качества формулы (5).

***Следствие* 2.** *Очевидно, что асимптотическая формула (5) является обобщением (уточнением) известной асимптотической формулы из (2). Для остаточных членов $\tilde{O}_n(t), \quad n \in N$ и $\tilde{O}_1, \quad n \to +\infty$ равномерно относительно t и n выполняются двусторонние оценки*

$$0.818 < \tilde{O}_n(t) < 1.570, t \in T \wedge n \in N; \qquad 0.818 < \tilde{O}(1) < 1.570.$$

Замечание. *Функция Лебега $\lambda_n^*(t) \quad (t \in [0, \pi/n])$, соответствующая другому классическому тригонометрическому интерполяционному полиному, имеющему минимальную норму в пространстве суммируемых с квадратом функций, достаточно полно изучена в работе [5].*

Литература

1. *Корнейчук Н.П.*Точные константы в теории приближения. М.: Наука,1987.

2. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1988.

3. *Шакиров И.А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа// Известия вузов. Математика. 2011. №10, с. 80-88.

4. *Шакиров И.А.* О предельном значении остаточного члена константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному Лагранжа// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3, с. 302-310.

5. *Шакиров И.А.* Асимптотические формулы для функций Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа// Математические заметки. 2017. Т. 102, вып. 1, с. 133-147.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ДАННЫМИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

М.А. Шишленин, С.И. Кабанихин

Maxim.Shishlenin@sscc.ru, Kabanikhin@sscc.ru

УДК 519.63

Задачей продолжения решений уравнений математической физики с данными на части границы называют, как правило, задачу Коши с данными на части границы. Некорректность подобных задач Коши, показанная Адамаром для уравнения Лапласа, приводит к необходимости регуляризации. Для обоснования сходимости регуляризирующих алгоритмов используются оценки условной устойчивости. Изложены алгоритмы регуляризации для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений.

Ключевые слова: задачи продолжения, регуляризация, численные методы, обратные и некорректно поставленные задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00694, 18-01-00865, 18-31-20005).

Шишленин Максим Александрович, д.ф.-м.н., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия); Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Новосибирский государственный университет (Россия); Maxim Shishlenin (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;)

Кабанихин Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия); Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия); Новосибирский государственный университет (Россия); Sergey Kabanikhin (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Algorithms for the continuation of solutions of equations of mathematical physics with data on parts of the boundary

The problem of continuing solutions of equations of mathematical physics with data on parts of the boundary has important applications in geophysics, medicine, and heat and mass transfer. The ill-posedness of Cauchy problems (shown by Hadamard for the Laplace equation) leads to the necessity of regularization. To justify the convergence of the regularizing algorithm, conditional stability estimates are used. Algorithms for the regularization of elliptic, parabolic and hyperbolic equations are presented.

Keywords: continuation problems, regularization, numerical methods, inverse and ill-posed problems

Рассмотрим три уравнения

$$u_{xx} + L(y)u = 0, \quad u_{xx} + L(y)u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \quad k = 1, 2,$$

$x \in (0, h)$, $y \in \mathcal{D}$, $t \in (0, T)$.

Здесь $L(y)$ — эллиптический оператор, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ — связная ограниченная область с липшецевой границей.

Задача Коши

$$u|_{x=0} = f, \qquad u_x\big|_{x=0} = g$$

для этих уравнений является некорректной задачей.

При $k = 2$ единственность решения такой задачи доказал Р. Курант в книге [1, гл. 6, §8. О негиперболических задачах Коши]. Основы теории подобных задач заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, а также их учеников и последователей [2–4]. Во многих задачах геофизики и электродинамики искомые неоднородности расположены в среде, параметры которой известны. В этом случае важным инструментом для практики являются задачи продолжения геофизических полей (сейсмических, электромагнитных и др.) с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей. Условную устойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа исследовали Т. Карлеман [5], С. Н. Мергелян [6], М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский [4].

Первые результаты, относящиеся к построению эффективного алгоритма решения задачи Коши для уравнения Лапласа, получили C. Púcci [7] и М. М. Лаврентьев [8]. В работе М. М. Лаврентьева [9] предложены методы решения плоской задачи в классе ограниченных функций (на основе формулы Карлемана), а для пространственной задачи получены оценки, характеризующие устойчивость в классе ограниченных решений.

Первый итерационный метод решения был предложен в работе В. А. Козлова, В. Г. Мазьи и А. В. Фомина [10]. С.И. Кабанихин и А.Л. Карчевский сформулировали задачу продолжения как обратную задачу [11]. В 2014 году D. Maxwell показал [12], что метод, предложенный в работе [10], является одним из вариантов метода итераций Ландвебера.

Задача продолжения:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + L(y)u = 0, \qquad x \in (0,h), \quad y \in \mathcal{D}, \\ &u(0,y) = f(y), \quad u_x(0,y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D}, \\ &u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in (0,h). \end{aligned}$$

Сформулируем задачу продолжения в виде обратной задачи $Aq = f$.

Прямая задача:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + L(y)u = 0, \qquad x \in (0,h), \quad y \in \mathcal{D}, \\ &u_x(0,y) = 0, \qquad u(h,y) = q(y), \qquad y \in \mathcal{D}, \\ &u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in (0,h). \end{aligned}$$

Обратная задача: найти $q(y)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи $u(0,y) = f(y)$.

Замечание. Решая задачу продолжения, мы можем найти функцию $q(y) = u(h,y)$, т.е. решить обратную задачу. И наоборот. Если мы решим обратную задачу и найдем функцию $q(y)$, то решая прямую корректную задачу, можем найти решение задачи продолжения $u(x,y)$.

Минимизируем целевой функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|^2_{L_2(\mathcal{D})}$$

методом простой итерации (Ландвебера)

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n).$$

Здесь $J'(q_n)$ — градиент функционала и $\alpha \in (0, ||A||^{-2})$.

Теорема (оценка условной устойчивости). *Пусть q, $f \in L_2(0,1)$. Тогда, если существует точное решение $u_T \in C^2([0,h]\times[0,1])$ прямой задачи, то оно удовлетворяет неравенству и верна оценка*

$$\int\limits_0^1 u_T^2(x,y)\mathrm{d}y \leqslant \|q_T\|^{2x/h}_{L_2(0,1)} \|f\|^{2(h-x)/h}_{L_2(0,1)}.$$

Теорема (регуляризирующее свойство метода простой итерации) *Пусть для $f \in L_2(\mathcal{D})$ существует решение $q_T \in L_2(\mathcal{D})$ задачи $Aq = f$ и найдена оценка условной устойчивости $\beta(n)$ на некотором множестве M. Тогда при выполнении условий*

$$\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leqslant C \ u \ \|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} \leqslant \delta,$$

последовательность $\{u_{\delta,n}\}$ решений прямых задач для соответствующей итерации $\{q_{\delta,n}\}$ сходится к точному решению задачи продолжения $u_T \in L_2(\Omega)$ задачи и имеет место оценка:

$$\|u_T - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} + \delta\beta(n)\sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2\ln\|A\|}}.$$

Изучены свойства сингулярных чисел оператора продолжения [13], что позволило регуляризировать задачу продолжения методом сингулярного разложения с учетом погрешности в данных [14]. Показано, что продолжение решения с доступной для измерений части границы в область позволяет идентифицировать и локализовать неоднородности.

Литература

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: ГТТИ, 1945.

2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука: 1974.

3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.

4. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука. 1980.

5. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.

6. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11, № 5(71). С. 3–26.

7. *Púcci C.* Sui problema di Cauchy non ben posti // Atti Accad. Naz.d. Lincei. 1955. Vol. 18, no. 5. P. 473–477.

8. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 205–206.

9. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

10. *Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В.* Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 1. С. 64–73.

11. *Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L.* Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. Vol. 3, no. 1. P. 21-–46.

12. *Maxwell D.* Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration // Inverse Problems & Imaging. 2014. 8(2),537–560.

13. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E.* Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation // Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2014.

14. *Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S.E.* Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, No. 6. P. 871–884.

APPROXIMATION BY GENERALIZED SAMPLING SERIES AND GENERALIZED MODULI OF SMOOTHNESS

S. Artamonov
sartamonov@hse.ru

UDC 517.518

We study properties of realizations of generalized K-functionals and generalized moduli of smoothness in $L_p(\mathbb{R}^d)$ spaces with $0 < p < \infty$ as well as in the space $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ of uniformly continuous and bounded functions. We obtain direct Jackson-type estimates and inverse Bernstein-type estimates. We show the equivalence between approximation error of families of generalized sampling series generated by an arbitrary generator with compact support, realizations of generalized K-functionals generated by homogeneous functions and generalized moduli of smoothness generated by periodic function. Our approach covers classical approximation methods, K-functionals related to fractional derivatives and fractional moduli of smoothness.

Keywords: K-functionals, Jackson-type estimate, Bernstein-type estimate, families of generalized sampling series, moduli of smoothness

In a series of papers ([2], [9]-[12], [14]-[16]) trigonometric approximation has been studied in a systematic way. It has been presented a universal approach for approximation in $L_p(\mathbb{T}^d),\ 0 < p \leqslant \infty$, where $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ is d-dimensional torus, based on families of linear polynomial operators, generalized (polynomial) K-functionals and adapted moduli of smoothness. The aim of this work is to deal with the non-periodic case, i. e. with approximation by bandlimited functions (or entire analytic functions of exponential type) in $L_p(\mathbb{R}^d),\ 0 < p < \infty$ and $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ (if $p = \infty$). Of peculiar interest is that our approach covers also the limiting cases $p = 1\,, p = \infty$ and $0 < p < 1$. As approximants we consider families of generalized sampling series $S^{\phi}_{\sigma;\lambda}(f;x)$ defined as

$$S^{\phi}_{\sigma;\lambda}(f;x) \,=\, (2\pi)^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{k}{\sigma} \,+\, \lambda\right) F[\phi](\sigma(x-\lambda) \,-\, k). \tag{1}$$

Here F denotes the Fourier transform, $x \in \mathbb{R}^d\,, \sigma > 0\,, \lambda \in \mathbb{R}^d\,, \lambda_i > 0$ and ϕ is an appropriate continuous function with compact support satisfying $\phi(0) = 1$. It was shown in [7], that (1) is well-defined (pointwise convergence for almost all $\lambda \in \mathbb{R}^d$) and belongs to $L_p(\mathbb{R}^d),\ 0 < p \leqslant \infty$, for almost all $\lambda \in \mathbb{R}^d$ if $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Moreover, its Fourier transform (with respect to x for almost all λ) has a compact support. Further, $S^{\phi}_{\sigma;\lambda}(f;x)$ is σ^{-1}-periodic with respect to λ and $g(x,\lambda) \,=\, S^{\phi}_{\sigma;\lambda}(f;x) \,\in\, L_p(\mathbb{R}^d \times [0;\sigma^{-1}]^d)$ as the function of two variables, provided that $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Thus, it makes sense to consider convergence and the approximation error with respect to the averaged (quasi-)norm

$$\|g\|_{\overline{p}} \,=\, \lim_{\Lambda\to+\infty} \left[(2\Lambda)^{-d} \int\limits_{[-\Lambda;\Lambda]^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(x,\lambda)|^p dx d\lambda\right]^{\frac{1}{p}},$$

The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2019-2020 (grant N№ 19-01-024) and by the Russian Academic Excellence Project "5-100".

Sergei Artamonov, PhD, National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia);

which coincides with the (quasi-)norm in $L_p(\mathbb{R}^d \times [0;\sigma^{-1}]^d)$ if g is σ^{-1}-periodic with respect to λ.

By G we denote the class of continuous 2π-periodic functions $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ such that $\theta(-\xi) = \overline{\theta(\xi)}$ for all $\xi \in \mathbb{R}^d$ (θ is centrally symmetric); $\|\theta^\wedge\|_{\ell_1} = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}^d} |\theta^\wedge(\nu)| < \infty$. Here $\theta^\wedge = (\theta^\wedge(\nu))_{\nu\in\mathbb{Z}^d}$ stands for the Fourier coefficients. The subset $G_1 \subset G$ collects all functions satisfying in addition $\theta(0) = 0$. An important characteristic of function $\theta \in G$ is the set $\mathcal{P}_\theta = \{p \in (0,+\infty] : \{\theta^\wedge(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_p\}$.

For $\theta \in G_1$ and $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ we consider moduli of smoothness

$$\omega_\theta(f,\delta)_p = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left\| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} \theta^\wedge(\nu) f(x+\nu h) \right\|_p , \delta \geqslant 0. \tag{2}$$

Clearly (2) makes sense (convergence) in $L_p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p \leqslant \infty$ if $p \in \mathcal{P}_\theta$.

The relation $A(f,\sigma) \asymp B(f,\sigma)$ indicates equivalence. It means that there exist positive constants c_1 and c_2 that do not depend on f and σ, such that $c_1 A(f,\sigma) \leqslant B(f,\sigma) \leqslant c_2 A(f,\sigma)$. We are interested in the equivalence

$$\|f - S^\phi_{\sigma;\lambda}(f)\|_{\overline{p}} \asymp \omega_\theta(f, 1/\sigma)_p , \quad \sigma > 0. \tag{3}$$

For the case $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, where convolution integrals are considered as approximants, we refer to [1], [3]-[6].

We establish conditions with respect to the generators ϕ of the approximation method and θ of the modulus of smoothness such that (3) holds for all $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. In order to achieve this goal we consider realizations of generalized K-functionals

$$\mathcal{R}_\psi(f,\delta)_p := \inf\{\|f-g\|_p + \delta^\alpha \|\mathcal{D}(\psi)g\|_p : g \in L_p(\mathbb{R}^d) \bigcap S', \ suppFg \subset D_{1/\delta}\} ,$$

where S' denotes the dual of the Schwartz space of infinitely differentiable rapidly decreasing functions, $D_\sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \leqslant \sigma\}$ and $|\xi| = (\xi_1 + \ldots + \xi_d)^{1/2}$. Here $\mathcal{D}(\psi)$ stands for a differential operator generated by a function ψ, which is centrally symmetric, homogeneous of degree $\alpha > 0$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ and $\psi(\xi) \neq 0$ for $\xi \neq 0$ (such class of function we denote by $\mathcal{H}^\alpha$). It is formally defined as $\mathcal{D}(\psi)g = F^{-1}[\psi Fg]$, where F^{-1} denotes the inverse Fourier transform.

In [8] it was shown, that

$$\|f - S^\phi_{\sigma;\lambda}(f)\|_{\overline{p}} \asymp \mathcal{R}_\psi(f,\sigma^{-1})_p , \sigma > 0 \tag{3}$$

under certain conditions with respect to the generator ϕ of the approximation method and ψ of the $\mathcal{R}$-functional. In particular, we mention, that ϕ and ψ should be equivalent in a following sense.

Let $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ belong to $C(\mathbb{R}^d)$, let $0 < q \leqslant \infty$ and let the function $\eta(\cdot)$ be infinitely differentiable with compact support (test function). We use the notation: $u(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} v(\cdot)$, if $F\left[\frac{u(\cdot)}{v(\cdot)}\eta(\cdot)\right] \in L_q(\mathbb{R}^d)$. We say, that u and v are equivalent $u(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\asymp} v(\cdot)$ if $u(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} v(\cdot)$ and $v(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} u(\cdot)$ hold simultaneously.

Our method of proof of (3) is to show the equivalence

$$\omega_\theta(f,\delta)_p \asymp \mathcal{R}_\psi(f,\delta)_p , \ \delta \geqslant 0,$$

and to use (3). To this end we prove getting-out constant property for realizations of generalized K-functional and Jackson-type estimate for modulus (2). We use the notation $\widetilde{p} = \min(1,p)$.

Theorem 1. it Let $0 < p \leqslant +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathcal{H}^\alpha, \alpha > 0$, then

$$\mathcal{R}_\psi(f, t\delta)_p \leqslant c \cdot \max\left(1, t^{\alpha + d(\frac{1}{p} - 1)}\right) \mathcal{R}_\psi(f, \delta)_p \ , \ \delta > 0 \, .$$

To formulate Jackson type estimate we consider real-valued infinitely differentiable centrally symmetric function $\eta(\cdot)$, such that $\eta(\xi) = 1$ for $|\xi| \leqslant \rho$ and $\eta(\xi) = 0$ for $|\xi| \geqslant 2\rho$, where $\xi \in \mathbb{R}^d, \rho > 0$. We also denote by G_2 the subset of G_1, such that $\theta \in G_2$ if $\theta(\xi) \neq 0$ for $\xi \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}^d$. By $g_*(\xi)$ we denote periodic extension of $g(\xi)$, i.e. $g_*(\xi) = \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^d} g(\xi + 2\pi j)$. As usual, the best approximation of $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ of order $\sigma > 0$ is given by $E_\sigma(f)_p = \inf\limits_{g \in B_p^\sigma} \|f - g\|_p$, where B_p^σ is Bernstein space of bandlimited functions (see e.g. [8] for details).

Theorem 2. *Let $\theta \in G_2$ and $p \in \mathcal{P}_\theta$. Assume that there exist $\psi \in \mathcal{H}^\alpha$ and η as mentioned above, such that $\psi(\cdot) \overset{(\widetilde{p},\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$ and $((1 - \eta_*(\cdot))/\theta(\cdot))^\wedge \in \ell_{\widetilde{p}}$. Then for each $\lambda > 0$*

$$E_\sigma(f)_p \leqslant c(p, \theta, \lambda) \omega_\theta(f, \lambda/\sigma)_p \, , \quad f \in L_p(\mathbb{R}^d) \, , \, \sigma > 0 \, ,$$

where positive constant $c(p, \theta, \lambda)$ does not depend on f and σ.

The main result reads as follows

Theorem 3. *Let $0 < p \leqslant \infty$, $\theta \in G_2, p \in \mathcal{P}_\theta, \psi \in \mathcal{H}^\alpha$ for some $\alpha > 0$ and $\psi(\cdot) \overset{(\widetilde{p},\eta)}{\asymp} \theta(\cdot)$. Assume that there exists η as mentioned Theorem 2, such that $((1 - \eta_*(\cdot))/\theta(\cdot))^\wedge \in \ell_{\widetilde{p}}$. Then*

$$\mathcal{R}_\psi(f, \delta)_p \asymp \omega_\theta(f, \delta)_p \, , \quad f \in L_p(\mathbb{R}^d), \delta > 0, \tag{4}$$

where the equivalence constants are independent of f and δ.

We also discuss important examples with respect to classical approximation methods which are special cases of (4).

References

1. *S. Artamonov.* Direct Jackson-type estimate for the general modulus of smoothness in the nonperiodic case // Mat. Zametki, **97**:5 (2015), 794–797.

2. *S. Artamonov.* Quality of approximation by Fourier means in terms of general moduli of smoothness // Mat. Zametki, **98**:1 (2015), 3–11.

3. *S. Artamonov.* Nonperiodic modulus of smoothness corresponding to the Riesz derivative // Mat. Zametki, **99**:6 (2016), 933–936.

4. *S. Artamonov.* Some issues of the theory of approximations by entire analytic functions of exponential type and generalized moduli of smoothness // Computational Mathematics and Modeling, **28**:1 (2017), 86–88 (Translated from Prikladnaya Matematika i Informatika 51 (2016), 109–112).

5. *S. Artamonov.* On some constructions of non-periodic modulus of smoothness related to the Riesz derivative // Eurasian Mathematical Journal, **9**:2 (2018), 11-21.

6. *S. Artamonov, K. Runovski, H.-J. Schmeisser.* Approximation by bandlimited functions, generalized K-functionals and generalized moduli of smoothness // Analysis Mathematica, **45**:1 (2019), 1-24.

7. *Z. Burinska, K. Runovski, and H.-J. Schmeisser.* On the approximation by generalized sampling series in L_p-metrics // Sampling Theory in Signal and Image Processing, **5** (2006), 59–87.

8. *Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser.* On quality of approximation by families of generalized sampling series // Sampling Theory in Signal and Image Proc., **8** (2009), 105–126.

9. *V. Rukasov, K. V. Runovski and H.-J. Schmeisser.* Approximation by families of linear trigonometric polynomial operators and smoothness properties of functions // Math. Nachr. **284** (2011), 1523–1537.

10. *K. V. Runovski.* A direct theorem of approximation theory for a general modulus of smoothness // Mat. Zametki, **95**:6 (2014), 899–910. (In Russian.)

11. *K. V. Runovski.* Trigonometric polynomial approximation, K-functionals and generalized moduli of smoothness // Sbornik: Mathematics, **208**:2 (2017), 237–254 (Translated from Mat. Sbornik 208:2, 70–87).

12. *K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser.* Methods of trigonometric approximation and generalized smoothness. I // Eurasian Math. J., **2**:3 (2011), 98–124.

13. *K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser.* On some extensions of Bernstein inequalities for trigonometric polynomials // Functiones et Approx., 29 (2001), 125–142.

14. *K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser.* On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative // Jenaer Schriften zur Math. und Inf. Math/Inf/01/11 (2011).

15. *K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser.* General moduli of smoothness and approximation by families of linear polynomial operators // In: New Perspectives on Approximation and Sampling Theory (Festschrift in Honor of Paul Butzer's 85th Birthday; eds. G. Schmeisser et al.), 269–298, Basel: Birkhäuser 2014.

16. *K. V. Runovski, H.-J. Schmeisser.* Moduli of smoothness related to fractional Riesz derivatives // Journal of Analysis and its Applications, **34** (2015), 109–125.

GENERALIZED LOCALIZATION FOR SPHERICAL PARTIAL SUMS OF MULTIPLE FOURIER SERIES

R.R. Ashurov

ashurovr@gmail.com

UDC 517.95

In this paper the generalized localization principle for the spherical partial sums of the multiple Fourier series in the L_2 - class is proved, that is, if $f \in L_2(T^N)$ and $f = 0$ on an open set $\Omega \subset T^N$, then it is shown that the spherical partial sums of this function converge to zero almost - everywhere on Ω. It has been previously known that the generalized localization is not valid in $L_p(T^N)$ when $1 \leqslant p < 2$. Thus the problem of generalized localization for the spherical partial sums is completely solved in $L_p(T^N)$, $p \geqslant 1$: if $p \geqslant 2$ then we have the generalized localization and if $p < 2$, then the generalized localization fails.

Keywords: Multiple Fourier series, spherical partial sums, convergence almost-everywhere, generalized localization.

The author was supported by Foundation for Support of Basic Research of the Republic of Uzbekistan (project number is OT-F4-88).

Ravshan Ashurov, professor, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science (Tashkent, Uzbekistan)

Let $\{f_n\}$, $n \in Z^N$, be the Fourier coefficients of a function $f \in L_2(T^N)$, $N \geqslant 2$. Consider the spherical partial sums of the multiple Fourier series:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2<\lambda} f_n \, e^{inx}. \tag{1}$$

The aim of this paper is to investigate convergence almost-everywhere (a.e.) of these partial sums. One of the first questions which arise in the study of a.e. convergence of the sums (1) is the question of the validity of the Luzin conjecture: is it true that the spherical sums (1) of the Fourier series of an arbitrary function $f \in L_2(T^N)$ converge a.e. on T^N? In other words, does Carleson's theorem extend to N-fold Fourier series when the latter is summed spherically? The answer to this question is open so far. What is known is only that Hunt's theorem (convergence a.e. for L_p functions) does not extend to N-fold ($N \geqslant 2$) series summed by circles (see [1] and references therein). Historically progress with solving the Luzin conjecture has been made by considering easier problems. One of such easier problems is to investigate convergence a.e. of the spherical sums (1) on $T^N \setminus suppf$.

Il'in [2] was the first to introduce the concept of generalized principle of localization for an arbitrary eigenfunction expansions. Following Il'in we say that the generalized localization principle for S_λ holds in $L_p(T^N)$, if for any function $f \in L_p(T^N)$ the equality

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda f(x) = 0 \tag{2}$$

holds a.e. on $T^N \setminus suppf$.

Observe, unlike the classical Riemann localization principle, here it suffices the equality (2) to be hold only a.e. (not everywhere) on $T^N \setminus suppf$.

It should also be noted the paper [6], where the authors managed to prove equivalence of convergence almost everywhere (but not of generalized localization principle) of multiple Fourier series and integrals.

For the spherical partial integrals of multiple Fourier integrals (we denote by $\sigma_\lambda f(x)$) the generalized localization principle in $L_p(R^N)$ has been investigated by many authors (see [3-5]). In particular, in the remarkable paper of A. Carbery and F. Soria [5] the validity of the generalized localization for σ_λ has been proved in $L_p(R^N)$ when $2 \leqslant p < 2N/(N-1)$.

If we turn back to the multiple Fourier series (1) and consider the classes $L_p(T^N)$ when $1 \leqslant p < 2$, then as A. Bastys [4] has proved, following Fefferman in making use of the Kakeya's problem, that the generalized localization for S_λ is not valid, i.e. there exists a function $f \in L_p(T^N)$, such that on some set of positive measure, contained in $T^N \setminus suppf$, we have

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} |S_\lambda f(x)| = +\infty.$$

It may be worth mentioning that in [4] this result is also proved for the spherical partial integrals $\sigma_\lambda f(x)$.

The main result of this paper is the following statement.

Theorem 1. *Let $f \in L_2(T^N)$ and $f = 0$ on an open set $\Omega \subset T^N$. Then the equality (2) holds a.e. on Ω.*

Thus the problem of generalized localization for S_λ is completely solved in classes $L_p(T^N)$, $p \geqslant 1$: if $p \geqslant 2$ then we have the generalized localization and if $p < 2$, then the generalized localization fails.

In the study of a.e. convergence it is convenient to introduce the maximal operator

$$S_\star f(x) = \sup_{\lambda>0} |S_\lambda f(x)|.$$

The prove of Theorem 1 is based on the following estimate of this operator.

Theorem 2. *Let $f \in L_2(T^N)$ and $f = 0$ on the ball $\{|x| < R\} \subset T^N$. Then for any $r < R$ there exists a constant $C = C(R, r)$, such that*

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} |S_\star f(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_{T^N} |f(x)|^2 dx.$$

References

1. *Alimov Sh.A., Ashurov R.R. Pulatov, A.K.* Multiple Fourier Series and Fourier Integrals // Commutative Harmonic Analysis, Springer, Berlin, **IV** (1992), 1–97.

2. *Il'in V.A.* On a generalized interpretation of the principle of localization for Fourier series with respect to fundamental systems of functions // Sib. Mat. Zh., **9** (1968), 1093–1106.

3. *Bastys A.J.* The generalized localization principle for an N-fold Fourier integral // Dokl. Akd. Nauk SSSR, **278** (1984), 777–778.

4. *Bastys A.J.* Generalized localization of Fourier series with respect to the eigenfunctions of the Laplace operator in the classes L_p // Litovskii Matematicheskii Sbornik, **31** (1991), 387–405.

5. *Carbery A., Soria F.* Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L_2-localization principle // Revista Mat. Iberoamericana, **4** (1988), 319–337.

6. *Kenig Carlos E., Tomas Peter A.* Maximal operators defined by Fourier multipliers // Studia Math. **68** (1980), 79–83.

ON A SPECIAL SEQUENCE OF MINIMAL INTEGERS WITH LOCALLY MAXIMAL GRONWALL NUMBERS

G.A. Kalyabin

gennadiy.kalyabin@gmail.com

UDC 517.521.1, 511.331, 511.333

The algorithm is proposed for constructing the (unique) sequence of integers for which the Gronwall number attains its local maxima. Infinitely many of these integers possess a stronger property of one-step G-unimprovability. The research is related to Ramanujan-Robin inequality and Caveney-Nicolas-Sondow hypothesis.

Keywords: arithmetic function sum of divisors, Gronwall number
MSC: 11A25, 11N05, 11N37

This work is supported by RFBR (no. 14-01-00684).

Gennadiy Kalyabin, Samara State Technical University, Samara, Russia

1. Notations and definitions. Let $\mathbb{N}$ denote the set of all positive integers, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{P}-$ the sequence of all primes $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\theta(x) := \sum_{p_j \leqslant x} \log p_j -$ the second Chebyshev function, $T(p_k) = \widehat{p_k} := p_1 p_2 \cdots p_k -$ Chebyshev factorial.

Following [1] we will consider the Gronwall number $G(N) := \frac{\sigma(N)}{N \log\log N}$ where $\sigma(N)$ stands for the sum of all positive divisors of a given natural $N > 1$, $\log x$ is a natural logarithm of $x > 0$. T. Gronwall [2] in 1913 has proved that

$$\limsup_{N \to +\infty} G(N) = e^{\gamma} = 1.78107\ldots; \ \gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = 0.5772... \qquad (1)$$

being the Euler-Masceroni constant.

The behavior of $G(N)$ as N increases looks extremely irregular. More regularity can be seen if instead of the integers values one compares their prime factorization:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}; \ p_j \in \mathbb{P}; \ \alpha_j = \alpha_j(N) \in \mathbb{N}_0, \ \alpha_k > 0, \qquad (2)$$

where $p_k =: P(N)$ denotes the greatest prime divisor of N.

Definition 1. *Let $k \geqslant 4$; the integer $N > 1$ is called to be $(1,k)$-locally G-maximal, $N \in \mathbf{U}_{1,k}$, if $P(N) = p_k \geqslant 7$, $\widehat{p_k} \mid N$ and $2(k-1)$ inequalities*

$$G(N/p_j) \leqslant G(N), \quad G(Np_i) \leqslant G(N); \quad 1 \leqslant i, j < k, \qquad (3)$$

hold (note that in (3) the values $i = k$, $j = k$ are excluded).

2. $(1,k)$-locally G-maximal numbers. Introduce a function $\xi := \xi(p, \alpha)$, $p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}_0$, as the root of the following special equation:

$$\log \xi = \frac{p^{\alpha+2} - p}{p - 1} \ \log \left(1 + \frac{\log p}{\xi} \right). \qquad (4)$$

It is obvious that $\xi(p, \alpha)$ monotonically increases as either p or α does so.

A paramount role of these quantities is explained in the assertion:

Lemma 1. *Let $\alpha_j(N) = \alpha_j \in \mathbb{N}_0$. Then the condition $G(Np_j) \geqslant G(N)$ is equivalent to $\log N \geqslant \xi(p_j, \alpha_j)$.*

Our main result describes the direct algorithm for calculating the minimal elements $V(p_k)$ among all integers N with given $P(N) = p_k$, $k \geqslant 4$, satisfying relationships (3), and some properties thereof.

Theorem 1. *For fixed $k \geqslant 4$ let us put $V_k(0) := T(p_k)$, and for $s \in \mathbb{N}$ define recursively by induction the sequences:*

$$\alpha_1(k,s) := \max\{r \in \mathbb{N} : \xi(2, r-1) \leqslant \log V_k(s-1)\}; \qquad (5)$$

$$q_m(k,s) := \max\{p \in \mathbb{P} : \xi(p, m-1) \leqslant \log V_k(s-1)\};$$
$$m \in \{2, \ldots, \alpha_1(k,s)\}; \qquad (6)$$

$$V_k(s) := T(p_k) \prod_{m=2}^{\alpha_1(k,s)} T\left(q_m(k,s)\right). \qquad (7)$$

Then: **(I)** *the numbers $V_k(s), \alpha_1(k,s), q_m(k,s)$ as well as $G(V_k(s))$, do not decrease as s increases and are bonded from above; hence there is such $s_0 := s_0(k)$, that these quantities stabilize beginning with s_0, i. e. $V_k(s) = V(p_k)$, $\alpha_1(k,s) = \alpha_1(k)$, $\forall\ s \geqslant s_0$,; for the established values one has:*

$$\xi(q_m(k), m-1) < \log V(p_k) \leqslant \xi(q_m'(k), m-1); \qquad m \in \{2, \ldots, \alpha_1(k)\}, \qquad (8)$$

where $q_m'(k)$ stands for the least prime greater than $q_m(k)$, and this is exactly equvalent to the condition $V(p_k) \in \mathbf{U}_{1,k}$, (cf (3)).

(II) *if $V(p_k)$ is written as a product $V(p_k) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, then:* $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \alpha_k = 1$, *the inequalities (equivalent to (8))*

$$\xi(p_j, \alpha_j(k) - 1) + \log p_j \leqslant \log V(p_k) \leqslant \xi(p_j, \alpha_j(k)),\ 1 \leqslant j < k, \tag{9}$$

are fulfilled and the estimates $0.5\sqrt{p_k} < \log V(p_k) - \theta(p_k) < 4\sqrt{p_k}$ hold.

(III) *if there is some other integer $\tilde{V}_k := p_1^{\tilde{\alpha}_1} \ \cdots \ p_k^{\tilde{\alpha}_k}$; $\tilde{\alpha}_k > 0$, which also satisfies all inequalities (3), then necessarily $\tilde{\alpha}_j \geqslant \alpha_j$, $\forall j \in \{1, \dots, k\}$, i. e. $V(p_k) \mid \tilde{V}_k$.*

The last part of Theorem 1 also implies that $V(p_k) \mid V(p_{k+1})$; thus it is possible (and reasonable) to choose $V_{k+1}(0) := V(p_k)p_{k+1}$ instead of $T(p_{k+1})$.

3. One-step G-unimprovable numbers.

Definition 2. *The class $\mathbf{U}_1$ consists of all such integers $N > 5$ (cf (3)) that the following two conditions are met:*

$\mathbf{U}_1^{/}$: $G(N/q) \leqslant G(N)$ *for* **any prime** $q < N$, $q \mid N$, *and*

$\mathbf{U}_1^{\times}$: $G(Np) \leqslant G(N)$ *for* **all primes** *numbers p.*

The least element in $\mathbf{U}_1$ is the number $N_1^* := 14 = 2 \cdot 7$, $G(N_1^*) = 1.7665...$

All larger numbers in $\mathbf{U}_1$ form certain subsequence of $\{V(p_k)\}$, $k \geqslant 4$.

Theorem 2. (i) *If $N > 14$ belongs to the class $\mathbf{U}_1$, then $P(N) \geqslant 23$ and $N = V(P(N))$, i. e. $\mathbf{U}_1 = \{N_m^*\} := \{V(p_{k_m})\}$, $k_2 < k_3 < k_4 < \dots$*

(ii) *The set $\mathbf{U}_1$ contains infinitely many numbers.*

The proof of part **(ii)** is based on the Littlewood result (1914, cf [3], Theorem 6.20) claiming that $\theta(x) - x = \Omega_{\pm}(\sqrt{x}\ \log\log\log x)$.

4. Conclusive remarks.

In 1984 Robin [4] proved the fundamental theorem on equivalence of the two famous hypotheses:

(RH): *if the value of Riemann function $\zeta(s + it) = 0$, $t \neq 0$, then $s = 1/2$.*

(RRI): the Ramanujan-Robin inequality $G(N) < e^{\gamma}$ is valid for $N > 5040$.

In 2011 Caveney, Nicolas ans Sondow [1] appended one more equivalent hypothesis to those two mentioned above:

(CNSH): *every integer $N > 5$ is G-improvable, i. e.* **either**

$\mathbf{I}^{/}$: *there is a prime $q \mid N$ such that $G(N/q) > G(N)$* **or**

$\mathbf{I}^{\times}$: *there is* **an integer** *a such that $G(Na) > G(N)$.*

Note that 3, 4, 5 are not G-improvable numbers.

Condition $\mathbf{I}^{/}$ coincides with the negation of $\mathbf{U}_1^{/}$ whereas $\mathbf{U}_1^{\times}$ is much stronger than the negation of $\mathbf{I}^{\times}$; in other words, **(CNSH)** is equivalent to: $\mathbf{U_1} \subset \mathbf{I}^{\times}$.

The last column of the Table 2 (below) speaks in favor of **(CNSH)** validity.

All the calculations were carried out with the help of **Maple-13**.

Table 1. $(1,k)$**-locally** G**-maximal numbers** $V(p_k)$

k	V_k	V_k/V_{k-1}	$G(V_k)$
4	$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = \widehat{7}\cdot\widehat{3}\cdot\widehat{2} = 2\ 520$	–	1.8046...
5	$2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = \widehat{11}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 55\ 440$	$11\cdot 2$	1.7512...
6	$2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = \widehat{13}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 720\ 720$	13	1.7330...
7	$\widehat{17}\cdot\widehat{5}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 367\ 567\ 200$	$17\cdot 5\cdot 3\cdot 2$	1.7243..
8	$\widehat{19}\cdot\widehat{5}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 6\ 983\ 776\ 800$	19	1.7341...
9	$\widehat{23}\cdot\widehat{5}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 160\ 626\ 866\ 400$	23	1.7374...

Table 2. One-step G**-unimprovable numbers** $N_m^*,\ 2\leqslant m\leqslant 7$.

m	k_m	$N_m^* := V_{k_m}$	$G(N_m^*)$
2	9	$\widehat{23}\cdot\widehat{5}\cdot\widehat{3}\cdot 2^2 = 160\ 626\ 866\ 400$	1.7374..
3	11	$\widehat{31}\cdot\widehat{7}\cdot\widehat{3}\cdot 2^3 = 2.02...\cdot 10^{15}$	1.7368..
4	16	$\widehat{53}\cdot\widehat{7}\cdot 3^2\cdot 2^5 = 1.97...\cdot 10^{24}$	1.7434...
5	34	$\widehat{139}\cdot\widehat{13}\cdot\widehat{5}\cdot 3^2\cdot 2^6 = 5.19...\cdot 10^{63}$	1.7582..
6	99	$\widehat{523}\cdot\widehat{29}\cdot\widehat{7}\cdot\widehat{5}\cdot 3^2\cdot 2^7 = 4.08...\cdot 10^{233}$	1.770728..
7	101	$\widehat{547}\cdot\widehat{31}\cdot\widehat{7}\cdot\widehat{5}\cdot 3^2\cdot 2^7 = 3.75...\cdot 10^{240}$	1.770765..

The electronic preprint (dated 2018-10-30) of the results presented here is available at https://arxiv.org/abs/1810.12585.

The author is deeply grateful to V. V. Kozlov for his interest to this work, as well as to participants of the Seminar "Modern Problems in Number Theory" (2018-11-22) at Steklov Institute of Mathematics, for many valuable questions and comments.

References

1. *Caveney G., Nicolas J.-L., Sondow J.* Robin's theorem, primes, and a new elementary reformulation of Riemann Hypothesis.// Integers **11** (2011), #A33, 1-10.

2. *Gronwall T.H.* Some asymptotic expressions in the theory of numbers // Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913), 113–122.

3. *Narkiewicz W.* The Development of Prime Number Theory. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

4. *Robin G.* Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann // J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 187 – 213.

ON THE CONSTANCY OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Ž. Pavićević

zarkop@ucg.ac.me

UDC 51

Applying the statement on the constancy of continuous functions, we present the simple proofs of the Liouville and the small Picard theorem for harmonic functions in the complex plane.

Keywords: continuous function, Liouville's theorem, Picard's theorem
MSC: 30D45, 31A05

Žarko Pavićević, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro

Preliminary notations, definitions and results

We will denote the set of real numbers with $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, the set of complex numbers with $\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$, and the Riemannian sphere with $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

The convergence on $\mathbb{C}$ and $\overline{\mathbb{C}}$ are given in Euclidean and spherical metrics. These metrics are equivalent on compact sets in $\mathbb{C}$.

A family $\mathcal{T} = \{f | f : O \to \overline{\mathbb{R}}\}$ of functions on a domain $O \subset \overline{\mathbb{C}}$ is normal in O if every sequence of functions $(f_n) \subset \mathcal{T}$ contains either a subsequence which converges to a limit function $f \not\equiv \infty$ uniformly on each compact subset of O, or a subsequence which converges uniformly to ∞ on each compact subset. A family $\mathcal{T}$ of functions is normal at a point $z \in O$ if it is a normal family in some neighborhood of z. If $\infty \in O$, then the family of functions $\mathcal{T}$ normal at the point ∞ if the family $\mathcal{T}' = \{f(z^{-1}) | f \in \mathcal{T}\}$ is a normal family in O. It is known that a family of functions $\mathcal{T}$ is normal in a domain O if and only if $\mathcal{T}$ is normal at each point of O (see ([4]).

Theorem A. *A locally bounded family $\mathcal{T}$ of harmonic functions on a domain O is normal.*

Theorem B. *The family $\mathcal{H}^+$ of positive harmonic functions on a domain O is normal.*

Theorem C. *A family $\mathcal{H}$ of harmonic functions in a domain O which omit one specific real value α is normal.*

The main results

Let g is the continuous automorphism of O, $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g$ n-times, $g^{-n} = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1}$ n-times, $g^0 = id_O$ is the identity mapping on the domain O. Then $G_g = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ is the cyclic automorphism group of O.

Theorem 1. *Let $f : O \to \overline{\mathbb{R}}$ be continuous in the domain O. If a continuous automorphism g on O has an attracting fixed point in O and $\mathcal{T} = \{f \circ g \mid g \in G_g\}$ is a normal family of functions on O, then f is constant on O.*

Theorem 1 is proven using the Arzela-Ascoli theorem (see [1,5]).

Application

Theorem 2 (Liouville theorem for bounded harmonic functions). *A bounded harmonic function on $\mathbb{C}$ is constant.*

Theorem 2 follows from Theorem A and Theorem 1 for $O = \mathbb{C}$, if the $G_g = \{g^n \mid g(z) = a(z - z_0) + z_0, n \in \mathbb{Z}\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $0 <\mid a \mid< 1$.

Theorem 3 (Liouville theorem for positive harmonic functions). *A positive harmonic function on $\mathbb{C}$ is constant.*

Theorem 3 follows from Theorem B and Theorem 1 for $O = \mathbb{C}$, if the $G_g = \{g^n \mid g(z) = a(z - z_0) + z_0, n \in \mathbb{Z}\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $0 <\mid a \mid< 1$.

Theorem 4 (Picard's theorem for harmonic functions). *The non-constant harmonic functions in the complex plane $\mathbb{C}$ takes all the values from the set of real numbers $\mathbb{R}$.*

Theorem 4 follows from Theorem C and Theorem 1 for $O = \mathbb{C}$, if the $G_g = \{g^n \mid g(z) = a(z - z_0) + z_0, n \in \mathbb{Z}\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $0 <\mid a \mid< 1$.

Remark. Similar results for holomorphic and meromorphic functions are given in [6].

References

1. *Ahlfors, V.L.* Complex Analysis: an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable. — McGraw-Hill, Inc., 1979.

2. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic Function Theory. — Springer-Verlag, New York, 2001.

3. *Beardon, A.F.* The Geometry of Discrete Groups. — Springer, 1995.

4. *Schiff, L.J.* Normal Families. — Springer Science+Business Media, LLC, 1993.

5. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. — Dover Publications, 1999.

6. *Pavićević Ž.* Normal Families, Theorems of Liouville and Picard and Bloch Principle // Math. Montisnigri, **43** (2019), 5-9.

GEOMETRIC HARDY AND HARDY-SOBOLEV INEQUALITIES ON STRATIFIED LIE GROUPS

D. Suragan

durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

UDC 517.518

In this paper, we present the geometric Hardy inequality for the sub-Laplacian in the half-spaces on the stratified groups. As a consequence, we obtain the following geometric Hardy inequality in a half-space on the Heisenberg group with a sharp constant, which solves a previously unsolved conjecture in the field. Also, we obtain a version of the Hardy-Sobolev inequality in a half-space on the Heisenberg group.

Keywords: stratified groups, Heisenberg groups, geometric Hardy inequality, half-space, sharp constant.

Let us recall the Hardy inequality in the half-space

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx \geqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{x_n^p} dx, \quad p>1, \tag{1}$$

for every function $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, where ∇ is the usual Euclidean gradient. The half-space is defined by $\mathbb{R}^n_+ := \{(x', x_n) | x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. There is a number of studies related to inequality (1), see e.g. [1], [2], [3], [4].

Filippas, Maz'ya and Tertikas in [5] have established the Hardy-Sobolev inequality in the following form

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u|^p}{x_n^p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

for all function $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, where $p^* = \frac{np}{n-p}$ and $2 \leqslant p < n$. There is a different proof of this inequality by Frank and Loss [6].

The Hardy inequality in the half-space on the Heisenberg group was shown by Luan and Young [7] in the form

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi \geqslant \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{|x|^2 + |y|^2}{t^2} |u|^2 d\xi.$$

The research is supported by the Nazarbayev University (project NU SPG).

Durvudkhan Suragan, PhD, Assistant Professor (Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan)

An alternative proof of this inequality was given by Larson in [8], where the author generalised it to any half-space of the Heisenberg group,

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi \geqslant \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\sum_{i=1}^n \langle X_i(\xi), \nu\rangle^2 + \langle Y_i(\xi), \nu\rangle^2}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^2} |u|^2 d\xi,$$

where X_i and Y_i (for $i = 1, \dots, n$) are left-invariant vector fields on the Heisenberg group, ν is the Riemannian outer unit normal (see [9]) to the boundary. Also, there is the L^p-generalisation of the above inequality

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^p d\xi \geqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\sum_{i=1}^n |\langle X_i(\xi), \nu\rangle|^p + |\langle Y_i(\xi), \nu\rangle|^p}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^p} |u|^p d\xi.$$

The main aim of this talk is to present the L^p-version of the geometric Hardy inequality for the sub-Laplacian in the half-spaces on the stratified groups (the Carnot groups), where the obtained inequality will be a natural extension of the inequality derived by the authors in [8] and [10] on the Heisenberg and the stratified groups, respectively. Note that it proves the inequality conjectured in [8]. Moreover, we obtain a version of the Hardy-Sobolev inequality in the setting of the Heisenberg group.

The main results of this presentation are as follows:

- **Geometric L^p-Hardy inequality on $\mathbb{G}^+$:** Let $\mathbb{G}^+ := \{x \in \mathbb{G} : \langle x, \nu\rangle > d\}$ be a half-space of a stratified group $\mathbb{G}$. Then for all $u \in C_0^\infty(\mathbb{G}^+)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $p > 1$ we have

$$\int_{\mathbb{G}^+} |\nabla_{\mathbb{G}} u|^p dx \geqslant - (p-1)(|\beta|^{\frac{p}{p-1}} + \beta) \int_{\mathbb{G}^+} \frac{\mathcal{W}(x)^p}{dist(x, \partial\mathbb{G}^+)^p} |u|^p dx + \beta \int_{\mathbb{G}^+} \frac{\mathcal{L}_p(dist(x, \partial\mathbb{G}^+))}{dist(x, \partial\mathbb{G}^+)^{p-1}} |u|^p dx,$$

  where $\mathcal{W}(x) := (\sum_{i=1}^N \langle X_i(x), \nu\rangle^2)^{1/2}$, and $\mathcal{L}_p$ is the p-sub-Laplacian on $\mathbb{G}$.

- **Geometric L^p-Hardy inequality on $\mathbb{H}^+$:** Let $\mathbb{H}^+ := \{\xi \in \mathbb{H}^n : \langle \xi, \nu\rangle > d\}$ be a half-space of the Heisenberg group. Then for all $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^+)$ and $p > 1$ we have

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^p d\xi \geqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^p}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^p} |u|^p d\xi,$$

  where $\mathcal{W}(\xi) := \left(\sum_{i=1}^n \langle X_i(\xi), \nu\rangle^2 + \langle Y_i(\xi), \nu\rangle^2\right)^{1/2}$ and the constant is sharp.

- **Geometric Hardy-Sobolev inequality on $\mathbb{H}^+$:** Let $\mathbb{H}^+ := \{\xi \in \mathbb{H}^n : \langle \xi, \nu\rangle > d\}$ be a half-space of the Heisenberg group. Then for all $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^+)$ and $2 \leqslant p < Q$ with $Q = 2n + 1$, there exists some $C > 0$ such that we have

$$\left(\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^p d\xi - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^p}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^p} |u|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant C \left(\int_{\mathbb{H}^+} |u|^{p^*} d\xi\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

  where $dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+) := \langle \xi, \nu\rangle - d$ is the distance from ξ to the boundary and $p^* := Qp/(Q-p)$.

This talk is mainly based on our preprint [11].

References

1. *Ancona A.* On strong barriers and an inequality of Hardy for domains $\mathbb{R}^n$ // J. London Math. Soc., **43**:3 (1986), 274-290.

2. *Avkhadiev F.G., Laptev A.* On a sharp Hardy inequality for convex domains // Around the Research of Vladimir Maz'ya I. — International Mathematical Series (New York): Springer, 2010. — 1-12.

3. *Davies E.B.* A review of Hardy inequalities. // The Maz'ya anniversary Collection. Vol 2. — Oper. Theory Adv. Appl., 1999. — 55-67.

4. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. — Pitman Research Notes in Mathematics Series: 219, 1990.

5. *Filippas S., Maz'ya V., Tertikas A.* Critical Hardy-Sobolev inequalities // J. Math. Pures Appl., **87**:1 (2007), 37-56.

6. *Frank R.L., Loss M.* The Hardy-Sobolev-Maz'ya inequalities for arbitrary domains // J. Math. Pures Appl., **97**:1 (2012), 39-54.

7. *Luan J., Yang Q.* A Hardy type inequality in the half-space on R^n and Heisenberg group // J. Math. Anal. Appl., **347**:2 (2008), 645-651.

8. *Larson S.* Geometric Hardy inequalities for the sub-elliptic Laplacian on convex domain in the Heisenberg group // Bull. Math. Sci., **6**:2 (2016), 335-352.

9. *Garofalo N.* Geometric second derivative estimates in Carnot groups and convexity // Manuscripta Math., **126**:2 (2008), 353-373.

10. *Ruzhansky M., Suragan D.* Hardy inequalities on homogeneous groups. — *Progress in Math.* Vol. 327, Birkhäuser, 2019.

11. *Ruzhansky M., Sabitbek B., Suragan D.* Geometric Hardy and Hardy-Sobolev inequalities on Heisenberg groups // https://arxiv.org/pdf/1811.07181, 2018.

EXTREMUMS OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS OF SEVERAL REAL VARIABLES

J. Šušić

jela.susic@gmail.com

UDC 51

In this paper we try to give a generalization of the usual notion of extremum of real functions to the vector-valued functions of several real variables. Our aim is that in this generalization remain valid the usual properties and relations for extremum of real functions. A considered generalization is also characterized by an equivalent generalization. Our definitions and related results are illustrated by numerous examples.

Keywords: mathematics, optimization, functions of several variables
MSC: 26B12

References

1. *Arkhipov, G.I., Sadovnichy, V.A., Chubarikov, V.N.* Lectures on mathematical analysis. Part 1. — Moscow, 1995.

2. *Arkhipov, G.I., Sadovnichy, V.A., Chubarikov, V.N.* Lectures on mathematical analysis. Part 2. — Moscow, 1997.

Jela Šušić, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro

Секция 4

Геометрия и математическая физика

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ, СВЯЗАННОГО С ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

Ш.А. Алимов, А.В. Юлдашева
sh_alimov@mail.ru, yuasv86@mail.ru

УДК 517.9

Рассматривается задача с начальными данными для интегро-дифференциального уравнения с сингулярным интегральным оператором, связанная с перидинамической моделью. Доказывается существование и единственность решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, перидинамика, спектральная теория.

On the solvability of an equation with singular kernel associated with peridynamic model

The initial value problem for integro-differential equation with singular integral operator associated with peridynamic model is considered. The existence and uniqueness of the solution is proved

Keywords: singular integral equation, peridynamics, spectral theory.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда инновационного развития Республики Узбекистан (проект № ОТ-Ф4-(36/32), № ОТ-Ф4-(88)).

Алимов Шавкат Арифджанович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана имени Улугбека (Ташкент, Узбекистан); Shavkat Alimov (National University of Uzbekistan named after Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan)

Юлдашева Асаль Викторовна, к.ф.-м.н., старший преподаватель, Национальный университет Узбекистана имени Улугбека (Ташкент, Узбекистан); Asal Yuldasheva (National University of Uzbekistan named after Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan)

Стандартная перидинамическая модель описывается системой интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \; + \; \int\limits_{\Omega} K(x,y)\,[u(x,t)-u(y,t)]\,dy \;=\; f(x,t), \quad x\in\Omega,\; t>0, \quad (1)$$

$$u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\Omega, \quad (2)$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область с кусочно-гладкой границей (см. [1]).

В данной работе рассматривается симплифицированная модель, в которой предполагается, что неизвестная функция $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$, ядро $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ и внешняя сила $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ последовательность собственных значений и собственных функций второй краевой задачи для оператора Лапласа:

$$-\Delta v(x)=\lambda v(x),\; x\in\Omega, \qquad \frac{\partial v(s)}{\partial\nu}=0,\; s\in\partial\Omega.$$

Введём в рассмотрение функцию $L(x,y)$, разложение которой в ряд по собственным функциям данной задачи имеет вид

$$L(x,y) \;=\; \sum_{\lambda_k>0} \frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\, v_k(x)\, v_k(y)\;.$$

Можно показать, что такая функция существует, бесконечно дифференцируема вне диагонали, а вблизи диагонали равна

$$L(x,y) \;\simeq\; \alpha\,\frac{\ln|x-y|}{|x-y|^{n-2}}\;.$$

Определим вне диагонали $x=y$ ядро

$$K(x,y) \;=\; -\Delta_y\, L(x,y), \quad x\in\Omega,\; y\in\Omega.$$

Формально в смысле теории распределений можно считать, что разложение по собственным функциям ядра $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(\ln\lambda_k)\, v_k(x)\, v_k(y).$$

Данное ядро имеет вблизи диагонали $x=y$ неинтегрируемую особенность вида

$$K(x,y) \;\simeq\; c_n|x-y|^{-n}$$

и удовлетворяет граничному условию

$$(\partial/\partial\nu_y)\,K(x,y) \;=\; 0, \quad x\in\Omega, \quad y\in\partial\Omega.$$

Для любых $T>0$ и $m=0,1,...$ и произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\big\{[0,T]\to B\big\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B.

Решением задачи (1)-(2) назовём функцию $u \in C^2\big\{[0,T] \to L_2(\Omega)\big\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2).

Символом $W_2^\tau(\Omega)$, где $\tau > 0$, обозначаются классические пространств Соболева (дробного) порядка τ.

Теорема 1. *Пусть $\tau > 0$ и $T > 0$. Для любых $\phi \in W_2^\tau(\Omega)$, $\psi \in W_2^\tau(\Omega)$ и $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^\tau(\Omega)\big\}$ существует и при том единственное решение задачи (1)-(2) из класса $C^2\big\{[0,T] \to L_2(\Omega)\big\}$.*

Доказательство частично опирается на рассуждения, использованные в работе [2]. Аналогичный метод применялся в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ в работе [3] и в периодическом случае в работе [4].

Литература

1. *S. A. Silling.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. // J. Mech. Phys. Solids, **48**:1 (2000), 175-209.

2. *S. Albeverio, S. A. Alimov.* On some integral equations in Hilbert space with an application to the theory of elasticity. // Integral Equations and Operator Theory, **55** (2006), 153-168.

3. *S. A. Alimov, Y. Cao and O. A. Ilhan.* On the problems of peridynamics with special convolution kernels. // J. of Integral Equations and Applications, **26**:3 (2014), 301-321.

4. *S. A. Alimov and S. Sheraliev.* On the solvability of the singular equation of peridynamics. // Complex Variables and Eliptic Equations, **64**:5 (2019), 873-887.

КОНИЧЕСКИЕ ЛАГРАНЖЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.И. Аллилуева

esina_anna@list.ru

УДК 514.763.8

Обсуждаются коротоковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений релятивистской газовой динамики. Такие решения оказываются связанными с коническими лагранжевыми поверхностями в кокасательном расслоении к пространству Минковского.

Ключевые слова: лагранжевы поверхности, релятивистская газовая динамика

Conical Lagrangian surfaces and asymptotic solutions of equations of relativistic gas dynamics

Short-wave asymptotic solutions of the linearized equations of relativistic gas dynamics are discussed. These solutions turn out to be connected with conical Lagrangian surfaces in the cotangent bundle to Minkowski space.

Keywords: Lagrangian surfaces, relativistic gas dynamics

Аллилуева Анна Ивановна, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт Проблем Механики РАН (Москва, Россия); Anna Allilueva (Researcher, Insitute for Promlems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

Обсуждаются коротоковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений релятивистской газовой динамики. Такие решения оказываются связанными с коническими лагранжевыми поверхностями в касательном расслоении к пространству Минковского. Решение представляется в виде трех мод; одна отвечает двукратному, и две — простым характеристическим числам старшего символа оператора.Описаны лагранжевы многообразия, соответствующие этим модам; показано, что одно из них гладкое, а второе имеет коническую особенность. Описана старшая часть асимптотики; для двукратной моды соответствующий вектор удовлетворяет линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль характеристик, в то время как для простых мод он вычисляется явно и содержит геометрическую фазу. Наличие этой фазы (т.е. нетривиальной связности в одномерном векторном расслоении над лагранжевой поверхностью) приводит, вообще говоря, к росту начальных возмущений со временем.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ СУБГЛАВНЫМ СИМВОЛОМ

А.Ю. Аникин, Й. Брюнинг, С.Б. Куксин

anikin83@inbox.ru, bruening@math.hu.de, kuksin@math.polytechnique.fr

Рассмотрена стационарная задача для дифференциального или псевдодифференциального уравнения с квазиклассическим малым параметром. Предполагается, что главный символ вещественен и определяет интегрируемую гамильтонову систему, а субглавный символ, вообще говоря, нарушает интегрируемость. Предложен хорошо алгоритмизуемый метод нахождения асимптотических собственных значений и собственных функций (квазимод). Обсуждаются приложения к уравнению Дирака для графена, а также к уравнению Шредингера для двух слабосвязанных нелинейных осцилляторов

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-51-150006, 18-31-00273).

Аникин Анатолий Юрьевич, к.ф.-м.н., ИПМех РАН им А.Ю. Ишлинского (Москва, Россия); Anikin Anatoly (Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia)

Брюнинг Йохен, профессор, Университет Гумбольдта, (Берлин, Германия); Brüning Jochen (Humboldt Universität zu Berlin, Berlin, Germany)

Куксин Сергей Борисович; Kuksin Sergey, (Senior Researcher at Institut Mathématiques de Jussieu of the Paris Diderot University (Paris VII), Paris France)

Semi-classical asymptotics of statinary solutions to pseudodifferential equations with non-trivial subprincipal symbol

We consider a stationary problem for differential or pseudodifferential equation with semi-classical small parameter. It is assumed that the principal symbol is real and defines an integrable Hamiltonian system. The subprincipal symbol generically destroys the integrability. A method for calculating asymptotic eigenvalues and eigenfunctions (quasi-modes) is proposed. This method can be algorithmized and used for practical numerical calculations. We discusse the applications to the Dirac equation for graphene and Schrödinger equation for two weakly coupled non-linear oscillators

Keywords:

Соавтором этого сообщения является также проф. С.Ю. Доброхотов.

ИЕРАРХИИИ МОДЕЛЕЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

С.В. Богомолов

bogomo@cs.msu.su

УДК 517.518

Цепочка сквозных, многомасштабных микро - мезо - макро моделей возникает в соответствии с разными значениями малого параметра - числа Кнудсена. В результате получаются стохастические и неслучайные макроскопические уравнения, отличающиеся от системы уравнений Навье - Стокса, а также от систем квазигидродинамики. Главной особенностью этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения. Акцент ставится на ясности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому.

Ключевые слова: уравнения Больцмана, Колмогорова - Фоккера - Планка, Навье - Стокса, магнитной гидродинамики и квазигазодинамики, сила Лоренца; случайные процессы, СДУ по пуассоновской и винеровской мерам, метод частиц.

Богомолов Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Bogomolov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Hierarchies of models in mathematical physics

A chain of end-to-end, multiscale micro - meso - macro models arises in accordance with different values ??of a small parameter - the Knudsen number. The result is stochastic and non-random macroscopic equations that differ from the Navier – Stokes system of equations, as well as from quasi-hydrodynamic systems. The main feature of this conclusion is a more accurate velocity averaging due to the analytical solution of stochastic differential equations (SDE). This approach differs significantly from the traditional one, which uses not the random process itself, but its distribution function. Emphasis is placed on clarity of assumptions when moving from one level of detail to another.

Keywords: Boltzmann, Kolmogorov - Fokker - Planck, Navier – Stokes, magnetohydrodynamic and quasi - gasdynamic equations, Lorentz force; random processes, stochastic differential equations with respect to Poisson and Wiener measures, particle method.

Микро

Прежде всего, следуя А.В. Скороходу и А.А. Арсеньеву, положения и скорости частиц будем считать случайными величинами, что совершенно оправдано по физическим соображениям. **Столкновения** частиц (твёрдых сфер диаметра D) порождают процессы диффузии, вязкости и теплопроводности.

Стохастическая Молекулярная Динамика

$$dx_i(t) = v_i(t)dt,$$

$$dv_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} f(v_i, v_j, \omega) p_{ij}(d\omega \times dt),$$

$$\lambda_{ij} = N_{ij}^{collisions}/N, \quad N_{ij}^{collisions} = N_{ij}^{reached}, \ i = 1, ..., N,$$

где $x_i(t)$, положения, и $v_i(t)$, скорости частиц, являются 3D случайными процессами, $f(\cdot)$ - функция скачка, или приращение скорости v_i из-за столкновения с частицей скорости v_j (для твёрдых сфер $f(v_i, v_j, \omega) = \omega(\omega, v_i - v_j)$, ω - единичный вектор, направленный между центрами частиц), p_{ij} - считающие независимые пуассоновские меры (с интенсивностями λ_{ij}), которые указывают на факт столкновения или его отсутствие. Подсчёт числа столкновений - совершенно такой же, как и при выводе уравнения Больцмана. Здесь же отражена идея о том, что число ударивших по i-частице j-частиц равно их числу $N_{ij}^{reached}$, успевших до неё долететь за время dt.

Таким образом, мы построили исходную ступень нашей иерархии. С вычислительной точки зрения, определение $N_{ij}^{reached}$ на каждом шаге по времени - сложная алгоритмическая задача. Как и в кинетической теории, она преодолевается переходом к сплошной среде в фазовом пространстве. Но только для вычисления λ_{ij}. СДУ по скачкообразной мере остаётся прежней. Возникает новая ступенька в иерархии.

Микроскопическая модель получится, если для вычисления $N_{ij}^{reached}$ ввести "функцию распределения"$F(\cdot)$, как её принято называть в физической литературе, или плотность распределения, по терминологии теории вероятности, которая определяется как обобщённая случайная функция:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{Kn}\frac{1}{2}F(x_i, \upsilon_j, t)\Delta x_i \Delta \upsilon_j,$$
$$\forall \varphi(x,\upsilon) : \int \varphi(x,\upsilon)F(x,\upsilon,t)dxdv = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i(t),\upsilon_i(t))q_i,$$

$F(\cdot)$ - плотность меры, порождённой процессом $(x(t), v(t))$, $\Delta x_i = |(\omega, \upsilon_i - \upsilon_j)|dtD^2 d\omega$ – объём цилиндра для вычисления λ_{ij}. Здесь мы перешли к безразмерным величинам. $Kn(x,t) = 1/D^2 n_* x_*$ – число Кнудсена, параметр обезразмеривания. В областях с большими Kn наша модель может быть записана (здесь мы делать этого не будем) в виде уравнения Больцмана (с учётом флуктуаций) для F, которая случайна так же, как и λ_{ij}. Это – главное отличие от традиционной кинетической теории.

Мезо

При умеренных числах Кнудсена следующая ступень нашей иерархии между молекулярным описанием и представлением о газе как о сплошной среде выглядит следующим образом:

$$dx(t) = v(t)dt,$$
$$dv(t) = -\frac{1}{Kn}a(c)(v(t) - V)dt + \frac{1}{\sqrt{Kn}}\sigma(c)dw(t),$$

где c - модуль безразмерной тепловой скорости $\mathbf{c} \equiv v(t) - V$, $V(x,t)$ - макроскопическая скорость.

Эта модель получена благодаря замене нашего скачкообразного процесса диффузионным, определяемым первыми двумя моментами процесса исходного. Её можно интерпретировать как описание движения частицы в среднем самосогласованном поле. Реализации этого процесса (набор траекторий) порождают меру, плотность $F(x,v,t)$ которой удовлетворяет уравнению типа уравнения Колмогорова - Фоккера - Планка в фазовом пространстве.

Макро

Более точные, чем система уравнений Навье – Стокса, уравнения газовой динамики, вытекают из сохранения как можно большей микроскопической информации. Выразим $v(t)$ через $x(t)$ из второго уравнения и подставим в первое, получив тем самым уравнение только относительно $x(t)$:

$$\begin{cases} dx(t) = Vdt + \sqrt{Kn}\widetilde{\sigma}\left(dw + d\tilde{w}\right), \\ dv(t) = -\dfrac{1}{Kn}a(c)(v(t) - V)dt + \dfrac{1}{\sqrt{Kn}}\sigma(c)dw, \end{cases}$$

где v понимается как $v(x)$. Отсюда следует система макроскопических уравнений. Напишем первое из них. Определим стохастическую эмпирическую

меру $\mu_t(dx)$ соотношением:

$$\forall \psi \in C_b^{(2)}(\mathbf{R}^3), \forall D \in \mathbf{R}^3 : \int_D \psi(x)\mu_t(dx) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \psi(x_l(t))\chi(x_l(t) \in D).$$

Её плотность $\rho(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$d\rho = \left[-\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i\rho\right) + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(Kn\ \widetilde{\sigma}_{ij}^2\rho\right) \right] dt$$
$$- \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{Kn}\ \widetilde{\sigma}_{ij}\rho\right)\left(dw_j + d\tilde{w}_j\right),$$

(которое можно рассматривать как естественное описание турбулентных явлений), а усреднённая по времени $\overline{\rho}(x,t)$ – детерминированному уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{V_i\rho}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(Kn\ \overline{\widetilde{\sigma}_{ij}^2\rho}\right),$$

справедливому для малых чисел Кнудсена. Присутствие правой части отражает «след», оставляемый тепловым движением молекул, или самодиффузию.

Магнитогидродинамическая иерархия строится схожим образом введением в исходную модель сил Кулона и Лоренца.

Тем самым мы приходим к набору уравнений, стохастических и неслучайных, покрывающих большую часть математической физики. При этом нам не требуется никаких коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии, только - диаметр молекулы.

Литература

1. *Богомолов С. В., Есикова Н.Б., Кувшинников А.Е.* Микро – макро модели Фоккера — Планка — Колмогорова для газа из твёрдых сфер // Матем. моделирование, **28**:2(2016), 65–85; //Math. Models Comput. Simul, **8**:5(2016), 533–547.

2. *Bogomolov S.V., Esikova N. B., Kuvshinnikov A. E., Smirnov P. N.* On gas dynamic hierarchy // In: The Seventh Conference on Finite Difference Methods.FDM 2018. — LNCS. Springer, 2019. — Vol. 11386. — 1–8.

О РАВНОМЕРНО ПЕРИСТЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАВНОМЕРНО СОВЕРШЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А.А. Борубаев
fiztech-07@mail.ru

УДК 515.123

В данной работе рассматриваются равномерно перистые и равномерно совершенные отображения.

Ключевые слова: равномерные пространства, перистые пространства, совершенные отображения

On uniformly p–spaces and uniformly perfect mappings

In this paper, consider uniform p–spaces and uniform perfect mappings.

Keywords: uniform spaces, p–spaces, uniform perfect mappings

Чешский математик З.Фролик в 1960 году [1] доказал следующую теорему:

Теорема (З. Фролик [1]). *Полные по Чеху паракомпакты и только они отображаются на полные метрические пространства посредством совершенных отображений.*

На симпозиуме в Праге (1961 г.) П.С. Александровым была выдвинута гипотеза: паракомпакты – это совершенные прообразы метрических пространств [2]. Однако эта гипотеза не оправдалась: Пространства Зоргенфрея [3] является паракомпактным пространством [2], но их декартовый квадрат не является паракомпактным пространством [2]. Произведение совершенных прообразов метрических пространств является совершенным прообразом произведения сомножителей, метризуемого пространства, и потому паракомпакт. Это является противоречием.

Охарактеризовать паракомпакты, являющиеся совершенными прообразами метрических пространств позволило ввести понятие перистого пространства, введенного А.В. Архангельским [2].

Теорема.(А.В. Архангельский [2]). *Для того чтобы пространство X можно было совершенно отобразить на некоторое метрическое пространство, необходимо и достаточно, чтобы X было перистым паракомпактом.*

Настоящий доклад посвящен равномерным аналогам перистых пространств и совершенных отображений.

Определение 1 ([5]). Равномерное пространство (X, U) называется равномерно τ–перистым, где $\aleph_0 \leqslant \tau \leqslant W(U)$, если существует псевдоравномерность $V \subset U$ удовлетворяющее следующим условиям:

1.$W(U) \leqslant \tau$

2.$\cup\{\alpha(x) : \alpha \in V\} = K_x$–компактно для любого $x \in X$.

Борубаев Алтай Асылканович, академик, Институт математики Национальной академии Кыргызской Республики (Бишкек, Кыргызская Республика); Altay Borubaev (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic)

3. Система $\{\alpha(K_x : \alpha \in V\}$–является фундаментальной системой компакта K_x в (X, τ_U) для каждого $x \in X$.

Равномерно $\aleph_0$–перистые пространства называется *равномерно перистыми.*

Для формулировки полного равномерного аналога вышеизложенной теоремы А.В. Архангельского о перистых паракомпактах, нам понадобится равномерный аналог совершенного отображения. Класс совершенных отображений был введен И.А. Вайнштейном [3].

Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерно непрерывное отображение равномерного пространство (X, U) в равномерное пространство (Y, V). Псевдоравномерность $U_f \subset U$ называется *базой равномерно непрерывного отображения* f, если для любого $\alpha \in U$ существуют такие $\beta \in V$ и $\gamma \in U_f$, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в покрытие $\alpha \in U$. Другими словами, псевдоравномерность $U_f \subset U$ называется *базой отображения* f , если $v = sup\{U_f, f^{-1}V\}$, где $f^{-1}V = \{\alpha \in U$: существует $\beta \in V$ такое, что $f^{-1}\beta > \alpha\}$.

У каждого равномерно непрерывного отображения существует, вообще говоря, много баз.

Определение 2 ([5]). Равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) называется *предкомпактным*, если отображение f имеет предкомпактную базу U_f.

Определение 3 ([5]). Равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ называется *равномерно совершенным*, если оно одновременно предкомпактно и совершенно.

Пусть $Unif$ — категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Теперь в категории $Unif$ рассмотрим следующие квадрат:

$$\begin{array}{ccc} (X,U) & \stackrel{i_X}{\to} & (sX, sU) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s(f)} \\ (Y,V) & \stackrel{i_Y}{\to} & (sY, sV), \end{array} \tag{1}$$

где (sX, sU) и (sY, sV) — самуэловские компактные расширения равномерных пространств (X, U) и (Y, V) соответственно, $s(f)$ — продолжение отображения f,а i_x и i_y–равномерно гомеоморфные вложения. Квадрат коммутативен, но не всегда декартов в категории $Unif$.

Следующая теорема дает категорную характеристику равномерно совершенных отображений.

Теорема 1 ([5]). *Отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V) равномерно совершенно тогда и только тогда, когда квадрат (1) декартов в категории $Unif$.*

Роль равномерно совершенных отображений среди всех равномерно непрерывных отображений, в какой-то степени вскрывается следующей теоремой:

Теорема 2 ([5]). *Пусть* $f : (X,U) \to (Y,V)$ *равномерно совершенное отображение равномерного пространства* (X,U) *на равномерное пространство* (Y,V). *Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняется, как в сторону образа, так и в сторону прообраза:*

1. полнота и индекс полноты $\leqslant \tau$;

2. предкомпактность;

3. компактность;

4. τ*-ограниченность;*

5. равномерная локальная компактность;

6. равномерная полнота по Чеху;

7. равномерная R*-паракомпактность;*

Определение 4. Пусть (X,U) является равномерно τ–перистым пространством, а $V \subset U$ - псевдоравномерность, удовлетворяющая условиям 1)-3) в определении 1. Равномерное пространство (X,U) называется *равномерно* A_τ*-перистым*, если существует такая предкомпактная псевдоравномерность $\mathcal{R} \subset U$, что $U = sup\{\mathcal{R}, U\}$.

Теорема 3. *Для того чтобы равномерное пространство* (X,U) *можно было равномерно совершенно отобразить на некоторое равномерное пространство* (Y,V) *веса* $W(U) \leqslant \tau$, *необходимо и достаточно, чтобы* (X,U) *было равномерно* A_τ*–перистым пространством.*

Следствие. *Для того чтобы равномерное пространство* (X,U) *можно было равномерно совершенно отобразить на равномерное метрическое пространство, необходимо и достаточно, чтобы равномерное пространство* (X,U) *было равномерно* $A_{\aleph_0}$ *перистым.*

Замечание. Аналогично определяются равномерные аналоги полных в смысле Чеха пространств и доказывается равномерный аналог выше приведенной теоремы З. Фролика. В 1963 году японский математик К.Морита [4] ввел класс M-пространств и построил их теорию. В классе паракомпактов M-пространства совпадают с классом перистых пространств. M-пространства в точности квазисовершенные прообразы метрических пространств. Построены равномерные аналоги теории M–пространств [5].

Литература

1. *Frolik Z.* On the topological product of paracompact spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., **8** (1960), 747-750.

2. *Архангельский А.В.* Об одном классе пространств, содержащим все метрические и все локально бикомпактные пространства// Матем. сб. **67**:1 (1965), 55-85.

3. *Вайнштейн И.А.* О замкнутых отображениях метрических пространств, ДАН СССР, **57** (1947), 319-321.

4. *Morita K.* A survey of the theory of M-spaces // General Topology and Appl., **1** (1971), 49-55.

5. *Борубаев А.А.* Равномерная топология. — Бишкек: Илим, 2013. — 337 с.

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ЛАПЛАСИАНОВ ЛЕВИ И ИНСТАНТОНЫ НА МНОГООБРАЗИИ

Б.О. Волков

borisvolkov1986@gmail.com

УДК 517.98

Мы вводим семейство лапласианов Леви на бесконечномерном многообразии, параметризованное выбором кривой в группе $SO(4)$. Мы описываем инстантоны на четырехмерном многообразии как решения уравнений Лапласа для таких лапласианов Леви.

Ключевые слова: уравнения Янга-Миллса, инстантоны, лапласиан Леви

Laplace equations for Levy Laplacians and instantons on manifold

We introduce the family of Levy Laplacians on an infinite dimensional manifold parameterized by the choice of a curve in the group $SO(4)$. We describe instantons on a four-dimensional manifold as solutions of the Laplace equations for such Levy Laplacians.

Keywords: Yang-Mills equations, instantons, Levy Laplacian

В работе [1] Л. Аккарди, П. Гибилиско и И.В. Воловича был введен аналог лапласиана Леви (см. [2]), который также называется лапласианом Леви и для которого была доказана следующая теорема. Связность в векторном расслоении является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви (см. также [3,4]). Мы вводим семейство лапласианов типа Леви на бесконечномерном многообразии, параметризованных выбором кривой в группе $SO(4)$. Мы покажем, что связность является инстантоном (решением уравнений автодуальности Янга-Миллса) тогда и только, когда порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для трех бесконечномерных лапласианов из этого семейства. Таким образом, три нелинейных дифференциальных уравнения на связность оказываются эквивалентными трем линейным бесконечномерным дифференциальным уравнениям на параллельный перенос.

Пусть M — это гладкое ориентируемое риманово четырехмерное многообразие. Пусть $E = E(M, \pi, \mathbb{C}^N, SU(N))$ — векторное расслоение над M со структурной группой $SU(N)$ и проекцией $\pi\colon E \to M$. Слой над $x \in M$ — это $E_x = \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^N$. Пусть A — связность в этом расслоении и F — тензор кривизны, порожденный этой связностью. Инстантоны на многообразии M — это связности, которые являются решениями уравнений автодуальности Янга-Миллса:

$$F = *F,$$

Волков Борис Олегович, к.ф.-м.н., доцент, МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Boris Volkov (Bauman Moscow Technical University, Moscow, Russia)

где $*$ — оператор Ходжа. Если связность является инстантоном, она является и решением уравнений Янга-Миллса:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Пусть $H^1_m([0,1],M)$ — гильбертово многообразие H^1-кривых на M с началом в точке $m \in M$ и пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение над $H^1_m([0,1],M)$, слоем которого над $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ является пространство всех линейных операторов из E_m в $E_{\gamma(1)}$. Параллельный перенос U^A, порожденный связностью A в E, является гладким сечением в расслоении $\mathcal{E}$.

Пусть

$$H^1_0 = \{\gamma \in H^1([0,1],\mathbb{R}^d)\colon \gamma(0) = 0\}$$

и $H^1_{0,0} = \{\gamma \in H^1_0\colon \gamma(1) = 0\}$. Касательное расслоение над $H^1_m([0,1],M)$ является тривиальным. С помощью параллельного переноса, порожденного связностью Леви-Чивиты на M, можно канонически отождествить касательное пространство в каждой $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ с пространством

$$H^1_0([0,1],T_mM) \cong H^1_0.$$

Тогда линейный функционал S на $H^1_{0,0}$ определяет дифференциальный оператор второго порядка $D^{2,S}$ на гладких сечениях в $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$D^{2,S}f(\gamma) = S(D^2_{H^1_{0,0}}f(\gamma)),$$

где $D^2_{H^1_{0,0}}f$ — вторая производная сечения f вдоль пространства $H^1_{0,0}$.

Пусть пространство T^2_{AGV} — это пространство всех непрерывных билинейных функционалов на $H^1_{0,0} \times H^1_{0,0}$, имеющих вид:

$$\begin{aligned} Q(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 Q^V(t,s) < u(t), v(s) > dtds + \\ + \int_0^1 Q^L(t) < u(t), v(t) > dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^1 Q^S(t) < \dot{u}(t), v(t) > dt + \frac{1}{2}\int_0^1 Q^S(t) < \dot{v}(t), u(t) > dt, \end{aligned}$$

где $Q^V \in L_2([0,1]\times[0,1])$, $Q^L \in L_1([0,1])$, $Q^S \in L_\infty([0,1])$, $Q^L(t)$ — симметричный тензор и $Q^S(t)$ — антисимметричный тензор для почти всех $t \in [0,1]$. (Фактически пространство тензоров T^2_{AGV} было введено в работе [1]. Интегральное ядро $Q^V(\cdot,\cdot)$ называется ядром Вольтерры, ядро $Q^L(\cdot)$ называется ядром Леви и $Q^S(\cdot)$ называется сингулярным ядром.)

След Леви tr_L^{AGV} действует на $Q \in T^2_{AGV}$ по формуле

$$tr_L^{AGV}Q = \int_0^1 tr\, Q^L(t)dt.$$

Лапласиан Леви Δ_L, введенный в работе [3], —это дифференциальный оператор $D^{2,tr_L^{AGV}}$ на пространстве сечений в $\mathcal{E}$. Если базовое многообразие —

это $\mathbb{R}^4$, то этот оператор — лапласиан Леви, введенный в [1]. Подход к определению лапласианов Леви с помощью следов Леви восходит к работе [5] (см. [4]).

Группа $SO(4)$ в отличии от других $SO(n)$ не является простой. Пусть S^3_L и S^3_R — нормальные подгруппы Ли группы $SO(4)$, состоящие соответственно из вещественных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

где $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Пусть $Lie(S^3_L)$ и $Lie(S^3_R)$ алгебры Ли этих групп.

Пусть $S \in C^1([0,1], SO(4))$. Такая кривая порождает унитарный оператор V_S в $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$, определенный по формуле

$$(V_S u)(t) = S(t)u(t).$$

Пространство $H^1_{0,0}([0,1],\mathbb{R}^4)$ инвариантно относительно действия V_S. Поэтому кривая $S \in C^1([0,1], SO(4))$ порождает также линейный функционал tr^S_L на T^2_{AGV} по формуле

$$tr^S_L R = tr^{AGV}_L((V_S)^* R V_S),\ R \in T^2_{AGV}$$

Лапласиан Леви Δ^S_L, порожденный кривой $S \in C^1([0,1], SO(4))$, — это дифференциальный оператор D^{2,tr^S_L} на пространстве сечений в $\mathcal{E}$.

Пусть $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\}$ — это базис в $Lie(S^3_R)$ и $S_i(t) = e^{t\mathbf{e_i}}$ для $i \in \{1,2,3\}$.

Теорема 1. *Следующие условия равносильны:*

1. *связность A является инстантоном;*
2. $\Delta^{S_i}_L U^A = 0$ *для* $i \in \{1,2,3\}$.

Верна аналогичная теорема для лапласианов Леви, порожденных кривыми в S^3_L, и антиинстантонов (решений уравнений антиавтодуальности $F = - * F$).

В работе автора [6] была получена похожая теорема для случая расслоения над $\mathbb{R}^4$. В этом случае уравнения автодуальности эквивалентны одному уравнению Лапласа для лапласиана Леви, порожденного некоторой кривой в $SO(4)$.

Литература

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V.* Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy Laplacian // Russ. J. Math. Phys., **2**:2 (1994), 235-250.

2. *Levy P.* Problemes concrets d'analyse fonctionnelle. — Gautier-Villars, Paris, 1951.

3. *Leandre R., Volovich I.V* The Stochastic Levy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **4**:2 (2001), 161–172.

4. *Volkov B.O.* Levy Differential Operators and Gauge Invariant Equations for Dirac and Higgs Fields // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **22**:1 (2019), 1950001.

5. *Accardi L., Smolianov O.G.* On Laplacians and traces // Conf. Semin. Mat. Univ. Bari, 250, 1993 — 1-25.

6. *Volkov B.O.* Levy Laplacians and instantons // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **290**:1 (2015), 210–222.

О ТОПОЛОГИИ МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫЕ КАСКАДЫ С РЕГУЛЯРНОЙ И ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

В.З. Гринес

vgrines@hse.ru

УДК 517.938

Доклад посвящен описанию топологической структуры ориентируемых замкнутых многообразий M^n ($n \geqslant 3$), являющихся фазовыми пространствами структурно устойчивых дискретные динамических систем (каскадов), обладающих определенными свойствами. Кроме того, приводятся результаты о топологической классификации каскадов, принадлежащих рассмотренным в докладе классам.

Ключевые слова: структурная устойчивость, каскады Морса-Смейла, базисные множества, топологическая классификация

On the topology of manifolds that admit structurally stable cascades with regular and chaotic dynamics

The report is devoted to the description of the topological structure of orientable closed manifolds M^n ($n \geqslant 3$), which are phase spaces of structurally stable discrete dynamic systems (cascades) with certain properties. In addition, results on the topological classification of cascades belonging to the classes considered in the report will be presented.

Keywords: structural stability, Morse-Smale cascades, basic sets, topological classification

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01041) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Гринес Вячеслав Зигмундович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Viacheslav Grines (NRU HSE, Nizhnii Novgorod, Russia)

Хорошо известно, что любое многообразие допускает каскад Морса-Смейла, то есть структурно устойчивый каскад с конечным неблуждающим множеством. Однако требование отсутствия пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек таких каскадов ограничивает класс допустимых многообразий, топология которых в таком случае может быть описана через соотношение между числами узловых и седловых периодических точек каскада. Аналогичным образом может быть описана топология многообразий градиентно-подобных каскадов, которые являются каскадами Морса-Смейла, не допускающими гетероклинических орбит. Топология многообразий структурно устойчивых каскадов с хаотической динамикой весьма тесно связана с размерностью нетривиальных (отличных от периодических орбит) базисных множеств.

В докладе будет установлена топологическая структура замкнутых ориентируемых многообразий, допускающих структурно устойчивые каскады следующих типов:

- каскады Морса-Смейла для которых устойчивые и неустойчивые многообразия седловых периодических точек, индекс Морса которых равен 1 или $n-1$, не пересекаются;
- градиентно-подобные каскады в предположении отсутствия гетероклинических орбит;
- каскады, неблуждающие множества которых содержат базисное множество, размерность которого совпадает с размерностью несущего многообразия;
- каскады, неблуждающие множества которых содержат ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один;
- каскады трехмерных ориентируемых замкнутых многообразий, неблуждающие множества которых состоят из двумерных базисных множеств.

Будут также приведены результаты о топологической классификации каскадов, принадлежащих рассмотренным в докладе классам.

Ознакомиться с основными понятиями и результатами, изложенными в докладе, можно в книге [1], обзорных статьях [2], [3] и статье [4].

Литература

1. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds // Switzerland: Springer, 2016. 295 P.

2. *Grines V., Zhuzhoma E., Pochinka O.* Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 225. No. 2. P. 195-219.

3. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Починка О. В.* Классификация систем Морса-Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Успехи математических наук. 2019, 74:1(445), 41–116.

4. *Grines V., Pochinka O., Левченко Ю., Medvedev V.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. 2015. Vol. 28. P. 4081-4102.

О ВКЛЮЧЕНИИ В ПОТОК КАСКАДОВ МОРСА – СМЕЙЛА И ИХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

Е.Я. Гуревич
egurevich@hse.ru

УДК 517.938

Дж. Палис получил необходимые условия включения диффеомофизма Морса – Смейла на замкнутом многообразии M^n размерности n в топологический поток и показал, что эти условия являются также достаточными для случая $n = 2$. В случае $n = 3$ замыкания сепаратрис седловых периодических точек могут быть дико вложенными, что является дополнительным препятствием к включению таких каскадов в потоки. В докладе показывается, что подобных препятствий не возникает для диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n, $n \geqslant 4$, и условия Палиса для таких диффеоморфизмов снова являются достаточными.

Ключевые слова: включение в топологический поток, системы Морса-Смейла, топологическая классификация

Om embedding in topological flows and topological classification of Morse – Smale cascades

J. Palis found necessary conditions for a Morse – Smale diffeomorphism on a closed n-dimensional manifold M^n to embed into a topological flow and proved that these conditions are also sufficient for $n = 2$. For the case $n = 3$ a possibility of wild embedding of closures of separatrices of saddles is an additional obstacle for Morse-Smale cascades to embed into topological flows. We show that there are no such obstructions for Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection given on the sphere S^n, $n \geqslant 4$, and Palis's conditions again are sufficient for such diffeomorphisms.

Keywords: embedding cascades in topological flows, Morse – Smale systems, topological classification

Один из показателей адекватности численного моделирования решений автономной системы дифференциальных уравнений состоит в топологической сопряженности полученной дискретной динамической системы сдвигу на единицу времени исходного потока. В связи с этим естественно возникает вопрос о необходимых и достаточных условиях включения каскада в поток.

В докладе этот вопрос рассматривается в отношении каскадов Морса-Смейла – структурно-устойчивых каскадов с конечным неблуждающим множеством.

Напомним, что диффеоморфизм f, заданный на замкнутом многообразии M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01041) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Гуревич Елена Яковлевна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Elena Gurevich (NRU HSE, Nizhnii Novgorod, Russia)

точек; и для любых двух точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W_p^s точки p и неустойчивого многообразия W_q^u точки q трансверсально.

В работе Дж. Палиса [1] сформулированы следующие необходимые условия включения диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ в топологических поток, которые мы будем называть *условиями Палиса*:
1) неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек;
2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;
3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.

Согласно [1], в случае $n = 2$ эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными. В [2] построены примеры диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерной сфере, удовлетворяющих условиям Палиса, но не включающихся в топологический поток, и получены необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на 3-многообразиях. Дополнительное препятствие к включению таких диффеоморфизмов в топологический поток связано с возможностью нетривиального вложения сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие. В докладе устанавливается, что для класса $G(S^n)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n \geqslant 4$ и удовлетворяющих условиям Палиса, подобных препятствий не существует, и верна следующая теорема ([3]).

Теорема. *Любой диффеоморфизм $f \in G(S^n)$, $n \geqslant 4$, включается в топологический поток.*

Возможность включения диффеомофизмов из класса $G(S^n)$ в топологический поток позволяет получить их полную топологическую классификацию в комбинаторных терминах [4], что контрастирует со случаем $n = 3$.

Литература

1. *Palis J.* On Morse-Smale dynamical systems // Topology, **8**:4 (1969), 385-404.

2. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С., Починка О. В.* О включении диффеоморфизмов Морса – Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Математический сборник, **203**:12 (2012), 81-104.

3. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On embedding of multidimensional Morse – Smale diffeomorphisms in topological flows // MMJ, to appear.

4. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* Комбинаторный инвариант для каскадов Морса – Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geqslant 4$ // Математические заметки, **105**:1 (2019), 136-141.

БИЛЛИАРДЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ МОДЕЛИРУЮТ РЯД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В.А. Кибкало

slava.kibkalo@gmail.com

УДК 517.938.5

Будет показано, что комбинация двух обобщений классического интегрируемого биллиарда в эллипсе позволяет локально промоделировать слоение Лиувилля гладких интегрируемых систем в четырехмерной окрестности критических точек ранга 0 типов центр-центр, центр-седло и седло-седло. Для каждой особенности типа центр-седло алгоритмически построена подходящая биллиардная книжка с потенциалом, полулокально моделирующая слоение этой особенности.

Ключевые слова: математика, гамильтоновы системы, особенности, интегрируемые биллиарды, топологическая эквивалентность

Billiad with a potential can model some classes of 4-dimensional singularities of integrable systems

We show that combination of two different generalizations of the classical elliptic billiard system helps to model *locally* Liouville foliations of smooth integrable Hamiltonian systems in a 4-dimensional neighbourhood of a singular point of the center-center, center-saddle or saddle-saddle types. For any singularity of center-saddle type we construct an appropriate billiard system that *semi-locally* models this singularity.

Keywords: mathematics, Hamiltonian systems, singularities, integrable billiards, topological equivalence

1. В изучении топологии, динамики и особенностей интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) с двумя степенями свободы на гладких многообразиях в последние десятилетия был достигнут значительный прогресс. В работах А.Т. Фоменко и его школы (подробно описанных в [1]) были, в том числе, построены инварианты (молекулы с оснащениями), классифицирующие их слоения на неособых трехмерных изоэнергетических многообразиях с точностью до лиувиллевой (послойной диффеоморфности) и траекторной эквивалентности, классифицированы слоения Лиувилля в окрестности слоя с невырожденными точками падения ранга отображения момента.

В последние годы активно исследовались системы интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусными квадриками семейства (1).

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=1. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Ведущие научные школы" (грант НШ-6399.2018.1 соглашение № 075-02-2018-867).

Кибкало Владислав Александрович, м.н.с., аспирант МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kibkalo Vladislav (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Фазовые многообразия таких систем и их обобщений (топологических биллиардов [2], биллиардных книжек [3], [4] или биллиарда в эллипсе с упругим потенциалом, описанного в [5]) вообще говоря, кусочно-гладкие.

При этом топологические перестройки слоев и особые периодические траектории биллиарда оказываются "хорошо видны" в проекции на биллиардн стол, т.е. их топология и динамика нагляднее, чем у систем механики.

2. А.Т. Фоменко был поставлен вопрос о моделировании топологии слоения Лиувилля и динамики гладких интегрируемых систем с помощью биллиардов и их обобщений. В докладе обсуждается топологическое моделирование, т.е. построение биллиардов со слоением, послойно гомеоморфным искомому слоению гладкой системы. Роль гамильтонова поля на критическом множестве играет вектор скорости на особом множестве биллиарда.

Особым множеством интегрируемого биллиарда назовем множество *особых точек* — точек фазового пространства, в которых слой (связная компонента совместного уровня энергии и интеграла) не является двумерной поверхностью (т.е. падает его размерность, или нет локальной гомеоморфности диску). *Особым слоем*, назовем слой, содержащий особые точки.

Под *локальным* и *полулокальным* слоением понимаем класс послойно гомеоморфных слоений в окрестности, соответственно, выбранной особой точки или содержащего ее особого слоя (во втором случае она обязана все близкие к нему слои целиком). Отметим, что в обоих случаях значения энергии и интеграла во всех точках моделируемого множества близки, и множество пар значений открыто в $\mathbb{R}^2$.

Для каждой трехмерной невырожденной особенности ранга 1 (боттовского 3-атома гладкой ИГС, [1]), алгоритмически построена [3], [4] *биллиардая книжка* (локально-плоский стол, склеенный из нескольких плоских биллиардов по некоторым общим граничным дугам, на которых стоят перестановки), слоени которой на любом неособом трехмерном уровне энергии имеет один седловой слой и послойно гомеоморфно искомому атому. Т.е. трехмерные слоения ранга 1 полулокально моделируются биллиардами.

Ряд новых результатов и актуальных вопросов об интегрируемых биллиардах кратко описан в недавнем обзоре В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко, посвященном восьмидесятилетию академика В.А. Садовничего. В числе был вопрос о возможности моделировать слоения особенностей ранга 0.

3. В докладе рассмотрим следующий класс *существенно четырехмерных* особенностей $V^4 \subset M^4$: такое множество должно

- являться кусочно-гладким многообразием со слоением Лиувилля,
- являться открытым объединением слоев этого слоения,
- иметь значения первых интегралов, близкие на всех этих слоях,
- состоять из слоев, гомеоморфных или тору T^2, или особому слою 3-атома, или слою с невырожденной особой точкой ранга 0,
- не является произведением 3-атома на интервал.

Замечание 1. В такой особенности биллиарда может и не быть слоев, гомеоморфным слоям с точками ранга 0 — все ее слои будут гомеоморфны торам или особым слоям боттовских 3-атомов, см. раздел 4.

Замечание 2. Определение выше допускает не боттовские 3-атомы.

Склеим по границе два элементарных стола — одинаковые области, ограниченные эллипсом ("одна над другой"). На полученном столе $\delta_\alpha(2A_2)$ (см. [2]) введем отталкивающий потенциал. Система будет интегрируема. Кривые бифуркационной диаграммы этой системы имеют точки пересечения (особые пары значений двух интегралов), с теми же круговыми молекулами, как особенности центр-центр, центр-седло, седло-седло гладких систем.

Слой этого биллиарда в прообразе такой точки пересечения гомеоморфен особому слою особенностей центр-центр, центр-седло типа $A \times C_2$ и седло-седло типа $B \times C_2$, т.е. точке, особому графу атома C_2 или его произведению на восьмерку соответственно. "Особые" точки этого слоя соответствуют равновесиям геодезического потока с потенциалом на эллипсоиде.

Теорема 1. Существенно четырехмерные особенности биллиарда с отталкивающим упругим потенциалом $V = -(x^2 + y^2)$ на столе $\delta_\alpha(2A_2)$ *полулокально* топологически моделирует особенности ранга 0 типов центр-центр, центр-седло типа $A \times C_2$ и седло-седло типа $B \times C_2$.

Следствие. Системой биллиарда можно *локально* топологически промоделировать особенности центр-центр, центр-седло и седло-седло, т.е. в окрестности невырожденной точки ранга 0 соответствующего типа.

Для *полулокального* моделирования особенностей типа центр-седло $A \times X$ (см. [1]), седловой атом которой имеет n особых точек, склеим биллиардную книжку из $2n$ экземпляров области A_0'. Границами области являются дуги эллипса, его положительных полуосей эллипса и некоторой гиперболы. Склейки областей выполнены на дугах гиперболы и малой полуоси.

Теорема 2. Биллиард с отталкивающим потенциалом на книжке, построенной для произвольного седлового атома X аналогично алгоритму [4], имеет существенно четырехмерную особенность, *полулокально* топологически моделирующую особенность центр-седло типа $A \times X$ гладкой системы.

4. Заметим, что особая точка бифуркационной диаграммы биллиарда в кольце между двумя эллипсами (изучавшегося С.Е. Пустовойтовым) имеет прообраз, гомеоморфный особому слою 3-атомов P_4 или K_2 (из [1]). Близкий уровень энергии Q^3 имеет слоение с двумя особыми уровнями интеграла: на меньшем реализуется 3-атом C_2, на большем — два 3-атома B. Тем самым, в биллиардах реализуются существенно четырехмерные особенности, все слои которой, тем не менее, гомеоморфны тору T^2, или особому слою некоторых 3-атомов. Отметим, что атомы P_4 и K_2 допускают расщепления: P_4 на C_2 и $2B$, а K_2 — в том числе на C_2 и C_2, или $2B$ и $2B$. Они реализуются в прообразах прямых, лежащих внутри одной из двух пар вертикальных углов, образованных бифуркационными кривыми. Будет интересно изучить свойства таких "расщеплений" 3-атомов, которые могут реализовываться биллиардными книжками.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: "Удмуртский университет 1999.

2. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// Матем. Сб. , **206**:10 (2015), 127-176.

3. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С.* Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами// Доклады АН, **479**:6 (2018), 607-610.

4. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. Сб. , **209**:12 (2018), 17-56.

5. *Kozlov V.V.* Some integrable generalizations of the Jacobi problem on geodesics on an ellipsoid // J. Appl. Mech., **59**:1 (1995).

6. *Кобцев И.Ф.* Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., **73**:2 (2018), 64-70.

ГЛАДКАЯ ВЕРСИЯ ПРОБЛЕМЫ ДЖОНСОНА О ДЕРИВАЦИЯХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

А.С. Мищенко

asmish-prof@yandex.ru

УДК 517.986.3, 514.169, 512.544.42

Алгебра внешних дериваций групповой алгебры конечно представимой группы дается в терминах одномерных когомологий с компактными носителями комплекса Кэли группоида присоединенного действия исходной группы. Это описание представляет собой гладкую версию проблемы Джонсона о дериваций групповых алгебр. Когомологии Хохшильда как обобщения внешних дериваций тоже описываются в терминах когомологий другого пространства – классифицирующего пространства того же группоида. Приводится также описание когомологий Хохшильда с коэффициентами в бимодуле геометрического типа над групповой алгеброй.

Ключевые слова: математика, групповые алгебры, дериваций, когомологии Хохшильда, группоиды

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00398).

Мищенко Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Akeksandr Mishchenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Smooth version of Jonson's problem conserning derivations and geometric description of Hochschild cohomology of the group algebras

The algebra of outer derivations of a group algebra of a finitely presented discrete group is given in terms of cohomology with compact supports of the Cayley complex of the groupoid of the adjoint action of the group. This task is a smooth version of Johnson's problem concerning the derivations of a group algebra. The Hochschild cohomology as a generalization of outer derivations also can be described in terms of cohomology of another space – classifying space of the groupoid. A description of the Hochschild cohomology with coefficients in a bimodule of geometric type over a group algebra is also given.

Keywords: mathematics, group algebras, derivations, Hochschild cohomology, groupoids

Проблема о деривациях ассоциативных алгебр по многочисленным свидетельствам связана с работами Б.Е.Джонсона по изучению когомологий банаховых алгебр (Johnson-2001). В.Лозер (Losert-2008), который предложил решение проблемы Джонсона, следующим образом ее формулирует как проблему о деривациях на групповых алгебрах: рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$–бимодуль E. Линейное отображение $D : \mathcal{A} \to E$ называется деривацией (или дифференцированием), если для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется так называемое тождество Лейбница (о отношению к двустороннему действию алгебры $\mathcal{A}$ на бимодуле E)

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Пространство всех деривaций из алгебры $\mathcal{A}$ в бимодуль E обозначим через $\mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)$. Среди деривaций выделяются так называемые внутренние деривации $\mathbf{Int}(\mathcal{A}, E) \subset \mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)$, которые задаются присоединенным представлением $\mathbf{ad}_x(a) = xa - ax, \quad x \in E, a \in \mathcal{A}$.

Фактор пространство $\mathbf{Out}(\mathcal{A}, E) = \mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)/\mathbf{Int}(\mathcal{A}, E)$ — пространство «внешних» деривaций, которое имеет интерпретацию как одномерные когомологии Хохшильда алгебры $\mathcal{A}$ с коэффициентами в бимодуле E: $HH^1(\mathcal{A}; E) \approx \mathbf{Out}(\mathcal{A}, E)$. Проблема Джонсона о деривациях заключается в следующем: всякая ли деривация является внутренней? (см. Dales (2000) (Question 5.6.B, стр.746), т.е. верно ли, что

$$HH^1(\mathcal{A}; E) \approx \mathbf{Out}(\mathcal{A}, E) = 0?$$

Переход к более общим бимодулям позволило В.Лозеру (Losert-2008) решить проблему Джонсона как способ нахождения внутренней деривации не из исходной алгебры $\mathcal{A}$, а в значениях большей алгебры, чем $\mathcal{A}$.

Для этого рассматривается групповая алгебра $\overline{\mathcal{A}} = L^1(G)$ интегрируемых функций на локально компактной группе G по отношении к мере Хаара на ней и бимодуль $E = M(G)$, где $M(G)$ есть алгебра всех ограниченных мер на группе G с операцией умножения, задаваемой сверткой мер. Именно в такой формулировке Лозер (Losert-2008) доказал, что $\mathbf{Out}(L^1(G), M(G)) = 0$.

Проблема Джонсона обобщается на случай групповых алгебр. Разумеется гипотеза Джонсона о совпадении алгебры $\mathbf{Der}(\mathcal{A})$ всех дериваций алгебры $\mathcal{A} = C[G]$ с подалгеброй внутренних дериваций не выполняется. Поэтому гладкую версию проблемы Джонсона следует понимать как задачу вычисления алгебры внешних дериваций $\mathbf{Out}(\mathcal{A})$, которая изоморфна группе одномерных когомологий Хохшильда алгебры $\mathcal{A}$ (с коэффициентами в бимодуле $\mathcal{A}$).

С каждой группой G мы связываем группоид $\mathcal{G}$ присоединенного действия группы G, и показываем, что всякая деривация алгебры $\mathcal{A} = C[G]$ однозначно задается аддитивной функцией на группоиде $\mathcal{G}$, которая удовлетворяет некоторым естественным условиям финитности.

Таким образом, доказывается изоморфизм между алгеброй внешних дериваций $\mathbf{Out}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{C}[\mathcal{G}]$, одномерными когомологиями Хохшильда $HH^1(C[G], C[G])$ групповой алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{C}[\mathcal{G}]$ и одномерными когомологиями комплекса Кэли $\mathcal{C}a(\mathcal{G})$ группоида $\mathcal{G}$ с финитными носителями:

$$\mathbf{Out}(C[G]) \approx HH^1(C[G], C[G]) \approx H^1_f(\mathcal{C}a(\mathcal{G}); \mathbb{R}).$$

Второй изоморфизм обобщается на случай (ко)гомологий Хохшильда произвольных размерностей. Для этого следует заменить комплекс Кэли $\mathcal{C}a(\mathcal{G})$ группоида $\mathcal{G}$ на классифицирующее пространство $B\mathcal{G}$.

Для этого мы предлагаем универсальный путь описания как гомологий так и когомологий Хохшильда. Гомологии Хохшильда групповой алгебры $C[G]$ совпадают с гомологиями классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$. Когомологии Хохшильда тоже можно идентифицировать с инвариантами классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$, а именно с когомологиями этого пространства, но с условием некоторой финитности для коцепей на пространстве $B\mathcal{G}$.

Как гомологии так и когомологии Хохшильда рассматриваются с коэффициентами в некотором бимодуле E над групповой алгеброй $C[G]$. Если бимодуль E порождается некоторым двусторонним действием группы G на некотором множестве X, $\varphi : G \times X \times G \to X$, мы скажем, что бимодуль $E = C_0(X)$ является бимодулем геометрического типа, Это двустороннее G–множество X порождает группоид действия $\psi, \psi(x, g) = \varphi(g, x, g^{-1})$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, G, \varphi)$. (Ко)гомологии классифицирующего пространства $B\mathcal{G}(X, G, \varphi)$ группоида $\mathcal{G}(X, G, \varphi)$ полностью описывают (ко)гомологии Хохшильда групповой алгебры с коэффициентами в бимодуле геометрического типа:

$$HH_k(C[G]; E) \approx H_k(B\mathcal{G}(X, G, \varphi)); \quad HH^k(C[G]; E) \approx H^k_f(B\mathcal{G}(X, G, \varphi)).$$

Классифицирующее пространство $B\mathcal{G}$ группоида $\mathcal{G}(X, G, \varphi)$ в случае присоединенного действия группы G геометрически описывается в терминах классов $\langle g \rangle \in \langle G \rangle$ сопряженных элементов в группе G. Это описание сводится к рассмотрению последовательно трех действий группы G: правого действия, тривиального действия и присоединенного действия группы G, соответственно, на группе G, одноточечного множества и группе G. Соответствующие группоиды обозначаются через $r\mathcal{G}$, G, и $\mathcal{G}$. Тогда классифицирующее пространство $Br\mathcal{G}$ является стягиваемым пространством со

свободным действие группы G. Классифицирующее пространство BG является факторпространством этого действия: $BG \approx (Br\mathcal{G})/G$. Наконец, в случае присоединенного действия имеет место разложение в несвязную сумму $B\mathcal{G} \approx \coprod_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} B\mathcal{G}_{\langle g\rangle}$, причем $B\mathcal{G}_{\langle g\rangle} \approx (Br\mathcal{G})/C(\langle g\rangle) \sim K(C(\langle g\rangle),1)$, где $C(\langle g\rangle)$ есть централизатор элемента $g \in G$.

Литература

1. *Johnson B.E.* The Derivation Problem for Group Algebras of Connected Locally Compact Groups // J. London Math. Soc., **63**:2 (2001), 441-452.

2. *Losert V.* The derivation problem for group algebras // Annals of Mathematics, **168** (2008), 221–246.

3. *Dales H.G.* Banach Algebras and Automatic Continuity — Larendon Press, Oxford, 2000.

4. *Arutyunov A.A., Mishchenko A.S.,* Smooth Version of Johnson's Problem Concerning Derivations of Group Algebras // arXiv:1801.03480v2 [math.AT], (2018) 1-20.

5. *Mishchenko A.S.* Derivations of Group Algebras and Hochschild cohomology // arXiv:1811.02439v4 [math.RT] (2018) 1-14.

АСИМПТОТИКИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫЕ С БИЛЛИАРДАМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ТОРЕ ЛИУВИЛЛЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ НА ГРАНИЦЕ МЕТРИКОЙ

В.Е. Назайкинский

nazaikinskii@yandex.ru

УДК 517.955.8

Рассматриваются асимптотические собственные функции оператора $\nabla D(x)\nabla$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где $D(x)$ — гладкая функция в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, положительная в Ω и равная нулю на границе $\partial\Omega$. Показано, что они связаны с биллиардами, задаваемыми геодезическим потоком с гамильтонианом $D(x)p^2$. Отличие таких биллиардов от "обычных" состоит в том, что импульсы p обращаются в бесконечность при приближении соответствующих траекторий к границе области Ω.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, вырождение на границе, асимптотические собственные функции, торы Лиувилля, биллиарды, мягкие стенки

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10282).

Назайкинский Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия), Московский физико-технический институт (Долгопрудный, Россия); Vladimir Nazaikinskii (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia)

Соавтором этого сообщения является также проф. С.Ю. Доброхотов.

О ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВА ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА

А.Я. Нарманов, О. Касимов
narmanov@yandex.ru

УДК 515.165

В работе рассматривается вопрос о структуре множества орбит семейства векторных полей D. Доказано,что множество орбит векторных полей Киллинга является орбиобразием.

Ключевые слова: Риманово многобразие, векторное поле, орбита, орбиобразие

On the geometry of the set of orbits of Killing vector field

In the paper it is considered structure of the set of orbits of vector fields. It is shown, that a set of orbits of killing vector fields is orbifold.

Keywords: Riemannian manifold, vector field, an orbit, orbifold

В этой работе рассмотрим вопрос о структуре множества орбит семейства векторных полей D.

Пусть $V(M)-$ множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Множество $V(M)$ является алгеброй Ли, в которой коммутатором двух векторных полей $X, Y \in V(M)$ служит их скобка Ли $[X, Y]$.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

Определение 1. Пусть $D \subset V(M)$. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x,определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1} X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(...(X_{i_1}^{t_1}(x))...)).$$

Ясно, что если D состоит из одного векторного поля, то орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием). Топология и геометрия орбит изучены в работах [1],[3],[4].

Нарманов Абдигаппар Якубович, д.ф.-м.н.,профессор, Национальный Университет Узбекистана (Ташкент, Узбекистан); Abdigappar Narmanov (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Касимов Одил, докторант, Национальный Университет Узбекистана (Ташкент, Узбекистан); Odil Kasimov (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in R^k \to X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots)),$$

являются непрерывными, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ - действительные числа, $X_1, X_2, \ldots, X_k-$ векторные поля из семейства D.

В работе [5] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \geqslant 1$)с топологией Суссманна обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется погруженным в M, если каноническая инъекция $i : N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

На каждой орбите возникают две топологии: ее собственная топология как погруженного подмногообразия и индуцированная топология из M. Собственная топология орбиты является более сильной,чем топология, индуцированная из M.

Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли, содержащую D, и положим $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ для всех $x \in M$. Возникшее распределение $x \to A_x(D)$ является инволютивным, и если $\dim A_x(D) = const$ для всех $x \in M$, то по теореме Фробениуса является вполне интегрируемым. В этом случае каждая орбита является слоем $k-$ мерного слоения F.

В общем случае разбиение многобразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением [5]. Это слоение обозначим через F, а множество орбит обозначим через M/F. В случае, когда слоение F является регулярным римановым слоением, в работе [2] показано, что множество M/F обладает структурой гладкого многообразия. А именно доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть (M, g)-полное риманово многообразие, и все слои слоения F являются замкнутыми подмножествами. Тогда, если группы голономии всех слоев тривиальны, то множество M/F, наделенное фактором топологии , обладает такой дифференциальной структурой гладкого многообразия, что отображение $x \to L(x)$ дифференцируемо.*

В общем случае множество M/F не обязано быть гладким многообразием. В этой статье мы изучим геометрию множества M/F в случае, когда множество D состоит из векторных полей Киллинга.

Определение 2. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий [4].

Замечание. Векторное поле X на M является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда $L_X g = 0$, где $L_X g$-производная Ли. Равенство $L_X g = 0$ эквивалентно условию

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]),$$

где Y, Z — произвольные гладкие векторные поля, $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей.

В случае,когда $M = R^n$, векторное поле $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, i \neq j, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0, i, j = \overline{1, n}.$$

Определение 3. Сингулярное слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках ([6],стр.189).

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [2] и изучались многими авторами, в частности в работах [1],[2],[3]. Сингулярные римановы слоения были введены П.Молино в своей монографии [6].

Известно,что если семейство D состоит извекторных полей Киллинга,то слоение F является сингулярным римановым слоением [6]. Имеет место следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $M = R^n$, а множество D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда множество множество орбит M/F являляется гладким орбиобразием.*

Литература

1. *Нарманов А.Я., Саитова С.* геометрии орбит векторных полей Киллинга// Дифференциальные уравнения, **50**:12 (2014), 1582-1589.

2. *Hermann R.* On the differential geometry of foliations//Annals of Mathematics,**72**:3 (1960), 1582-1589.

3. *N.Levitt and H.Sussmann* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control,**13**:6 (1975),1271–1281.

4. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Annals of Math., **69**:1 (1959),119-132.

5. *Sussmann.H.* Orbits of family of vector fields and integrability of distribution// Transactions of the A.M.S., **180** (1973), 171-188.

6. *Molino P.* Riemaninan foliations. Birkhauser. Boston-Basel. 1988.

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О.А. Нарманов
otabek.narmanov@mail.ru

УДК 517.958

В работе используя известные инфинитезимальные образующие некоторых групп симметрий двумерного уравнения теплопроводности найдены решения, инвариантные относительно этих групп уравнения теплопроводности без источника тепла и без источника поглощения.

Ключевые слова: группа симметрий, уравнение теплопроводности, инфинитезимальная образующая, векторное поле.

Invariant solutions of two dimensional heat equation

In the paper, using the well-known infinitesimal generators of some symmetry groups of the two-dimensional heat conduction equation, solutions are found that are invariant with respect to these groups

Keywords: symmetry group, heat equation, infinitezimal generator, vector field

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям посвящены многочисленные исследования [1-5]. В работе [3] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [4] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. Даются примеры применения техники группового анализа к конкретным системам дифференциальных уравнений. В работе [2] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [1].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности, когда нет источника тепла:

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2. \tag{1}$$

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (1):

$$X_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2}$$

Теорема. *Инвариантными решениями уравнения (1), относительно группы преобразований, порожденных векторными полями (2) являются функции*

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{2t}V(\xi)$$

Нарманов Отабек Абдигаппарович, докторант, Ташкентский Университет Информационных технологий (Ташкент, Узбекистан); (Narmanov Otabek Abdigapparovich, Ph.D Student, Tashkent University of Information technologies, Tashkent,Uzbekistan)

где $\xi = \frac{x_1}{x_2}$, $V(\xi)$*– общее решение дифференциального уравнения* $f(\xi)VV'' + f(\xi)V'^2 + 2g(\xi)VV' + 12V^2 + 2V = 0$, *функции* $f(\xi)$, $g(\xi)$ *определяются равенствами* $f(\xi) = (\xi+1)^2(\xi^2+1), g(\xi) = (\xi+1)(\xi^2-3\xi+4)$.

Уравнение (1) имеет еще одно семейство инвариантных решений, которое часто используется в приложениях. Для этого используем инфинитезимальную симметрию уравнения (1), которое задается следующим векторным полем

$$X_1 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Поток этого векторного поля состоит из вращений вокруг начало координат плоскости (x_1, x_2), которые определяют следующую однопараметрическую группу преобразований

$$(t, x_1, x_2, u) \to (t, x_1\cos s - x_2\sin s, x_1\sin s + x_2\cos s, u), s \in \mathbb{R}.$$

Инвариантными функциями этих вращений являются функции

$$I_1 = uf(t), I_2 = g(t)(x_1^2 + x_1^2)^{1/2},$$

где $f(t), g(t)$ — гладкие функции. Используя эти функции, мы можем найти большое семейство инвариантных решений уравнения (1), относительно групп вращений вокруг начало координат плоскости (x_1, x_2). Мы ищем решение в виде

$$u(t, x_1, x_2) = t^\alpha V(\xi), \xi = t^{-\beta}(x_1^2 + x_1^2)^{1/2}, \tag{3}$$

чтобы получить решения типа "автомодельные" [3]. Подставляя (3) в уравнение (1) получим следующее отношение $2\alpha - 2\beta = \alpha - 1$. Для решений этого типа обычно требуется условия постоянства энергии, т.е условия:

$$\iint\limits_{R^2} u(t, x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = const = E. \tag{4}$$

Из условия (4) получим равенство $\alpha + 2\beta = 0$. Таким образом получим,что $\alpha = -1/2, \beta = 1/4$. В результате получим следующее дифференциальное уравнение для функции $V(\xi)$:

$$\frac{1}{\xi}(\xi VV')' + \frac{1}{4}V'\xi + \frac{1}{2}V = 0. \tag{5}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению $(\xi VV')' + \frac{1}{4}(V\xi^2)' = 0$. Полагая $V \neq 0$ и считая равной нулю постоянную интегрирования, из уравнения (5) получим следующее выражение для V $V(\xi) = \frac{1}{8}[C^2 - \xi^2]$.

Поставляя выражение для V в (3) получим следующее решение, инвариантное относительно вращений вокруг начало координат плоскости (x_1, x_2) :

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{8\sqrt{t}}[C^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{t}}].$$

Если учесть,что $u(t, x_1, x_2) \geqslant 0$, функция $u(t, x_1, x_2)$ является финитной по $x = (x_1, x_2)$ и бесконечно дифференцируемой в области $\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{t}} < C^2$.

Поэтому интеграл в (4) является конечным. Если ввести переменные $\xi^1 = \frac{x_1}{t^\beta}, \xi_2 = \frac{x_2}{t^\beta}$, то равенство (4) примет вид:

$$\iint\limits_{0 \leqslant \xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant C^2} V(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 = const = E.$$

Откуда получим,что $C = \frac{2}{\pi^{1/4}} E^{1/4}$.

Литература

1. *Ли С., Шефферс.* Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр: "Регулярная и хаотическая динамика". 2011.

2. *Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференцальные уравнения, **19**:7 (1983), 1215–1223.

3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.М.: Мир, 1989. 639 с.

4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978. 398 с.

5. *Narmanov O.A.* Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics, **6** (2018), 373–381.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОДИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Г.В. Носовский, А.Ю. Чекунов

gleb.nosovskiy@gmail.com, chekunov.alexey@gmail.com

УДК 514, 519.6

Формальный анализ и распознавание цветных цифровых изображений — важный раздел современной компьютерной геометрии. Существующие для этой цели методы, несмотря на их многолетнее развитие, не вполне удовлетворительны и заведомо не могут сравниться по эффективности с теми не известными нам алгоритмами, которые наш мозг использует для анализа зрительной информации. Почти все применяемые сегодня на практике алгоритмы практически не используют цвета и, по сути, обрабатывают изображения, переведенные в оттенки серого. Однако цветовая информация бывает очень существенна. Недавно был предложен новый метод кодирования и анализа цветных цифровых изображений. Основная идея метода заключается в том, что полноцветное цифровое изображение кодируется с помощью

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00775 А).

Носовский Глеб Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nosovskiy Gleb Vladimirovich (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Чекунов Алексей Юрьевич, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Chekunov Alexey Yurievich (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

специальной двумерной поверхности в трехмерном пространстве, после чего анализируется методами дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: распознавание образов, геометрическое кодирование, кодирующая поверхность, контурный анализ, распознавание контуров, компьютерное зрение, обработка изображений, склейка изображений

Geometrical coding of digital images

Formal analysis and computer recognition of 2D color images is an important branch of modern computer geometry. However, existing algorithms, although they are highly developed, are not quite satisfactory and seem to be much worse than (unknown) algorithms, which our brain uses to analyze eye information. Almost all existing algorithms omit colors and deal with grays scale transformations only. But in many ases color information is important. In this paper a fundamentally new method of coding and analyzing color digital images is proposed. The main point of this method is that a full-color digital image is represented without dropping colors by a special 2D surface in 3D space, after which it is analyzed by methods of differential geometry.

Keywords: : pattern recognition, geometrical coding, coding surface, contour analysis, edge detection, computer vision, image processing, image stitching.

Одной из важнейших задач современной компьютерной геометрии является обработка цифровых изображений. Во многих случаях первичный анализ изображений начинается с распознавания контуров (границ). В настоящее время существует огромное количество алгоритмов, позволяющих выполнять эту задачу. Одним из наиболее известных и быстрых является алгоритм Кэнни (J. Canny) [1]. Недавно Г.В. Носовским и А.Ю. Чекуновым был предложен новый метод (см. [2, 3, 4]): цветное или черно-белое (в оттенках серого) изображение представляется (без потери цветовой информации) в виде двумерной поверхности в R^3 (*кодирующая поверхность*), после чего анализ изображения осуществляется методами дифференциальной геометрии на кодирующей поверхности с помощью метрического тензора и главных кривизн, а не градиентов интенсивности и гессианов, которые обычно используются при распознавании контуров изображений. Следующим важнейшим шагом метода является создание оптимальных функций, зависящих от этих характеристик. Примеры используемых в работе функций:

$$f_4(\lambda_1,\lambda_2)=c(|\lambda_1|-|\lambda_2|)^2=\begin{cases}c(H^2-4K), & K\geqslant 0;\\ cH^2, & K<0,\end{cases}$$

$$h_1(k_1,k_2)=G,\ h_2(G)=\begin{cases}(G-1)^2, & G\geqslant 1;\\ \frac{1}{G}-1, & G<1,\end{cases}\ h_3(k_1,k_2)=\frac{(k_1+k_2)^2}{k_1k_2}.$$

Здесь c — числовой коэффициент; G — определитель первой фундаментальной формы; k_1,k_2 — ее собственные значения; λ_1,λ_2 — главные кривизны;

$H = \lambda_1 + \lambda_2$ — средняя кривизна; $K = \lambda_1 \times \lambda_2$ — гауссова кривизна. Функции подбираются таким образом, чтобы наибольшие значения достигались в тех точках, где значения характеристик резко отличаются. С помощью данных функций определяются области, в которых цвета имеют наиболее резкие изменения значений интенсивности или яркости. Используя понятие *размерности Минковского* для ограниченного множества, выделяются границы объектов изображения путем динамического подбора оптимального порога для всех изображений.

К основным преимуществам нового метода относятся: 1) обработка полной цветовой информации; 2) минимальный набор числовых параметров, которые пользователь должен выбрать и настроить; 3) гибкость: существует простой способ создания различных инструментов для разных классов приложений без изменения самого алгоритма; 4) скорость работы (хорошая распараллеливаемость).

Литература

1. *Canny J.* A computational approach to edge detection // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **8** (1986), 679-714.

2. *Носовский Г.В.* Геометрическое кодирование цветных изображений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., **1** (2018), 3-11.

3. *Носовский Г.В., Чекунов А.Ю., Подлипаев С.А.* Быстрый алгоритм геометрического кодирования цифровых изображений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., **6** (2017), 20-27.

4. *Чекунов А.Ю.* Реализация быстрого алгоритма геометрического кодирования цифровых изображений с применением архитектуры CUDA // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., **6** (2018), 20-30.

«КВАНТОВАНИЕ» ОДНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ КИМУРЫ

В.А. Павленко

pva100186@mail.ru

УДК 517.925.51

Рассматриваются два совместных между собой линейных эволюционных уравнения с временами s_1 и s_2, зависящие от двух пространственных переменных. Эти эволюционные уравнения представляют собой аналоги временных уравнений Шредингера, определяемых двумя гамильтонианами $H^{4+1}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1, 2)$ системы H^{4+1}, которая состоит из пары совместных между собой гамильтоновых систем уравнений, допускающих применение метода изомонодромных деформаций.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, квантование, уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, метод изомонодроных деформаций

Павленко Виктор Александрович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ, БГАУ (Уфа, Россия); Pavlenko Viktor Aleksandrovich (Bashkir State University, Bashkir Agrarium State University Ufa, Russia)

Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings

We study compatible linear evolution equations with times s_1 and s_2, which depend from two space variables. These evolution equations are analogues of the non-stationary Schrödinger equations determined by the two Hamiltonian of $H_{s_k}^{4+1}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1, 2)$ of the system H^{4+1}, which can be allowed the method isomonodromic deformations.

Keywords: Hamilton systems, quantization, Shrödinger equation, Painlevé equations, method of isomonodromic deformations

Рассматриваются два совместных между собой линейных уравнения с временами s_1 и s_2, которые зависят только от двух пространственных переменных. Эти уравнения являются аналогами уравнений Шредингера, которые опередеяются гамильтонианами Кимуры, см. [1]:

$$H_{t_k}^{4+1}(t_1, t_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

пары совместных между собой систем, которые допускают применение метода изомонодромных деформаций (ИДМ).

В данной работе мы только начали выписывать решения эволюционных уравнений, которые задаются гамильтонианами Кимуры. Пока только построены решения для гамильтонианов $H(2+1+1+1)$ и $H(4+1)$. Но в работе Кимуры имеются ещё целый ряд уравнений, которые задаются другими гамильтонианами. Все они являются аналогами уравнений Шредингера. Эти результаты будут обсуждаться в последующих работах.

Литература

1. *Hironobu Kimura.* The degeneration of the two dimentional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure // Vol. 4 CLV (1989), pp. 24–74.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ (СЛУЧАЙ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ)

В.В. Палин

grey_ stranger84@mail.ru

УДК 517.955, 517.956.35

Предлагается новый метод построения решения задачи Римана для нестрого гиперболической системы по Петровскому законов сохранения ступенчатого вида. Рассматривается случай, когда решением нестрого гиперболической по Фридрихсу подсистемы является волна разрежения.

Ключевые слова: задача Римана, системы законов сохранения, геометрическое решение

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00805).

Палин Владимир Владимирович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Palin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

On the geometrical solutions for the Riemann problem for one class of nonstrictly hyperbolic systems (rarefaction wave case)

The new method to construct a solution for a Riemann's problem for a nonstrictly hyperbolic in the sense of Petrovskii steplike system of conservation laws is provided. The case of rarefaction wave as a solution of nonstictly hyperbolic in the sense of Friedrichs subsystem is studied.

Keywords: Riemann's problem, systems of conservation laws, geometrical solution

Рассмотрим задачу Римана для системы законов сохранения

$$\begin{cases} U_t + (F(U))_x = 0, \\ U|_{t=0} = U_- + (U_+ - U_-)\theta(x), \end{cases}$$

где $U(t,x)$ – неизвестная n-мерная вектор-функция, U_- и U_+ – заданные постоянные состояния, $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Вопрос о построении решения этой задачи связан со структурой матрицы

$$A(U) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial U_j}\right).$$

Определение. Система законов сохранения, рассматриваемая выше, называется *нестрого гиперболической по Петровскому*, если для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ все собственные значения матрицы $A(\xi)$ вещественные. Если же для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ матрица $A(\xi)$ имеет полный базис из вещественных собственных векторов, то система называется *нестрого гиперболической по Фридрихсу.*

Отметим, что нестрогая гиперболичность по Фридрихсу – более сильное требование, чем нестрогая гиперболичность по Петровскому. В случае, если система является нестрого гиперболической по Фридрихсу, то для достаточно малых скачков, т.е. $|U_+ - U_-| \ll 1$, задача Римана имеет единственное физически корректное решение, представляющее собой $n+1$ постоянное состояние, разделенное ударными волнами, волнами разрежения и контактными разрывами [1]. При этом для систем, нестрого гиперболических по Петровскому, но не имеющих полного базиса из собственных векторов, этот результат неверен. Примером системы, нестрого гиперболической по Петровскому, но не являющейся нестрого гиперболической по Фридрихсу, может служить двухскоростная модификация системы уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \phi_t + v_x = 0, \\ v_t + (\frac{1}{2}v^2 + \phi)_x = 0, \\ w_t + \left(\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{c}\phi\right)_x = 0, \end{cases}$$

где c – заданная константа.

Перейдем к рассмотрению нестрого гиперболических по Петровскому систем ступенчатого вида, т.е. систем законов сохранения, для которых матрица $A(U)$ имеет следующий блочный вид:

$$A(U) = \begin{pmatrix} A_{n-1}(U_1, \ldots, U_{n-1}) & 0 \\ F_n(U_1, \ldots, U_{n-1}) & \Phi'(U_n) \end{pmatrix},$$

где A_{n-1} – квадратная матрица $(n-1)\times(n-1)$, причем $A_{n-1}(\xi)$ имеет полный базис из собственных векторов, F_n – строка $1\times(n-1)$. В этом случае первые $n-1$ уравнение можно рассматривать независимо от последнего, и к ним применим сформулированный выше результат о виде физически корректного решения. Далее остановимся подробно на случае, когда первому $n-1$ уравнению соответствует волна разрежения. Тогда закон сохранения для последнего уравнения может быть переписан в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial U_n}{\partial t} + \left(\Phi(U_n) - f\left(\frac{x}{t}\right)\right)_x = 0, \\ U_n|_{t=0} = U_n^- + (U_n^+ - U_n^-)\theta(x). \end{cases}$$

Следуя О.А. Олейник, перейдем к новой неизвестной функции V так, что $U = V_x$. Тогда после однократного интегрирования по x последняя задача перепишется как начальная задача для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\begin{cases} V_t + \Phi(V_x) - f\left(\frac{x}{t}\right) = 0, \\ V_x|_{t=0} = U_n^- + (U_n^+ - U_n^-)\theta(x). \end{cases}$$

Соответствующая система ОДУ Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi'(p), \\ \dot{p} = \frac{1}{t} f'\left(\frac{x}{t}\right) \end{cases}$$

имеет особенность при $t = 0$. Сделав замену $t = e^\tau$, $x = qe^\tau$, перейдем к несингулярной системе ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = \Phi'(p) - q, \\ \frac{dp}{d\tau} = f'(q). \end{cases}$$

Пусть S_τ – оператор сдвига вдоль траекторий фазового потока этой (уже не гамильтоновой) системы на время τ, $\Lambda_t(x,p) = (tx,p)$ – неоднородное растяжение фазовой плоскости. Сопоставим начальным данным задачи Коши для последнего уравнения системы законов сохранения кривую $\gamma_0 = \{(x, U_n^-) \mid x < 0\} \cup \{(0,p) \mid (p-U_n^-)(p-U_n^+) \leqslant 0\} \cup \{(x, U_n^+) \mid x > 0\}$.

Определение. *Геометрическим решением задачи Римана для U_n* будем называть $\Lambda_t\widehat{\gamma}$, где $\widehat{\gamma}$ – предел по Хаусдорфу последовательности кривых $S_\tau\gamma_0$ при $\tau \to +\infty$.

Теорема 1. *Пусть функция $\Phi(U_n) \in C^2$ такова, что множество $\{p \mid \Phi'(p) = 0\}$ конечно, и $|\Phi'(p)| \to +\infty$ при $|p| \to \infty$. Тогда определение геометрического решения задачи Римана для U_n корректно, и геометрическое решение – некая кривая.*

Для того, чтобы перейти от геометрического решения к обобщенному решению задачи Римана, можно использовать процедуру выравнивания, подробно изложенную в работе [2].

Теорема 2. *Кусочно-непрерывная функция, получаемая из геометрического решения путем выравнивания, существует, единственна и является обобщенным решением задачи Римана.*

Литература

1. *Лакс П.Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — Ижевск, НИЦ "РХД" , 2010.

2. *Палин В.В.* О геометрических решениях задачи Коши для законов сохранения // Труды МИАН, **304** (2019).

КОМБИНАТОРНЫЙ ПОТОК РИЧЧИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ МЕТРИК УПАКОВОК КРУГОВ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

Ф.Ю. Попеленский
popelens@mech.math.msu.su

УДК 514.74

Чоу и Луо в 2003 [1] показали, что комбинаторный аналог потока Риччи на поверхности при определенных условиях сходится к так называемой метрике упаковки кругов, имеющей постоянную кривизну. Исходные комбинаторные данные содержат неотрицательные веса, приписанные по одному к каждому ребру триангуляции. В работе Чоу и Луо неотрицательность весов критична. В нашей недавней работе условие неотрицательности весов удалось ослабить, см. [2] С другой стороны, в [3] нам удалось обнаружить, что для весов не удовлетворяющих найденным условиям, имеется определенные закономерности в поведении кривизны, в то время как метрика под действием потока Риччи вырождается.

В докладе, основанном на совместных работах с Р.Ю.Пепа, будет представлено понятие метрики упаковки кругов с вырождениями. Будет показано, что комбинаторный аналог потока Риччи для таких метрик при определеных условиях на веса для любых начальных условий сходится к метрике постоянной кривизны вне вырождений.

Ключевые слова: комбинаторный поток Риччи, метрика упаковки кругов с вырождениями

Combinatorial Ricci flow for degenerate circle packing metrics

Chow and Luo in 2003 [1] had shown that the combinatorial analogue of the Hamilton Ricci flow on surfaces under certain conditions converges to Thruston's circle packing metric of constant curvature. The combinatorial setting includes nonnegative weights on the edges of a surface's triangulation. Nonnegativity of the weights was crutial in Chow-Luo's arguments. Recently we have shown that convergence can be proved under weaker condition: some weights can be negative and should satisfy certain inequalities, see [2].

On the other hand, for weights not satisfying those conditions we observed in numerical simulation a degeneration of the metric with certain regular behaviour patterns, [3].

In the talk (based on joint works with R.Pepa) we introduce degenerate circle packing metrics, and under weakened conditions on weights prove

Работа выполнена при поддержке программы "Ведущие Научные Школы" (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867)

Попеленский Федор Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Theodore Popelensky, (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

that an anologue of the combinatorial Ricci flow under certain assumptions for any initial metric has a unique limit metric with a constant curvature outside of singularities.

Keywords: combinatorial Ricci flow, degenerate circle packing metric

Пусть T — триангуляция замкнутой поверхности X. Будем предполагать, что поднятия симплексов триангуляции в универсальное накрытие $\tilde{X}$ являются вложениями. Обозначим множества вершин, ребер и граней триангуляции через V, E и F соответственно. Разобьем множество вершин в дизъюнктное объединение $V = V_n \sqcup V_d$, причем так, что никакое две точки из V_d не соединены ребром. Без ограничения общности можно считать, что $V_n = \{A_1, \dots, A_M\}$ и $V_d = \{A_{M+1}, \dots, A_N\}$. Вершины из V_n будем называть *невырожденными*, а вершины из V_d — *вырожденными*. Симплекс триангуляции (т.е. ребро или грань) *невырожден*, если и только если все его вершины невырождены. Множество всех (не)вырожденных ребер и граней обозначается E_d (E_n) и F_d (F_n), соответственно. Ясно, что $E = E_n \sqcup E_d$ и $F = F_n \sqcup F_d$.

Весовая функция (вес) — это функция $w : E_n \to (-1, 1]$. Зафиксируем тройку (X, T, w). Метрика упаковки кругов (с вырождениями) определяется набором чисел $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$, где $r_j > 0$ for $1 \leqslant j \leqslant M$ и $r_j = 0$ для $M + 1 \leqslant j \leqslant N$. Это определение отличается от классической метрики упаковки кругов, для которой считается, что все r_j положительны, см. [1]. Для евклидовой метрики на гранях определим длину ребра триангуляции, соединяющего вершины A_i и A_j по формуле $l_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j w_{ij}$. Для вырожденного ребра одно из чисел r_i или r_j равно 0, поэтому последнее слагаемое считается равным 0, хотя вес w_{ij} не задан. Кроме того, если $r_i = 0$, то $l_{ij} = r_j$. Кривизна K_i в вершине A_i определяется стандартным образом:

$$K_i = 2\pi - \sum_{\triangle A_i A_j A_k \in F} \angle A_k A_i A_j.$$

Кривизна в вырожденной вершине не зависит от r и выражается через веса:

$$K_i = 2\pi - \sum_{\triangle A_i A_j A_k \in F} (\pi - \arccos(w_{jk})),$$

здесь $A_i \in V_d$.

Комбинаторный поток Риччи — это система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i,\ i = 1, \dots, M.$$

Для $i = M + 1, M + 2, \dots, N$ выполняются равенства $r_i = \frac{dr_i}{dt} = 0$, поэтому можно считать, что уравнения потора Риччи имеют смысл для $1 \leqslant i \leqslant N$.

Для метрики упаковки кругов с вырожениями определим *усредненную кривизну* K^{av}:

$$K^{av} = \frac{1}{M}\left(2\pi\chi(X) - \sum_{j=M+1}^{N} K_j\right).$$

Нормализованый поток Риччи — это система обычковенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K^{av})r_i,\ i = 1, \dots, M.$$

Нормализованный и ненормализованный потоки Риччи в определенном смысле эквивалентны: функции $r_i(t), i = 1, \dots, M$ являются решением ненормализованного потока тогда и только тогда, когда функции $e^{K^{av}t}r_i(t)$ являются решениям нормализованного потока

Для гиперболической метрики на гранях постоянной кривизны -1 определим длину ребра, соединяющего вершины A_i и A_j по формуле $\cosh l_{ij} = \cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j w_{ij}$. Как и в евклидовом случае, если ребро вырождено, то один из радиусов r_i или r_j нулевой, поэтому последнее сагаемое в этом определении принимается нулевым, хотя вес w_{ij} не определен. Ясно, что если $r_i = 0$, то $l_{ij} = r_j$. Кривизна в вершине определяется такой же формулой, как и в евклидовом случае.

Гиперболический комбинаторный поток Ричии — это система обыкновеных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \sinh r_i,\ i = 1, \dots, M.$$

Будем говорить, что веса на ребрах удовлетворяют условию (W), если каждая грань триангуляции удовлетворяет одному из следующих условий:

(a) все вершины грани невырождены и все веса на ребрах неотрицательны;

(b) все вершины грани невырожены, в точности одно ребро имеет отрицательный вес α, два других ребра имеют положительные веса β и γ соответственно, причем $\alpha + \beta\gamma \geqslant 0$;

(c) одна из вершин грани вырожены, при этом вес противоположного ребра не равен 1.

Теорема. *Предположим, что X — замкнутая поверхность с триангуляцией T и весовой функцией w, удовлетворяющими условию (W).*

Решение нормализованного потока Риччи для любой начальной метрики сходится тогда и только тогда, когда для любого собственного подмножества $I \in V_n$ выполнено неравенство

$$|I|K^{av} + \sum_{j \in D_I} K_j > -\sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}).$$

Кроме того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к метрике с $K_i = K^{av}$, $i = 1, \dots, M$.

Теорема. *Предположим, что X — замкнутая поверхность с орицательной эйлеровой характеристикой, с триангуляцией T и весовой функцией w, удовлетворяющими условию (W).*

Решение гиперболического потока Риччи сходится для произвольной начальной метрии тогда и только тогда, когда для любого подмножества $I \in V_n$ выполнено неравенство

$$\sum_{j \in D_I} K_j > -\sum_{(e,v) \in Lk(I \cup D_I)} (\pi - \arccos w(e)) + 2\pi\chi(F_{I \cup D_I}).$$

Кроме того, если решение сходится, то оно сходится экспоненциально быстро к метрике с $K_i = 0$, $i = 1, \ldots, M$.

Литература

1. *B. Chow, F. Luo*, Combinatorial Ricci Flows on Surfaces // J. Differential Geometry **63**, (2003) 97-129.

2. *R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky*, On Convergence of Combinatorial Ricci Flow on Surfaces with Negative Weights // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38**, 1061-1068.

3. *R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky*, Equilibrium for a Combinatorial Ricci Flow with Generalized Weights on a Tetrahedron // Regular and Chaotic Dynamics, **22**, 566-578.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ С УПЛОЩЕНИЕМ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛЮСЕ

И.Х. Сабитов

isabitov@mail.ru

УДК 514.772

Локальное свойство поверхности быть жесткой или нежесткой существенно зависит от характера уплощения поверхности в рассматриваемой точке. Для поверхности вращения особой точкой является полюс. Случаи уплощения поверхности в полюсе степенного порядка рассмотрены в литературе уже достаточно подробно, мы же рассматриваем случай уплощения бесконечного порядка и показываем, что существование и поведение полей бесконечно малого изгибания зависит от требуемого класса гладкости деформации.).

Ключевые слова: геометрия, дифференциальные уравнения бесконечно малых изгибаний, спектральная теория

Infinitesimal bending of a surface of rotation with infinite order flattening at pole

Local property of a surface to be or not to be infinitesimally rigid depends essentially on its character of flattening at considered point. For a surface of rotation the pole is a point of singularity. The cases of finite order of flattening are considered in literature sufficiently in detail/ We consider the cases of infinite order of flattening and show that the existence and the behaviour of infinitesimal bending depends on the class of smoothness of deformation.

Keywords: geometry, differential equations of infinitesimal deformations, spectral theory

Сабитов Иджад Хакович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Idzhad Sabitov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть $z = \varphi(\rho)$ –уравнение меридиана, вращением которого вокруг оси Oz получена поверхность вращения $S : z = \varphi(x, y)$. Предполагаем, что

1) $\varphi(\rho) \in C^n[0, \varepsilon), 1 \leqslant n \leqslant \infty$;

2) $\varphi(\rho)(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi'(\rho) > 0, \rho \in (0, \varepsilon)$.

Исследование жесткости/нежесткости окрестности полюса с меридианом с такими условиями проводилось ранее большей частью в предположении степенного убывания Функции $z = \varphi(\rho)$ и, соответственно, поля б.м. изгибаний тоже искались в классах конечной гладкости $C^n, n < \infty$. Мы потребуем от функции $z = \varphi(\rho)$ выполнения еще одного условия

3) $\int_0^\rho \frac{\varphi(t)dt}{\varphi'(t)t^2} < \infty$, которое заведомо не удовлетворяется для функций степенного рост и удовлетворяется для функций вида $\varphi(\rho) = exp(-\rho^{-a}), a > 0$. Более общó, для $\varphi(\rho)$ выполняется неравенство $\varphi(\rho) \leqslant C \exp(-\ln^2 \rho) = C\rho^{\ln \frac{1}{\rho}}$. Кроме того, предполагаем, что поверхность S имет гладкость класса $C^k, 1 \leqslant k \leqslant \infty$,

Для поверхностей вращения поле б.м. изгибаний по методу Фурье оказывается состоящим из бесконечноо числа гармоник $\alpha_n(\rho), \beta_n(\rho), n \geqslant 2$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha_n'(\rho) = \frac{n^2}{\rho}\alpha_n + \frac{n^2-1}{\rho\varphi'}\beta_n, \beta_n'(\rho) = -\frac{n^2\varphi'}{\rho}\alpha_n - \frac{n^2-1}{\rho}\beta_n.$$

Таким образом, задача фактически оказывается задачей исследования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью в точке $\rho = 0$. Сводя эту систему к некоторой системе интегральных уравнений, мы получаем ряд теорем о существовании/несуществовании полей б.м.изгибания в различных классах гладкости. В частности, удается доказать, что 1) в классе деформаций C^1-гладкости эти поверхности при условии их выпуклости являются жесткими относитеольно б.м. изгибаний 2-го порядка; 2) для существования C^m-гладких б.м. изгибаний 1-го порядка ($m \leqslant k$) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одного натурального n было выполнено условие, что функция

$$f(\rho) = \rho^{n^2-2}\frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}$$

принадлежит классу C^m.

В предположении выпуклости поверхности можно получить дополнительные утверждения о жесткости/нежесткоти в классах C^2 и выше.

Литература

1. *Сабитов И.Х.* Жесткость и неизгибаемость «в малом» и «в целом» поверхностей вращения с уплощениями в полюсах // Матем. сб., **204**:10 (2013), 127-160.

ИЗОМОНОДРОМНОЕ КВАНТОВАНИЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ ПОСРЕДСТВОМ АВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Б.И. Сулейманов
bisul@mail.ru

УДК 517.925.51

Строятся решения двух временных уравнений Шредингера, определяемых автономными гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы, общие решеня которых выписываются через черешения первого и второго уравнений Пенлеве. Данные решения временных уравнений Шредингера явным образом выписываются через решения линейных уравнений метода изомонодромных деформаций для первого и второго уравнений Пенлеве.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, квантование, уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации

Isomonodromic quantization of the first and second Painleve equations by autonomous Hamiltonian systems with two degrees of freedom

We construct the solutions for two non-stationary Schrödinger equations defined by autonomous Hamiltonian systems with two degrees of freedom, whose common solutions are written out in terms of the first and second Painleve equations. The solutions of the non-stationary Schrödinger equations are explicitly written through the solutions of the linear equations of the method of isomonodromic deformations for the first and second Painlevé equations

Keywords: Hamilton systems, quantization, Schrödinger equation, Painlevé equations, isomonodromic deformations

Строятся решения двух временных уравнений Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_{1,2}(x, y, -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y})\Psi, \tag{4.1}$$

определяемых автономными гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы с гамильтонанами $H_{1,2}(q_1, q_2, p_1, p_2)$, общие решеня которых выписываются через решения первого $\varphi''_{\tau\tau} = 6\varphi^2 + \tau$ и второго $\varphi''_{\tau\tau} = 2\varphi^3 + \tau\varphi$ уравнений Пенлеве. Данные решения временных уравнений Шредингера явным образом выражаются через решения линейных уравнений метода изомонодромных деформаций для первого и второго уравнений Пенлеве.

Сулейманов Булат Ирекович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН(Уфа, Россия); Suleimanov Bulat Irekovich, Institut of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science Ufa, Russia)

КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА С НЕСКОЛЬКИМИ РЕЗЕРВУАРАМИ

А.Е. Теретёнков
taemsu@mail.ru

УДК 517.958

Рассматривается точно-решаемая модель квантовой системы с конечным числом уровней, взаимодействующей с несколькими независимыми резервуарами. Явное решение уравнения Шрёдингера для системы и резервуаров сравнивается с решениями приближённых кинетических уравнений для редуцированной матрицы плотности системы, распространённых в физической литературе.

Ключевые слова: немарковость, точное решение, уравнение Шредингера, уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

Quantum non-Markovian evolution with several reservoirs

Exactly solvable model of the quantum system with a finite number of levels interacting with several independent reservoirs is considered. An explicit solution of the Shroedinger equation for the system and the reservoirs is compared with solutions of approximate master equations (widespread in physical literature) for a reduced density matrix of the system.

Keywords: non-Markovianity, exactly solvable, Shroedinger equation, Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad equation

Рассматривается гильбертово пространство

$$\mathcal{H} \equiv (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N) \otimes \bigotimes_{i=1}^{N} \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R})),$$

где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^N$ — $(N+1)$-мерное гильбертово пространство ($N \in \mathbb{N}$) с выделенным одномерным подпространством. Обозначим ортонормированный базис в таком пространстве $|i\rangle, i = 0, 1, \ldots, N$, причём $|0\rangle$ соответствует выделенному подпространству. $\mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ — бозонные фоковские пространства, которые описывают резервуары. Обозначим $|\Omega\rangle$ вакуумный вектор. Кроме того, введём операторы рождения и уничтожения: $[b_{k,i}, b^\dagger_{k',j}] = \delta_{ij}\delta(k-k')$, $[b_{k,i}, b_{k',j}] = 0$, $b_{k,i}|\Omega\rangle = 0$.

Мы будем рассматривать уравнение Шрёдингера

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = -i\hat{H}|\Psi(t)\rangle, \tag{1}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-20154).

Теретёнков Александр Евгеньевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Математический институт им. В.А. Стеклова (Москва, Россия); Teretenkov Alexander (Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_S \otimes I + I \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I$, где

$$\hat{H}_S = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} J_{ij} |i\rangle\langle j| = 0 \oplus H_S, \qquad i,j = 1,\ldots,N, \tag{2}$$

$$\hat{H}_B = \sum_{i=1}^{N} \int \omega_k b^\dagger_{k,i} b_{k,i} dk, \tag{3}$$

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^{N} \int \left(g^*_k |0\rangle\langle i| \otimes b^\dagger_{k,i} + g_k |i\rangle\langle 0| \otimes b_{k,i} \right) dk, \tag{4}$$

и начальным условием вида

$$|\Psi(0)\rangle = (|\psi(0)\rangle + \psi_0(0)|0\rangle) \otimes |\Omega\rangle, \qquad \langle 0|\psi(0)\rangle = 0, \tag{5}$$

Под редуцированной матрицей плотности системы мы будем понимать

$$\rho_S(t) \equiv \mathrm{tr}_R \, |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|, \tag{6}$$

где под tr_R понимается частичный след по пространству $\bigotimes_{i=1}^{N} \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$.

Основной результат доклада может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $|\Psi(t)\rangle$ — решение задачи Коши, определённой формулами (1)–(5), и, кроме того, пусть интеграл*

$$G(t) = \int |g_k|^2 e^{-i\omega_k t} dk$$

сходится и определяет непрерывную функцию $G(t)$, тогда редуцированная матрица плотности $\rho_S(t)$, определённая формулой (6), может быть вычислена по формуле

$$\rho_S(t) = 0 \oplus |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \overline{\psi}_0(0)|\psi(t)\rangle\langle 0| + \psi_0(0)|0\rangle\langle\psi(t)| + (1 - ||\psi(t)||^2)|0\rangle\langle 0|,$$

где $|\psi(t)\rangle$ однозначно определяется как решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_S|\psi(t)\rangle - \int_0^t ds\, G(t-s)|\psi(s)\rangle,$$

с начальным условием $|\psi(t)\rangle|_{t=0} = |\psi(0)\rangle$, где H_S определён формулой (2).

Полученное выражение для редуцированной матрицы плотности позволяет, в рамках описанной модели, сравнить точную немарковскую динамику и проверить предсказания приближённых немарковских уравнений, а именно, уравнения Накажимы-Цванцига в приближении Борна, уравнения Редфилда и уравнения Редфилда в секулярном приближении [1]. Эти уравнения широко распространены в физической литературе, но строгое математическое обоснование получило только последнее уравнение в рамках

метода стохастического предела [2]. Кроме того, можно показать, что уравнение Редфилда в секулярном приближении имеет вид уравнения Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада и потому определяет вполне положительную динамику. Таким образом, результаты представленной работы важны для изучения условий применимости двух оставшихся приближённых уравнений, которые поняты значительно меньше и, главным образом, лишь на физическом уровне строгости. Для некоторых специальных видов функции $G(t)$ на основе методов, разработанных в [3], и теоремы 1 в докладе будут приведены явные примеры таких условий.

Литература

1. *Бройер Х.П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем — М.-Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2010.

2. *Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. — Berlin: Springer, 2002.

3. *Теретёнков А.Е.* Метод псевдомод и вибронные немарковские эффекты в светособирающих комплексах // Тр. МИАН, **306** (2019), в печати; arXiv:1904.01430.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭФФЕКТОВ СИСТЕМ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БИЛЛИАРДАМИ.

А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина

atfomenko@mail.ru, aivenirra@gmail.com

УДК 517.938.5

Биллиард – это классическая динамическая система, описывающая движение материальной точки в плоской области, с абсолютно упругим отражением от границы. Биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик интегрируем. Динамическая система биллиардной книжки – комплекс, склеенный из плоских биллиардов вдоль границ, также интегрируема. Для классификации топологии таких систем авторы применили классический подход А.Т.Фоменко и Х.Цишанга, основанный на вычислении меченых молекул. Оказалось, что многие эффекты, наблюдаемые в задачах физики и механики моделируются системами на подходящих биллиардных книжках.

Ключевые слова: интегрируемая система, биллиард, инвариант Фоменко-Цишанга

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-6399.2018.1, соглашение №075-02-2018-867) и РФФИ (грант №16-01-00378-а).

Фоменко Анатолий Тимофеевич, акад. РАН, проф. МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anatoly Fomenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Ведюшкина Виктория Викторовна, к.ф.-м.н., асс., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Viktoria Vedyushkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Realizations of effects of systems of physics and mechanics by integrable billiards.

Billiards is a classical dynamic system describing the motion of a material point in a flat domain, with an absolutely elastic reflection on the boundary. Billiards bounded by arcs of confocal quadrics is integrable. The dynamic billiard book system - a complex glued from flat billiards along the borders is also integrable. To classify the topology of such systems, the authors applied the classical method of A.T. Fomenko and H.Zieschang based on the calculation of marked molecules. It turned out that many effects observed in the problems of physics and mechanics are modeled by systems on suitable billiard books.

Keywords: integrable system, billiard, Fomenko-Zieschang invariant

Рассмотрим часть плоскости, ограниченную софокусными эллипсами и гиперболами. Биллиард в такой области будет интегрируем (см. [1]): прямые, на которых лежат звенья траектории-ломаной касаются фиксированной для траектории квадрики (эллипса или гиперболы), принадлежащей тому же софокусному семейству. Для изучения топологии таких биллиардов можно применить подход А.Т.Фоменко и Х.Цишанга [2] основанный на вычислении так называемых меченых молекул – графов Риба дополнительного интеграла, снабженный информацией о структуре бифуркаций (атомов) и о их склейке вдоль граничных торов. Инварианты Фоменко-Цишанга полностью описывают топологию изоэнергетических поверхностей динамических систем с точностью до *лиувиллевой эквивалентности* – сохраняющего ориентацию послойного диффеоморфизма, сохраняющего к тому же ориентацию критических окружностей. В результате молекулы Фоменко-Цишанга иллюстрируют множество эффектов физики и механики динамических систем, к примеру поведение замыканий решений систем и их устойчивость.

Инварианты Фоменко-Цишанга для плоских интегриуремых биллиардов описывают ровно семь неэквивалентых слоений. Расширив класс биллиардов, а именно перейдя к так называемым топологическим биллиардам и биллиардным книжкам – многообразиям и комплексам, склеенных из плоских биллиардов вдоль корешков, получаем более богатый класс инвариантов Фоменко-Цишанга. Путем сравнения полученных инвариантов с уже ранее вычисленными молекулами систем физики и механики авторами было обнаружено что, топологические биллиарды во многих случаях моделируют (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны) важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы [3]. В настоящий момент наиболее яркими результатами в этом направлении является эффект понижения степени дополнительного интеграла, а также моделирования всех геодезических потоков, обладающих интегралами степени не выше 2, на ориентируемых поверхностях.

Понижение степени дополнительного интеграла. В теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы широко известны системы, интегрируемые при помощи интегралов больших степеней,

например, 3 и 4 (см. [2]). К таким системам относятся, например, знаменитые системы Ковалевской, а также её обобщения — системы Ковалевской–Яхьи и аналог системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ — (здесь дополнительный интеграл имеет степень 4), Горячев–Чаплыгин–Сретенский (степень дополнительного интеграла равна 3), Дуллина–Матвеева (степень 3), а также сравнительно недавно открытый случай интегрируемости Соколова (интеграл степени 4). Эти системы характеризуются достаточно сложным поведением интегральных траекторий. Отметим, что во многих классических случаях интегрируемости дополнительный интеграл квадратичен (системы Эйлера, Якоби, Лагранжа, Жуковского, Клебша и др.). Изучение систем с интегралами степеней 3, 4 и выше обычно существенно сложнее по сравнению с интегралами степени 2. Поэтому широко известна проблема возможного понижения степеней интегралов 3 и 4. А именно, можно ли подобрать для данной системы интеграл степени 1 или 2? Оказывается, в общем случае к этому есть топологические препятствия. Опираясь на принцип Мопертюи, А.В.Болсинов и А.Т.Фоменко доказали, что, например, интеграл степени 4 случая Ковалевской и интеграл степени 3 случая Горячева–Чаплыгина не сводятся к линейным и квадратичным интегралам. Неожиданно оказывается, что при помощи интегрируемых биллиардов можно понижать степень интегралов 3 и 4 некоторых известных систем на ряде изоэнергетических 3-поверхностей. Более того, при этом интегралы степени 3 и 4 сводятся к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде. Такая каноническая редукция (к одному и тому же интегралу) стала возможной благодаря переходу к, вообще говоря, кусочно-гладким лиувиллевым эквивалентностям.

Моделирование геодезических потоков.

Теорема 1. *Пусть на двумерной ориентированной поверхности задан интегрируемый геодезический поток степени не выше 2. Тогда алгоритмически строится интегрируемый биллиард лиувиллево эквивалентный этому геодезическому потоку.*

Замечание. Согласно теореме В.В. Козлова если на двумерной поверхности существует аналитически интегрируемый геодезический поток, то такая поверхность гомеоморфна сфере, тору, бутылке Клейна или проективной плоскости. В свою очередь интегрируемые геодезические потоки степеней один и два на сфере и торе были описаны ранее. Соответствующие инварианты Фоменко-Цишанга были вычислены Е.Н. Селивановой, В.В. Калашниковым, В.С. Матвеевым, Т.З. Нгуен, Л.С. Поляковой. Авторами было обнаружено что в каждом случае можно подобрать топологический биллиард так, чтобы его инвариант Фоменко-Цишанга совпал с инвариантом соответствующего геодезического потока.

Литература

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во МГУ, 1991.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

3. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН. 2015. — **465**:2, 150–153.

КАНТОРОВЫ МНОЖЕСТВА С ПРОЕКЦИЯМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О.Д. Фролкина
olga-frolkina@yandex.ru

УДК 515.12

Мы показываем, что ожерелье Антуана может служить примером канторова множества в R^3, все проекции которого одномерны и связны; обсуждаем некоторые многомерные обобщения этого наблюдения. Все проекции типичного канторова множества в R^N являются канторовыми множествами. Эти результаты автора дают частичные ответы на вопросы Дж. Кобба (1994).

Ключевые слова: канторово множество, размерность, проекция, теорема Бэра о категории

Cantor sets with projections of positive dimension

We show that an Antoine's necklace can serve as an example of a Cantor set in R^3 all of whose projections are one-dimensional and connected; some higher-dimensional generalizations of this will also be presented. For a typical Cantor set in R^N, all projections are Cantor sets. These results provide partial answers to questions of J. Cobb (1994).

Keywords: Cantor set, dimension, projection, Baire category theorem

Л. Антуан привел пример канторова множества на плоскости, все проекции которого такие же, как у правильного шестиугольника [2, **9**, p.272; fig.2, p.273]. К. Борсук построил канторово множество в R^N, проекция которого на любую гиперплоскость содержит $(N-1)$-мерный шар, эквивалентно, имеет размерность $(N-1)$ [4]. Дж. Кобб построил канторово множество в R^3, проекция которого на любую 2-плоскость одномерна [5], и поставил общий вопрос: существует ли, для заданных чисел $N > m > k > 0$, такое канторово множество в R^N, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ? Для случаев $k = m-1$ и $m = N-1$ такие множества построены в работах [6] и [3], соответственно.

Конструкция Кобба достаточно сложная. В докладе будет показано, что ожерелье Антуана [1, **78**, p. 91–92] может служить другим примером канторова множества в R^3, все проекции которого одномерны и, более того,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00169).

Фролкина Ольга Дмитриевна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Olga Frolkina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

связны. Мы показываем, что всякое канторово множество в R^N, $N \neq 4$, посредством малой изотопии пространства R^N может быть сдвинуто на такое множество, проекция которого на любую $(N-1)$-плоскость $(N-2)$-мерна.

Далее, оказывается, что канторовы множества с многомерными проекциями являются "исключительными" в следующем смысле. Пусть $\mathcal{C}(R^N)$ — пространство всех канторовых множеств в R^N, снабженное метрикой Хаусдорфа. Известно, что $\mathcal{C}(R^N)$ является пространством Бэра. Мы доказываем [7], что имеется такое плотное G_δ-множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(R^N)$, что для всякого $X \in \mathcal{P}$ и всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset R^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Это дает частичный ответ на вопрос Кобба [5].

Литература

1. *Antoine L.* Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. — Thèses de l'entre-deux-guerres, vol. 28, 1921. http://eudml.org/doc/192716

2. *Antoine L.* Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math., **5** (1924), 265-287.

3. *Barov S., Dijkstra J.J., van der Meer M.* On Cantor sets with shadows of prescribed dimension // Topol. Appl., **159** (2012), 2736-2742.

4. *Borsuk K.* An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points // Fund. Math., **34** (1947), 272-277.

5. *Cobb J.* Raising dimension under *all* projections // Fund. Math., **144**:2 (1994), 119-128.

6. *Frolkina O.* A Cantor set in with "large" projections // Topol. Appl., **157**:4 (2010), 745-751.

7. *Frolkina O.* All projections of a typical Cantor set are Cantor sets // Topol. Appl., сдано в редакцию.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.П. Хромов

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,\infty], \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Функции $q(x)$, $\varphi(x)$ – комплекснозначные, причём $q(x) \in L[0,1]$. *Классическим решением* называется функция $u(x,t)$ непрерывная вместе с $u_t(x,t)$ и $u_x(x,t)$, причём $u_t(x,t)$ $(u_x(x,t))$ абсолютно непрерывна по t (по x), удовлетворяющая почти всюду уравнению (1) и условиям (2) и (3). Методом

Хромов Август Петрович, д.ф.-м.н., профессор, Саратовский государственный университет (Саратов, Россия); Khromov Avgust(Saratov State University, Saratov, Russia)

Фурье, опираясь на сведения из [1] и используя расходящиеся ряды, мы получим следующий результат.

Теорема. *Для того, чтобы $u(x,t)$ была классическим решением задачи* (1)–(3)*, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.*

Ранее в [2] эта теорема установлена при дополнительном условии $L\varphi \in L_p[0,1]$ $(p>1)$, где $L\varphi=-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)$.

Литература

1. *В.В. Корнев, А.П. Хромов.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // ЖВМ и МФ, **59**:2 (2019), 107-121.

2. *А.П. Хромов.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // ЖВМ и МФ, **56**:10 (2016), 1795-1809.

ЛАПЛАСИАНЫ И ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГОГАННИКАХ

А.И. Шафаревич

shafarev@yahoo.com

УДК 514.763.8

Обсуждаются базовые свойства лапласианов и волновых уравнений на двумерных многогранниках. Эти свойства оказываются тесно связанными с комплексной структурой на многограннике, поведением геодезических на нем, а также с известными задачами аналитической теории чисел.

Ключевые слова: многогранники, лапласианы, волновое уравнение

Laplacians and wave equations on two-dimensional polyhedra

The basic properties of Laplacians and wave equations on two-dimensional polyhedra are discussed. These properties turn out to be closely related to the complex structure on a polyhedron, the behavior of geodesics on it, and also to the well-known problems of analytic number theory.

Keywords: polyhedra, Laplacians, wave equations

Шафаревич Андрей Игоревич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrei Shafarevich (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Обсуждаются базовые свойства лапласианов и волновых уравнений на двумерных многогранниках. В частности, описаны ядра лапласианов с произвольными самосопряженными краевыми условиями в вершинах, формулы следов для операторов теплопроводности, структура решений волнового уравнения и статистика числа отраженных волн. Перечисленные свойства оказываются тесно связанными с комплексной структурой на многограннике, поведением геодезических на нем, а также с известными задачами аналитической теории чисел.

О ТРЁХ КЛАССАХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ю.В. Шеретов
Sheretov.YV@tversu.ru

УДК 517.95, 532.5

Описаны три непересекающихся класса точных решений стационарной квазигидродинамической системы.

Ключевые слова: Квазигидродинамическая система, уравнения Эйлера и Навье–Стокса, точные решения

On three classes of exact solutions of a stationary quasi-hydrodynamic system

Three non-intersecting classes of exact solutions of the stationary quasi–hydrodynamic system are described.

Keywords: Quasi–hydrodynamic system, Euler and Navier–Stokes equations, exact solutions

Казигидродинамическая (КГД) система, предложенная автором, отличается от полных уравнений Навье–Стокса добавочными дивергентными членами, содержащими малый положительный параметр τ – среднее время свободного пробега молекул. Феноменологический вывод КГД системы из интегральных законов сохранения массы, импульса, момента импульса, полной энергии и энтропии для подвижного индивидуального объёма изложен в [1]. В книге [2] исследована упрощённая диссипативная КГД система для описания течений слабосжимаемой вязкой жидкости, обладающая семейством точных физически осмысленных решений. В стационарном случае эти решения можно разделить на три непересекающихся класса.

Решения первого класса удовлетворяют сразу трём системам: Эйлера, Навье–Стокса и КГД. К ним можно отнести стационарные безвихревые течения жидкости с соленоидальным полем скорости. Оно вычисляется путём сложения интеграла Био–Савара и градиента гармонической функции.

Шеретов Юрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Тверской государственный университет (Тверь, Россия); Yurii Sheretov (Tver State University, Tver, Russia)

Распределение давление находится по формуле Бернулли. Решения второго класса являются общими для уравнений Навье–Стокса и КГД. Однако они не подходят для системы Эйлера. Примерами являются стационарные течения Пуазейля в плоском канале и трубе (и их обобщения) [3]. Существуют также точные решения третьего класса, специфические для системы КГД и не обращающие уравнения Эйлера и Навье–Стокса в истинные равенства. Решение КГД системы, принадлежащее к третьему классу, построено в [1]. Оно описывает установившееся течение жидкости в плоском канале с пористыми стенками, причём верхняя стенка является подвижной.

Литература

1. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.

2. *Шеретов Ю.В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. — Тверь: Тверской государственный университет, 2016.

3. *Шеретов Ю.В.* Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2(2017), 5-15.

УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СВЯЗНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

А.И. Штерн

aishtern@mtu-net.ru

Основные результаты состоят в следующих необходимых и достаточных условиях непрерывности ограничения заданного локально ограниченного представления связной локально компактной группы на коммутант группы.

Теорема 1. Пусть G – связная локально компактная группа, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_G$ – семейство всех таких компактных нормальных подгрупп N в G, что факторгруппа G/N является группой Ли, и пусть π – локально ограниченное конечномерное представление G в нормированном пространстве E.

(i) Если в $\mathcal{N}$ существует N, для которого $\pi(N)$ абелево, то π непрерывно на коммутанте группы G во внутренней топологии Ли коммутанта.

(ii) Если $\pi(N)$ неабелева для любого N в $\mathcal{N}$, то ограничение π на коммутант G разрывно.

Теорема 2. Пусть G – связная локально компактная группа, пусть G' – коммутант G, и пусть π – локально ограниченное конечномерное представление группы G в нормированном пространстве E. Следующие условия эквивалентны.

Штерн Александр Исаакович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander I. Shtern, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

(i) Группа финальных разрывов группы G содержится в шаре (в пространстве $L(E)$) радиусом менее $\sqrt{3}$ с центром в тождественном операторе 1_E.

(ii) Группа финальных разрывов группы G единична.

(iii) Ограничение π на G' непрерывно.

CONTROLLABILITY OF DYNAMIC INEQUALITIES ON TWO DIMENSIONAL MANIFOLDS AND ITS STABILITY

A.A. Davydov, Yu.A. Skinder

davydov@mi-ras.ru, dzhus33@mail.ru

UDC 517

We analyze controllability of generic dynamic inequalities with locally bounded derivatives on two dimensional sphere (or two-dimensional smooth manifold) and show that it local controllability properties are stable. We prove that the structural stability of such inequalities on a sphere is equivalent to their structural stability on a plane either in the case of complete controllability or the absence of admissible velocities near infinity. In particular, the typical simplest inequality on a sphere is structurally stable.

Keywords: dynamic inequality, controllability, structural stability

The analysis of system controllability is one of the main tasks in the control theory. The stability of controllability properties of a system with respect to small changes in its parameters is its important characteristic, which is essential for applications. The problem of analyzing the controllability of dynamic inequalities goes back to the paper [1] by A.D. Myshkis. In [2] this problem was completely solved for the case of local controllability properties of generic dynamic inequalities with locally bounded derivatives on surfaces. Such an inequality $F \leqslant 0$ is defined by a smooth F function on the tangent bundle, which has bounded set of velocities satisfying the inequality at each point of the surface.

Then, the structural stability of typical simplest dynamic inequalities on a plane with either a finite domain of existence of admissible velocities or local controllability near infinity was proved [3]. Stability here is understood as in the classical definition by Andronov-Pontryagin [4] with the amendment that the trajectory of a point is considered to be the union of its positive and negative orbits, and a considered dynamic inequalities are defined by

$$(\dot{x} - a(x,y))^2 + (\dot{y} - b(x,y))^2 \leqslant f(x,y)$$

The work is done by partial financial support of the Russian Foundation for Basic Research by the project No. 19-51-50005 JR_a.

Alexey Davydov, (Lomonosov Moscow State University, NUST “MISiS” Moscow, Russia)

Yulia Skinder (Vladimir State University named Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia)

with some smooth functions a, b and f such that either $f < 0$ or $f < a^2 + b^2$ near infinity. This result is easily extended for generic inequalities with strictly convex sets of admissible velocities in each tangent plane.

These results are connected with structural stability of characteristic net of generic linear second order mixed type equations on the plane with bounded domain of hyperbolicity [3] and with stability of asymptotic lines on surfaces immersed in 3-dimensional arithmetical space [4].

We discuss these results and the generalization of the result on structural stability to the case of two-dimensional sphere.

The work is done by partial financial support of the Russian Foundation for Basic Research by the project No. 19-51-50005 JR_a.

References

1. *Myshkis A.D.* On dfferential inequalities with locally bounded derivatives // Notes of the Faculty of Mechanics and Mathematics and Kharkov Mathematical Society, **30** (1964), 152-163.

2. *Davydov A.A.* Local controllability of typical dynamical inequalities on surfaces // Proc. Steklov Inst. Math., **209** (1995), 73–106.

3. *Grishina Yu.A., Davydov A.A.* Structural Stability of Simplest Dynamical Inequalities // Proc. Steklov Inst. Math., **256** (2007), 80-91.

4. *Garcia R., Gutierrez C., Sotomayor J.* Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$ // Bull. sci. math., **123** (1999), 599–622.

NUCLEAR DECAY OSCILLATIONS AND NONLINEAR SCHROEDINGER EQUATION

S. Mayburov

mayburov@mail.ru

UDC 51

Some experiments reported small annual and daily oscillations f radioactive nucleus decay parameters, which contradict to standard nuclear theory. We argue that small nonlinear term describing novel should be added to Schroedinger equation to account specific matter interaction with gravity. In Gamow theory, α-decay described as quantum tunneling of α-particle through potential wall on nucleus edge, our model nonlinear Hamiltonian induces nucleus decay rate variations, which describe observed variations consistently.

Keywords: nonlinear Schroedinger equation, nuclear decay anomalies, quantum tunneling
MSC: 01A05

Sergey Mayburov, Lebedev Institute of Physics, Moscow, Russia

Natural radioactivity law is one of most fundamental laws of modern physics, in accordance with it, the nuclear decay parameters are time-invariant and practically independent of environment. However, some recent experiments have reported the evidence of periodic modulations of nuclear $\alpha-$ and $\beta-$decay parameters of the order of 10^{-3} and with typical periods of one year, one day or about one month [1,2]. The possible mechanism of such decay parameter oscillations is still unclear, in this paper, these oscillation effects studied in the framework of quantum-mechanical (QM) theory of unstable system decay. In such approach, radioactive nucleus treated as the metastable quantum state, its evolution can be described as the quantum tunneling of decay products through the potential barrier constituted by nuclear shell and nucleus Coulomb field. Notorious example is Gamow theory of α-decay. However, in its standard formulation Gamow theory excludes variations of decay parameters under influence of Sun gravity and similar factors. In this paper, it's argued that such influence can appear, if one applies for decay description the nonlinear modification of standard QM, which developed extensively in the last years [3,4].

There are two different approaches to the nature of QM nonlinearity. The main one supposes that dynamical nonlinearity is universal and generic property of quantum systems. In particular, nonlinear evolution terms can influence their free motion, inducing soliton-like corrections to standard QM wave packet evolution . Alternative concept of QM nonlinearity was proposed by Kibble, it postulates that free system evolution is linear, nonlinear dynamics related exclusively to system interactions with the fields [3]. However, Kibble formalism can't be applied directly to nonrelativistic processes, like nucleus decay. So we start from consideration of universal nonlinear models and develop their modification, which can incorporate nonlinear interactions at low energies.

In the universal approach to QM nonlinearity, it supposed that particle evolution described by nonlinear Schroedinger equation of the form

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\bigtriangledown^2\psi + V(\vec{r},t)\psi + F(\psi,\bar{\psi})\psi \tag{4.1}$$

where m is particle mass, V is external potential, F is arbitrary functional of system state. Currently, most popular and elaborated nonlinear QM model of universal type is by Doebner and Goldin (DG) [4], in its formalism, the simplest variant of nonlinear term is

$$F = \hbar^2\lambda(\bigtriangledown^2 + \frac{|\bigtriangledown\psi|^2}{|\psi|^2}) \tag{4.2}$$

where λ is real or imaginary constant. Below we'll consider F terms both with imaginary and real λ for $|\lambda| << 1$, but results presented here were obtained for real λ. Main properties of eq. (4.1) for imaginary λ studied in [4], they can be promptly extended on real λ and summarized for both cases as follows: (a) The probability is conserved. (b) The equation is homogeneous. (c) The equation is Euclidian- and time-translation invariant (for $V = 0$). (d) Noninteracting particle subsystem remain uncorrelated (separation property). Distinct values of λ can occur for different particle species. (e) Writing $< Q >= \int\bar{\psi}\hat{Q}\psi d^3x$ for operator expectation value, in particular, since $\int\bar{\psi}F\psi d^3x = 0$, the energy functional for a solution of (4.1) is $< i\hbar\partial_t >=< H_0 >$.

As was mentioned above, quantum model of metastable state decay describes it as particle tunneling through potential barrier. To illustrate the influence of nonlinear DG term on particle tunneling, consider 1-dimensional plane wave tunneling through the potential barrier. Suppose that the rectangular barrier of the height V_0 located between $x = 0$ and $x = a$, and the plane wave particle state with the energy $E < V_0$ spreads from $x = -\infty$. Long-living metastable states appear for small transmission coefficient $D \to 0$, which corresponds to barrier width $a \to \infty$ for fixed E, V_0. For

example, for ^{238}U α-decay $D \approx 10^{-37}$. We'll study solutions of equation (4.1), basing on its asymptotic in this limit.

To describe tunneling features, it's necessary to find equation solution for $0 < x < a$ with $\psi(a) \to 0$ for $a \to \infty$, which is the main term of tunneling state. For real λ, such solution of eq. (4.1) is $\psi_1(x) = B\exp(-\chi x)$ where

$$\chi = \frac{1}{\hbar}\frac{[2m(V_0 - E)]^{\frac{1}{2}}}{(1 - 4\Gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

Here $\Gamma = \lambda m$, B is normalization parameter calculated in [5]. From that transmission coefficient D can be estimated with good accuracy accounting only main term ψ_1, it gives $D = |B_1|^2\exp(-2\chi a)$, so that D depends on λ exponentially and can change system life-time significantly. Gamow theory of nucleus α-decay supposes that free α-particle already exists inside the nucleus, its total energy E is smaller than height of potential barrier constituted by nuclear forces and Coulomb potential. For real nucleus the barrier potential isn't rectangular, but has complicated form described by some function $V(r)$. In this case, to calculate transmission rate D WKB approximation for Hamiltonian of (4.1) used; its applicability to our nonlinear Hamiltonian can be easily checked [5].

To study decay parameter variations in external field, we'll suppose that nonlinear term F depends on external field A. In our model, such field is gravity, characterized usually by its potential $U(\vec{R}, t)$. In this case, U should be accounted in evolution equation twice. First, mU should be added to H_0, so that it changed to $H_0' = H_0 + mU$; second, nonlinear H term F can depend on U or some its derivative. For minimal modification of DG model we'll assume that for F ansatz of (4.2) its possible dependence on external field is restricted to parameter λ dependence: $\lambda = f(U)$, so now λ isn't constant, but the function of $\vec{R}$ and t. It supposed also that $f \to 0$ for $U \to 0$, so that free particle evolution is linear.

Considered model doesn't permit to derive completely λ dependence on Sun gravity, but in this approach, it can be obtained from comparison with experimental results for ^{214}Po α-decay. We'll suppose that λ is function of potential $U(\vec{R}_n, t)$ where $\vec{R}_n$ is nucleus coordinate in Sun reference frame (SRF). Then, for small λ it follows[5]

$$D \approx (1 + 2\phi\Gamma)\exp(-\phi)$$

For ^{214}Po decay, its life-time $\tau_0 = 16.4 * 10^{-6}$ sec, model estimate gives $\phi \approx 60$. For annual τ variation the best fit for 3 year exposition has main harmonics

$$\tau_a(t) = \tau_0[1 + A_a \sin w_a(t + \varphi_a)]$$

where t defined in days, $A_a = 9.8 * 10^{-4}$, $w_a = 2\pi/365$, $\varphi_a = 174$ days [2]. Remind that Earth orbit is elliptic, the minimal distance from Sun is at about January 3 and maximal one is at about July 5, maximal/minimal orbit radius difference is about $3 * 10^{-2}$. Plainly, the minima and maxima of U time derivative $\partial_t U$ will be located approximately in the middle between these dates, i.e. about April 5 and October 3, correspondingly. In general, this dependence described as

$$\partial_t U = K^a \sin w_a(t + \varphi_u)$$

here $\varphi_u = 185$ days, $K^a = 1.5\, m^2/sec$, as the result, such model φ_u value in a good agreement with experimental φ_a value. Thereon, it means that plausible data fit is $\lambda(t) = g\partial_t U$, where g is interaction constant, which can be found from data for ^{214}Po decay. It follows from the assumed equality of oscillation amplitudes $A_a = 2\phi m g K^a$ that the resulting $g = .35 * 10^{-8}\ \frac{sec^3}{m^2 MeV}$.

Proposed formalism of QM nonlinearity has universal character, so beside nucleus decays, such temporary variations under influence of Sun and Moon gravity can be observed, in principle, for other systems in which metastable states and tunneling play important role. In particular, it can be some chemical and biochemical reactions, molecular absorption by solids and liquids, biological processes, etc.

References

1. *Fischbach E. et al.* Time-Dependent Nuclear Decay Parameters // Rev. Space Sci., **145** (2009), 285–336.

2. *Alekseev E. et al.* Results of search for daily and annual variations of Po-214 half-life // Phys. Part. Nucl., **47** (2016), 1803–1816.

3. *Kibble T.* Relativistic model of nonlinear quantum mechanics // Comm. Math. Phys., **64** (1978), 73–82.

4. *Doebner H.-D, Goldin G.* On general nonlinear Schoedinger Equation // Phys. Lett., **A164** (1992), 397–401.

5. *Mayburov S.* Oscillations of nucleus decay parameters and quantum-mechanical nonlinearity // Int. J. Theor. Phys., (2019), to be published; Arxive 1812.01455.

FRIEDRICHS – FADDEEV MODEL: COMPLEX DEFORMATION AND RESONANCES

A.K. Motovilov

motovilv@theor.jinr.ru

UDC 517.984

We consider the Friedrichs – Faddeev model with the potential operator having a holomorphic kernel. First, we derive explicit representations for the transition operator and scattering matrix continued on unphysical energy sheet(s) in terms of these same operators taken exclusively on the physical sheet. Then we allow the Friedrichs-Faddeev Hamiltonian undergo a complex deformation and prove that any deformation resonance (a non-real eigenvalue of the deformed Hamiltonian) is nothing but a scattering matrix resonance, that is, it corresponds to a pole of the scattering matrix on the respective unphysical energy sheet.

Keywords: Friedrichs – Faddeev model, complex deformation, unphysical sheets, resonances
MSC: 47A55

Alexander K. Motovilov, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna, Russia, and Dubna State University, Dubna, Russia

1. Assume that $\mathfrak{h}$ is a Hilbert space and let $\Delta = (a, b)$ where $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Hamiltonian of the Friedrichs-Faddeev model is given by

$$H = H_0 + V \tag{1}$$

where H_0 is the multiplication by the independent variable in $L_2(\Delta, \mathfrak{h})$,

$$(H_0 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad \lambda \in \Delta, \qquad f \in L_2(\Delta, \mathfrak{h}), \tag{2}$$

and V is an integral operator,

$$(Vf)(\lambda) = \int_a^b V(\lambda, \mu) f(\mu) d\mu. \tag{3}$$

It is supposed that for every $\lambda, \mu \in \Delta$ the quantity $V(\lambda, \mu)$ is a bounded linear operator on $\mathfrak{h}$ such that $V(\lambda, \mu) = V(\mu, \lambda)^*$, and, in addition, V is a Hölder continuous operator-valued function of $\lambda, \mu \in \overline{\Delta}$. Furthermore, one requires

$$V(a, \mu) = V(b, \mu) = V(\lambda, a) = V(\lambda, b) = 0, \qquad \text{in case of finite } a \text{ or/and } b, \tag{4}$$

or imposes appropriate constraints on the behavior of $V(\lambda, \mu)$ at $|\lambda|, |\mu| \to \infty$, in case of infinite a or/and b.

A starting version of the model (1)–(4) was introduced by K.Friedrichs [1] who considered the Hamiltonian $H_\epsilon = H_0 + \epsilon V$, $\epsilon > 0$, with H_0 and V given by (2) and (3) for the one-dimensional Hilbert space $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$ and $\Delta = (-1, 1)$. Friedrichs studied variation of the continuous spectrum of H_0 under the perturbation ϵV. He has proven that if ϵ is sufficiently small then the spectrum of H_ϵ remains absolutely continuous and still fills the segment $[-1, 1]$. In [2], Friedrichs has extended this result to the case of arbitrary Hilbert space $\mathfrak{h}$ and arbitrary finite or infinite interval Δ. More precisely, he has proven that if ϵ is small enough then H_ϵ is unitarily equivalent to H_0 and, hence, the spectrum of H_ϵ is absolutely continuous and fills the set $\overline{\Delta}$.

O.A. Ladyzhenskaya and L.D. Faddeev in [3] have completely dropped the assumption of smallness of the perturbation and studied the operator (1)–(4) with no small ϵ at V. However, instead of the smallness, they required compactness of the values of $V(\lambda, \mu)$ as operators on $\mathfrak{h}$ for all $\lambda, \mu \in \Delta$. Detail proofs for the results of [3] are presented by Faddeev in [4]. Faddeev's in-depth study [4] of the Hamiltonian (1)–(4) is the main reason why this Hamiltonian is now called the Friedrichs-Faddeev model. For later results on the Friedrichs-Faddeev model and its generalizations see [5–7].

2. In the present work we, first, use the approach from the author's papers [8,9] in order to study the structure of the transition operator and scattering matrix for the model (1)–(4) continued on the unphysical energy sheets neighboring the physical one. Here, our additional assumption is that the function $V(\lambda, \mu)$ admits analytic continuation both in λ and μ onto a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ containing Δ. More precisely, we assume that $V(\lambda, \mu)$ is compact-operator-valued and holomorphic in both $\lambda, \mu \in \Omega$. Just for simplicity, the numbers $a, b \in \mathbb{R}$ are assumed to be finite. The above requirement $V(\lambda, \mu) = V(\mu, \lambda)^*$, $\lambda, \mu \in \Delta$ (which is needed for the self-adjointness of V) implies that the domain Ω should be mirror symmetric with respect to the real axis.

We use the standard notation for the resolvents, $R_0(z) := (H_0 - z)^{-1}$, $R(z) := (H - z)^{-1}$, and for the transition operator, $T(z) := V - VR(z)V$. Notice that $R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z)$, $z \notin \sigma(H_0) \cup \sigma(H)$, where $\sigma(L)$ denotes the spectrum of a (closed) operator L. Therefore, the study of the spectral problem for $H = H_0 + V$ is reduced to the study of the transition operator $T(z)$. Our first principal result is the following proposition.

Proposition 1. *The transition operator $T(z)$ admits meromorphic continuation (as an operator-valued function of the energy z) through the cut along the interval (a,b) both from the upper, $\mathbb{C}^+$, and lower, $\mathbb{C}^-$, half-planes of the complex plane $\mathbb{C}$ to the respective parts $\Omega_- := \Omega \cap \mathbb{C}^-$ and $\Omega_+ := \Omega \cap \mathbb{C}^+$ of the unphysical sheets Π_{-1} and Π_{+1} attached to the physical sheet along the upper and lower rims of the above cut. The kernel of the continued operator $T(z)\big|_{\Pi_\ell \cap \Omega_\ell}$, $\ell = \pm 1$, is given by the equality*

$$T(\lambda,\mu,z)\big|_{z\,\in\,\Pi_\ell\,\cap\,\Omega_\ell} = \big(T(\lambda,\mu,z) + 2\pi\mathrm{i}\,\ell\; T(\lambda,z,z)S_\ell(z)^{-1}T(z,\mu,z)\big)\big|_{z\,\in\,\Omega_\ell},$$
$$z \in \Omega_\ell \setminus \sigma^\ell_{\mathrm{res}},$$

with all the entries on the r.h.s. part, including the scattering matrix $S_\ell(z) = I_{\mathfrak{h}} \mp 2\pi\mathrm{i}\ell\, T(z,z,z)$, being taken for the same z on the physical sheet. Notation $\sigma^\ell_{\mathrm{res}}$ is used for the (discrete) set of all those points $\zeta \in \Omega \cap \mathbb{C}^\ell$ where $S_\ell(\zeta)$ has eigenvalue zero.

Representations for the scattering matrix on unphysical sheets are nothing but a simple corollary to Proposition 1.

Corollary 2. *Analytic continuation of the scattering matrix $S_{-\ell}(z)$, $\ell = \pm 1$, to the unphysical sheet Π_ℓ is given by*

$$S_{-\ell}(z)\big|_{z\in\Pi_\ell\,\cap\,\Omega_\ell} = S_\ell(z)^{-1}\big|_{z\in\Omega_\ell}, \qquad z \notin \sigma^\ell_{\mathrm{res}}, \tag{5}$$

where the r.h.s. part is taken for z on the physical sheet.

From (5) it follows that a resonance on the unphysical sheet Π_ℓ corresponds to that energy z in the physical sheet where the scattering matrix $S_{-\ell}(z)$ has eigenvalue zero and, thus, $\sigma^\ell_{\mathrm{res}}$ is just the set of resonances on $\Pi_\ell \cap \Omega$.

3. Then we perform a "complex deformation" of the Friedrichs-Faddeev model. Namely, we consider a family of operators $H_\gamma = H_{0,\gamma} + V_\gamma$ associated with smooth Jordan curves $\gamma \subset \Omega$ obtained by continuous transformation from the interval (a,b), with the end points a, b fixed. The entries $H_{0,\gamma}$ and V_γ are given by $\big(H_{0,\gamma}f\big)(\lambda) = \lambda\, f(\lambda)$ and $\big(V_\gamma f\big)(\lambda) = \int_\gamma V(\lambda,\mu)f(\mu)d\mu, \quad \lambda \in \gamma$. It is assumed that $f \in L_2(\gamma,\mathfrak{h})$ where $L_2(\gamma,\mathfrak{h})$ is the Hilbert space of $\mathfrak{h}$-valued functions of the variable $\lambda \in \gamma$ with the scalar product $\langle f,g\rangle_\gamma = \int_\gamma |d\lambda|\langle f(\lambda), g(\lambda)\rangle_{\mathfrak{h}}$. (Notice that the "usual" complex scaling [10] may be understood as a particular case of the complex deformation, see [11, Section 3].) Complex discrete eigenvalues of H_γ are called *deformation resonances*. Our second principal results is the proposition below.

Proposition 3. *The following equality holds: $\sigma(H_\gamma) \setminus \Omega_\gamma = \sigma_p(H) \setminus \overline{\Delta}$, which means that the spectrum of H_γ outside Ω_γ is purely real and coincides with the corresponding eigenvalue set of H. Furthermore, $\sigma_p(H_\gamma) \cap \Delta = \sigma_p(H) \cap \Delta$, i.e. the eigenvalues of H_γ lying on Δ do not depend on the (smooth) Jordan contour γ. Finally, the spectrum of H_γ inside Ω_γ consists of the scattering-matrix resonances.*

Proposition 3 says that the transformation resonances are simultaneously resonances in the sense of the scattering theory. Recall that, in general, to prove the equivalence of deformation and scattering resonances is rather a hard job (see [12]). In contrast, in the case of the Friedrichs-Faddeev model the proof of such an equivalence is quite easy and illustrative.

The present contribution represents a conference version of the work [11].

References

1. *Friedrichs K.* Über die Spectralzerlegung eines Integraloperators // Math. Ann. **115** (1938), 249–272.

2. *Friedrichs K.O.* On the perturbation of continuous spectra // Comm. Pure Appl. Math. **1** (1948), 361–406.

3. *Ladyzhenskaya O.A., Faddeev L.D.* On continuous spectrum perturbation theory // Dokl. Akad. Nauk SSSR **120** (1958), 1187–1190.

4. *Faddeev L.D.* On a model of Friedrichs in the theory of perturbations of the continuous spectrum // Am. Math. Soc. Transl. **62** (1967), 177–203.

5. *Lakaev S.N.* Some spectral properties of the generalized Friedrichs model // J. Soviet Math. **45** (1989), 1540–1563.

6. *Dyn'kin E.M., Naboko S.N., Yakovlev S.I.* A finiteness bound for the singular spectrum in a selfadjoint Friedrichs model // St. Petersburg Math. J. **3**:2 (1992), 299–313.

7. *Isozaki H., Richard S.* On the wave operators for the Friedrichs-Faddeev model // Ann. Henri Poincaré **13** (2012), 1469–1482.

8. *Motovilov A.K.*. Analytic continuation of S matrix in multichannel problems // Theor. Math. Phys. **95** (1993), 692–699.

9. *Motovilov A.K.* Representations for the three–body T–matrix, scattering matrices and resolvent in unphysical energy sheets // Math. Nachr. **187** (1997), 147–210.

10. *Balslev E., Combes J.M.* Spectral properties of Schrödinger operators with dilation analytic interactions // Commun. Math. Phys. **22** (1971), 280–294.

11. *Motovilov A.K.* Unphysical energy sheets and resonances in the Friedrichs-Faddeev model // Few-Body Systems **60**:21 (2019), 1–9.

12. *Hagedorn G.A.* A link between scattering resonances and dilation analytic resonances in few–body quantum mechanics // Commun. Math. Phys. **65** (1979), 181–188.

RELATIVE TIME DELAY DUE TO FRAME DRAGGING IN THE WEAK FIELD OF THE SPINNING BLACK HOLE

K.K. Nandi, R.N. Izmailov

kamalnandi1952@yahoo.co.in, izmailov.ramil@gmail.com

UDC 517.518

Johannsen proposed a spinning black hole metric that shares the Kerr horizon, has the distinction of being regular everywhere outside the horizon and contains independent parameters marking deviation from the Kerr metric. As such, the metric provides an ideal testing ground of the no-hair theorem of general relativity in the sense that if any of these parameters are observationally found to be non-zero, the theorem would be violated.

Keywords: spinning black hole, no-hair theorem, general relativity

The reported study was funded by RFBR according to the research project no. 18-32-00377.

Kamal Kanti Nandi, PhD, professor, High Energy Cosmic Ray Research Center, University of North Bengal (Darjeeling, India)

Izmailov Ramil Nailevich, PhD, dosent, Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University (Ufa, Russia)

No-hair theorem proposed by Penrose [1] is one of the fundamental conjectures of general relativity that has not yet been violated by observations. One variant of the theorem suggests that stationary, axisymmetric, electrically neutral astrophysical black holes (BH) in vacuum are uniquely described by the Kerr metric characterized only by the mass M and the total angular momentum J [where a $(= J/M)$ is the angular momentum per unit mass]. Since a concrete proof of the theorem is still lacking, several spinning spacetimes deviating from the Kerr metric, called quasi-Kerr metrics [2-4], have been proposed and extensively studied in the literature in order to test this theorem. In this category, Johannsen [5] proposed a new spinning BH metric, which is not a solution any modified gravity theory, that shares the Kerr horizon but deviates from the Kerr metric by infinite number of deviation parameters. For practical purposes, one need not deal with all of these parameters. However, if even one of the deviation parameters is non-zero, no-hair theorem will be violated. The metric offers the advantage that it does not contain pathologies like naked singularities or closed timelike curves suffered by other competing quasi-Kerr metrics. On this ground, Johannsen's BH metric is perfectly suited for directly testing the theorem on *observational* grounds based on time delay. An excellent diagnostic is the structure of photon ring in quasi-Kerr spacetimes that is deformed by non-zero deviation parameters auguring a potential violation of the no-hair theorem [6-8] and we believe that relative time delay (it's not the usual Shapiro delay) could be another useful diagnostic.

The main motivation for the present work comes from several directions: The first is the excellent prospect of testing the no-hair conjecture via the existence of non-zero deviation parameters in the Johannsen metric [5]. Relative time delay effect provides a useful tool in this regard. Second, observations such as extremely rapid fluctuations in the brightness of quasar $1525 + 227$ with characteristic time scale ~ 200 sec [9] could very well be caused by the relative delay of signals due to a spinning BH with mass $M \sim 5 \times 10^8 M_\odot$ situated between the quasar and the observer. And third is the theoretical prediction about the deformation of photon rings shining the boundary of the black hole shadow [10], where visible deformation is caused by non-zero deviation parameters. Therefore, the non-zero deviation parameters are expected to influence the time delay effect as well. These effects motivate us to focus on the relative time delay caused by the ray path difference and the magnification factor of the images in a number of lensing systems.

We shall consider thin-lens geometry since in almost all astrophysical lensing systems, the gravitational lens can be well approximated to be geometrically thin. This is possible when the size of the lens is small compared to both the distances between lens and observer and lens and source, so that the maximal deviation of the straight line light path propagating through unperturbed space-time occurs only in the lens vicinity [11]. These conditions will be maintained in the geometry of the lens configuration we are going to consider, which are the spinning Earth, Sun, galaxies, Pulsar-BH binaries and the BH SgrA*. The first three category of objects have spin parameter $a > M$, hence they do not represent black holes - they are just ordinary spinning objects. Light propagation around all of these lenses, including that around the BH SgrA* having a unique $a = 0.44M$ [12], will give rise to relative time delays caused by the frame dragging effect. Galaxy lenses (see, e.g., [13]) are included in this study because experimental projects to measure their observable effects are underway on the one hand and on the other, the estimated large relative time delays would constitute a prime observable in the future.

The purpose of the present paper is to analytically derive the influence of the deviation parameters on the relative time delay due to frame dragging in the weak field of the spinning Johannsen spacetime using the most general thin-lens approximation. We

shall derive the generic expressions for the delay and compute them using the observed input data for the Earth, Sun, PSR-BH binaries, many galaxies and one BH SgrA* treated as lenses assuming that the input data are independently known. We shall show that the spinning lens system can be replaced by an equivalent "static" system with a fictitious lens geometry that can be used to compute the relative time delay factors with good accuracy from the observation of the magnification of images.

References

1. *Penrose R.* Gravitational Collapse: the Role of General Relativity // Riv. Nuovo Cimento, **1**:3 (1969), 252-276.

2. *Glampedakis K., Babak S.* Mapping spacetimes with LISA: inspiral of a test body in a 'quasi-Kerr' field // Class. Quantum Grav., **23**:12 (2006), 4167-4188.

3. *Vigeland S.J., Hughes S.A.* Spacetime and orbits of bumpy black holes // Phys. Rev. D, **81**:2 (2010), 024030.

4. *Johannsen T., Psaltis D.* Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem // Phys. Rev. D, **83**:12 (2011), 124015.

5. *Johannsen T.* Regular black hole metric with three constants of motion // Phys. Rev. D, **88**:4 (2013), 044002.

6. *Broderick A.E. et. al.* Testing the no-hair theorem with Event Horizon Telescope observations of Sagittarius A* // Astrophys. J., **784**:1 (2014), 7.

7. *Johannsen T. et. al.* Testing General Relativity with Accretion-Flow Imaging of Sgr A* // Phys. Rev. Lett., **117**:9 (2016), 091101.

8. *Johannsen T. et. al.* Testing General Relativity with the Shadow Size of Sgr A* // Phys. Rev. Lett., **116**:3 (2016), 031101.

9. *Matilsky T., Shräder C., Tananbaum H.* Evidence for 200 second variability in the X-ray flux of the quasar 1525 + 227 // Astrophys. J., **258**:1 (1982), L1-L4.

10. *Johannsen T.* Photon rings around Kerr and Kerr-like Black Holes // Astrophys. J., **777**:2 (2013), 170.

11. *Hartle J.B.* Gravity: An Introduction to Elnstein's General Relativity. — Pearson Inc.: San Francisco, 2003.

12. *Kato Y. et. al.* Estimating the impact of recombination uncertainties on the cosmological parameter constraints from cosmic microwave background experiments // Mon. Not. R. Astron. Soc., **403**:1 (2010), 439-452.

13. *Impey C.D. et. al.* An Infrared Einstein Ring in the Gravitational Lens PG 1115+080* // Astrophys. J., **509**:2 (1998), 551-560.

RESONANCES, COMPLEX WAVES, AND INVERSE SCATTERING PROBLEMS

Yu. Shestopalov
yuyshv@hig.se

A resume is given of the recently obtained results concerning the existence and localization of the complex spectra of resonances and waves in open guiding structures and their significance for the development of the theory of inverse scattering.

Keywords: scattering, resonances, waves, spectral theory

Recent achievements related to applications of the nonselfadjoint operator spectral theory in electromagnetics are the discoveries of complex resonances and waves [1-5] in open guiding structures filled with linear [1-4] or nonlinear [5] media.

These findings are of crucial importance for the electromagnetic field theory filling the gaps that have existed since the detection of TE and TM waves in hollow waveguides [6] based on the spectral theory of selfadjoint operators. On the other hand, rigorous proofs of the existence of the complex resonance and wave spectra had a significant impact on the development of the approaches, including the one [7] employing a generalization of the notions of trigonometric and cylindrical polynomials, towards analysis of the forward and inverse scattering. In fact, knowledge about singularities of the operators of the forward problems or scattering (S-)matrices (in other words, resonance frequencies), enables one to prove injectivity of the mappings that couple the sought permittivity of dielectric inclusions and the (measured) scattering data. In particular, for layered media with circular or plane-parallel symmetry, the S-matrix elements obtained explicitly [2,3,8] are proved to be holomorphic one-to-one functions of permittivity in the domains free from singularities which can be efficiently constructed because their localization is known [2-4].

Proceeding from these results, one can establish unique solvability of the permittivity reconstruction for inverse waveguide problems [8, 9] and justify numerical methods [9] of their solution.

References

1. *Shestopalov Y., Smirnov Y.* Eigenwaves in Waveguides with Dielectric Inclusions: Spectrum // Applicable Analysis, **93**:2 (2014), 408-427.

2. *Shestopalov Y.* Resonant States in Waveguide Transmission Problems // Progress In Electromagnetics Research B, **64** (2015), 119-143.

3. *Shestopalov Y.* Singularities of the transmission coefficient and anomalous scattering by a dielectric slab // J. Math. Phys., **59**:3 (2018), 033507.

4. *Shestopalov Y., Kuzmina E.* On a Rigorous Proof of the Existence of Complex Waves in a Dielectric Waveguide of Circular Cross Section // Progress In Electromagnetics Research B, **82** (2018), 137-164.

5. *Smirnov Y., Smolkin E., Shestopalov Y.* On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular metal-dielectric waveguide filled with nonlinear radially inhomogeneous medium // Journal Electromagnetic Waves and Applications, **32**:11 (2018), 1389-1408.

6. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* On the excitation of radio wave guides I. II // Zh. Tekh. Fiz. **17**:11 (1947), 1283-1291. **17**:12 (1947), 1431-1440.

Yury Shestopalov (Academy of Technology and Environment, University of Gävle , SE-801 76, Gävle, Sweden)

7. *Shestopalov Y.* Trigonometric and Cylindrical Polynomials and Their Applications in Electromagnetics // Applicable Analysis, Open access, February 2019.

8. *Shestopalov Y., Smirnov Y., Derevyanchuk E.* Permittivity reconstruction of layered dielectrics in a rectangular waveguide from the transmission coefficient at different frequencies // Springer Proc. Math. Stat., **52**:12 (2013), 169-181.

9. *Sheina E., Smirnov A., Shestopalov Y., Ufimtsev M.* FDTD solution of reconstructing permittivity of a dielectric inclusion in a waveguide taking into account measurement inaccuracy // Progress in Electromagnetics Research Symposium, St Petersburg, Russia (2017), 3188-3195.

Секция 5

Механика и математическое моделирование

О СУЩЕСТВОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ МНОЖЕСТВ В МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ ВРЕДИТЕЛЕЙ

М.М. Алхьенди, Я.Ю. Ларина

alhendimaryam@yahoo.com, yana_larina89@mail.ru

УДК 517.935, 517.938

Рассматривается задача о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля. Предполагаем, что вбросы биоагентов (природных врагов рассматриваемых вредителей) происходят в фиксированные моменты времени и количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, задается трофической функцией Холлинга I типа. Получены условия существования асимптотически устойчивых множеств данной модели.

Ключевые слова: управляемые системы с импульсным воздействием, асимптотически устойчивое множество, модель биологического контроля

Алхьенди Марьям Махмуд, ассистент, Министерство образования, Управление образования Вавилона, Начальная школа имени ибн Масуда (Вавилон, Ирак); Maryam Alhendi, assistant, (Ministry of education, Directorate of education Babylon, Ibn Masoud primary school, Iraq)

Ларина Яна Юрьевна, к.ф.-м.н., УдГУ (Ижевск, Россия); Yana Larina (Udmurt State University, Russia)

About the existence of asymptotically stable sets in the model of biological control of the population of pests

The problem of the dynamics of the population of pests in the presence of biological control is considered. We assume that injections of bioagents (natural enemies of the considered pests) occur at fixed points in time and the number of pests consumed on average by one bioagent per unit of time is determined by the Holling trophic function of type I. The conditions for the existence of asymptotically stable sets of this model are obtained.

Keywords: control systems with impulse ations, asymptotially stable set, biological control model

Обозначим через $x_1(t)$ размер популяции вредителей в момент времени t, через $x_2(t)$ — количество биоагентов в момент t . Учитывая влияние биоагентов на популяцию вредителей, получаем следующую систему уравнений, которая определяет взаимодействие популяций вредителей и биоагентов:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1 - x_1) - ax_1x_2\,, \\ \dot{x_2} = ax_1x_2 - mx_2, \quad t \neq \tau_i, \end{cases} \tag{1}$$

где $m > 0$ является коэффициентом естественной смертности биоагентов, $a > 0$ -– коэффициент эффективности поиска вредителей биоагентом. Данное уравнение содержит трофическую функцию Холлинга I типа $L(x_1) = ax_1$.

Для лучшего достижения результатов биоконтроля в моменты времени $\tau_i = ih$ производят дополнительные вбросы биоагентов

$$x_2(\tau_i) = x_2(\tau_i-) + w_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Здесь $\tau_i = ih, h > 0, w_i$ – показатели управления,

$$w_i \in W = [w_-, w_+], 0 < w_- < w_+, i = 1, 2, \ldots.$$

Лемма. *Имеют место следующие свойства:*

1) *решения системы* (1), (2) *неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, и если* $x_2(0) \geqslant w_-$, *то* $x_2(t) \geqslant w_-e^{-mh}$ *для всех* $t \geqslant 0$;

2) *решения системы* (1), (2) *определены при всех* $t \geqslant 0$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\}$, где $C_1 > 0$. Функция

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \leqslant C_1, \\ x_1 - C_1, & \text{если } x_1 > C_1, \end{cases}$$

является функцией Ляпунова относительно данного множества. Заметим, что для этой функции для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и всех $w \in W$ справедливо равенство

$$V(\tau_i, x + g(x, w)) = V(\tau_i, x_1, x_2 + w_i) = V(\tau_i, x_1, x_2) = V(\tau_i, x), \ \ i = 1, 2, \ldots.$$

Производная функции V в силу системы (1) при $x_1 > C_1$ равна

$$V^o(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1) - ax_1x_2 = x_1(1 - x_1 - ax_2).$$

Так как $x_2(t) \geqslant C_2 = w_- e^{-mh}$ для всех $t \geqslant 0$, достаточно оценить производную $V^o(x_1, x_2)$ только при $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Рассмотрим два случая. В первом случае предположим, что $aC_2 > 1$, тогда

$$V^o_{\max}(t, x) = V^o(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1 - ax_2) < x_1(1 - C_1 - aC_2) < 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$ для любого $C_1 \geqslant 0$. Рассмотрим теперь второй случай, когда выполнено неравенство $aC_2 \leqslant 1$. Здесь $V^o_{\max}(t, x) < 0$, если $C_1 > 1 - aC_2$. Неравенство выполнено для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$. Таким образом, функция $V(x_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 работы [1]. Отметим, что неравенство $aC_2 > 1$ равносильно неравенству $aw_- > e^{mh}$.

Доказали утверждение об асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\}$, где $C_1 > 0$.

Теорема. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $aw_- > e^{mh}$;

2) $aw_- \leqslant e^{mh}$ *и* $C_1 > 1 - aw_- e^{-mh}$.

Тогда для каждого решения $x(t, x_0)$ *системы* (1), (2), *удовлетворяющего начальному условию*

$$x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in N^r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in (C_1, C_1 + r]\},$$

существует момент времени $t^* = t^*(x(t, x_0)) > 0$ *такой, что точка* $(t, x(t, x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \geqslant t^*$. *Множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно данной системы.*

Из теоремы следует, что при указанных ограничениях на w_- и C_1 доля вредителей x_1 будет уменьшена до величины C_1 и найдется такой момент времени $t^* = t^*(x(t, x_0)) > 0$, что неравенство $x_1(t) \leqslant C_1$ выполнено при всех $t \geqslant t^*$.

Литература

1. *Ларина Я.Ю., Родина Л.И.* Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 490–502.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА

Д.А. Балашов
dbalashov@yahoo.com

УДК 531.36

В работе рассматриваются вопросы устойчивости стационарных движений гиростата. Для него составлены уравнения движения в квазикоординатах в форме уравнений Эйлера-Лагранжа. Найдено многообразие стационарных движений механической системы. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости некоторых движений, принадлежащих указанному многообразию, исследована управляемость системы в окрестности стационарных движений из найденного многообразия.

Ключевые слова: устойчивость, квазикоординаты, уравнения Эйлера-Лагранжа, гиростат

Stability of stationary motions of the gyrostat

Questions of stability of stationary motions of a gyrostat are considered in the article. The equations of the motion in quasicoordinates in the form of Euler-Lagrange's equations are worked out for it. The variety of stationary motions of mechanical system is found. Necessary and sufficient stability conditions of some motions belonging to the specified variety are received. System controllability is investigated in the vicinity of stationary motions from the found varieties.

Keywords: stability, quasicoordinates, Euler-Lagrange equations, gyrostat

В данной работе рассматривается механическая система, состоящая из диска, который может катиться по горизонтальной плоскости без проскальзывания и ротора - динамически симметричного твердого тела, размещенного соосно с диском и с центром масс вне плоскости диска.

Отсутствие проскальзывания между диском и плоскостью обуславливает две неголономные связи, в соответствии с которыми скорость точки контакта между диском и плоскостью равна нулю. Эти связи позволяют понизить порядок системы. Уравнения движения для данной системы были написаны в форме уравнений Эйлера-Лагранжа в квазикоординатах [1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w_s} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{t=l+1}^{n}\gamma_{ts}^{r}\frac{\partial T}{\partial w_r}w_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = P_s$$

В этом выражении t – кинетическая энергия системы, w_s – квазискорости, π_s – дифференциалы квазикоординат, P_s – обобщенные силы, отнесенные к

Балашов Дмитрий Анатольевич, к.ф.-м.н., НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Dmitri Balashov (Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

квазикоординатам, γ_{ts}^{r} – трехиндексные символы Больцмана, которые вычисляются по формуле

$$\gamma_{tm}^{s} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right) b_{rt} b_{km},$$

где a_{sk} – элементы матрицы перехода от обобщенных скоростей к квазискоростям, а b_{ij} – элементы матрицы, обратной к матрице $\hat{a}$ Анализ уравнений движения показал, что в системе имеются одна позиционная и три циклические квазикоординаты. Было определено многообразие стационарных движений, когда позиционные квазикоординаты и циклические квазискорости остаются постоянными. Считая скорость вращения системы относительно вертикальной оси равной нулю, получили условие качения диска по прямолинейной траектории. При выполнении этого условия проекция центра масс системы на горизонтальную плоскость совпадает с точкой контакта диска и плоскости. Показано, что в системе имеется три линейных интеграла, при помощи которых можно из уравнения для позиционной квазикоординаты исключить возмущения циклических квазискоростей. Характеристическое уравнение для приведенной системы имеет вид

$$W\lambda^2 + \tilde{K} = 0$$

Для устойчивости прямолинейного качения необходимо, чтобы корни характеристического уравнения были чисто мнимыми. Это условие выполняется при $\tilde{K} > 0$, но $\tilde{K}$ – является квадратным трехчленом относительно угловой скорости ротора, выбором которой всегда можно обеспечить $\tilde{K} > 0$.

Предположив, что вокруг оси ротора и диска действует управляющий момент, был проведен анализ управляемости системы. Показано [2], что в системе с управлением имеется два интеграла не зависящих от управления, которые позволяют понизить порядок системы, выделив управляемое подпространство. Был проведен анализ управляемости системы в окрестности прямолинейного качения, движения, при котором линия наибольшего ската диска описывает цилиндрическую поверхность с вертикальной направляющей, а также движений, при которых линия наибольшего ската диска описывает круговую коническую поверхность, с вершиной конуса, находящейся, как в горизонтальной плоскости, так и вне неё.

Литература

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз., 1961

2. Каленова В.И., Морозов В.М. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ/ 2002/ Т. 66. Вып. 2. С. 192-199.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ВНЕЗАПНОМ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В.Б. Беднова

msu.mmf.vb@gmail.com

УДК 519.6, 536.2

В рамках задачи о внезапном нагреве с помощью интегральных формул найдено нестационарное распределение температуры в неоднородном по глубине полупространстве. Используемые интегральные формулы позволяют выразить решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени, через решение такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами, называемой сопутствующей. В качестве сопутствующей задачи рассматривается задача о внезапном нагреве поверхности однородного полупространства.

Ключевые слова: теплопроводность, неоднородное полупространство, внезапный нагрев

Temperature distribution during a sudden heating of the surface of a heterogeneous half-space

In the framework of the problem of sudden heating, using the integral formulas, a nonstationary temperature distribution in a heterogeneous half-space is found. The integral formulas used allow us to express the solution of the original problem for an equation with variable coefficients depending on coordinates and time, by solving the same problem for an equation with constant coefficients, called concomitant. We consider the problem of a sudden heating of the surface of a homogeneous half-space as an concomitant problem.

Keywords: heat conduction, heterogeneous half-space, sudden heating

Рассматривается нестационарная одномерная задача теплопроводности о внезапном нагреве (при $t \geqslant 0$) неоднородного полупространства $x_1 \geqslant 0$ по границе $x_1 = 0$. Предполагаем, что температурные условия имеют вид

$$\theta(0,t) = \theta_0 H(t),\ \theta(x_1,0) = 0,$$

где $\theta(x,t)$ — отклонение температуры от начального значения $\theta_0 = const$, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда ($H(0) = 1$).

Вместе с исходной задачей (аналогично работам [1], [2]) рассматривается сопутствующая задача о внезапном нагреве поверхности однородного полупространства с такими же начальными и граничными условиями. Отклонение температуры в сопутствующей задаче обозначим $\psi(x,t)$.

Для исходной задачи аналогично [2] получена интегральная формула

Беднова Вероника Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Veronika Bednova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$$\theta(x,t) = \psi(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^L \frac{\partial G(x,\xi,t-\tau)}{\partial \xi} \left(\lambda^0 - \lambda(\xi,\tau) \frac{\partial \psi(\xi,\tau)}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t-\tau)$ — функция Грина исходной задачи (книги [3], [4]).

Далее решение исходной задачи представляется в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи (в предположении, что решение сопутствующей задачи бесконечно дифференцируемо и раскладывается в ряд Тэйлора в окрестности точки (x,t))

$$\theta(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1 \ldots i_q}(x) \frac{\partial^p \psi_{,i_1 \ldots i_q}}{\partial t^p}, \; p = 0,1,2,\ldots; \; q = 0,1,2,\ldots .$$

Функции $N^{(p)}_{(q)i_1 \ldots i_q}(x)$ при $p+q>0$ — непрерывные функции координат, представляющие собой взвешенные моменты функции Грина и ее производных. Верхний и нижний индексы в круглых скобках означают порядок производной по времени и координате соответственно. При отрицательных p или q структурные (согласно работе [2]) функции N тождественно равны нулю, $N^{(0)}_{(0)} = 1$.

Подставляя полученное представление в виде ряда решения исходной задачи в уравнение теплопроводности, получаем рекуррентные уравнения для структурных функций. В случае одномерной задачи теплопроводности рекуррентные уравнения становятся обыкновенными дифференциальными, решения которых довольно легко найти.

Учитывая, что решение сопутствующей задачи (частный случай задачи Даниловской, работы [5], [6]) имеет вид $\psi(x,t) = \theta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1}{\sqrt{4\varkappa t}}\right)$, находим приближенное решение задачи.

Литература

1. *Горбачев В.И.* Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов // ПММ,**78**:2 (2014), 277-299.

2. *Горбачев В.И.* Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, **18**:3 (2017) С. 209-233.

3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1966.

4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — Москва: Наука, 1979.

5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — Москва: Наука, 1964.

6. *Новацкий В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИЗНАШИВАНИЯ ТОПОКОМПОЗИТА ПРИ ДИСКРЕТНОМ КОНТАКТЕ

А.А. Бобылев
abobylov@gmail.com

УДК 539.3

Рассмотрена пространственная задача об изнашивании дискретного контакта топокомпозита и прямоугольного в плане жесткого штампа, имеющего регулярный волнистый рельеф. Получена вариационная формулировка задачи и разработан вычислительный алгоритм на основе явной схемы Эйлера. Дискретизация задачи по пространственным координатам производилась с использованием пространств интегрированных фундаментальных решений, построенных на основе гранично-элементного подхода. Исследовано влияние ограниченности номинальной площадки и дискретности контакта на кинетику процесса изнашивания.

Ключевые слова: контактная задача, износ, топокомпозиты, дискретный контакт

Modeling of wear processes of a topocomposite in a discrete contact

A three-dimensional wear problem for a topocomposite in contact with a rigid punch is considered. The punch is rectangular in shape and has a regular wavy surface. A variational formulation of the problem is obtained. The computational algorithm based on the explicit Euler scheme is developed. Spaces of the integrated fundamental solutions are used for a spatial discretization of the problem. The boundary element method is applied to construct these spaces. The influence of the discrete contact and the boundedness of the nominal contact area on the wear kinetics is explored.

Keywords: contact problem, wear, topocomposites, discrete contact

Значительная доля отказов машин и механизмов связана с износом их деталей при трении. Повышение эксплуатационных показателей узлов трения за счет нанесения на их рабочие поверхности антифрикционных материалов или модификации поверхностных слоев является весьма перспективным направлением и находит широкое практическое применение. Тела с тонкими покрытиями было предложено называть топокомпозитами [1, 2].

Существует большое количество технологий получения топокомпозитов. Покрытия различаются по методам их нанесения на подложку, материалами, количеством слоёв и их толщиной. Это приводит к разнообразию математических моделей, используемых для описания физико-механических свойств топокомпозитов.

Бобылев Александр Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Bobylev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Экспериментальные исследования процесса изнашивания весьма трудоемки и длительны. Поэтому актуальной является разработка методов компьютерного моделирования процессов изнашивания, в частности, вычислительных алгоритмов решения износоконтактных задач.

Износоконтактные задачи можно условно разделить три класса – задачи об изнашивании единичного контакта, периодические задачи и задачи об изнашивании множественного (дискретного) контакта. В настоящей работе рассмотрена пространственная задача об изнашивании дискретного контакта топокомпозита и прямоугольного в плане жесткого штампа, имеющего регулярный волнистый рельеф. Такая задача не может быть сведена к периодической вследствие неравномерного распределения нагрузок между отдельными пятнами контакта.

Покрытие топокомпозита моделируется упругим слоем винклеровского типа, а основа – однородным упругим изотропным полупространством. При постановке задачи предполагается, что величина линейного износа мала и соизмерима с упругими перемещениями, а граничные условия можно отнести к недеформированной поверхности полупространства. Учитывается изменение размеров и формы отдельных пятен контакта при изнашивании. Кинетическое уравнение износа определяет зависимость интенсивности изнашивании от величины контактного давления и относительной скорости скольжения. Параметры, характеризующие износостойкие свойства топокомпозита, зависят от величины линейного износа.

В общем случае износоконтактные задачи даже для линейно-упругих тел являются нелинейными вследствие как нелинейности локального закона изнашивания, так и изменения размеров области контакта в процессе изнашивания [3, 4]. Одним из эффективных подходов к решению контактных задач с заранее неизвестной площадкой контакта является использование вариационных методов. Вариационные формулировки используются как для исследования проблем существования и единственности решения износоконтактных задач, так и для фактического построения численных решений [5, 6].

В данной работе получена вариационная формулировка рассматриваемой пространственной износоконтактной задачи для топокомпозита в виде системы граничного квазивариационного неравенства эволюционного типа в напряжениях и дифференциального уравнения первого порядка.

Для дискретизации задачи по времени используется явная разностная схема Эйлера. В результате на каждом временном шаге для определения контактного давления на поверхности возможного контакта требуется решить эллиптическое вариационное неравенство, соответствующее задаче о вдавливании в топокомпозит жесткого штампа, форма которого учитывает текущий износ контактной пары. Также получена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации граничного функционала на множестве статически допустимых напряжений, элементы которого удовлетворяют условиям совместности.

Основная трудность, возникающая при использовании граничных вариационных формулировок в напряжениях, состоит в в построении конечномерных пространств, элементы которых удовлетворяют уравнениям равновесия и условиям совместности. Для решения этой проблемы могут быть

эффективно использованы пространства интегрированных фундаментальных решений [7], построенные на основе гранично-элементного подхода. В настоящей работе применялись пространственные прямоугольные граничные элементы с постоянным распределением контактного давления.

В результате дискретизации получена задача квадратичного программирования с простыми ограничениями типа неравенств и линейными ограничениями типа равенств, содержащими все переменные задачи. В [5, 6] предложено линейное преобразование переменных, позволяющее преобразовать ограничения типа равенств к простым.

При использовании на поверхности возможного контакта регулярных сеток граничных элементов матрица Гессе минимизируемой функции является блочно-тёплицевой. Это позволяет хранить в памяти ЭВМ только одну строку (или столбец) этой матрицы и программно реализовать расчет ее произведения на вектор. Поэтому для численного решения полученной задачи квадратичного программирования целесообразно использовать градиентные методы, не требующие формирования в явном виде матрицы Гессе минимизируемой функции. В настоящей работе применяется вариант метода сопряженных градиентов, предложенный в [8].

Разработанный вычислительный алгоритм реализован в виде модулей пакета прикладных программ для решения износоконтактных задач. Методом вычислительного эксперимента определены рациональные значения параметров разработанного алгоритма – шага дискретизации по времени и количества граничных элементов на площадке номинального контакта с жестким штампом.

Получены численные решения пространственной износоконтактной задачи для случая, когда относительное движение штампа по поверхности упругого полупространства представляет собой комбинацию скольжения и верчения. Закон изменения во времени нагрузки, приложенной к штампу, и величины эксцентриситета ее приложения считался заданным. Проведено исследование влияния ограниченности номинальной площадки и дискретности контакта на кинетику процесса изнашивания для различных соотношений скорости скольжения штампа и угловой скорости его верчения.

Литература

1. *Воронин Н.А.* Топокомпозиты – новый класс конструкционных материалов триботехнического назначения. Ч. 1 // Трение и износ, **20**:3 (1999), 313–320.

2. *Воронин Н.А.* Топокомпозиты – новый класс конструкционных материалов триботехнического назначения. Ч. 2 // Трение и износ, **20**:5 (1999), 533–544.

3. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — М.: Наука, 2001.

4. *Солдатенков И.А.* Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. — М.: Физматкнига, 2010.

5. *Бобылев А.А., Белашова И.С.* Вариационная формулировка и численный алгоритм решения задачи об изнашивании структурно-неоднородной поверхности при контакте с жестким штампом // Вестник Московского авиационного института, **22**:4 (2015), 108-118.

6. *Бобылев А.А., Белашова И.С.* Вариационная формулировка и численный алгоритм решения износоконтактной задачи для упругой полуплоскости с неоднородным покрытием винклеровского типа // Наукоемкие технологии, **16**:11 (2015), 8-20.

7. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.

8. *Бобылев А.А.* Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. Сб. науч. тр. — Днепропетровск: ДГУ, 1987. — 23-29.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ РЕПЛИКАТОРНЫХ СИСТЕМ

А.С. Братусь, С.В. Дрожжин

alexander.bratus@yandex.ru, myasnicc@yandex.ru

УДК 519.612

В работе рассматривается процесс эволюции гиперциклической системы с целью увеличения значения величины средней приспособленности (среднего фитнеса). Предполагается, что ресурсы системы ограничены и определяются нормой матрицы взаимодействия. Вводится гипотеза о существовании "эволюционного времени", которая позволяет описывать процесс эволюционной адаптации с помощью уравнений стационарного состояния. Для решения поставленной задачи предлагается алгоритм, на каждом шаге которого исходная задача сводится к задаче линейного программирования. Приводятся конкретные примеры эволюции систем гиперциклической репликации.

Ключевые слова: репликаторная система, средняя приспособленность, эволюция

Mathematical models of the evolution of replicator systems

In this study, we examine the process of evolution of the hypercycle system with the aim of increasing the fitness landscape (mean fitness). We assume that the resources of the system are limited and are determined by the norm of the interaction matrix. The hypothesis of the existence of "evolutionary time" is introduced, which allows one to describe the process of evolutionary adaptation using the stationary state equations. To solve this problem, we propose an algorithm such that it is reduced to a linear programming problem at each step. An examples of the evolution of hypercyclic replication systems are provided.

Keywords: replicator systems, fitness landscape, evolution

Братусь Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Bratus (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Дрожжин Сергей Вячеславович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergei Drozhzhin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Репликаторные системы были предложены для описания процессов популяции биологических видов в работах M. Eigen, P. Shuster [2, 3], J. Crow, M. Kimura [4] и в настоящее время теория этих систем представляют основу современной математической биологии. Особый интерес представляет класс репликаторных систем, который получил название гиперцикла. С точки зрения математики, гиперцикл представляет уникальный математический объект, который обладает рядом замечательных свойств. Система гиперцикла не вырождается, т.е. ни одна из компонент в процессе динамики не обращается в ноль, если исходные начальные данные отделены от нуля. Единственное положение равновесия устойчиво для размерностей системы $n < 5$, а при $n \geqslant 5$ в системе возникает устойчивый предельный цикл. Система примечательна и с точки зрения биологии, поскольку удовлетворяет основной триаде эволюции Ч. Дарвина: наследственность, изменчивость, естественный отбор. Все это позволило рассматривать эту систему, как объекты предбиологической эволюции, которые могли в процессе последующего развития и естественного отбора привести к возникновению систем сложных макромолекул, подобных макромолекулам РНК и ДНК. Наряду с этими замечательными свойствами система гиперцикла обладает существенным недостатком. Если в систему гиперцикла встраивается паразитический вид, который пользуется ресурсами системы, не отдавая ничего взамен, то как правило, система погибает.

В представленной работе предложена математическая модель эволюции системы гиперцикла, в результате которой система становится устойчивой (резистентной) к воздействию паразитов. Модель основана на гипотезе о том, что время в течении которого происходит эволюционное изменение во много раз более медленное, чем время, в течении которого система выходит на свое предельное состояние. Из этого предположения следует, что процесс эволюционной адаптации может быть описан с помощью уравнений стационарного состояния, все элементы которого зависят от некоторого параметра, который далее будем называть эволюционным параметром или эволюционным временем.

Возникает естественный вопрос о том, как оценить успешность эволюционного процесса и как измерить его суммарный ресурс. В качестве функции цели мы рассматриваем величину средней приспособленности системы (фитнес). Основанием для такого выбора является содержание основной теоремы об естественном отборе R. Fisher [1]. Согласно содержанию этой теоремы, любая биологическая система стремится генетическим путем увеличить свою среднюю приспособленность (фитнес). Суммарный ресурс этого процесса определяется нормой матрицы, которая описывает взаимодействие и мутацию видов. В итоге задача об эволюции системы гиперцикла на каждом шаге изменения эволюционного времени сводится к последовательному решению ряда задач линейного программирования большой размерности.

В общем случае, уравнение репликаторной системы имеет вид:

$$\dot{u}_i = u_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j\right) = u_i\left(\Big(\mathbf{Au}\Big)_i - f(\mathbf{u})\right), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{u} \in S_n = \{u_i : u_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} u_i = 1\}$ и $f(\mathbf{u})$ — средний фитнес.

Стационарное положение равновесия системы (1) (не обязательно устойчивое) описывается системой алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = \bar{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = (1, 1, ..., 1), \quad \bar{\mathbf{u}} \in intS_n.$$

Тогда изменение средней приспособленности в эволюционном времени описывается уравнениями:

$$\mathbf{A}(\tau)\bar{\mathbf{u}}(\tau) = \bar{f}(\bar{\mathbf{u}}(\tau))\mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{u}}(\tau) \in intS_n. \tag{2}$$

Здесь элементы $a_{ij}(\tau)$ матрицы $\mathbf{A}$ — представляют гладкие функции эволюционного параметра $\tau \in [0; +\infty)$, такие, что выполняется условие

$$||\mathbf{A}(\tau)||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant Q^2, \quad \tau \geqslant 0, \quad Q = const. \tag{3}$$

В итоге, приходим к следующей экстремальной задаче: найти такие элементы $a_{ij}(\tau)$ матрицы $A(\tau)$ на множестве (3), которые максимизируют значения фитнеса $\bar{f}(\tau)$ в уравнении (2) при некотором фиксированном значении $\tau = T$ эволюционного времени.

Численные эксперименты показывают, что на каждом шаге предложенного итерационного процесса величина среднего фитнеса значительно увеличивается (рис. 1) и эволюционный гиперцикл становится устойчив к воздействию паразитов, от которых он погибал до процесса эволюции (рис.2) (паразиты показаны пунктирной линией).

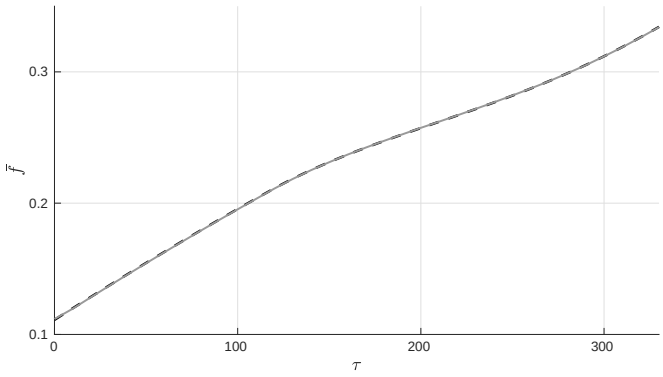


Рис. 5.1: Средний фитнес системы (1) при $n = 5$.

Литература

1. *Fisher R.* The genetical theory of natural selection. — Oxford University Press, 1930.

2. *Eigen M.* Self-organization of matter and the evolution of biological macromolecules // Naturwissenschaften. 1971. N. 58. 465-25.

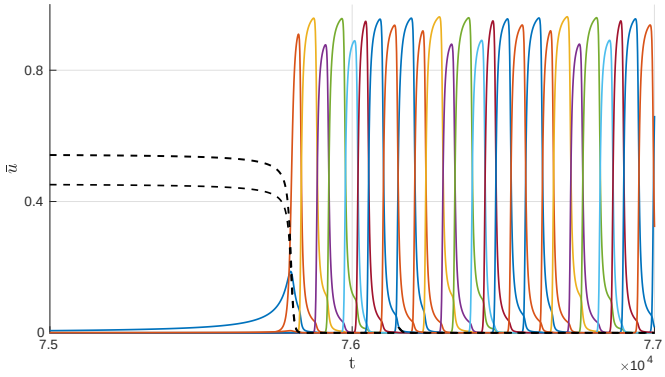


Рис. 5.2: Динамика изменения частот эволюционного гиперцикла ($n = 7$) полученного на 200-ом шаге эволюции при добавлении двух паразитов.

3. *Eigen M., Shuster P.* The Hypercycle. — New York: Springer, 1979.

4. *Crow J.F., Kimura M.* An introduction to population genetics theory. — New-York: Harper and Row, 1970.

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Г.Л. Бровко

glb@mech.math.msu.su

УДК 539.3

В рамках классической ньютоновой механики рассматривается понятие большой системы активно взаимодействующих тел и понятие инерциальной системы отсчета, постулируются аксиомы инерции и выводятся законы движения Эйлера. В предположении основных гипотез механики сплошной среды формулируются законы движения Коши–Эйлера и уравнения движения Коши. Для большой системы тел с инерциальной системой отсчета выделены подсистемы тел, также обладающие своими инерциальными системами отсчета. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях наличия инерциальных систем отсчета для подсистем тел.

Ключевые слова: ньютонова механика, системы отсчета, большая система, аксиомы инерции, законы движения, механика сплошной среды, инерциальные системы отсчета для подсистем тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00669).

Бровко Георгий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); George L. Brovko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Frames of reference in classical continuum mechanics

In the frames of classical Newtonian mechanics, the concepts of a large system of interacting bodies and its inertial frame of reference are introduced, the axioms of inertia are postulated and Eulerian motion laws are derived. Provided the main hypotheses of continuum mechanics Cauchy–Euler motion laws and Cauchy motion equations are formulated. For a large system of bodies with inertial frame of reference the subsystems of bodies are separated as having their own inertial frames of reference. The theorem of necessary and sufficient conditions of existence of inertial reference frames for subsystems of bodies is proved.

Keywords: Newtonian mechanics, reference frames, large system, axioms of inertia, motion laws, continuum mechanics, inertial frames of reference for subsystems of bodies.

1. Системы отсчета. Законы движения

Рассматриваются подходы к использованию систем отсчета в классических трудах [1,2] и в современных источниках [3–6].

В классической ньютоновой механике [4] *системой отсчета* называют [3] гомеоморфное отображение $\phi : \mathfrak{W} \to \mathcal{X}\times\mathcal{T}$ *мира событий* $\mathfrak{W}$, рассматриваемого как топологическое пространство, на топологическое произведение трехмерного евклидова аффинного пространства (пространства *конфигураций*) $\mathcal{X}$ с трансляционным векторным пространством $\mathcal{V}$ и одномерного евклидова аффинного пространства (пространства *моментов времени*) $\mathcal{T}$:

$$\phi(e) = (\boldsymbol{x}, t) \qquad (e \in \mathfrak{W},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},\ t \in \mathcal{T}). \tag{1}$$

Системы отсчета ϕ и ϕ_* назовем *родственными* [5,6], если они сохраняют пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{T}$, сохраняют смысл и направленность времени, а также длины временны́х промежутков в $\mathcal{T}$ и расстояния между точками в пространстве конфигураций $\mathcal{X}$. Переход от "старой" системы отсчета ϕ к родственной "новой" ϕ_* выражается заменой $\phi_* \circ \phi^{-1} : (\boldsymbol{x}, t) \mapsto (\boldsymbol{x}_*, t_*)$ "старых" эйлеровых переменных $(\boldsymbol{x}, t)$ на "новые" $(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ по формулам [3]:

$$\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_{*0}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad t_* = t + a, \tag{2}$$

где константы $\boldsymbol{x}_0$, a и функции $\boldsymbol{x}_{*0}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$ ($\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ — ортогональный тензор над $\mathcal{V}$) — параметры замены.

Во вселенной $\mathfrak{U}$ выделяется [3] *большая система* тел $\mathfrak{U}^a$ и ее внешность $\mathfrak{U}^s$ (дополнение до $\mathfrak{U}$). Для каждого тела $\mathcal{B} \in \mathfrak{U}^a$ рассматривают силу воздействия $\boldsymbol{f}^a$ со стороны остальных тел большой системы (*активную силу*) и силу $\boldsymbol{f}^s$ со стороны внешности $\mathfrak{U}^s$ (*силу инерции*).

Определение. *Система отсчета ϕ называется* инерциальной для большой системы тел $\mathfrak{U}^a$, *если в этой системе отсчета для любого тела $\mathcal{B}$ из большой системы $\mathfrak{U}^a$ справедлива эквиваленция (*$\mathbf{p}(\mathcal{B}, t)$ *— количество движения)*:

$$(\mathbf{p}(\mathcal{B}, t) = \text{const при } t \in [t_1, t_2]) \iff (\boldsymbol{f}^s(\mathcal{B}, t) = \mathbf{0} \text{ при } t \in [t_1, t_2])\,. \tag{3}$$

Для большой системы тел принимаются *законы инерции* [3,5].

I.1. Первый закон инерции. *Для выделенной большой системы тел инерциальная система отсчета* существует.

I.2. Второй закон инерции. *Во всякой инерциальной системе отсчета скорость изменения количества движения любого тела большой системы противоположна силе инерции, воздействующей на это тело*:

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathcal{B},t) = -\boldsymbol{f}^s(\mathcal{B},t). \tag{4}$$

Сбалансированность [3,5] системы сил $\boldsymbol{f}$ и моментов сил $\mathbf{m}_{\boldsymbol{x}_0}$

$$\boldsymbol{f}^a(\mathcal{B},t) = -\boldsymbol{f}^s(\mathcal{B},t), \quad \mathbf{m}^a_{\boldsymbol{x}_0}(\mathcal{B},t) = -\mathbf{m}^s_{\boldsymbol{x}_0}(\mathcal{B},t) \tag{5}$$

приводит к *законам движения Эйлера* (в инерциальной системе отсчета):

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathcal{B},t) = \boldsymbol{f}^a(\mathcal{B},t), \quad \dot{\mathbf{q}}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathcal{B},t) = \boldsymbol{m}^a_{\boldsymbol{x}_0}(\mathcal{B},t). \tag{6}$$

Привлечение гипотез механики сплошной среды позволяет представить уравнения (6) в виде интегральных уравнений Коши–Эйлера [1–3,5,6]

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_\mathcal{B}} \rho\mathbf{v}dV = \int_{\Omega_\mathcal{B}} \rho\mathbf{b}dV + \int_{\Gamma_\mathcal{B}} \mathbf{t}dS, \\ \frac{d}{dt}\int_{\Omega_\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{v}dV = \int_{\Omega_\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{b}dV + \int_{\Gamma_\mathcal{B}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{t}dS, \end{gathered} \tag{7}$$

или в виде системы уравнений движения Коши и граничного условия:

$$\operatorname{div}\mathbf{S} + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{w}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega_{\Sigma^a}), \quad \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (\boldsymbol{x}\in\Gamma_\mathcal{B}). \tag{8}$$

Здесь $\Omega_\mathcal{B}$ и $\Gamma_\mathcal{B}$ — область и граница актуальной конфигурации тела $\mathcal{B}$ большой системы $\mathfrak{U}^a$, ρ — плотность среды, $\mathbf{v}$ — скорость точки тела, $\mathbf{w}$ — ускорение, $\mathbf{t}$ — вектор напряжения активных контактных сил, $\mathbf{b}$ — массовая плотность активных массовых сил (внешних и внутренних для тела $\mathcal{B}$), определенная на соединенном теле Σ^a большой системы $\mathfrak{U}^a$ (в области Ω_{Σ^a}) *универсально* [5] (независимо от выбора тела $\mathcal{B}\in\mathfrak{U}^a$), $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\Gamma_\mathcal{B}$.

2. Инерциальные системы отсчета для подсистем тел

Предполагая инерциальность системы отсчета ϕ для большой системы тел $\mathfrak{U}^a$, поставим вопрос, в каком случае и какую из систем отсчета ϕ_* можно считать инерциальной для подсистемы тел $\mathfrak{U}^{a'}$, рассматриваемой как самостоятельная большая система.

Представим [5,6] соотношения (8) для произвольного тела $\mathcal{B}'$ из подсистемы $\mathfrak{U}^{a'}$ в новой системе отсчета ϕ_*:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}_*\mathbf{S}_* + \rho(\mathbf{b}'_* + \underline{\mathbf{b}''_* + \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{c}}}) = \rho\mathbf{w}_*, \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{x}_*\in\Omega_{\Sigma'*}), \\ \mathbf{S}_*\cdot\mathbf{n}_* = (\mathbf{t}'_* + \underline{\mathbf{t}''_*}) \quad (\boldsymbol{x}_*\in\Gamma_{\mathcal{B}'*}). \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь нижним индексом "$_*$" помечены значения величин в новой системе отсчета ϕ_*, $\mathbf{w}_{*e}$ и $\mathbf{w}_{*c}$ — переносное и кориолисово ускорения от замены ситемы отсчета, $\Omega_{\Sigma'*}$ — область актуальной конфигурации (в новой системе

отчета) соединенного тела $\Sigma' \in \mathfrak{U}^{a\prime}$ (включающая область $\Omega_{\mathcal{B}'*}$ с границей $\Gamma_{\mathcal{B}'*}$ актуальной конфигурации тела $\mathcal{B}'$), $\mathbf{b}'_*$ — плотность активной массовой силы в рамках подсистемы $\mathfrak{U}^{a\prime}$ (определенная универсально на всей области $\Omega_{\Sigma'*}$), $\mathbf{t}'_*$ — вектор напряжения активных (для $\mathfrak{U}^{a\prime}$) контактных сил на границе $\Gamma_{\mathcal{B}'*}$, $\mathbf{b}''_*$ и $\mathbf{t}''_*$ —массовая и контактная силы воздействия на тело $\mathcal{B}'$ со стороны тел системы $\mathfrak{U}^a$, не входящих в подсистему $\mathfrak{U}^{a\prime}$.

Если в системе (9) подчеркнутые слагаемые равны нулю, то она принимает вид, выражающий систему соотношений для любого тела $\mathcal{B}'$ из подсистемы $\mathfrak{U}^{a\prime}$ в новой системе отсчета ϕ_* как *инерциальной для подсистемы тел* $\mathfrak{U}^{a\prime}$. Это дает следующий результат, согласующийся с [4].

Теорема. *Пусть для большой системы тел* $\mathfrak{U}$ *существует инерциальная система отсчета* ϕ*. Тогда для подсистемы тел* $\mathfrak{U}'$*, рассматриваемой как самостоятельная большая система, также найдется инерциальная система отсчета* ϕ'*, универсальная по отношению к любым движениям тел из подсистемы* $\mathfrak{U}'$*, тогда и только тогда, когда контактные силы воздействия на тела из* $\mathfrak{U}'$ *со стороны остальных тел большой системы* $\mathfrak{U}$ *отсутствуют, а массовые силы этого воздействия характеризуются однородным полем (возможно, зависящим от времени). При этом* ϕ' *— любая такая система отсчета, которая движется относительно* ϕ *поступательно с ускорением центра масс соединенного тела* Σ' *подсистемы* $\mathfrak{U}'$ *под действием указанного однородного поля массовых сил.*

Литература

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973.

2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.

4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: УРСС, 2003.

5. *Бровко Г.Л.* Основы механики сплошной среды. — М.: Изд-во попечит. совета мех-мат ф-та МГУ. Ч.1–2011. Ч.2–2013.

6. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. — М.: Наука, 2017.

О СИММЕТРИЙНОМ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

С.А. Будочкина, В.М. Савчин

budochkina-sa@rudn.ru, savchin-vm@rudn.ru

УДК 531.011

В докладе будут исследованы симметрийные свойства действий по Гамильтону и предложены методы построения первых интегралов уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы. Будет также установлена связь вариационных симметрий с алгебраическими структурами.

Ключевые слова: симметрия, первый интеграл, Ли-допустимая алгебра

On symmetry analysis of infinite-dimensional systems

In the talk we will investigate symmetry properties of Hamiltonian actions and suggest some methods for constructing the first integrals for equations of motion of nonpotential infinite-dimensional systems. A connection between variational symmetries and algebraic structures will also be established.

Keywords: symmetry, first integral, Lie-admissible algebra

Для функционалов из общепринятых классов Эйлера-Лагранжа связь симметрий с законами сохранения была установлена в работе Э. Нетер [1]. Широкий интерес к отысканию законов сохранения с помощью симметрий связан с фундаментальными монографиями Л.В. Овсянникова [2] и Н.Х. Ибрагимова [3]. Интегралы уравнений движения имеют многочисленные применения. Они могут использоваться для доказательства единственности классических решений ДУЧП (см., например, работы [4, 5]). В работе П. Лакса [6] законы сохранения применены для доказательства существования волновых решений уравнения Кортевега-де Фриза. Известны применения интегралов эволюционных уравнений для исследования устойчивости движения ряда бесконечномерных систем [7, 8].

Цель работы - распространить подход Э. Нетер на исследование неэйлеровых функционалов, построить первые интегралы рассматриваемого уравнения движения, в том числе с помощью обобщения метода вариационных симметрий.

Данная работа является продолжением работ авторов [9-13].

Рассматривается уравнение движения

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00261а).

Будочкина Светлана Александровна, к.ф.-м.н., доцент, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Svetlana Budochkina (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

Савчин Владимир Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Vladimir Savchin (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R},$$

$$u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt} u, \qquad u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2} u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ - произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ - область определения оператора N,

$$D(N) = \{u \in U : u(t) \in W\, \forall t \in [t_0, t_1],\ u|_{t=t_0} = \varphi_1,\ u|_{t=t_1} = \varphi_2,$$
$$u_t|_{t=t_0} = \varphi_3,\ u_t|_{t=t_1} = \varphi_4,\ \varphi_i \in U_1\ (i = \overline{1,4})\};$$

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$. Множество $W \subseteq U_1$ определяется внешними связями, наложенными на систему.

Операторное уравнение движения (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и др., а при $P_{3u} \equiv 0$ – системой таких уравнений.

Получены следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости уравнения движения (1) в форме уравнения Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

2. Построено действие по Гамильтону, для которого получены условия существования симметрий до дивергенции (в том числе абсолютных симметрий).

3. Получена формула для нахождения первого интеграла рассматриваемого уравнения движения.

4. Установлена связь вариационных симметрий с Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли).

5. Предложен способ нахождения первых интегралов уравнения движения (1), являющийся обобщением метода вариационных симметрий.

Теоретические результаты проиллюстрированы на примере уравнения движения шарнирно-опертого на обоих концах призматического стержня [14].

Литература

1. *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Полак Л.С. (ред.) Вариационные принципы механики. — Москва: Физматгиз, 1959. — 611-630.

2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978.

3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. — Москва: Наука, 1983.

4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва: Мир, 1964.

5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1977.

6. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics, **XXI** (1968), 467-490.

7. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. — Москва: Издательство МГУ, 1986.

8. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports, **123**:1,2 (1985), 1-116.

9. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук, **425**:2 (2009), 169-171.

10. *Будочкина С.А., Савчин В.М.* Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов // Дифференциальные уравнения, **47**:6 (2011), 811-818.

11. *Budochkina S.A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal, **3**:1 (2012), 18-28.

12. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук, **458**:2 (2014), 148-149.

13. *Савчин В.М., Будочкина С.А.* Об инвариантности функционалов и соответствующих им уравнений Эйлера-Лагранжа // Известия вузов. Математика, 2 (2017), 58-64.

14. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1961.

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

А.А. Буров, В.И. Никонов

jtm@narod.ru, nikon_v@list.ru

УДК 531.01, 521.14, 528.9

Как известно, многие малые небесные тела отличаются сложным, нерегулярным распределением масс. Это обстоятельство определяет сложную структуру порождаемого ими поля притяжения. В настоящей работе с помощью приближения потенциала притяжения, известного как потенциал Вернера — Ширса, изображаются эквипотенциальные поверхности некоторых малых небесных тел. Обсуждается применимость эквипотенциальных поверхностей к трёхмерному картографированию таких тел.

Ключевые слова: потенциал ньютоновского притяжения, эквипотенциальная поверхность, малые небесные тела, картографирование небесных тел

Работа выполнена В.И. Никоновым при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых - кандидатов и докторов наук (проект № МК-1712.2019.1), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00335.

Буров Александр Анатольевич, д.ф.-м.н., с.н.с., ФИЦ ИУ РАН & профессор, НИУ ВШЭ; Alexander Burov (FRC CSC & NRU HSE, Moscow, Russia)

Никонов Василий Иванович, к.ф.-м.н., н.с., ФИЦ ИУ РАН & доцент, НИУ ВШЭ; Vassily Nikonov (FRC CSC & NRU HSE, Moscow, Russia)

Equipotential surfaces of small celestial bodies with irregular mass distribution

As is known, numerous small celestial bodies are characterized by a complex, irregular mass distribution. This circumstance predetermines the complex structure of the field of attraction generated by them. In the present talk using the approximation of attraction potential, known as the potential of the Werner — Scheeres, equipotential surfaces of some small celestial bodies are drawn. The applicability of the equipotential surfaces to three-dimensional carthography of such bodies is discussed.

Keywords: potential of Newtonian attraction, equipotential surface, small celestial bodies, cartography of celestial bodies

Наблюдение за малыми небесными телами и первые миссии к ним показали, что зачастую поверхность таких тел отличается достаточно сложной геометрической формой, а их распределение масс, вообще говоря, нерегулярно. Малостью размеров таких тел по сравнению, например, с размерами планет, а также нерегулярностью в распределение масс обусловлены не только относительная малость поля притяжения такие тела по сравнению с притяжением планет, но и его сильная неоднородность. Знание деталей такого силового поля является необходимым условием успеха космических миссий как на поверхности малых небесных тел, так и в малой окрестности этой поверхности.

Было предложено [1,2] приближённое выражение для потенциала притяжения таких тел, опирающееся на предположение об их однородности, а также на обработанные результаты фотометрии, позволяющее выполнить триангуляцию поверхности малого небесного тела. Согласно [1,2], справедливо

Утверждение. *Потенциал поля притяжения тела, ограниченного многогранной поверхностью, представим в виде*

$$U = \frac{1}{2} G\sigma \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \boldsymbol{r}_e \boldsymbol{E}_e \boldsymbol{r}_e L_e + \sum_{f \in \mathcal{F}} \boldsymbol{r}_f \boldsymbol{F}_f \boldsymbol{r}_f \omega_f \right), \tag{1}$$

где суммы вычисляются по всем ребрам $\mathcal{E}$ и всем граням $\mathcal{F}$ полигональной сетки, задающей поверхность тела. Здесь G — постоянная всемирного тяготения; σ — объёмная плотность, предполагаемая постоянной; $\boldsymbol{r}_e$ — вектор, проведенный из точки Q, в которой вычисляется потенциал, к произвольной точке отдельного ребра e; $\boldsymbol{r}_f$ — вектор, проведенный из точки Q, к произвольной точке отдельной грани f; $\boldsymbol{E}_e = \left(\boldsymbol{n}_A \boldsymbol{n}_e^A\right) + \left(\boldsymbol{n}_B \boldsymbol{n}_e^B\right)$ — матрица 3×3, вычисленная для ребра e, общего для смежных граней A и B (выражение $(\ )$ обозначает диадное произведение векторов); $\boldsymbol{n}_A$, $\boldsymbol{n}_B$ — единичные векторы внешних нормалей для смежных граней A и B; $\boldsymbol{n}_e^A$, $\boldsymbol{n}_e^B$ — единичные векторы внешних нормалей к ребру e, располагающегося в плоскостях смежных граней A и B; $\boldsymbol{F}_f = (\boldsymbol{n}_f \boldsymbol{n}_f)$ — матрица 3×3, вычисленная для отдельной грани f; $\boldsymbol{n}_f$ — единичный вектор внешней нормалей к грани f; $\omega = 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) \cdot \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1| \cdot |\boldsymbol{r}_2| \cdot |\boldsymbol{r}_3| + |\boldsymbol{r}_1| \cdot \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3 + |\boldsymbol{r}_2| \cdot \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1 + |\boldsymbol{r}_3| \cdot \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2} \right)$

— величина, вычисленная для отдельной грани f, к вершинам которой из точки Q проведены векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$; $L_e = \ln\left(\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_2|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\right)$ — величина, вычисленная для отдельного ребра e, к концам которого из точки Q проведены векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$.

Если точка Q располагается на ребре e, то слагаемые $\boldsymbol{r}_e\boldsymbol{E}_e\boldsymbol{r}_eL_e$ полагаются равными нулю.

С помощью такого приближения потенциала в [1] было осуществлено приближённое описание поля притяжения Фобоса.

В настоящей работе на примере некоторых астероидов с нерегулярным распределением масс (433 Эрос, 216 Клеопатра и некоторых других)

- на основе приближённого потенциала притяжения (1) определяются пересечения их триангулированных поверхностей ("мозаики") с эквипотенциальными поверхностями;

- обсуждается возможность использования эквипотенциальных поверхностей потенциала (1) в качестве референц-поверхностей для создания трёхмерных карт и силовых линий гравитационного поля для проецирования на референц-поверхности;

- изучается возможность использования эквипотенциальных поверхностей упрощённого, двухточечного потенциала и силовых линий его гравитационного поля [3] в качестве референц-поверхностей трёхмерных карт и средства проецирования на эти поверхности.

Замечание. *В идейном плане исследования [1,2] восходят к работам [4,5]. О дальнейших уточнениях выражения для гравитационного потенциала см. [6].*

Замечание. *Различным аспектам картографирования малых небесных тел таким как выбор референц-поверхности, сглаживание, и т.д. посвящены работы [7-14], в которых развитые методики применены, в частности, к описанию поверхности астероида 433 Эрос. Применительно к кометам нетрадиционные референц-поверхности были предложены и изучены в [15].*

Литература

1. *Werner R. A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celest. Mech. & Dynam. Astr., **59**:3 (1994), 253-278.

2. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representation of asteroid 4769 Castalia // Celest. Mech. & Dynam. Astr., **59**:3 (1996), 313-344.

3. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., В.И. Никонов* О применении k-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел // Нелинейная динамика. **14**:1 (2018), 45–52.

4. *Страхов В.Н., Лапина М.И.* Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для однородных многогранников // Геофизический журнал. **8**:6 (1986), 20-31.

5. *Страхов В.Н., Лапина М.И.* Прямая и обратная задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. Киев: Наукова думка. 1983.

6. *Tereshchenko A.A., Zavizion O.V., Zheleznyak O.A.* Refinement of the approximation of celestial bodies' gravitational field using polyhedra // Astronomical School's Report. **9**:2 (2013), 180–185.

7. *Нырцов М.В., Флейс М.Э., Борисов М.М.* Картографирование астероида 433 Эрос в равнопромежуточных вдоль меридианов цилиндрической и азимутальной проекциях трехосного эллипсоида // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1 (2012), 54-61.

8. *Нырцов М.В.* Картографирование астероида 433 Эрос на основе проекций реальных поверхностей небесных тел // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2 (2009), 54-61.

9. *Нырцов М.В.* Карты малых небесных тел: формы их представления и способы использования// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1 (2009), 90-95.

10. *Нырцов М.В.* Особенности создания и возможности использования цифровых моделей рельефа для научных исследований и картографирования малых небесных тел// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2 (2010), 84-90.

11. *Нырцов М.В.* Отображение рельефа поверхности малых небесных тел с помощью анаглифов// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 3 (2010), 69-74.

12. *Нырцов М.В.* Отображение рельефа поверхности малых небесных тел с помощью аналитической отмывки// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 5 (2010), 72-76.

13. *Нырцов М.В.* Пиксельная генерализация на космических изображениях малых небесных тел// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1 (2011), 95-97.

14. *Нырцов М.В.* Создание глобальных фотомозаик поверхностей малых небесных тел// Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 6 (2010), 74-78.

15. *Crifo J.F., Rodionov A.V.* The Dependence of the Circumnuclear Coma Structure on the Properties of the Nucleus // Icarus. **129**:1 (1997), 72-93.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ПОБЕДРИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В.В. Вакулюк

vakulyuk@mail.ru

УДК 539.3

Рассматривается интегральное представление нелинейной связи между напряжениями и деформациями в теории вязкоупругости, предложенное Б.Е. Победрей. Частным случаем такого представления будут известные соотношения линейной теории вязкоупругости. В качестве одного из упрощений изучаются соотношения для нестареющего материала в виде интегралов Стильтьеса. Подробно рассмотрен одномерный случай, и приводятся возможные обобщения для изотропного материала. Представлены обобщения, использующие теории непрерывных цепных дробей и дробных производных.

Ключевые слова: нелинейная теория вязкоупругости, определяющие соотношения

Вакулюк Василий Владимирович, младший научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vasiliy Vakulyuk (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

The study of defining relations Pobedrya in the nonlinear theory of viscoelasticity

Considered integral representation of nonlinear relationships between stresses and strains in the theory of viscoelasticity, a proposed B. E. Pobedria. A special case of this representation will be the known relations of the linear theory of viscoelasticity. As one of the simplifications, the relations for ageless material in the form of Stieltjes integrals are studied. The one-dimensional case is considered in detail, and possible generalizations for the isotropic material are given. Generalizations using the theory of continued fractions and fractional calculus are presented.

Keywords: nonlinear theory of viscoelasticity, constitutive relationships

В отличие от общей теории нелинейной вязкоупругости, основанной на кратно-интегральных зависимостях Вольтерры, соотношения нелинейной вязкоупругости Б.Е. Победри содержат интеграл в знаменателе и соответствуют бесконечному ряду Вольтерра с ядрами специального вида. В общем анизотропном случае их можно представить в форме [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t A_{ijklmn}(t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)p_{mn}(t,\tau)d\tau \\ p_{mn}(t,\tau) &\equiv \left[\mathbf{E} - \alpha \int_0^\tau \underset{\approx}{\mathbf{q}}(t,\xi) \overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi)d\xi\right]^{-1}_{mn}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $[\ \ ]^{-1}$ обозначает тензор, обратный тензору, заключённому в квадратные скобки. Здесь $A_{ijklmn}(t,\tau), \underset{\approx}{\mathbf{q}}(t,\xi)$ — компоненты тензоров ядер релаксации шестого и четвёртого ранга соответственно, $\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга, α — некоторый "малый параметр". Частным случаем такого представления (при $\alpha = 0$) будут классические соотношения линейной теории вязкоупругости. Для изотропной среды тензор $A_{ijklmn}(t,\tau)$ имеет три независимые компоненты, а тензор $\underset{\approx}{\mathbf{q}}(t,\xi)$ — две. В простейшем одномерном случае для нестареющего материала соотношения Б.Е. Победри можно представить в виде интегралов Стилтьеса:

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{A(t-\tau)d\varepsilon(\tau)}{1 - \alpha \int_0^\tau q(t-\xi)d\varepsilon(\xi)}. \tag{2}$$

Естественным обобщением этой зависимости являются определяющие соотношения, использующие функциональные ряды, полученные в теории непрерывных (цепных) дробей. Ограничимся для простоты одномерным случаем. Тогда соотношения, обобщающие зависимости (2) будут иметь вид:

$$\sigma(t) = \int\limits_0^t \cfrac{A_0(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau}{1 - \int\limits_0^t \cfrac{A_1(t-\tau_1)\varepsilon(\tau_1)d\tau_1}{1 - \int\limits_0^t \cfrac{A_2(t-\tau_2)\varepsilon(\tau_2)d\tau_2}{\ddots \\ \cdots 1 - \int\limits_0^t \cfrac{A_{n-1}(t-\tau_{n-1})\varepsilon(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}}{1 - \int\limits_0^t A_n(t-\tau_n)\varepsilon(\tau_n)d\tau_n}}}}. \tag{3}$$

Теория, основанная на соотношениях (3), будет эквивалентна одномерной, базирующейся на нелинейных соотношениях Вольтерры.

В качестве одного из упрощений нелинейной анизотропной теории (1), выдвинутой Б.Е. Победрей, предлагается использовать соотношения для нестареющего материала в виде интегралов Стилтьеса:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int\limits_0^t A_{ijkl}(t-\tau)p(t,\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau) \\ p(t,\tau) &\equiv \left[1 - \alpha \int\limits_0^\tau q_{mn}(t-\xi)d\varepsilon_{mn}(\xi)\right]^{-1} \cdot \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда анизотропию для функции релаксации $A_{ijkl}(t-\tau)$ можно выбирать аналогично линейной теории, а тензор $q_{mn}(t-\xi)$ будет отвечать за нелинейность материала в зависимости от деформаций. Для простоты далее будем рассматривать изотропный случай. Аналогично линейной теории вязкоупругости для компонент тензора релаксации возьмём:

$$A_{ijkl}(t) = a(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + b(t)\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\}. \tag{5}$$

Здесь δ_{ij} — дельта-функция Кронеккера. Разложим симметричные тензоры $q_{mn}(t)$, $\varepsilon_{mn}(t)$ на шаровую часть и девиатор:

$$q_{mn} = q\delta_{mn} + \tilde{q}_{mn}, \quad \varepsilon_{mn} = \tfrac{1}{3}\theta\delta_{mn} + e_{mn}, \quad q = \tfrac{1}{3}\delta_{ij}q_{ij}, \quad \theta = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{6}$$

В общем случае нагружения (6) из (4) получим для тензора напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) \equiv \sigma(t)\delta_{ij} + s_{ij}(t) = &\int\limits_0^t \frac{A(t-\tau)\delta_{ij}d\theta(\tau)}{1 - \int\limits_0^\tau q(t-\xi)d\theta(\xi) - \int\limits_0^\tau \tilde{q}_{mn}(t-\zeta)de_{mn}(\zeta)} + \\ &+ \int\limits_0^t \frac{2b(t-\tau)de_{ij}(\tau)}{1 - \int\limits_0^\tau q(t-\xi)d\theta(\xi) - \int\limits_0^\tau \tilde{q}_{mn}(t-\zeta)de_{mn}(\zeta)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое представляет собой аналог шаровой части тензора, а второе — аналог девиатора.

В случае предположения об упругом поведении объёма $q(t) = 0$, $A(t) \equiv 3a(t) + 2b(t) = A^{-1} \equiv K = const$ для малых $\varepsilon_{ij}(t)$ из (7), раскладывая в ряды, приближённо получим:

$$\begin{cases} \sigma(t) = A^{-1}\theta(t) \\ s_{ij}(t) = \int\limits_0^t 2b(t-\tau)de_{ij}(\tau) + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau 2b(t-\tau)\tilde{q}_{mn}(t-\zeta)de_{mn}(\zeta)de_{ij}(\tau). \end{cases} \tag{8}$$

Эти зависимости между шаровыми частями и девиаторами тензоров напряжений и деформаций соответствуют одному из частных случаев главной нелинейной теории вязкоупругости [1].

Можно рассматривать и другие варианты определяющих соотношений типа (2), (4), например:

$$\sigma_{ij}(t) = \int\limits_0^t \frac{A_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau}{1 - \int\limits_0^\tau q(t,\xi)f({}_1I_\varepsilon, {}_2I_\varepsilon)d\xi}.$$

Здесь $f({}_1I_\varepsilon, {}_2I_\varepsilon)$ — функция от первых двух инвариантов тензора деформаций. Интересно также в качестве одного из обобщений рассмотреть случай, когда в (4)

$$p(t,\tau) \equiv \left[1 - \alpha \int\limits_0^\tau q_{mn}(t-\xi)d\varepsilon_{mn}(\xi)\right]^{-\beta}.$$

Здесь $\beta \in [0,1]$. Тогда в случае $\beta = 0$ получим обычные соотношения линейной теории вязкоупругости, а при $\beta = 1$ соотношения рассмотренные выше. Кроме того, можно рассмотреть соотношение: $p(t,\tau) \equiv \left[1 - D^\alpha \left[q_{mn}\varepsilon_{mn}\right]\right]^{-1}$, где оператор дробного дифференцирования определяется как:

$$D^\alpha f(t) \equiv \frac{d}{dt}\left[D^{\alpha-1}f(t)\right] \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right].$$

Литература

1. *Вакулюк В.В., Победря Б.Е.* О нелинейной теории вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ, 6 (2005), 49-55.

2. *Вакулюк В. В.* О новом типе определяющих соотношений интегрального вида в нелинейной теории вязкоупругости // И. А. Кийко и др.(ред.) Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума. — Москва: Изд. Московского университета, 2011. — 322-325.

И. НЬЮТОН И А.Н. КРЫЛОВ: АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

В.И. Ванько
vvanko@mail.ru

УДК 533.6.11

Излагается вариационная постановка и решение задачи Ньютона о проектировании тела вращения наименьшего лобового сопротивления. Подчёркивается выдающаяся роль акад. А.Н. Крылова в современном решении задачи. Отмечается вклад отечественных учёных в разработку теории летательных аппаратов оптимальных форм. Представлены результаты автора: алгебраический анализ существования и единственности решения; пример построения лобовой части наименьшего сопротивления.

Ключевые слова: лобовое сопротивление, минимизация, тело вращения, задача Ньютона, существование и единственность решения.

I. Newton and A.N. Krylov: Aerodynamic problem

The variational set Newton task about the rotational body form with the least drag is stated. The outstanding role of academician A.N.Krylov in the modern problem solution is emphasized. The native sciences contribution to development of optimal forms flying vehicles is marked. Author's results are presented: an algebraic investigation of existence and uniqueness the Newton problem solution; example of the bow section design's of smallest drag.

Keywords: drag, minimization, revolution body, Newton's problem, existence and uniqueness of solution.

Доклад посвящён двум юбилейным датам прошлого, 2018 года: 375-ой годовщине со дня рождения И. Ньютона и 155-ой годовщине А.Н. Крылова.

В 1687 г. вышел в свет (полный текст — три книги) исторический труд сэра Исаака Ньютона "Математические начала натуральной философии". В России книга впервые была опубликована в 1915–16 гг. в "Известиях Николаевской морской академии" в переводе с латыни "с пояснениями и примечаниями Флота Генерала А.Н.Крылова, заслуженного профессора академии, ординарного академика Императорской академии наук" [1, 2].

В разделе 7 (книга II) "О движении жидкостей и сопротивлении брошенных" тел Ньютон решает задачу о сопротивлении движению шара и длинного цилиндра равных диаметров в "редкой среде" (модель идеального газа или слабо сопротивляющейся жидкости), затем исследует движение усечённого конуса в той же среде и ставит задачу о нахождении формы тела вращения, испытывающего наименьшее лобовое сопротивление при своём движении. Решение поставленной задачи Ньютон приводит без всяких пояснений ("Я считаю, что ..."), в виде некоторой пропорции, составленной из линейных элементов проектируемого тела вращения: оказалось, что

Вячеслав И. Ванько, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Vyacheslav Vanko, Bauman Moscow state technical university (Moscow, Russia)

носовая секция конструкции должна быть затуплена, т.е. должна иметь плоскую площадку, встречающую набегающий поток. Постановка задачи о теле вращения с наименьшим лобовым сопротивлением, естественно, зависит от закона сопротивления среды. Ньютон представлял себе "редкую среду" состоящей из неподвижных равномерно расположенных в пространстве абсолютно упругих одинаковых шариков, которые оказывают сопротивление движущемуся телу и реагируют с телом по закону "угол падения равен углу отражения". Выводятся: закон сопротивления Ньютона (пропорциональность квадрату скорости); формула силы сопротивления движущемуся в "редкой среде" телу; ставится и решается соответствующая вариационная задача. Подчёркивается выдающаяся роль акад. Крылова в современной постановке и решении задачи. Отмечается вклад отечественных учёных в разработку теории летательных аппаратов оптимальных форм [3, 4].

Излагаются результаты автора: алгебраическое исследование существования и единственности решения задачи Ньютона, выведено достаточное условие единственности решения задачи в виде ограничения на выбор габаритов носовой секции; приведён пример проектирования носовой секции летательного аппарата наименьшего лобового сопротивления [5].

Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии// Изв. Николаевской морской академии. Петроград. **IV-V** (1915-1916).

2. Крылов А.Н. Собрание трудов. Т.7: Ньютон И. Математические начала натуральной философии . Перевод с латинского с примечаниями А.Н.Крылова. — М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1936. 696 с.

3. Чёрный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз. 1959. 220 с.

4. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана//ПММ, **27**:3 (1963), 484-495.

5. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Издание 4-ое, исправленное и дополненное. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2018. 488 с.

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТЯХ С МЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЦАМИ

Ю.В. Василевский

yuri.vassilevski@gmail.com

УДК 519.63

Представлена устойчивая схема конечно-элементного расчета течений несжимаемой жидкости в областях с границами, меняющимися во времени. Шаг по времени не зависит от шага сетки по пространству, причем на каждом шаге по времени достаточно решать только одну систему линейных уравнений. Схема применяется для приближенного решения как трехмерных уравнений Навье-Стокса в движущихся областях, так и задачи взаимодействия течения и упругих стенок (FSI).

Ключевые слова: метод конечных элементов, уравнения Навье-Стокса, оценка устойчивости

A numerical scheme for simulation of incompressible flows in time-dependent domains

We present a stable finite-element scheme for simulation of incompressible flows in time-dependent domains. The time step is independent of the mesh size, and only one linear system is solved on each time step. We consider fluid-structure interaction (FSI) and Navier-Stokes equations in time-dependent domains.

Keywords: finite element method, Navier-Stokes equations, stability estimate

Модели трехмерного течения несжимаемой жидкости в областях с меняющимися во времени границами востребованы во многих биомедицинских приложениях. Эти модели могут использовать положения движущейся границы, полученные из анализа медицинских изображений (течение крови в левом желудочке пациента), или рассчитывать положения границы как результат взаимодействия течения и упругих стенок (кровоток в аорте или сердечном клапане).

В основе нашей модели лежит устойчивая схема конечно-элементного расчета течений несжимаемой жидкости. Шаг по времени не зависит от шага сетки по пространству, причем на каждом шаге по времени достаточно решать только одну систему линейных уравнений. Схема применяется для приближенного решения как трехмерных уравнений Навье-Стокса в движущихся областях, так и задачи взаимодействия течения и упругих стенок (FSI).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00886, 18-00-01524).

Василевский Юрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, чл.-кор.РАН ИВМ РАН, МФТИ, Сеченовский университет, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Yuri Vassilevski (INM RAS, MIPT, Sechenov University, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Анализ схемы с точки зрения оценки ее устойчивости и сеточной сходимости [1,2,3] дополняется численным исследованием схемы на разных тестовых задачах [1,3,4] и ее применением при расчете кровотока [1,2,3,4]. В частности, мы рассматриваем двумерные и трехмерные течения в трубках с нелинейными гиперэластичными моделями стенки, стационарные и квазипериодичные взаимодействия между течением вязкой несжимаемой жидкости и нелинейно упругим препятствием, для которых известны экспериментальные данные, собранные во время фазово контрастного МРТ-исследования. Также мы демонстрируем моделирование течения крови в левом желудочке сердца человека, для которого динамика стенки желудочка восстановлена из последовательности КТ-изображений с контрастированием.

Эта работа сделана совместно с М.А. Ольшанским (Университет Хьюстона), А.А. Даниловым (ИВМ РАН, Сеченовский университет), А.В. Лозовским (ИВМ РАН), В.Ю. Саламатовой (МФТИ, Сеченовский университет).

Литература

1. *Lozovskiy A.V., Olshanskii M.A., Salamatova V.Y., Vassilevski Y.V.* An unconditionally stable semi-implicit FSI finite element method // Comput.Methods Appl.Mech.Engrg., **297** (2015), 437-454.

2. *Danilov A.A., Lozovskiy A.V., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V.* A finite element method for the Navier-Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, **32**:4 (2017), 225-236.

3. *Lozovskiy A.V., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V.* A quasi-Lagrangian finite element method for the Navier-Stokes equations in a time-dependent domain // Comput.Methods Appl.Mech.Engrg., **333** (2018), 55-73.

4. *Lozovskiy A.V., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V.* Analysis and assessment of a monolithic FSI finite element method // Comp.&Fluids, **179** (2019), 277-288.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПО ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ВУЛКАНИЧЕСКИМ ИЗВЕРЖЕНИЯМ

Е.А. Веденеева, О.Э. Мельник

el_vedeneeva@imec.msu.ru, melnik@imec.msu.ru

УДК 532.516:532.135

Решается задача о растекании степенной жидкости по горизонтальной поверхности, на которой ставится условие частичного проскальзывания. Жидкость поступает из точечного источника, течение осесимметричное. В приближении тонкого слоя задача сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с интегральным условием. Для степенной зависимости расхода от времени получено его автомодельное решение. Постановка задачи вызвана физической задачей о растекании лавовых потоков.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, проскальзывание, автомодельное решение, лавовые потоки

Similarity solution for non-Newtonian fluid spreading problem under the slip condition on the underlying surface. Application to volcanic eruptions

The problem of power-law fluid spreading over a horizontal surface under the slip condition on the surface is solved. Fluid flows from a point source, the flow is axisymmetric. In the thin-layer approximation, the problem is reduced to a solution of a single non-linear second-order partial differential equation with an integral condition. For the power-law time-dependent fluid source a similarity solution is obtained. Such problem definition have an application to the physical problem of the lava flows spreading.

Keywords: non-Newtonian fluid, slip condition, similarity solution, lava flows

В работе исследуется влияние условия частичного проскальзывания на подстилающей поверхности на скорость распространения и форму свободной поверхности степенной жидкости (подчиняющейся закону Ostwald — de Waele) [1], растекающейся от точечного источника. Поверхность считается плоской и горизонтальной. Постановка задачи возникла в связи с моделированием распространения лавовых потоков. Условие прилипания к подстилающей поверхности для лавы не всегда выполнено: на ней зачастую формируется подслой, содержащий значительную долю обломков остывшей

Веденеева Елена Анатольевна, к.ф.-м.н., с.н.с, Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Elena Vedeneeva (Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Мельник Олег Эдуардович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., зав.лаб., Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Oleg Melnik (Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

породы, не сцепленных с подстилающей поверхностью. Условие проскальзывания для лавы использовано в работах [2, 3], при моделировании течения магмы в канале вулкана в рассматриваемом виде — в [4]. Проскальзывание жидкости по поверхности встречается и в других геофизических задачах и в задачах о течении неньютоновских жидкостей [5].

Лава представляет собой сильновязкую жидкость со сложными свойствами, которые зависят от ее химического состава, температуры, содержания в ней пузырьков газов и кристаллов и часто проявляет неньютоновские свойства [3, 6-9]. В [2] лава считается ньютоновской жидкостью, в [3] — подчиняется закону Гершеля — Балкли, проскальзывание допускается только в одном разделе работы в несколько ином виде.

Нами рассматривается растекание несжимаемой степенной жидкости с плотностью ρ от точечного источника в начале координат по плоской горизонтальной поверхности. Ее эффективная вязкость [1] равна

$$\mu = \mu_0 \dot{\gamma}^{N-1}, \qquad \dot{\gamma} = \sqrt{2\, e^{ij} e_{ij}}$$

μ_0 и N — константы, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, e_{ij} — тензор скоростей дефомаций. Лава может себя вести и как псевдопластичная ($N < 1$), и как дилатантная ($N > 1$) жидкость [3, 6-9]. При $N = 1$ жидкость ньютоновская.

Течение считается осесимметричным. Ось z направлена вертикально против действия силы тяжести $\vec{g}$, ось r — по радиусу; v и w — радиальная и вертикальная компоненты скорости. Общий объем вытекшей жидкости Q является степенной функцией времени t: $Q = qt^{\beta}$, q и $\beta > 0$ — константы.

Система уравнений, описывающая такое течение, состоит из уравнения неразрывности и уравнений движения. Рассматривается приближение тонкого слоя: считается, что характерная толщина слоя H мала по сравнению с характерным радиусом растекания жидкости R: $\varepsilon = H/R \ll 1$. Тогда, оставляя только старшие члены, $\dot{\gamma} = \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|$. Для лавовых потоков для порядка обобщенного числа Рейнольдса [1] всегда верна оценка: $Re = \rho H^N {v_0}^{2-N}/\mu_0 \lesssim 1/\varepsilon$. Это позволяет пренебрегать в уравнении движения нестационарными и конвективными членами по сравнению с вязкими.

На подстилающей поверхности ставится условие проскальзывания в наиболее простом виде [2-4], оставляя только старшие слагаемые

$$z = 0: \quad v = B_d \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^n, \quad w = 0$$

B_d и n — положительные константы.

В приближении тонкого слоя задача сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для определения формы свободной поверхности $h(r,t)$ с интегральным условием. В безразмерных переменных оно имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{N}{2N+1}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(-\frac{\partial h}{\partial r}\right)^{\frac{1}{N}} h^{2+\frac{1}{N}}\right) + B\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(-\frac{\partial h}{\partial r}\right)^{\frac{n}{N}} h^{1+\frac{n}{N}}\right) = 0 \tag{1}$$

$$2\pi \int\limits_0^{\tilde r} h(r,t)\, r dr = t^\beta, \quad h(\tilde r(t),t) = 0, \qquad B = B_d\, q^{\frac{n-N-1}{\beta+3N}}\, a^{\frac{3(n-1)+\beta}{\beta+3N}},\ a = \frac{\rho g}{\mu_0}$$

$r = \tilde r(t)$ — радиус растекания лавы на текущий момент времени.

Уравнение (1) в переменных $(\xi = r/\tilde r(t), t)$ при условии, что выполнено соотношение для степеней — параметров задачи: $\beta = \frac{5+2N-5n}{2+N-n}$, имеет автомодельное решение $h(r,t) = \tilde h(\xi,t) = c_0\, t^k G(\xi)$, $c_0 = (2+1/N)^{\frac{2}{3}\left(1-\frac{5}{3N+5}\right)} (2\pi G_0)^{-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3N+5}\right)}$. Функция $G(\xi)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi \left(-\frac{dG}{d\xi}\right)^{\frac{1}{N}} G^{2+\frac{1}{N}}\right) + \widetilde B \frac{d}{d\xi}\left(\xi \left(-\frac{dG}{d\xi}\right)^{\frac{n}{N}} G^{1+\frac{n}{N}}\right) - l\,\xi^2 \frac{dG}{d\xi} + k\,\xi\, G = 0$$

$$\widetilde B = \left(\frac{N}{2N+1}\right)^{-\frac{1}{3}\left(1+5\frac{3n-1}{3N+5}\right)} (2\pi G_0)^{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3n-1}{3N+5}\right)} B, \quad \int\limits_0^1 G(\xi)\,\xi\, d\xi = G_0 \qquad (2)$$

$$k = \frac{(1+N)\beta - 2N}{5+3N}, \quad l = \frac{1}{2}(\beta - k), \qquad G(1) = 0, \quad \xi \in (0;1)$$

Коэффициент $\widetilde B$ зависит от интеграла от самой искомой функции $G(\xi)$. Радиус растекания лавы определяется как: $\widetilde r(t) = (2\pi G_0 c_0)^{-1/2}\, t^l$, причем должно быть выполнено условие $l > 0$.

Такой подход к решению задачи аналогичен работам [2-3,6,10-11], но учитывает и условие проскальзывания на подстилающей поверхности, и неньютоновские свойства жидкости.

Решение (2) представляет собой автомодельное решение исходной задачи, которое может быть непосредственно использовано для нахождения формы свободной поверхности при растекании степенной жидкости с учетом проскальзывания по подстилающей поверхности. Для характерных для течения лавы значений параметров из этого решения следует, что скорость распространения потока может быть до полутора раз выше.

Литература

1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика. — М.: Бюро Квантум, 1996.

2. *Веденеева Е.А.* Растекание лавы во время вулканических извержений при условии частичного проскальзывания на подстилающей поверхности // Изв. РАН. МЖГ, 2 (2015), 27-40.

3. *Balmforth N.J., Burbidge A.S., Craster R.V., Salzig J., Shen A.* Viscoplastic models of isothermal lava domes // J. Fluid Mech., 403 (2000), 37-65.

4. *Costa A., Wadge G., Melnik O.* Cyclic extrusion of a lava dome based on a stick-slip mechanism // Earth Planet. Sci. Lett., 337-338 (2012), 39-46.

5. *Ovarlez G., Hormozi S.* Lectures on Visco-Plastic Fluid Mechanics. — Springer International Publishing, 2019.

6. *Sayag R., Grae Worster M.* Axisymmetric gravity currents of power-law fluids over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech., 716, R5 (2013).

7. *Tallarico A., Dragoni M., Filippucci M., Piombo A., Santini S., Valerio A.* Cooling of a channeled lava flow with non-newtonian rheology: Crust formation and surface radiance // Annals of Geophysics, 54(5) (2011), 510-520.

8. *Chevrel M., Cimarelli C., deBiasi L., Hanson J. B., Lavallee Y., Arzilli F., Dingwell D. B.* Viscosity measurements of crystallizing andesite from Tungurahua volcano (Ecuador) // Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 16(3) (2015).

9. *Pistone M., Cordonnier B., Ulmer P., Caricchi L.* Rheological flow laws for multiphase magmas: An empirical approach // J. Volc. Geoth. Res., 321 (2016), 158-170.

10. *Huppert H.E.* The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech., 21 (1982), 43-58.

11. *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности // Изв. РАН. МЖГ, 3 (2014), 37-51.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В CAE FIDESYS ПРОЦЕССА АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НЕКОНФОРМНЫХ СЕТКАХ

А.В. Вершинин, К.М. Зингерман, Д.А. Коновалов, В.Ан. Левин
versh1984@mail.ru, v.a.levin@mail.ru

УДК 539.3

В докладе рассмотрен подход к численному моделированию процесса послойного наращивания изделия в процессе его изготовления аддитивным методом селективного лазерного спекания. Разработана методика расчета остаточных напряжений и деформаций в изделии аддитивного производства, вызванных неравномерностью нагрева и последовательностью добавляемых слоев. На основе теории многократного наложения больших деформаций и с использованием метода спектральных элементов решается последовательность нелинейных краевых задач о присоединении нагретого слоя к телу с накопленными на предыдущих шагах конечными деформациями. Рассмотрен алгоритм жесткого контакта, позволяющий выполнять дискретизацию геометрической модели изделия на неконформных сетках. Приведено сравнение с результатами натурного эксперимента, в котором оценка остаточных деформаций выполнялась путем надреза изделия после его изготовления. Дана оценка нелинейных эффектов, возникающих в результате многократного наложения конечных деформаций в процессе послойного наращивания изделия.

Ключевые слова: численное моделирование, аддитивные технологии, метод спектральных элементов, конечные деформации

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-38-70001).

Вершинин Анатолий Викторович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anatoly Vershinin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Зингерман Константин Моисеевич, д.ф.-м.н., профессор, ТвГУ (Тверь, Россия); Konstantin Zingerman (Tver State University, Russia)

Коновалов Дмитрий Андреевич, руководитель разработки ПО, ООО "Фидесис"(Москва, Россия); Dmitry Konovalov (Fidesys LLC, Moscow, Russia)

Левин Владимир Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Levin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Numerical modeling in CAE Fidesys of additive manufacturing using spectral element method at nonconformal meshes

The presentation considers an approach to the numerical modeling of the process of layer-by-layer additive manufacturing of the product using selective laser sintering. A numerical algorithm has been developed for calculating residual stresses and strains in an additive manufacturing product due to heterogeneous thermal strains and the order of 3D printed layers. Based on the theory of repeated superposition of large deformations and using the spectral element method we solve a sequence of nonlinear boundary-value problems of attaching a heated layer to the solid with accumulated finite deformations at previous printing steps. A bonded contact algorithm is developed that allows performing the discretization of a geometric model of a product using non-conformal unstructured meshes. A validation is presented with the results of a physical experiment in which the assessment of residual deformations was performed by cutting the product after it additive manufacturing. The estimation of nonlinear effects resulting from the repeated superposition of finite deformations in the process of layer-by-layer 3D printing of the product is given.

Keywords: numerical modeling, additive technologies, spectral element method, finite strains

Под аддитивными технологиями производства промышленных деталей и элементов конструкций понимается изготовление изделия путем добавления, наращивания по слоям соответствующего материала. Аддитивные технологии отличаются друг от друга выбором материалов и способов их нанесения, однако во всех случаях создание модели основывается на послойном наращивании. Расходными материалами может послужить пластик, бетон, гипс, деревянное волокно, поликарбонат, металл и даже живые клетки и шоколад. Способов нанесения существует два: струйный и лазерный. К струйному способу относятся такие технологии, как моделирование методом наплавления, а к лазерному – послойное ламинирование, селективное лазерное плавление, селективное лазерное спекание, лазерная наплавка металла и лазерная стереолитография. Аддитивные технологии изготовления элементов конструкций появились в 80-х годах прошлого века. Широкое распространение цифровых технологий в области проектирования-CAD, моделирования и расчетов-CAE и механообработки-CAM стимулировало интенсивное развитие этих технологий. Применение аддитивных технологий может быть целесообразно при изготовлении уникальных и мелкосерийных изделий, технологической оснастки в различных отраслях промышленности, в том числе авиационной промышленности, космической индустрии, энергетическом машиностроении и ряде других отраслей. Свойства материала изделия, изготовленного с помощью аддитивных технологий, могут существенно отличаться от исходных свойств этого материала. В наибольшей степени это относится к изделиям из металлов. При их изготовлении с помощью аддитивных технологий в качестве сырья используется металлический порошок, частицы которого спекаются в процессе изготовления. Кроме того, при изготовлении таких изделий их части подвергаются локальным воздействиям высоких температур, что приводит к значительным

температурным деформациям. В результате материал изделия может оказаться пористым, т.е. структурно-неоднородным, и при этом в нем возникают остаточные напряжения и деформации, которые могут быть конечными. Кроме того, большие локальные температурные деформации могут привести к потере устойчивости изделия в процессе его изготовления. Поэтому прочностные свойства изделий, изготовленных с помощью аддитивных технологий, существенно зависят от особенностей технологии их изготовления. Оценка прочностных свойств таких изделий, в особенности металлических изделий, представляет собой нетривиальную научную задачу. В докладе рассмотрены алгоритмы, реализованные в отечественной системе прочностного инженерного анализа CAE Fidesys, для трехмерного моделирования процессов аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках, позволяющие определить остаточные напряжения и деформации с целью минимизации искажения итоговой формы изделия. Стандартный подход к математическому моделированию данных процессов заключается в использовании так называемой воксельной модели изделия, состоящей из одинаковых элементарных ячеек-вокселей и представляющей собой декартову сетку с постоянным шагом разбиения. Размер вокселя, как правило, определяется размерами зоны локального интенсивного воздействия лазерного луча, например, в процессе селективного лазерного спекания, и может быть достаточно малым в сравнении с размерами самого изделия, изготавливаемого методами трехмерной печати. В итоге воксельная модель может содержать сотни миллионов вокселей, что затрудняет проведение численного расчета для прочностного анализа данной модели. В докладе рассмотрен алгоритм и его программная реализация в рамках CAE Fidesys для прочностного анализа трехмерной детали в процессе ее послойного изготовления методом аддитивного производства, использующий неконформные сетки для дискретизации геометрической модели детали и позволяющий сократить общее количество элементов в расчетной области за счет разгрубления сетки по мере удаления от области воздействия лазерного луча. При решении задачи теплопроводности в объеме печатаемой детали учитывается дискретное изменение формы области в результате послойного наращивания. Считается, что в каждый момент времени тепловой поток, моделирующий лазерное излучение, прикладывается к верхней границе одного из элементарных объемов верхнего слоя в соответствии с заданной стратегией создания изделия. Также считается, что по окончании действия теплового потока на данном участке границы происходит спекание порошка внутри данного элементарного объема и этот объем присоединяется к изделию. Объем изделия в каждый момент времени определяется как сумма элементарных объемов, присоединенных к изделию за предыдущие моменты времени. Задача термоупругости решается только для изделия без учета тех объемов, где материал остался в состоянии порошка. Учитывается, что механические свойства материала каждого элементарного объема, подвергнутого действию лазерного излучения, зависят от максимальной температуры, достигаемой в данном объеме. Для областей, удаленных от той части границы, к которой в данный момент времени приложен тепловой поток, исходная воксельная сетка заменяется на неструктурированную с целью значительного сокращения общего

числа элементов. При этом на границе неструктурированной сетки и воксельной используется метод контактного сопряжения решений в подобластях, обеспечивающий непрерывность перемещений и вектора нормальных напряжений на контактной границе. В соответствии с теорией многократного наложения конечных деформаций выделяются следующие состояния для нового добавляемого слоя в процессе послойного наращивания изделия аддитивного производства: начальное недеформированное состояние слоя, промежуточное состояние, соответствующее моменту появления температурных деформаций под воздействием лазера в новом присоединяемом слое, и текущее состояние, когда новый слой соединился к остальной уже изготовленной частью изделия и произошло перераспределение конечных деформаций. Для уже изготовленной части изделия во время наращивания нового n-го слоя можно выделить следующие состояния: промежуточное n-1 состояние с накопленными деформациями, в котором эта часть изделия находится в момент присоединения нагретого нового слоя к уже изготовленной части, и текущее n-е состояние в момент окончания перераспределения конечных деформаций и перехода к наращиванию следующего слоя. Постановка и решение задачи о наращивании очередного n-го слоя осуществляется в координатах n-1го промежуточного состояния. Численные результаты исследования получены путем интеграции разработанного программного модуля для трехмерного моделирования процессов аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках с отечественной промышленной системой прочностного инженерного анализа CAE Fidesys, обладающей гибко настраиваемым графическим интерфейсом пользователя препроцессора и постропроцессора системы, возможностью автоматизации задания параметров расчетной модели путем разработки соответствующих скриптов на Python, а также широкими возможностями по построению неструктурированных расчетных сеток из элементов различного вида, включая неконформные сетки в подобластях модели. Приведем описание физического эксперимента, на основе которого проводилась валидация программного модуля для численного моделирования послойного наращивания изделия аддитивного производства. Изделие в форме бруса размером 45мм x 6мм x 5мм с прямоугольными тонкими вырезами печатается на цилиндрической платформе радиусом 50мм и высотой 20мм. На основании платформы в процессе печати поддерживается постоянная температура. Мощность лазера равна 200Вт, время воздействия лазера 40мкс, толщина слоя печати 60мкм. После печати изделия медленно выполняется горизонтальный разрез в его верхней части. В результате накопленных остаточных напряжений в изделии происходит вертикальный изгиб верхней надрезанной части изделия. При численном моделировании несколько слоев печати объединялись в один слой наращивания, к которому передавалось количества тепла, равное передаваемому лазером при печати всех слоев внутри слоя наращивания. Расчет распределения температуры в слое проводился путем решения нелинейного уравнения теплопроводности, поскольку механические и тепловые свойства материала зависят от температуры. После расчета распределения температуры в слое, полученные температурные деформации использовались как начальные деформации при добавлении нового слоя наращивания. Полученные при численном

моделировании результаты согласуются с результатами физического эксперимента, что подтверждает корректность предложенного в докладе подхода к анализу напряженно-деформированного состояния и расчету остаточных напряжений в изделии аддитивного производства, изготовленного методом селективного лазерного спекания, на основе теории многократного наложения конечных деформаций. Полученные в рамках исследования результаты могут быть использованы в дальнейшем для: - Построения математических и имитационных моделей аддитивного производства, адаптация их к различным материалам и технологиям печати; - Повышения физико-механических и технологических свойств материалов, определяющих прочность, стойкость, надежность и долговечность изделия аддитивного производства; - Поиска нетрадиционных путей создания, получения, обработки и диагностики состояния материалов, открывающих новые перспективы качественного роста технических систем. Разработанные алгоритмы позволят также оценивать влияние технологических параметров аддитивного производства таких, как направление печати, расположение поддержек, свойства материала на прочностные характеристики полученных изделий, обеспечат возможность проектирования изделий и элементов конструкций из них учетом особенностей способа их производства с использованием аддитивных технологий, что в свою очередь позволит: 1. сократить время проектирования; 2. значительно уменьшить количество натурных экспериментов, что будет способствовать, в частности, снижению издержек по расходным материалам; 3. уменьшить массу изделий за счет более точного определения параметров, влияющих на оценку коэффициента запаса прочности; 4. оценивать эксплуатационные характеристики и ресурс изделия; 5. моделировать изменение характеристик изделия при закритических сценариях нагружения.

Литература

1. *Левин В.А.* Модели и методы. Образование и развитие дефектов. том.I. (Нелинейная вычислительная механика прочности цикл монографий в 5-и томах под общей редакцией В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ г. Москва, 2015. — 454 с.

2. *Левин В.А., Вершинин А.В.* Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности . Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — 544 с.

3. *Левин В.А., Зингерман К.М.* Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 3. Точные и приближенные аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. М.: Физматлит, 2016. 400с.

4. *Zienkievicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000, 689 pp.

5. *Konovalov D.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M., Levin V.A.* The implementation of spectral element method in a cae system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. — 2017. — Vol. 2017. — P. 1–7.

6. *Tripathy S., Chin C., London T., Ankalkhope U., Oancea V.* Process Modeling and Validation of Powder Bed Metal Additive Manufacturing // Conference NAFEMS World Congress 2017. — P. 1–7.

7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

8. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. - М.: Физматгиз 1962.

9. *Levin V.A.* Theory of repeated superposition of large deformations: elastic and viscoelastic bodies, International Journal of Solids and Structures, 1998, Vol. 35, pp. 2585–2600.

10. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Freiman E.I., Yangirova A.V* Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains, International Journal of Solids and Structures, 2013, Vol. 50, Issue 20-21, pp. 3119-3135.

11. *Komatitsch D., Violette J.-P.* The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, Bulletin of Seismological Society of America, 1998, Vol. 88, Issue 2.

12. *Ogden R.W.* Non-linear Elastic Deformations. Chichester, Ellis Horwood, 1984.

13. *Abel J., Shephard M.* An algorithm for multipoint constraints in finite element analysis: Int. J. Numer. Meth. Engng 14, 1979, 464–467.

14. *Chow E., Manteuffel T., Tong C., Wallin B.* Algebraic elimination of slide surface constraints in implicit structural analysis: Int. J. Numer. Meth. Engng 01, 2001, 1-21.

15. *Felippa C.* Introduction to finite element methods. Chapter 8 Multifreedom constraints I: Colorado, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, 2004, 1-17.

16. *Popp A., Wohlmuth B., Gee M., Wall W.* Dual Quadratic Mortar Finite Element Methods for 3D Finite Deformation Contact: SIAM Journal on Scientific Computing 34, 2012.

17. *Shephard M.* Linear multipoint constraints applied via transformation as part of a direct stiffness assembly process: Int. J. Numer. Meth. Engng 20, 1984, 2107-2112.

СПЕКТР ЗАТУХАЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И.И. Вигдорович

vigdorovich@imec.msu.ru

УДК 532.526

Исследуется поведение спектра энстрофии затухающей двумерной автомодельной турбулентности при больших волновых числах.

Ключевые слова: двумерная турбулентность, автомодельность, спектральные функции

Spectrum of freely decaying two-dimensional self-similar turbulence

The enstrophy spectrum of freely decaying two-dimensional self-similar turbulence at high wave numbers is investigated.

Keywords: two-dimensional turbulence, self-similarity, spectral functions

Вигдорович Игорь Ивлианович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Igor Vigdorovich (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Рассматривается затухающее двумерное однородное и изотропное турбулентное течение в автомодельном пределе, который достигается при больших значениях числа Рейнольдса, образованного по времени и кинетической энергии потока, если начальное значение усредненной энстрофии стремится к бесконечности при вязкости, стремящейся к нулю. В этом случае скорость диссипации энстрофии имеет ненулевой конечный предел. Исследуются корреляционная функция поля завихренности и спектральная плотность энстрофии в инерционном интервале расстояний и волновых чисел, где эти функции свободны от влияния вязкости и параметров крупномасштабного течения.

Оказывается, что в затухающей двумерной автомодельной турбулентности инерционный интервал существует в физическом пространстве, но отсутствует в пространстве волновых чисел. Это означает, что турбулентные вихри соответствующего размера не дают вклада в спектральную плотность, а известный закон минус первой степени не выполняется. Спектральная плотность энстрофии при больших волновых числах ведет себя немонотонно — она сначала убывает быстрее, чем по закону минус первой степени [1], а затем, в области диссипации, имеет участок роста и второй максимум [2, 3]. При этом поток энстрофии по спектру на левой границе области диссипации составляет только часть от скорости диссипации энстрофии [2, 3].

Литература

1. *Batchelor G.K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // Phys. Fluids Suppl. II, **12** (1969), 233–239.

2. *Vigdorovich I.I.* Enstrophy spectrum in freely decaying two-dimensional self-similar turbulent flow // Phys. Rev. E, **98** (2018), 033110.

3. *Вигдорович И.И.* Спектр затухающей двумерной автомодельной турбулентности // Докл. РАН, (2019) (в печати).

ЗАНОС КОЛЕСНОГО АППАРАТА ПРИ ПОПАДАНИИ НА «МИКСТ»

А.В. Влахова, А.П. Новодерова
vlakhova@mail.ru, an.novoderova@yandex.ru

УДК 531.8

Моделируется динамика двухосного четырехколесного аппарата при наезде колесами ведущей оси на «микст» – участок, где они имеют разные коэффициенты сцепления с опорной плоскостью. С помощью методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений получена оценка импульса угловой скорости, который получает корпус аппарата после завершения переходного процесса выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси. Проводится сравнение результатов с результатами, полученными ранее.

Ключевые слова: микст, занос колесного аппарата, фракционный анализ, модель кулонова трения, модель увода.

Wheeled vehicle skidding on mixed surface

The dynamics of a biaxial four-wheel vehicle on a horizontal plane is simulated when drive wheels of one of its axes get into the ≪mixed surface≫. ≪Mixed surface≫ is a section of the reference plane with different friction coefficients for the left and right wheels of one of the vehicle axes. Using the methods of the theory of singular perturbations and fractional analysis, we estimated the angular velocity impulse, which is obtained by the vehicle body after the completion of the transient process of the contact forces on the wheels of the drive axis. Comparison of the results with the results obtained earlier is given.

Keywords: mixed surface, wheeled vehicle skidding, fractional analysis, Coulomb friction model, slip model.

Введение. Причины возникновения заноса известны и обсуждаются во многих работах, но открытых теоретических исследований поведения колесных аппаратов при его возникновении существенно меньше, поскольку фирмы, занимающиеся конструированием аппаратов, как правило, не дают информации об алгоритмах работы систем, безопасности их движения. Вместе с тем даже у ведущих фирм возникают сложности с работоспособностью этих систем. Поэтому исследования, связанные с проблемой безопасности движения, актуальны и имеют как теоретический, так и практический интерес. В работе рассматривается задача о движении двухосного четырехколесного аппарата (автомобиля, робота и т.д.) при попадании одного из колес его ведущей оси на «микст» – участок с неодинаковыми коэффициентами сцепления левого и правого колес одной оси с опорной плоскостью. Для автомобиля это возможно, например, при въезде на обледенелую или

Влахова Анастасия Владимировна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anastasia Vlakhova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Новодерова Анна Павловна, аспирант 3 г/о, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anna Novoderova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

грязную обочину, одностороннем попадании в лужу масла и т.п. Первоначальное движение до попадания на «микст» считается равномерным и прямолинейным. Ранее в работе [1] с использованием предположения, что колеса аппарата (автомобиля) после попадания на «микст» взаимодействуют с опорной плоскостью в рамках модели увода в продольном и поперечном направлениях, было показано, что после завершения быстрого переходного процесса выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси аппарат получает импульс угловой скорости, способный привести к его заносу.

Постановка задачи. Математическая модель движения аппарата строится в следующих предположениях. Как и в [1], пренебрежем влиянием деформаций подвески на его геометрию масс и движение, будем считать оси вращения колес фиксированными в его продольной плоскости симметрии, углы развала и схождения колес – равным нулю. Свяжем с опорной плоскостью неподвижную систему координат $Ox_0y_0z_0$, с центрами масс корпуса и колес аппарата – системы координат $Cxyz$, $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ соответственно. Индексы i задают переднюю ($i = 1$) и заднюю ($i = 1$) оси, индексы j – левую ($j = 1$) и правую ($j = 2$) стороны по ходу движения аппарата; оси Oz_0, Cz, $A_{ij}z_{ij}$ направлены по вертикали, ось Cx – вдоль продольной оси симметрии корпуса, оси $A_{ij}y_{ij}$ – по осям вращения колес.

Положение аппарата определяется декартовыми координатами X, Y точки C в системе координат $Ox_0y_0z_0$, углом Ψ поворота его корпуса вокруг оси Cz (углом курса) и углами Θ_{ij} поворота колес вокруг осей $A_{ij}y_{ij}$. Углы поворота передних колес относительно корпуса вокруг осей $A_{1j}z_{1j}$ полагаются равными нулю. Как и в [1–3], ограничимся случаем, когда из-за разнесения соответствующих масс моменты инерции колес существенно меньше момента инерции аппарата, и примем, что его центр масс совпадает с точкой C. Будем рассматривать заднеприводный аппарат, для которого моменты со стороны двигателя и тормозных колодок, приложенные к задним колесам, равны, и пренебрежем внешними возмущающими силами и моментами, учитывая только силу сопротивления воздуха. Как и в [2,3], ограничимся случаем малости поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата.

Для описания касательных составляющих контактных сил используется модель, которая учитывает деформации колес в продольном и поперечном направлениях. Если колесо движется с малыми проскальзываниями (уводом), но без скольжения, будем говорить, что оно не теряет сцепление с опорной плоскостью; если колесо скользит, контактные силы переходят в силы кулонова трения скольжения – колесо теряет сцепление с опорной плоскостью. Так же, как и в [1], разобьем исследование динамики аппарата на два этапа. На первом, до попадания на «микст», аппарат движется равномерно и прямолинейно. На втором этапе рассматривается начальная стадия движения аппарата на «миксте». В момент времени, который принимается за начальный для второго этапа, коэффициент кулонова трения скольжения правого заднего (ведущего) колеса мгновенно изменяет свое значение с κ_0 на $\kappa_M < \kappa_0$, коэффициент кулонова трения скольжения левого заднего колеса остается прежним, равным κ_0. Контактные силы на задних колесах становятся различными, установившееся движение аппарата нарушается, и в системе возникает динамический процесс выравнивания контактных сил

на задних колесах. При его исследовании в качестве начальных условий выбираются соответствующие значения переменных для предыдущего этапа установившегося движения.

Движение аппарата до попадания на «микст». Предполагается, что до попадания на «микст» аппарат движется равномерно, прямолинейно, без потери сцепления колес с опорной плоскостью. Динамические уравнения переходят в статические, которые при зафиксированном значении продольной скорости корпуса аппарата позволяют найти все неизвестные переменные и параметры системы. Полученное стационарное движение асимптотически устойчиво по первому приближению.

Движение аппарата на «миксте». В работе рассмотрены различные условия движения аппарата после его попадания на «микст»: все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью (модель увода) [1]; все колеса, кроме правого заднего, сохраняют сцепление с опорной плоскостью (модель увода), правое заднее скользит по опорной плоскости (модель трения Кулона); передние колеса аппарата не проскальзывают (на систему наложены неголономные связи), задние – скользят по опорной плоскости (модель трения Кулона). Для каждой из этих задач с использованием алгоритма А.Б. Васильевой [4] найдены оценки импульсов угловой скорости, получаемые аппаратом после попадания на «микст». В отличие от [1], где такие оценки делались путем анализа динамики двигателя, трансмиссии и колес аппарата, составленные в настоящей работе модели учитывают быстрое по сравнению с характерным временем вращения колес изменение скоростей их проскальзывания относительно опорной плоскости с использованием модели увода и изменение угловой скорости вала двигателя в случае скольжения одного из ведущих колес на «миксте».

Заключение. Математическая модель динамического процесса, составленная при помощи методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений [2—5], учитывающая как возможность увода, так и возможность скольжения попавшего на «микст» колеса, дает соответствующие оценки импульсов угловой скорости, получаемых аппаратом. Проведено их аналитическое сравнение с результатами [1] и численное исследование для значений параметров автомобиля. Полученные выводы могут быть использованы при создании систем управления аппаратов, обеспечивающих прекращение заноса или минимизацию его отрицательных последствий.

Литература

1. *Новожилов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А.* О поведении автомобиля на «миксте» // Изв. РАН. МТТ. 2001 № 3 С. 61 – 67.

2. *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014 148 с.

3. *Влахова А. В., Новодерова А. П.* Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1 С. 23 – 49.

4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа. 1990 208 с.

5. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. 1995 224 с.

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН

В.Е. Волков, А.И. Рубинштейн
vv1720@mail.ru, rubinshtein.ai@mail.ru

УДК 517.927.25, 517.956.227

Рассматриваются малые колебания кусочно однородных круглой и прямоугольной пластин, нагруженных по линии скачка однородности постоянной массой. Основной целью является получение характеристического уравнения для определения частот колебаний, обусловленных неоднородностью.

Ключевые слова: неоднородная пластина, нагруженная пластина, характеристическое уравнение, метод Фурье

Oscillations of the inhomogeneous loaded plates

Small oscillations of piecewise homogeneous round and rectangular plates loaded with a constant mass along the homogeneity jump line are considered. The main goal is to obtain a characteristic equation for determining the oscillation frequencies due to inhomogeneity.

Keywords: inhomogeneous plate, loaded plate, characteristic equation, Fourier method

Рассматриваются малые колебания кусочно однородных круглой и прямоугольной пластин в случае, когда пластины нагружены по линиям границ участков разной плотности массой постоянной линейной плотности. Основной целью работы является нахождение уравнений, позволяющих определить собственные частоты колебаний пластин.

Для круглой упругой мембраны ее поперечные смещения $u = u(r, \varphi, t)$ удовлетворяет на каждом из участков постоянной плотности следующим уравнениям

$$u_{tt} - a_0^2\,\Delta_{r,\varphi} u = 0, \qquad 0 < r < l_1,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ t > 0,$$

$$u_{tt} - a_1^2\,\Delta_{r,\varphi} u = 0, \qquad l_1 < r < l,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ t > 0,$$

где $\Delta_{r,\varphi}$ — лапласиан в полярных координатах:

$$\Delta_{r,\varphi} u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi},$$

$a_i^2 = T_0/\rho_i$, T_0 — постоянное натяжение, ρ_i — поверхностная плотность однородных участков, $i = 0, 1$. На границе участков однородности, т. е. при $r = l_1$, выполняется условие

$$m_0\,u_{tt}(l_1, \varphi, t) = T_0\Big(u_r(l_1 + 0, \varphi, t) - u_r(l_1 - 0, \varphi, t)\Big), \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ t > 0.$$

Волков Владимир Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Vladimir Volkov (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Рубинштейн Александр Иосифович, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Alexandr Rubinstein (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Считаем, что край мембраны закреплен, т. е. $u(l,\varphi,t)=0$, и заданы начальные условия $u(r,\varphi,0)$, $u_t(r,\varphi,0)$, согласованные с краевым. Как обычно, рассматриваем ограниченные при $r\to 0$ решения $u(r,\varphi,t)$.

Решение сформулированной задачи методом Фурье приводит к характеристическому уравнению

$$\det\begin{pmatrix} J_n(\mu l) & Y_n(\mu l) & 0 \\ J_n(\mu l_1) & Y_n(\mu l_1) & -J_n(\frac{a_1}{a_0}\mu l_1) \\ \mu J_n'(\mu l_1) & \mu Y_n'(\mu l_1) & \frac{m_0}{T_0}a_1^2\mu^2 J_n(\frac{a_1}{a_0}\mu l_1) - \frac{a_1}{a_0}\mu J_n'(\frac{a_1}{a_0}\mu l_1) \end{pmatrix} = 0$$

относительно спектрального параметра μ. Здесь J_n и Y_n — классические функции Бесселя и Неймана порядка n.

В частных случаях $m_0=0$ и $m_0=\infty$ получаем задачи о колебаниях круглой пластины кусочно постоянной плотности и однородного кругового кольца соответственно. Для последней задачи (однородного кругового кольца) характеристическое уравнение примет вид

$$J_n(\mu l_1)\,Y_n(\mu l) - J_n(\mu l)\,Y_n(\mu l_1) = 0.$$

Рассмотрена аналогичная задача о поперечных колебаниях прямоугольной пластины $x\in(0,l_x),\ y\in(0,l_y)$. Смещение $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнениям

$$u_{tt} - a_0^2(u_{xx}+u_{yy}) = 0, \qquad x\in(0,x_0),\ y\in(0,l_y),\ t>0,$$

$$u_{tt} - a_1^2(u_{xx}+u_{yy}) = 0, \qquad x\in(x_0,l_x),\ y\in(0,l_y),\ t>0.$$

На границе участков однородности $x=x_0$ выполняется условие

$$m_0\,u_{tt}(x_0,y,t) = T_0\Big(u_x(x_0+0,y,t) - u_x(x_0-0,y,t)\Big), \quad y\in(0,l_y),\ t>0.$$

Считаем край мембраны закрепленным жестко, а начальные условия $u(x,y,0)$, $u_t(x,y,0)$ — согласованными с граничными. Для этой задачи также получено характеристическое уравнение.

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А.А. Гавриков
gavrikov@ipmnet.ru

УДК 534.113

В работе предложен подход к решению краевых задач на собственные значения для линейных гамильтоновых систем в предположении, что матрицы системы и краевых условий нелинейны по спектральному параметру. Метод может быть использован, в частности, при исследовании колебаний распределенных стержневых систем.

Ключевые слова: собственные значения, линейные гамильтоновы системы, задача на собственные значения

On the solution of eigenvalue boundary value problems for linear Hamiltonian systems

In this paper, an approach to solving eigenvalue boundary value problems for linear Hamiltonian systems is proposed. It is supposed that the system matrix and boundary conditions are nonlinear with respect to the spectral parameter. The method can be used, in particular, for the study of vibrations of distributed rod systems.

Keywords: eigenvalues, linear Hamiltonian systems, eigenproblems

Рассмотрим следующую самосопряженную при фиксированном λ краевую задачу на собственные значения и функции для линейной гамильтоновой системы: требуется найти λ из области допустимых значений $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такие, что существует нетривиальное решение $y(x)$ задачи

$$Jy(x)' = A(x,\lambda)y(x), \quad 0 < x < l, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$B_0(\lambda)y(0) = B_l(\lambda)y(l) = 0,$$

где J — симплектическая матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

I_n — единичная матрица размерности n, $y(x)$ — непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, зависящая от скалярной переменной x,

$$y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^* \in (C_1[0,l])^m;$$

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310387-0) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00812).

Гавриков Александр Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Alexander Gavrikov (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

матрица системы симметрична $A = A^* : (0,l) \times \Lambda \to \mathbb{R}^{m\times m}$, матрицы граничных условий $B_{0,l}(\lambda) : \Lambda \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $m = 2n$, $\mathrm{rank}B_0 = \mathrm{rank}B_l = n$, удовлетворяют условиям сопряженности

$$B_0 J B_0^* = 0, \quad B_l J B_l^* = 0, \tag{2}$$

а верхний индекс " $*$ " означает транспонирование. Элементы матрицы A полагаются непрерывно-дифференцируемыми по x и λ функциями $a_{ij}(x,\lambda)$, производная матрицы A по параметру λ не обращается в нуль (см. ниже), элементы матриц $B_{0,l}$ также непрерывно-дифференцируемы по λ, а собственные значения $\lambda \in \Lambda$ считаются гладким образом зависящими от длины интервала l в некотором диапазоне $l \pm \delta$, $\delta > 0$, и то же верно для обратной функции $l(\lambda)$. Предполагается, что решение задачи, пара λ, y, существует и спектр задачи для $\lambda \in \Lambda$ дискретен.

Обычно длина l считается фиксированной. В излагаемом подходе, основанном на методе ускоренной сходимости [1], исследуемая механическая система предполагается обладающей следующим свойством: при изменении длины этой системы (или параметра, соответствующего длине) на малую величину, частоты системы также мало меняются. Такое предположение позволяет разработать алгоритм, учитывающий скорость этого изменения.

Считая длину l свободным параметром и дифференцируя задачу (1, 2) по параметру l, можно получить следующее выражение для производной собственного значения по длине интервала

$$\lambda'(l) = -\frac{(Ay,y)_l}{N(l)}, \quad N(l) = \langle A'_\lambda y, y\rangle_l + (B'_{x,\lambda} y, D_x q_x)_x|_{x=0}^{x=l},$$

где величина в знаменателе считается не обращающейся в нуль,

$$\langle f,g\rangle_l = \int_0^l (f,g)_x dx,$$

$(f,g)_x$ — скалярное произведение значений функций в точке x в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{R}^n$, $f(x)|_{x=x_1}^{x=x_2} = f(x_2) - f(x_1)$. Матрицы $D_{0,l}$ составляются из линейно-независимых столбцов матриц $B_{0,l}$, а вектора $q_{0,l}$ — из элементов векторов $y(0), y(l)$, см. [2].

Рассмотрим следующую итерационную процедуру типа Ньютона.
1. Для данного приближения собственного значения $\lambda^{(i)}$ построим численно или аналитически решение $Y_{(i)}$ матричного уравнения

$$JY'_{(i)} = AY_{(i)}, \quad Y_{(i)}(0) = I_m.$$

2. Найдем $\xi_{(i)}$ как подходящий корень (ближайший к l или k-й, если известен номер собственного значения k и для изучаемой системы выполнены соответствующие осцилляционные теоремы Штурма) уравнения

$$\Delta_{(i)}(x) = 0, \quad \Delta_{(i)} = \det B_{(i)}, \quad B_{(i)}(x) = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_l Y_{(i)}(x) \end{pmatrix}.$$

3. Построим собственную функцию $y^{(i)}(x) = Y_{(i)}(x)c_{(i)}$, где $c_{(i)}$ — решение однородной линейной системы $B(\xi_{(i)})c_{(i)} = 0$.
4. Вычислить следующее приближение собственного значения

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} - \varepsilon_{(i)} l(A(\lambda^{(i)})y^{(i)}, y^{(i)})(\xi_{(i)})/N(\xi_{(i)})$$

где $\varepsilon_{(i)} = (l - \xi_{(i)})/l$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *При принятых предположениях для достаточно близкого начального приближения $\lambda^{(0)}$ применение шага процедуры приводит к следующей равномерной по $\varepsilon^{(0)}$, $|\varepsilon^{(0)}| \ll 1$ оценке*

$$\|y - y^{(1)}\|_{C_1} \leqslant C_y(\varepsilon^{(0)})^2, \quad |\lambda - \lambda^{(1)}| \leqslant C_\lambda(\varepsilon^{(0)})^2.$$

Если λ' сохраняет знак в некоторой окрестности δ_l допустимых значений $(l, \lambda(l))$ и для некоторых i, j точки $(\xi_{(i)}, \lambda^{(i)})$, $(\xi_{(j)}, \lambda^{(j)})$ лежат в этой окрестности то

1) *при $(Ay^{(i)}, y^{(i)})_{\xi_{(i)}}/N(\xi_{(i)}) > 0$, $\xi_{(i)} < l$ выполнено $\lambda^{(i)} > \lambda$;*
2) *при $(Ay^{(i)}, y^{(i)})_{\xi_{(i)}}/N(\xi_{(i)}) > 0$, $\xi_{(i)} > l$ выполнено $\lambda^{(i)} < \lambda$;*
3) *для $(Ay^{(i)}, y^{(i)})_{\xi_{(i)}}/N(\xi_{(i)}) < 0$ знаки неравенств меняются на противоположные.*

Таким образом, искомое собственное значение может быть заключено между $\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}$ для некоторых i, j

$$\lambda^{(i)} < \lambda < \lambda^{(j)}.$$

Используя предложенный подход проведены вычисления низших собственных частот ряда колебательных стержневых систем, допускающих формулировку в виде линейной гамильтоновой системы: трубопроводов, транспортирующих жидкость [3], неоднородных стержней Эйлера, Рэлея и Тимошенко, вращающихся стержней переменного сечения и т.д. Отдельный класс задач представляют собой системы с динамическими (зависящими от спектрального параметра) краевыми условиями, в частности, задачи о колебаниях стержней при наличии точечных масс, прикрепленных к концам стержней. Применение предложенного подхода позволяет использовать в задачах управления такими стержнями модовый подход.

Литература

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2005.

2. *Гавриков А.А.* Решение краевых задач на собственные значения для линейных гамильтоновых систем с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // ПММ, **82**:5 (2018), 605-621.

3. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН. МТТ, **1** (2018), 1-11.

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ, НАЛАГАЕМЫХ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СДВИГ СРЕДЫ БИНГАМА

Д.В. Георгиевский
georgiev@mech.math.msu.su

УДК 539.376

Исследуется плоскопараллельный нестационарный сдвиг однородной двухконстантной вязкопластической среды Бингама в бесконечном по простиранию слое. Учитывается изменение со временем толщин возможных жёстких зон, границы которых параллельны границам слоя. На основное течение налагается картина двумерных в плоскости слоя возмущений. Задача в терминах возмущений сводится к одному линеаризованному уравнению относительно амплитуды функции тока с соответствующим набором четырёх граничных условий. Выводятся достаточные интегральные оценки устойчивости, в которых участвуют числа Рейнольдса и Сен-Венана.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, сдвиг, жесткая зона, предел текучести, устойчивость, возмущение

Evolution of perturbations imposed on an unsteady shear of Bingham medium

This work studies the plane-parallel unsteady shear of a homogeneous two-constant viscoplastic Bingham medium in the infinite layer. The time variation in the thicknesses of the possible rigid zones is considered; their boundaries are parallel to the boundaries of the layer. The two-dimensional plane perturbations are superposed upon the main flow. The problem in terms of perturbations reduces to one linearized equation for the amplitude of the function of the flow with the corresponding set of four boundary conditions. The sufficient integral estimates of stability are derived in which the Reynolds and Saint-Venant numbers play a role.

Keywords: viscoplastic medium, shear, rigid zone, yield stress, stability, perturbation

В линеаризованной теории устойчивости существуют [1] различные обобщения уравнения Орра–Зоммерфельда и связанной с ним задачи на собственные значения. Для нестационарного вязкопластического сдвига подобное обобщение в безразмерном виде записывается следующим образом [2]:

$$\frac{1}{\mathsf{Re}}(\varphi_{xxxx} - 2s^2\varphi_{xx} + s^4\varphi) - \frac{4\mathsf{S}s^2}{\mathsf{Re}}\Big(\frac{\varphi_x}{|v_x^\circ|}\Big)_x = \\ = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + isv^\circ\Big)(\varphi_{xx} - s^2\varphi) - isv_{xx}^\circ\varphi \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-29-10085 мк, 19-01-00016 а).

Георгиевский Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, профессор РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Dimitri Georgievskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$$\psi(x_1, x, t) = \varphi(x, t)\,\mathrm{e}^{isx_1}, \quad s \geqslant 0, \tag{2}$$

где Re и S — числа Рейнольдса и Сен-Венана; $v^\circ(x,t)$ — профиль нестационарного основного сдвигового течения; оси x и x_1 направлены поперёк и вдоль слоя; s — волновое число отдельной гармоники вдоль оси x; $\psi(x_1, x, t)$ — возмущение функции тока.

Линеаризация граничных условий предполагает их снесение с неизвестных возмущённых границ на прямолинейные, реализуемые в основном процессе. Рассмотриваются три характерных в приложениях типа возмущённых граничных условий.

1°. *Прилипание к неподвижным либо нестационарно движущимся стенкам* $x = 0$ *и/или* $x = 1$. Эти условия задаются на прямолинейных границах и имеют наиболее известный и простой вид

$$\varphi = 0, \quad \varphi_x = 0 \tag{3}$$

2°. *Действие нестационарного касательного напряжения на движущейся стенке* $x = 0$ *или* $x = 1$, *не меняющегося в возмущенном процессе.*

$$\varphi = 0, \quad \varphi_{xx} = 0 \tag{4}$$

3°. *Условие на границе области течения и жёсткой зоны.* Пусть одна из таких границ в основном течении описывается уравнением $x_2 = \xi(t)$, а в возмущённом $x = \xi(t) + \eta(x_1, t)$, где $\eta = H(t)\,\mathrm{e}^{isx_1}$ — неизвестная малая вариация. Тогда

$$x = \xi(t): \qquad Hv^\circ_{xx} + \varphi_{xx} + s^2\varphi = 0, \quad H_t + isv^\circ H + is\varphi = 0 \tag{5}$$

Для анализа линеаризованного уравнения (1) с различными наборами четырёх граничных условий, составленных из комбинаций (3)–(5), используется метод интегральных соотношений [1–3], позволяющий получать достаточные оценки экспоненциальной устойчивости в том числе и для нестационарных невозмущённых процессов. Общий характерный вид таких оценок следующий:

$$I^2(t) \leqslant I^2(0) \exp \int_0^t \Big(q(\tau) - \frac{2\Lambda^2(\tau)}{\mathsf{Re}} \Big)\, d\tau \tag{6}$$

$$q(t) = \sup_{a(t)<x<b(t)} |v^\circ_x(x,t)|, \quad I^2(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \big(|\varphi_x|^2 + s^2|\varphi|^2 \big)\, dx$$

Вывод функций $\Lambda^2(t)$ в каждой из рассматриваемых в работе задач на собственные значения связан с проблемой минимизации квадратичных функционалов в $H_2[a(t), b(t)]$.

Литература

1. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. — Москва: ВИНИТИ, **25** (1991), 3-89.

2. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. — Москва: ЛЕНАНД, 2018.

3. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // ПММ, **82**:6 (2018), 798-807.

ЧАСТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА СО СПАРКАМИ ГИРОДИНОВ

А.В. Гладун

aleksygladun@gmail.com

УДК 531.383

Исследуется задача частичной стабилизации динамической системы, описывающей движение спутника, несущего одну или две спарки гиродинов. Получены стационарные решения системы, являющиеся положениями относительного равновесия и равномерными вращениями спутника. Выделены случаи управляемости системы по части переменных по линейному приближению в окрестности найденных стационарных движений. Построены управления, осуществляющие стабилизацию угловой скорости и стабилизацию равномерного вращения спутника. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: твердое тело, спарка гиродинов, равномерное вращение, положение равновесия, управляемость по части переменных, линейное приближение.

Partial stabilization of fixed motions of a satellite with doubled gyrodins

The problem of stabilization of a rotatory movement of a satellite with one or two doubled gyrodins is investigated. Positions of relative equilibrium and uniform rotations of the satellite with gyrodins are found. The cases of relative controllability of systems are chosen by a linear approximation in a neighbourhood of the found fixed motions. The controls to provide stabilization of angular velocity and stabilization of uniform rotation of a satellite are constructed. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: rigid body, doubled gyrodins, uniform rotations, equilibrium position, relative controllability, linear approximation

---

Гладун Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева (Ульяновск, Россия); Aleksei Gladun (Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk, Russia)

Исследуется задача стабилизации динамической системы, которая описывает движение твердого тела (спутника), несущего спарки гиродинов. Эти динамическая система нелинейная и не являются управляемой по всем переменным. Для решения задачи стабилизации спутника (носителя) хватает управляемости по части переменных, характеризующих угловую скорость и положение носителя в пространстве. Для значений переменных, которые характеризуют движение спарок гиродинов, нужна лишь ограниченность [1].

Гиродин – двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Объединенные в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирокамер параллельны. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению (в начальный момент времени) скоростями.

Используются уравнения движения твердого тела с s спарками гиродинов, полученные в работе [2]. В случае, когда у каждого гиродина ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения, они принимают вид

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega + 2\left(K_0 H \cos q\ \dot{q} + \omega \times K_0 \sin q\ h\right) = 0, \tag{1}$$

$$2J\ddot{q} - 2\left(K_0 H \cos q\right)^* \omega = M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_S+j}. \tag{2}$$

Здесь θ – матрица тензора инерции системы носитель-спарки гиродинов; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор угловой скорости носителя (спутника); $q = (q_1, \ldots, q_s)$ – вектор углов поворота гирокамер относительно носителя; K_0, L_0, N_0 — матрицы ортов, задающих положение i-й спарки гиродинов в теле носителе; $M_j^{C_j}$, $M_{s+j}^{C_S+j}$ — главные моменты управляющих сил относительно центра инерции j-го и s+j-го гиродинов, входящих в j-ю спарку, соответственно; * – символ транспонирования.

В качестве вектора управления выбирается вектор угловых скоростей поворота гирокамер относительно носителя $u = \dot{q}$, тогда главный момент управляющих сил из (2) определяется равенством

$$M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_S+j} = 2J\dot{u} - 2\left(K_0 H \cos q\right)^* \omega$$

и мы можем ограничиться в рассматриваемом случае только уравнением (1), описывающим движение спутника, для которого получаем

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega + 2\omega \times (K_0 \sin q\ h) + 2K_0 H \cos q\ u = 0. \tag{3}$$

Для уравнение (3), записанного в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с носителем, найдены стационарные решения полученной системы, являющиеся положениями относительного равновесия и равномерными вращениями спутника. Выделены случаи стабилизируемости системы по части переменных по линейному приближению в окрестности стационарных положений [3].

Получены стабилизирующие управления по части переменных. При построении исходная система приводится к системе специального вида [4],

для которой стабилизация достигается путем выбора собственных чисел, отвечающих матрице преобразованной системы и от которых, как от переменных, зависит управление. Как мнимые, так и действительные части собственных чисел этой матрицы подбираются таким образом, чтобы минимизировать норму управления. Задача минимизации решается методом сопряженных градиентов.

На основе алгоритма [5] с помощью математических пакетов построены управления, которые решают задачи стабилизации угловой скорости и равномерного вращения спутника. Построение выполнено для системы с заданными числовыми параметрами. Приведены результаты численного моделирования.

Литература

1. *Озиранер А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. // Прикладная математика и механика. — 1973. — Т.37. Вып.4. 659-665.

2. *Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П.,Юрков А.В.* Управление движением механических систем. — Л.: Издательство ЛГУ, 1985.

3. *Гладун А.В.* Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению. // Труды ИПММ НАН Украины. — 1998. — **2**. — 21–31.

4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

5. *Гладун А.В.* Стабилизация ориентации спутника с помощью двух спарок гиродинов. // Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, вып. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1637

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.Н. Голубятников, Д.В. Украинский

golubiat@mail.ru, d.v.ukrainskiy@gmail.com

УДК 534-13

Развивается метод аналитического построения точных решений уравнений адиабатического движения идеального совершенного газа. Используются разложения по степеням функций времени, удовлетворяющих системе с рациональным гамильтонианом. Возможен учет электромагнитного и гравитационного полей. В качестве уравнений применяется проекция уравнений Эйлера на лагранжеву систему координат, а также дифференциальное сохранение энтропии, наиболее удобные для перемножения рядов. Полное решение строится по начальным условиям только путем дифференцирования и целых алгебраических операций. Рассматривается ряд примеров.

Ключевые слова: газовая динамика, уравнения в частных производных, неортогональные ряды, гамильтоновы системы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00037).

Голубятников Александр Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Golubiatnikov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Украинский Дмитрий Владимирович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Dmitrii Ukrainskii (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Exact analytical solutions to gas dynamics equations

A method of analytical construction of exact solutions to the equations of ideal perfect gas adiabatic motion is developed. The expansion in powers of functions of time that satisfy the system with a rational Hamiltonian is used. Accounting for electromagnetic and gravitational fields is possible. The equations used are the projection of Euler equations on Lagrangian coordinate system, as well as the differential conservation of entropy, which are the most convenient for series multiplying. Complete solution is constructed from the initial conditions only by differentiation and entire algebraic operations. The examples are considered.

Keywords: gas dynamics, partial differential equations, non-orthogonal series, Hamiltonian systems

Излагается метод аналитического, в частности точного, построения решений уравнений трехмерного нестационарного адиабатического движения идеального совершенного газа, определяемых рациональным гамильтонианом. В качестве уравнений принимается форма Вебера, как проекция уравнений Эйлера на лагранжеву систему координат, а также дифференциальное сохранение энтропии

$$x^i_{tt}x_{i,\alpha} + h_{,\alpha} - \frac{h}{C_p}S_{,\alpha} = 0, \quad h_t\Delta + (\gamma-1)h\Delta_t, \quad \Delta = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha}\right).$$

Решения для закона движения и энтальпии строятся в виде степенных рядов от функции времени с коэффициентами, зависящими от координат начального состояния частиц:

$$x^i = \xi^i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\xi^\alpha)(\sigma(t)-\sigma(0))^k, \quad h = h_0(\xi^\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\xi^\alpha)(\sigma(t)-\sigma(0))^k.$$

Функция времени, использующая при разложении, в свою очередь, удовлетворяет гамильтоновой системе с рациональным гамильтонианом:

$$\frac{\dot\sigma^2}{2} + U(\sigma) = E_0, \quad \ddot\sigma = -\frac{\partial U}{\partial \sigma}, \quad U(\sigma) = \frac{P_n(\sigma)}{Q_n(\sigma)}.$$

Например, могут быть использованы функции: $\sin(t)$ (периодические решения, $U = \sigma^2/2$), $\exp(\pm t)$ (возрастающие либо убывающие решения, $U = -\sigma^2/2$), $\mathrm{tg}(t)$ (неограниченно растущие решения за конечное время, $U = \sigma^4/2 + \sigma^2$), $\mathrm{th}(t)$ (ограниченные монотонные решения, $U = \sigma^4/2 - \sigma^2$) и другие.

Начальные условия задаются в виде функций от лагранжевых переменных — начальных эйлеровых координат: удельных энтропии, энтальпии и скорости движения. Решения такого вида могут реализовываться как за счёт действия специальных краевых условий (поршней), так и за счёт массовых сил, например, собственной или внешней силы тяжести. К возмущающим силам, в частности приводящим к резонансу, можно отнести действие на заряженный газ внешнего электрического поля. Такого рода задачи встречаются, например, в динамике атмосфер звезд и планет. При

вычислении коэффициентов ряда не требуется решать дифференциальных уравнений или интегрировать: полное решение строится за счет дифференцирования и целых алгебраических операций. Это позволяет находить коэффициенты точно с использованием любого математического пакета, допускающего символьные преобразования. Граничные условия определяются подходящим образом после вычисления решения. Доказывается сходимость метода в определенном классе начальных данных.

Метод апробирован на периодических решениях уравнений газовой динамики с плоскими волнами [1]. В этом случае решение использует только операцию перемножения рядов второго порядка. В случае увеличения размерности уравнения Вебера сохраняют порядок умножения, но в уравнении для энтропии приходится при вычислении удельного объема использовать произведения третьего и четвёртого порядков для плоской и пространственной задач соответственно.

В качестве приложения рассматривается задача о колебаниях гравитирующего газового слоя, допускающая точное решение при однородном распределении плотности и линейной скорости по пространственной координате. Здесь представляет интерес исследование построения общего периодического решения при других классах начальных данных.

Литература

1. *D.V. Ukrainskii, A.N. Golubiatnikov.* On the periodical solutions for single-dimensional gas dynamics // Journal of Physics: Conference Ser., **1129** 012035 (2018).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА

И.Г. Горячева

goryache@ipmnet.ru

УДК 529.3

Даны постановки и предложены методы решения задач механики контактных взаимодействий с дискретным расположением пятен фактического контакта. Такие задачи, в частности, возникают при исследовании напряженно-деформированного состояния тел с шероховатыми поверхностями. Проведен анализ влияния плотности расположения инденторов, моделирующих выступы поверхности, обладающей микрорельефом и контактирующей с неограниченным упругим телом, и их формы на напряженное состояние упругого тела вблизи пятен фактического контакта.

Ключевые слова: дискретный контакт, шероховатость, контактные напряжения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00352).

Горячева Ирина Георгиевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Irina Goryacheva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Mathematical models of discrete contact mechanics

Formulations and methods for solving the contact mechanics problems with discrete location of the real contact spots are proposed. Such problems, in particular, arise in the study of the stress-strain state of bodies with rough surfaces. The analysis of the influence of the location of indenters that simulate the surface roughness, which are in contact with an elastic half-space, and of their shape on the stress state of the elastic body near the real contact spots is performed.

Keywords: discrete contact,roughness, contact stresses

При контактном взаимодействии реальных тел область контактного взаимодействия, как правило, дискретна в силу шероховатости поверхностей. Для изучения влияния топографии поверхности на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев контактирующих тел необходимо решать задачу дискретного контакта, т.е. задачу со смешанными граничными условиями для системы пятен контакта. Среди таких задач можно выделить контактные задачи для поверхностей с регулярным рельефом (область номинального контакта не ограничена) и для ограниченной системы пятен контакта (область номинального контакта ограничена).

При исследовании периодических задач в пространственной постановке рассматривается как одноуровневая, так и многоуровневая система осесимметричных (например, сферических) инденторов, моделирующих вершины неровностей поверхности контртела, которая внедряется в упругое полупространство. Для случая одноуровневой периодической системы сферических инденторов, расположенных на заданном расстоянии друг от друга (в частности, в узлах гексагональной или квадратичной решетки), построено интегральное уравнение для определения контактных давлений под отдельным индентором и предложен метод его решения [1,2]. Вытекающий из анализа ядра интегрального уравнения метод локализации используется для расчета контактных давлений на отдельных пятнах фактического контакта в случае внедрения разноуровневой системы инденторов. На основе полученных решений анализируется влияние плотности расположения инденторов и их высотного расположения на распределение контактных давлений и радиус отдельного пятна контакта. Разработанный подход использован для расчета характеристик контактного взаимодействия при сближении шероховатых поверхностей с учетом сил молекулярного взаимодействия в зазоре между контактирующими поверхностями [3,4]. Полученные решения применены также для анализа влияния пространственного расположения инденторов на характер распределения внутренних напряжений в упругом полупространстве и на скорость накопления контактно-усталостных повреждений в поверхностном слое материала при циклических нагрузках, связанных со скольжением шероховатого контртела.

В случае внедрения в упругое полупространство конечного числа инденторов, связанных между собой (системы инденторов), области фактического и номинального контакта являются ограниченными. При произвольном заданном пространственном расположении инденторов построена системы нелинейных уравнений для определения внедрений каждого индентора и действующих на него сил, а также выведены соотношения для

определения размера единичных пятен контакта для каждого индентора в зависимости от его положения в системе [1]. Численное исследование полученных уравнений для системы равновысоких инденторов сферической и цилиндрической формы показало существенное влияние параметра плотности контактов на распределение усилий между инденторами и отношение действующей на систему нагрузки к ее внедрению. В частности, показано, что приближенные методы расчета, не учитывающие взаимного влияния пятен контакта, дают завышенные значения контактной жесткости dP/dD (P – нагрузка, действующая на систему, D – ее внедрение) и фактической площади контакта. Ошибка возрастает с увеличением числа пятен контакта и их плотности. Метод применен к расчету внедрения медицинского инструмента, имеющего на своей поверхности заданный рельеф, в биологическую ткань и анализу влияния формы поверхностного рельефа на величину его внедрения при заданном значении приложенной силы [5].

Разработанные модели позволяют не только рассчитывать напряжения в контакте упругих тел, обладающих поверхностным микрорельефом, но и разрабатывать методы управления параметрами микрогеометрии поверхностей для достижения требуемых характеристик контактного взаимодействия (распределения давлений, внутренних напряжений и т.д.).

Литература

1. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — Москва: Наука, 2001.

2. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Yu.* Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account. // J. Phys.: Conf. Ser., **991** (2018) 012028.

3. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction, **5**:3 (2017), 339-350.

4. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии. // Изв.РАН. МТТ, №4 (2017), 1-11.

5. *Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. and Dosaev M.Z.* Contact Characteristics of Medical Forceps Indentation to Soft Tissue. // In: Corves B., Wenger P., Husing M. (eds) EuCoMeS 2018. Mechanisms and Machine Science, **59**. Springer, Cham. — 3-10.

ПРЕДСКАЗАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

В.А. Громов
stroller@rambler.ru

УДК 519.6, 539.3

Рассматриваются прямые и обратные задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана: под прямой задачей теории бифуркаций понимается задача построения бифуркационной картины, под обратной – задача идентификации предбифуркационного состояния, т.е. задача предсказания потери устойчивости. Представлены алгоритмы решения как прямой, так и обратной задачи; причём алгоритм решения обратной задачи существенно опирается на алгоритм решения прямой. Представлены результаты для цилиндрической оболочки, подвергнутой действию внешнего давления, и цилиндрической оболочки при действии осевого сжатия.

Ключевые слова: прямые и обратные задачи теории бифуркаций, уравнения Кармана, итерационный обобщённый метод Канторовича, цилиндрическая оболочка

Prediction of buckling for cylindrical shell: the direct and inverse bifurcation problems of the von Karman equations

The paper deals with the direct and inverse bifurcation problems for the von Karman equations; the direct bifurcation problem implies that a bifurcation (branching) structure of the equations is constructed, while the inverse bifurcation problem is the problem to identify pre-bifurcation states that is to predict buckling. The paper considers the algorithms to solve both direct and inverse problems; the algorithm for the inverse problem employs the one used to solve the direct problem. The results for cylindrical shell subject to external pressure and that one under axial compression are discussed.

Keywords: the direct and inverse bifurcation problems, for the von Karman equations, the iterative generalized Kantorovich method, cylindrical shell

Модели систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями типа Кармана, находят широкое применение в аэрокосмической технике, био- и нанотехнологиях, кораблестроении, нефтегазовой промышленности. Современная парадигма создания систем, характеризующихся свойством робастности, требует учёта возможности изменения состояния системы (без утраты её функциональных свойств) в условиях непредвиденных воздействий, что обуславливает необходимость создания нелинейных моделей и

Громов Василий Александрович, д.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (Москва, Россия); Vasilii A. Gromov, DSc, associate professor, (National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia)

анализа связанного с ними явления бифуркации [4, 8, 9]. Для решения задачи предсказания потери устойчивости цилиндрической оболочки – задачи идентификации предбифуркационного состояния – как обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана [4] предлагается использовать характерные последовательности решений, предшествующих возможным бифуркациям системы, (такой тип предвестников бифуркации относится к классу топологических). Для отыскания указанных последовательностей применялась экстракция знаний из информации о последовательностях решений, фиксирующихся на постбифуркационных (закритических) ветвях. Данный подход обуславливает необходимость построения последовательности решений (в функции от параметра нагрузки) для всех постбиркационных ветвей решения – построение бифуркационной картины; указанная задача формализуется как прямая задача теории бифуркаций [2-4,6-9]. Анализ основных особенностей, возникающих в процессе исследования систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями типа Кармана, таких как наличие решений соответствующих нелинейных краевых задач, которым свойственна существенная изменяемость в обоих координатных направлениях, вместе с возможностью существования постбифуркационных ветвей вторичного, третичного и дальнейшего предполагает создание метода анализа нелинейных краевых задач в частных производных, позволяющего преодолевать указанные трудности. Здесь предлагается итерационный метод построения решений нелинейных краевых задач, аналогичный обобщённому методу Канторовича решения линейных систем. В рамках предложенного метода решение на итерациях алгоритма представляется в виде суммы произведений функций одной переменной, что позволяет свести решение нелинейной краевой задачи для уравнений в частных производных к решению последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, позволило использовать аппарат анализа и решения уравнений указанного класса: метод сведения нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений к эквивалентной задаче Коши, метод продолжения по параметру и др. Применение указанного подхода приводит к вычислительным процедурам, количество операций в которых определяется размерностью решаемой задачи (а не размерностью дискретизации) и скоростью сходимости метода сведения к эквивалентной задаче Коши. С использованием предложенного подхода и разработанных алгоритмов был проведено широкомасштабное численное исследование общих свойств нелинейных моделей, описываемых уравнениями Кармана, и качественной картины их ветвления. Здесь было установлено, во-первых, что зависимости вида “бифуркационные значения амплитуды правой части в функции от параметра задачи” (сечения бифуркационного множества) носят существенно немонотонный характер. Во-вторых, реализующийся тип постбифуркационного решения определяется, главным образом, его изменяемостью вдоль главных координатных направлений, а не видом функции правой части. В-третьих, для нелинейных краевых задач для уравнений указанного класса характерно существование ветвей первичного, вторичного и третичного ветвления; особые точки могут характеризоваться одно- и двукратным вырождением. В-четвёртых, установлено, что среди множества структур

решения, отвечающим различным возможным значениям параметров задачи, можно выделить базовую бифуркационную структуру. При остальных значениях параметров происходит разрушение базовой бифуркационной структуры с образованием предельных кривых и изолированных ветвей решения. При этом возникающие предельные кривые как бы "притягиваются" к одной из постбифуркационных ветвей базового случая. Проведенный анализ позволил дать теоретическое объяснение вышеуказанной немонотонности кривых-сечений бифуркационного множества, связав минимумы и максимумы данных зависимостей с различными постбифуркационными ветвями базовой бифуркационной структуры. Для случая замкнутой цилиндрической области определения и однородных граничных условий (цилиндрическая оболочка при действии внешнего давления) базовой является бифуркационная картина, отвечающая константной функции правой части: решение характеризуется добифуркационной ветвью и ветвями первичного и вторичного ветвления. Ветвям первичного ветвления отвечают решения, регулярные в окружном направлении, ветвям вторичного ветвления – решения, локализованные в указанном направлении. Особые точки здесь характеризуются однократной вырожденностью [1,5,8]. Для случая замкнутой цилиндрической области определения и неоднородных граничных условий (цилиндрическая оболочка при действии осевого сжатия) базовой является бифуркационная картина, отвечающая константной функции граничных условий и нулевой функции правой части. Структура ветвления нелинейной краевой задачи в данном случае характеризуется следующими типами ветвей: добифуркационная ветвь; ветви первичного ветвления (соответствующие им решения регулярны в обоих направлениях); ветви вторичного ветвления (которым отвечают решения, регулярные в окружном направлении и локализованные в продольном); ветви третичного ветвления (которым отвечают решения, локализованные в обоих направлениях). Здесь возможно существование особых точек, характеризующихся как однократной, так и двукратной вырожденностью [8].

Литература

1. *Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации — М.: Наука, 1988.

2. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Неосесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // ПММ, **67**:6 (2003), 921-932.

3. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // ПММ, **66**:4 (2002), 621-633.

4. *Obodan N.I., Adlucky V.J., Gromov V.A.* Prediction and Control of Buckling: The Inverse Bifurcation Problems for von Karman Equations // Dutta H., Peters J.F. (Eds.) Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications Studies in Systems, Decision and Control. — N.-Y.: Springer, 2019. — 353-381.

5. *Obodan N.I., Gromov V.A.* Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells // Int. Appl. Mech., **42**:1 (2006), 90-97.

6. *Obodan N.I., Gromov V.A.* Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure // J. of Engrg. Math., **78**:1 (2013), 239-248.

7. *Obodan N.I., Gromov V.A.* The Complete Bifurcation Structure of Nonlinear Boundary Problem for Cylindrical Panel Subjected to Uniform External Pressure // Thin-walled Struct., **107** (2016), 612-619.

8. *Obodan N.I., Lebedeyev O.G., Gromov V.A.* Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. — N.-Y.: Springer, 2013.

9. *Zhou Y., Stanciulescu I., Eason T., Spottswood M.* Сопряженные операторы обобщенного сдвига // Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels. Finite Elements in Analysis and Design, **96** (2015), 41-50.

ОПЕРАТОРНЫЕ ПУЧКИ И ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ ГИДРОУПРУГОЙ МОДЕЛИ

С.Ю. Доброхотов

dobr@ipmnet.ru

УДК 517.9

В докладе обсуждается задача о возбуждении волн на поверхности слоя воды, расположенного на упругом основании. Предполагается, что источник возбуждения располагается внутри упругого полупространства. Получены эффективные формулы для решения, позволяющие оценить зависимость амплитуды порождаемой волны от глубины залегания источника, его характерных размеров и т.д.

Ключевые слова: гидроупругая модель, операторные пучки, волны на воде

Operator pencils and simple solutions of the wave problem on the liquid surface in the framework of a linear hydroelastic model

We discuss the problem of generation of waves on the surface of a water layer based on an elastic base. It is assumed that the generating source is located inside the elastic half-space. We obtain effective formulas for the solution which allow one to estimate the dependence of the generated wave amplitude on the depth of the source, its characteristic sizes, etc.

Keywords: hydroelastic model, operator pencils, water waves

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00644).

Доброхотов Сергей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН и Московский физико-технический институт (Москва, Россия); Sergey Dobrokhotov (Islinsky Institute for Problems in Mechanics RAS and Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia)

В докладе обсуждается задача о возбуждении волн на поверхности слоя воды, расположенного на упругом основании. Предполагается, что источник возбуждения располагается внутри упругого полупространства. Используется подход Г.С. Подъяпольского, основанный на изучении решений совместной линейной системы уравнений теории упругости в полупространстве и теории волн в жидкости, связанных на границе раздела соответствующими граничными условиями. Сначала задача сводится к исследованию спектра операторных пучков по вертикальной переменной, что позволяет написать общие интегральные формулы для решения соответствующей задачи Коши.Это соображение реализуется с помощью давних результатов, полученных, в частности, в давних работах Р. Гринива, С. Доброхотова, О. Толстовой, И. Чудиновича и А. Шкаликова. Далее показано, что дисперсионное соотношение, задающее собственные значения для так называемой водяной моды и учитывающее влияние упругого основания, может быть существенно упрощено. Это позволило вывести простую интегральную формулу, связывающую начальное возмущение в упругом полупространстве и амплитуду волны на поверхности воды, порожденной этим источником. Проведено сравнение получаемых решений с решениями, основанных на известной поршневой модели возбуждения длинных волн (волн цунами).

Работа выполнена совместно с К.А. Варгасом, Х.Х. Ильясовым, С.Я. Секерж-Зеньковичем, О.Л. Толстовой.

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ЛЬДА

В.П. Епифанов
evp@ipmnet.ru

УДК 559.3/5

Рассмотрены закономерности эволюции структуры пресноводного льда в условиях гидростатического сжатия при сдвиге под действием сходящихся и расходящихся фронтов импульсов напряжений. Исследовано обтекание льдом препятствия, распределение скоростей в цилиндрическом канале, формирование промежуточного слоя вблизи поверхности шарового индентора при медленном ударе. Рассмотрено усиление пластичности льда при наложении упругих волн конечной амплитуды, включая кумулятивный эффект. Количественно определены деформационные изменения структуры льда непосредственно в процессе контактного разрушения.

Ключевые слова: акустико-механический метод, пластичность, промежуточный слой, структура, кумулятивный эффект.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-05-07767_а).

Епифанов Виктор Павлович, д.ф.-м.н., с.н.с., ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского (Москва, Россия); Viktor Epifanov (Ishlinsky Institute for Problems in mechanics of RAS, Moscow, Russia)

Features of contact destruction of ice

The regularities of deformation changes in the structure of freshwater ice under hydrostatic compression during shear under the action of converging and divergent fronts of stress pulses are considered. Ice flow around an obstacle, velocity distribution in a cylindrical channel, formation of an intermediate layer near the surface of a ball indenter at a slow impact are investigated. The increase of ice plasticity at the imposition of elastic waves of finite amplitude, including the cumulative effect, is considered. Fundamentally new in the work is the quantitative determination of deformation changes in the structure of ice directly in the process of contact fracture.

Keywords: acoustic-mechanical method, plasticity, intermediate layer, structure, cumulative effect.

Лёд как материал, обладает рядом специфических свойств, обусловленных строением его кристаллической решётки и высокой гомологической температурой. Это отличает его реологические и прочностные характеристики от других конструкционных материалов. Так, если толщина промежуточного слоя для конструкционных материалов не превышает 1000 Å, то при контактном взаимодействии льда, например, с гладкой поверхностью стального шара толщина промежуточного слоя достигает нескольких миллиметров. Эта особенность обусловлена механизмом передачи контактных напряжений вглубь льда и его низким модулем упругости (в 20 раз меньше, чем у стали). Изучение структуры льда в кернах из скважин глубокого бурения показали, что в придонном льде имеется промежуточный слой, деформации которого, определяют поверхностную скорость ледника. По-видимому, лёд в промежуточном слое имеет существенно иные свойства и структуру, чем вышележащие слои льда. Актуальность изучения свойств льда в промежуточном слое связана с решением ряда прикладных задач (взаимодействия льда с ледостойкими сооружениями) и с прогнозом предельных режимов движения ледников, а также с механическими испытаниями льда. Впервые количественный контроль деформационных изменений микроструктуры зёрен льда был осуществлён с помощью метода нейтронной дифракции для тонких плёнок льда [1]. Непрерывный количественный мониторинг деформационных изменений объёмных образцов льда был выполнен с помощью акустико-механического метода [2, 3]. Цель настоящей работы состоит в изучении влияния импульсов напряжений на формирование промежуточного слоя в пресноводном льде при ударе и сдвиге в условиях гидростатического сжатия. Принципиально новым в настоящей работе является количественное определение деформационных изменений структуры льда под действием сходящихся и расходящихся фронтов импульсов напряжений. Нелинейные свойства льда исследованы экспериментально. Для исследования неупругого удара разработан метод, позволяющий определять мгновенные характеристики удара: мгновенное ускорение, мгновенную скорость и мгновенную осадку жёсткого шарового индентора, а также амплитудно-частотные характеристики сигналов акустической эмиссии. Установлено, что при ударе в зоне контакта формируется промежуточный слой, обладающий повышенной текучестью. Свойства этого

слоя определяют физическое подобие семейства кривых. Обобщённая зависимость приведённого напряжения от приведённой мгновенной скорости сопоставлена с моделями Герца и Тимошенко. Предложено определяющее реологическое уравнение, которое учитывает деформационные изменения структуры льда при пластическом ударе. Количественно определены деформационные изменения структуры льда в процессе удара. Исследовано усиление пластичности пресноводного льда при наложении упругих волн конечной амплитуды, включая кумулятивный эффект, а также обтекание пластически деформированным льдом препятствия и распределение скоростей при течении в цилиндрическом канале. Для этого применена матрица высокого сжатия с конфузором (аналог сопла Лаваля) и поршнем с эллипсоидной формой рабочей поверхности. Определены спектры сигналов акустической эмиссии и реологические характеристики льда, полученного методом интенсивной пластической деформации. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования процессов контактного разрушения глубинных горных пород, нагруженной ледяным полем опоры или ледостойкой платформы.

Литература

1. *Piazolo S., Wilson C.J.L., Luzin V., Brouzet C., Peternell M.* Dynamics of ice mass deformation: Linking processes to rheology, texture, and microstructure // Geochemistry, Geophysics, Geosystems, **14**:10 (2013), 4185-41194.

2. *Епифанов В.П.* Влияние промежуточного слоя на прочность соединения льда с подложкой // Докл. РАН, **472**:1 (2017), 27-32.

3. *Епифанов В.П.* Влияние импульсов напряжений на структуру льда в промежуточном слое // Докл. РАН, **479**:6 (2018), 629-633.

РАСЧЕТ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ СРЕДЫ ВАН ДЕР ВААЛЬСА В МОДЕЛИ ДИФФУЗНОГО ИНТЕРФЕЙСА ЛОКАЛЬНЫМ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Н.А. Зайцев, Б.В. Критский

nikolai_zaitsev@mail.ru

УДК 532.529.6

Разработан локальный разрывный метод Галеркина для расчета двухфазных многомерных течений однокомпонентных жидкостей в рамках модели диффузных интерфейсов с учетом капиллярных сил. Метод не требует отслеживания межфазных границ и позволяет рассчитывать монотонные в окрестности области межфазного интерфейса решения. Работоспособность метода продемонстрирована на задачах о движении изначально эллиптической капли и слиянии двух капель среды Ван дер Ваальса под действием капиллярных сил.

Ключевые слова: двухфазные течения, односкоростная модель, диффузный интерфейс, прямое численное моделирование

Зайцев Николай Альбертович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nikolay Zatitsev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Критский Борис Викторович, Институт прикладной математики РАН (Москва, Россия); Boris Kritskiy (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Calculation of two-phase flows of Van der Waals medium in the diffuse interface model by local discontinious Galerkin method

A local discontinuous Galerkin method has been developed for calculating two-phase multidimensional flows of one-component liquids within the framework of models of diffusion interfaces taking into account capillary forces. The method does not require tracking the interphase boundaries and allows to calculate monotonic solutions in the vicinity of the interface area. The efficiency of the method is demonstrated on problems on the motion of an initially elliptical drop and the merging of two droplets of a van der Waals medium under the action of capillary forces.

Keywords: two-phase flows, single velocity model, diffuse interface, direct numerical simulation

В работе предложен метод расчета двухфазных течений однокомпонентных сред на основе уравнений Навье-Стокса-Кортевега (НСК), которые предполагают, что в каждой точке области течения есть один набор параметров среды (плотность, скорость, энергия, температура, давление и т.д.). В отличие от модели многоскоростного континуума [1], в которой каждая фаза "размазана"по всему объему и описывается своим набором уравнений движения, в уравнениях НСК разные фазы — это просто разные области пространства параметров среды; осреднения параметров среды не производится, реологические и термодинамические свойства зависят только от среды, но не от режима течения. В уравнениях НСК используется модель диффузного интерфейса, в которой области, занятые средой в разных фазовых состояниях, разделяются не поверхностью раздела фаз, а областью интерфейса, где параметры среды меняются быстро, но непрерывно [2]. Капиллярные эффекты в отсутствии поверхности раздела фаз учитываются добавлением в тензор напряжений тензора статических напряжений Кортевега, выражающегося через пространственные производные плотности. При таком описании двухфазных течений параметры среды попадают в область эллиптичности, расположенную под линией спинодали в плоскости, которая характеризуется неустойчивостью решений. В настоящей работе предлагается численный метод решения системы уравнений НСК, регуляризирующий задачу на дискретном уровне. В основе метода лежит локальный разрывный метод Галеркина, предложенный в 1998 году Кокбурном и Шу [3] для нестационарных уравнений конвекции-диффузии. Суть метода заключается в том, чтобы записать систему законов сохранения, содержащих старшие пространственные производные, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка и применить к ней разрывный метод Галеркина. В работе расчеты проводились для среды Ван-дер-Ваальса, т. к. многие вычислительные трудности, определяемые наличием так называемой области эллиптичности в пространстве определяющих термодинамических параметров и зон резкого изменения параметров среды, для реальных двухфазных сред и среды Ван-дер-Ваальса совпадают. Уравнения НСК, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для вязкой теплопроводной среды при наличии капиллярных сил в рамках модели

диффузных интерфейсов, в отсутствие источников импульса и энергии могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \nabla \cdot (\tau + T),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (Eu) = \nabla \cdot ((\tau + T) \cdot u) - \nabla \cdot q - \nabla \cdot j_E,$$

где ρ — плотность, u — вектор скорости, τ — тензор вязких напряжений, $q = -k\nabla T$ — поток тепла, T — температура, k — коэффициент теплопроводности, $j_E = K(\rho \nabla \cdot u)\nabla\rho$ — поток энергии, связанный с капиллярными эффектами, тензор статических напряжений

$$T = \left(-P + \rho K \Delta \rho + \frac{1}{2} K |\nabla \rho|^2\right) I - K \nabla \rho \otimes \nabla \rho,$$

является такой составляющей полного тензора напряжений, которая не зависит от скорости и не дает вклада в производство энтропии, состоит из тензора капиллярных сил, называемый также тензором Кортевега, и тензора напряжений, связанного с градиентом термодинамического давления P. Полная энергия единицы объема

$$E = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho |u|^2 + \frac{1}{2} K |\nabla \rho|^2,$$

где K — пропорциональный коэффициенту поверхностного натяжения коэффициент капиллярной (градиентной) энергии, ε — внутренняя энергия единицы массы. Для среды Ван-дер-Ваальса давление, температура, плотность и внутренняя энергия связаны следующими соотношениями:

$$T(\varepsilon, \rho) = \frac{1}{c_v}(\varepsilon + a\rho), \quad P(\varepsilon, \rho) = \frac{\rho b R T(\varepsilon, \rho)}{b - \rho} - a\rho^2,$$

где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, R — универсальная газовая постоянная, параметры a и b выражаются через параметры вещества в критической точке.

Для учета производных порядка выше первого вводятся дополнительные переменные

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\tilde{\rho}} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{K}\nabla\rho \\ \sqrt{K}\nabla \cdot \tilde{\rho} \\ -k\nabla \mathrm{T} \end{pmatrix}.$$

Для расширенного набора искомых функций выписывается система определяющих уравнений в слабой постановке и решается с помощью разрывного метода Галеркина. Нормальные потоки на гранях, относящиеся к конвективной части вычисляются по схеме Лакса-Фридрихса. Остальные

граничные потоки берутся как полусумма потоков слева и справа от границы. Схема имеет теоретически произвольный порядок точности и обеспечивает строгую консервативность. Шаг по времени выбирался из соображений точности.

На рисунке 1 приводятся результаты расчета слияния двух капель под действием капиллярных сил. На рисунках цветом показаны поля плотности в различные моменты времени. Видно, что осцилляции в зоне фазового перехода, где плотность меняется от плотности пара до плотности жидкости, отсутствуют. Параметры среды Ван дер Ваальса выбраны такими, чтобы свойства среды были близки к свойствам воды.

Таким образом, метод позволяет рассчитывать монотонные на межфазном интерфейсе решения для уравнений состояния типа Ван дер Ваалься и не требует отслеживания межфазных границ, что позволяет использовать его для расчета возникновения и движения большого количества пузырьков и капель. Эти свойства делают его перспективным для использования в прямом численном моделировании сложных течений (DNS).

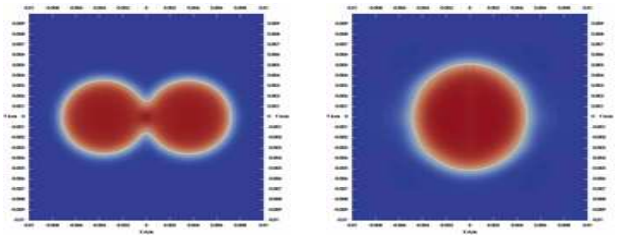


Рис. 5.1: Результаты моделирования (поле плотности) слияния двух капель под действием сил поверхностного натяжения; слева - начальная форма капли, справа - промежуточная форма, близкая к сферической.

Литература

1. *Р.И. Нигматулин*, Динамика многофазных сред. Ч. I и II. М.: Наука, 1987, 464 с. и 360 с.

2. *D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler*, Diffuse-interface methods in fluid mechanics // Annu. Rev. Fluid Mech. **30** (1998), 139–165.

3. *B. Cockburn and C.-W. Shu*, The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // SIAM J. Numer. Anal., **35** (1998), 2440-2463.

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТАЛОСТНОГО МАСШТАБНО-СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ

Э.Б. Завойчинская
elen@altomira.ru

УДК 539.4

Предложена многоуровневая модель стадийности усталостного разрушения, основанная на системе гипотез о вероятности развития дефектов (типа микро- и макротрещин) на шести масштабно-структурных уровнях в соответствии с эволюцией структуры металла по различным физическим механизмам. Сформулирована система определяющих соотношений для вероятности разрушения на каждом уровне. Получены серии кривых усталости по выбранным уровням дефектов для пропорционального трехмерного нагружения.

Ключевые слова: усталость металлов, вероятность разрушения, масштабно-структурный уровень

About the stochastic theory of metal scale-structural fatigue

The multilevel model of fatigue sequence, based on a system of hypotheses about the probability of defect growing (such as brittle micro- and macro cracks)on six scale-structural levels in accordance with the metal structure evolution by different physical mechanisms is proposed. A system of constitutive relations for the failure probability at each level was formulated. Series of fatigue curves for selected defect levels at proportional complex loading were obtained.

Keywords: fatigue, failure probability, scale-structural level

Доклад посвящен исследованию процессов хрупкого разрушения металлов и сплавов при пропорциональном (простом) нагружении вида:

$$\sigma_{kk}(\tau) = \alpha_k \sigma_a f(\tau), \quad f(\tau) = \sin(\omega\tau + \theta), \quad k = 1,2,3, \quad \tau \in [0,t],$$
$$|\sigma_{11}| \geqslant |\sigma_{22}| \geqslant |\sigma_{33}|, \ \alpha_k = \frac{\sigma_{kk}}{|\sigma_{11}|}, \ \alpha_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{11}}, \ \sigma_0 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}, \qquad (*)$$

где σ_a — амплитуда максимального главного напряжения, ω и θ — частота и фаза изменения напряжений, α_k— отношения главных напряжений σ_{kk}.

Анализ экспериментально-теоретических работ по физике твердого тела, металловедению, механике деформируемого твердого тела [1–2]показал, что при многоцикловой усталости развитие дефектов в диапазоне линейных размеров, в среднем, $l \in (10^{-4}, 10)$мм, является иерархическим многоуровневым процессом на микро-, мезо- и макроуровнях. Вводится классификация хрупкого разрушения по дефектам шести уровней, задаваемым случайными функциями линейных размеров дефекта $l_i = l_i(\tau)$ и плотности

Завойчинская Элеонора Борисовна, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Eleonora Zavoychinskaya (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$q_i = q_i(\tau), i = 1, ..., 6$, в некотором представительном объеме V_c, в котором возможно зарождение единичной макротрещины конечной длины L. Смена уровней характеризуется сменой физических механизмов разрушения. Формированию единичной макротрещины предшествуют образование,развитие и слияние дефектов всех шести уровней последовательно (иерархия масштабных уровней разрушения). Для i—го уровня вводится непрерывная случайная усредняющая функция $l_i^* = l_i^*(\tau)$: $l_i^*(\tau) = l_i(\tau)(q_i(\tau)V_c)^\gamma$, $\tau \in [0, t]$,γ — константа материала. Предельное состояние дефекта определяется достижением этой функцией предельного значения $l_{f,i}^*$, $i = 1, ...6$.

В каждый момент времени τ усредняющая функция является случайной величиной l_i^*, характеризуемой распределением Q_i^*, $0 \leqslant Q_i \leqslant Q_0$, $i = 1, ...6$, (вероятностью достижения величиной l_i^* предельного значения $l_{f,i}^*$, а дефектами i-го уровня — предельного состояния (по первому разрушению), которое называется вероятностью разрушения.

Согласно постулату макроскопической определимости А.А. Ильюшина [3], процесс разрушения определяется процессом нагружения. Для процесса (*) в предположении равномерного распределения дефектов в объеме V_c записывается следующая система определяющих соотношений для $Q_i = Q_i(\sigma_a, n)$, $i = 1, ..., 6$ (n — число циклов нагружения)[4]:
на микроуровне ($i = 1, 2, 3$) при условиях $\sigma_a \geqslant \sigma_{i-1}$, $\lg n \geqslant \lg n_i(\sigma_a)$, $\sigma_0 = 0$, $n_1 = 1$ имеем

$$Q_i = F_i\left(\frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}}\right) R_i\left(\frac{\lg n - \lg n_i(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_i(\sigma_i)}\right), \quad Q_i(n_{i+1}) = 1; \tag{1}$$

на мезоуровне ($i = 4, 5, 6$) при $\sigma_3 \leqslant \sigma_a$, $\lg n \geqslant \lg n_4(\sigma_a)$

$$Q_4 = F_4\left(\frac{\sigma_a - \sigma_3}{\sigma_4 - \sigma_3}\right) R_4\left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)}\right), \quad Q_4(n_5) = 1; \tag{2}$$

при $\sigma_4 \leqslant \sigma_a$, $\lg n \geqslant \lg n_5(\sigma_a)$

$$\begin{gathered} Q_5 = F_5\left(\frac{\sigma_a - \sigma_4}{\sigma_5 - \sigma_4}\right) R_5\left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_4(\sigma_5)}\right), \; Q_5(n_6) = 1, \\ Q_4 = G_4\left(\frac{\sigma_5 - \sigma_a}{\sigma_5 - \sigma_4}\right) R_4\left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)}\right), \; Q_6 = 0; \end{gathered} \tag{3}$$

при $\sigma_5 \leqslant \sigma_a$, $\lg n \geqslant \lg n_6(\sigma_a)$

$$\begin{gathered} Q_6 = F_6\left(\frac{\sigma_a - \sigma_5}{\sigma_6 - \sigma_5}\right) R_6\left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_6 - \lg n_4(\sigma_6)}\right), \; Q_6(n_7) = 1 \\ Q_5 = G_5\left(\frac{\sigma_6 - \sigma_a}{\sigma_6 - \sigma_5}\right) R_5\left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_4(\sigma_5)}\right), \; Q_4 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Построение модели основывается на характеристиках разрушения материала $\sigma_i = \sigma_i(\alpha_2, N_i, \omega)$, $\alpha_2 = 0, 1, -1$, для трех базовых видов нагружения: одноосного ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) и двухосного равномерного ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$) нагружений и сдвига ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$), при которых дефект i-го уровня достигает предельного состояния, а функция $l_i^* = l_i^*(n)$

— предельного значения $l^*_{f,i}$ при числе циклов N_i, $i = 1, ..., 6$. Согласно экспериментальным данным и результатам исследований эволюции хрупких трещин с учетом отношения главных напряжений по экспериментально обоснованным критериям усталостной прочности металлов строится следующая система материальных функций σ_i, $i = 1, ..., 6$, для процесса (*):

$$\sigma_i = \sigma_i(N_i, \omega)\tilde{\sigma}_i(\alpha_2, \alpha_3, \tilde{\eta}_i, \hat{\eta}_i),\ i = 1, ..., 6, \tag{5}$$

$$\sigma_i(N_i, \omega) \equiv \sigma_i\ (\alpha_2 = 0, N_i, \omega),$$

$$\tilde{\eta}_i = \frac{\sigma_i(N_i, \omega)}{\sigma_i(\alpha_2 = -1, N_i, \omega)}, \quad \hat{\eta}_i = \frac{\sigma_i(N_i, \omega)}{\sigma_i(\alpha_2 = 1, N_i, \omega)}.$$

Функции $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i(\alpha_2, \alpha_3, \tilde{\eta}_i, \hat{\eta}_i)$ в выражении (5) выбираются следующим образом:

для хрупких материалов

при $-1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = [6 - \tilde{\eta}_i - \alpha_2(2\tilde{\eta}_i - 6) + \alpha_0\,(3\tilde{\eta}_i - 15)]^{-1}$,

при $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1, \alpha_3 \geqslant 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = [1 + \alpha_2(\hat{\eta}_i - 1) + \alpha_3\,(\hat{\eta}_i - 1)]^{-1}$,

при $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1, \alpha_3 < 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = [6 - \tilde{\eta}_i - \alpha_3(2\tilde{\eta}_i - 6) + \alpha_0\,(3\tilde{\eta}_i - 15)]^{-1}$;

для пластичных материалов

при $-1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = \left[3\alpha_0\,(1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_i^2\,(1 - \alpha_2 - 3\alpha_0)\right]^{-1/2}$,

при $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1, \alpha_3 \geqslant 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = \left[3\alpha_0\,(1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\hat{\eta}_i^2\,(1 - \alpha_2 - 3\alpha_0)\right]^{-1/2}$,

при $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1, \alpha_3 < 0$ $\quad \tilde{\sigma}_i = \left[3\alpha_0\,(1 + \alpha_3) + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_i^2\,(1 - \alpha_3 - 3\alpha_0)\right]^{-1/2}$.

Модель позволяет подбирать вид функций $F_i = F_i\,(\sigma_a)$ и $R_i = R_i\,(n)\,, \quad i = 1, ..., 6$, в выражениях (1)–(4) для конкретных материалов.

В системе определяющих соотношений (1)–(4) последующее уравнение связано с предыдущим через определяемые по соответствующим уравнениям числа циклов $n_{i+1} = n_{i+1}\,(\sigma_a)$, при которых функция $l^*_i = l^*_i\,(n)$ достигает предельного значения $l^*_{f,i}$, дефект i—го уровня – предельного состояния, и начинается рост дефектов $(i+1)$—го уровня. Система уравнений (1)–(4) описывает кривые усталости по шести уровням разрушения.

Разрушения по дефектам мезоуровня рассматриваются как независимые события и вводится функция вероятности разрушения $Q = Q(\tau)$ в виде $Q\,(\tau) = \sum\limits_{i=4}^{6} \frac{Q_i(\tau)}{1-Q_i(\tau)} \prod\limits_{j=4}^{6} (1 - Q_j\,(\tau))$, где $Q_i = Q_i(\tau)$ — вероятности разрушения по дефектам i—го мезоуровня, $i = 4, 5, 6$. Кривая усталости металла по дефектам мезоуровня определяется уравнением: $Q(t_f) = 1$, из которого находится долговечность металла по этим дефектам: $t_f = t_f(\sigma_f)$ (σ_f — амплитуда главного напряжения при разрушении по дефектам мезоуровня).

В качестве обоснования достоверности предлагаемого подхода в работах автора представлены результаты анализа экспериментальных данных для большого ряда конструкционных сталей: углеродистых, аустенитно-мартенситных, коррозионно-стойких, нержавеющих, легированных, трубных сталей; чугунов; металлов: молибдена, никеля, свинца, титана и др.; никелевых, магниевых, алюминиевых, титановых сплавов при различных процессах пропорционального нагружения: одноосном нагружении, сдвиге, в том числе с несимметричным циклом, двухосных нагружениях и одноосных нагружениях с кручением для различных отношений амплитуд.

Литература

1. *Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В.* Поврежденность и разрушение: обзор экспериментальных работ // Физическая мезомеханика,**18**:3 (2015), 11-24.

2. *Завойчинская Э.Б.*Усталостное масштабно-структурное разрушение и долговечность конструкций при пропорциональных процессах нагружения. — М.: Типография ООО "Генезис", 2018.

3. *Ильюшин А.А.* Пластичность: упруго-пластические деформации. — М.: Ленанд, 2018.

4. *Завойчинская Э.Б.* О теории усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии металлов с учетом структурных изменений // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1: Математика. Механика, № 1 (2019), 29-34.

ТОЧНЫЕ НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

Д.Д. Захаров

dd_zakh@mail.ru

УДК 539.3,534.1

Рассматрены краевые задачи для полубесконечных изотропно-слоистых упругих волноводов под лействием нагрузок, локализованных в конечной области. На основание соотношений обобщенной ортогональности для собстенных волн выведены неотражающие граничные условия для слоистых пластин, плит и круговых цилиндрических тел.

Ключевые слова: упругие волноводы, неотражающте граничные условия

Exact nonreflecting boundary conditions in elastic waveguides

The boundary value problem for elastic layered waveguides under localized loads are considered. The elastic media are supposed to be isotropic. Using generalized orthogonality relations, the nonrefelecting boundary conditions are derived for elastic strips, plates and circular cylindrical solids.

Keywords: elastic waveguides, nonreflecting boundary conditions

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда "Основание".

Захаров Дмитрий Дмитриевич, к.ф.-м.н., доцент, Российский университет транспорта (МИИТ) (Москва, Россия); Dmitry Zakharov (Russian University of Transport, Moscow, Russia)

1. Постановка краевой задачи

Рассматривается динамическое напряженно-деформированное состояние твердого тела с гармонической зависимостью от времени $e^{i\omega t}$. Предположим, тело можно условно разделить на область конечного размера, где приложены все нагрузки и находятся интересующие объекты (трещины, включения и т.д.), и на область с бесконечно удаленной точкой, как показано на Рис. 1A. Геометрия конечной области предполагается произвольной, а область с бесконечно удаленной точкой - в виде волновода одной из канонических конфигураций: полубесконечная полоса (Рис. 1B), бесконечная пластина с цилиндрическим вырезом (Рис. 1C), полубесконечный круговой цилидр (Рис. 1D). Последнй может быть сплошным или полым. В поперечном сечении допускается наличие разнородных слоев, как показано на Рис. 2A,B. Материалы слоев изотропные линейно-упругие с условиями полного сцепления на межфазных границах. Выделенная конечная область тоже принимается изотропной линейно-упругой с условием полного контакта области и прилегающего волновода во всем его поперечном сечении S: $[\sigma_{n\alpha}] = 0$, $[u_\alpha] = 0$. Здесь S есть торец полуполосы 1B, боковая цилидрическая поверхность 1C, или поперечное сечение цилидра 1D; u_α есть компоненты вектора перемещений в направлении $\alpha = 1, 2, 3$; $\sigma_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора напряжений и $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к сечению волновода S (т.е. скачки напряжений и перемещений на S отсутствуют). На лицевых поверхности волноводов (верхняя и нижняя поверхности полуполосы 1B, пластины 1C или боковых цилиндрических поверхностях 1D) задаются однородные граничные условия одного из следующих видов: (а) отсутствие напряжений (свободная поверхность); (б) отсутствие перемещений (защемленная поверхность); (в) в нормальном направлении отсутствуют перемещения, а в тангенциальном отсутствуют напряжения, или наоборот ("перекрестные"граничные условия). Условия на разных лицевых поверхностях могут быть однотипнями или разнотипными.

Ищется поле перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющее уравнениям движения с соответствующими плотностями и модулями упругости сред. Напряжения и перемещения связаны звконом Гука. Соответствующие математические операторы известны и здесь для краткости опущены.

В выделенной конечной области в уравнениях допускаются массовые силы. Кроме граничного условия на S на других поверхностях могут задаваться любые нагрузки. При наличии концентраторов напряжений - требуются также сингулярности нужного типа (например, в кончике трещины).

В каждом волноводе поле $\mathbf{u}$ удовлетворяет однородным уравнениям движения и приведенным выше граничным условиям. Решение в бесконечно удаленной точке должно быть ограничено и средний за период поток мощности в сечении в направлении от S неотрицателен.

Задача сводится к расчету конечной области, заменяя воздействие волновода эквивалентным нелокальными неотражающими граничными условиями (ННГУ) в сечении S.

2. Итоговые неотражающие условия

При выводе использованы свойства обобщенной ортогональности соб-

ственных волн в волноводах (Рис. 1B-D) [1-3]. Итоговые ННГУ имеют вид

$$RG_S(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$RG_S(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \equiv \sum_j \int_{S_j} \Big(\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} u_\alpha - \sigma_{\alpha\beta} \tilde{u}_\alpha \Big)_j n_\beta dS_j, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ искомые перемещения, $\tilde{\mathbf{u}}$ вспомогательное решение, и суммирование в RG-интегралах (2) ведется по слоям в сечении $S = \bigcup S_j$.

Для плоской задачи в полуполосе (Рис. 1B) условия (1) дают систему двух граничных интегральных уравнений на S, где $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(\gamma)}$ $(\gamma = 1, 3)$ - поле перемещений бесконечной полосы под действинм сосредоточенной массовой нагрузки $\mathbf{f}^{(\gamma)} = \Big(\mathbf{i}_1 T_1 \delta^1_\gamma \delta'(x_1 - x_0) + \mathbf{i}_3 T_3 \delta^3_\gamma \delta(x_1 - x_0) \Big) \delta(x_3 - z_0)$. Здесь δ^α_γ - символ Кронекера; T_3 и T_1 - постоянные интенсивности вертикальной силы и горизонтальной двойной силы (диполя), соответственно; $\delta(x_\alpha)$ - дельта функция; $x_0 = x_0 + 0$ координата торца S по оси x_1 (при подходе со стороны волновода) и z_0 пробегает все точки приложения нагрузки на торце S (Рис. 3A).

В антиплоской задаче условие (1) - одно граничное интегральное уравнение и $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(2)}$ есть реакция бесконечной полосы на массовую силу $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{i}_2 T_2 \delta(x_1 - x_0) \delta(x_3 - z_0)$ интенсивности T_2.

Случай полубесконечного цилиндра аналогичен (Рис. 1D, 3C) и условия (1) суть три граничных интегральных уравнения, где ядра заданы полями перемещений $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(\gamma)}$ $(\gamma = 1, 2, 3)$ - реакциями бесконечного цилиндрического тела на массовую нагрузку $\mathbf{f}^{(\gamma)} = \Big((\mathbf{i}_1 T_1 \delta^1_\gamma + \mathbf{i}_2 T_2 \delta^2_\gamma) \delta(z - z_0) + \mathbf{i}_3 T_3 \delta'(z - z_0) \delta^3_\gamma \Big) \delta(x_1 - x_0) \delta(x_2 - y_0)$, приложенную в каждой точке сечения $(x_0, y_0, z = z_0 + 0) \in S$.

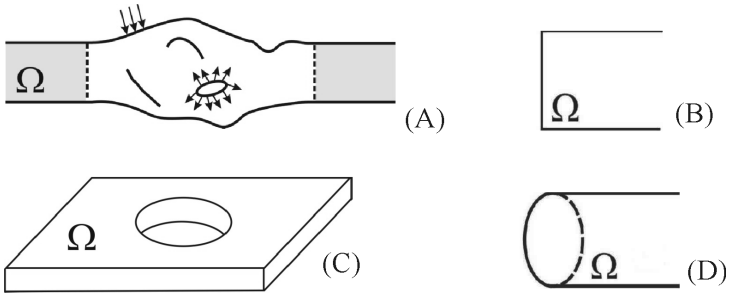


Рис. 5.1: Разделение краевой задачи и виды волноводов.

Для бесконечной пластины с вырезом (Рис. 1C) условия (1) задают три граничных интегральных уравнения на цилиндрической поверхности S. Здесь ядро $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(\gamma)}$ при $\gamma = 3$ отвечает реакции бесконечной сплошной пластины на сосредоточенную массовую вертикальную силу T; $\gamma = 2$ отвечает приложению сосредоточенного крутящего момента M_0 вокруг вертикальной оси и $\gamma = 1$ - случаю сосредоточенной нагрузки в виде "центра

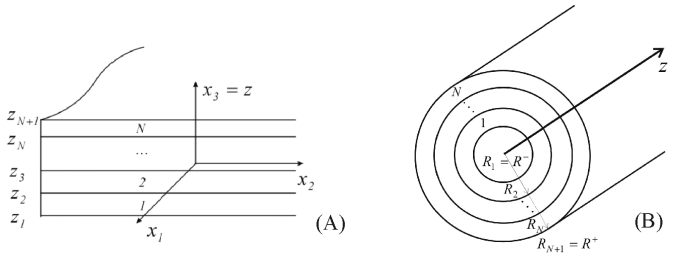


Рис. 5.2: Геометрическая конфигурация упругих волноводов.

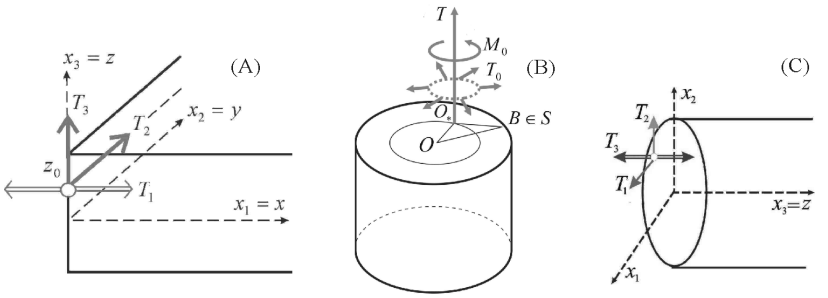


Рис. 5.3: Виды сосредоточенных нагрузок для ННГУ.

расширения"интенсивности T_0 в продольной плоскости (Рис. 3В). Точки приложения пробегают всю поверхность S.

Литература

1. *Бобровницкий Ю.И.* Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. ж., **18**:4 (1972), 513-515.

2. *Fraser W.B.* An orthogonality relation for the modes of wave propagation in an elastic circular cylinder // J. Sound Vibr., **43**:3 (1975), 568-571.

3. *Захаров Д.Д.* Свойство ортогональньсти и перенос энергии трехмерными собственными волнами в трансверсально-изотропных слоистых плитах при наличии или отсутствии контакта с жидкостью // ПММ, **773**:1 (2013), 57-73.

ТРЕХМЕРНЫЕ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

А.В. Звягин, А.А. Лужин, А.А. Шамина
zvsasha@rambler.ru, anashamina90@mail.ru

УДК 517.518

Исследуется проблема взаимного влияния трехмерных дискообразных трещин, расположенных в параллельных плоскостях упругой среды. Среда находится под действием растягивающего напряжения в направлении перпендикулярном плоскостям трещин. Трещины моделируются математическими разрезами сплошной среды с возможностью сильного разрыва поля перемещений на плоскости разреза. Решение строится численно с использованием метода разрывных смещений.

Ключевые слова: упругая среда, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод граничных элементов

Three-dimensional cracks in an elastic body

Explores the problem of mutual influence of three-dimensional disc-shaped cracks located in parallel planes of an elastic medium. The medium is under tensile stress in the direction perpendicular to the crack planes. The cracks are modeled by mathematical cuts of the continuous medium with the possibility of a strong rupture of the displacement field on the banks of the cut. The solution is constructed numerically using the discontinuous displacement method.

Keywords: elastic medium, crack, stress intensity factor, boundary element method

Одной из актуальных проблем современной механики разрушения является задача исследования концентрации напряжений в окрестности трещин в трёхмерном пространстве. В настоящее время существуют хорошо развитые эффективные методы решения двумерных задач о трещинах. Одним из таких методов является метод разрывных смещений [1]. Преимуществом данного метода является возможность точного выполнения уравнений теории упругости. При этом граничные условия выполняются на дискретном множестве точек границы, которое можно сделать сколь угодно плотным. Для численного решения трёхмерных задач механики твёрдого деформируемого тела чаще всего используются методы конечных элементов. Но их использование для трещин в трёхмерном пространстве сталкивается с большими трудностями, поскольку построение полей напряжений и перемещений в окрестности трещин требует построения достаточно мелкой, адаптированной к геометрии трещин, сетки из конечных элементов. При наличии

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-01111)

Звягин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Zvyagin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Лужин Александр Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Luzhin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шамина Анастасия Александровна, мнс, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anastasia Shamina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

системы трещин сложной геометрии задача становится фактически невыполнимой. В данной работе предлагается численный метод граничных элементов, реализующий метод разрывных смещений в трёхмерном пространстве. Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии её решения. С точки зрения математической теории, данный подход является одной из реализаций метода разложения решения по «не ортогональным» функциям [2]. После численного определения коэффициентов разложения мы имеем фактически аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам надо хранить только найденные коэффициенты разложения, позволяющие затем найти любые требуемые характеристики в любой точке области решения. Это существенно с точки зрения простоты практического использования полученного решения. Коды программы реализованы авторами на языке C. Написанная программа протестирована сравнением с известными аналитическими решениями [3], [4], [5]. Сравнение показало хорошее качественное и количественное соответствие имеющимся результатам других авторов. Проведено численное исследование задачи взаимного влияния дискообразных плоских трещин. Рассматривались круглые и эллиптические плоские трещины разной взаимной ориентации и расположения в пространстве [6], [7]. В качестве меры взаимного влияния использовались величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Исследования показали, что в отличие от трещин плоской деформации, для трёхмерных трещин расстояние их существенного взаимного влияния, намного меньше. Этот факт говорит в пользу использования трёхмерной постановки задач механики прочности при наличии дефектов в виде трещин. Ещё одним объектом исследований были трещины на границе упругой и жёсткой среды. Такого рода трещины характерны для композитных материалов, в которых материал матрицы, как правило, значительно более жёсткий, чем материал заполнителя. Оказалось, что при сравнимых внешних нагрузках, коэффициенты интенсивности значительно больше для пограничных трещин, чем для внутренних трещин тех же размеров. Этот факт в какой то мере объясняет то, что частым видом разрушения композиционных материалов является их расслоение.

Литература

1. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.

2. *Алекеидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.:Наука, 1978.

3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1966.

4. *Гольдштейн Р.В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде. // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела, №3 (1979), 111–126.

5. *Kassir M.K., Sih G.C.* External crack in elastic solid. // Int. J. Fract. Mech. **4**:4 (1968), 347–356.

6. *Акулич А.В., Звягин А.В., Шамина А.А.* Численное моделирование взаимодействия диско-образных трещин в трехмерном упругом пространстве. В сборни-

ке XVII Международная конференция “Супервычисления и математическое моделирование ”, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров. 2018.

7. *Звягин А.В., Смирнов Н.Н., Панфилов Д.И., Шамина А.А.* Метод граничных элементов для численного решения трехмерных задач механики трещин. // Вестник кибернетики, **30**:2 (2018), 18–31.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ПРИ КАЧЕНИИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

А.А. Зобова

azobova@mech.math.msu.su

УДК 531.31

Рассматривается динамика вязкоупругого цилиндра, катящегося с проскальзыванием по полупространству из того же материала в однородном поле силы тяжести. Движение плоскопараллельное, ось цилиндра опорная плоскость горизонтальны. В области контактного взаимодействия касательные напряжения описываются моделью сухого трения Амонтона–Кулона. Параметры контактного взаимодействия определяются решением квазистатической задачи вязкоупругости [1]. Показано, что эта задача является возмущением задачи о качении с проскальзыванием упругого цилиндра [2]. Введены быстрая и медленная переменная, рассмотрена их динамика.

Ключевые слова: сухое трение, контактное взаимодействие, вязкоупругие материалы

Asymptotic separarion of motions for rolling with sliding of viscoelastic cylinder

We investigate the problem on the motion of an infinite viscoelastic cylinder with a horizontal axis along a half-space (whose undeformed border is horizontal) of the same material. Tangential stresses are Amonton-Coulomb stresses in the zone of relative slipping; there exists the stick-zone. The parameters of the contact interaction are defined by the solution of a quasistatic problem of the viscoelasticity. We show that this problem is a perturbation of the elastic case. We introduce slow-fast variables and study their dynamics.

Keywords: dry friction, contact mechanics, viscoelastic materials

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00140).

Зобова Александра Александровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexandra Zobova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Пусть бесконечный цилиндр массы m на единицу длины и радиуса R движется плоскопараллельно вдоль горизонтальной опорной плоскости. Масса цилиндра распределена осесимметрично, так что центр масс любого сечения лежит на оси симметрии; момент инерции относительной этой оси равен J. Уравнения движения цилиндра имеют вид

$$ma_y = P - mg,\ m\dot{V} = Q,\ J\dot{\omega} = M$$

где a_y — проекция ускорения оси цилиндра на вертикальную ось, P — вертикальная проекция результирующей силы взаимодействия цилиндра и плоскости, Q — ее горизонтальная проекция, а M — проекция момента сил взаимодействия относительно оси цилиндра на его ось. Предполагается, что горизонтальная скорость V оси цилиндра мала по сравнению со скоростями распространения возмущений в среде, тогда для описания взаимодействия цилиндра и опорной плоскости возьмем решение задачи о стационарном качении с частичным проскальзыванием вязкоупругого цилиндра по плоскости из того же материала с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, временем релаксации T_σ и последействия T_ε [1]. Область контактного взаимодействия разбивается на участок относительного скольжения, в котором касательные напряжения задаются законом сухого трения скольжения Амонтона–Кулона, и участок сцепления, где касательные напряжения не превосходят предельного трения.

Решение задачи теории вязкоупругости описывается двумя безразмерными параметрами [1]

$$\alpha = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad \kappa = \frac{R}{l_0} = \sqrt{\frac{E'R}{32P}} \quad \left(E' = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\right)$$

Параметр $\alpha \geqslant 1$ задает отношение времени последействия к времени релаксации и равен единице для упругих материалов; параметр κ представляет собой отношение радиуса цилиндра к длине участка контактного взаимодействия в покое $l_0 = \sqrt{32RP/E'}$. Так как в постановке задачи вязкоупругости предполагается малость области контактного взаимодействия по сравнению с радиусом цилиндра [1], то $\kappa \gg 1$. Помимо этого, для решения динамической задачи о торможении требуется ввести третий безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{PT_\varepsilon^2}{mR} = \frac{gT_\varepsilon^2}{R}$$

задающий соотношение масштаба времени, задаваемого ускорением свободного падения и радиусом цилиндра, и времени последействия T_ε.

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = t/T_\varepsilon,\ \tilde{V} = T_\varepsilon V/R,\ \tilde{\omega} = T_\varepsilon\omega,\ \tilde{Q} = Q/P,\ \tilde{M} = Q/(PR)$$

представляющие собой безразмерные время, скорость, угловую скорость, силу и момент сопротивления. В дальнейшем знак волны над безразмерными переменными опустим, штрихом обозначим производную по безразмерному времени.

Тогда уравнения торможения в предположении, что ускорение оси цилиндра равно нулю, имеют вид

$$V' = \gamma Q,\ j\omega' = \gamma M, \quad j = J/(mR^2)$$
$$Q = Q(V, \omega, \kappa, \alpha),\ M = M(V, \omega, \kappa, \alpha)$$

В случае упругого материала, т.е. при $\alpha = 1$, распределение нормальных напряжений симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра, их суммарный момент относительно оси цилиндра равен нулю [1,3]. Тогда

$$M(V, \omega, \kappa, 1) = -Q(V, \omega, \kappa, 1) = -Q_1(V, \omega, \kappa)$$

Как показано в [4], уравнения движения допускают линейный первый интеграл. При его нулевом значении ось цилиндра движется равнозамедленно: за конечное время цилиндр останавливается. При ненулевой константе интеграла любое движение экспоненциально стремится к финальному движению — равномерному качению с полным сцеплением в области контактного взаимодействия. В фазовом пространстве (V, ω) траектории лежат на параллельных прямых, соответствующих разным константам первого интеграла. Финальным движениям соответствуют особые точки системы, лежащие на прямой $V = \omega$.

Рассмотрим задачу о движении вязкоупругого цилиндра как малое возмущение задачи о движении упругого цилиндра (следуя [5]). Введем новые переменные

$$V_s = \omega - V,\ C = V + j\omega$$

Механический смысл первой переменной — скорость проскальзывания цилиндра относительно плоскости, второй – первый интеграл задачи при $\alpha = 1$. Тогда уравнения движения в этих переменных примут вид

$$V_s' = \gamma F(V_s, C, \kappa, \alpha), C' = \gamma G(V_s, C, \kappa, \alpha)$$
$$\text{причем } F(V_s, C, \kappa, 1) = \tfrac{1+j}{j} Q_1,\ G(V_s, C, \kappa, 1) = 0,\ Q_1 \sim \mu$$
$$|F(V_s, C, \kappa, \alpha) - F(V_s, C, \kappa, 1)| < \kappa^{-1} A_1,\ |G(V_s, C, \kappa, \alpha)| < \kappa^{-1} A_2$$

где A_1, A_2 — некоторые константы, не зависящие от κ, α. Так как параметр $\kappa \gg 1$, то переменная V_S является быстрой, а C — медленной. Медленной поверхностью в фазовом пространстве является прямая $V_S = 0$. Поскольку все особые точки быстрого уравнения

$$V_S' = \gamma \frac{1+j}{j} Q_1$$

глобально асимптотически устойчивы [4], то любая фазовая кривая быстро попадает в κ^{-1} – окрестность медленной поверхности и далее остается в этой окрестности [5]. Движение вдоль медленной поверхности описывается уравнением

$$C' = \gamma G(0, C, \kappa, \alpha)$$

Это уравнение совпадает с уравнением торможения жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому пространству в случае, когда касательные

напряжения в области контактного взаимодействия отсутствуют. Последняя задача подробно рассмотрена в [2].

Автор благодарен академику Ирине Георгиевне Горячевой за обсуждение постановок задач теории упругости и вязкоупругости.

Литература

1. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

2. *Горячева И. Г., Зобова А. А.* Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2.

3. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // Proc. R. Soc. A. 1926. V. 112. P. 151–157.

4. *Горячева И. Г., Зобова А. А.* Динамика движения упругого цилиндра по упругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 39–46.

5. *В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников.* Теория бифуркаций. Динамические системы 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 5, ВИНИТИ, М., 1986, 5–218.

О МЕХАНИЗМЕ ОРИЕНТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

А.Г. Калугин

kalugin@mech.math.msu.su

УДК 532.2,532.6

В работе рассматривается роль дивергентной части энергии Франка нематических жидких кристаллов в возникновении эффектов ориентационной неустойчивости, которые наблюдаются в слоях и пленках нематиков в виде периодических структур, существующих при однородных внешних воздействиях. Получена связь дивергентной константы Франка с характеристиками наблюдаемых доменных структур и другими параметрами среды.

Ключевые слова: нематики, энергия Франка, дивергентная константа, ориентационная неустойчивость

About mechanism of orientational instability in nematic liquid crystals

The reason of orientational instability in the nematic liquid crystals is studied in the presented work. The role of surface or splay-bend constant in Frank's energy in instability effects, which are observed as periodical structure in case of homogeneous external actions, is investigated. The relation between splay-bend constant and domain structure characteristics is recieved.

Keywords: nematic, Frank's energy, splay-bend constant, orientational instability

Калугин Алексей Георгиевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Kalugin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Нематической жидкокристаллической фазой (мезофазой) как правило обладают среды, молекулы или другие структурные единицы которых имеют сильновытянутую форму. При этом для каждой индивидуальной частицы среды в мезофазе существует среднее направление длинных осей молекул, которое описывается дополнительным макроскопическим параметром – единичным вектором (директором) $\vec{n}$. Такое свойство анизотропии среды приводит к появлению дополнительной части свободной энергии – энергии Франка F_V, которую в самом общем случае с учетом свойств симметрии среды и постоянства длины директора можно записать в виде

$$2F_V = K_1(\operatorname{div}\vec{n})^2 + K_2(\vec{n}, \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{n})^2 + K_3|[\vec{n}, \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{n}]|^2 + K_{24}\nabla_i(n^k\nabla_k n^i - n^i\operatorname{div}\vec{n})$$

где K_i – константы Франка. При этом слагаемое с коэффициентом K_{24} имеет дивергентную форму и не входит в уравнения движения среды или эволюции директора, однако его необходимо учитывать в краевых условиях на границе нематика.

Для нематических жидких кристаллов характерна ориентационная неустойчивость, наблюдаемая и в статических [1], и в динамических экспериментах [2], когда в случае однородных внешних воздействий и граничных условий поле директора из однородного переходит в неоднородное периодическое.

В работе показано, что одной из причин появления такой неустойчивости может быть знаконеопределенность энергии Франка, которая возможна при достаточно больших значениях коэффициента K_{24}. Изучено, как учет дивергентного слагаемого меняет тип граничных условий для вектора ориентации [3]. Рассмотрена задача о существовании периодических возмущений однородного поля вектора ориентации для тонкой пленки (слоя) нематика в случаях состояния равновесия [4] и стационарного сдвигового течения [5].

Изучено, как существование периодических решений связано с соотношением между K_{24} и остальными коэффициентами K_i. Например, для тонкой пленки нематика толщиной $2h$, у которой в невозмущенном состоянии поле ориентации однородно, в случае задачи о малых возмущениях возможны периодические решения с волновым вектором, направленным вдоль слоя перпендикулярно невозмущенному директору с волновым числом l, при этом выполняется соотношение [4]

$$\pm 2(K_2 - K_1)K_{24}^2(lh)^2 + 2hWK_1K_2(ch(2lh) \pm 1) + \\ + lhK_{24}(4K_1K_2 - K_{24}(K_1 + K_2))sh(2lh) = 0 \qquad (1)$$

где W – коэффициент анизотропной части в поверхностной энергии. Отметим, что существование и свойства полученных решений зависят как от величины K_{24}, так и от толщины слоя $2h$.

Показано, что анализ таких периодических решений может быть использован для определения величины K_{24}. Например, в работе [6] была экспериментально установлена линейная зависимость периода возникающих в слое нематика доменных структур от толщины слоя, что отвечает случаю $W = 0$ для полученного решения, а из экспериментальных данных и соотношения (1) можно определить значение константы K_{24}.

Таким образом, изучение дивергентной части в энергии Франка позволяет дать новое объяснение некоторым наблюдаемым эффектам. При этом на основе анализа полученных рядом экспериментаторов данных можно сделать оценку величины дивергентной константы Франка K_{24}, которая в настоящее время определена с большой погрешностью и только для отдельных типов нематических жидких кристаллов.

Литература

1. *Delabre U., Richard C., Cazabat A.M.* Thin nematic films on liquid substrates // Phys. Chem. B., **113**:12 (2009), 3647-3652.

2. *Пасечник С.В., Крехов А.П., Шмелева Д.В., Насибуллаев И.Ш., Цветков В.А.* Ориентационная неустойчивость в нематическом жидком кристалле в затухающем пуазейлевском потоке // ЖЭТФ, **127**:4 (2005), 907-914.

3. *Калугин А.Г.*, О виде граничных условий в одноконстантном приближении // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, № 6 (2017), 62-64.

4. *Калугин А.Г., Павлов Д.В.* О периодических решениях в слое нематического жидкого кристалла // Жидк. крист. и их практич. использ., **17**:2 (2017), 62-66.

5. *Калугин А.Г.* Об ориентационной неустойчивости сдвигового течения нематического жидкого кристалла // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, № 6 (2016), 59-62.

6. *Голованов А.В., Казначеев А.В., Сонин А.С.,* Ориентационная неустойчивость лиотропного нематика при течении // Известия РАН: серия физическая, **62**:2 (1998), 1658-1661.

ДИНАМИКА МОБИЛЬНОГО РОБОТА

А.В. Карапетян, К.А. Катасонова

avkarapetyan@yandex.ru, xenia.katasonova@gmail.com

УДК 531.36

Рассматривается задача о движении мобильного робота с двумя ведущими и одним пассивным колесом рояльного типа [1,2] на горизонтальной плоскости. В отличие от [1,2] допускается проскальзывание ведущих колёс; при этом в точках их контакта с опорной плоскостью приложены силы линейного вязкого трения. Найдены все стационарные движения робота (равномерные движения по прямой и по окружности), получены условия их устойчивости и ветвления.

Ключевые слова: трехколесный робот, трение, стационарные движения, устойчивость и бифуркации

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00140).

Карапетян Александр Владиленович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Karapetyan (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Катасонова Ксения Александровна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Ksenia Katasonova(Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Dynamics of mobile robot

The problem of the motion of three-wheeled robots with two leading and one passive wheels on the horizontal plane is considered. The leading wheels can slide with the viscous friction. All steady motions of the robot, their stability and bifurcation conditions are found.

Keywords: three-wheeled robot, friction, steady motions, stability and bifurcations

Введение. Рассматривается движение трехколёсного робота с двумя ведущими и одним пассивным колесом рояльного типа [1,2] по горизонтальной плоскости. Предположим, что центр масс C робота лежит на горизонтальной ортогонали к оси подвеса колёс, проходящей через середину этой оси. Пусть $Oxyz$- неподвижная система координат (Oxy- опорная плоскость, Oz- вертикаль), а $C\xi\eta\zeta$- система координат, жёстко связанная с корпусом робота ($C\xi$ проходит через середину оси подвеса ведущих колёс, $C\eta$ параллельна оси подвеса, $C\zeta$- вертикаль, положительное направление оси $C\xi$совпадает с направлением от центра оси подвеса ведущих колёс к центру масс робота).

Положение робота зададим координатами x, y его центра масс C, углом ϕ между осями Ox и $C\xi$ и углами ϕ_1, ϕ_2 поворота колёс вокруг оси подвеса. Пусть m- масса робота, A - момент инерции ведущих колес относительно оси подвеса, $B = m\ r^2$ - момент инерции робота относительно вертикали, проходящей через его центр масс (r- соответствующий радиус инерции робота), a - радиус ведущих колёс, $2b$ - расстояние между их центрами, c- расстояние от центра масс робота до оси подвеса ведущих колёс (радиус пассивного колеса, как и в [1,2], будем считать пренебрежимо малым).

Предположим, что, как и в [1,2] рояльное колесо может без трения скользить по опорной плоскости, а ведущие колёса, в отличие от [1,2] тоже могут скользить по этой плоскости, причём в точках их контакта с опорной плоскостью приложены силы трения $\mathbf{F}_i = -mk\mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_i$ — скорости скольжения колес, $i = 1, 2$; $k > 0$). Кроме того, предположим, что к ведущим колёсам приложены управляющие моменты вида [1,2] $Q_i = ma^2\ (p - \varkappa\omega_i)$, направленные вдоль оси подвеса колёс ($p \in \mathbb{R}$, $\varkappa > 0$, $\omega_i = \dot{\phi}_i$).

Стационарные движения робота и их устойчивость. Выбирая единицы измерения массы, длины и времени так, что $m = 1$, $A = 1$, $\varkappa = 1$, выпишем уравнения движения робота в форме Аппеля

$$\begin{gathered} \dot{u} = v\,\omega - 2ku + 2kaw_1, \dot{v} = -u\omega - 2k(v - c\omega) \\ r^2\dot{\omega} = -2k(b^2 + c^2)\omega + 2kcv - 2kabw_2 \\ \dot{w_1} = kau - a^2(k+1)w_1 + a^2p, \\ \dot{w_2} = -kab\omega - a^2(k+1)w_2 \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u и v - проекции скорости центра масс на оси $C\xi$ и $C\eta$,$\omega = \dot{\phi}$,$w_1 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $w_2 = (\omega_1 - \omega_2)/2$.

Уравнения (1) допускают стационарные движения вида (2) и (3):

$$u = ap,\ \ v = 0,\ \ \omega = 0,\ \ w_1 = p,\ \ w_2 = 0 \tag{2}$$

$$u = ap + \frac{k+1}{2k}\omega_0^2, \quad v = \Big(c + \frac{b^2}{c(k+1)}\Big)\omega_0, \quad \omega = \omega_0$$

$$w_1 = p + \frac{\omega_0^2}{2a}, \quad w_2 = -\frac{kb}{(k+1)a}\omega_0 \tag{3}$$

$$\omega_0^2 = -\frac{2k\big[acp(k+1) + 2kb^2\big]}{(k+1)^2 c} \tag{4}$$

Стационарные движения (2) существуют при всех значениях управляющего параметра p и соответствуют равномерным движениям робота вдоль прямой (при $p > 0$ рояльное колесо находится впереди, а при $p < 0$ - сзади); при этом ведущие колеса совершают чистое качение. На основе критерия Гурвица показано, что эти движения асимптотически устойчивы (неустойчивы) при $p > p_0 (p < p_0)$, где $p_0 = -2kb^2/\big(ac(k+1)\big) < 0$. Аналогичные результаты имеют место и в неголономной постановке [1,2].

Стационарные движения (3) образуют два семейства равномерных круговых движений робота (по часовой стрелке при $\omega > 0$ и против — при $\omega < 0$). Они существуют только при $p < p_0$ (см. (4)), причём на всех этих движениях ведущие колёса катятся со скольжением. На основе критерия Гурвица показано, что в зависимости от геометрических параметров робота и коэффициентов трения скольжения круговые движения асимптотически устойчивы либо при всех значениях параметра $p < p_0$, либо только при $p \in (p_*,\ p_0)$, а при $p < p_*$ - неустойчиво. Критическое значение p_* задаются весьма громоздкой формулой и здесь не приводится. При переходе параметра p через это критическое значение пара комплексно сопряженных корней характеристического полинома линеаризованной в окрестности круговых движений робота уравнений возмущенного движения пересекает мнимую ось и от круговых движений ответвляются периодические движения робота. Эти результаты существенно отличаются от результатов анализа круговых движений робота в неголономной постановке [1,2].

Заключение. Проведенное исследование показывает, что неголономная постановка задачи (ведущие колеса не могут скользить по плоскости) имеет ограниченную область применения и заведомо непригодна для анализа круговых движений робота.

Литература

1. *Буданов В.М., Девянин Е.А.* О движении колёсных роботов // ПММ, **67**:2 (2003), 244-255.

2. *Карапетян А.В., Салмина М.А.* Бифуркации Пуанкаре-Четаева и Андропова-Хопфа в динамике трехколёсного робота // Вестник МГУ. Серия 1. Матем., механ. №2 (2006), 56-58.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯМИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЗАБАБАХИНА

А.Б. Киселев
akis2006@yandex.ru

УДК 532.5,539.3

Для тестирования новых программ и методов численного расчета задач механики сплошной среды необходимо знание точных решений. Особенно остро стоит вопрос для методов и программ, ориентированных на решение задач динамической термоупруговязкопластичности и динамики вязкой жидкости, ввиду их особой сложности. В настоящем сообщении представлены точные решения одномерных динамических задач со сферической и цилиндрической симметриями для несжимаемых вязкопластической среды и вязкой жидкости, недавно полученные автором.

Ключевые слова: несжимаемые вязкопластическая среда и вязкая жидкость

Axact solutions of one-dimensional dynamic problems with spherical and cylinrical symmetry for incompressible viscoplastic medium and viscous fluid

For testing new program codes and numerical methods for problems of mechanics continuous medium it is necessary knowledge of exact solutions. Particularly spike stand problem for methods and codes which oriented on solutions of dynamical problems for thermoelastoviscoplastic medium and viscous fluid as their peculiar complication. In present paper represent exact solutions for one-dimensional dynamical problems with spherical and cylindrical symmetry for incompressible viscoplastic media and viscous fluid obtained by the author recently.

Keywords: incomprissible viscoplastic medium and viscous fluid

Остановимся подробнее на задаче о схлопывании полостей в жидкости. Одним из первых задачу о заполнении сферической полости в невязкой жидкости рассмотрел Дж. Рэлей еще в 1917 году [8]. Им было установлено, что направленная к центру скорость поверхности полости в конце процесса заполнения неограниченно увеличивается по закону $r^{-3/2}$ (r — радиальная координата, отсчитываемая от центра пузырька), т.е. происходит неограниченная кумуляция энергии. В работах [9, 10] рассмотрена задача Рэлея для вязкой жидкости. Показано, что в зависимости от начального радиуса полости существует два режима её заполнения: при радиусе, меньшем критического, заполнение происходит за неограниченное время, кумуляция энергии полностью устраняется вязкостью; при достаточно большом начальном

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00151).

Киселев Алексей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexey Kiselev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

радиусе полость быстро схлопывается с неограниченной кумуляцией энергии на стадии фокусировки. Независимо от других исследователей задачу заполнении полости в вязкой жидкости рассмотрел Е.И. Забабахин [11], получив изящное асимптотическое решение, и поэтому эту задачу называют задачей Забабахина. Им рассматривался одиночный пузырек, находящийся в вязкой несжимаемой жидкости, вдали от которого («на бесконечности») задано постоянное давление, начальная скорость отсутствует. Проведя исследование полученного уравнения для скорости поверхности пузырька, Е.И. Забабахиным было обнаружено существование двух типов движения: пузырьки, начальный размер которых меньше критического, заполняются медленно и за неограниченное время; заполнение больших пузырьков происходит быстро с неограниченной кумуляцией энергии. Определен критический радиус пузырька. В [12] приведено исследование поведения пузырьков в вязкой жидкости с учетом капиллярных сил и получен иной результат: если начальный радиус пузырька достаточно мал (меньше критического), то скорость заполнения уменьшается, но не до нуля, и пузырек заполняется за конечное время. В [5] дано обобщение задачи Забабахина. Получено точное решение в случае, когда внешний радиус пузырька является конечным и на внешней и внутренней его поверхностях заданы давления, произвольным образом изменяющиеся по времени. В случае, когда внешняя граница удаляется в бесконечность и давление там постоянно, а давление внутри пузырька отсутствует (задача Забабахина), установлено, что при любом начальном радиусе пузырька его заполнение происходит за конечное время, причем, при стремлении радиуса пузырька к нулю время схлопывания стремится к конечной величине, зависящей только от отношения динамической вязкости жидкости и давления на бесконечности. Скорость заполнения малых пузырьков стремится к нулю. Отметим, что в отличие от работ [9-16] и ряда других близких к ним, в которых задачи рассматривались в эйлеровых переменных, решения [1-7] получены в лагранжевых переменных, что и сделало возможным получение точных, а не приближенных решений.

Литература

1. *Киселев А.Б.* Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала // Прикл. матем. и механ., **76**:4 (2012), 675-404.

2. *Киселев А.Б.* К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., **67**:6 (2012), 20-25.

3. *Киселев А.Б.* Дополнение к статье А.Б. Киселева «Аналитические решения об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала» ПММ. 2012. Т.76. Вып. 6. С. 675-679 // Прикл. матем. и механ., **78**:6 (2014), 858-861.

4. *Киселев А.Б.* Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии и расширении сферического и цилиндрического слоев из несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. физ. и матем., **1**:1 (2013), 88-93.

5. *Киселев А.Б.* О динамическом сжатии (расширении) сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Задача Забабахина // Прикл. физ. и матем., **2**:6 (2014), 42-46.

6. *Киселев А.Б.* Аналитические решения динамических задач расширения (сжатия) толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек, погруженных в вязкую жидкость // Прикл. физ. и матем., **4**:2 (2016), 32-38.

7. *Киселев А.Б.* Точные решения одномерных задач расширения (сжатия) полых двухслойных шаров и цилиндрических труб из вязкопластических материалов под действием внешних динамических нагрузок // Прикл. физ. и матем., **5**:2 (2017), 22-30.

8. *Rayleigh O.M.F.R.S. (Lord)* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Philosophical Magazine. Series 6, **34**:200 (1917), 94-98.

9. *Poritsky H.* The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in viscous fluid // Proc. of the 1st United States national congress of applied mechanics. Chicago, 17-21 June 1951. — N. Y.: ASME, 1952. — 813-821.

10. *Shu S.S.* Note on the collapse of a spherical cavity in a viscous incompressible fluid // Cal. Inst. Tech. Report. **26**:4 (1952), 823-825.

11. *Забабахин Е.И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // Прикл. матем. и механ., **24**:6 (1961), 1129-1131.

12. *Григорьев В.Г., Дунин С.З., Сурков В.В.* Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела, **37**:1 (1981), 199- 201.

13. *Голубев В.К.* О расширении пор в пластичных металлах при отколе // Прикл. механ. и техн. физ., **22**:6, (1983), 159-165.

14. *Галиев Ш.У.* Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1988.

15. *Кобылкин И.Ф., Селиванов В.В., Соловьев В.С., Сысоев Н.Н.* Ударные и детонационные волны. Методы исследований. — М.: Физматлит, 2004.

16. *Андреев В.К.* Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. — Новосибирск: Наука, 1992.

ТРЕХЗВЕННЫЙ ШАРНИРНЫЙ МЕХАНИЗМ КАК МОДЕЛЬ ЧЕЛОВЕКА НА КАЧЕЛЯХ

Л.А. Климина, А.М. Формальский
klimina@imec.msu.ru, formal@imec.msu.ru

УДК 531.36

Рассматривается плоский трехзвенный шарнирный механизм, моделирующий человека, раскачивающегося на качелях. Первое звено моделирует корпус человека, второе – бедра и качели, третье – голени. Второе звено закреплено в неподвижном шарнире, соответствующем оси вращения качелей. Два межзвенных шарнира моделируют тазобедренные и коленные суставы. В оси качелей действует момент сил вязкого трения. В межзвенных шарнирах прикладываются управляющие моменты. Построено управление, при котором качели раскачиваются и «выходят» на стационарный режим колебаний с заданной амплитудой. Проведено численное моделирование.

Ключевые слова: качели, трехзвенный шарнирный механизм, вязкое трение, управление, колебания

Three-link hinge mechanism as a model of a man on a swing

Three-link planar hinge mechanism models a man pumping a swing. The first link models a body, the second link – hips and the swing, the third one – shins. The second link is pivotally joined to the fixed axis that is the axis of rotation of the swing. Two internal hinges model hip joints and knee joints. The viscous friction torque acts at the axis of the swing. Control torques are applied at the internal joints. The control law is designed that allows pumping the swing. Under this control, the swing tends to a stationary oscillation mode with prescribed amplitude. The numerical simulation is performed.

Keywords: swing, three-link hinge mechanism, viscous friction, control, oscillations

Качели относятся к объектам, в которых управляющие воздействия создаются человеком. Тем самым, задачу о раскачивании качелей можно отнести к биомеханике, к теории колебаний и к теории управления. Среди классических задач динамики систем, управляемых человеком, моделирование качелей выделяется как проблема, имеющая не только прикладное, но и фундаментальное значение. Моделирование различных стратегий управления качелями позволяет исследовать различные механические эффекты.

При рассмотрении задачи о раскачивании качелей человеком, стоящим на них, часто используют модель качелей в виде маятника переменной длины (см. [1, 2]). В то же время, отдельный интерес представляет моделирование поведения человека, *сидящего* на качелях. Отметим, что можно

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-20029).

Климина Любовь Александровна, к.ф.-м.н., НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Liubov Klimina (Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia)

Формальский Александр Моисеевич, д.ф.-м.н., профессор, НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Alexander Formalskii ((Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia)

провести непосредственную аналогию между такой задачей и задачей раскачивания гимнаста на перекладине (см. [2]).

В качестве модели человека, сидящего на качелях, рассмотрим механическую систему, состоящую из трех недеформируемых звеньев, соединенных шарнирно (рис. 1). Звено VP моделирует корпус человека, звено OPK– бедра и качели, звено KF – голени. Второе звено закреплено в неподвижном шарнире O – оси вращения качелей. Два межзвенных шарнира P и K моделируют тазобедренные и коленные суставы соответственно.

Предполагается, что в оси O качелей действует момент сил вязкого трения, пропорциональный угловой скорости звена OPK. В межзвенных шарнирах P и K прикладываются ограниченные по величине управляющие моменты. Кроме того, предполагаем, что углы α и β отклонения корпуса и голеней ограничены. Составлены уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода.

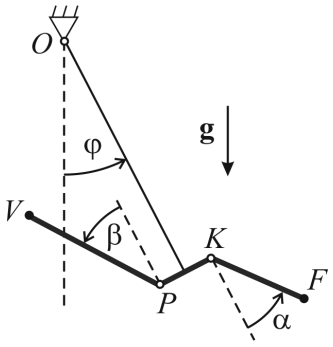


Рис. 5.1: Модель человека, сидящего на качелях.

Задача состоит в синтезе управления, при котором качели раскачиваются и «выходят» на стационарный режим колебаний с заданной амплитудой. Управляющие воздействия в шарнире K формируются в виде обратной связи по переменным α, $\dot{\alpha}$, $\dot{\phi}$, а в шарнире P – по переменным β, $\dot{\beta}$, $\dot{\phi}$. При этом программные значения углов α и β выбираем зависящими от угловой скорости $\dot{\phi}$ так, чтобы имитировать характерные движения человека, раскачивающегося на качелях: при движении качелей «вперед» ($\dot{\phi} > 0$) человек разгибает колени и отклоняет корпус назад, а при движении качелей «назад» ($\dot{\phi} < 0$) человек сгибает колени и перемещает корпус вперед. Построен соответствующий закон управления, обеспечивающий выход системы на притягивающий стационарный режим. Исследована зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметров закона управления.

Проведено численное моделирование дифференциальных уравнений движения. При этом значения инерционно-массовых параметров модели выбраны антропоморфными (на основании данных, приведенных в [3]). Пример результата численного моделирования приведен на рис. 2: в трехмерном пространстве углов α, β и ϕ построен периодический режим колебаний системы.

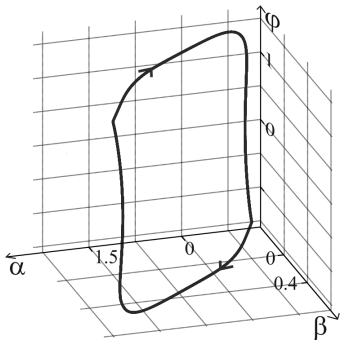


Рис. 5.2: Пример кривой в конфигурационном пространстве, описывающей режим установившихся колебаний.

В приведенном примере амплитуда притягивающих установившихся колебаний качелей составляет примерно 90^o. Для поддержания амплитуды используется определенный алгоритм изменения углов α и β, который проиллюстрирован на рис. 2.

Отметим, что в качестве максимально упрощенной модели качелей с сидящим на них человеком можно рассматривать маятник с маховиком на свободном конце (см. [2]). В последнем случае одно из уравнений, описывающих движение системы, отделяется, и установившиеся колебания могут быть исследованы на основе метода, предложенного в [4]. При этом многие характерные качественные свойства колебаний сохраняются и в такой упрощенной модели.

Литература

1. *Магнус К.* Колебания. — М.: Мир, 1982.

2. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. — М.: Наука, 2012.

3. *Новожилов И.В., Терехов А.В., Забелин А.В., Левик Ю.С., Шлыков В.Ю., Казенников О.В.* Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека // Новожилов И.В, Кручинин П.А. (ред.) Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии. — Москва: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2005. — 7-20.

4. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ, **3** (2019), 9-21 (в печати).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ

Д.Ю. Князьков, Т.Ю. Фигурина
knyaz@ipmnet.ru, t_figurina@mail.ru

УДК 531.3

Рассматривается движение локомоционной системы, состоящей из корпуса и внутренней массы, при периодическом движении массы относительно корпуса, в среде с сопротивлением. Исследуется режим движения, при котором перемещение корпуса тоже периодично. Показано, что для любого монотонно убывающего сопротивления и любого движения внутреннего тела с кусочно-непрерывным относительным ускорением, такой режим существует, единственен, и скорость любого движения корпуса сходится к скорости этого режима экспоненциально. Для ряда частных случаев построен периодический режим, найден показатель сходимости, проведено численное моделирование.

Ключевые слова: локомоционная система, периодическое движение, сопротивляющиеся среды, экпоненциальная устойчивость

Periodic regimes of rectilinear motion of two-body system

We consider motion of a body with an internal mass, that moves periodically without velocity jumps. The body moves in a resistive environment. We investigate regimes, when the body's velocity is also periodic. We prove that the periodic regime exists, is unique and exponentially stable for the majority of resistances. A two-sided estimate of the periodic regime initial velocity is obtained. For linear and piecewise linear resistances, a periodic regime is constructed; the rate of the exponential convergence to this regime is found. The general results are illustrated by simulations for parameters of a physical prototype of a capsule robot.

Keywords: locomotion system, periodic motion, resistive media, exponential stability

Локомоционные системы, движущиеся в сопротивляющихся средах за счет периодического изменения конфигурации, изучались во многих работах, в том числе, в [1-4]. Предполагалось, что движение системы происходит с периодически изменяющимися скоростями тел и одинаковым смещением тел за период, что выполнено лишь при соответствующем выборе начальных скоростей тел, входящих в систему. Из экспериментальных данных и из моделирования известно, что такие начальные скорости существуют и любые движения сходятся к движениям с периодическими скоростями. Аналитически это было доказано для отдельных механических систем, законов изменения конфигурации системы и законов сопротивления среды

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-11-00307.

Князьков Дмитрий Юрьевич, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); Dmitri Knyazkov (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Фигурина Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); Tatiana Figurina (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

[2,3]. Данная работа аналитически исследует и дает положительный ответ на вопросы существования, единственности, устойчивости периодического режима движения для системы двух взаимодействующих тел на прямой для широкого класса законов изменения расстояния между телами и широкого класса законов сопротивлений среды.

Рассматривается прямолинейное движение локомоционной системы, состоящей из корпуса массы M и внутреннего тела массы m, которые будем в дальнейшем называть тело M и масса m. Внутреннее тело движется, не взаимодействуя со средой, вдоль горизонтальной направляющей внутри корпуса, периодически относительно корпуса, при этом корпус движется вдоль горизонтальной прямой в среде с сопротивлением. Оба тела моделируются точечными массами. Обозначим координату и скорость тела M через x и $v(t) = \dot{x}(t)$, а координату массы m относительно тела M через l, и пусть R_M – сила сопротивления среды, приложенная к телу M.

Уравнение движения системы записывается в виде

$$M\dot{v} + m(\dot{v} + \ddot{l}) = R_M(v).$$

Будем считать, что сопротивление среды монотонно убывает с ростом скорости и отсутствует в состоянии покоя: $R_M(v_1) > R_M(v_2)$, $v_1 < v_2$; $R_M(0) = 0$. Введем обозначения для нормированного относительного ускорения внутреннего тела m и нормированной силы сопротивления среды: $u(t) = m(m+M)^{-1}\ddot{l}(t)$, $R = R_M(M+m)^{-1}$.

С учетом введенных обозначений, уравнение движения принимает вид

$$\dot{v} = u + R(v), \tag{1}$$

а сопротивление среды R удовлетворяет условиям

$$R(v_1) > R(v_2), \qquad v_1 < v_2, \qquad R(0) = 0. \tag{2}$$

Будем считать, что масса m движется периодически относительно тела M с заданным периодом T, так что $l(t+T) = l(t)$. Тогда относительное ускорение u удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_0^T u(t)dt = 0. \tag{3}$$

Это равенство является необходимым, а также и достаточным, при соответствующем выборе $\dot{l}(0)$, условием периодичности $l(t)$. Будем считать, что относительное ускорение u принадлежит классу кусочно-непрерывных функций. При этом относительная скорость $\dot{l}(t)$ массы m не претерпевает скачков. В силу кусочно-непрерывности и периодичности, функция u ограничена:

$$\max_{t\in[0,+\infty)} |u(t)| = A < \infty. \tag{4}$$

Изучим движения тела M, подчиняющиеся соотношениям (1)-(4). Будем называть режим движения системы периодическим, если периодическое движение массы m порождает движение тела M с периодически изменяющейся скоростью, так что

$$v(t+T) = v(t). \tag{5}$$

Задача: Для системы, подчиняющейся соотношениям (1)-(4), исследовать существование и единственность решения, удовлетворяющего условию периодичности (5), и сходимость к нему непериодических решений.

Обозначим периодическое решение задачи (1)-(4) через $v_*(t)$.

Таким образом, задача состоит в исследовании возможности выбора такого начального условия $v_*(0)$, при котором заданному периодическому закону относительного движения внутреннего тела, соответствует периодическая скорость корпуса. При таком движении, смещение корпуса за период постоянно и локомоционная система может продвигаться на неограниченное расстояние путем повторения своего движения на периоде. Кроме, того, исследуется единственность такого периодического режима движения, сходимость к нему непериодических режимов и скорость сходимости. В результате исследования, была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого закона сопротивления среды, такого что* $\lim\limits_{v\to\pm\infty}|R(v)| > A$, *периодическое решение* $v_*(t)$ *задачи (1)-(4) существует и единственно, причем* $v_*(0) \in [R^{-1}(A), R^{-1}(-A)]$. *Любое решение задачи (1)-(4) экспоненциально сходится к периодическому решению.*

Таким образом, задача была решена для широкого класса законов сопротивлений среды, включающих большинство известных законов сопротивления (исключая сухое трение), и для широкого класса законов движения внутреннего тела. Показано, что периодический режим существует и единственен, и любое движение экспоненциально сходится к периодическому. В частных случаях линейного и кусочно-линейного сопротивления периодические режимы движения построены, найден показатель экспоненциальной сходимости к ним.

Для моделирования рассмотренной выше локомоционной системы на языке программирования C++ была написана программа. Правильность расчетов была подтверждена путем сравнения с точным аналитическим решением в случае линейного закона сопротивления. Для линейного и кусочно-линейного законов сопротивления среды и для параметров, соответствующих параметрам прототипа капсульного работа [4], было проведено моделирование движений системы, иллюстрирующее общие результаты, сформулированные в теореме 1.

Литература

1. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ, **76**:1 (2012), 3-22.

2. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2 (2007), 65-71.

3. *Bardin B., Panev A.* On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // Vibroengineering PROCEDIA, **8** (2016), 135–141.

4. *Nunuparov A., Becker F., Bolotnik N., Zeidis I., Zimmermann K.* Vibration-driven capsubot with an opposing spring: An Experimental Study // Arakelian V., Wenger P. (eds) ROMANSY 22 – Robot Design, Dynamics and Control. — Cham: Springer International Publishing, 2019. — 126–133.

ГЕОДИНАМИКА КОНТИНЕНТАЛЬНЫХ ОКРАИН И МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ АРКТИЧЕСКОГО РЕГИОНА

В.Д. Котелкин, Л.И. Лобковский
kotelkin@mech.math.msu.su

УДК 532.135, 551

Применение кинематики плит к Арктическому региону приводит к противоречиям с геофизическими данными. Численное моделирование региональной геодинамики, проведенное в рамках модели термохимической мантийной конвекции, привело к новой схеме эволюции континентальных окраин. Результаты моделирования подтверждаются сейсмотомографией Азиатско-Тихоокеанского региона. Применение новой схемы к геодинамике Арктического региона позволяет устранить все противоречия.

Ключевые слова: мантийная конвекция, условия регуляризации, Арктический регион, субдукция, континентальная окраина

The continental margin geodynamics and the model of Arctic region evolution

The application of plate kinematics to the Arctic region leads to contradictions with geophysical data. Numerical simulation of regional geodynamics, carried out within the framework of the thermochemical mantle convection model, led to a new scheme for the evolution of continental margins. The simulation results are confirmed by seismic tomography of the Asia-Pacific region. The application of the new scheme to the geodynamics of the Arctic region eliminates all contradictions.

Keywords: mantle convection, Arctic region, regularization conditions, subduction, continental margin

Введение. Известные американские геологи [1, 2], моделируют эволюцию Арктики в меловой период кинематикой Евразийской и Северо-Американской плит, которые предполагаются жесткими, т.е. (согласно теореме Эйлера) просто вращаются относительно некоторых полюсов. При этом получается уменьшение на 1000 км (океанического?) Канадского бассейна, что, в свою очередь, объясняется существованием внутриарктической зоны субдукции, в результате действия которой также образовались подводные хребты Альфа и Менделеева, задуговые бассейны Макарова и Подводников. Однако в осадочной толще у подножия хребтов отсутствуют следы поглощения океанической коры, а данные по магматизму не содержат следы субдукции. Более того, проведенные в последние годы многочисленные геофизические исследования шельфа, островов, глубоководных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Котелкин Вячеслав Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vyacheslav Kotelkin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Лобковский Леопольд Исаевич, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, институт океанологии имени П.П.Ширшова (Москва, Россия); Leopold Lobkovsky (Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia)

участков Северного Ледовитого океана и примыкающих областей суши свидетельствуют о том, что в меловой период литосфера Арктики, наоборот, испытывала растяжение [3].

Модель. Было проведено исследование движений верхней мантии на основе модели термической конвекции в приближении Буссинеска [4]:

$\nabla_i p = Gr(T + C + \phi\chi(Z_{ph} - z))\delta_{i2} + \nabla_j \tau_{ij}$, $\tau_{ij} = \mu(T)(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$, $\partial T/\partial t + v_i \nabla_i T = \Delta T/Pe$, $\partial C/\partial t + v_i \nabla_i C = 0, i, j = 1, 2$.

v_i, p, T, C – скорости, динамическое давление, температура, легкое коровое вещество; $Gr = \rho^* g \alpha T^* H^2/(\mu v^*), Pe = v^* H/k$ – числа Грасгофа и Пекле. Посредством функции $Z_{ph}(T)$ модель учитывает скачок плотности ϕ на фазовом переходе оливина в шпинель. Реология мантийного вещества определяется зависимостью вязкости от температуры μ(T). $\mu(T) = \mu_{l,m} exp(-\lambda T); \mu_l = \mu_{lito}, T < T_{solidus}; \mu_m = \mu_{mantle}, T > T_{solidus}$ Наши расчеты учитывали регулярную зависимость и скачкообразное изменение вязкости при достижении (на подошве литосферы) температуры солидуса. Подчеркнем, что положение границ литосферы, коры и фазового перехода не постулируется, а находится в процессе решения!

Расчеты проводились в прямоугольной области $(0 < x < l, 0 < z < 1)$. Граничные и начальные условия $z = 0 : v_x = v_z = 0, T = 1; z = 1 : v_z = \tau_{xz} = T = 0; x = 0, l : v_x = \tau_{xz} = \partial T/\partial x = 0; t = 0 : v_x = v_z = 0, T = 1/2$.

Проблема регионального моделирования состоит в том, что оно некорректно, обсуждение постановки задачи и условий регуляризации можно найти в [4]. Чтобы иметь на правой границе восходящий поток, отвечающий срединно-океаническому хребту (СОХ), в качестве условия регуляризации решения добавляется небольшой подогрев в этой части границы.

Результаты моделирования. Уравнения аппроксимировались конечными разностями 2-го порядка на разнесенной декартовой сетке, расчетная область разбивалась на 640x64 ячеек. Согласно геофизическим данным $Gr = 500, Pe = 485, \lambda = 5, \mu_l = 100, \mu_m = 1, \phi = 2, C = 3$. Коровое вещество при t=0 равномерно распределено вдоль верхней границы.

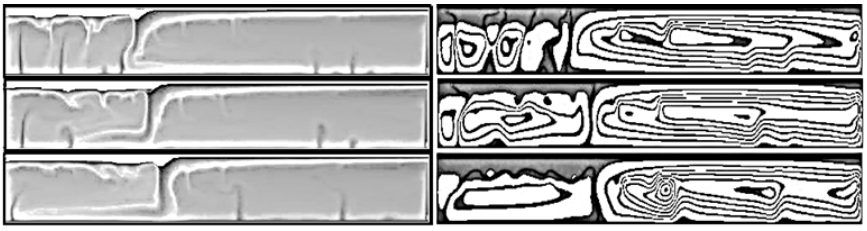


Рис. 5.1: Слева — распределение температуры (белым цветом сверху показана кора); справа — линии тока.

Визуализация численного эксперимента показывает, что на правом конце расчетной области формируется восходящий поток и вытянутая конвективная ячейка, которая сносит коровое вещество в левую сторону, где формируется утолщенное коровое покрытие – «континент». Т.е. моделирование

само формирует состояние, соответствующее эмпирическим данным: конвейерному движению дна океана, тонкой океанической и толстой континентальной литосфере, расположению зоны субдукции на краю континента. С этого состояния начинается наше основное исследование, результаты которого приведены на рис. 1. Слева от зоны субдукции под континентом образуется вторичная конвективная ячейка с обратным направлением течения. Моделирование показывает, что до определенного момента происходит рост этой субконтинентальной ячейки. Ячейка растет за счет того, что её фронт, представляющий восходящий горячий поток, продвигается под континент, кроме того видно, что тыльная сторона ячейки, т.е. зона субдукции, частично откатывается в сторону океана. Затем, когда сила трения сравнивается с силой субдукции, организованная циркуляция под континентом прекращается. Картина геодинамической эволюции, полученная в нашем численном эксперименте, подтверждается результатами сейсмотомографии Восточной Азии [5]. Из разреза мантии на рис. 2 видно, что погрузившееся тяжелое холодное вещество (темного цвета) продвинулось под Евразийский континент примерно на полторы тысячи километров, а вулканы сверху маркируют действие горячего потока.

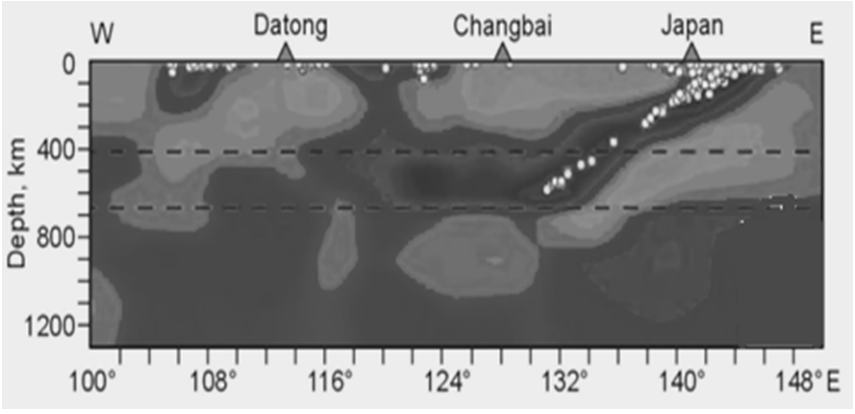


Рис. 5.2: Разрез мантии под Восточной Азией [5]. Цвета — скорости сейсмических волн, белые кружки — землетрясения, треугольники – вулканы.

Заключение. Модель региональной эволюции в виде расширяющейся субконтинентальной конвективной ячейки решает целый комплекс тектонических проблем. Ключевую роль в этой схеме играет движущийся под континентом восходящий поток, который приводит к магматизму и рифтогенезу. Это объясняет причину растяжения континентальной литосферы и возникновения рифтовых зон на востоке Азии, включая Байкальскую рифтовую зону. Расширение конвективной ячейки в тыльную сторону объясняет откат зон субдукции и образование окраинных бассейнов. Согласно нашему эксперименту субконтинентальная ячейка функционирует около 50 млн. лет, а океаническая плита вдвигается под континент на 2000 км. Эти масштабы и характер поверхностных трансформаций соответствуют глав-

ным геологическим периодичностям – орогеническим фазам. Применение схемы к Арктическому региону согласуется с геофизическими данными и объясняет образование Канадского и Евразийского бассейнов.

Литература

1. *Scotese C.R.* Paleogeographic Reconstructions of the Circum-Arctic Region since the Late Jurassic // Search and Discovery Article 30193. PALEOMAP Project, Arlington, TX. 2011.

2. *Golonka J.* Phanerozoic palaeoenvironment and palaeolithofacies maps of the Arctic region // Arctic Petroleum Geology, **35** (2011), 79-129.

3. *Казмин Ю.Б., Лобковский Л.И., Кононов М.В.* Геодинамическая модель развития Амеразийского бассейна Арктики //Арктика: экология и экономика, № 4 (2014), 14-27.

4. *Котелкин В.Д., Лобковский Л.И.* Регуляризация геодинамических задач с помощью геологических данных // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, № 3 (2014), 15-25.

5. *Жао Д., Пирайно Ф., Лиу Л.* Структура и динамика мантии под Восточной Россией и прилегающими регионами // Геология и геофизика, **51**:9 (2010), 1188-1203.

О ПОНЯТИИ ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА И УТОЧНЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ КЕМПЕ

М.Д. Ковалёв

mdkovalev@mtu-net.ru

УДК 514.8,531.1,531.8

Более века считалось, что Альфред Кемпе доказал (1876) теорему о возможности вычерчивания по частям шарнирными механизмами произвольной плоской алгебраической кривой. Однако, недавно специалисты по алгебраической геометрии, развив его результат на формализованном языке, стали утверждать, что рассуждения Кемпе содержат существенные пробелы и даже ошибки. Автор считает эти обвинения недоразумением, возникшим из-за разной трактовки понятия механизма. На основе своей формализации традиционного понятия шарнирного механизма автор даёт уточнённую формулировку того, что было доказано А.Кемпе.

Ключевые слова: геометрия, теория механизмов, конфигурационное пространство механизма

Ковалёв Михаил Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Kovalev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Определение шарнирного механизма

Здесь рассматриваются плоские шарнирно рычажные механизмы, которыми занимались такие математики как П.Л. Чебышев и А. Кемпе. Последним была написана работа "Об общем методе черчения шарнирным механизмом плоских кривых n-ой степени" [1]. Хотя эта работа не содержала формулировок теорем, считалось, что в ней Кемпе доказал теорему о возможности вычерчивания по частям шарнирными механизмами произвольной плоской алгебраической кривой.

Давид Гильберт в лекциях по наглядной геометрии [2] так определял механизмы: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости шарнирами, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости". Это описательное определение нельзя считать строгим математическим определением. Последнее, по-видимому, впервые было дано автором в работе [3].

Приведём его. Итак, мы считаем наши механизмы составленными из стержней, несущих на своих концах шарниры. Структуру такого механизма задаём графом $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра —- рычагам (стержням). Граф $G(V, E)$ обладает вершинами двух видов: отвечающими неподвижным в механизме (закреплённым) шарнирам, и подвижным (свободным) шарнирам. Будем называть вершины первого вида крестиками, второго — кружочками.

На граф $G(V, E)$ шарнирного механизма, в отличии от авторов работ [4, 5, 6], я накладываю ряд естественных условий. А именно: а) $G(V, E)$ связен, б) вершины крестики смежны лишь вершинам кружочкам, в) подграф графа $G(V, E)$ на вершинах кружочках связен, г) условие, вытекающее из подвижности в механизме всех свободных шарниров. Из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестику. Граф $G(V, E)$, для которого выполнены все эти условия, я называю *шарнирной структурной схемой* (ШСС) механизма. Условия а), в) выделяют индивидуальный механизм, без них получается несколько механизмов, движущихся независимо один от другого. Условие б) вводится из-за того, что нет нужды задавать расстояния между закреплёнными шарнирами. Условие г) введено, чтобы исключить неподвижные шарниры из числа свободных.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) называем ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости. Положения закреплённых шарниров мы считаем попарно несовпадающими. Пусть ЗШС имеет $m \geqslant 1$ свободных шарниров, и $r \geqslant 1$ рычагов. Тогда ЗШС отвечают евклидовы пространства параметров: R^{2m} — пространство положений свободных шарниров, и $\mathcal{R}^r$ — пространство квадратов длин рычагов. Пусть p_i — радиус вектор i-го шарнира в плоскости, d_{ij} —- квадрат длины рычага, соединяющего смежные в графе $G(V, E)$ i-й и j-й шарниры. Ключевым для геометрии шарнирных конструкций является так называемое *рычажное отображение*: $F : R^{2m} \to \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $\{ij\} \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов. Точку $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in \mathcal{R}^r$ мы

называем, придавая вполне определённый смысл термину и понятию кинематической схемы из теории механизмов, *кинематической шарнирной схемой* (КШС), а точку $\mathbf{p} = \{p_i\} \in R^{2m}$ — *шарнирником*. С инженерной точки зрения шарнирник есть либо определённое положение шарнирного механизма, либо шарнирная ферма. Неодноточечная компонента $K \subset R^{2m}$ связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ представляет собой множество всех положений или *конфигурационное пространство* шарнирного механизма. Таким образом, мы отождествляем *шарнирный механизм* с его связным конфигурационным пространством.

Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении называем *конфигурационным пространством КШС* $\mathbf{d}$. При таком подходе каждой компоненте связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое шарнирное устройство: механизм или ферма в случае одноточечности компоненты.

Вокруг теоремы Кемпе

Авторы же работ [4, 5] и вслед за ними другие математики называют конфигурационным пространством шарнирного механизма то, что я называю конфигурационным пространством его КШС, то есть множество $F^{-1}(\mathbf{d})$. С точки зрения математики это естественнее и удобнее, поскольку $F^{-1}(\mathbf{d})$ в отличии от его связной компоненты K всегда является алгебраическим множеством. Однако, это противоречит традиционному пониманию шарнирного механизма как конструкции непрерывно переводимой из одного её положения в любое другое. И конечно, это сказывается на понимании теоремы Кемпе, в которой речь идёт о проекции πK конфигурационного пространства механизма на плоскость положений одного из шарниров. Поскольку проекция $\pi F^{-1}(\mathbf{d})$, как правило, больше πK, приходится заботиться о том, чтобы "шарнир не вычерчивал лишние точки". Что с кинематической точки зрения бессмысленно, ибо шарнир нельзя непрерывно перевести из положения в πK в положение из $\pi F^{-1}(\mathbf{d}) \setminus \pi K$.

В работах [4, 5] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого связного гладкого компактного многообразия X найдётся шарнирный механизм, конфигурационное пространство которого гладко гомеоморфно (диффеоморфно) многообразию X.*

Теорема 2. *Полиномиально параметризованная $f : [a, b] \to R^2$ кривая K может быть прочерчена шарниром плоского шарнирного механизма, а именно, закон движения этого шарнира есть $f(t), a \leqslant t \leqslant b$.*

Их доказательство опирается на видоизменённый метод Кемпе построения нужного механизма из простейших. Причём эти простейшие механизмы, параллелограммы и антипараллелограммы приходится видоизменять, — укреплять, чтобы избежать нежелательных точек в конфигурационном пространстве КШС. На этом же пути [6] предлагались и уточнённые доказательства теоремы Кемпе.

Если придерживаться нашего понимания шарнирного механизма, то с несущественными уточнениями и без необходимости укрепления параллелограммов и антипараллелограммов первоначальные рассуждения Кемпе представляют собой доказательство следующей теоремы. Пусть π — проекция R^{2m} на плоскость положений шарнира p_j.

Теорема 3. *Для произвольной плоской алгебраической кривой A, и точки $p \in A$ найдётся механизм с конфигурационным пространством $K \subset R^{2m}$, и такая окрестность $U \subset R^2$ точки p, а также окрестность $W \subset R^{2m}$ точки $\mathbf{p} \in K$ ($\pi\mathbf{p} = p$), что $\pi(K \cap W) = A \cap U$.*

Из этой теоремы следует, что в случае связности $A \cap U$ каждая точка из $A \cap U$ достигается шарниром p_j при непрерывном движении механизма, не выводящем его из окрестности W. Или простыми словами, что произвольную ограниченную и связную часть алгебраической кривой можно без лишних точек вычертить шарниром шарнирного механизма при непрерывном движении последнего.

Литература

1. *Kempe A. B.* On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by Linkwork// Proc. of the London Math. Soc., **7**:102 (1876), 213–216.

2. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

3. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, **58**:1 (1994), 45–70.

4. *Kapovich M., Millson J.J.* Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology, **41**:6, (2002), 1051 – 1107.

5. *King Henry C.* Planar Linkages and Algebraic Sets// arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998.

6. *Power S.* Elementary proofs of Kempe universality// arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 Apr 2017.

ВОЗМОЖНЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ СИСТЕМ

Е.И. Кугушев, Т.В. Сальникова, С.Я. Степанов

evgenkei@progtech.ru, tatiana.salnikova@gmail.com, stepsj@yandex.ru

УДК 531.391

Обсуждается «расширенная» модель формирования планетной системы. Гравитационный коллапс протопланет приводит к образованию планет и их спутниковых систем. Рассматривается гипотеза о двухступенчатом механизме формирования спутниковых систем. Малые спутники формируются из остатков разрушающегося протопланетного облака, а большие — путем захвата других относительно небольших протопланет. При этом важно изучить процесс образования исходного газопылевого облака, эволюция которого ведет к образованию протопланетной, а затем и планетной системы. Обоснование «расширенной» модели осуществляется путем численного моделирования.

Ключевые слова: небесная механика, космология, математическое моделирование

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00887).

Кугушев Е.И., д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Eugene Kugushev (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Свльникова Т.В., к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Tatiana Salnikova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Степанов С.Я., д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Stepanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Possible models of the planetary systems formations

We discuss "widened" model of planetary system formation. Gravitational collapse of protoplanets leads to the formation of planets and their satellite systems. We consider the hypothesis of a two-stage mechanism of formation of satellite system. Small satellites are formed from the remnants of a collapsing protoplanetary cloud, and large satellites are formed by capturing other relatively small protoplanets. At the same time, it is important to study the process of formation of the initial gas-dust cloud, the evolution of which leads to the formation of a protoplanetary, and then a planetary system. The justification of the "widened" model is carried out by numerical simulation.

Keywords: celestial mechanics, cosmology, mathematical simulation

Работа посвящена процессам образования и эволюции планетных систем. Предлагается расширенная модель таких процессов, основанная на модели, разрабатывавшейся с начала 80-х годов XX века Т.М.Энеевым и Н.Н.Козловым [1]. В ходе этих исследований были обоснованы дополнения к гипотезе Шмидта, связанные с механизмом взаимодействия сталкивающихся частиц. В 2001 г. Т.М.Энеев предложил гипотезу, состоящую в том, что из отслоившегося пояса частиц могут появиться только маленькие спутники. А происхождение больших спутников объясняется захватом другого небесного тела или прототела, орбита которого близка к орбите спутника [2].

При изучении образования планетных систем важным является вопрос о том, что собой представляет первичное газо-пылевое облако, из которого и образуется планетная система. В расширенной модели, рассматривающейся в нашей работе изучается не только эволюция первичного газо-пылевого облака, но процесс его образования. Предполагается, что оно формируется в ходе встречного или косого столкновения даух газо-пылевых потоков. Силовое взаимодействие частиц этих потоков приводит к образованию временной, относительно компактной системы частиц, обладающей определенным кинетическим моментом. В ходе эволюции такой системы часть частиц выбрасывается из системы, а основная масса участвует в дальнейшем образовании первичного газо-пылевого облака. Отдельные вопросы, которые здесь исследуются, - это определение формы первичного облака, распределения массы в его объеме, а также параметров его движения.

Особо отметим, что указанные процессы могут возникать не только при столкновении исходно независимых потоков частиц, но также и из-за градиента скорости частиц в газо-пылевой среде, движущейся, например, в гравитационном поле внешнего достаточно массивного объекта. Влияние причин, вызывающих скоростной градиент, на образование первичного облака также является важной задачей.

Изучение эволюции газо-пылевых потоков и первичного пылевого облака производится методами компьютерного моделирования. Важным вопросом при этом является выбор модели взаимодействия частиц в газо-пылевом облаке. С одной стороны, модель должна учитывать возможно большее число сторон такого взаимодействия для более полного отражения физики реальных процессов в таких средах. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой и доступной для реализации быстрых вычислений

на. Подробное обсуждение процессов, происходящих в газо-пылевом облаке можно найти, например, в [3].

Опишем модель взаимодействия частиц, которая была выбрана в нашей работе в качестве исходной. Частицы предполагаются шарообразными и занимающими определенные объемы, в зависимости от массы. При столкновении частиц с малыми относительными скоростями происходит их слипание в новую "суммарную"частицу. При больших скоростях столкновения происходит упругое соударение. Между всеми частицами происходит ньютоновское гравитационное взаимодействие. Взаимодействие малых частиц включает также потенциал Леннарда-Джонса, [4-5]. В простейшей форме он имеет следующий вид:

$$V(r) = -\alpha \left[\left(\frac{D}{r} \right)^{12} - \left(\frac{D}{r} \right)^{6} \right],$$

где r — расстояние между частицами, α и D — параметры.

Первые результаты численных экспериментов, проведенные в рамках расширенной модели, показали, что в ходе взаимодействия газо-пылевых потоков могут образовываться времнные газо-пылевые структуры, подобные реальным наблюдаемым структурам.

Литература

1. *T. Eneev, N. Kozlov* The Dynamics of Planet Formation. Theory and Computer Simulation // Saarbrucken, Deutschland, Lap Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p. ISBN: 978-3-659-85958-8.

2. *Энеев Т.М., Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Чечеватов Д.А.,* О возможном механизме образования естественных спутниковых систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2006, 072, 20 с.

3. *Дорофеева В.А., Макалкин А.Б* Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты // М., Едиториал УРСС, 2004, 264 с.

4. *Цянь Сюэ-цень* Физическая механика // М., Мир, 1965, 544 с.

5. *Каплан И.Г.* Введение в теорию межмолекулярного взаимодействия // М., Наука, 1982, 312 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ВОЛОСКОВЫМИ КЛЕТКАМИ ДАТЧИКОВ ВЕСТИБУЛЯРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н.В. Куликовская
nvkpostb@mail.ru

УДК 539.3

Эта статья предоставляет рекомендации по выбору определенных ключевых параметров получения и накопления данных с помощью протоколов Volt-Clamp и предлагает использовать для анализа записей тока в ионном канале с несколькими открывающими частицами математическую модель в форме обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова.

Ключевые слова: интенсивность потока событий, уравнения Колмогорова, ионные токи, протокол VOLT-CLAMP

Application of the theory of markov processes for modeling of experiments with hair cells of vestibular sensors

This article provides recommendations about a choice of the certain key parameters of receiving and accumulation given by means of the Volt-Clamp protocols and suggests to use for the analysis of records of current in the ionic channel with several opening particles mathematical model in the form of the ordinary differential equations of Kolmogorov.

Keywords: the intensity of the flow of events, Kolmogorov equation, ionic currents, Protocol VOLT-CLAMP

В 1952 году были опубликованы работы [1] А.Л.Ходчкина и А.Ф.Хаксли (Х-Х), в которых авторы описали методику разделения ионных токов и их регистрации с помощью протоколов фиксации потенциала. Авторы писали, что предложенный ими метод может применяться и для исследования других клеток(они работали с нервными клетками кальмара). Результаты были представлены авторами в виде аналитических функций $\alpha(v)$, $\beta(v)$, выражающих зависимость интенсивностей переходов воротных частиц в ионных каналах из открытого состояния в закрытое и обратно от потенциала клеточной мембраны. За 60 лет методика Х-Х используется в глобальном масштабе, созданы специальные инструменты, фармакология разделения токов, пакеты компьютерных программ, управляющих экспериментами и проводящих обработку результатов. Однако, в основном приводятся не функции $\alpha(v)$, $\beta(v)$, а стационарные проводимости каналов и постоянные времени для токов. Это приводит иногда к необъяснимым эффектам в случаях описания каналов со многими воротными частицами. Так, например, постоянные времени переходных процессов при одном и том же потенциале мембраны, но при разных начальных условиях (в режимах активации и деактивации мембраны) оказываются различными([3], [4]), что связано с

Куликовская Нина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nina Kulikovskaya (Lomonosov Moscow State University, Russia)

трудностями определения постоянных времени на тестовых потенциалах, близких к потенциалу покоя клетки.

Следуя Х-Х, сделаем предположение, что общая проводимость клеточной мембраны для однотипных ионных каналов равна сумме проводимостей большого количества отдельных каналов и что в состав каждого канала входят k активационных воротных частиц. (В этой работе мы предполагаем, что можно рассматривать процессы быстрой активации и медленной инактивации раздельно). Каждые ворота в случайные моменты времени образующие случайные потоки Пуассона, переходят из открытого состояния в закрытое с интенсивностью $\beta_i(v(t))$ и из закрытого в открытое с интенсивностью $\alpha_i(v(t))$. В описываемом случае предполагается, что интенсивности переходов зависят только от мембранного потенциала v и мгновенно изменяются при изменении потенциала.

Если все воротные частицы в канале включены последовательно и управляются взаимно независимыми потоками событий, то кинетика канала может быть представлена как схема процесса рождения и гибели с числом состояний $k+1$. В каждый момент времени все каналы, у которых открыты i ворот, находятся в состоянии S_i. Случайный процесс $S(t)$ с непрерывным временем и дискретным набором состояний $S_1(t), S_2(t)...S_n(t)$ называется марковским, если для любого момента в будущем условные вероятности состояний процесса зависят только от того в каком состоянии находится процесс в настоящий момент. Теория марковских процессов с непрерывным временем и дискретным набором состояний строится в предположении, что переходы процесса из одного состояня в другое происходят под влиянием пуассоновских потоков событий, провоцирующих эти переходы, и каждую соседнюю пару состояний обслуживают два разнонаправленных потока. Для того, чтобы воротная частица перешла из одного состояния в другое, она должна преодолеть энергетический барьер. Обычно этот барьер зависит от разности потенциала между внутренней и наружной сторонами клеточной мембраны. Внутримолекулярные связи белков, формирующих ионные каналы, находятся в быстром движении. Характерные времена внутренних перемещений в белке имеют порядок пикосекунд. Можно представить себе, что когда молекула растягивается, воротная частица может преодолеть энергетический барьер и ворота откротся. Каждое растяжение можно считать за биноминальную попытку добиться с определённой вероятностью успеха, когда ворота перейдут в открытое состояние. Ясно, что вероятность успеха в каждой пикосекундной попытке можно считать малой, а число таких растяжений за характерное время изменения потенциала мембраны порядка миллисекунд – большим. При этом биноминальное распределение аппроксимируется пуассоновским.

С каждым состоянием процесса можно связать значение вероятности пребывания канала в этом состоянии в момент времени t, $p_i^k(t)$(верхний индекс соответствует общему числу воротных частиц в канале, а нижний индекс – числу открытых ворот). В состоянии S_k открыты все ворота и ионный канал открыт. Процесс рождения и гибели с конечным числом дискретных состояний и непрерывным временем является марковским процессом если все управляющие потоки являются пуассоновскими и взаимно независимыми. В этом случае изменение вероятностей $p_i^k(t)$ описывается системой

уравнений Колмогорова.

Если все процессы Пуассона имеют независящие от времени интенсивности, то можно определить значения стационарных вероятностей [3].

Если в канале есть k независимых идентичных воротных частиц с равными интенсивностями переходов α и β, то интенсивности переходов в цепи состояний будут равны: $\alpha_0 = k\alpha; \alpha_1 = (k-1)\alpha; ....\alpha_{k-1} = \alpha;\ \beta_1 = \beta; \beta_2 = 2\beta; .....\beta_k = k\beta;$

В этом случае система уравнений Колмогорова имеет k отрицательных характеристических чисел, которым соответствуют в записи решения уравнений Колмогорова члены с показателями экспонент $-t/\tau, -2t/\tau, ... - kt/\tau$, где $\tau = (\alpha + \beta)^{-1}$, а стационарные вероятности определяются формулами Больцмана.

Х-Х определяли интенсивности переходов для воротной частицы, выбрав вид их аналитического представления. При вычислениях они использовали протоколы Volt-Clamp, соответствующие режимам активации каналов, указав, что деактивация происходит по простой экспоненте. Подробного анализа деактивации они не приводят. Возможно, для нейрона эти режимы менее заметны, чем режимы активации. Однако, для описания мембранного потенциала волосковых клеток вестибулярных органов существенным является описание их функционирования в области потенциала покоя. В этом диапазоне постоянные времени максимальны, а их восстановление из опытных данных затруднено из-за малых величин токов.

Если провести анализ изменения проводимости ионных каналов с помощью их описания как решений уравнений Колмогорова при заданных начальном потенциале мембраны V_{hold} и потенциале V_{test}, для которого проводится регистрация переходного процесса, то оказывается возможным объяснить некоторые значительные разногласия при определении постоянных времени отдельных воротных частиц. В качестве примера используются результаты из статей [3], [4].

Основная рекомендация: при выборе длительности T_{end} для интервала записи траекторий тока в режиме Volt-Clamp нужно ориентироваться на длительность переходных процессов при потенциалах близких к потенциалу покоя клетки, причём для этого диапазона тестовых потенциалов особенно полезны наблюдения за деактивацией каналов. Всегда полезно определять постоянную времени по конечному отрезку записей, так как на этой части траекторий тока остаётся только составляющая с самым большим значением постоянной времени τ. Используя эту оценку τ, можно выяснить, присутствуют ли на начальном отрезке траекторий тока составляющие с постоянными времени близкими к $\tau/2$, $\tau/3$, ...; наличие таких составляющих покажет сколько однотипных воротных частиц нужно принять при описании канала. Если же быстрые составляющие имеют постоянные времени, далекие от $\tau/2, \tau/3, \ldots$, то можно предположить, что не все воротные частицы в канале одинаковы.

Литература

1. *Hodjkin A.L., Huxlei A.F.* A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve. Physiol. **I**:I7 (I952), 500-544.

2. *Вентцель Е.С. , Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. — Москва: Наука, 1991

3. *Catacuzzeno L, Fioretti B., Franciolini F.* Voltage-Gated Outward K Currents in Frog Saccular Hair Cells J Neurophysiol **90** (2003), 3688–3701.

4. *Brichta, A. M., A. Aubert, R. A. Eatock, and J. M.Goldberg* Regional analysis of whole cell currents from hair cells of the

ЭВОЛЮЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗОРЕ

С.А. Кумакшев

kumak@ipmnet.ru

УДК 532.516

Для классической постановки задачи Джеффри-Гамеля исследована эволюция основного одномодового (с постоянной по знаку скоростью потока в зависимости от угла раствора диффузора) стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре. Показан переход основного одномодового течения, при фиксированном значении угла раствора, к многомодовым режимам, у которых скорость потока меняет знак в зависимости от угла раствора.

Ключевые слова: задача Джеффри-Гамеля, плоский диффузор

Evolution of motions of stationary incompressible fluid in a plane diffuser

For the classical formulation of the Jeffrey-Hamel problem, the evolution of the main single-mode (with a constant flow rate solution depending on the angle of the diffuser) steady flow of a viscous incompressible fluid in a flat diffuser is studied. The transition of the main single-mode flow, at a fixed value of the angle of the diffuser, to the multimode mode (in which the velocity of flow rate changes sign with respect to the angle of the diffuser) with a change in the Reynolds number is shown.

Keywords: Jeffrey-Hamel problem, viscous incompressible fluid, flat diffuser

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538, 17-08-00742 и 18-01-00812), а также в рамках государственного задания АААА-А17-117021310387-0.

Кумакшев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., снс, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Sergey Kumakshev (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Рассмотрим классическую задачу Джеффри-Гамеля в случае диффузорного течения [1-3]. Жидкость имеет плотность ρ и динамическую вязкость μ; ее плоское движение происходит в области $\Omega = \{(r, \theta) : r > 0, |\theta| < \beta\}$, где r, θ — полярные координаты, β — угол полураствора ($0 < \beta \leqslant \pi$). На стенках диффузора $r > 0$, $\theta = \pm\beta$ выполняются условия прилипания, а при $r = 0$ течение имеет особенность типа источник постоянной мощности $Q < 0$. Система допускает два безразмерных параметра: угол раствора 2β и число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho Q/\mu$ ($\mathrm{Re} < 0$), что недостаточно для полного обезразмеривания уравнений движения [3-7]. Имеется автомодельное решение, для которого поле скоростей радиально

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(\theta), \quad v_\theta \equiv 0 \tag{1}$$

и автоматически удовлетворяет условию несжимаемости для произвольной гладкой функции $V(\theta)$. Компоненты тензора скоростей деформаций v и напряжений σ равны

$$\begin{gathered} v_{rr} = -v_{\theta\theta} = \frac{Q}{r^2}V(\theta), \quad v_{r\theta} = -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta); \\ \sigma_{rr;\theta\theta} = -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2\mathrm{Re}}V(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2}{r^2\mathrm{Re}}V'(\theta). \end{gathered} \tag{2}$$

Величины (1), (2) определяются посредством неизвестных функций профиля скорости V и давления p, для которых имеют место соотношения (следствие уравнений Навье-Стокса [3])

$$V'' + 4V - \mathrm{Re}V^2 = C = \mathrm{const}; \quad V(\pm\beta) = 0, \qquad \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta)d\theta = 1 \tag{3}$$

На безразмерную функцию $V(\theta)$ налагаются дополнительные требования, вытекающие из локального условия прилипания жидкости на границе и интегрального условия постоянства расхода (истока).

Требуется определить неизвестные $V(\theta)$ и $C = V''(\pm\beta)$ для произвольных значений $\mathrm{Re} < 0$ и $0 < \beta \leqslant \pi$, что представляет весьма трудную аналитическую и вычислительную проблему. Неявное решение многомерной нелинейной краевой задачи посредством эллиптических функций на основе первого интеграла уравнения (3) не позволяет проводить эффективные высокоточные расчеты в достаточно широкой области параметров. Используемые в научной литературе подходы (например [8, 9]) связаны, как правило, с игнорированием интегрального условия в (3) и фиксацией значения $V(0) = V_0$. Это существенно искажает смысл и постановку классической задачи Джеффри-Гамеля [1-7]. Полученная аналитически система трансцендентных уравнений относительно трех неизвестных постоянных интегрирования при решении вызывает принципиальные вычислительные трудности.

Эффективное высокоточное решение нелинейной краевой задачи (3) проводится с помощью численно-аналитического метода [10], основанного на модифицированном алгоритме Ньютона и процедуре продолжения по параметрам. Для удобства расчетов исходная краевая задача записывается

в терминах нормированных профиля скорости y, аргумента x, неизвестных параметров γ, λ и существенных известных параметров a, b

$$\begin{gathered} y(x) = 2\beta V(\theta), \quad x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\theta}{\beta} + 1\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ a = 4\beta, \quad b = 2\beta \mathrm{Re}, \quad \lambda = 8\beta^3 C, \quad \gamma = y'(0) \end{gathered} \tag{4}$$

Интегральное условие в (3) учитывается посредством неизвестной функции $z(x)$, характеризующей исток. В результате этих преобразований получается задача Коши для y, z с неизвестными γ, λ, нахождение которых осуществляется учетом конечных условий

$$y'' + a^2 y - by^2 = \lambda, z' = y - 1, y'(0) = \gamma, y(0) = z(0) = y(1) = z(1) = 0 \tag{5}$$

Требуется найти параметры γ, λ как функций известных величин a, b. При подстановке найденных величин $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ (a — фиксированно) искомая функция y получается численным интегрированием задачи Коши (5).

В результате расчетов проведен анализ сложной картины бифуркации течений, происходящих на сравнительно небольшом интервале $0 \geqslant b \geqslant -25$ ($0 \geqslant \mathrm{Re} \geqslant -72$ для $\beta = 10°$). На его основе можно исследовать механизм перестройки течений при изменении параметра b, т.е. числа Re, на неограниченном полуинтервале $b < 0$ и для произвольных величин угла раствора $0 < 2\beta \leqslant 2\pi$.

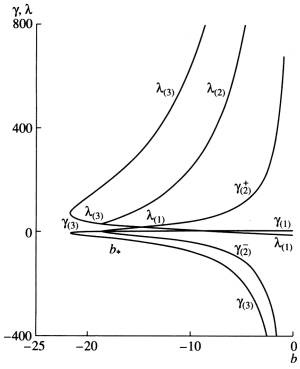


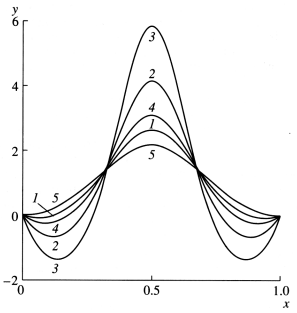
Рис. 5.1: Кривые зависимости $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ и точки бифуркации b_*, b^* для $\beta = 10°$ ($\pi/18$), отвечающие течениям: основному одномодовому $(\gamma_{(1)}, \lambda_{(1)})$, двухмодовым ($\gamma^{\pm}_{(2)}, \lambda_{(2)}$) и трехмодовым $(\gamma_{(3)}, \lambda_{(3)})$.

Литература

1. *Jeffery G.B.* The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag., **29**:172 (1915), 455-465

2. *Hamel G.* Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten // Jahres.- ber. Deutsch. Math. Ver., **25** (1917), 34-60.

3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч.2. — М.: Физматгиз, 1963.



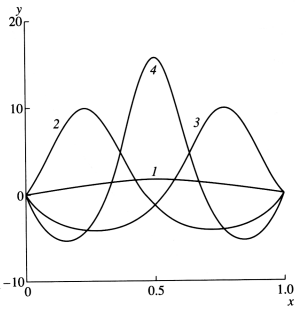


Рис. 5.2: Слева: профили скорости трехмодовых течений: кривые 1, 2 для $b = -21$, кривые 3, 4 для $b = b_*$, b^* соответственно; кривая 5 - вырожденное одномодовое течение для $b = b_*$. Справа: профили скорости одномодового (1), двух двухмодовых (2, 3) и трехмодового (4) течений для $b = -10$.

4. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Докл. РАН, **396**:4 (2004), 480-484.

5. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ, 3 (2005), 25-36.

6. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре// Докл. РАН, **399**:5 (2004), 620-624.

7. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А.* Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре// ПММ, **72**:3 (2008), 431-441.

8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

9. *Millsaps K., Pohlhausen K.* Thermal distributions in Jeffery-Hamel flows between nonparallel plane walls // J. Aeronaut. Sci., **2**:3 (1953), 187-196.

10. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ, **66**:5 (2002), 723-741.

МНОГОКРАТНОЕ НАЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ. АДДИТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В.Ан. Левин, К.М. Зингерман, А.В. Вершинин, Д.А. Коновалов

v.a.levin@mail.ru

УДК 539.3

Предложен подход к анализу напряженно-деформированного состояния и расчету остаточных напряжений в изделии аддитивного производства, изготовленного методом селективного лазерного спекания, на основе теории многократного наложения конечных деформаций. Сформулирована постановка задачи в рамках нелинейной термоупругости, предложен подход к ее решению на основе методов конечных и спектральных элементов. Выполнено сравнение с результатами натурного эксперимента, в котором для оценки остаточных напряжений был сделан надрез изделия аддитивного производства после его изготовления. На основе выполненных расчетов дана оценка нелинейных эффектов, возникающих при учете многократного наложения конечных деформаций в процессе послойного наращивания изделия.

Ключевые слова: напряженно-деформированнное состояние, аддитивные технологии, наложение конечных деформаций, метод спектральных элементов

Repeated superposition of finite elastic deformations. Additive technologies

An approach to the analysis of the stress-strain state and the calculation of residual stresses in the product of additive manufacturing, produced by the method of selective laser sintering, based on the theory of multiple imposition of final deformations, is proposed. The problem is formulated in the framework of nonlinear thermoelasticity, an approach to its solution based on the methods of finite and spectral elements is proposed. A comparison is made with the results of a full-scale experiment, in which an estimation of the residual stresses was made by cutting an article of additive production after its manufacture. On the basis of the performed calculations, an estimation of nonlinear effects caused by the repeated imposition of finite deformations in the process of layer-by-layer building up of the product is given.

Keywords: stress-strain behavior, additive technologies, superimposed finite strains, spectral element method

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках исследовательского проекта № 19-38-70001.

Левин Владимир Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Levin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Зингерман Константин Моисеевич, д.ф.-м.н., профессор, Тверской государственный университет (Тверь, Россия); Konstantin Zingerman (Tver State University, Russia)

Вершинин Анатолий Викторович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anatoly Vershinin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Коновалов Дмитрий Андреевич, руководитель группы, ООО «Фидесис» (Москва, Россия); Dmitriy Konovalov (Fidesys Limited, Moscow, Russia)

В условиях новой промышленной революции (Индустрия 4.0), одной из основ которой стала цифровизация, во всех отраслях промышленности, в которых требуется решение наукоемких задач , стали происходить стремительные изменения в востребованности и способах использования научных результатов. Изменяется инструментарий, используемый при получении научных результатов.

Возникло понятие «цифровое средство производства»(ЦСП) — программный продукт, с помощью которого создается (проектируется) изделие. В частности, это промышленные пакеты для моделирования при проведении инженерного анализа изделия (CAE — Computer-aided engineering) на стадии проектирования и эксплуатации.

Наличие цифрового средства производства для инженерного прочностного анализа позволяет исследователю обойтись без решения систем дифференциальных уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями, а просто задав геометрию (CAD-модель), материал и нагрузки произвести расчет. Одной из новых наукоемких задач является моделирование технологических процессов и механических характеристик при использовании аддитивные технологии. В терминах механики дефформируемого твердого тела это решение задачи теории многократного наложения больших деформаций с учетом пластичности и температурных воздействий [1,2]. Для ее решения в промышленном полнофункциональном пакете Фидесис [3,4] данная теория была программно реализована. Это позволяет проводить моделирование без решения исследователем нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Было проведено решение задачи для которой есть результаты натурного эксперимента.

В соответствии с теорией многократного наложения конечных деформаций выделяются следующие состояния (конфигурации) для нового добавляемого слоя в процессе послойного наращивания изделия аддитивного производства: начальное недеформированное состояние слоя, промежуточное состояние, соответствующее моменту появления температурных деформаций под воздействием лазера в новом присоединяемом слое, и текущее состояние, когда новый слой соединился к остальной уже изготовленной частью изделия и произошло перераспределение конечных деформаций. Для уже изготовленной части изделия во время наращивания нового n-го слоя можно выделить следующие состояния (конфигурации): промежуточное $(n-1)$-е состояние с накопленными деформациями, в котором эта часть изделия находится в момент присоединения нагретого нового слоя к уже изготовленной части, и текущее (n-е) состояние в момент окончания перераспределения конечных деформаций и перехода к наращиванию следующего слоя. Постановка и решение задачи о наращивании очередного n-го слоя осуществляется в координатах $(n-1)$-го промежуточного состояния.

Описание процесса послойного наращивания изделий аддитивного производства с учетом конечных деформаций сводится к решению краевой задачи о наращивании n-го слоя, форма которого задана в момент спекания с остальным телом, в координатах $(n-1)$-го промежуточного состояния.

Для решения рассматриваемой краевой задачи применялся метод Галеркина [5]. Методы конечных [6] и спектральных элементов [7] использовались для дискретизации полученных интегральных уравнений. В рамках

полученной дискретной модели нелинейная система уравнений решается методом Ньютона [5] относительно неизвестного вектора дополнительных перемещений, непрерывного во всей области, включая границу между телом и спекаемым слоем.

Приведем описание натурного эксперимента, с которым проводилось сравнение при численном моделировании послойного наращивания изделия аддитивного производства [8]. Изделие в форме бруса размером (45мм x 6мм x 5мм) с вырезами печатается на цилиндрической платформе радиусом 50мм и высотой 20мм. После печати изделия медленно выполняется горизонтальный разрез в его верхней части. В результате накопленных остаточных напряжений в изделии происходит вертикальный изгиб верхней надрезанной части изделия. В процессе эксперимента [8] были измерены перемещения верхней грани изделия.

Численное моделирование проводилось в плоско-деформированном состоянии. При моделировании несколько слоев печати объединялись в один слой наращивания, к которому передавалось количество тепла, равное передаваемому лазером при печати всех слоев внутри слоя наращивания. Расчет распределения температуры в слое проводился путем решения нелинейного уравнения теплопроводности, поскольку механические и тепловые свойства материала зависят от температуры. После расчета распределения температуры в слое полученные температурные деформации использовались как начальные деформации при добавлении нового слоя наращивания.

Полученные при численном моделировании результаты хорошо согласуются с результатами натурного эксперимента, что подтверждает корректность предложенного в статье подхода к анализу напряженно-деформированного состояния и расчету остаточных напряжений в изделии аддитивного производства, изготовленного методом селективного лазерного спекания, на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

Литература

1. *Левин В.А.* Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. (С предисловием академика Л.И. Седова). — М.: Наука. Физматлит, 1999.

2. *Левин В.А.* Нелинейная вычислительная механика прочности Том 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. (Под ред. В.А. Левина). — М.: Физматлит, 2014.

3. Официальный сайт компании «Фидесис». https://cae-fidesys.com/

4. *Морозов Е.М., Левин В.А. Вершинин А.В.* Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — М.: URSS, 2015.

5. *Zienkievicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

6. *Hughes T.* The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, London, 1987.

7. *Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K. and Levin V.* The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. 2017, 1797561.

8. *Tripathy S., Chin C., London T., Ankalkhope U., Oancea V.* Process Modeling and Validation of Powder Bed Metal Additive Manufacturing // NAFEMS World Congress, 2017.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

А.М. Локощенко, Л.В. Фомин, Ю.Г. Басалов, В.С. Агабабян

loko@imec.msu.ru

УДК 379.376

Рассмотрено моделирование результатов испытаний металлов в условиях ползучести при нестационарном сложном напряженном состоянии. В качестве примера рассмотрены экспериментальные данные, полученные группой японских ученых при испытаниях трубчатых образцов из нержавеющей стали при температуре 650°C. В приведенной статье представлены результаты испытаний при четырех различных программах нагружения, которые представляют собой различные комбинации кусочно-постоянных зависимостей касательного и нормального напряжений от времени. Проведено моделирование представленных данных с помощью теории упрочнения и теория течения. Показано преимущество используемых теорий по сравнению с другими известными теориями.

Ключевые слова: ползучесть металлов, эксперименты, нестационарное сложное напряженное состояние, моделирование, теория упрочнения, теория течения

Simulation creep of metals under non-stationary complex stress state

The simulation of metal testing results under creep conditions at non-stationary complex stress state is considered. As an example, the experimental data obtained by a group of Japanese scientists during testing of stainless steel tubular samples at a temperature of 650°C are considered. In the given article presents the results of experiments at four different loading programs that represent various combinations of piecewise-constant dependency of shear and normal stresses with time. The simulation of the presented data using the theory of hardening and flow theory is carried out. The advantage of the used theories in comparison with other known theories is shown.

Keywords: metal creep, experiments, non-stationary complex stress state, simulation, hardening theory, flow theory

---

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

Локощенко Александр Михайлович, д.ф.-м.н., проф., Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Lokoshchenko (Research institute of mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Фомин Леонид Викторович, к.ф.-м.н., науч. сотр., Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Leonid Fomin (Research institute of mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Басалов Юрий Генрихович, вед. инж., Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Basalov Yuri (Research institute of mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Агабабян Вардан Самвелович, Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Agababyan Vardan (Research institute of mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Введение. Проведение испытаний на высокотемпературную ползучесть связано с большими трудностями, поэтому такие испытания, тем более при переменных напряжениях, представляют большой интерес. В данной статье рассматриваются экспериментальные данные, полученные группой японских исследователей [1]. Эти данные получены на трубчатых образцах из нержавеющей стали 304, испытанных на ползучесть при температуре 650°C в условиях кусочно-постоянных зависимостей касательного τ и нормального σ напряжений от времени. Проведено описание полученных результатов с помощью различных моделей представляют большой интерес.

1. Результаты испытаний.

В данных испытаниях скачкообразное изменение величин τ и σ осуществлялось при kt_0 час ($k = 0, 1, ..., 10$, час), при этом испытания представляют собой последовательные 5 циклов по $2t_0 = 16$ час. В процессе всех испытаний интенсивность напряжений $\sigma_u = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ сохраняла постоянное значение: $\sigma_u = \sigma_0 = 137.3$ МПа.

В [1] представлены результаты зависимостей осевой $p(t)$ и сдвиговой $\gamma^c(t)$ деформаций ползучести от времени , при этом интенсивность деформаций ползучести равна

$$p_u(t) = \sqrt{\left(p_z(t)\right)^2 + \left(\Gamma(t)\right)^2}, \quad \Gamma(t) = \frac{\gamma^c(t)}{\sqrt{3}}.$$

В состоянии разгрузки осевая и сдвиговая деформации ползучести практически сохраняют свои значения. В четвертой программе нагружения образцы находятся только при знакопеременном кручении (осевое напряжение отсутствует), при этом кривые сдвиговой деформации на всех циклах нагружения практически совпадают. Отсюда следует, что поврежденность материала, обычно накапливающуюся при испытаниях такого типа, в данном случае можно не учитывать.

2. Моделирование полученных результатов в [1-2].

В [1], кроме экспериментальных кривых ползучести, приведены теоретические кривые, соответствующие различным теориям. Стандартная теория старения рассматривается в виде обобщения уравнения Бейли-Нортона на случай сложного напряженного состояния (модель №1). В модифицированной теории старения дополнительно учитывается изменение знака касательного напряжения (модель №2). В теории кинематического упрочнения используется подход Н.Н. Малинина и Г.М. Хажинского [3] с введением дополнительных гипотез (модель №3). В теории смешанного упрочнения используются основные понятия физики твердого тела (теория дислокаций и др.) (модель №4). При этом в первой и второй указанных моделях использованы по 3 материальные константы, в третьей модели – 5 материальных констант и 1 материальная функция, в четвертой модели – 6 констант и 1 материальная функция.

В [2] приведены результаты моделирования экспериментальных данных [1] с помощью варианта уравнений нестационарной ползучести, предложенного Ю.Г. Коротких и развитого в работах его учеников (модель №5). Во всех рассмотренных моделях использовано большое количество материальных констант.

3. Моделирование результатов испытаний [1] с помощью теории упрочнения (модель №6).

В 1948 г. Работнов предложил простое уравнение неустановившейся ползучести при осевом растяжении [4]:

$$p^{\alpha}\dot{p} = f(\sigma), \;\; 0 < \alpha < 1.$$

Обобщим естественным образом это уравнение на сложное напряженное состояние: $p_u^{\alpha}\dot{p}_u = f(\sigma_u)$, $\sigma_u = \sigma_0 = 137.3$МПа, $f(\sigma_0) = B\sigma_0^n = D_1$, $\dot{p}_u = D_1/p_u^{\alpha}$.

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени t; σ_u, p_u и $\dot{p}_u$ обозначают интенсивности напряжений, деформаций ползучести и скоростей деформаций ползучести соответственно. Примем гипотезу, согласно которой компоненты девиаторов напряжений s_{ij} и скоростей деформаций ползучести несжимаемого материала $\dot{p}_{ij}$ пропорциональны:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2}\cdot\frac{f\,(\sigma_u)}{p_u^{\alpha}}\cdot\frac{s_{ij}}{\sigma_u} = \frac{3}{2}\cdot\frac{D_1}{p_u^{\alpha}}\cdot\frac{s_{ij}}{\sigma_0} = \frac{3}{2}\cdot\frac{D_1}{\left(p_z^2+\Gamma^2\right)^{\alpha/2}}\cdot\frac{s_{ij}}{\sigma_0}, \qquad (1)$$

(см. например, [5, 6]).

В рассматриваемых испытаниях деформация ползучести после разгрузки составляет всего несколько процентов по отношению к накопленному перед разгрузкой уровню деформации ползучести, поэтому в этом случае уравнение (1) заменим на

$$\dot{p}_{ij} = 0 \qquad (2)$$

Сдвиговые и продольные деформации ползучести при $t = 0$ по определению равны нулю: $\Gamma(0) = 0$, $p_z(0) = 0$.

4. Теория течения (модель №7). Кроме теории упрочнения, для моделирования экспериментальных данных в [1] авторами настоящей статьи также рассматривается теория течения в следующем виде:

$$\frac{dp_u}{dt} = \beta R\sigma_0^m t^{(\beta-1)} = \beta D_2 t^{(\beta-1)}, \quad D_2 = R\sigma_0^m \quad (1<\beta<2)$$

5. Анализ полученных результатов и выводы. Проведено сопоставление результатов проведенного моделирования с результатами моделирования этих тех же экспериментальных данных, проведенными другими исследователями с использованием других теорий. В этих теориях использовано большое количество характеристик материала: от трех до девяти констант и дополнительно одной материальной функции. Показано преимущество рассмотренных авторами данной статьи теории упрочнения и теории течения всего с двумя материальными константами в каждой по сравнению с другими использованными теориями. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

Литература

1. *Охаси, Оно, Кавai.* Оценка определяющих уровней ползучести для нержавеющей стали 304 при повторяющемся многоосном нагружении // Теоретические основы. 1982. Том 104. №3. С. 1-8.

2. *И.А. Волков, Л.А. Игумнов, Д.А. Казаков, Д.Н. Шишулин, И.В. Сметанин.* Определяющие соотношения нестационарной ползучести при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности и пластичности, **78**:4 (2016), 436-451.

3. *N.N. Malinin, G.M. Khadjinsky.* Theory of creep with the anisotropic hardening // Journal of mechanical sciences, **14**:4 (1972), 235-246.

4. *Ю.Н. Работнов.* Расчёт деталей машин на ползучесть // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, № 6 (1948), 789-800.

5. *Ю.Н. Работнов* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

6. *А.М. Локощенко.* Ползучесть и длительная прочность металлов. - М.: Физматлит, 2016. 504 с. (Перевод: Lokoshchenko A.M. Creep and Long-Term Strength of Metals. CISP. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca. Raton. London. New York. 2018. 545 p.).

О ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Б.Я. Локшин, Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов

blokshin@imec.msu.ru, privalova@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

УДК 531.36

Исследуется вопрос, каким образом ведет себя оперенное тело на спуске в невозмущенной атмосфере. С помощью численного моделирования находятся возможные режимы спуска тяжёлого тела с четырьмя лопастями, углы установки которых, задаются в разных комбинациях их величин.

Ключевые слова: оперенное тело, режимы спуска, установочный угол лопасти

On spiral modes of motion of a body in resisting medium

The behavior of a heavy finned body descending in unperturbed atmosphere is studied. The body has four blades. Pitch angles are varied parameters of the model. Numerical simulation is used to find modes of the descent.

Keywords: finned body, modes of descent, pitch angle of a blade

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-01366), проект № 18-01-00538).

Локшин Борис Яковлевич, к.ф.-м.н., вед. науч.сотр., НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Boris Lokshin (Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Russia)

Окунев Юрий Михайлович, к.ф.-м.н., директор, НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Yuriy Okunev (Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Russia)

Привалова Ольга Георгиевна, к.ф.-м.н., ст.науч.сотр., НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Olga Privalova (Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Russia)

Самсонов Виталий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, глав.науч.сотр., НИИ механики МГУ (Москва, Россия); Vitaliy Samsonov (Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Russia)

В работе [1] показано, что одним из возможных установившихся режимов торможения в воздушной среде тела, имеющего форму «общего положения», (например, космические пришельцы – болиды) может быть режим винтового движения. В этом движении скорость центра масс тела, естественно, падает, но остаётся постоянным отношение ее к угловой скорости вращения тела. Этому режиму отвечает решение системы из пяти нелинейных алгебраических уравнений в математической модели движения тела. Однако задача формирований этих уравнений для тел, форма которых состоит из нескольких даже простых элементов с известными аэродинамическими характеристиками, весьма непроста. А говорить об их аналитическом исследовании и вовсе не приходится. Единственно возможным здесь представляется численное моделирование на ЭВМ.

В качестве примера рассмотрим движение тяжёлого тела-вертушки, состоящего из 4-х одинаковых малых плоских лопастей (рис. 1). Действие сре-

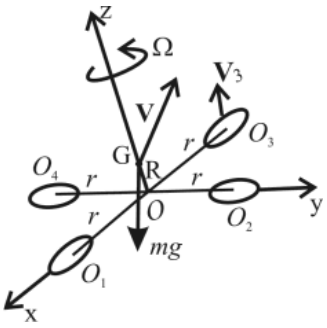


Рис. 5.1: Модель тела.

ды на отдельный элемент описывается достаточно просто. Однако каждая лопасть имеет свою скорость относительно среды, поэтому суммирование сил и их моментов относительно центра масс G приводит к громоздким выражениям. Численное интегрирование уравнений движения тела позволяет выявить те режимы его движения, которые обладают свойством асимптотической устойчивости (притягивающие).

В работах [2, 3] исследовался спуск осесимметричного тела, у которого лопасти были установлены на одинаковые углы поворота вокруг державок. Оказалось, что уже и такое тело (ротошют) может совершать как прямолинейный спуск по вертикали, так и «винтовое» движение, при котором его центр масс движется по винтовой линии (рис.2, кривые 1, 2).

В настоящем сообщении демонстрируются результаты исследования движение тела в случае, когда нарушается его симметрия вследствие того, что одна или две лопасти повернуты на разные углы.

Установлено, что при определенном попарном расположении лопастей (с перекосом) на теле возможны режимы планирования.

Показано, что изменение одного или двух установочных углов лопастей при нарушении симметрии приводит к движению центра масс тела на спуске по винтовой линии, у которой имеется «вторичный» винт с вертикальной

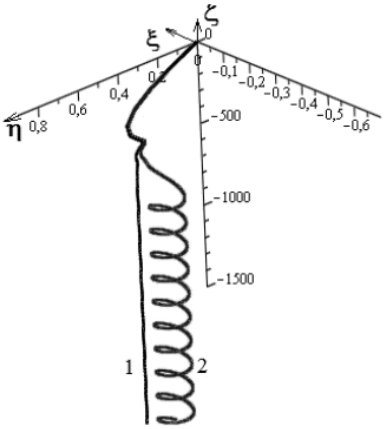


Рис. 5.2: Траектории центра масс осесимметричного тела на спуске.

осью (рис. 3а).

Обнаружено такое расположение лопастей, при котором вертикальный спуск неустойчив, а движение центра масс тела на спуске носит нерегулярный характер (рис. 3б).

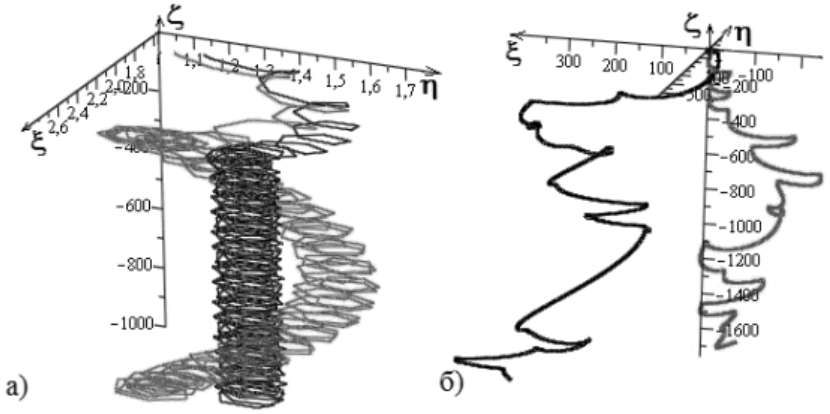


Рис. 5.3: Траектории центра масс асимметричного тела на спуске.

Литература

1. *Садовничий В.А., Локшин Б.Я., Окунев Ю.М., Самсонов В.А.* К вопросу о моделировании полета болидов // Шестой международной аэрокосмический конгресс IAC-09. Серия пленарные и избранные доклады. — Москва: Перо, 2010. — 135-148.

2. *Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.* О движении асимметричного оперенного тела //Сб. трудов "Фундаментальные основы баллистического проектирования": VI Всероссийская научно-техническая конференция. — СПб.: Изд-во БГТУ, 2018. — 34-35.

3. *Локшин Б.Я., Привалова О.Г., Самсонов В.А.* К динамике ротошюта. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2018.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ПОЛЕТА ТЕЛ С РАСЧЕТОМ СОУДАРЕНИЙ

В.Т. Лукашенко, Ф.А. Максимов

lukashenko-vt@yandex.ru

УДК 519.6, 523.68

Представлен метод моделировании динамики системы тел, позволяющий расчитывать соударения между телами с заданным коэффициентом восстановления удара. При помощи данного метода рассмотрена задача о последовательных соударениях двух метеорных тел, летящих со сверхзвуковой скоростью в атмосфере и первоначально расположенных на прямой вдоль направления полета. Показано, что при абсолютно упругих соударениях тела будут совершать периодические колебания, при неупругих соударениях конфигурация будет постепенно сводится к полету тел непосредственно друг за другом.

Ключевые слова: моделирование, динамика, система тел, метеорное тело, соударения, сверхзвук, полет

Mathematical model for the flight of bodies with the calculation of collisions

A method for modeling the dynamics for a system of bodies is presented, that allows to simulate collisions between bodies with a given coefficient of restitution. The problem of successive collisions between two meteoroid bodies, flying at supersonic speeds in the atmosphere and initially located on a straight line along the flight direction, is considered with the help of this method. It is shown that bodies perform periodic oscillations in the case of absolutely elastic collisions, and configuration will gradually evolve to the flight of the bodies directly one after another in the case of inelastic collisions.

Keywords: modeling, dynamics, system of bodies, meteoroid, collisions, supersonic, flight

Лукашенко Владислав Тарасович, младший науч. сотр. ИАП РАН (Москва, Россия); Lukashenko Vladislav (Institute for Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russia)

Максимов Федор Александрович, д-р техн. наук, ведущий науч. сотр. ИАП РАН (Москва, Россия); Maksimov Fedor (Institute for Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russia)

Моделирование динамики группы близкорасположенных тел в атмосфере представляет научный и практический интерес. При этом необходимо учитывать существенную интерференцию между телами, которая часто приводит к перестроению системы тел и отделению единичных тел от группы. Достаточно широкий ряд подобных задач возникает, в частности, при исследовании распада метеорного тела. В [1] было показано, что при расположении одного из образующихся осколков метеорного тела в следе другого - лидирующего тела, может происходить захват отстающего тела в след с дальнейшим столкновением между телами, однако дальнейшая динамика тел не рассматривалась. В работе [2] был представлен метод численного расчета обтекания системы из тел различных форм и размеров, на его базе авторами был разработан метод моделирования динамики системы тел [3]. В представленной работе приводится дополнение данного метода алгоритмом для расчета произвольных соударений между телами, и при помощи данного подхода проведено исследование задачи о последовательных соударениях двух метеорных тел расположенных на линии вдоль направления движения.

При заданной конфигурации системы из n тел решается задача обтекания при помощи многосеточного метода [2] с построением отдельных сеток вокруг каждого тела. После этого тела в системе перемещаются в соответствии с имеющимися скоростями отдельных тел и действующими на них силами за малый промежуток времени Δt, на который накладывается ограничение на максимальное возможное перемещение тел в системе. Затем происходит перерасчет картины обтекания, и подобным итерационным методом прослеживается динамика системы на больших временах [3].

Между i-ым и j-ым телом в системе будет происходить соударение при переходе от момента времени t к $t + \Delta t$, когда тела подходят достаточно близко друг другу. Для тел сферической (трехмерная задача) или цилиндрической (двумерная задача) форм это условие запишется в виде:

$$\sqrt{\sum_k \left(X_{ik} - X_{jk}\right)^2} < R_i + R_j + C$$

где X_{ik}, X_{jk} – соответствующие координаты центров тел; R_i, R_j – радиусы тел; C – расчетная константа, выбираемая из условия, чтобы сетки вокруг обтекаемых тел [2] не накладывались друг на друга.

Формулы для изменения проекций скоростей V_{li} и V_{lj} на линию l, соединяющий центры соударяющихся тел, запишутся как

$$\Delta V_i = \frac{(1+k)\, m_j \left(V_{lj} - V_{li}\right)}{m_i + m_j}, \quad \Delta V_j = \frac{(1+k)\, m_i \left(V_{li} - V_{lj}\right)}{m_i + m_j}$$

где m_i, m_j - массы соответствующих тел; k – коэффициент восстановления удара. При $k = 1$ между телами происходит абсолютно упругое соударение, при $0 < k < 1$ – неупругое соударение, а при $k = 0$ – столкновение с обменом импульсом согласно закону абсолютно неупругого удара.

Рассмотрим модельную задачу, когда на высоте 10 км имеется два железных цилиндрических тела радиусом $R = 2.7$ см (и, соответственно, массой $m = 1$ кг), изначально расположенных на линии вдоль направления

полета и летящих со скоростью 2000 км/с (рис. 1а). Параметры атмосферы задавались из таблицы стандартной атмосферы ГОСТ 4401-81. Лидирующее тело имеет значительно большее аэродинамическое сопротивление, в следствие этого отстающее тело будет постепенно догонять его (рис. 1б), что в итоге приводит к соударению между телами (рис. 1в). При столкновении часть импульса отстающего тела передастся лидирующему, и в результате тела разлетятся в продольном направлении (рис. 1г). Из-за разности в аэродинамическом сопротивлении отстающее тело со временем наберет скорость достаточную для того, чтобы вновь догнать и столкнуться с лидирующем телом. Таким образом, тела будут совершать периодические колебания, амплитуда которых будет меняться в зависимости от коэффициента восстановления удара k.

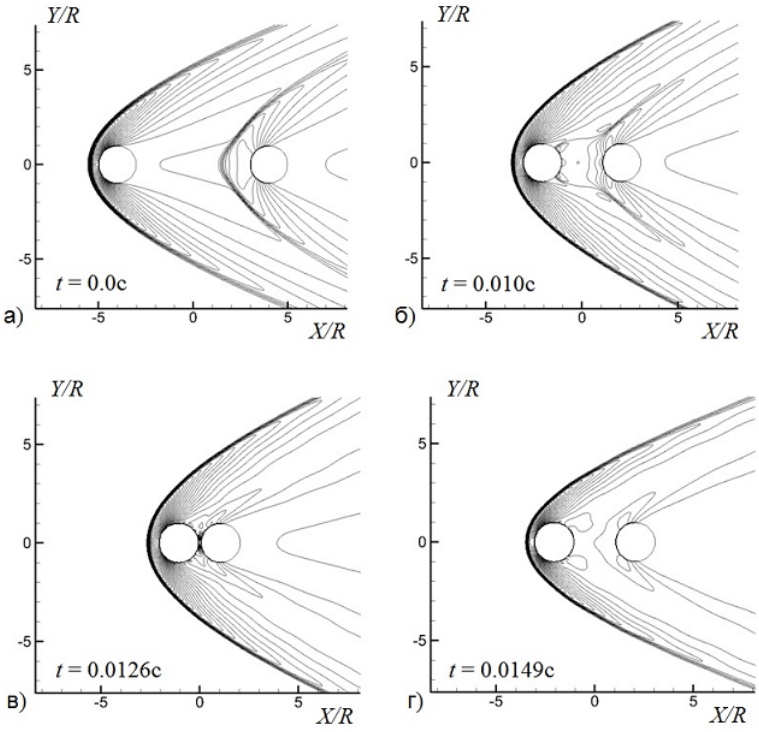


Рис. 5.1: Картины изолиний давления в разные моменты при полете двух метеорных тел расположенных вдоль линии направления движения.

Расчеты показали, что при использовании модели абсолютного удара между телами ($k = 1$) наблюдается стремление амплитуды колебаний к некоторому равновесному значению, которое при заданных условиях оказывается в пределах 6.5-7 радиусов тел. При меньших значениях коэффициента восстановления удара ($0 \leqslant k < 1$) наблюдается постепенное затухание колебаний, и в итоге конфигурация сводится к полету тел непосредственно друг за другом. При этом полет тел друг за другом оказывается неустойчи-

вым к малым колебаниям, и возникающие погрешности в вычислениях со временем приводят к отклонению тел от первоначальной траектории, проскальзыванию тел относительно друг друга и в дальнейшем – к разлету тел в поперечном направлении.

Литература

1. *Барри Н.Г.* Аэродинамика фрагментов метеорного тела. Эффект коллимации // Астрономический вестник, **44**:1 (2010), 59-64.

2. *Максимов Ф.А.* Сверхзвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование, **5**:6 (2013), 969-980.

3. *Лукашенко В.Т., Максимов Ф.А.* Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения // Инженерный журнал: наука и инновации, **9**(69) (2017), 1-14.

ОБ АНОМАЛЬНЫХ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ КОМПОЗИТОВ С ВЯЗКОУПРУГИМИ ПОКРЫТИЯМИ

С.А. Лурье, С.В. Маковский, Е.Д. Лыкосова

salurie@mail.ru

УДК 539.3

Доказано, что композиты с включениями, имеющими тонкие вязкоупругие покрытия, могут проявлять аномально высокие демпфирующие свойства, многократно превышающие демпфирующие характеристики вязкоупругого слоя. При этом композиты сохраняют высокие упругие характеристики. В композитах с развитой микроструктурой демпфирующие свойства могут возрастать.

Ключевые слова: композитные материалы, метод трёх фаз Эшелби, модуль потерь

On abnormal damping properties of composites with viscoelastic coatings

It is proved that composites with inclusions that have thin viscoelastic coatings can exhibit anomalously high damping properties, many times exceeding the damping characteristics of the viscoelastic layer. In this case, composites retain high elastic characteristics. In composites with a developed microstructure, the damping properties may be increased.

Keywords: composite materials, Eshelby's three-phase method, loss modulus

Лурье Сергей Альбертович, д.т.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Lurie (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Маковский Сергей Владимирович, аспирант, Институт прикладной механики РАН (Москва, Россия); Sergey Makovskij (Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Лыкосова Елена Дмитриевна, н.с., Институт прикладной механики РАН (Москва, Россия); Elena Lykosova (Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ В ТИТАНОВЫХ ОБРАЗЦАХ С И БЕЗ ВЛИЯНИЯ ВОДОРОДНОГО ОХРУПЧИВАНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

А.М. Мамонов, В.В. Терауд
ldrnww@gmail.com

УДК 517.518

Проведены экспериментальные испытания плоских титановых образцов (в состоянии поставки или с дополнительно внедренным водородом) при температуре 450C, растягиваемых с постоянным усилием вплоть до разрушения в условиях ползучести. В работе исследуется локализация деформаций (образование шейки) в образце в процессе высокотемпературной ползучести и влияние избыточного содержания водорода в кристаллической решетке на особенности формирования шейки.

Ключевые слова: ползучесть, эксперимент, локализация деформаций, титан, водород

Experimental investigation of the localization of deformations in titanium samples with and without the influence of hydrogen embrittlement during creep

Experimental tests of flat titanium specimen (in initial condition or with additionally introduced hydrogen) were carried out at a temperature of 450C, stretched with a constant force up to fracture under creep conditions. The work examines the localization of deformations (formation of the neck) in the sample during high-temperature creep and the effect of excessive hydrogen content in the crystal lattice on the features of the formation of the neck.

Keywords: creep, experiment, strain localization, titanium, hydrogenation

Известно, что наводораживание титановых материалов широко используется в промышленности для снижения трудозатрат при деформировании заготовок. Вопросу образования локализации деформаций посвящено множество работ, однако, во-первых, без детального изучения шейки, а во-вторых, без влияния водорода.

В данном исследовании использовались титановые образцы ВТ-6, изготовленные из прокатного листа, в исходном состоянии и с дополнительно внедренном водородом. Наводораживание производилось термодиффузионным способом в аппаратуре Сивертса до содержания водорода C_H 0.1%, 0.28% и 0.6% по массе образца. Растяжение образцов производилось при

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-4321.2018.1.

Мамонов Андрей Михайлович, д.ф.-м.н., проф., Московский Авиационный Институт (Москва, Россия); Mamonov Andrey (Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia)

Терауд Валентин Викторович, к.т.н., НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Walentin Teraud (Lomonosov Moscow State University, Institut of Mechanics, Moscow, Russia)

постоянной температуре 450C до разрушения с длительностью испытания от нескольких часов до четырех недель.

Из экспериментов получены времена до разрушения, времена локализации деформаций, распределения напряжений по продольной координате образца во времени, формоизменение шейки в процессе эволюции и др. Было проведено металлографическое исследование и исследован фазовый состав. Выяснено влияние водорода на длительную прочность, механические характеристики и фазовый состав.

В результате проведенных экспериментов можно видеть, что водород существенно снижает время до разрушения тем больше, чем концентрация водорода в образце выше. Под действием избыточного содержания водорода в кристаллической решетке относительное время локализации так же существенно сокращается. Время локализации для $C_H = 0\%$ в среднем по трем экспериментам составляет 83% от времени до разрушения, для эксперимента с $C_H = 0.1\%$ составляет 48%, а для эксперимента с $C_H = 0.28\%$ составило всего 36%.

Таким образом, водород, внедренный в структуру титанового сплава ВТ-6, значительно снижает время однородного деформирования и приводит к крайне раннему образованию локализации деформаций, при котором деформирование происходит в основном только в зоне локализации, что при обработки титанового сплава с введенным водородом для снижения усилий формоизменения, может приводить к сильно неравномерному распределению деформаций по материалу.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ РОЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФАКТОРОВ В ПРОЦЕССАХ ФОРМИРОВАНИЯ ТОРНАДО

С.А. Маслов, В.Л. Натяганов

sergm90@mail.ru, tenzor-home@yandex.ru

УДК 532.5,537.3,551.5

Рассматриваются триггерные факторы электромагнитной природы и анализируется их относительная роль в процессах формирования торнадо из грозовых облаков. Показано, что основными факторами являются сильные возмущения атмосферного электрического поля и эффект гигантской диэлектрической проницаемости суспензии сферических капель с поверхностным зарядом двойного электрического слоя при перезарядке грозового облака из дипольного в трипольное.

Ключевые слова: атмосферное электрическое поле, грозовое облако, двойной электрический слой, торнадо, эффект гигантской диэлектрической проницаемости

Маслов Сергей Алексеевич, младший научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sergey Maslov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Натяганов Владимир Леонидович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Natyaganov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Inverse problems of identifying electromagnetic factors role in tornado formation processes

The report considers trigger factors with electromagnetic nature and analyzes their relative role in the processes of forming tornadoes from thunderclouds. It is shown that the main factors are strong atmospheric electric field perturbations and giant dielectric permittivity effect of spherical drops suspension with surface double electric layer charge during the thundercloud recharge from dipole to tripole one.

Keywords: atmospheric electric field, thundercloud, double electric layer, tornado, giant dielectric permittivity effect

На основе анализа многочисленных натурных наблюдений [1] за спецификой формирования торнадо из нижней части обычно вращающихся грозовых облаков или торнадо-циклонов (ТЦ) в [2, 3] был сделан вывод о важной роли электромагнитных факторов в процессах генерации этих мощных атмосферных вихрей. К основным таким факторам относятся топологический вид и величина возмущений атмосферного электрического поля (АЭП) и малоизвестный эффект гигантской диэлектрической проницаемости (ЭГДП) суспензии сферических капель с поверхностным зарядом тонкого двойного электрического слоя (ДЭС).

Наиболее явно ЭГДП проявляется внизу центральной части грозового облака при его перезарядке из дипольного в трипольное, что приводит к резкому понижению электрогидродинамического (ЭГД) давления и способствует образованию воронки торнадо. Процесс перезарядки грозового облака описывается предложенной в [3] двухпараметрической формулой

$$\hat{E}(\hat{r}) = \frac{E_z(\hat{r})}{E_0} = \frac{(4\hat{r})^4 + \beta}{(4\hat{r})^4 + 1}\left[N\exp(-\hat{r}^2) - 1\right], \tag{1}$$

где $E_0 \sim 100$ В/м — напряженность поля ясной погоды, $\hat{r}$ — безразмерное расстояние до оси облака, параметр β отвечает за топологию, а большой параметр $N \gg 1$ — за величину возмущений АЭП.

Специфика процесса формирования воронки торнадо из ТЦ описывается системой ЭГД уравнений [4, 5]

$$\begin{cases} \rho\left(\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p_e + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho_e\mathbf{E}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \\ p_e = p - \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E^2/2, \quad \mathrm{div}\left(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\right) = \rho_e, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где приняты стандартные для гидродинамики обозначения, а через ρ_e, p_e, ε, $\mathbf{E}$ обозначены плотность электрического заряда, ЭГД-давление, диэлектрическая проницаемость и напряженность электрического поля соответственно.

Если в формулу для ЭГД-давления в (2) подставить возмущения АЭП из (1) при $N \sim 10^3$–10^4, а для ε использовать выражение эффективного значения ε_e с учетом ЭГДП

$$\varepsilon_e \approx \varepsilon_0 \frac{c\left(\varepsilon_\Sigma - 1\right)\overline{[\mathbf{u_\Sigma} \times \mathbf{B_\Sigma}]}}{\nabla\langle\varphi^*\rangle - c\overline{\nabla\langle\varphi\rangle} + c\overline{\nabla\langle\varphi_1\rangle}} \sim c(\varepsilon_\Sigma - 1)f \cdot \frac{a}{d} \gg 1, \tag{3}$$

то внизу ТЦ давление упадет на 3–7% от атмосферного, что и является причиной реализации неустойчивости Рэлея-Тейлора в виде струйного низового прорыва [3] или воронки торнадо. В формуле (3) использованы следующие обозначения: a — размерный радиус капель, c — объемная концентрация капель в грозовом облаке, d — толщина тонкого ($d \ll a$) ДЭС на поверхности капель, $\mathbf{B}$ — индукция генерируемого магнитного поля, f — достаточно громоздкое выражение, зависящее от многих параметров задачи (вязкости и электропроводности среды внутри и вне капель, заряда ДЭС, напряженности электрического поля и т.д.), нижний индекс Σ соответствует поверхностным значениям величин, а верхняя черта над членами в знаменателе означает осреднение градиентов электрического потенциала по объему единичного шара.

Теоретическое обоснование ЭГДП основано на электромагнитном обобщении [6] задачи об электрокапиллярном дрейфе [7] проводящей капли с тонким ДЭС на ее поверхности в другой вязкой жидкости при наличии внешнего электрического поля. При этом система (2) рассматривается в приближении Стокса с добавлением уравнения Лапласа для электрических потенциалов φ и φ_1 вне и внутри капли.

В результате решения [6] в классе обобщенных функций такой обобщенной задачи В.Г. Левича [7] методом осреднения по ансамблю возможных конфигураций выводятся уравнения для однородной суспензии таких капель с объемной концентрацией $c < 0,2$. Полученная система осредненных ЭГД-уравнений в сферических координатах решается в трех областях пространства: внутри пробной (центральной) капли при $R < 1$, в промежуточном сферическом слое $1 < R < 2$ обтекающей жидкости и при $R > 2$ во внешней области эффективной среды, где находятся центры других капель, воздействие которых на течение моделируется набором мультиполей.

Для расчета ε_e по формуле (3) с учетом ЭГДП наиболее важным является уравнение для электрического потенциала

$$\Delta\langle\varphi\rangle = 3c\beta\left[\frac{dg}{dR} + g(2)\delta(R-2)\right]\cos\theta, \tag{4}$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения, а $g(R)$ является бинарной коррелятивной функцией, терпящей разрыв типа одномерной δ-функции при $R = 2$.

Решения уравнения (4) в трех областях пространства имеют вид

$$R < 1 : \langle\varphi_1\rangle = \alpha_1 R\cos\theta + C_1, \quad 1 < R < 2 : \langle\varphi\rangle = \left(\alpha R + \frac{\beta}{R^2}\right)\cos\theta + C_2,$$

$$R > 2 : \langle\varphi^*\rangle = \left(\alpha^* R + \frac{\beta^*}{R^2} + 3c\frac{\beta}{R^2}\int_2^R R^2\left[g(R) - 1\right]dR\right)\cos\theta + C_3,$$

где постоянные $\alpha_1, \alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*$ (через которые в конечном итоге и выражается ε_e по формуле (3) с учетом ЭГДП) определяются из граничных условий для полной системы осредненных ЭГД-уравнений, а разность $|C_1 - C_2|$ задает скачок электрического потенциала поперек ДЭС.

Процедура вывода формулы (3) для ε_e аналогична расчету эффективной электропроводности суспензии капель с ДЭС [8] при их электрокапиллярном дрейфе во внешнем электрическом поле.

Важно отметить, что ЭГДП может проявлять себя вблизи подстилающей морской поверхности под центром грозового облака, где возмущения АЭП наиболее сильные, а концентрация микрокапель воды достаточно высокая за счет брызгообразования и обрушения волн. Следовательно, в этой области также падает эффективное давление, что может приводить к образованию каскада из брызг и пены над неустойчивым холмом приподнятой воды, движущегося вслед за облаком. В ряде случаев каскад формируется под торцом опускающейся воронки еще до ее касания с подстилающей поверхностью; этот факт был известен еще М.В. Ломоносову и А. Пуанкаре, а также описан в известной монографии Д.В. Наливкина [1].

Литература

1. *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. — Москва: Наука, 1969.

2. *Натяганов В.Л., Маслов С.А.* Ломоносов и загадки природного электричества. Часть 4. Электромагнитные механизмы формирования торнадоподобного смерча // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2 (2014), 31-37.

3. *Маслов С.А., Натяганов В.Л.* Влияние зарядовой структуры грозовых облаков на формирование торнадоподобных вихрей // Прикладная физика, 6 (2015), 16-20.

4. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики. — Москва: Наука, 1979.

5. *Саранин В.А.* Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. — Москва; Ижевск: РХД, 2009.

6. *Натяганов В.Л.* Электрокапиллярновихревая модель сферического вихря Хилла – Тейлора // ДАН, **381**:1 (2001), 50-52.

7. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. — Москва: ГФМЛ, 1959.

8. *Натяганов В.Л., Орешина И.В.* Электрогидродинамика монодисперсных эмульсий // Коллоидный журнал, **62**:1 (2000), 90-100.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА СКАЛЯРИЗАЦИИ

А.И. Матасов

alexander.matasov@gmail.com

УДК 531.01, 629.7.05

Предлагается новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров. В рамках этой формализации задача калибровки сводится к анализу некоторых специальных негладких вариационных задач. Связь решений этих задач обосновывает метод скаляризации.

Ключевые слова: калибровка блока ньютонометров, метод скаляризации, негладкие вариационные задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00054-а).

Матасов Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Alexander Matasov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Justification of the scalarization method

A new formalization for the accelerometer unit calibration problem is proposed. In the frame of this formalization the accelerometer unit calibration problem reduces to the analysis of special nonsmooth variational problems. The relationship of the solutions of these problems justifies the scalarization method.

Keywords: accelerometer unit calibration, scalarization method, nonsmooth variational problems

При использовании гарантирующего подхода к оцениванию в априорной постановке [1-3] задача калибровки блока ньютонометров [4] сводится к решению следующей негладкой вариационной задачи, в которой n означает произвольный вектор на единичной сфере S в $\mathbb{R}^3$, а интегрирование ведется по сфере.

Задача 1.

$$\inf_{\Phi,\Psi} \sigma \int \sum_{i=1}^{3} |\Phi_i(n)|\, dS + \mu \int \sum_{i=1}^{3} |\Psi_i(n)|\, dS$$

при условиях

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS = a, \qquad \Psi(n) = \hat{n}\, \Phi(n),$$

где $\hat{n}$ – кососимметрическая матрица, соответствующая вектору n, $\Phi, \Psi \colon S \to \mathbb{R}^3$, а $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц.

В задаче калибровки $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ – один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^{12}$ с единицей на ν-том месте (что соответствует оценке ошибок масштабных коэффициентов и систематических смещений блока ньютонометров) или $a = e^{(2)} + e^{(4)}$, $a = e^{(3)} + e^{(7)}$, $a = e^{(6)} + e^{(8)}$ (что соответствует оценке взаимных перекосов осей чувствительности ньютонометров). Известный коэффициент σ характеризует величину ошибки измерений показаний ньютонометров, а μ – неточность в знании углов ориентации блока.

Применение метода скаляризации математически соответствует введению дополнительной связи: $\Phi(n) = n\chi(n)$, где $\chi \colon S \to \mathbb{R}^1$. Тогда исходная вариационная задача принимает следующий упрощенный вид.

Задача 2.

$$\inf_{\chi} \sigma \int (\, |n_1| + |n_2| + |n_3|\,)\, |\chi(n)|\, dS$$

при условии

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes n\chi(n) \\ \chi(n) \end{pmatrix} dS = a. \tag{1}$$

Часто задачу 2 формулируют еще более упрощенно: величину $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ заменяют на ее оценку сверху $\sqrt{3}$.

Задача 3.

$$\inf_{\chi} \sqrt{3}\sigma \int |\chi(n)|\, dS \quad \text{при условии (1).}$$

Теорема 1. *Решения задач 2 и 3 совпадают и единственны.*

Теорема 2. *При* $\mu > (\sqrt{2}-1)\sigma$ *для всех рассматриваемых* a *соответствующие решения задачи 1 единственны и имеют вид* $\Phi(n) = n\chi(n)$, $\Psi(n) = 0$, *где* $\chi(n)$ *есть решение задачи 2.*

Литература

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования, **2**:5 (1964), 713-715.

2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ, **28**:1 (1964), 3-14.

3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

4. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. — М.: Изд-во МГУ, 2012.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

В.М. Мирсалимов

mir-vagif@mail.ru

На основе принципа равнопрочности и минимизации коэффициентов интенсивности напряжений проведен теоретический анализ по определению оптимального натяга для посадки упругих волокон в двоякопериодическую систему отверстий изотропного упругого связующего. Связующее композита ослаблено двоякопериодической системой прямолинейных трещин.

Предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения композита, армированного однонаправленными волокнами. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования составного тела (композита) в зависимости от механических и геометрических характеристик связующего и волокна. Найденный натяг обеспечивает повышение несущей способности композита.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович, д.ф.-м.н., профессор, Азербайджанский технический университет (Баку, Азербайджан)

ДИНАМО В ТОРЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Е.А. Михайлов, И.Н. Сибгатуллин
ea.mikhajlov@physics.msu.ru, ilias.sibgat@gmail.com

УДК 524.7-466

Описан процесс генерации магнитного поля в рамках модели динамо в торе, играющей важную роль при исследовании процессов, происходящих во внешних кольцах галактик и других астрофизических задачах. Кроме того, изучена возможность влияния магнитного поля на турбулентные движения среды, построены спектры для различных компонент скорости.

Ключевые слова: динамо, магнитное поле, турбулентность

Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings Some mathematical reasonings

The process of the magnetic field generation is described using torus dynamo model, which is quite important for studying processes, taking place in the outer rings of galaxies and other astrophysical problems. Also the possibility of the magnetic field influence on the turbulent motions of the medium, the spectra for the components of the velocity components.

Keywords: dynamo, magnetic field, turbulence

Генерация магнитных полей в различных астрофизических объектах (таких как галактики, звезды и т.д.) описывается с помощью механизма динамо [1]. Как правило, он основан на совместно действии альфа-эффекта и дифференциального вращения [2]. Эволюция крупномасштабного магнитного поля описывается с помощью уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера. Оно достаточно сложно для решения в явном виде, поэтому используются различные приближения.

Для нас представляет интерес исследование магнитных полей в таких объектах, как внешние кольца галактик. Ранее была показана принципиальная возможность существования в них магнитных полей [3]. Достаточно разумно использовать для их описания модель динамо в торе . Она использует предположение об осевой симметрии задачи, что позволяет решать уравнения для тороидальной компоненты магнитного поля и тороидальной части его векторного потенциала. Были получены характерные решения для магнитного поля, а также вычислено критическое значение динамочисла (динамо – пороговый эффект, и рост магнитного поля возможен лишь при определенном соотношении между параметрами). Продемонстрировано, что в разных случаях возможно существование магнитных полей как квадрупольной, так и дипольной симметрии [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-32-00124).

Михайлов Евгений Александрович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Evgeny Mikhailov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Сибгатуллин Ильяс Наилевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Ilias Sibgatullin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Магнитные поля также влияют на движение проводящей среды, поэтому важно было изучить, как меняется характер турбулентности под действием генерируемого магнитного поля. С этой целью решались уравнения Навье – Стокса с учетом лоренцевой силы, связанной с магнитным полем, описанным выше. Задача решалась численно с помощью спектральных методов. Показано, что спектр турбулентных движений заметно изменяется под действием магнитных полей [5].

Отметим, что предложенные модели могут быть использованы не только для внешних колец галактик, но и для других астрофизических объектов.

Литература

1. *Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // УФН, **184** (2014), 313-335.

2. *Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D.* Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // Astron. Astrophys, **494**:1 (2009), 21-32.

3. *Moss D., Mikhailov E., Silchenko O., Sokoloff D., Horellou C., Beck R.* Magnetic fields in ring galaxies // Astron. Astrophys, **592** (2016), A44.

4. *Михайлов Е.А.* Динамо в торе для описания магнитных полей во внешних кольцах галактик // Астрономический журнал, **94**:9 (2017), 741-748.

5. *Mikhailov E.A., Sibgatullin I.N.* Magnetic fields in the outer rings of galaxies and turbulent motions // Magnetohydrodynamics (2019), accepted.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ УПРАВЛЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЯ

В.М. Морозов, В.И. Каленова

moroz@imec.msu.ru, kalen@imec.msu.ru

УДК 629.7.052

Предлагается аналитический подход к исследованию некоторых задач механики и управления, описываемых линейными нестационарными системами определённого класса. Подход основан на приведении этих систем к стационарным системам. Предлагаемая методика позволила решить ряд задач управления движением космических аппаратов.

Ключевые слова: линейные нестационарные системы, системы с управлением и наблюдением, приводимость

Морозов Виктор Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Viktor Morozov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Каленова Вера Ильинична, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vera Kalenova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Some new classes of linear time-varying dynamic systems with control and measurements.

An analytical approach to the study of some control problems described by linear time-varying systems of a special class is proposed. The approach is based on transformation of these systems to time-invariant ones. The proposed method made it possible to solve a number of spacecraft motion control problems.

Keywords: linear time-varying systems, systems with control and measurements, transformability

Уравнения движения многих механических систем после линеаризации в окрестности некоторого программного движения можно представить в виде системы линейных нестационарных матричных дифференциальных уравнений как однородных, так и содержащих управление и измерения. Важным классом линейных нестационарных систем (ЛНС) являются приводимые системы. Понятие приводимой системы было впервые введено А.М. Ляпуновым в связи с задачей об устойчивости однородных ЛНС [1]. Авторами доклада это понятие было распространено на ЛНС с управлением и наблюдением и разработаны основы оригинальной теории приводимых многомерных ЛНС [2,3].

В докладе представлены новые классы приводимых ЛНС как однородных, так и содержащих управлени и измерения. ЛНС этих классов допускают их приведения путём конструктивного преобразования к стационарным системам большего порядка, чем исходная система. Класс приводимых однородных ЛНС тесно связан с задачей оптимального управления с квадратичным критерием качества [4].

Свойство приводимости открывает возможности для конструктивного анализа управляемости и наблюдаемости и разработки эффективных алгоритмов управления и оценивания, основанных на приведённых стационарных системах.

Особенность решения задач управления состоит в том, что построенное управление является функцией переменных стационарной системы, размерность которой больше размерности исходной си-стемы. Поэтому для введения управления в исходную систему следует дополнить исходные переменные некоторыми другими переменными так, чтобы существовало обратное преобразование от переменных стационарной системы к переменным, содержащим исходные переменные. Предложенная методика применялась для решения ряда задач механики: управление движением космических аппаратов при помощи солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации плоской ограниченной круговой задачи трех тел [5]; стабилизация положений относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов, которые формируются силами взаимодействия магнитных катушек, установленных на спутнике, с магнитным полем Земли [6]; задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы на поворотном стенде, совершающем программные вращательные движения [7].

Литература

1. *Ляпунов А.М.* Общие задачи об устойчивости движения. — Москва: Гостехиздат, 1950.

2. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — Москва: Физматлит, 2010.

3. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением // ПММ, **76**:4 (2012), 583-588.

4. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О новом классе приводимых линейных нестационарных систем и его связи с задачей оптимального управления // ПММ, **80**:2 (2016), 147-157.

5. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН ТИСУ, **3** (2013), 6-15.

6. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов // Васильев С.Н., Козлов В.В., Дегтярёв Г.Л., Маликов А.И., Терентьев С.А. (ред.) Труды XI международной четаевской конференции (том 2). — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — 123-129.

7. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Приводимость одного класса линейных нестационарных систем с управлением и наблюдением // Изв. РАН ТИСУ, **1** (2019), 3-12.

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ НА СПЕКТРЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

С.В. Нестеров, Л.Д. Акуленко

s.v.nesterov@bk.ru

УДК 534.113

В работе проведена классификация дефектов стержня с условиями свободного закрепления. Численно, экспериментально и теоретически исследовано влияние дефектов на спектры собственных частот и формы колебаний в зависимости от основных параметров, характеризующих дефект.

Ключевые слова: собственные колебания, собственные частоты, колебания стержней, дефект

Influence of defects on the spectra of natural frequencies and on the mode shapes of the rod

In this paper, the classification of defects of a rod with free ends is proposed. The effect of defects on the eigenfrequencies and the eigenforms depending on the basic parameters characterizing the defect is studied numerically, experimentally and theoretically.

Keywords: natural vibrations, natural frequencies, rod vibrations, defects

---

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00016).

Нестеров Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, г.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Sergei Nesterov (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Акуленко Леонид Денисович, д.ф.-м.н., г.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Leonid Akulenko (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Рассмотрим продольные колебания неоднородного стержня, собственные частоты и формы которых находятся как решение краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + \lambda r(x)u = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Здесь принимается, что длина стержня равна 1. Введем классификацию дефектов.
1) Дефект массы: $p(x) = 1, r(x) = 1 + \mu(x)$. В дальнейшем $\mu \geqslant 0$ (легко реализовать в эксперименте).
2) Дефект упругости: $p(x) = 1 + \mu(x), r(x) = 1$. При $\mu(x) > 0$ локально увеличивается модуль Юнга, при $\mu < 0$ локально уменьшается модуль Юнга.
3) Дефект поперечного сечения: $p(x) = 1 + S(x), r(x) = 1 + S(x), S(x) \lesseqgtr 0$, однако $1 + S > 0$.

Выбор краевых условий $u'(0) = u'(1) = 0$ обусловлен тем, что они легко реализуются в эксперименте, а также тем, что обеспечивается максимальная добротность стержня. В проведенных экспериментах добротность на основной частоте составляла $3000 - 5000$. При высокой добротности колебательной системы возможно зафиксировать малые изменения собственных частот, вызванные малыми дефектами.

Локальные дефекты моделировались функциями

$$\mu(x) = \frac{ac}{a^2 + (x-b)^2}.$$

Здесь $a = 0.01$ — ширина дефекта, b — середина дефекта, c — интенсивность дефекта. Если имеются несколько дефектов, то

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{ac_i}{a^2 + (x-b_i)^2}.$$

Были вычислены собственные частоты для всех трех видов дефектов (массы, упругости, поперечного сечения) методом ускоренной сходимости [1], и графически представлены зависимости собственных частот от параметров дефектов, а также проведены экспериментальные измерения собственных частот стержней без дефектов и стержней с дефектами. Наличие дефектов кроме изменения собственных частот подтверждается характерными особенностями производных собственных форм, которые прямо указывают на положение дефектов.

Теоретически и экспериментально подтверждено с помощью резонансного метода следующее:
1. Все собственные частоты уменьшаются при наличии положительного дефекта массы.
2. Каждая из собственных частот является осциллирующей функцией положения середины дефекта. Период осцилляций определяется номером собственной функции.
3. Если имеется несколько дефектов массы, то наблюдается интерференция указанных выше осцилляций.

4. Если m, масса дефекта, размещается на свободном конце стержня (или в пучности формы), то имеет место равенство

$$m = M \cdot \frac{f_m - \tilde{f}_n}{f_n},$$

где $M \gg m$, M — масса стержня, f_n — собственная частота стержня без дефекта, $\tilde{f}_n$ — собственная частота стержня с дефектом.
5. При наличии нескольких дефектов массы наблюдается эффект разделения форм собственных колебаний для частот f_n, $n \geqslant 10$. Это результат численного моделирования.

Для дефектов упругости справедливо следующее:
1. Все собственные частоты увеличиваются при наличии положительного дефекта упругости.
2. Каждая собственная частота является осциллирующей функцией положения середины дефекта. Период осцилляций определяется номером собственной частоты.
3. Если имеется несколько дефектов упругости, то наблюдается интерференция указанных выше осцилляций.
4. Если поместить один дефект упругости в узловую точку собственной формы, то можно определить модуль Юнга в окрестности узловой точки, измерив собственные частоты до и после нанесения дефектов

$$E_1(b) = E_0 \frac{l}{\delta} \frac{\tilde{f}_n - f_n}{f_n}.$$

Здесь E_0 — модуль Юнга эталона, l — длина стержня, δ — протяженность области, где имеется дефект, f_n и $\tilde{f}_n$ — собственные частоты эталона и стержня с дефектом.
5. При наличии нескольких дефектов упругости наблюдается эффект разделения форм колебаний. Производные собственных форм имеют характерные особенности (результат численного эксперимента).

Для дефектов поперечного сечения справедливы следующие утверждения:
1. Каждая из собственных частот является осциллирующей функцией положения дефекта.
2. Максимумы осцилляций достигаются в пучности форм колебаний, минимумы — в узловых точках форм колебаний.
3. Период осцилляций определяется номером собственной частоты, а амплитуда — параметром c.
4. Наличие нескольких дефектов поперечного сечения приводит к интерференции осцилляций.
5. при наличии нескольких дефектов наблюдается эффект разделения собственных форм для высоких частот f_n, где $n \geqslant 10$. Производные собственных форм имеют характерные особенности.

Литература

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2005.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

М.У. Никабадзе, А.В. Романов

nikabadze@mail.ru, atomicra@yandex.ru

УДК 539.8

Выписаны уравнения для многослойных призматических тел в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов, а также системы полиномов Лежандра. Даны формулировки краевых задач. Из этих уравнений получены уравнения различного приближения. Далее рассмотрена задача об изгибе параллелепипеда, защемленного по торцам, на боковые стороны которого действуют одинаковые сжимающие нагрузки, а на верхнюю лицевую поверхность действует нагрузка, которая приводит к изгибу параллелепипеда. Такой уравновешенной нагрузки классическая теория не может учитывать.

Ключевые слова: микрополярная теория, многослойное тонкое тело, призматическое тело, полиномы Лежандра

On some issues of the micropolar theory of prismatic elastic bodies

We wrote out the equations for multilayer prismatic bodies in the moments of displacement and rotation vectors with respect to an arbitrary system of polynomials, as well as with we wrote them respect to the system of Legendre polynomials. We formulate the boundary value problems. Then from these equations, we obtained equations of various approximations. Next, we considered the problem of bending of the parallelepiped clamped along the ends. The identical compressive loads act on the lateral faces of this parallelepiped, and some load, which leads to the bending of the parallelepiped, acts on the upper front surface of it. It is known that classical theory cannot take into account such a balanced load.

Keywords: micropolar theory, multilayer thin body, prismatic body, Legendre polynomials

Уравнения теории многослойных призматических тел в моментах. Пользуясь правилом, изложенным в [1], для получения искомого соотношения многослойного тонкого тела из соответствующего соотношения однослойного тонкого тела при новой параметризации, система уравнений микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины (каждый слой имеет постоянную толщину) в перемещениях и вращениях можно представить в виде

$$[\underset{s}{\bar{\Delta}}^3+A\underset{s}{\bar{\Delta}}^2_s+h^{-2}_s(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+2A)\underset{s}{\bar{\Delta}}\partial_3^2+h^{-4}_s(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+A)\partial_3^4+h^{-6}_s\partial_3^6]\underset{s}{\mathbf{u}}+\underset{s}{\mathbf{S}}^{**}=0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00016-А).

Никабадзе Михаил Ушангиевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Nikabadze (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Романов Александр Вячеславович, аспирант 4-го года обучения, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Romanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$$[\underset{s}{\bar{\Delta}}^3+(\underset{s}{B}\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{A})\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{h}^{-2}[(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+2\underset{s}{B})\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{C}]\partial_3^2+\underset{s}{h}^{-4}(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{B})\partial_3^4+\underset{s}{h}^{-6}\partial_3^6]\underset{s}{\boldsymbol{\varphi}}+ \quad (1)$$

$$+\underset{s}{\mathbf{H}}^{**}=0, \quad s=\overline{1,K},$$

где s — номер слоя, K — число слоев, $\underset{s}{h}=const$ — толщина слоя s $(s=\overline{1,K})$, $\underset{s}{\bar{\Delta}}=\underset{s}{g}^{\bar{I}\bar{J}}\partial_I\partial_J$ и введены обозначения

$$\underset{s}{\mathbf{S}}^{**}=\frac{\underset{s}{\mathbf{S}}^*}{(\underset{s}{\lambda}+2\underset{s}{\mu})(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})}, \quad \underset{s}{\mathbf{H}}^{**}=\frac{\underset{s}{\mathbf{H}}^*}{(\underset{s}{\gamma}+2\underset{s}{\delta})(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})},$$

$$\underset{s}{A}=-\frac{4\underset{s}{\alpha}\underset{s}{\mu}}{(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})}, \quad \underset{s}{B}=-\frac{4\underset{s}{\alpha}[\underset{s}{\mu}(\underset{s}{\gamma}+2\underset{s}{\delta})+(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})]}{(\underset{s}{\gamma}+2\underset{s}{\delta})(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})},$$

$$\underset{s}{C}=\frac{16\underset{s}{\alpha}^2\underset{s}{\mu}}{(\underset{s}{\gamma}+2\underset{s}{\delta})(\underset{s}{\mu}+\underset{s}{\alpha})(\underset{s}{\delta}+\underset{s}{\beta})}, \quad s=\overline{1,K},$$

$$\mathbf{S}^*=2\alpha Q_1^*(\underset{\simeq}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{m})+[\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1^*Q_4^*-(dQ_4^*-4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{F}),$$

$$\mathbf{H}^*=2\alpha Q_3^*(\underset{\simeq}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{F})+[\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2^*Q_3^*-(mQ_2^*-4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{m}),$$

$$Q_1^*=(b+d)\Delta, \quad Q_2^*=b\Delta, \quad Q_3^*=(g+m)\Delta-l, \quad Q_4^*=g\Delta-l,$$

$$d=l+\mu-\alpha, \quad l=4\alpha, \quad b=\mu+\alpha, \quad m=\gamma+\delta-\beta, \quad g=\delta+\beta.$$

Заметим, что с целью сокращения письма под величины, входящие в последние четыре соотношения, индекс s, обозначающий номер слоя, не стали ставить.

Применяя к уравнениям (1) оператор моментов k-го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), получим для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$[\underset{s}{\bar{\Delta}}^3+\underset{s}{A}\underset{s}{\bar{\Delta}}^2]\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{u}}}+\underset{s}{h}^{-2}(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+2\underset{s}{A})\underset{s}{\bar{\Delta}}\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{u}}}''+\underset{s}{h}^{-4}(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{A})\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{u}}}^{IV}+\underset{s}{h}^{-6}\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{u}}}^{VI}+\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{S}}}^{**}=0,$$

$$[\underset{s}{\bar{\Delta}}^3+(\underset{s}{B}\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{A})\underset{s}{\bar{\Delta}}]\overset{(k)}{\underset{s}{\boldsymbol{\varphi}}}+\underset{s}{h}^{-2}[(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+2\underset{s}{B})\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{C}]\overset{(k)}{\underset{s}{\boldsymbol{\varphi}}}''+\underset{s}{h}^{-4}(3\underset{s}{\bar{\Delta}}+\underset{s}{B})\overset{(k)}{\underset{s}{\boldsymbol{\varphi}}}^{IV}+ \quad (2)$$

$$+\underset{s}{h}^{-6}\overset{(k)}{\underset{s}{\boldsymbol{\varphi}}}^{VI}+\overset{(k)}{\underset{s}{\mathbf{H}}}^{**}=0, \quad k\in\mathbb{N}_0, \quad s=\overline{1,K}.$$

Здесь $\overset{(k)}{\mathbf{u}}''$, $\overset{(k)}{\mathbf{u}}^{IV}$ и $\overset{(k)}{\mathbf{u}}^{VI}$ выражаются через моменты вектора перемещений относительно данной системы полиномов, а $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}''$, $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^{IV}$ и $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^{VI}$ — через моменты вектора вращений. Например, при применении системы полиномов Лежандра имеют место следующие формулы:

$$\overset{(n)(2m)}{\mathbf{v}}(x')=(2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}C_{k+2m-2}^{2m-1}\prod_{s=1}^{2m-1}(2n+2k+2s-1)\overset{(n+2k+2m-2)}{\mathbf{v}}=$$

$$= \frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}[(\partial_3^{2m-k}\mathbf{v})^{+}+(-1)^{n+k}(\partial_3^{2m-k}\mathbf{v})^{-}]P_n^{k-1}(1)+\underline{\overset{(k)}{\mathbf{v}}}^{(2m)}, \quad (3)$$

$$\underline{\overset{(k)}{\mathbf{v}}}^{(2m)} = (2n+1)\sum_{k=1}^{[n/2-m+1]} C_{k+2m-2}^{2m-1}\prod_{s=1}^{2m-1}(2n-2k-2s+3)\overset{(n-2k-2m+2)}{\mathbf{v}},$$

$$-1 \leqslant x^3 \leqslant 1, \ \ n\in\mathbb{N}_0, \ \ m\in\mathbb{N},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ или $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, C_{k+2m-2}^{2m-1} — биномиальные коэффициенты, $(\partial_3^s\mathbf{u})^{-} = (\partial_3^s\mathbf{u})\big|_{x^3=-1}$, $(\partial_3^k\mathbf{u})^{+} = (\partial_3^k\mathbf{u})\big|_{x^3=1}$, $k\in\mathbb{N}$. Заметим, что с целью сокращения письма в формулах (3) под $\mathbf{v}$ и $\underline{\mathbf{v}}$, индекс s, обозначающий номер слоя, не стали ставить.

В силу (3) из (2) можно получить различные представления системы уравнений микрополярной теории могослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений относительно полиномов Лежандра, а также системы уравнений различных приближений.

Следует отметить, что как в случае однослойного призматического тела, так и в случае многослойного призматического тела уравнения в моментах при любом приближений расщепляются и для каждого момента неизвестных функций $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ получается эллиптическое уравнение высокого порядка, для которого, используя метод Векуа [3], можно выписать аналитическое решение. Следовательно, для корректной постановки краевых задач к уравнениям (2) надо добавить граничные условия в моментах и межслойные контактные условия (см. в [1,2]). Кроме того, для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях строятся корректирующие слагаемые. При этом аналитическое решение каждого слоя (кроме первого и последнего) с учетом корректирующих слагаемых записывается так, что оно удовлетворяет межслойным контактным условиям. Для первого (последнего) слоя аналитическое решение посредством корректирующих слагаемых представляется так, что оно удовлетворят граничным условиям на внутренней (внешней) поверхности, а межслойным контактным условиям на внешней (внутренней) поверхности. Следовательно, чем больше порядок приближения, можно полагать, что тем лучше (близко к реальной картине) можно учитывать межслойные контактные условия, что очень важно в теории многослойных конструкций. Следует заметить, что в связи с ограниченностью объема работы решение задачи не приводится

Литература

1. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ. 2014. 515 с.

2. *Nikabadze M.U., Ulukhanyan A.R.* Analytical solutions in the theory of thin bodies// H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials **42**, (2016), 319-361. DOI: 10.1007/978-3-319-31721-2_15

3. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.: ОГИЗ, 1948. 296 с.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

М.С.Никольский

mni@mi-ras.ru

УДК 517.977

Доклад посвящен оцениванию множеств достижимости управляемых объектов сверху по включению.Для получения такого рода оценок мы используем функции типа Ляпунова. В докладе рассматриваются два общих примера, представлющих интерес для приложений.

Ключевые слова: множество достижимости, функция Ляпунова, абсолютная устойчивость

About estimation of attainable sets for controlled objects

The paper is devoted to estimation from the above in inclusion for attainable sets of controlled objects. In order to receive such estimations we use Lyapunov functions. Two general examples of this application were considered in our paper. These examples are interesting for applications.

Keywords: attainable set, Lyapunov function, absolute stability

Рассмотрим управляемый объект вида (ср. с [1,2]):

$$\dot{x} = f(x) + Bu, x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in U$, $U \in R^r$, U - компакт в R^r, нелинейная векторная функция f(x) непрерывно дифференцируема на R^n, B - $n \times r$-матрица. Фиксировано число $T > 0$. При всевозможных измеримых управлениях $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, возникают соответствующие решения $x(t, x_0, u(\cdot))$. Нас интересует множество достижимости $D(T)$ управляемого объекта (1). Отметим, что в общем случае множество $D(T)$ может оказаться пустым из-за возможной непродолжимости решений задачи Коши (1) на весь отрезок $[0, T]$. Мы рассматриваем задачу оценивания множества $D(T)$ сверху по включению некоторым множеством достаточно простого вида. Такого рода оценки позволяют в грубой форме оценить динамические возможности управляемого объекта (1) и важны также при приближенных вычислениях $D(T)$ пиксельным методом.

При оценивании сверху множества $D(T)$ полезно использовать непрерывно дифференцируемые функции $v(x)$ ляпуновского типа. От них мы, в отличие от теории устойчивости движения, кроме гладкости ничего не требуем. Суть метода их использования состоит в вычислении от них производной в силу дифференциального уравнения (1) и последующего построения уравнения сравнения(см., например, [3,4]). При подборе подходящей

Никольский Михаил Сергеевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МИАН РАН (Москва, Россия); Mikhail Nikolskii (Mathematical Steklov Institute of RAS, Moscow, Russia)

функции $v(x)$ очень полезен большой опыт в нахождении функций Ляпунова в теории устойчивости движения (см., например, [5]). Например, для двумерного управляемого объекта

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a(x_1) - b(x_2) + u,$$

где $a(x_1), b(x_2)$ — непрерывно дифференцируемые функции на R^1, $U = [p, q]$, причем $p < q$, полезной для оценивания $D(T)$ сверху оказалась известная в теории устойчивости движения функция

$$v(x) = (x_2)^2/2 + \int_0^{x_1} a(r)\, dr. \tag{2}$$

Если потребовать, чтобы : 1) $ra(r) \geqslant 0$ при $r \in R^1$; 2)$-rb(r) \leqslant c(1 + r^2)$ при $r \in R^1$, где c — неотрицательная константа, то с помощью функции $v(x)$ можно оценить сверху по включению исследуемое множество $D(T)$ покоординатно, т.е. множеством в виде прямоугольника.

Был также рассмотрен управляемый объект вида

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma(x)) + Mu, x(0) = x_0, \tag{3}$$

где

$$\sigma(x) = \langle c, x\rangle, \tag{4}$$

$x \in R^n$, b и c — векторы из R^n, A и M — матрицы размерности $n\times n$, $n\times r$ соответственно, $u \in U$ — компакту из R^r. Угловые скобки в (4) означают скалярное произведение векторов из R^n, скалярная функция $\varphi(\sigma)$ непрерывно дифференцируема на R^1. Отметим, что при $u = 0$ уравнение (3) описывает известную модель прямого регулирования из теории абсолютной устойчивости (см., например, [5,6]). Рассмотрим функцию $v(x)$ стандартного для теории абсолютной устойчивости вида (см. [5,6]) :

$$v(x) = |x|^2/2 + \int_0^{\sigma(x)} \varphi(r), dr, \tag{5}$$

где $|x|$ означает стандартную длину вектора x из арифметического евклидова пространства R^n, а функция $\varphi(r)$ взята из (3), функция $\sigma(x)$ определяется формулой (4). С помощью функции $v(x)$ (см. (5)) получена при $\langle b, c\rangle < 0$ и условии $\varphi(r)r \geqslant 0$ при $r \in R^1$ оценка сверху для $D(T)$ управляемого объекта (3),(4) в виде n-мерного шара с центром в 0.

Литература

1. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — Москва: Наука, 1969.

2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — Москва: Наука, 1972.

3. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых объектов // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, **17**:1 (2011), 60-69.

4. *Никольский М.С.* Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Материалы Межд. конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина. Москва, 12 - 14 декабря 2018, 194-196.

5. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — Москва: Наука, 1970.

6. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — Москва: Изд-во АН СССР, 1963.

РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАЦИЙ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ EBSD ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

А.О. Овчинникова, Т.И. Савелова

aoantonova@mail.ru, TISavelova@mephi.ru

УДК 539.26.01

Проведено исследование влияния основных параметров EBSD эксперимента и размера выборки зерен в образце на погрешность вычисления таких текстурных характеристик, как индекс текстуры и полюсных фигур. Для сравнения измеренных характеристик с истинными характеристиками образца используется математическое моделирование поликристаллического образца и EBSD эксперимента. Представлены численные зависимости ошибок вычисления текстурных характеристик от параметров эксперимента. Описаны некоторые особенности влияния параметров на вычисляемые характеристики материала. Предложены рекомендации по выбору значений параметров.

Ключевые слова: математическое моделирование, поликристалл, EBSD, шаг измерения, пороговый угол разориентации, размер выборки

Development of the recommendations for EBSD measurements in the study of the polycrystalline texture

An influence of the EBSD experiment parameters and the size of the grains sample in a specimen on the error of the texture characteristics calculation such as texture index and pole figures was studied. To compare the measured characteristics with the reference ones, corresponding to the specimen, mathematical modeling of the polycrystalline specimen and the EBSD experiment was used. Numerical dependences of the texture characteristics calculation errors on the experiment parameters are presented. Some features of the parameters impact on the calculated characteristics of the material are described. Recommendations on the choice of the parameter values are proposed.

Keywords: mathematical simulation, polycrystall, EBSD, scanning step, tolerance angle, sample size

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00036).

Овчинникова Анастасия Олеговна, к.ф.-м.н., инженер, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Anastasia Ovchinnikova (NRNU MEPhI, Moscow, Russia)

Савелова Татьяна Ивановна, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Tatyana Savyolova (NRNU MEPhI, Moscow, Russia)

Измерение и обработка экспериментальных данных с помощью EBSD (Electron Back Scattering Diffraction) техники представляют мощный инструмент по изучению микро- и макротекстуры поликристаллических материалов в последние десятилетия [1]. EBSD метод является прямым методом измерения на поверхности образца функции распределения ориентаций (ФРО), с помощью которой возможно полное количественное описание текстуры поликристаллов [2].

Ключевыми параметрами проведения EBSD измерений являются шаг сканирования, определяющий сетку измерений ориентаций на поверхности образца, и пороговый угол разориентации для разграничения 2-х соседних зёрен. Необходимость исследования влияния основных параметров EBSD измерений на достоверность получаемых результатов EBSD эксперимента подтверждается многими исследователями, работающими над вопросами интерпретации и обработки EBSD данных [3–5]. Размер выборки зерен, плоские сечения которых были отсканированы на поверхности материала, играет особенно большую роль при вычислении статистических характеристик материала [3, 6–8]. Проведение реального EBSD эксперимента – это весьма трудоемкий процесс, а затраты по времени возрастают при увеличении размера выборки зерен, т.е. площади сканирования на поверхности образца.

В данной работе проведено исследование влияния основных параметров EBSD эксперимента и размера выборки зерен в образце на погрешность вычисления таких текстурных характеристик, как индекс текстуры (ИТ) [2, 9] и полюсных фигур 0001 (ПФ) [9, 10]. В качестве ошибок вычисления рассматривались относительная погрешность вычисления индекса текстуры; отклонение полюсной фигуры, восстановленной по экспериментальным данным, от истинной полюсной фигуры модельного образца в метрике L_1 [11]; RP-фактор, который используется как мера ошибки вычисления полюсной фигуры [12, 13]. Сравнение измеренных характеристик с истинными характеристиками образца становится возможным благодаря используемому в данном исследовании математическому моделированию образца и EBSD эксперимента. Описание использованных моделей поликристалла и эксперимента представлено в работах [11, 14, 15].

Построены зависимости ошибок вычисления текстурных характеристик, рассчитанных по модельным EBSD измерениям поликристаллического образца, от размера выборки зерен, измеренных в ходе EBSD эксперимента при различных значениях шага сканирования и порогового угла разориентации. Получено, что наибольшее влияние на результат измерений оказывают параметры эксперимента, нежели объем выборки измеренных зерен. Наименьшие значения рассматриваемых метрик погрешности вычисления текстурных характеристик по EBSD измерениям были достигнуты при шаге сканирования, равном среднему размеру зерна в образце, и наименьшем значении порогового угла разориентации из рассматриваемых. Малый пороговый угол позволяет получить ошибку вычисления индекса текстуры менее 4% при выборке зерен более 1000. При этом при больших значениях данного параметра ошибка вычисления индекса текстуры может превышать 25%.

Размер выборки измеренных зерен также оказывает влияние на величину ошибки вычисления индекса текстуры: при выборке менее 1000 зерен, наблюдаются флуктуации значения ошибки. Значения RP-фактора достигают минимальных значений и имеют незначительные колебания также при объеме выборки более 1000 зерен.

Таким образом, полученные результаты подтвердили значимость исследуемых параметров эксперимента и величины выборки измеренных зерен образца для получения достоверных результатов эксперимента. Во избежание неустойчивости результатов эксперимента от параметров следует выбирать объем выборки более 1000 зерен.

Литература

1. *Randle V.* Introduction to texture analysis: macrotexture, microtexture and orientation mapping: 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2010.

2. *Bunge H.J.* Texture Analysis in Material Sciences. Mathematica Methods. — London: Butterworths Publ, 1982.

3. *Сыпченко М.В.* Математическое моделирование функции распределения ориентаций по кристаллографическим ориентировкам на группе SO(3): Дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — М., 2010. –123 с.

4. *Tonga V., et al.* The effect of pattern overlap on the accuracy of high resolution electron backscatter diffraction measurements // Ultramicroscopy, **155** (2015), 62–73.

5. *Lin H.P., et al.* Comparison of deformation texture in FePd alloy via X-ray diffraction and electron backscatter diffraction techniques // Micron, **44** (2013), 433–441.

6. *Wright S.I.* Comparision of Quantitative Texture Measurements via EBSD and X-ray // Material Science Forum, ICOTOM 15, (2008), 88–94.

7. *Bozzolo N., et al.*Accuracy of orientation distribution function determination based on EBSD data-A case study of a recrystallized low alloyed Zr sheet // J. of Microscopy, **227**:3 (2007), 275–283.

8. *Lychagina T.A., Nikolayev D.I.* Influence of grain number on graphite quantitative texture study // Textures and Microstructures, **35**:3–4 (2003), 197–206.

9. *Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В.* Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения . — М.: НИЯУ МИФИ, 2012.

10. *Рогинский К.Н., Савелова Т.И.* Вычисление полюсных фигур ядерным методом по набору отдельных ориентаций зёрен на группе SO(3) // Журнал вычислит. матем. и матем. физ, **50**:5 (2010), 949–966.

11. *Антонова А.О.* Влияние параметров проведения EBSD эксперимента на достоверность вычисления текстурных характеристик поликристаллического материала: Дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — М., 2017.

12. *Matthies S., Wenk H.R., Vinel G.W.* Some basic concepts of texture analysis and comparison of three methods to calculate orientation distributions from pole figures // J. Appl. Cryst, **21** (1988), 285–304.

13. *Lychagina T.A., Nikolayev D.I.* Quantitative comparison of measured crystallographic texture // J. Appl. Cryst, **49** (2016), 1290–1299.

14. *Антонова А.О., Савелова Т.И.* Оценка погрешностей вычисления характеристик текстуры поликристаллов путём изменения параметров измерений методами электронной микроскопии // Журнал вычислит. матем. и матем. физ., **55**:2 (2015), 322–334.

15. *Антонова А.О., Савелова Т.И.* Исследование методами электронной микроскопии влияния параметров эксперимента на вычисление полюсных фигур поликристаллических материалов // Кристаллография, **61**:3 (2016), 495–503.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ

Д.А. Пожарский, Н.Б. Золотов
pozharda@rambler.ru

УДК 539.3

Рассматриваются контактные задачи для однородных и неоднородных, полых и сплошных упругих цилиндров бесконечной длины, взаимодействующих с жестким бандажом или вкладышем конечной длины. Задачи сводятся к интегральным уравнениям относительно контактных давлений. Для решения используются сингулярный и регулярный асимптотические методы.

Ключевые слова: контактные задачи, асимптотические методы

Asymptotic methods in contact problems for elastic cylinders

Contact problems are considered for homogeneous and inhomogeneous, hollow and continuous elastic cylinders of infinite length interacting with a rigid sleeve or insert of finite length. The problems are reduced to integral equations with respect to the contact pressure. The singular and regular asymptotic methods are used to solve the equations.

Keywords: contact problems, asymptotic methods

При решении статических и динамических контактных задач теории упругости для неоднородных цилиндрических тел преимущественно применялся метод конечных элементов. В настоящей работе выбран специальный вид неоднородности, при котором функции-символы ядер интегральных уравнений статических контактных задач удается получить в аналитической форме, проанализировать их асимптотику и применить асимптотические методы [1].

В условиях осевой симметрии, используя цилиндрические координаты r, z, рассмотрим полый упругий цилиндр $\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho$, $|z| < \infty$ с постоянным модулем сдвига G и переменным коэффициентом Пуассона $\nu(r)$. Тогда модуль продольной упругости также переменный. В задаче А снаружи на цилиндр посажен жесткий кольцевой бандаж, в задаче Б внутрь цилиндра вставлен жесткий кольцевой вкладыш. В обеих задачах задан натяг δ, ширина области контакта $2a$. Вне области контакта поверхность цилиндра $r = \rho$ (А) или $r = \rho_1$ (Б) свободна от напряжений. На поверхности цилиндра $r = \rho_1$ (А) или $r = \rho$ (Б) действует заданное равномерно распределенное давление. Для учета вклада этого давления в нормальное перемещение в области контакта получено точное решение аналога задачи Ламе [2] для указанного вида неоднородности. Требуется определить контактное давление $\sigma_r(\rho, z) = -q(z)$ (А) или $\sigma_r(\rho_1, z) = -q(z)$ (Б) при $|z| \leqslant a$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00017).

Пожарский Дмитрий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия); Dmitrii Pozharskii (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia)

Золотов Никита Борисович, магистрант, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия); Nikita Zolotov (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

Для неоднородности выбранного типа фундаментальные решения линейной теории упругости находятся при помощи представления Фрайбергера: возникает векторное уравнение Лапласа и скалярное уравнение Пуассона, правая часть которого зависит от коэффициента Пуассона. В результате применения интегрального преобразования Фурье контактные задачи А и Б в предположении симметрии по z сводятся к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f \quad (|x| \leqslant 1), \quad K(t) = \int_{0}^{\infty} L(u)\cos(ut)du, \qquad (1)$$

где введены безразмерные обозначения

$$x = z/a, \quad \lambda = \rho/a, \quad \varphi(x) = q(z)/(2G),$$

величина f характеризует натяг и заданное равномерное давление, функция $L(u)$ зависит от задачи (А, Б), закона неоднородности и величины $k = \rho_1/\rho$.

Задача А при $\rho_1 = 0$ и отсутствии заданного внутреннего давления соответствует задаче В для сплошного неоднородного цилиндра, которая также сводится к уравнению (1). Случаи однородного полого или сплошного цилиндра являются частными случаями задач А, Б и В.

Безразмерные параметры λ и k характеризуют соответственно относительную длину бандажа или вкладыша и относительную толщину стенок цилиндра.

Функция, характеризующая закон неоднородности, раскладывается в степенной ряд, в котором удержано несколько первых членов (без ограничения общности изложения).

При достаточно малых значениях λ (для относительно широких бандажей или вкладышей) для решения задач А, Б и В применен сингулярный асимптотический метод: решение уравнения (1) складывается из вырожденного (проникающего) решения и решений типа погранслоя, несущих корневые особенности на краях области контакта и находящихся в результате решения уравнений Винера–Хопфа [3]. Для эффективной факторизации функций-символов ядра (1) для них построены специальные аппроксимации на действительной оси с учетом их асимптотического поведения. В задачах А и Б найдены численные аппроксимации и асимптотические решения для значений $0 \leqslant k \leqslant 0.99$, включающих случаи тонкостенных цилиндров.

При достаточно больших значениях λ (для относительно узких бандажей) для решения задачи В применен регулярный асимптотический метод: решение уравнения (1) ищется в виде ряда по степеням $1/\lambda$. Численно установлена стыковка сингулярного и регулярного асимптотических решений в определенном диапазоне изменения параметра λ.

Исследовано влияние неоднородности, толщины цилиндра и ширины области контакта на распределение контактных давлений.

Литература

1. *Alexandrov V.M., Pozharskii D.A.* Three-dimensional contact problems. — Dordrecht: Kluwer, 2001.

2. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955.

3. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТИПА ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

С.С. Постнов

postnov.sergey@inbox.ru

УДК 517.977, 519.7

Для линейных систем дробного порядка исследуются две задачи оптимального управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача быстродействия при заданном ограничении на норму управления. Рассмотрены случаи использования разных типов оператора дробного дифференцирования в определяющих уравнениях. Поставленные задачи сведены к l-проблеме моментов, для которой получены условия, определяющие возможность постановки и разрешимость. В ряде случаев получены и проанализированы аналитические решения задач оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, l-проблема моментов, дробная производная

The features of optimal control problems for linear fractional-order systems in dependency from type of differentiation operator

There are two optimal control problems investigated for linear fractional-order systems: the problem of control search with minimal norm at given control time and the problem of time-optimal control search at given restriction on control norm. Several cases of different types of differentiation operator using in basic equations considered. The problems reduced to the l-problem of moments. For this problem conditions derived which define the statement possibility and solvability of the problem. In some cases an analytical solutions of optimal control problems obtained and analyzed.

Keywords: optimal control, l-problem of moments, fractional derivative

Постнов Сергей Сергеевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ИПУ имени В.А. Трапезникова РАН (Москва, Россия); Sergey Postnov (Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia)

Системы дробного порядка изучаются в качестве моделей ряда физических процессов примерно с середины XIX века. Позднее такие модели нашли применение в химии, биологии, экономике и других областях знания. В конце XX века началось исследование систем дробного порядка с управлением, а в последнее десятилетие резко возрос интерес к исследованию задач оптимального управления для этого типа систем. Важной отличительной чертой систем дробного порядка и дробного исчисления в целом является отсутствие единого определения операторов дробного интегрирования и дифференцирования, число альтернативных вариантов которого уже составляет не менее трёх десятков и продолжает увеличиваться. При этом постановка начальных и граничных условий, а также вид и свойства решений одного и того же по форме уравнения могут кардинально отличаться для случаев, когда входящие в уравнение операторы дробного порядка задаются разными определениями.

Одним из эффективных инструментов исследования задач оптимального управления, как известно, является метод моментов, который позволяет строить в явном виде оптимальные управления и исследовать их свойства, причём заранее не предполагается непрерывность или дифференцируемость управлений. В настоящей работе рассматривается применение метода моментов для систем дробного порядка как с сосредоточенными, так и с распределёнными параметрами. Отдельное внимание уделяется особенностям постановки и решения задач оптимального управления, свойствам оптимальных управлений, обусловленным выбором определения дробных операторов.

Общий вид системы с сосредоточенными параметрами задаётся набором уравнений следующего вида:

$$ {}_{t_0}D_t^{\rho_i} q_i(t) = a_{ij} q_j(t) + b_{ij} u_j(t) + f_i(t), i, j = 1, ..., N, \tag{1} $$

где функции $\vec{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t))$, $\vec{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ и $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))$ определяют состояние, управление и возмущение соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 \geqslant 0$; a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты, вообще говоря, зависящие от времени; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования ${}_{t_0}D_t^{\rho_i}$ в формуле (1) понимается в смысле Хильфера ${}_{t_0}^{Hil}D_t^{\rho_i}$ [1], Адамара ${}_{t_0}^{H}D_t^{\rho_i}$ или Эрдейи-Кобера ${}_{t_0}^{EK}D_t^{\rho_i}$ [2], а индекс ρ_i является в общем случае составным и может включать до трёх показателей.

Рассматриваются управления, принадлежащие классу функций $L_p(0, T]$, $1 < p < \infty$, или $L_\infty(0, T]$.

Начальные условия для системы (1) задаются, как правило, в нелокальном виде:

$$ \lim_{t \to t_0 +} [{}_{t_0}I_t^{\sigma_i} q_i(t)] = s_i^0, i = 1, ..., N, \tag{2} $$

где оператор дробного интегрирования ${}_{t_0}I_t^{\sigma_i}$ понимается следующим образом: в смысле Римана-Лиувилля [2], если оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается в смысле Хильфера; в смысле Адамара или Эрдейи-Кобера [2], если оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается в смысле Адамара или Эрдейи-Кобера соответственно. Показатель σ_i также является в общем случае составным.

Конечные условия для системы (1) задаются в виде:

$$q_i(T) = q_i^T, i = 1, ..., N. \tag{3}$$

Исследуются две задачи оптимального управления: 1) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) и имеющего минимальную норму при заданном времени управления T; 2) задача поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния, определяемого условиями (2), в конечное состояние (3) за минимальное время при заданном ограничении на норму управления, $\|u(\vec{t})\| \leqslant l$, $l > 0$. Обе задачи сводятся к l-проблеме моментов [3], для которой исследованы условия, определяющие возможность постановки и разрешимость. При этом одномерная система типа (1) исследована в общем виде, а многомерная — в ряде частных случаев [4-6]. Получены и исследованы аналитические решения поставленных задач оптимального управления и продемонстрировано существенное отличие их вида и поведения в случаях, соответствующих выбору разных определений оператора дробного дифференцирования.

Продемонстрирована возможность применения метода моментов к системам с распределёнными параметрами следующего вида:

$$r(x)\ {}_0D_t^{\alpha}Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + f(x,t) + u(x,t), \tag{4}$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, $f(x,t)$ — возмущение, $u(x,t)$ — распределённое управление, $t \geqslant 0$, $x \in [0,L]$. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0,L]$. Дробная производная здесь понимается в смысле Хильфера [1], $\alpha \in (0,2]$. Начальные условия для уравнения (4) ставятся по аналогии со случаем системы (1), а граничные условия ставятся в локальном виде и могут включать граничные управления:

$$\left[b_i\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_iQ(x,t)\right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geqslant 0, i = 1,2,$$

где a_i и b_i — постоянные коэффициенты, $b_1 \leqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$; $h_i(t)$ — некоторые известные вполне регулярные функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$.

Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами либо пространства $L_p[0,T]$, $1 < p < \infty$, либо пространства $L_\infty[0,T]$. Распределённое управление $u(x,t)$ считается функцией из пространства $L_\infty(\Omega)$, $\Omega = [0,T] \times [0,L]$, либо функцией, интегрируемой со степенью p_1 (p_2) по пространственной (временной) переменной ($1 < p_{1,2} < \infty$).

Конечные условия формулируются так, чтобы в некоторый момент времени $T > 0$ состояние системы (4) совпадало с заданным желаемым состоянием $Q^*(x)$, а скорость его изменения соответствовала заданной зависимости $A(x)$:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \frac{\partial Q(x,T)}{\partial x} = A(x).$$

Для системы (4), как и выше для системы (1), поставлены задачи оптимального управления как задачи перевода системы из начального состояния в конечное при условии минимальности нормы управления или времени перехода. Эти задачи также сведены к форме обобщённой счётномерной

l-проблемы моментов, для которой получены условия, определяющие возможность постановки и разрешимость. Получены приближённые аналитические решения поставленной проблемы моментов и проанализированы их свойства.

Литература

1. *Hilfer R.* Fractional Time Evolution // Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000. — 87-130.

2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.

3. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.

4. *Постнов С.С.* Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара. // Докл. Академии наук, **476**:2 (2017), 143-147.

5. *Постнов С.С.* Задачи оптимального управления для некоторых линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Хильфера // Проблемы управления, **5** (2018), 14-25.

6. *Постнов С.С.* l-Проблема моментов для одномерных линейных интегро-дифференциальных уравнений с операторами Эрдейи-Кобера // Докл. Академии наук (в печати).

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УПРАВЛЕНИЕМ

Е.А. Постнова

postnova@ipu.ru

УДК 517.977, 519.7

Данная работа посвящена анализу динамики линейных систем дробного порядка с управлением, а именно: одномерной системы общего вида; двумерной системы частного вида - двойной интегратор. Исследовалась задача поиска управления с минимальной нормой. Были получены аналитические и численные решения задачи в различных случаях и проанализированы следующие зависимости: нормы управления от значений показателей дробного дифференцирования; функции управления от времени; фазовые портреты систем.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовый портрет, динамические системы нецелого (дробного) порядка, производная Хильфера, производная Адамара

Постнова Елена Александровна, м.н.с., ИПУ РАН им.В.А.Трапезникова; Elena Postnova (Institute of control sciences, Moscow, Russia)

Analysis of linear dynamics systems of fractional order with control

The paper is devoted to the analysis of the linear dynamics systems of fractional order with control: one-dimensional systems; two-dimensional systems - double integrator. The problem of control search with minimal norm investigated. The analytical and numerical solutions of the problem were obtained and the following dependencies were analyzed: control norms as a function of fractional differentiation indexes; functions of control from the time; phase portraits of systems.

Keywords: optimal control, phase portrait, non-integer (fractional) order dynamical systems, Hilfer derivative, Hadamard derivative

Для исследования поведения линейных динамических систем целого порядка с управлением довольно широко используется метод моментов. В работе [1] была обоснована применимость данного метода для исследования задачи оптимального управления линейными динамическими системами дробного порядка с сосредоточенными и распределёнными параметрами, поэтому он был взят в качестве основного инструмента. Акцент в работе сделан на системах следующего типа: одномерной системы общего вида; двумерной системы частного вида - двойной интегратор. Функция управления рассматривалась для двух случаев, когда $u(t) \in L_2[t_0, T]$ [2] и $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$. Начальные и конечные условия были задавались параметрически, т.е. являлись некоторыми функциями, зависящими от выбора начального и конечного моментов соответственно.

Первая из рассматриваемых систем описывается уравнением следующего вида:

$$ {}_{t_0}D_t^\alpha q(t) = aq(t) + bu(t), $$

где $q(t)$ – фазовая координата системы; D_t^α – оператор дробного дифференцирования, который здесь и далее понимается в смысле Хильфера (в частности, Капуто) или Адамара; $u(t)$ – искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; a, b – произвольные константы.

Вторая система - двойной интегратор, представляется в виде системы, состоящей из двух уравнений:

$$ \begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t) \\ {}_{t_0}^{C}D_t^\beta q_2(t) = u(t), \end{cases} $$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – фазовые координаты системы, зависящие от времени $t \in [t_0, T]$; $u(t)$ – искомая функция управления, заданная в пространстве $L_2[t_0, T]$ или $L_\infty[t_0, T]$; α и β – показатели дробного дифференцирования, принимают значения на интервале $(0, 1]$; оператор дробного дифференцирования D_t^α и D_t^β. Поиск оптимального управления заключался в нахождении функции $u(t)$ с минимальной нормой.

В работе найдено аналитическое решение поставленной задачи оптимального управления для одномерной системы общего вида и двойного интегратора в случае $L_2[t_0, T]$. Показано, что для двойного интегратора в случае $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$ аналитическое решение в общем виде не может быть

получено, а поставленная задача сводится к задаче безусловной минимизации функции одной переменной. Данная задача исследована, получены условия существования и оценки положения экстремума функции. Приведены результаты численных расчётов (реализованных в программной среде Matlab), на основе которых были построены приближённые решения задачи оптимального управления.

В результате были построены и проанализированы зависимости основных характеристик систем от значений показателей дробного дифференцирования и выбора начального и конечного моментов времени. В частности, было показано, что поведение нормы управления при определённых значениях показателей дробного дифференцирования имеет ярко выраженный минимум, а при некоторых значениях величина нормы оптимального управления не зависит от времени управления. Было исследовано поведение фазовых траекторий системы.

В работе было проведено сравнение динамики линейной системы дробного порядка с динамикой аналогичной системой целого порядка и продемонстрировано, что при определённых условиях поведение таких систем при больших временах перехода оказывается близким, а при малых - резко отличается.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при моделировании систем нецелого порядка с управлением. Практическое использование результатов данных исследований может привести к экономии энергетических затрат на реализацию управления соответствующими системами.

Литература

1. *Кубышкин В.А., Постнов С.С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика, **№ 5** – (2014), 3-17.

2. *Постнова Е.А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором нецелого порядка // Проблемы управления, **№ 2** (2018), 40-46.

ДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕЛЕЯ И СТОУНЛИ НА ПОДЗЕМНЫЙ ТРУБОПРОВОД

Т. Рашидов, Б. Мардонов, Е.В. Ан

tur.rashidov@list.ru, batsam@list.ru, ekaterinaan@mail.ru

УДК 539.3

В работе изучено поведение подземного трубопровода, когда плоские волны Релея и Стоунли падают на границу из верхнего полупространства. Получена система дифференциальных уравнений для определения перемещений частиц грунта и продольного смещения сечений трубопровода за фронтом поверхностных волн. Предложена аналитическая реализация для решения соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: Поверхностные волны, подземный трубопровод, граница контакта двух сред, длина волны, смещение частиц грунта, напряжения в сечениях трубопровода

The effect of Rayleigh and Stoneley surface waves on an underground pipeline

The behavior of the underground pipeline when the plane Rayleigh and Stoneley waves fall on the boundary from the upper half-space is studied in this paper. A system of differential equations for determining the displacements of soil particles and the longitudinal displacement of pipeline sections behind the surface wave front is obtained. An analytical implementation for solving the corresponding boundary problems is proposed.

Keywords: Surface waves, underground pipeline, contact of two media, wavelength, displacement of soil particles, stresses in pipeline sections

Поведение подземной системы трубопроводов при сейсмических воздействиях в значительной степени определяется направлением и сочетанием распространяющихся сейсмических волн разного типа, что заранее неизвестно. Таким образом, определение напряженного состояния, которое может возникнуть в поперечном сечении подземной сети трубопроводов при землетрясении заданной интенсивности при любом сочетании и направлении распространения сейсмических волн, является актуальной и сложной задачей в динамической теории сейсмостойкости подземных сооружений.

Работа выполнена при финансовой поддержке международного гранта фундаментальных исследований Республики Узбекистан и Российской Федерацией, который выполняется совместно с Институтом механики РАН, г. Москва (проект № MRU-FA-58/2017).

Рашидов Турсунбай, д.т.н., профессор, Институт механики и сейсмостойкости сооружений (ИМиСС) имени М.Т. Уразбаева АН РУз (Ташкент, Узбекистан); Rashidov Tursunbay (Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Мардонов Батиржан, д.ф.-м.н., профессор, Ташкентского университета информационных технологий (ТУИТ) имени Мухаммада Ал-Хоразмий (Ташкент, Узбекистан)

Ан Екатерина Владимировна, PhD. по физ.-мат. наукам, Институт механики и сейсмостойкости сооружений (ИМиСС) имени М.Т. Уразбаева АН РУз (Ташкент, Узбекистан); An Ekaterina Vladimirovna (Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Изучение проблемы выявило ряд малоизученных задач, к которым относятся вопросы воздействия поверхностных волн Релея и Стоунли на подземный трубопровод бесконечной длины. Как поведет себя подземный трубопровод при том или ином виде поверхностной волны во многом зависит от длины и скорости распространения поверхностных волн. Вопрос обтекания подземных трубопроводов плоской волной, фронт, которой перпендикулярен к оси трубопровода, к настоящему времени в литературе частично исследован. В частности, выявлено, что максимальное напряжение в трубопроводе существенно зависит от отношения скорости распространения сейсмической волны к скорости продольной волны в теле трубопровода, названного числом Маха, характера взаимодействия трубопровода и окружающей его среды. В данной работе проведен анализ поведения подземного трубопровода при действии стационарной поверхностной волны на подземный трубопровод, который рассматривается как бесконечный упругий стержень. Ось трубопровода направлена параллельно свободной поверхности упругого полупространства. Предполагается, что плоские волны Релея и Стоунли падают на границу из верхнего полупространства. Записываются волновые уравнения (продольных и поперечных волн) для верхнего и нижнего полупространства, а граничные условия – относительно потенциалов. Рассматривается несколько случаев формирования поверхностных волн при падении продольных и поперечных волн на границе полупространств: 1) На границе падает продольная волна; 2) на границе падает поперечная волна. Получена система дифференциальных уравнений для определения перемещений частиц грунта и продольного смещения сечений трубопровода за фронтом поверхностных волн. Предложена аналитическая реализация для решения соответствующих краевых задач. Установлены различные закономерности влияния глубины залегания трубопровода и длины волн Стоунли на напряженно-деформированное состояние сечений длинного трубопровода. Расчетным путем установлено, что с ростом длины волны Стоунли темп падения амплитуд перемещений частиц среды падают. Это указывает на возможность более существенного влияния длинных волн на поведение подземных сооружений. По определению поверхностные волны Стоунли на границе двух упругих сред при падении продольной волны могут существовать на границе при отсутствии падающей волны. При устремлении амплитуды падающих волн к нулю, сохранив амплитуды отраженных волн конечный волновой процесс вблизи границы происходит без участия падающих волн, т.е. вдоль границы распространяется только волна Релея. Определено перемещение частиц грунта за скользящий фронт по границе контакта двух сред. Осредненное по контуру сечения продольное смещение частиц грунта с ростом длины волны уменьшается по закону близкому экспоненциальному, также установлено, что рост коэффициента Пуассона грунтовой среды, что относится к более податливой среде, приводит к уменьшению в 1.5-2 раза величины осредненной по контуру сечения трубопровода перемещения частиц грунта. Также показано, что увеличение длины волны Релея и значения коэффициента упругого отпора грунта в торцевых сечениях трубопровода, а также коэффициента Пуассона грунта приводят к снижению величины осевого напряжения в сечениях трубопровода.

Литература

1. *Chopra A.K.* Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering // 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs. — New Jersey, 2012. — 994.

2. *Strutt J.W.* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proceedings of the London Mathematical Society, 17 (1885), 4–11.

3. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // Journal of Applied Physics. 39:9 (1968), 4319–4325.

4. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // Journal of the Acoustical Society of America. 45:4 (1969), 845–851.

5. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Acoustical Physics. 6 (1970), 109–166.

6. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proceedings of the Royal Society. 106 (1924), 416–428.

7. *Sezawa K., Kanai K.* The range of possible existence of Stoneley waves and some related problems // Bulletin of the Earthquake Research Institute. 17 (1939), 1–8.

8. *Scholte J.G.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 5 (1947), 120–126.

9. *Ильюшин А.А., Рашидов Т.* О действии стационарной сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук. 1 (1971), 37–42.

10. *Рашидов Т.Р.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений // Ильюшин А.А. (ред.). — Ташкент: Фан, 1971. — 180.

11. *Мардонов Б.М.* Волновые процессы в упругих насыщенных средах // Рашидов Т.Р. (ред.). — Ташкент: Фан, 1991. — 141.

ПОЛНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВИЖЕНИЙ С ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

О.С. Розанова, М.К. Турцынский, Н.В. Винонен

rozanova@mech.math.msu.su

УДК 517.957

Мы рассматриваем систему уравнений газовой динамики в равномерно вращающейся системе координат в двумерном случае. Эта система традиционно используется для моделирования среднемасштабных метеорологических процессов. Специальный класс решений, характеризующийся линейной по координатам скоростью, может быть полностью описан квадратично нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Положения равновесия этой системы отвечают стационарным режимам движения исходной системы уравнений. Мы исследуем характер и устойчивость всех возможных положений равновесия при различных допущениях модели.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, модели атмосферы, устойчивость

Full classification of equilibria for motions with uniform deformation on a rotating plane

We consider the system of gas dynamics in a uniformly rotating coordinate frame in two dimensions. This system is traditionally used for modeling of meteorological processes of the middle scale. A special class of solutions, characterized by a velocity linear with respect to the coordinates, can be completely described by a quadratically nonlinear system of ordinary differential equations. Equilibria of this system correspond to stationary regimes of the initial system of gas dynamics. We study the nature and stability of all possible equilibria under various assumptions of the model.

Keywords: mathematics, differential equations, atmospheric models, stability

Мы рассматриваем систему уравнений газовой динамики в равномерно вращающейся системе координат на плоскости:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u} - \delta\omega^2\mathcal{D}\mathbf{x}) + \nabla p = 0,$$
$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\bar{U}) = 0, \qquad \partial_t S + (\bar{U}, \nabla S) = 0.$$

где $\mathbf{u}(t,x) = (U_1, U_2)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки, $\mathcal{L} = lL$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $l = 2\omega\sin\theta > 0$ – параметр Кориолиса, $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$,

Розанова Ольга Сергеевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Olga Rozanova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Турцынский Марко Казимирович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Marko Turzynskyi (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Винонен Никита Викторович, магистрант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Nikita Vinonen (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$k = \sin^2\theta$. Уравнение состояния имеет вид $p = \rho^\gamma e^S, \gamma > 1$. Если центробежная сила не принимается по внимание, то δ. Эта система может быть получена при помощи некоторой процедуры усреднения трехмерной модели атмосферы в пренебрежении кривизной поверхности и традиционно используется для моделирования среднемасштабных метеорологических процессов.

Если предположить, что $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = Q(t)\mathbf{x},\ Q(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, то с указанноу системой можно несколькими способами связать матричную систему уравнений

$$\dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma - 1)\mathbf{tr}QR = 0, \quad \dot{Q} + Q^2 + lLQ + 2c_0 R - \delta\omega^2\mathcal{D} = 0,$$

где $R = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}$, $c_0 = \text{const}$. Исследование подобного вида решений (решений с однородной деформацией) для уравнений газовой динамики было начато в [1] в лагранжевых координатах для $\omega = 0$ в пространственной размерности, равной трем, и породило большую серию работ (см. обзор [2]). В последнее время к подобным задачам возрос интерес, причем многие результаты переоткрываются (например, [3]).

Положения равновесия этой системы отвечают стационарным режимам движения исходной системы уравнений газовой динамики. Мы показываем, что все возможные положения равновесия делятся на два типа: вихри и сдвиги. Первое из них – однопараметрическое, второе – двупараметрическое. В частности, семейство особых точек, отвечающее вихревому движению, имеет вид

$$a = d = 0,\ b = -c = b^*,\ A = C = A^* = \frac{b^*(b^* - l)}{2c_0},\ B = 0$$

(b^* – параметр).

В невращающейся системе отсчета все положения равновесия неустойчивы. Во вращающейся системе отсчета результаты существенно зависят от условий, при которых происходит переход от полной модели на сфере к модели на касательной плоскости. Если пренебречь, как это обычно делается, членом, отвечающим центробежной силе ($\delta = 0$), то при определенных значениях параметров положения равновесия, соответствующие вихревым движениям, становятся устойчивыми по Ляпунову. А именно, при $\lambda = \frac{b^*}{l} \in (0,1)$ положение равновесия устойчиво по Ляпунову при всех $\gamma \geqslant 1$, при $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$ оно неустойчиво, а в оставшейся паре полуинтервалов устойчивость зависит от γ: при $\gamma \in (1,2]$ положение равновесия устойчиво при $\lambda \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$, а при $\gamma \to \infty$ этот интервал стремится к $(0,1)$.

Однако член, отвечающей центробежной силе, не может считаться малым для решения с линейным профилем скорости при большом расстоянии от центра вихря. Если его сохранить, то есть положить $\delta = 1$, то все положения равновесия остаются неустойчивыми.

Отметим, что доказательство неустойчивости в большинстве случаев может быть получено при помощи анализа линейного приближения системы

вблизи особых точек и трудность здесь состоит лишь в громоздкости вычислений. Однако доказательство устойчивости очень деликатно и требует специальной техники перехода в лагранжевы координаты.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Новое решение уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР, **111**:3 (1956), 47-49.

2. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Нелинейная динамика, **4**:4 (2008), 363–407.

3. *Sideris T.C.* Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum // Arch. Ration. Mech. Anal., **225**:4 (2017), 141-176.

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ СРЕДА ПЛАНИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ И СЕАНСОВ СВЯЗИ СО СПУТНИКАМИ ДЗЗ

В.В. Сазонов, С.В. Сазонова, И.А. Самыловский, А.С. Сапелкин

sazonov@cosmos.msu.ru, sofia.sazonova@cosmos.msu.ru, ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru, asapelkin0x01@yandex.ru

УДК 519.673

В ходе выполнения работ разработан комплекс программных средств, обеспечивающий функциональность по расчету оптимальных маршрутов космических съемок, а также автоматизированному управлению наземными антеннами для обеспечения сеансов связи с целевыми аппаратами. Доклад посвящен теоретическим и прикладным аспектам реализации, а также описанию перспектив модернизации комплекса.

Ключевые слова: Дистанционное зондирование Земли, антенная система, расчет сеансов связи, автоматизированное управление, дискретная оптимизация

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00091).

Сазонов Василий Викторович, к.ф.-м.н., и.о.декана, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vasiliy Sazonov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Сазонова Софья Викторовна, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Sofia Sazonova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Самыловский Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Ivan Samylovskiy (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Сапелкин Арсений Сергеевич, программист, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Arseniy Sapelkin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Instrumental environment for space ERS satellites shooting routes and communication sessions planning

During this work, a set of software tools was developed, providing functionality for computation of the space shooting optimal routes, as well as automated control of ground antennas for providing communication sessions with target devices. Current report is devoted to the theoretical and applied aspects of implementation, as well as the description of the prospects for the complex modernization.

Keywords: Earth Remote Sensing, Antenna System, Communication Sessions Computation, Automatic Control, Discrete Optimization

В ходе выполнения данной работы создан комплекс программных модулей, предоставляющий пользователю функциональность по расчету оптимального маршрута космической съемки для выполнения набора заказов с заданными параметрами, а также по расчету углов наведения наземной антенны на космический аппарат для формирования файлов целеуказаний, используемых в дальнейшем для осуществления сеанса связи.

Функциональность расчета маршрута съемки достигается с помошью формирования динамического графа конфигураций съемки (получаемых путем поиска пересечения полос захвата камеры спутника с ограничивающими многоугольниками заявок) и поиска оптимального пути в нем (см. более подробное описание в работе [1]). Такой подход, с одной стороны, требует выполнения калибровки метода под характеристики конкретного аппарата, однако позволяет эффективно реализовать различные режимы съеимки (стереосъемка с различными наборами кадров, площадная съемка, съемка криволинейных маршрутов и т.д.). В рамках комплекса реализован полный цикл расчета вплоть до формирования массивов полетных заданий, пригодных к закладке в систему управления спутников.

При наличии информации об элементах сети наземных станций комплекс производит расчет зон связи и создает задания на прием информации, которые используются в качестве исходных данных комплекса управления антенными системами (см. подробное описание в работе [2]). Он представляет собой полуавтономную среду, позволяющую при наличии связи с модулем планирования и с сервером антенны рассчитать набор траекторий движения и передать их в качестве управляющих воздействий на сервер для осуществления движения антенны. Предусмотрена функциональность по упреждению движения спутника, по перестроению между траекториями и по автоматическому осуществлению технологического процесса "выход в начальную точку - движение по траектории - парковка в зенит".

Программный комплекс способен функционировать как в автоматизированном режиме, осуществляя расчет целеуказаний и передачу их на антенну по мере поступления задач на выполнение сеансов связи, так и в ручном режиме, в ходе которого пользователь с помощью стандартных элементов графического интерфейса может осуществлять изменение углов наведения, угловых скоростей антенны, а также наведение антенны на объекты с заданными полярными координатами («парковка» антенны в зенит, наведение антенны на Солнце как естественный источник радиоизлучения и т.д.)

Разработанные решения могут быть использованы при разработке ПО наземного сегмента новых орбитальных группировок и отдельных космических аппаратов. Предполагается дополнение комплекса функциональностью по работе с группировками спутников с использованием опыта коллектива, отраженного в работе [3], а также расширение математического аппарата, используемого для расчета оптимальных маневров.

Литература

1. *V. Sazonov, S. Sazonova, I. Samylovskiy, A. Sapelkin, S. Budzinskiy, O. Bulatov, M. Egorov, O. Morozov, I. Frolov, V. Lobanov, V. Tsvetkov, A. Strochenkin.C.* Scalable Real-Time Planning and Optimization Software Complex for the Purposes of Earth Remote Sensing // IFAC PapersOnLine, 51-32 (2018), 451-455.

2. *Сазонов В.В., Егоров М.В., Морозов О.В., Мухамеджанов И.Д., Сазонова С.В., Самыловский И.А., Сапелкин А.С.* Масштабируемый комплекс программных средств автоматизированного управления антенной в составе наземного сегмента группировки спутников ДЗЗ // 15-я Конференция молодых учёных "Фундаментальные и прикладные космические исследования". Сборник трудов (2018), 96-106.

3. *Сазонов В.В., Егоров М.В., Морозов О.В., Романенко Т.Е., Самыловский И.А., Семёнов А.Н.* Масштабируемый программный комплекс для интерактивного моделирования и отображения состояния наземного и орбитального сегмента спутниковой группировки // 15-я Конференция молодых учёных "Фундаментальные и прикладные космические исследования". Сборник трудов (2018), 89-95.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВЫЖИВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ХИМИОТЕРАПИИ ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫХ ОПУХОЛЕЙ

Н.Н. Субботина, Н.Г. Новоселова

subb@uran.ru, n.g.novoselova@gmail.com

УДК 517.977

Рассматривается задача химиотерапии злокачественных опухолей, математическая модель которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется задача оптимального управления (оптимальной терапии), целью которой является минимизация злокачественных клеток в организме в заданный финальный момент времени T. Построено множество выживаемости до момента T, т.е. множество начальных состояний модели (объема опухоли и количества лекарства в организме), для которых оптимальное управление гарантирует динамику злокачественной опухоли вплоть до T в объеме, не превышающем предельный объем, совместимый с жизнью.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, теория оптимального управления

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00074) и программы Президиума РАН (проект № 18-1-1-10).

Субботина Нина Николаевна, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия); Nina Subbotina (Krasovskii Institut of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia)

Новоселова Наталья Геннадьевна, магистрант, ИЕНиМ УрФУ имени Б.Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия); Natalia Novoselova (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Construction of the viability set in a chemotherapy problem for malignant tumors.

The problem of chemotherapy of malignant tumors is considered, the mathematical model of which is described by a system of ordinary differential equations. We study the optimal control problem (optimal therapy), the goal of which is to minimize the malignant cells in the body at a given final instant T. The set of viability up to T, i.e. the set of initial states of the model (tumor volume and quantity of drug in the body), for which the optimal control guarantees the dynamics of a malignant tumor up to the final instant T in a volume not exceeding the limiting volume compatible with life.

Keywords: mathematics, differential equations, optimal control theory

В данной работе рассматривается математическая модель, которая появляется при химиотерапии злокачественной опухоли [1,2]:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h),\ m(t_0) = m_0,\ \gamma - const > 0 \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t),\ h(t_0) = h_0,\ \alpha - const > 0, \end{cases}$$

здесь m — число злокачественных клеток, h — количество лекарства, способного убивать клетки опухоли, $f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли, $u(t)$ — количество лекарства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Предполагается, что выполнены следующие ограничения:
1. доза вводимого лекарства ограничена: $0 \leqslant u(t) \leqslant Q$, где Q — максимально допустимая доза;
2. $0 < m < M$, где M - максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью,
3. $0 \leqslant h \leqslant L$, где L - максимальное допустимое количество лекарства в организме.

Исследуется случай, когда скорость роста злокачественных клеток $g(m)$ определяется законом Гомперца:

$$g(m) = r\, m - \theta\, m \ln(m), \quad r, \theta > 0.$$

Ставится задача оптимального управления процессом терапии путем воздействия $u(t)$ так, чтобы минимизировать в заданный финальный момент времени T количество злокачественных клеток в организме, т.е. минимизировать терминальную функцию платы:

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \to \inf_{u(\cdot)},$$

В работе [3], рассмотрен случай, когда функция терапии, описывающая влияние лекарства на скорость роста клеток, имеет два максимума, в отличие от вышеупроянутых работ, где исследовался случай одного максимума у функции терапии. Построена аналитически функция цены, которая каждому начальному состоянию $(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L]$ ставит в

соответствие оптимальный результат рассматриваемой задачи оптимального управления $Val(t_0, m_0, h_0)$.

Теорема 1. *Функция цены $Val(t_0, m_0, h_0)$ в исследуемой задаче имеет следующий вид:*

$$Val(t_0, h_0, m_0) = m_0^{e^{-2\theta(t-t_0)}} e^{\left[\frac{2r}{\theta}(1 - e^{-\theta(t-t_0)}) - 2\gamma V(t_0, h_0)\right]},$$

где $V(t_0, h_0)$ – оптимальный результат в следующей вспомогательной задаче оптимального управления

$$V(t_0, h_0) = \sup_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{T} f(h(\tau; t_0, h_0, u(\tau)))d\tau;$$

$$\frac{dh(\tau)}{d\tau} = -\alpha h(\tau) + u(\tau), \quad h(t_0) = h_0, \quad 0 \leqslant u \leqslant Q.$$

Полученная конструкция опирается на результаты работ [4,5]. Также в работе [3] построен оптимальный синтез $u^0(t, h)$.

Данная работа посвящена построению множества выживания W для рассматриваемой модели:

$$W = \{(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L] : Val(t_0, m_0, h_0) \in [0, M]\}.$$

Это множество состоит из таких точек (t_0, m_0, h_0), что, стартуя из них при $t = t_0$, в течение всего процесса лечения $h^0(t) = h^0(t; t_0, h_0)$ вплоть до заданного финального момента $t = T$ оптимальные траектории $m^0(t) = m^0(t; t_0, m_0, h_0)$ остаются в этом множестве, т.е. количество злокачественных клеток в организме остаётся ниже критического уровня M.

Рассматривая точку $(t_0, m_0, \hat{h}_1) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L]$ получаем:

$$(t_0, m_0, \hat{h}_1) \in W, \Leftrightarrow \ m_0 \in [0, \hat{m}_1(t_0)],$$

$$\hat{m}_1(t_0) = M^{e^{\theta(T-t_0)}} \exp\left[\frac{1}{\theta}(1 - e^{\theta(T-t_0)})(r - \gamma f(\hat{h}_1))\right].$$

Аналогично получаем для случая, когда $h_0 = \hat{h}_3$:

$$(t_0, m_0, \hat{h}_3) \in W, \Leftrightarrow \ m_0 \in [0, \hat{m}_2(t_0)],$$

$$\hat{m}_2(t_0) = M^{e^{\theta(T-t_0)}} \exp\left[\frac{1}{\theta}(1 - e^{\theta(T-t_0)})(r - \gamma f(\hat{h}_3))\right].$$

Если $h_0 = h^* < \hat{h}_1$, $(t_0, h_0) \in \Pi_1 = [0, T) \times [0, \hat{h}_1]$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W, \Leftrightarrow \ m_0 \in [0, \hat{m}^*],$$

$$m^0(t_1; t_0, \hat{m}^*, h^*) = \hat{m}_1(t_1), t_1 \in (t_0, T), \text{иначе } m^0(T; t_0, \hat{m}^*, h^*) = M.$$

Если $h_0 = h^* > \hat{h}_3$, $(t_0, h_0) \in \Pi_2 = [0, T) \times [\hat{h}_3, L]$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W, \Leftrightarrow m_0 \in [0, \hat{m}^*],$$

$$m^0(t_2; t_0, \hat{m}^*, h^*) = \hat{m}_2(t_2), t_2 \in (t_0, T), \text{иначе } m^0(T; t_0, \hat{m}^*, h^*) = M.$$

Если $h_0 = h^* > \hat{h}_1$, $(t_0, h_0) \in \Pi_3 = [0, T) \times [\hat{h}_1, x(t)]$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W, \Leftrightarrow m_0 \in [0, \hat{m}^*],$$

$$m^0(t_1; t_0, \hat{m}^*, h^*) = \hat{m}_1(t_1), t_1 \in (t_0, T), \text{иначе } m^0(T; t_0, \hat{m}^*, h^*) = M.$$

Если $h_0 = h^* < \hat{h}_3$, $(t_0, h_0) \in \Pi_4 = [0, T) \times (x(t), \hat{h}_3]$, то

$$(t_0, m_0, h^*) \in W, \Leftrightarrow m_0 \in [0, \hat{m}^*],$$

$$m^0(t_2; t_0, \hat{m}^*, h^*) = \hat{m}_2(t_2), t_2 \in (t_0, T), \text{иначе } m^0(T; t_0, \hat{m}^*, h^*) = M.$$

Здесь $x(t), t \in [0, T], x(T) = \hat{h}_2$ - линия Ранкина – Гюгонио, которая описывает множество точек недифференцируемости функции $V(t, h)$.

Заметим, что все оптимальные траектории $m^0(t; t_0, m_0, h_0)$, стартующие из точки $(t_0, m_0, h_0) \notin W$ не выживают в W до финального момента времени T, так как они удовлетворяют условию: $m^0(t^*; t_0, m_0, h_0) > M$ для некоторых $t^* \in (t_0, T)$.

Литература

1. *Братусь А.С., Чумерина Е.С.* Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // ЖВММФ. 2008. Т. 48. Вып. 6. С. 946–966.

2. *Субботина Н.Н., Новоселова Н.Г.* Оптимальный результат в задаче управления системой с кусочно монотонной динамикой // Журнал "Труды института математики и механики УрО РАН"2017; 23(4): 265-280.

3. *Subbotina N.N., Novoselova N.G.* The value function in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law // IFAC-PapersOnLine 2018, Volume 51, Issue 32, P. 855-860.

4. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser: Boston, 1995.

5. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. — Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.

ЗАДАЧА О ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ ДЛЯ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ

Р.Н. Тихомиров
romat81@bk.ru

УДК 517.518

Работа посвящена оценке взаимного влияния токов в задаче о тепловыделении для конструкции близко расположенных параллельных проводников с периодической структурой. Для исследования используются асимптотические методы – метод усреднения и метод пограничного слоя.

Ключевые слова: тепловыделение, электроника, усреднение

Heat release problem for closely spaced parallel conductors

In this paper we evaluate the mutual influence of currents in the heat release process for close parallel conductors with a periodic structure. The analysis is based on asymptotic methods: homogenization techniques and the boundary layer method.

Keywords: heat release, electronics, homogenization

Рассмотрим систему параллельных близко расположенных проводников в диэлектрической среде, занимающей плоскую прямоугольную область. Задача о тепловыделении в случае взаимного влияния полей, создаваемых токами в проводниках имеет большое значение для электроники.

Запишем "стационарную" систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = -i\frac{\omega}{c} e(\bar{x})\bar{E} + \frac{4\pi}{c}\bar{j}_{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \bar{E} = i\frac{\omega}{c}\bar{H}, \\ \operatorname{div}\left(e(\bar{x})\bar{E}\right) = 4\pi\rho_{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} \bar{H} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\bar{H}$, $\bar{E}$ – векторы напряженности магнитного и электрического поля соответственно; $\bar{j}_{\text{ст}}$, $\rho_{\text{ст}}$ – сторонние токи и заряды, полагаем, что они нулевые; $e(\bar{x})$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды (включающая проводимость), которая может зависеть от $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Выразим $\bar{H}$ из второго уравнения системы (1), подставим в первое уравнение и воспользуемся тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = -\Delta\bar{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A}$. Получим систему из трех уравнений (используя $\operatorname{div}\left(e(\bar{x})\bar{E}\right) = 0$,

$$\Delta\bar{E} + k^2(\bar{x})\bar{E} + \operatorname{grad}\left(\bar{E}, \frac{\nabla e}{e(\bar{x})}\right) = 0, \tag{2}$$

где принято обозначение $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}e(\bar{x})$, ω – частота, c – скорость света.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (задание № 1.3270.2017/4.6) и грантом РФФИ № 19-01-00184/19

Тихомиров Роман Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, ВлГУ имени А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия); Roman Tikhomirov (Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia)

Будем считать, что область из композиционного материала на плоскости состоит из двух материалов: кварца (диэлектрик) и хрома (проводник), включения которых имеют периодическую структуру, из которых самая простая – параллельные провода.

Для постановки задачи нужно задать граничные условия на "стыках" или считать, что $e(\bar{x})$, быстро меняется от одной постоянной величины к другой (от e_1 к e_2) в узкой переходной зоне ширины $\varepsilon\mu$, $\varepsilon \ll 1$ и $\mu \ll 1$. Это позволит не вводить краевых условий на границе раздела двух фаз. Тогда $e(\bar{x}) = e_\mu\left(\frac{\bar{x}_1}{\varepsilon}\right)$, $k^2(\bar{x}) = k_\mu^2\left(\frac{\bar{x}_1}{\varepsilon}\right)$. Мы получаем задачу усреднения (переход при $\varepsilon \to 0$) в системе (2), где осцилляции в младших членах, а сама система – эллиптическая.

Покажем, что усредненную систему можно найти в некоторых случаях аналитически и в данном случае вычислить величину тепловыделения. Более сложная ситуация – параллельные провода в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Уравнения для E_1, E_2 принимают вид

$$\begin{cases} \Delta E_1 + k_\mu^2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) E_1 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(E_1\frac{\partial e_\mu}{\partial y_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + E_2\frac{\partial e_\mu}{\partial y_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) e_\mu^{-1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \\ \Delta E_2 + k_\mu^2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) E_2 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(E_1\frac{\partial e_\mu}{\partial y_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + E_2\frac{\partial e_\mu}{\partial y_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) e_\mu^{-1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из-за независимости e_μ от x_2 в (3) обращаются в нуль слагаемые $\frac{\partial e_\mu}{\partial y_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$ и $E_2\frac{\partial e_\mu}{\partial y_2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$.

Видно, что система распадается на скалярные уравнения, их асимптотическое поведение по ε можно исследовать известными для скалярного уравнения методами. Уравнение для компоненты E_2 примет вид

$$\Delta E_2 + k_\mu^2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) E_2 + F_\mu^\varepsilon(x_1, x_2) = 0,$$

где асимптотика $F_\mu^\varepsilon(x_1, x_2)$ по ε уже найдена из анализа уравнения для E_1. Если же мы предположим, что краевые условия для $\bar{E}$ не содержат компоненты E_1, то $E_1 \equiv 0$ во всем прямоугольнике и уравнение для E_2 принимает вид

$$\Delta E_2 + k_\mu^2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) E_2 = 0.$$

Оно тривиально усредняется, и получается уравнение

$$\Delta E_2 + \langle k_\mu^2 \rangle E_2 = 0,$$

где $\langle\cdot\rangle$ – среднее по периоду. Это интересный факт, поскольку в этом уравнении присутствуют параметры как проводника, так и диэлектрика, то есть провода не являются независимыми и на величину тепловыделения влияют не только параметры проводника, как было бы в случае независимости токов друг от друга. Для случая зависимости e_μ от x_1 и x_2 и наличия в краевых условиях обоих компонент E_1, E_2 система не распадается, и для ее исследования нужны новые подходы.

Чтобы определить асимптотическое поведение функции $F_\mu^\varepsilon(x_1, x_2)$ по малому параметру ε нужно исследовать поведение по ε решения уравнения для компоненты E_1 поля E с учетом $\frac{\partial e_\mu}{\partial y_2} = 0$. Это уравнение имеет вид

$$\operatorname{div}\left(a\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\left(b\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon\right) = 0 \tag{4}$$

с краевым условием $u^\varepsilon|_{\partial Q} = \varphi(\bar{x})$, где Q – прямоугольник, в котором рассматривается решение $u^\varepsilon(\bar{x})$. Исследовать поведение решения по ε можно методами из [1].

Пусть $p(y)$ – положительное 1-периодическое по y_1, y_2 решение уравнения

$$\operatorname{div}(a(y)\nabla p) - \operatorname{div}(b(y)p) = 0,$$

удовлетворяющее условию $\int\limits_Y p(\bar{y})dy = 1$, где Y – двумерная единичная ячейка периодичности. Такое решение существует и единственно, как показано в [1]. Будем искать решение уравнения (4) в виде $u^\varepsilon(x) = p\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) v^\varepsilon(x)$. Вычисления показывают, что функция $v^\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\left(p^2\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) a\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)\nabla v^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}\tilde{b}\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)\nabla v^\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div}\tilde{b}(y) = 0,$$

для векторного поля $\tilde{b}$ можно дать явное представление. Известными методами теории пограничного слоя (см. [2]) можно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ решение $v^\varepsilon(x)$ стремится внутри Q к решению уравнения первого порядка $\langle\tilde{b}\rangle_Y \nabla v^0 = 0$ с краевым условием $v^0|_{\partial Q^+} = \varphi(x)\cdot\langle\frac{1}{p}\rangle_Y$, где ∂Q^+ – часть границы прямоугольника Q, где траектории векторного поля $\langle\tilde{b}\rangle_Y$ "входят" в прямоугольник Q. В окрестности границы выполнение краевых условий обеспечивается за счет пограничных слоев, принимающих существенно отличные от нуля значения только в приграничной полоске прямоугольника Q. Если же $\langle\tilde{b}\rangle_Y \equiv 0$, то предельное значение функции $v^\varepsilon(x)$ будет определяться пределом при $\varepsilon \to 0$ решения краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка (см., например, [3])

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(p^2\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) a\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)\nabla v^\varepsilon(x)\right) = 0, \\ v^\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{p\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)}. \end{cases}$$

Оно исследуется хорошо известными методами усреднения уравнений второго порядка, используя которые строится предельная функция $v^0(x)$. Таким образом, $F^\varepsilon_\mu(x_1, x_2) = p\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) v^0(x) + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Так можно получить асимптотику $E^1_\varepsilon(x)$ и $E^2_\varepsilon(x)$, когда краевые условия для E^1 и E^2 на ∂Q – произвольные, но $e_\mu(\bar{y})$ зависит только от y_1. В этом случае функцию $p(y_1)$ можно найти в явном виде, решив уравнение $\langle\tilde{b}\rangle_Y \cdot \nabla v^0(x) = 0$ в Q с краевым условием $v^0(x) = \varphi(x)\langle\frac{1}{p}\rangle_Y$ на ∂Q^+.

Автор благодарен А.С. Шамаеву и А.Л. Пятницкому за полезные обсуждения.

Литература

1. *Пятницкий А.Л.* Усреднение и асимптотические свойства сингулярно возмущенных дифференциальных операторов: дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.02 / Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, 2016.

2. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, **12**:5(77) (1957), 3-122.

3. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М: МГУ, 1990.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ЛОКАЛИЗОВАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А.А. Толченников
tolchennikovaa@gmail.com

УДК 517.955.8

Рассматривается система уравнений Дирака для графена с линейным потенциалом и с локализованным начальным условием. Решение записывается в интегральном виде с помощью функций параболического цилиндра. Вне окрестности некоторых особых точек решение записывается в виде ВКБ.

Ключевые слова: система уравнений Дирака, специальные функции, ВКБ

The solution of the two–dimensional Dirac equation for graphene with a linear potential and localized initial data

We construct exact solution of the two–dimensional Dirac equation for graphene with a linear potential and localied initial data. We simplify solution outside singular points in WKB form.

Keywords: two–dimensional Dirac equation, special functions, WKB

Рассматривается двумерное уравнени Дирака для графена с линейным потенциалом $U(x) = x_1$:

$$\begin{cases} i\,h\,u_t = \left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1} + h\frac{\partial}{\partial x_2}\right) v + x_1 u \\ i\,h\,v_t = \left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1} - h\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u + x_1 v \end{cases} \tag{5.1}$$

и для него ставится задача Коши с локализованным начальным условием

$$u|_{t=0} = h^{-2}u^0\left(\frac{x}{h}\right),\ v|_{t=0} = h^{-2}v^0\left(\frac{x}{h}\right), \tag{5.2}$$

где $u^0(y), v^0(y)$ — быстро убывающие на бесконечности функции. Обозначим преобразования Фурье $\widetilde{u}^0(p) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ixp}u^0(x)dx$, $\widetilde{v}^0(p) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ixp}v^0(x)dx$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10282).

Толченников Антон Александрович, к.ф.-м.н., ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия), МФТИ (Долгопрудный, Россия), МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anton Tolchennikov (IPMech RAS, MIPT, Russia)

Тогда решение задачи имеет вид $u(t,x) = a(t,x)+b(t,x), v(t,x) = a(t,x)-b(t,x)$, где

$$\begin{pmatrix} a(t,x) \\ b(t,x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\frac{(\alpha,x)-tx_1}{h}} M(\alpha_1 - t, \alpha_2) M^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \widetilde{a}^0(\alpha_1,\alpha_2) \\ \widetilde{b}^0(\alpha_1,\alpha_2) \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{5.3}$$

где элементы матрицы $M(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} A(p_1,p_2) & B(p_1,p_2) \\ C(p_1,p_2) & D(p_1,p_2) \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ имеют следующий вид:

$$A(p_1,p_2) = \frac{p_2}{\sqrt{2hi}} y_2(a+1,z),\ B(p_1,p_2) = -y_1(a+1,z),$$

$$C(p_1,p_2) = y_1(a,z),\ D(p_1,p_2) = \frac{p_2}{\sqrt{2hi}} y_2(a,z),$$

где a, z выражаются через p_2, p_1: $a = -\frac{1}{2} + \frac{ip_2^2}{2h}, z = \sqrt{\frac{2i}{h}} p_1$ и где y_1, y_2 выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию $M(\alpha,\beta,x)$:

$$y_1(a,z) = e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right),\ y_2(a,z) = ze^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right).$$

Полученная точная формула позволяет изучить разложение решения по модам (электронной и дырочной моде), изучить эффект перехода с одной моды на другую и эффект пересечения термов.

Соавтором этого сообщения является также проф. С.Ю. Доброхотов.

Литература

1. *Tudorovskiy T., Reijnders K. J. A. , Katsnelson M. I.* Chiral tunneling in single-layer and bilayer graphene // Phys. Scr. **146** (2012)

2. *Katsnelson M. I.* Graphene: carbon in two dimensions — Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

ПОРИСТЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ СРЕДЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

И.О. Фасхеев

fiomsu@mail.ru

УДК 539.3

Данная работа направлена на решение задачи о течении жидкости через твердый пористый каркас с учетом его конечных деформаций при различных режимах протекания. В работе использована новая модель пористых насыщенных сред со сложными внутренними взаимодействиями.

Ключевые слова: механика, пористые насыщенные среды, конечные деформации

Фасхеев Игорь Олегович, к.ф.-м.н., научный сотрудник Института динамики геосфер РАН (Москва, Россия); Igor Faskheev (Institute of Dynamics of Geospheres of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia).

Porous saturated media with finite strains

This work is aimed at solving the problem of fluid flow through a solid porous skeleton with regard to its finite strains under various flow conditions. We used a new model of porous saturated media with complex internal interactions.

Keywords: mechanics, porous saturated media, finite strains

Физические процессы течения жидкостей сквозь пористые твердые среды широко распространены в нефтегазовой промышленности, строительстве фильтрационных сооружений, сельском хозяйстве.

Построение моделей гетерогенных сред требует математического описания их механических свойств, движения и фазовых переходов, видов внешних нагрузок, условий для внутренних взаимодействий.

В развитие широкоизвестных моделей пористых насыщенныз сред [1, 2, 3], предложена модель [4, 5], учитывающая межфазные взаимодействия, различные режимы движения (медленные и быстрые) жидкости и деформации (малые и конечные) скелета.

Наиболее важным понятием этой модели является понятие интерактивных сил. Под интерактивными силами понимаются объемные силы взаимного сопротивления жидкости и каркаса при протекании жидкости через деформируемый скелет.

В работе [4] была получена количественная оценка абсолютного значения вектора интерактивной силы и его разложение на члены, имеющие ясный физический смысл: сила Дарси (фильтрационная сила), сила фронтального напора (динамическая сила), сила Био (инерционная сила).

В работе [6] поставлена и численно решена задача об одномерном стационарном течении сжимаемой жидкости через твердый пористый каркас из несжимаемого материала с учетом сил взаимодействия Дарси и фронтального напора при малых деформациях скелета.

В работе [7] поставлена и численно решена задача об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости через плоский деформируемый пористый слой конечной толщины из несжимаемого материала в случае конечных деформаций с учетом силы Дарси и силы фронтального напора. В данной статье представлены дополнения к модели интерактивных сил, учитывающие изменения пористости каркаса, и тем самым обобщающие понятие интерактивных сил из вышеуказанных работ.

В настоящей работе приводятся результаты автора, продолжающие и обобщающие результаты работ [6, 7]. Задача об одномерном течении сжимаемой жидкости через твердый пористый каркас из несжимаемого материала будет решена для случая неупругих деформаций каркаса.

Литература

1. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Low-frequency range. The Jouranl of the Acoustical Society of America.28, 2. Pp. 168-178, 1956.

2. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. Journal of Applied Physics. 1962. 33. 4. Pp. 1482-1498.

3. *Wilmanski K., Albers B.A.* A note on objectivity of momentum sources in porous materials. Two notes on continous modeling of porous media. Preprint 579. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics. Berlin, 2000.

4. *Brovko G.L., Grishayev A.G., Ivanova O.A.* Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions. Journal of physics: Conference Series, 62, 2007. Pp. 1-22.

5. *Бровко Г.Л.* Модели и задачи для наполненных пористых сред. Вестник МГУ. Математика, механика. 2010. № 6. С. 33-43.

6. *Фасхеев И.О.* Одномерное течение жидкости сквозь пористый каркас с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 6. С. 62-66.

7. *Фасхеев И.О.* Одномерное течение жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2015. №2. С. 62-65.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

А.А. Федюков

TeleginSasha@yandex.ru

УДК 681.51,519.711

Рассматривается задача стабилизации по выходу динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные. Подход к решению основан на применении функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования регуляторов.

Ключевые слова: стабилизация, управление по выходу, линейные матричные неравенства

Stabilization for dynamical system with state-space constraints

We consider an output-feedback stabilization problem with statespace constraints. The solution based on the method of Lyapunov functions and linear matrix inequalities. The sufficient conditions for existence of controllers are obtained.

Keywords: stabilization, output-feedback control, linear matrix inequalities

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-520002 и № 19-01-00289).

Федюков Александр Анатольевич, ассистент, ННГУ имени Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Alexander Fedyukov (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia)

Существуют разные способы построения регуляторов [1], в том числе способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [2]. При этом возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т. е. в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничения на фазовые переменные объекта. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [3,4].

В работе рассмотрена задача синтеза регулятора для неустойчивого объекта. Уравнения движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия, имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)^2} - mg, \\ \frac{C_L}{(\delta - y)}\dot{I} &+ \frac{C_L I}{(\delta - y)^2}\dot{y} + RI = U(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где m — масса вывешенного тела, y — координата вывешенного тела, g — ускорение свободного падения, C_L — конструктивный параметр, δ — величина номинального зазора между электромагнитом и вывешенным телом, I — сила тока в электромагните, R — сопротивление в цепи электромагнита, $U(t)$ — напряжение, подаваемое на электромагнит.

Состояние равновесия системы определяется равенствами $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $I = I_c$, где $I_c = \sqrt{\frac{2\delta^2 mg}{C_L}}$. Перейдем к безразмерным величинам. Введем новое безразмерное время $t_n = \sqrt{\frac{2g}{\delta}}t$ и обозначив $x_1 = \frac{1}{\delta}y$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2g\delta}}\dot{y}$, $x_3 = \frac{1}{I_c}I - 1$, $u = \sqrt{\frac{\delta}{4g^2 mC_L}}(U(t) - RI_c)$ линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия. Получим

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \frac{R\delta}{C_L}\sqrt{\frac{\delta}{2g}}$.

Введем $y = Cx$ — измеряемый выход системы, $z_i = C_i x$, $i = 0,1$ — выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные, где C и C_i — заданные матрицы, соответствующего размера.

Требуется построить динамический регулятор вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

где $x_r \in R^k$ — состояние регулятора ($k \leqslant 3$), $x_r(0) = 0$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем β и выполнение при заданных значениях γ_0 и γ_1

ограничений

$$\max_{t\geqslant 0}|z_i(t)|\leqslant\gamma_i\ ,i=0,1. \tag{3}$$

Введем матрицу параметров регулятора $\Theta=\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$ и обозначим $A_0=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{k\times k} & 0 \end{pmatrix}$, $C_0=\begin{pmatrix} 0 & I_{k\times k} \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $x_c=\begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$, $\overline{C_i}=\begin{pmatrix} C_i & 0 \end{pmatrix}$, $i=0,1$, где $I_{k\times k}$, $0_{k\times k}$ — единичная и нулевая матрицы.

Сформулируем достаточные условия для существования регуляторов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть начальное состояние $x_c(0)$, матрицы $X=X^T>0$, $Y=Y^T>0$ и величины γ_i, $i=0,1$ удовлетворяют системе матричных неравенств*

$$W_{C_0}^T\left(A_0^TX+XA_0+2\beta X\right)W_{C_0}<0,$$

$$W_{B_0^T}^T\left(YA_0^T+A_0Y+2\beta Y\right)W_{B_0^T}<0,$$

$$XY=I,\begin{pmatrix} Y & x_c(0) \\ x_c^T(0) & 1 \end{pmatrix}\geqslant 0,trace\left(\overline{C_i}Y\overline{C_i}^T\right)\leqslant\gamma_i^2,i=0,1,$$

где столбцы матриц W_{C_0} и $W_{B_0^T}$ образуют базисы ядер матриц C_0 и B_0^T соответственно, т.е. $C_0W_{C_0}=0$ и $B_0^TW_{B_0^T}=0$.

Тогда все траектории системы с начальными условиями $x_c(0)\in\{x_c: x_c^TXx_c\leqslant 1\}$ удовлетворяют ограничениям (3).

Параметры закона управления для системы при ограничениях вычисляются как решение относительно переменной Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi+P^T\Theta^TQ+Q^T\Theta P<0,$$

где $\Psi=YA_0^T+A_0Y+2\beta Y$, $P=C_0Y$ и $Q=B_0^T$.

Численное моделирование проведено в пакете MATLAB. Для объекта (2) решен ряд задач. На плоскости параметров γ_0 и γ_1 получено множество точек для которых существует динамический регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем $\beta=0.1$ и выполнены ограничения

$$\max_{t\geqslant 0}|x_1(t)|\leqslant\gamma_0,\max_{t\geqslant 0}|x_3(t)|\leqslant\gamma_1,$$

где x_1 — величина, пропорциональная смещению тела. Вне этой области система матричных неравенств не разрешима. В частности, для значения $\gamma_0=0.07$ получено минимальное значение $\gamma_1^*=0.1367$. Матрица параметров регулятора, которая соответствует этим значениям имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -297.48 & -61.65 & -144.92 & 99.98 \\ -43.00 & -9.35 & 126.31 & 161.53 \\ 1.47 & -11.91 & -281.82 & -283.99 \\ 2.29 & 11.70 & 282.31 & 288.90 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В работе указано множество начальных состояний, при которых регулятор (4) стабилизирует замкнутую систему. Проведено сравнение полученного закона управления с законом управления по выходу, обеспечивающего стабилизацию объекта (2) без учета ограничений на $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Показано, что такой регулятор не применим к решению данной задачи. Проведено сравнение поведения линеаризованной (2) и нелинейной (1) моделей объекта при найденных управлениях. Расчеты показали, что регулятор (4) стабилизирует нелинейную модель электромагнитного подвеса при заданных ограничениях на фазовые переменные.

Литература

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007.

2. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.

3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. — 48-57.

4. *Федюков А.А.* Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. № 2 (1). — 152-159.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В НЕСОВЕРШЕННО ВСКРЫТОМ НЕФТЕГАЗОВОМ ПЛАСТЕ

А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов

filippovai@rambler.ru, mihaylovpn@mail.ru

УДК 536.24,536.426

В работе получено асимптотическое решение поля давления в анизотропном слоистом пласте, проницаемость которого зависит от вертикальной координаты. На примере нулевого приближения асимптотического решения задачи показан способ оценки остаточного члена и определены условия, для которых построенное решение является асимптотическим.

Ключевые слова: поле давления, слоистый пласт, переменная проницаемость, задачи сопряжения, асимптотические методы, остаточный член.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-48-020517 р_а).

Филиппов Александр Иванович, д.т.н., профессор, Михайлов Павел Никонович, д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал БашГУ; Стерлитамакский филиал ИСИ РБ (Стерлитамак, Россия); Alexsandr Filippov, Pavel Mikhailov (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia)

Asymptotic representations of the solution of the pressure field problem in an imperfectly opened oil and gas reservoir

Short abstract. The paper presents an asymptotic solution of the pressure field in an anisotropic layered layer whose permeability depends on the vertical coordinate. On the example of the zero approximation of the asymptotic solution of the problem, the method of estimating the residual term is shown and the conditions for which the constructed solution is asymptotic are determined.

Keywords: pressure field, layered reservoir, variable porosity, the task of pairing, asymptotic methods, the residual term.

Среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела, покрывающий и подстилающий пласты считаются слабопроницаемыми и изолированными от скважины, средняя область перфорирована и продуцирует жидкость с заданным отбором. Все среды считаются однородными и анизотропными по фильтрационным свойствам.

Задача заключается в отыскании квазистационарного фильтрационного поля давления в анизотропной трехслойной среде, центральный слой которой имеет проницаемость, зависящую произвольным образом от вертикальной координаты, что соответствует слоистой неоднородности пластов. В неперфорированных слоях преобладают вертикальные потоки. Это означает, что в соответствующих областях преобладают вертикальные градиенты давления, что позволяет опустить радиальную часть в операторе Лапласа в неперфорированных слоях. Основные математические трудности построения решения данной задачи связаны с наличием переменных коэффициентов в уравнении для перфорированного слоя. Аналитические методы решения таких задач сопряжения с переменными коэффициентами развиты слабо.

В задаче введен формальный асимптотический параметр так, что его уменьшение соответствует возрастанию вертикальной проницаемости центральной области [1]. С применением интегральных преобразований построено решение в нулевом асимптотическом приближении.

Сформирована задача для остаточного члена, решение которой ищется в виде ряда по тому же параметру, что и решение первоначальной задачи. Доказано, что задача для нулевого коэффициента разложения нулевого остаточного члена имеет только тривиальное решение. Установленное свойство остаточного члена имеет важное значение. Обращение в нуль нулевого остаточного члена означает, что остаточный член содержит слагаемые первого и более высоких порядков. Таким образом, нулевое приближение соответствует условию асимптотичности.

Кроме того, обращение в нуль нулевого остаточного члена определяет близость решения исходной задачи и нулевого приближения. С другой стороны, распространение требования равенства нулю более высоких коэффициентов разложения остаточного члена в соответствующих приближениях позволяет определить дополнительные условия, необходимые для нахождения более высоких коэффициентов разложения решения исходной задачи.

Литература

1. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А.* Уточнение асимптотического решения задачи о радиальной фильтрации в трехслойной системе на вязкой границе.// Прикладная физика и математика, **3** (2018), 39-49.

АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ АРСЕНАЛОВ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЛИНЕЙНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ БОЛЬЦМАНА-ВОЛЬТЕРРЫ И НЕЛИНЕЙНОГО СООТНОШЕНИЯ РАБОТНОВА

А.В. Хохлов

andrey-khokhlov@ya.ru

УДК 539.3

Дан обзор результатов цикла работ по аналитическому изучению общих свойств кривых ползучести, релаксации, деформирования и др., порождаемых линейным определяющим соотношением вязкоупругости и физически нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова с произвольными материальными функциями при различных программах нагружения. Сопоставлены арсеналы возможностей этих соотношений по описанию многообразия эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и границ их областей применимости.

Ключевые слова: кривые нагружения, релаксации, ползучести, длительной прочности, затухающая память, индикаторы применимости

Analysis and Comparison of the Linear Viscoelasticity and the Rabotnov Non-linear Constitutive Equations Capabilities

The Rabotnov non-linear constitutive relation generalizes the Boltzmann-Volterra linear relation in a uni-axial case by introducing the second material function besides creep compliance. Implying material functions are arbitrary, general properties of theoretic curves generated by the linear integral relation or by the Rabotnov relation under basic loading programs are studied analytically in order to find out inherited properties and additional capabilities of the non-linear relation, to reveal their abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena, to find the zones of material functions influence and necessary phenomenological restrictions on them, to elucidate and compare their applicability scopes.

Keywords: stress-strain curves, relaxation, creep, recovery, long-term strength curves, fading memory, non-applicability indicators

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-01146).

Хохлов Андрей Владимирович, к.т.н., в.н.с НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrew Khokhlov (Lomonosov Moscow State University, Russia)

Исследуются линейное определяющее соотношение (ОС) вязкоупругости Больцмана-Вольтерры с произвольной функцией ползучести $\Pi(t)$ и обобщающее его нелинейное соотношение Ю.Н. Работнова [1,2]

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi'(\varepsilon(t))d\varepsilon(\tau). \qquad (1)$$

с двумя материальными функциями (МФ) с целью уточнения и сравнения их областей применимости, спектров моделируемых ими реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и способов идентификации, настройки и верификации. Линейное ОС вязкоупругости получается из (1) при $\varphi(u) = u$, а функции ползучести и релаксации связаны интегральным уравнением, выражающим условие взаимной обратности операторов (1). Поэтому из трех МФ $\Pi(t)$, $R(t)$, $\varphi(u)$ в ОС (1) лишь две независимы. На функции ползучести и релаксации в ОС (1) наложим те же ограничения, что и в линейной теории: функции $\Pi(t)$ и $R(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0, +\infty)$, $\Pi(t)$ — возрастающей и выпуклой вверх, а $R(t)$ — убывающей и выпуклой вниз на $(0, +\infty)$, функция релаксации может иметь интегрируемую особенность или δ-сингулярность в т. t=0. Минимальные требования к функции φ [3–5]: $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \bigcup (0; \omega_+)$, причем $\varphi(0-) = \varphi(0+) = 0$. Из возрастания $\varphi(u)$ следует существование обратной функции $\Phi = \varphi^{-1}$ и обратимость ОС (1).

При этих ограничениях на МФ Π и φ в [3–12] и других работах выведены и аналитически изучены в общем виде уравнения семейств порождаемых ОС (1) и линейным ОС базовых квазистатических кривых: кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией деформирования, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно постоянных скоростях деформации или нагружения, при циклическом нагружении, кривых объемной, продольной и поперечной ползучести при одноосном нагружении в сочетании с постоянным и ступенчато изменяющимся гидростатическим давлением и др. Исследованы общие свойства этих кривых в зависимости от характеристик МФ и параметров нагружения: интервалы монотонности и выпуклости, скачки и изломы, асимптотики и двусторонние оценки теоретических кривых, характер сходимости их семейств при стремлении параметров программ нагружения (скорости деформирования, длительности начальной стадии нагружения и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, циклической стабильности и рэтчетинга, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику и остаточную деформацию; исследованы типы эволюции коэффициента Пуассона в испытаниях на ползучесть или релаксацию, критерии его немонотонности и знакопеременности и влияние уровня давления на его поведение. На основе сопоставления общих свойств теоретических кривых ОС с типичными качественными свойствами базовых кривых испытаний вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком моделируемых эффектов) выведены необходимые феноменологические ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное описание экспериментальных кривых, изучено влияние характеристик МФ на свой-

ства теоретических кривых, которыми можно управлять. Выявлены те эффекты, которые ОС (1) (и линейное ОС) принципиально не может описать ни при каких МФ (например, зависимость мгновенного модуля от скорости деформации, отрицательная скоростная чувствительность), и те, которые могут быть описаны при некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на МФ (например: наличие точек перегиба на кривых ползучести и нагружения, сходимость кривых нагружения к кривой мгновенного нагружения при стремлении скорости нагружения к бесконечности, ускоряющаяся ползучесть, затухание памяти, (не)ограниченное накопление пластической деформации при циклических нагружениях, эффект Кольрауша).

Проведённый анализ позволил очертить область применимости и арсенал возможностей ОС (1) по описанию поведения реономных материалов, сопоставить его с арсеналом линейного ОС, указать как наследуемые свойства, так и дополнительные возможности нелинейного ОС по сравнению с линейным; разработать методики идентификации ОС; выявить характерные особенности теоретических кривых ОС (1) и линейного ОС, которые удобно использовать как индикаторы (не)применимости ОС при анализе данных испытаний материала по разным программам (признаки, которые надо установить у кривых испытаний материала, прежде чем пытаться описывать его поведение ОС (1) или линейным ОС) [3-12]. В частности, доказано, что линейное ОС не способно описывать материалы, кривая ползучести (при сдвиге или растяжении) которых включает стадию ускоряющейся ползучести, а из наличия МФ φ следуют дополнительные возможности ОС (1) по сравнению с линейным ОС: 1) зависимость кривых ползучести (и скорости ползучести) от уровня напряжения не линейная и задаётся МФ φ; 2) кривые ползучести могут иметь участки выпуклости вниз и точки перегиба; возможно моделирование кривых ползучести со всеми тремя стадиями. Наличие МФ φ в ОС (1) также меняет асимптотику кривых ползучести и скорость рэтчетинга при циклических нагружениях, оно порождает более сложные условия затухания памяти и ограниченности деформации при циклических нагружениях, чем у линейного ОС [3,4,8,10,12], а диаграммы нагружения с постоянной скоростью ОС (1) могут иметь участки выпуклости вниз и точки перегиба, если они имеются у φ [5], в отличие от диаграмм нагружения линейного ОС, которые всегда выпуклы вверх [7].

Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последействием // ПММ, **12**:1 (1948), 53–62.

2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.

3. *Хохлов А.В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки, №3 (2017), 93–123.

4. *Khokhlov A.V.* Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory, Mechanics of Composite Materials, **54**:4 (2018), 473–486.

5. *Хохлов А.В.* Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Изв. РАН. МТТ, №2 (2019), 29–47.

6. *Хохлов А.В.* Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова // Механика композиционных материалов и конструкций, **24**:3 (2018), 407–436.

7. *Хохлов А.В.* Характерные особенности кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Пробл. прочн. и пластич., **77**:2 (2015), 139–154.

8. *Хохлов А.В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **21**:2 (2017), 326–361.

9. *Хохлов А.В.* Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики её идентификации // Изв. РАН. МТТ, №3 (2015), 81–104.

10. *Хохлов А.В.* Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, **22**:1 (2018), 65–95.

11. *Хохлов А.В.* Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // Труды МАИ, **91** (2016), 1–32.

12. *Хохлов А.В.* Сравнительный анализ свойств кривых ползучести, порождаемых линейной и нелинейной теориями наследственности при ступенчатых нагружениях // Матем. физика и компьютерное моделирование, **21**:2 (2018), 27–51.

СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Д.В. Христич

dmitrykhristich@rambler.ru

УДК 539.3

Предложены варианты определяющих соотношений термоупругости для анизотропных материалов в пространстве напряжений. Соотношения построены в рамках общего подхода с использованием понятия собственных упругих состояний и частного постулата изотропии.

Ключевые слова: термомеханика, конечные деформации, определяющие соотношения, анизотропия

Relations of nonlinear anisotropic thermoelasticity

Some variants of nonlinear constitutive relations for anisotropic thermoelastic materials written in the space of stresses are offered. Relations are built within the frameworks of a general approach using the concept of elastic proper subspaces and the partial postulate of isotropy.

Keywords: thermomechanics, finite strains, constitutive relations, anisotropy

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-1803.2019.1).

Христич Дмитрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, Тульский государственный университет (Тула, Россия); Dmitrii Khristich (Tula State University, Tula, Russia)

Рассматривается термомеханический процесс конечного неизотермического деформирования анизотропного тела. Предполагается, что материал тела является гиперупругим, то есть существует упругий потенциал. В работе [4] предложены несколько вариантов определяющих соотношений, описывающих нелинейную зависимость напряжений от деформаций и температуры в анизотропных материалах. Применение потенциала Гиббса позволяет получить нелинейные определяющие соотношения в виде, разрешённом относительно деформаций. Это значительно облегчает обработку экспериментов на растяжение, сжатие и кручение образцов.

Для описания процесса деформирования $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ построим его образ в шестимерном пространстве [1], представляющий собой траекторию деформирования — годограф шестимерного вектора деформаций $\vec{\mathfrak{e}}(t)$ — с приписанными каждой точке вектором напряжений $\vec{\sigma}(t)$ и температурой T.

Потенциал Гиббса в шестимерном пространстве записывается в виде

$$G = U - ST - \frac{1}{\rho_0}\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathfrak{e}}, \tag{1}$$

где U — удельная внутренняя энергия, S — энтропия, ρ_0 — плотность среды в начальном состоянии. С учётом выражения (1) основное термомеханическое соотношение в форме Гиббса принимает вид

$$dG = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\mathfrak{e}}\cdot d\vec{\sigma} - SdT. \tag{2}$$

Из этого выражения с учётом формулы для дифференциала потенциала

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}}\cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial T}dT$$

следуют выражения вектора деформаций и энтропии:

$$\vec{\mathfrak{e}} = -\rho_0\frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}. \tag{3}$$

В работе [4] сформулированы две формы обобщения частного постулата изотропии А.А. Ильюшина на случай нелинейных анизотропных материалов. Эти обобщения основаны на использовании понятия о собственных упругих состояниях анизотропных материалов и системы инвариантов деформаций как длин проекций вектора деформаций в собственные подпространства. Если предположить, что реакция материала удовлетворяет предельной форме частного постулата изотропии, то потенциал Гиббса следует представить в форме квадратичной зависимости следующего вида:

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{n} D^\gamma t_{(\gamma)}^2 -$$

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha(T-T_0) - c_\sigma\rho_0 T_0\left(\frac{T}{T_0}\ln\frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1\right), \tag{4}$$

где $c^{\alpha\beta}$, D^γ, a^α — константы материала, σ_α — линейные инварианты напряжений, $t^2_{(\gamma)}$ — квадратичные инварианты напряжений, которые определяются через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств, m и n — соответственно количество линейных и квадратичных инвариантов для некоторого материала, c_σ — теплоёмкость среды при постоянных напряжениях. Линейные и квадратичные инварианты деформаций для различных типов анизотропных материалов приведены в работе [2]. В соответствии с выражениями (3) и (4) получим

$$\vec{\mathfrak{e}} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}\sigma_\beta \vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^{n} 2D^\gamma \vec{\sigma}_{(\gamma)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0), \tag{5}$$

$$S = \frac{1}{\rho_0}\sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha + c_\sigma \ln\frac{T}{T_0}. \tag{6}$$

Определим физический смысл констант, входящих в определяющие соотношения (5). Для этого рассмотрим термомеханический процесс, в котором напряжения отсутствуют. Возникающие в таком процессе деформации называются температурными. Определяемые соотношениями (5) температурные деформации имеют вид

$$\vec{\mathfrak{e}}^T = \vec{\mathfrak{e}}\big|_{\vec{\sigma}=\vec{0}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0), \tag{7}$$

откуда следует, что a^α — константы, характеризующие температурные деформации. Из выражения (7) следует, что вектор температурных деформаций содержит в своём разложении только инвариантные для данного типа материала базисные векторы шестимерного пространства.

При бесконечно малых деформациях в случае изотермических процессов соотношения (5) представляют собой обобщённый закон Гука:

$$\vec{\mathfrak{e}} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c_0^{\alpha\beta}\sigma_\beta \vec{i}_\alpha + 2\sum_{\gamma=1}^{n} D^\gamma \vec{\sigma}_{(\gamma)},$$

то есть константы $c_0^{\alpha\beta}$, D^γ образуют тензор упругих податливостей, обратный тензору упругости материала.

Более сложную термомеханическую модель анизотропного материала, построенную в рамках предельной формы частного постулата, можно получить на основании представления потенциала Гиббса в виде

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha,\sigma_\beta)\sigma_\alpha\sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^{n} D^\gamma\left(t^2_{(\gamma)}\right) t^2_{(\gamma)} -$$

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha\sigma_\alpha(T - T_0) - c_\sigma\rho_0 T_0\left(\frac{T}{T_0}\ln\frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1\right), \tag{8}$$

где коэффициенты, определяющие упругие свойства материала, полагаются функциями только линейных или квадратичных инвариантов напряжений в соответствующих собственных подпространствах.

Определим деформации, исходя из выражений (3) и (8):

$$\vec{\mathfrak{d}} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} \left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_\beta + c^{\alpha\beta} \sigma_\beta \right) \vec{i}_\alpha +$$

$$+2 \sum_{\gamma=1}^{n} \left(D^\gamma + \frac{\partial D^\gamma}{\partial t^2_{(\gamma)}} t^2_{(\gamma)} \right) \vec{\sigma}_{(\gamma)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0). \qquad (9)$$

Если в соотношении (9) считать, что $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = c_0^{\alpha\beta} + \bar{c}^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$, а $D^\gamma(t^2_{(\gamma)}) = D^\gamma + \bar{D}^\gamma t_{(\gamma)}$, где $c_0^{\alpha\beta}$, $\bar{c}^{\alpha\beta}$, D^γ, $\bar{D}^\gamma$ — константы, то из такого представления для потенциала Гиббса получим следующее выражение вектора деформаций:

$$\vec{\mathfrak{d}} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} \left(c_0^{\alpha\beta} \sigma_\beta + 2\bar{c}^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta + \bar{c}^{\alpha\beta} \sigma_\beta^2 \right) \vec{i}_\alpha +$$

$$+2 \sum_{\gamma=1}^{n} \left(D^\gamma + \frac{3}{2} \bar{D}^\gamma t_{(\gamma)} \right) \vec{\sigma}_{(\gamma)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0).$$

Материальные упругие константы такой модели можно определить по результатам изотермических опытов на растяжение, сжатие и сдвиг.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 272 с.

2. *Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Постулат А.А.Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела, **1** (2011), 38-45.

3. *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

4. *Sokolova M., Khristich D.* Nonlinear constitutive relations for anisotropic elastic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series, **973** (2018), DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012018

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ АКТУАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

Ю.Д.Чашечкин

chakin@ ipmnet.ru, yulidch@gmail.com

УДК 532.5

Жидкость определяется как деформируемая среда, свойства которой определяются принципами механики и термодинамики. Течения жидкости – поток импульса, вещества и энергии, сопровождающийся самосогласованными изменениями полей других физических величин. Течения описываются полными решениями системы фундаментальных уравнений, которая анализируется с учетом условий совместности, начальных и граничных. Приводятся примеры.

Ключевые слова: Ключевые слова: жидкость, течения, структуры

Mathematical background of topical fluid mechanics

The basis of the approach is the definition of a fluid as a deformable medium, the physical properties and motion of which are determined by the principles of mechanics and thermodynamics. Fluid flows are the coordinated transport of momentum, energy and matter, accompanied by the transformation of fields of physical quantities. Flows are described by a system of the fundamental equations, analyzed taking into account the compatibility, initial and boundary conditions. Examples are given.

Keywords: fluid, flows, structures

Развитие техники наблюдений позволило твердо установить, что все природные системы, обладают тонкой структурой, влияющей на динамику процессов. Модели течений разрабатываются в приближении сплошной среды. В качестве базовых физических величин, характеризующих течения сплошных сред – жидкостей, газа и плазмы, выбираются удельные инварианты – полная энергия, импульс и такие термодинамические параметры, как плотность, давление, температура, концентрация растворенных веществ. Энергии здесь непосредственно характеризует динамику процессов, а также определяет плотность и давление. Изменения энергии могут характеризоваться разными временными масштабами – достаточно большими в диссипативных (диффузионных) процессах, более короткими в течениях (потоках) сред, специфическими волновыми, (быстрыми в акустических и медленными в механических волнах), а наиболее короткими – в прямых атомно-молекулярных процессах (например, при освобождении доступной потенциальной поверхностной или химической энергии). Вопросы взаимодействия вещества с постоянными и переменными электромагнитными полями здесь рассматриваться не будут.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-19-00598). Эксперименты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

Чашечкин Юлий Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского (Москва, Россия); Yuli Chashechkin, Professor (Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia)

Уравнения движения с физически обоснованными начальными и граничными условиями приведены в первом издании [1], вышедшем в 1944 г., анализ свойств полных решений, полученных с учетом условия совместности, проведен в [2]. Следует подчеркнуть, что и сами уравнения, и результаты их полного анализа являются масштабно инвариантными.

Определения структурных компонентов течений, включающих лигаменты, волны, вихри, струи и следы, даются на основе анализа полного решения линеаризованной системы. Число функций, составляющих полные решения, с учетом условия совместности определяется рангом полной системы, порядком ее линеаризованной версии или степенью характеристического (дисперсионного) уравнения. Течения определяются как процессы временной изменчивости полей базовых (плотность, импульс, энергия) и производных (скорость, смещения изолиний и др.) физических величин.

В число основных компонентов течений входят волны и лигаменты, составляющие полные решения линеаризованной системы уравнений [3].

Волна определяется как процесс, в котором параметры локальной временной изменчивости физических полей (частота ω) и мгновенной пространственной структуры (волновое число $\mathbf{k}$ или длина волны λ) связаны функциональным (дисперсионным) соотношением $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{kA}, ...)$, которое может включать и амплитуды возмущений $\mathbf{A}$. Волны описываются группой регулярно возмущенных решений линеаризованной фундаментальной системы.

Лигаменты – тонкоструктурные оболочки, прослойки и волокна, поперечные масштабы которых δ определяются диссипативными свойствами среды (коэффициентами кинематической вязкости ν, температуропроводности κ_T или диффузии κ_S) и характерными значениями временной изменчивости – временем установления процесса ΔT, частотой волны ω или скоростью переноса импульса и энергии U: $\delta_T^\nu = \sqrt{\nu \Delta T}$, $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$, $\delta_U^\nu = \nu/U$. Лигаменты описываются группой сингулярно возмущенных решений фундаментальной системы [4].

Вихрь - нестационарный компонент течения с относительно высоким значением завихренности $\boldsymbol{\omega} = \bigtriangledown \times \mathbf{U}$. В вихре свободные твердые тела в толще или на поверхности жидкости переносятся потоком и одновременно вертятся вокруг собственной оси, а «жидкие частицы» расщепляются лигаментами на различимые волокна.

Наблюдаемые в эксперименте волны, вихри, струи, следы, другие структурные компоненты реальных течений – продукты нелинейных взаимодействий компонентов решений линеаризованной модели. Наиболее распространенным из них являются лигаменты, для существования которых необходимы диссипация, стратификация (а реальные среды всегда расслаиваются в поле массовых сил (гравитационном) в силу разноплотности) и изменения условий. К их числу относятся течения, индуцированные диффузией на топографии, которые наблюдаются возле непроницаемого препятствия в толще стратифицированной жидкости [4]. С началом движения прослойки индуцированных диффузией течений у границ тел утончаются и образуют высокоградиентные поверхности раздела областей распространения волн и вихревых компонентов спутных течений.

В качестве примера приводятся сравнения наблюдений и численных расчетов течений, образующихся при движении различных тел (пластина, цилиндр, сфера) в стратифицированных жидкостях и газах. Общая геометрия течений, картины присоединенных внутренних волн хорошо согласуются. Примером сильного влияния слабой стратификации служит катастрофа симметрии поперечного сечения плотностного следа за сферой, движущейся равномерно в горизонтальной плоскости – осесимметричный след в однородной жидкости (сечение – круг) сменяется на призматический (сечение – прямоугольник) в непрерывно стратифицированной жидкости.

Заметную роль играют лигаменты в картине переноса вещества свободно падающей капли в покоящейся жидкости. В случае смешивающихся жидкостей лигаменты наблюдаются в форме тонких струек с оголовками в форме мелких вихревых колечек. Их образование обусловлено высокой плотностью поверхностной потенциальной энергии, быстро освобождающейся в процессе уничтожения свободной поверхности при слиянии жидкостей [5]. При этом на фоне непрерывного распределения одних величин – импульса и энергии наблюдается дискретное распределение других – окрашенное вещество капли собирается в отдельных волокнах, образующих дискретные линейчатые структура в венце капли и сетчатые на дне каверны. Картины течений непрерывно перестраивается вплоть до фазы медленной эволюции последовательности погружающихся вихревых колец, при этом тонкие волокна сохраняются. Окончательное медленное расплывание структур происходит под действием процессов молекулярной диффузии при затухании всех движений.

Быстрые лигаменты обуславливают связь сравнительно медленных гидродинамических течений и быстрых процессов генерации высокочастотных звуковых пакетов (в диапазоне частот 10 – 20 КГц), которые излучают свободно осциллирующие газовые полости [6]. Осцилляции начинаются при ударном возбуждении колебаний полости поглощаемым остатком разорванной газовой перемычки и заканчиваются при сглаживании формы полости и сокращении потока доступной потенциальной поверхностной энергии.

Изучение лигаментов, природа которых связывает динамику атомно-молекулярных процессов с макроскопическими проявлениями в течениях сплошных сред позволит улучшить и качественное и количественное описание течений с химическими, биологическими и электромагнитными процессами в движущихся жидкостях, газах и плазме.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.

2. *Chashechkin Yu. D.* Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows. P. 61-91. // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Springer Series “Computational Methods in Applied Sciences” V. 40. 2016. 328 p. P. 61-91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.

3. *Chashechkin Yu.D.* Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. Vol. 13. No. 2. P. 1-29. https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020

4. *Chashechkin, Y. D., Zagumennyi, I. V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5 P. 1-17. doi:10.1088/1402-4896/ab0066.

5. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // Доклады РАН. 2018. Т. 481. № 2. DOI: 10.1134/S1028335818070066

6. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е.* Акустика и гидродинамика удара капли о водную поверхность // Акустический журнал. 2017. Т. 63. No. 1. С. 38–49. DOI: 10.1134/S1063771016060038

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ УПРУГО-ПОЛЗУЧИХ СРЕД

А.С. Шамаев, Т.Н. Бобылева

sham@rambler.ru, tatyana2211@outlook.com

УДК 539.376

В работе рассматривается задача о построении эффективной модели слоистого композиционного материала из слоев, представляющих собой упруго-ползучие материалы, ядра ползучести которых представляют собой экспоненциальные функции. Характеристики усредненной модели получены в явной виде. Проанализированы некоторые качественные свойства гомогенизированной модели, приводятся оценки близости полей смещений и напряжений для исходной и усредненной моделей. Рассмотрен пример численного моделирования характеристик усредненного материала, дается точное количество постоянных, необходимых для полного описания усредненной модели.

Ключевые слова: усреднение, гомогенизация, упруго-ползучие среды, корректор напряжений, спектральные ядра релаксации

Mathematical modeling of layered elastic-creeping media

The article discusses the problem of constructing an effective model of a layered material. Layers consist of elastic-creeping materials, the creep kernels of which are exponents. The characteristics of the averaged model are given in explicit form. Some qualitative properties of the homogenized model are analyzed. Estimates of the closeness of the displacement and stress fields for the initial and averaged models are given. Numerical modelling of characteristics of an averaged material is presented as example. The exact number of constants for a complete description of the averaged model is determined.

Keywords: homogenization, averaging, elastic-creeping media, stress corrector, spectral relaxation kernels

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10343).

Шамаев Алексей Станиславович, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник ИПМ имени А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия); Alexey Shamaev (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

Бобылева Татьяна Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ МГСУ (Москва, Россия); Tatiana Bobyleva (Moscow State University of Civil Engineering, (NRU MGSU), Moscow, Russia)

Математическое моделирование механических процессов в неоднородных средах связано с теорией асимптотического усреднения [1]. Представляет интерес моделирование упруго-ползучих сред на длительных интервалах времени [2]. В настоящей работе рассматривается задача упруго-ползучести, которая описывается системой интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными членами типа свертки. Использование в качестве ядер ползучести и релаксации экспоненциальных ядер дает возможность в явном виде построить усредненную систему и корректор, исследовать свойства усредненных ядер. Можно, в частности, дать качественную картину распределения показателей экспонент усредненного ядра и показателей, входящих в формулы для корректора.

В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим область Ω, состоящую из попарно чередующихся слоев упруго-ползучих изотропных материалов. ε - отношение длины двух соседних слоев к характерному размеру образца. Уравнения состояния для каждого слоя имеют вид:

$$\sigma_{ij}^{(s)} = b_{ijkh}^{(s)} * e_{kh}^{(s)}, \quad \text{где} \quad b_{ijkh}^{(s)} = c_{ijkh}^{(s)}\delta(t) + d_{ijkh}^{(s)}, \tag{1}$$

s - номер слоя, t - время, $e_{kh}^{(s)}$ - деформации, $c_{ijkh}^{(s)}$ - модули упругости, $\delta(t)$ - дельта-функция, $d_{ijkh}^{(s)}$ - интегральные операторы Вольтерра, а именно:

$$d_{ijkh} * e_{kh} = \int_0^t d_{ijkh}(t-\tau)e_{kh}d\tau \tag{2}$$

. Между слоями приняты условия идеального контакта. Для рассматриваемых изотропных материалов модули упругости и компоненты тензоров ядер релаксации в (1) имеют следующий вид [3]:

$$c_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \tag{3}$$

$$d_{ijkh} = -(D_\nu(t) - \frac{1}{3}D_{sh}(t))\delta_{ij}\delta_{kh} - \frac{1}{2}D_{sh}(t)(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \tag{4}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, $D_{sh}(t)$ и $D_\nu(t)$ - регулярные части сдвиговой и объемной релаксации, предполается, что $(D_\nu)_s = k_s(D_{sh})_s,\ k_s > 0,\ k_s = \text{const}$. Все модули упругости и ядра релаксации являются кусочно постоянными функциями переменной $y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}$ [4]. Ядра ползучести для каждого слоя представляют собой экспоненциальные функции $D_s = g_s e^{-\alpha_s t}$, g_s, α_s - положительные постоянные. После применения преобразования Лапласа по времени к уравнениям равновесия с учетом (1) получим систему уравнений упругости с комплексным параметром, к которой применим метод усреднения [1]. В результате имеем компоненты напряжений в нулевом приближении. Затем выполняем обратное преобразование Лапласа и получаем приближенные значения компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij}^{(0)} = b_{ijkh}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}, t\right) * \frac{\partial u_k^{(0)}(x,t)}{\partial x_h}, \tag{5}$$

где для эффективного тензора $b_{ijkh}(y_3, t)$ приводятся явные выражения [5].

Вычисления показывают, что коэффициенты b_{ijkh} содержат экспоненциальные функции, в показателях которых будут, как данные коэффициенты α_s, так и новые, являющиеся решениями квадратных уравнений с положительными дискриминантами. После применения асимптотического метода усреднения становится возможным следующее: вычислить поле напряжений с точностью порядка $\sqrt{\varepsilon}$, предварительно рассчитав (элементарным образом) 29 констант (характеризующих "усредненную" задачу), и решить краевую задачу с большими конечными элементами, превосходящими в несколько раз толщину слоев.

В работе [6] для проверки описанного метода, результаты численных расчетов для модели гомогенизированной среды сравнивались с результатами расчетов для модели, в которой не использовалось усреднение. Численные эксперименты, использующие метод шагов по времени [7], проводились для следующих внешних нагрузок: одноосное напряжение, ортогональное к слоям, одноосное напряжение вдоль слоев, полное сжатие и для сдвигов параллельно слоям и ортогонально слоям. Для всех этих случаев отличие деформаций для точной и усредненной модели составляет менее 5%.

В то же время для определенного типа нагружений (например, вызывающего сдвиг вдоль слоев) использование изотропной модели ползучести для описания эффективных свойств слоистой среды дает большие погрешности, именно истинные деформации превосходят полученные с помощью изотропной модели значения в несколько раз.

Литература

1. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. — Москва: Из-во МГУ, 1990.

2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. — Москва: Наука, 1966.

3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — Москва: Наука, 1970.

4. *Bobyleva T.N., Shamaev A.S.* An efficient algorithm for calculating rheological parameters of layered soil media composed from elastic-creeping materials // Soil Mechanics and Foundation Engineering, **54**:4 (2017), 224-230.

5. *Bobyleva T.N., Shamaev A.S.* Method of approximate calculation of the stress tensor in layered elastic-creeping environments // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), **51**:2 (2018), 138-143.

6. *Gavrikov A.A., Knyazkov D.Yu., Melnikov A.M., Shamaev A.S., Vedeneev V.V.* On limits of applicability of the homogenization method to modeling of layered creep media // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), **51**:2 (2018), 144-149.

7. *Константинова С.А., Чернопазов С.А.* Оценка реологических показателей соляных пород по данным натурных наблюдений за вертикальными деформациями междукамерных целиков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, **51** (2007), 21-27.

МЕТОДЫ ГОМОТОПИИ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

М.Г. Широбоков, С.П. Трофимов, М.Ю. Овчинников
shmaxg@gmail.com, sertrofimov@yandex.ru, ovchinni@keldysh.ru

УДК 521.135, 521.186, 521.19, 629.785, 629.786

Доклад представляет собой краткий обзор дискретных и дифференциальных методов гомотопии (продолжения по параметру) для построения и оптимизации космических траекторий. Показывается, как методы продолжения используются для построения семейств гало-орбит вокруг точек либрации, адаптации траектории к сложной модели, а также для оптимизации многовитковых перелетов космических аппаратов с малой тягой.

Ключевые слова: методы гомотопии, краевая задача, ограниченная задача 3-х тел, перелет с малой тягой

Homotopy methods for spacecraft trajectory design

The work is devoted to homotopy methods that can be exploited for the design and optimization of space trajectories. Applications include the design of families of halo orbits associated with libration points, trajectory adaptation to complex dynamical models, and optimization of multirevolutional low-thrust trajectories.

Keywords: homotopy methods, boundary value problem, restricted three-body problem, low-thrust trajectory

Доклад состоит из двух частей. В первой части доклада сначала рассматривается задача проектирования семейств гало-орбит вокруг коллинеарных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел (см., например, [1]). Данная задача может быть решена с использованием дискретного метода продолжения по одному или нескольким геометрическим параметрам орбиты. Затем идет речь о задаче адаптации траектории перелета, построенной в рамках одной модели движения, к другой, более сложной, модели движения [2]. Такая задача типична для механики космического полета: обычно оптимизацию траектории перелета удается выполнить лишь в рамках сравнительно простых моделей движения (например, круговой ограниченной задачи трех тел). Динамика в таких моделях богата различными инвариантными структурами, которые помогают сократить область поиска оптимального решения. Далее полученная оптимальная траектория должна быть адаптирована к модели, приближенной к реальной модели движения тел Солнечной системы. Это можно делать с помощью метода

Широбоков Максим Геннадьевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Maksim Shirobokov (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Трофимов Сергей Павлович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Sergey Trofimov (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia)

Овчинников Михаил Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Mikhail Ovchinnikov (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia)

параллельной пристрелки и метода гомотопического продолжения функций правых частей дифференциальных уравнений движения.

Вторая часть работы посвящена задачам оптимизации межпланетных траекторий. Гомотопические методы оказываются чрезвычайно эффективными для построения оптимальных многовитковых траекторий аппарата с малой тягой. Широко применяются методы дифференциального продолжения по параметру [3], причем для поиска оптимальной траектории в модели задачи двух тел в рамках формализма принципа максимума Понтрягина удается найти все ветвления и обойти проблему вырождения матрицы Якоби [4]. Перспективными здесь являются и современные методы, не использующие обратную матрицу Якоби [5]. Коротко описывается метод гомотопии для непрерывной трансляции оптимальной траектории в смысле квадратичного функционала к оптимальной траектории в смысле линейного функционала. Для задач механики космического полета это важно, поскольку задача с квадратичным функционалом гораздо более регулярна и проста в решении, но с практической точки зрения минимум затрат топлива соответствует именно минимуму линейного функционала.

Литература

1. *Koon W. S., et al.* Dynamical Systems, the Three-body Problem and Space Mission Design. — Springer, 2008.

2. *Pavlak T. A.* Mission Design Applications in the Earth–Moon System // Master's Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA, Purdue University, 2010.

3. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования, **46**:3 (2008), 224-237.

4. *Pan B., Pan X., and Zhang S.* A new probability-one homotopy method for solving minimum-time low-thrust orbital transfer problems // Astrophysics and Space Science **363**:9 (2018): 198.

5. *Liu C.S., Atlury S.N.* A globally optimal iterative algorithm using the best descent vector $\dot{x} = \lambda[\alpha_c F + B^T F]$, with the critical value α_c, for solving a system of nonlinear algebraic equations $F(x) = 0$ // Computer Modeling in Engineering and Sciences **84**:6 (2012), 575-601.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ Л. ПРАНДТЛЯ О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ

Е.А. Яновская

elena_yanovskaya@bk.ru

УДК 519.6, 539

Решена плоская задача о сжатии пластической полосы между двумя параллельными шероховатыми плоскостями, дополненная несимметричностью условий на растекающихся торцах.

Ключевые слова: сжатие пластической полосы, эффект «холодной сварки»

On one generalization of the task of L. Prandtl about the compression of a plastic strip and its appendix

The planar problem of compressing a plastic strip between two parallel rough planes, supplemented by asymmetry of the conditions on the spreading ends, was solved.

Keywords: compression of plastic strip, the effect of "cold welding"

Решена плоская задача о сжатии пластической полосы между двумя параллельными шероховатыми плоскостями, дополненная несимметричностью условий на растекающихся торцах. Найдена верхняя оценка общего усилия обжатия приторцевых областей пластически растягиваемой полосы, при достижении которого одновременно с пластическим растяжением полосы происходит пластическая осадка приторцевых ее частей. Показано, что при дальнейшем деформировании происходит утонение и отрыв не в средней ее растягиваемой части, а вблизи внутренней границы контакта (захвата). Классическая задача о сжатии пластической полосы между сближающимися шероховатыми плоскостями твердых тел продолжает привлекать внимание многих исследователей. С ее помощью объяснены присущие описываемым физическим процессам некоторые качественные особенности: явление проскальзывания вдоль поверхности контакте; заметное доминирование шаровой части тензора напряжений над девиаторными составляющими в пластической полосе: соизмеримость нормальных упругих перемещений контактирующих тел с толщиной полосы [3]; эффект «холодной сварки» и др. С другой стороны, задача помогает лучше понять механизм контактного взаимодействия твердых и пластически деформируемых тел. Сначала Л. Прандтль построил предельное поле напряжений [1], которое Надаи дополнил соответствующими скоростями течения. На основе анализа решения Прандтля - Надаи была предложена приближенная математическая модель для описания процесса растекания пластических слоев.

Яновская Елена Александровна, к.т.н., доцент, кафедра прикладной математики МГТУ "СТАНКИН"(Москва, Россия); Yanovskaya Elena Alexsandrovna (Department of Applied Mathematics, MSTU "STANKIN Moscow, Russia)

Литература

1. *1. Ильюшин А.А.* Труды (1946-1966).т.2.Пластичность // М.: Физматлит, 2004. 480с.

2. *Соколовский В.В.* Теория пластичности // М.: Высшая школа, 1969. 608с.

3. *Ганаго, О.А* О показателях эффективности процессов пластического деформирования // Кузнечно-штамповочное производство, **10** (1986), 3-4.

4. *Смирнов-Аляев Г.А.* Сопротивление материалов пластическим деформациям // Л.: Машгиз, 1949. 248 с.

5. *Sosenushkin E.N., Kadymov V.A., E.A. Yanovskaya, Tatarintsev A.A., Sosenushkin A.E.* The Parameters of the Stress State in the Operations of Plastic Deformation // Key Engineering Materials, **684** (2016), 57-66.

6. *Томленов А.Д.* Теория пластического деформирования металлов //М.: Металлургия, 1972. 408 с.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАМКНУТОЙ БИНАРНОЙ ЦЕПОЧКИ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРАВИЛАМИ РАЗРЕШЕНИЯ КОНФЛИКТА

М.В. Яшина

mv.yashina@madi.ru

УДК 517.518

Задачи математического моделирования транспортных потоков или движения частиц на сетях со сложной геометрией приводят к исследованию дискретных динамических систем на регулярных структурах. Рассматривается динамическая система с дискретным временем, представляющая собой замкнутую бинарную цепочку с конфликтами в общих альтернирующих узлах детерминированного типа. В зависимости от начального состояния на траектории точек последования Пуанкаре средняя скорость частиц выходит на предельный режим, причем количество значений таких скоростей является конечным (спектральные значения). Исследован спектр системы для лево- и правоприоритетных правил разрешения конфликтов, а также для периодических правил, когда приоритет контура определяется четностью его номера в цепочке.

Ключевые слова: дискретные динамические системы, бинарная цепочка с конфликтами, спектр динамической системы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-001358).

Яшина Марина Викторовна, к.ф.-м.н., д.т.н., зав. кафедрой высшей математики, к.ф.-м.н., д.т.н., зав. кафедрой высшей математики (Москва, Россия); Marina Yashina (Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, Russia)

On spectral properties of closed binary chain with deterministic periodical rules of competition resolutions

Problems of mathematical modeling of transport flows or particle motion on networks with complex geometry reduce to the study of discrete dynamical systems on regular structures. We consider a dynamical system with discrete time that which is a closed binary chain with competition in common alternating nodes of a deterministic type.

Depending on initial states the average particle velocity on a trajectory of Poincare follow points of the dynamical system converges to limiting regime, and the number of such velocity values is finite (eighen values of spectrum). The spectrum of the system for left- and right-priority rules for competition resolution, as well as for periodic rules, when the contour priority is determined by the parity of the index in the chain.

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory

Динамическая система состоит из конечного замкнутого набора контуров с двумя ячейками, Рис.1, соединенных последовательно общими альтернирующими узлами. На каждом из контуре в одинаковом для всех контуров направлении движутся по одной частицу, переходя на каждом шаге из одной клетки в другую, если на соседнем контуре соответсвующая частица не претендует на прохождение смежного альтернирующего узла. В процессе перемещения возникает *конкуренция частиц* за пересечение общего узла, приводящая к *задержкам движения*. Динамические системы такого типа для описания движения на контурных цепях введены в работе Козлова В.В. и др. [1], где рассматривались лево-приоритетное и справедливое (стохастическое) правила разрешения конфликта. При лево-приоритетном правиле преимущество пересечения альтернирующего узла всегда имеет частица, расположенная на контуре с меньшим номером. При справедливом правиле происходит розыгрыш с использованием датчика случайных чисел и порогом $\frac{1}{2}$. В [1] доказано, что средняя скорость стохастической бинарной цепочки при справедливом правиле разрешения конфликта за конечное время выходит на стационарный режим, т.е. ведет себя как детерминированная система.

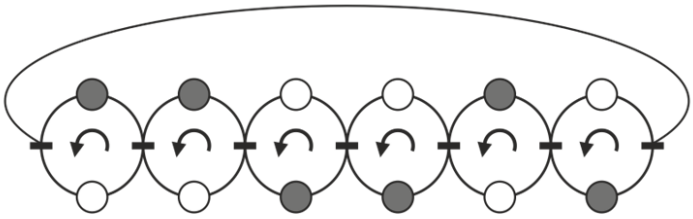


Рис. 5.1: Замкнутая бинарная цепочка $n = 8$ в состоянии $x = (1, 1, 0, 0, 1, 0,)$.

Пусть N - количество контуров замкнутой бинарной цепочки, тогда пространство состояний замкнутой бинарной цепочки $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$, $x_i = 0 \vee 1$, $i = 1, \cdots N$.

В работе Буслаева А.П. и др. [2] показано, что движение частиц на замкнутой бинарной цепочке эквивалентно заданию на пространстве состояний отображения A, которое является клеточным автоматом Вольфрама CA 063, [3]. Также в [2] введено понятие спектра для динамических систем такого типа.

Для любого начального вектора отображение A порождает траекторию

$$x_0 \to A(x_0) \cdots \to A^k(x_0) \cdots ,$$

которая через некоторое время образует цикл как последовательные точки Пуанкаре. Эта траектория образует *спектральный цикл* системы, а средняя скорость частиц системы на этом цикле - *спектральное значение*. Например, при $n = 2$ цепочка CA 063 имеет точечный спектр - $v = 1$, При этом состояния $(1, 1)$ и $(0, 0)$ образуют цикл, а $(1, 0)$ и $(1, 0)$ - являются невозвратными и входят в этот цикл.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N},\ n > 0$ - число контуров в замкнутой бинарной цепочке с левоприоритетным правилом разрешения конфликта.*
Тогда зависимость количества точек спектра от числа контуров является неубывающей кусочно-постоянной функцией и

$$v = 1 - \frac{k}{n}, \quad k = 0, \cdots \left[\frac{n}{3}\right]. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть Пусть $n \in \mathbb{N},\ n > 0$ - число контуров в замкнутой бинарной цепочке, и правило разрешения конфликта является правилом нерешительности, т.е. частицы, оказавшиеся в условии конфликта, остаются в своих клетках.*
Тогда динамическая система равносильна CA 029 и спектр имеет вид:

$$v = 1 - \frac{k}{n}, \quad k = 0, \cdots \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2}$$

Теорема 3. *Пусть Пусть $n \in \mathbb{N}$ - четное число контуров в замкнутой бинарной цепочке, и правило разрешения конфликта является правилом четно-нечетно, т.е. условии конфликта выигрывает частица, у которой номер контура является четным.*
Тогда динамическая система спектр имеет вид:

$$v = 1 - \frac{k}{n}, \quad k = 0, \cdots \left[\frac{n}{4}\right]. \tag{3}$$

Литература

1. *Kozlov V.V., Buslaev A.P., Tatashev A.G.* Monotonic walks on a necklace and coloured dynamic vector // International Journal of Computer Mathematics, **92**:9 (2015), 1910- 1920.

2. *Buslaev A.P., Tatashev A.G., Fomina M.J., Yashina M.V.* On Spectra of Wolfram Cellular Automata in Hamming Spaces // In Proceedings of the 6th International Conference on Control, Mechatronics and Automation Tokyo (2018), Japan — October 12 - 14, *ACM New York, NY, USA*, (2018), 123-127.

3. *Wolfram S.* Statistical mechanics of cellular automata // Rev. Mod. Phys., **55** (1983), 601-644.

APPROXIMATIONS OF THE MONODROMY MATRIX BY AVERAGING METHOD

A.O. Belyakov, A.P. Seyranian

belyakov@mse-msu.ru, seyran@imec.msu.ru

UDC 531.36

We develop here the method for obtaining approximate stability boundaries in the space of parameters for linear systems with parametric excitation. The method is based on Floquet theory with monodromy matrix of system approximated by averaging method.

Keywords: parametric excitation, Floquet theory, averaging
MSC: 34D05, 34E05

Consider linear system, $\dot{x}(t) = \mathbf{J}(t)\,x(t)$, where $x(t)$ is the vector of state variables and $\mathbf{J}(t)$ is piecewise continuous, integrable, T-periodic square matrix function. Solution of the matrix differential equation

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}, \tag{1}$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix, yields at time T *monodromy matrix* $\mathbf{F} = \mathbf{X}(T)$. If all eigenvalues of the monodromy matrix, *Floquet multipliers*, have absolute values smaller then one, then the solution of the system is asymptotically stable, and if at least one eigenvalue has absolute value grater than one, then the solution is unstable, see, e.g. [1-3]. This condition can always be checked with numerically calculated monodromy matrix. But in practice it is often useful to have analytical approximations of stability regions in parameter space. For this purpose we find approximate solutions of (1) by asymptotic method of *averaging*, see e.g., [4].

Let matrix $\mathbf{J}(t)$ be expended into the series $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}_0(t)+\mathbf{J}_1(t)+\mathbf{J}_2(t)+\mathbf{J}_3(t)+\ldots$, where the lower index denotes the order of smallness. Suppose we know solution $\mathbf{X}_0(t)$ of the matrix initial value problem $\dot{\mathbf{X}}_0(t) = \mathbf{J}_0(t) \cdot \mathbf{X}_0(t)$, where $\mathbf{X}_0(0) = \mathbf{I}$. Then the change $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t) \cdot \mathbf{Y}(t)$ converts (1) to the standard form for averaging:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}, \tag{2}$$

where matrix $\mathbf{H}(t) := \mathbf{X}_0^{-1}(t) \cdot (\mathbf{J}(t) - \mathbf{J}_0(t)) \cdot \mathbf{X}_0(t)$ is small for $t \in [0, T]$. Approximate solution of (2) can be found with *averaging method* as follows. Let $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_1(t) + \mathbf{H}_2(t) + \mathbf{H}_3(t) + \ldots$, where $\mathbf{H}_j(t) := \mathbf{X}_0^{-1}(t) \cdot \mathbf{J}_j(t) \cdot \mathbf{X}_0(t)$ for all $j \geqslant 1$. We will find solution as $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{U}_1(t) + \mathbf{U}_2(t) + \ldots) \cdot \mathbf{Z}(t)$, where $\mathbf{U}_j(t)$ are matrix-functions,

This work is supported by RFBR (no. 18-010-01169).

Anton O. Belyakov, Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University, Russia; National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia;

Alexander P. Seyranian, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Russia

such that $\mathbf{U}_j(0) = \mathbf{U}_j(\tau) = 0$ and $\mathbf{Z}(t)$ is the solution of the autonomous *averaged differential equation*:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}(t), \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}, \tag{3}$$

where $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots$, Matrices $\mathbf{A}_j$ and matrix-functions $\mathbf{U}_j(t)$ can be found one by one via the standard procedure of averaging as follows.

For the first order approximation we calculate $\mathbf{A}_1$ as the average of $\mathbf{H}_1(t)$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{H}_1(t)dt, \tag{4}$$

under assumption that $\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{H}_1(t)$ are of the same order of smallness. In particular we assume that $\mathbf{H}_1(t)$ does not contain periodic functions with small frequencies, which would appear in the denominator during integration and could cause high value of $\mathbf{A}_1$, thus violating the assumption of its smallness.

For the second order approximation we have to calculate

$$\mathbf{U}_1(t) = \int_0^t (\mathbf{H}_1(\tau) - \mathbf{A}_1)d\tau,$$
$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{H}_2(t) + \mathbf{H}_1(t)\cdot\mathbf{U}_1(t) - \mathbf{U}_1(t)\cdot\mathbf{A}_1)dt,$$

using matrix $\mathbf{A}_1$ already obtained in (4) and so on ...

For the $n+1$-th order approximation we calculate

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_n(t) = \int_0^t (\mathbf{H}_n(\tau) - \mathbf{A}_n &+ \mathbf{H}_{n-1}(\tau)\cdot\mathbf{U}_1(\tau) - \mathbf{U}_1(\tau)\cdot\mathbf{A}_{n-1} \\ &\cdots \\ &+ \mathbf{H}_1(\tau)\cdot\mathbf{U}_{n-1}(\tau) - \mathbf{U}_{n-1}(\tau)\cdot\mathbf{A}_1)d\tau,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{n+1} = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{H}_{n+1}(t) &+ \mathbf{H}_n(t)\cdot\mathbf{U}_1(t) - \mathbf{U}_1(t)\cdot\mathbf{A}_n \\ &\cdots \\ &+ \mathbf{H}_1(t)\cdot\mathbf{U}_n(t) - \mathbf{U}_n(t)\cdot\mathbf{A}_1)dt.\end{aligned}$$

Due to $\mathbf{Y}(T) = \mathbf{Z}(T) = \exp\left([\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots]\,T\right)$ we have

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}(T) = \mathbf{F}_0\cdot\mathbf{Y}(T) = \mathbf{F}_0\cdot\mathbf{Z}(T) = \mathbf{F}_0\cdot\exp\left([\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots]\,T\right), \tag{5}$$

where we denote $\mathbf{F}_0 := \mathbf{X}_0(T)$ as zero order approximation of monodromy matrix, $\mathbf{F} \approx \mathbf{F}_0$. Hence, we can write expressions terms of the expansion $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \ldots$. Expansion of the matrix exponential in (5) yields expressions for $\mathbf{F}_j$ via $\mathbf{A}_k$, where $k \leqslant j$.

For the first order approximation we have

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0\cdot\mathbf{A}_1 T.$$

For the second order approximation the expansion of the matrix exponential in (5) up to the second order terms yields

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0\cdot\left(\mathbf{A}_2 T + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1^2 T^2\right).$$

For the third order approximation we have

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_0\cdot\left(\mathbf{A}_3 T + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1\right)T^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}_1^3 T^3\right),$$

For the fourth order approximation we calculate

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_0 \cdot \Big(\mathbf{A}_4 T + \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1 \right) T^2 + \frac{1}{6} (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) T^3 + \frac{1}{24} \mathbf{A}_1^4 T^4 \Big).$$

and so on ...

In our extended paper [5] for system with 2 degrees of freedom we derive general approximate stability conditions. We study domains of stability with the use of fourth order approximations of monodromy matrix on example of linearized equation of an inverted pendulum with vertically oscillating pivot. With the obtained approximations we demonstrate that addition of small damping shifts the stability boundaries, thus resulting to both stabilization and destabilization effects numerically observed in e.g., [6].

References

1. *Floquet G* Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Annales scientifiques de l'École normale supérieure, **12** (1883), 47–88.

2. *Yakubovich V.A., Starzhinskii, V.M.:* Parametric Resonance in Linear Systems. — Moscow: Nauka, 1987.

3. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. — New Jersey: World Scientific, 2003.

4. *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A* Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. — New York: Gordon and Breach, 1961.

5. *Belyakov, A.O., Seyranian A.P.:* Stability boundary approximation of periodic dynamics // https://arxiv.org/abs/1902.09957v1.

6. *Belyakov, A.O.* Another mechanical model of parametrically excited pendulum and stabilization of its inverted equilibrium position // ENOC 2014 – Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference.

INCOMPLETE BVP OF PLANE ELASTICITY IN TERMS OF STRESS AND DISPLACEMENT ORIENTATIONS

A.N. Galybin

a.n.galybin@gmail.com

UDC 51

This paper deals with incorrectly posed boundary value problems of plane elasticity. The boundary conditions are imposed on stress or displacement orientations and do not include their magnitudes. It is shown that such formulation lead to a non-unique solution that is a linear combination of partial solutions the number of wchich is filal.

Keywords: plane elasticity, boundary value problems, complex potentials, singular integral equations
MSC: 01A05

Alexander N. Galybin, The Schmidt Institute of Physics of the Earth, RAS, Moscow, Russia

In some applications, e.g. in geomechanics, the boundary values of stresses and/or displacements are often unknown on the boundary, which restricts the use of standard formulations of boundary value problems (BVP) accepted in the theory of elasticity. However as shown in [1,2], the boundary conditions (BS) can be imposed in terms of principal stresses or displacements or their normal derivatives. Such formulations can be referred to as BVP with incomplete BS. It has been shown that they can possess a finite number of linearly independent solutions. This paper investigates solvability of the BVP formulated in terms of BS1 - principal directions of the stress tensor; and BS2 - orientation of the displacement vector. In con trust to the analysis in [1,2] this formulation cannot be reduced to one complex singular integral equation of the general type studied by Gakhov [3]. We use the following approach based on complex potentials, Muskhelishvili [4]. The complex potentials are presented by the Cauchy integrals with unknown densities. Their boundary values are found by employing the Sokhotski-Plemelj formulas. These are used to express the orientations of the principal stresses and the displacements on the contour in the form that contains two unknown complex valued functions. Further on, one of these functions is excluded by imposing the condition of continuity of the stress vector across the contour. Then by using two scalar BC in terms of the orientations we derive a system of two real singular equations, SIE. Each of these equations is further converted into he equivalent Riemann problem. The solvability of the latter depends on the index of the coefficient of the Riemann problem that is calculated through the increment of its argument (divided by 2p) in traversing the contour anticlockwise. If the index is positive then the Riemann problem has a finite number of solutions that is proportional to the index, otherwise the BVP does not have solutions in the class of holomorphic functions. It is shown that the number of solutions of the full SIE and the dominant SIE cab be different only for special cases, see [3] for detail. Therefore we further study solvability of the the dominant SIE, which mechanically corresponds to the case of elastic half-plane. We obtained the successive solutions of the equations in the system for the problem that do not directly allow for the application of the technique mentioned in [3] because of the presence of the derivatives of the unknown functions in the complex dominant SIE. It is shown that the total solution of the system is defined by two partial indexes $K1$ and $K2$ that are indexes of the corresponding Riemann problems. The solutions exist in $K1 + K2 > 0$ otherwise there are no bounded solutions in terms of complex potential holomorphic in half-plane. This study complements the results obtained in [1-2].

References

1. *Galybin, A.N., Mukhamediev, Sh.A.* Plane elastic boundary value problem posed on orientation of principal stresses // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **47** (1999), 2381-2409,

2. *Galybin, A.N.* Boundary value problems of plane elasticity involving orientations of displacements and tractions. // Journal of Elasticity. **102** (2011), 15-30,

3. *Gakhov, F.D.*Boundary value problems. — P. Moscow, Nauka, 1977.

4. *Muskhelishvili, N.I* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. — P. Noordhoff, Groningen, the Netherlands, 1963.

Указатель авторов

Абдукаримов М.Ф., 207
Абдулаев А.Р., 1
Авсянкин О.Г., 3
Агабабян В.С., 721
Агаджанов А.Н., 5
Аксенов А.В., 209
Акуленко Л.Д., 741
Алексеева Е.С., 417
Алимов А.Р., 8
Алимов Ш.А., 545
Аллилуева А.И., 547
Алхутов Ю.А., 420
Алхьенди М.М., 609
Аминов А.С., 498
Ан Е.В., 760
Аникин А.Ю., 548
Антоневич А.Б., 9
Армеев Г.А., 423
Асташов Е.А., 425
Асташова И.В, 212
Асхабов С.Н., 11

Багапш А.О., 429
Бадерко Е.А., 215
Баззаев А.К., 154
Балашов Д.А., 612
Балгимбаева Ш.А., 217
Барабанов Е.А., 220
Басалов Ю.Г., 721
Бахшалыева М.Н., 432
Бахыт А., 509
Бегматов А.Х., 14, 434
Беднов Б.Б., 18
Беднова В.Б., 614
Безродных С.И., 223
Беляев Алексей А., 23
Беляев Александр А., 20
Бережной Е.И., 437
Билалов Б.Т., 26
Бобылев А.А., 616
Бобылева Т.Н., 792
Богомолов С.В., 549
Бокаев Н.А., 28
Болтачев А.В., 227
Борубаев А.А., 553
Братусь А.С., 619
Бровко Г.Л., 622
Брюнинг Й., 548
Будочкина С.А., 626
Бузулуцкая А.Н., 9
Букжалёв Е.Е., 229
Буров А.А., 628
Бутузов В.Ф., 232
Быков В.В., 220

Вакулюк В.В., 631
Валеев Н.Ф., 31, 143
Ванько В.И., 635
Василевский Ю.В., 637
Васильев В.Б., 34
Веденеева Е.А., 639
Ведюшкина В.В., 589
Вершинин А.В., 642
Вершинин А.В. , 718
Ветохин А.Н., 234
Вигдорович И.И., 647
Винонен Н.В., 763
Владимиров А.А., 36
Владыкина В.Е., 38
Власов В.В., 41
Власов В.И., 236
Влахова А.В., 649
Войтицкий В.И., 240
Волков Б.О., 556
Волков В.Е., 652
Волков Н.П., 243

Волосивец С.С., 454
Вуколова Т.М., 440

Гавриков А.А., 654
Галатенко В.В., 444
Гарманова Т.А., 43
Гаспарян А.С., 447
Гейнц В.Л., 45
Георгиевский Д.В., 657
Гималтдинова А.А., 246
Гладун А.В., 659
Гласко Ю.В., 247
Гоголева С.Ю., 450
Головизнин В.М., 453
Голубов Б.И., 454
Голубятников А.Н., 661
Гольдман Н.Л., 249
Гонченко С.В., 48
Горбачев В.И., 252
Горячева И.Г., 663
Гринес В.З., 559
Громов В.А., 666
Гуревич Е.Я., 561

Денисов В.Н., 256
Дженалиев М.Т., 258
Доброхотов С.Ю., 669
Довбыш С.А., 261
Дрожжин С.В., 619

Егорова А.В., 264
Елецких К.С., 50
Епифанов В.П., 670
Ергалиев М.Г., 258

Завойчинская Э.Б., 676
Зайцев Н.А., 672
Зайцева Н.В., 268
Закирова Г.А., 270
Захаров В.К., 52
Захаров Д.Д., 679
Звягин А.В., 456, 683
Зингерман К.М., 642, 718
Зобова А.А., 685
Золотов Н.Б., 752

Иванов А.С., 56
Иванова Е.П., 273
Иванова О.А., 58
Игнатьев М.Ю., 275
Игонина Е.В., 278
Илолов М., 60
Иманбаев Н.С., 63
Исмати М., 280
Исматов Н.М., 280
Исмоилов А.С., 434
Ишкин Х.К., 65
Ишмаметов А.Х., 450

Кабанихин С.И., 458, 528
Кадченко С.И., 67
Каленова В.И., 739
Калимбетов Б.Т., 282
Калитвин А.С., 71
Калитвин В.А., 74
Калугин А.Г., 688
Калыбай А.А., 76
Кальменов Т.Ш., 284
Камынин В.Л., 286
Кангужин Б.Е., 78
Карапетян А.В., 690
Каримов К.Т., 373
Каримов О.Х., 288
Касимов О., 570
Касимов Ш.Г., 290
Катасонова К.А., 690
Кахарман Н., 284
Кащенко И.С., 293
Кельдибекова А.Б., 325
Кибкало В.А., 563
Киселев А.Б., 693
Климина Л.А., 696
Князьков Д.Ю., 699
Кобельков Г.М., 423, 456
Ковалёв М.Д., 705
Кожанов А.И., 295
Кожевникова Л.М., 296
Козлов А.Д., 48
Комаров Ю.А., 299
Конёнков А.Н., 302
Конечная Н.Н., 80
Коновалов Д.А., 642, 718
Копачевский Н.Д., 240
Копылов С.Н., 461
Корнев А.А., 462
Коровина М.В., 304
Корыткин Н.Г., 463

Корыткин П.Г., 463
Костин А.Б., 82
Котелкин В.Д., 702
Кошанов Б.Д., 307
Кравцева А.К., 148
Критский Б.В., 672
Кугушев Е.И., 708
Кудрявцев А.В., 423
Кудрявцева О.С., 465
Кузнецова Д.И., 338
Кузнецова М.Н., 309
Куксин С.Б., 548
Куликов А.Н., 312
Куликов Д.А., 312
Куликовская Н.В., 711
Кульжумиева А.А., 355
Кумакшев С.А., 714
Куржанский А.Б., 299
Кусаинова Л.К., 85
Кусраева З.А., 88
Кучкоров Э.И., 380
Кучкрова А.Н., 314

Лангаршоев М.Р., 468
Ларина Я.Ю., 609
Левашова Н.Т., 338
Левин В.Ан., 642, 718
Леонов А.С., 316
Лобковский Л.И., 702
Лобода А. А., 91
Ложников М.А., 423, 456
Локощенко А.М., 721
Локшин Б.Я., 724
Лужин А.А., 683
Лукашенко В.Т., 727
Лукашенко Т.П., 444
Лукомский С.Ф., 470
Лурье С.А., 730
Лыкосова Е.Д., 730
Ляхов Л.Н., 94

Мадрахимов У.С., 290
Макин А.С., 96
Маковский С.В., 730
Максимов Ф.А., 727
Мамонов А.М., 731
Мардонов Б., 760
Маслов С.А., 732
Матасов А.И., 735
Мельник О.Э., 639
Мерзляков С.Г., 473
Мигаева А.С., 99
Мирзоев В.С., 134
Мирзоев К.А., 102
Мирзоев С.Х., 207
Миронов А.Н., 319
Миронова Л.Б., 319
Мирсалимов В.М., 737
Михайлов В.А., 477
Михайлов Е.А., 738
Михайлова Т.А., 477
Мищенко А.С., 566
Морозов В.М., 739
Морозов К.Е., 48
Мугланов А.Л., 341
Мукминов Ф.Х., 321
Муравник А.Б., 324
Мурат Г., 85
Мустафина С.И., 477

Назайкинский В.Е., 569
Назирова Э.А., 143
Нарманов А.Я., 570
Нарманов О.А, 573
Натяганов В.Л., 732
Нестеров С.В., 741
Никабадзе М.У., 744
Никольский М.С., 747
Никонов В.И., 628
Новиков Н.С., 458
Новодерова А.П., 649
Новоселецкий В.Н., 423
Новоселова Н.Г., 767
Носовский Г.В., 575
Нурсултанов Е.Д., 105

Оспанов К.Н., 332
Овчинников М.Ю., 795
Овчинникова А.О., 749
Оганесян К.А., 480
Ойнаров Р., 76
Окунев Ю.М., 724
Онербек Ж.М., 28
Орумбаева Н.Т., 325
Осиленкер Б.П., 482
Осипенко Г.С., 329

Очилов З.Х., 14

Павленко В.А., 577
Павлов А.В., 106
Палин В.В., 578
Пастухова С.Е., 332
Перескоков А.В., 99
Петров А.Б., 749
Петров А.Г., 485
Печенцов А.С., 109
Пикулин С.В., 336
Платонов С.С., 112
Подольский В.Е., 115
Пожарский Д.А., 752
Полежаева Е.В., 338
Половинкин И.П., 341
Половинкина М.В., 341
Поляков Д.М., 117
Попеленский Ф.Ю., 581
Попенов С.В., 473
Попов А.Ю., 489
Постнов С.С., 754
Постнова Е.А., 757
Потапов М.К., 491
Привалова О.Г., 724
Прилепко А.И., 343
Прошкина А.В., 494
Пулькина Л.С., 345
Пуршева А.В., 67

Рамазанов М.И., 258
Рассадин А.Э., 417
Раутиан Н.А., 347
Рахмонов З.Х., 498
Рашидов Т., 760
Родина Л.И., 349
Родионов Т.В., 52
Розанова О.С., 763
Романов А.В., 744
Рощупкин С.А., 94
Рубинштейн А.И., 652
Рыжиков В.В., 120
Рыхлов В.С., 122
Рязанова Л.С., 67

Сабитов И.Х., 584
Сабитов К.Б., 352
Савин А.Ю., 227
Савчин В.М., 626
Савчук А.М., 125
Садовничая И.В., 125
Садовничий В.А., 444
Садыбеков М.А., 129
Садыкова К.К., 132
Сазонов В.В., 765
Сазонова С.В., 765
Салманов В.Ф., 134
Сальникова Т.В., 708
Самсонов В.А., 724
Самыловский И.А., 765
Сапелкин А.С., 765
Сартабанов Ж., 355
Сафонов В.Ф., 282
Сафонов К.А., 48
Сафонова Т.А., 136
Седлецкий А.М., 502
Семенова Т.Ю., 504
Сергеев И.Н., 358
Сибгатуллин И.Н., 738
Сивкин В.Н., 139
Сидоров Н.А., 142
Сидоров С.Н., 361
Симонов Б.В., 440, 491
Симонов П.М., 364
Ситник С.М., 367
Скачкова Е.А., 1
Соловьев В.В., 369
Солодов А.П., 465
Степанов С.Я., 708
Субботина Н.Н., 767
Сулейманов Б.И., 586
Султанаев Я.Т., 85, 143
Сурначёв М.Д., 420

Терауд В.В., 731
Теретёнков А.Е., 587
Терехин П.А., 507
Тихомиров Р.Н., 771
Тихонов Ю.А., 146
Тлеуханова А.Б., 132
Тлеуханова Н.Т., 509
Толченников А.А., 774
Трофимов С.П., 795
Туманов С.Н., 149
Тургунов К.К., 380
Турметов Б.Х., 371

Турцынский М.К., 763

Украинский Д.В., 661
Уринов А.К., 373

Фазлытдинов М.Ф., 394
Фазуллин З.Ю., 151
Фарков Ю.А., 511
Фасхеев И.О., 775
Федоров Г.В., 514
Федюков А.А., 777
Фигурина Т.Ю., 699
Филиновский А.В., 375
Филиппов А.И., 780
Фоменко А.Т., 589
Фомин Л.В., 721
Формальский А.М., 696
Фролкина О.Д., 592

Хайруллоев Ш.А., 517
Хакимова А.Р., 378
Халмухамедов А.Р., 380
Хохлов А.В., 782
Христич Д.В., 785
Хромов А.П., 593

Царьков И.Г., 8
Цветкова А.В., 520
Цопанов И.Д., 154

Чашечкин Ю.Д., 789
Чекунов А.Ю., 575
Черепова М.Ф., 215
Четверушкин Б.Н., 453
Чечкин Г.А., 382
Чижонков Е.В., 522
Чирский В.Г., 524

Шабозов М.Ш., 157
Шавгулидзе Е.Т., 148
Шагалова Л.Г., 385
Шайтан А.К., 423
Шайтан К.В., 423
Шакиров И.А., 525
Шамаев А.С., 792
Шамина А.А., 683
Шамолин М.В., 387
Шафаревич А.И., 594
Шейпак И.А., 160
Шеретов Ю.В., 595
Шерстюков В.Б., 82
Широбоков М.Г., 795
Шишкина Э.Л., 390
Шишленин М.А., 458, 528
Штерн А.И., 596

Юлдашева А.В., 545
Юмагулов М.Г., 394

Яновская Е.А., 797
Ярметова Р.Н., 162
Яшина М.В., 798

Aliev, A.R., 164
Alili, V.Q., 185
Artamonov, N.V., 166
Artamonov, S., 532
Arutyunov, A.V., 167
Asanov, A., 169
Ashurov, R.R., 535
Assanova, A.T., 396

Babayeva, S.F., 191
Belyakov, A.O., 801
Borisov, D., 172
Buterin, S.A., 399

Chechkina, A.G., 174
Chilin, V., 176

Davydov, A.A., 597
Dubravina, V.A., 178

Galkin, V.A., 402
Galybin, A.N., 803
Gol'dshtein, V., 404
Guliyeva, F.A., 180

Hasanov J.J., 181

Iliadis, S., 183
Imanberdiyev, K., 405
Ismailov, M.I., 185
Izmailov, R.N., 604

Kadelburg, Z., 186
Kadenova, Z.A., 169
Kadirbayeva, Z.M., 396
Kalyabin, G.A., 537

Karulina, E.S., 186
Kassymbekova, A., 405
Koca, B.B., 187
Kukushkin, M., 188
Kurina, G., 408

Malyugina, M.A, 399
Mayburov, S., 598
Melnikova, I.V., 189
Mirzoev, S.S., 191
Motovilov, A.K., 601
Muratov, M., 176
Musayev, A.M., 192

Nandi, K.K., 604
Nefedov, N., 410

Osipov, A.S., 194

Pashkova, J., 176
Pavićević, Ž., 540
Pchelintsev, V., 404

Sadigova, S.R., 180
Serov, V.S., 412
Seyranian, A.P., 801
Shamarov, N.N., 197
Shestopalov, Yu., 607
Shieh, C.-T., 399
Skinder, Yu.A., 597
Smolyanov, O.G., 200
Stepanov, V.D., 201
Suragan, D., 542
Šušić, J., 544

Tashpulatov, S.M., 202

Ukhlov, A., 404

Yagola, A.G., 415
Yurko, V.A., 205

Zhukovskiy, S.E., 167

Contemporary problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the conference dedicated to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichy. – Moscow : MAKS Press, 2019.

e-ISBN 978-5-317-06111-1 print-ISBN 978-5-317-06133-3

The book is composed of short notes, which present the results of the participants of the international conference dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichy. It presents 5 areas of mathematics and mechanics, in which V.A. Sadovnichy worked most actively. These areas coincide with the names of the sections in which the conference was held.

1. Operator theory and functional analysis.
2. Dierential equation.
3. Function theory and computational mathematics.
4. Geometry and mathematical physics.
5. Mechanics and mathematical modeling.

Keywords: operator theory, spectral theory, dierential equations, dierential geometry, function theory, mathematical physics, mechanics, mathematical simulation.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *А. М. Павлов*

Оригинал макет подготовлен издательским отделом
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939–3890/91. Тел./Факс 8(495) 939–3891