УДК 517.984.52

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, ОТВЕЧАЮЩИХ МНОГОМЕРНОМУ ОПЕРАТОРУ ШРЕДИНГЕРА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. I*

Л. В. Крицков

Эта работа посвящается 70-летию В. А. Ильина, оказавшего неоценимое влияние на формирование научных интересов автора, его благодарного ученика

Рассмотрим в N–мерном пространстве $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ формальное дифференциальное выражение

$$Au = -\Delta u + q(x)u, \tag{0.1}$$

в котором потенциал $q(x)$ – произвольная вещественнозначная функция, принадлежащая классу[1] $L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$ при некотором $p > N/2$, т.е. функция, представимая в виде суммы $q_1(x) + q_2(x)$, где $q_1(x) \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $q_2(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$. Известно, что формальный оператор (0.1) существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, если $p \in [2, \infty) \cap (N/2, \infty)$ [1, с.11, 15], и существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ в смысле форм, если $N/2 < p < 2$ [1, с.12–18]. Тем самым выражение A допускает самосопряженную реализацию $\mathcal{A}$, которую будем называть оператором Шредингера, определяемым (0.1). Из классических теорем о возмущениях следует, что оператор $\mathcal{A}$ полуограничен. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathcal{A}$ неотрицателен[2].

В настоящей работе получена оценка для образов Фурье $\widehat{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, m}$, по системе обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{A}$ при условии, что разлагаемая функция f принадлежит классу Соболева–Лиувилля $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $0 < \alpha \leq 2$.

Теорема 1. *Пусть оператор Шредингера $\mathcal{A}$ неотрицателен и потенциал $q \in L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$, где $p > N/2$ и $N \geq 2$. Тогда для каждой функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ с порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим условию $0 < \alpha < 3 - 2/p$, если $p \in (1, 2)$, $N = 2$, условию $0 < \alpha < 13/2 - 9/p$, если $p \in (3/2, 2)$, $N = 3$, или условию $0 < \alpha \leq 2$, если $p \in [2, \infty) \cap (N/2, \infty)$, $N \geq 2$, выполнена оценка*

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty (1+\lambda)^\alpha |\widehat{f}_i(\lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) \leq M_1 \|f\|^2_{L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)} \tag{0.2}$$

с константой $M_1 > 0$, не зависящей от f.

О точности оценки (0.2) в классе Соболева–Лиувилля $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ свидетельствует дополняющая этот результат

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для каждой функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty (1+\lambda)^\alpha |\widehat{f}_i(\lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) \geq M_2 \|f\|^2_{L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)} \tag{0.3}$$

с константой $M_2 > 0$, не зависящей от f.

*© *Дифференциальные уравнения. Т.34, N 5. С.609–618.*

[1]Этот класс становится банаховым пространством, если норму функции $q(x)$ ввести как $\inf\{\|q_1(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} + \|q_2(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} | q(x) = q_1(x) + q_2(x)\}$.

[2]Если $\mathcal{A}$ ограничен снизу числом $a < 0$, то оператор $\mathcal{A}_1$, определяемый выражением $A_1 u = -\Delta u + (q(x) - a)u$, будет неотрицателен, а его потенциал $q(x) - a$ не выйдет из рассматриваемого класса $L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$.

Оценка теоремы 1 вместе с известными оценками обобщенных собственных функций [2] позволяет судить о скорости равномерной во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ сходимости спектрального разложения $\sigma_\lambda(x,f)$ к разлагаемой функции f.

Теорема 3. *Пусть $N = 2$ или $N = 3$, оператор Шредингера $\mathcal{A}$ неотрицателен и потенциал $q \in L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$. Пусть $r \in (1,2]$ произвольно, а число α удовлетворяет условию*

– при $N = 2$: $2/r < \alpha < 2 - 2/p + 2/r$, если $p \in (1,2)$, и $2/r < \alpha \le 1 + 2/r$, если $p \ge 2$;

– при $N = 3$: $3/r < \alpha < 5 - 9/p + 3/r$, если $p \in (9/5, 2)$, и $3/r < \alpha \le 1/2 + 3/r$, если $p \ge 2$.

Тогда спектральное разложение каждой функции $f \in L_r^\alpha(\mathbb{R}^N)$ сходится при $\lambda \to +\infty$ абсолютно и равномерно во всем пространстве $\mathbb{R}^N$, причем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x) - \sigma_\lambda(x,f)| = o(1)\lambda^{(N-r\alpha)/(2r)}. \tag{0.4}$$

Точные условия равномерной на каждом компакте в $\mathbb{R}^N$ сходимости спектрального разложения по обобщенным собственным функциям оператора $\mathcal{A}$, определяемого выражением (0.1) с достаточно гладким потенциалом $q(x)$, получены в [3, с.293–294]. Впервые факт равномерной сходимости $\sigma_\lambda(x,f)$ во всем пространстве, а также оценки скорости сходимости установлены в [4, 5] при $N = 1$.

Отметим, что все результаты настоящей работы без каких–либо усложнений переносятся на случай, когда потенциал $q(x)$ в (0.1) принадлежит классу $L_{p_1}(\mathbb{R}^N) + \ldots + L_{p_s}(\mathbb{R}^N)$, где $N/2 < p_1 < \ldots < p_s \le \infty$.

Работа разбита на две части. В первой части получены интегральные представления фундаментальных функций и обобщенных образов Фурье функций из класса Соболева–Лиувилля. Во второй части доказаны теоремы 1–3.

1. Введение

Опишем упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ относительно оператора $\mathcal{A}$ [6, 7]. Оно характеризуется кратностью $m \le \infty$, множествами кратности e_i, $i = \overline{1,m}$, спектральной мерой $\rho(\lambda)$ и обобщенными собственными (или фундаментальными) функциями $u_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,m}$, которые для почти всех по мере $\rho(\lambda)$ значений λ непрерывны, принадлежат $W^1_{2,loc}$ в $\mathbb{R}^N$ и являются слабыми решениями уравнения

$$-\Delta u_i(x,\lambda) + q(x)u_i(x,\lambda) = \lambda u_i(x,\lambda), \tag{1.1}$$

т.е. для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ справедливо тождество

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta\varphi(x)u_i(x,\lambda)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (q(x)-\lambda)\varphi(x)u_i(x,\lambda)\,dx = 0. \tag{1.2}$$

Для каждого $\beta \ge 0$ введем гильбертово пространство $\mathcal{H}_{(\beta)}$ вектор–функций $F = (F_i)_{i=1}^m$ со скалярным произведением $(F,G)_{(\beta)} = \sum\limits_{i=1}^m \int_0^\infty F_i(\lambda)G_i(\lambda)\cdot(1+\lambda)^\beta d\rho(\lambda)$. Норма в пространстве $\mathcal{H}_{(\beta)}$, очевидно, задается равенством

$$\|F\|_{(\beta)} = \left[(F,F)_{(\beta)}\right]^{1/2}. \tag{1.3}$$

Для каждой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ корректно определены как элементы $\mathcal{H}_{(0)}$ обобщенные образы Фурье[3]

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)u_i(x,\lambda)\,dx, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.4}$$

Положим $(Uf)_i(\lambda) = \widehat{f}_i(\lambda)$. Отображение U осуществляет унитарное преобразование пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ в пространство $\mathcal{H}_{(0)}$, причем обратное отображение U^{-1} задается формулой

$$(U^{-1}F)(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{i=1}^m \int\limits_0^\lambda F_i(t)u_i(x,t)\,d\rho(t), \tag{1.5}$$

[3] Интеграл в (1.4) понимается в смысле главного значения.

в которой предел существует в норме пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$. Унитарность U, в частности, означает, что выполнено обобщенное равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^\infty \left|\widehat{f}_i(\lambda)\right|^2 d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\, dx. \tag{1.6}$$

Если спектральное разложение $\sigma_\lambda(x,f)$ функции $f(x)$ определить равенством

$$\sigma_\lambda(x,f) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^\lambda \widehat{f}_i(t) u_i(x,t)\, d\rho(t), \tag{1.7}$$

то из (1.4) и (1.5) следует, что $\forall f \in L_2(\mathbb{R}^N)$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\sigma_\lambda(\cdot,f) - f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} = 0$.

2. Формула среднего значения

Будем пользоваться интегральным представлением фундаментальных функций оператора $\mathcal{A}$, известным в случае гладкого потенциала $q(x)$ как формула среднего значения Титчмарша [8, с.230].

Пусть $\nu = (N-2)/2$, а $x \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ и $\lambda \geq 0$ произвольны и фиксированы. Для каждого $\lambda \geq 0$ положим $\mu = \sqrt{\lambda}$. Будем обозначать символом $\int_\theta F(x+r\theta)\, d\theta$ интеграл от функции F по всем углам на поверхности N–мерной сферы $\{y : |y-x| = r\}$. В этих обозначениях

$$\int_{|y-x|\leq R} F(y)\, dy = \int_0^R r^{N-1} \int_\theta F(x+r\theta)\, d\theta dr. \tag{2.1}$$

Если $u(x)$ удовлетворяет уравнению $-\Delta u = \lambda u - f$ в классическом смысле, то имеет место равенство[4]

$$\int_\theta u(x+r\theta)\, d\theta = \frac{(2\pi)^{\nu+1}}{(\mu r)^\nu} J_\nu(\mu r)\, u(x) - \frac{\pi}{2r^\nu} \int_0^r \rho^{\nu+1} w_\nu(\mu\rho, \mu r) \int_\theta f(x+\rho\theta)\, d\theta d\rho. \tag{2.2}$$

Здесь функция $w_\nu(z_1,z_2)$ выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ и Неймана $Y_\nu(z)$ порядка ν по формуле

$$w_\nu(z_1,z_2) = J_\nu(z_1)Y_\nu(z_2) - J_\nu(z_2)Y_\nu(z_1). \tag{2.3}$$

Формулу среднего значения для фундаментальных функций можно обосновать для оператора $\mathcal{A}$, потенциал q которого удовлетворяет[5] условию Като в $\mathbb{R}^N$, т.е.

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0+0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{|x-y|\leq h} \ln|x-y|^{-1}|q(y)|\, dy = 0 & \text{при } N = 2, \\ \lim\limits_{h\to 0+0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{|x-y|\leq h} |x-y|^{2-N}|q(y)|\, dy = 0 & \text{при } N \geq 3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условию Като в $\mathbb{R}^N$, а функция $u(x,\lambda)$ является слабым решением уравнения (1.1), непрерывным в $\mathbb{R}^N$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^N$ имеет место равенство*

$$\int_\theta u(x+r\theta,\lambda)\, d\theta = \frac{(2\pi)^{\nu+1}}{(\mu r)^\nu} J_\nu(\mu r)\, u(x,\lambda) - \frac{\pi}{2r^\nu} \int_0^r \rho^{\nu+1} w_\nu(\mu\rho,\mu r) \int_\theta q(x+\rho\theta) u(x+\rho\theta,\lambda)\, d\theta d\rho. \tag{2.5}$$

Доказательство.[6] Равенство (2.5) обосновывается по схеме, предложенной в [2], с помощью (1.2), (2.2) и известных оценок цилиндрических функций при $z \in (0,1]$ (см. [9, с.12, 16, 17, 23]):

$$J_0(z) = O(1), \quad Y_0(z) = O(1)\ln(e/z), \quad J_\nu(z) = O(z^\nu), \quad Y_\nu(z) = O(z^{-\nu}), \quad \nu > 0.\blacksquare \tag{2.6}$$

[4]При $\mu = 0$ выражения $(\mu r)^{-\nu} J_\nu(\mu r)$ и $w_\nu(\mu\rho,\mu r)$ заменяются эквивалентными им при $\mu \to 0+0$ выражениями.

[5]Если q принадлежит $L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$, $p > N/2$, то q удовлетворяет условию Като в $\mathbb{R}^N$.

[6]Подробности доказательства смотри в приложении, помещенным после текста второй части статьи.

3. Представление образов Фурье функции из класса Соболева–Лиувилля

Рассмотрим произвольную функцию f из класса Соболева–Лиувилля $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ с порядком дифференцируемости $\alpha > 0$. Пусть функция $h \in L_2(\mathbb{R}^N)$ такова, что [10, с.379]

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau_{\alpha/2}(|x-y|)h(y)\,dy, \tag{3.1}$$

где $\tau_{\alpha/2}(r)$ – ядро Бесселя–Макдональда, определяемое формулой

$$\tau_{\alpha/2}(r) = 2^{1-\alpha/2}[(2\pi)^{\nu+1}\Gamma(\alpha/2)]^{-1} r^{-(\nu+1)+\alpha/2} K_{(\nu+1)-\alpha/2}(r). \tag{3.2}$$

Отметим непосредственно вытекающие из асимптотических формул для функции Макдональда $K_\beta(r)$ [9, с.13, 17, 99] двусторонние оценки этого ядра. Если $r \geq 1$, то при $\nu \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$ имеем

$$c_1 r^{-(2\nu+3-\alpha)/2} e^{-r} \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_1 r^{-(2\nu+3-\alpha)/2} e^{-r}. \tag{3.3}$$

Если $r \in (0,1]$, то для $\nu = 0$, $\alpha = 2$ имеем

$$c_2 \ln(e/r) \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_2 \ln(e/r), \tag{3.4}$$

а для остальных значений параметров $\nu \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$ –

$$c_3 r^{-(2\nu+2-\alpha)} \leq \tau_{\alpha/2}(r) \leq C_3 r^{-(2\nu+2-\alpha)}. \tag{3.5}$$

Лемма 2. *Пусть потенциал q удовлетворяет условию Като (2.4). Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и почти всех по мере $\rho(\lambda)$ значений $\lambda \geq 0$ выполнено равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \tau_{\alpha/2}(|x-y|)u_i(y,\lambda)\,dy = \frac{u_i(x,\lambda)}{(1+\mu^2)^{\alpha/2}} - \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|x-y|,\mu)q(y)u_i(y,\lambda)\,dy, \tag{3.6}$$

в котором

$$W_\nu(\rho,\mu) = \frac{\pi}{2\rho^\nu}\int\limits_\rho^\infty r^{\nu+1}\tau_{\alpha/2}(r) w_\nu(\mu\rho,\mu r)\,dr. \tag{3.7}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что интеграл в левой части (3.6) сходится для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и почти всех по мере $\rho(\lambda)$ значений λ. Это вытекает из оценок (3.3)–(3.5) и того [6, с.506], что для почти всех по мере $\rho(\lambda)$ значений λ фундаментальные функции оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяют оценке

$$|u_i(x,\lambda)| \leq C_4(\lambda)(1+|x|)^{\nu+2}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.8}$$

Используем известную формулу (39) [9, с.108]

$$\frac{(2\pi)^{\nu+1}}{\mu^\nu}\int\limits_0^\infty r^{\nu+1}\tau_{\alpha/2}(r) J_\nu(\mu r)\,dr = \frac{1}{(1+\mu^2)^{\alpha/2}}. \tag{3.9}$$

Из (2.5) и (3.9) получим, что левая часть равенства (3.6) равна

$$\frac{u_i(x,\lambda)}{(1+\mu^2)^{\alpha/2}} - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty r^{\nu+1}\tau_{\alpha/2}(r) \int\limits_{|x-y|\leq r} |x-y|^{-\nu} w_\nu(\mu|x-y|,\mu r) q(y) u_i(y,\lambda)\,dydr. \tag{3.10}$$

Равенство (3.6), очевидно, получается из (3.10) изменением порядка интегрирования по r и $\rho = |x-y|$. Чтобы обосновать возможность такого преобразования, оценим величину $|x-y|^{-\nu} w_\nu(\mu|x-y|,\mu r)$ при $|x-y| \leq r$ и каждом $\mu > 0$. Если $r \leq 1$, то $|x-y| \leq 1$ и, применяя (2.6), имеем

$$|x-y|^{-\nu} w_\nu(\mu|x-y|,\mu r) = O(1)\cdot\begin{cases} |x-y|^{-2\nu} r^\nu, & \text{если } \nu \geq 1/2, \\ \ln(e/|x-y|)\ln(e/r), & \text{если } \nu = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Если $r \geq 1$, то при $|x-y| \leq 1$ получим оценку

$$|x-y|^{-\nu} w_\nu(\mu|x-y|, \mu r) = O(1) \cdot \begin{cases} |x-y|^{-2\nu} r^{-1/2}, & \text{если } \nu \geq 1/2, \\ \ln(e/|x-y|) r^{-1/2}, & \text{если } \nu = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

а при $|x-y| \geq 1$ – оценку

$$|x-y|^{-\nu} w_\nu(\mu|x-y|, \mu r) = O(1) \cdot r^{-1/2}. \tag{3.13}$$

Из (3.11) и непрерывности $u_i(y,\lambda)$ вытекает, что при $r \leq 1$ и $|x-y| \leq 1$

$$I_\nu(r,y) \equiv r^{\nu+1} \tau_{\alpha/2}(r) |x-y|^{-\nu} |w_\nu(\mu|x-y|, \mu r) q(y) u_i(y,\lambda)| =$$
$$= O(1) \cdot \begin{cases} r^{2\nu+1} \tau_{\alpha/2}(r) |x-y|^{-2\nu} |q(y)|, & \text{если } \nu \geq 1/2, \\ r \ln(e/r) \tau_{\alpha/2}(r) \ln(e/|x-y|) \, |q(y)|, & \text{если } \nu = 0. \end{cases}$$

Так как потенциал q удовлетворяет условию (2.4), а ядро Бесселя–Макдональда – оценкам (3.4), (3.5), то $\int_0^1 \int_{|x-y| \leq r} I_\nu(r,y)\, dy dr < \infty$.

Аналогично из (3.12) и (3.3) следует, что $\int_1^\infty \int_{|x-y| \leq 1} I_\nu(r,y)\, dy dr < \infty$.

Наконец, из (3.8) и (3.13) следует, что при $r \geq 1$, $1 \leq |x-y| \leq r$

$$I_\nu(r,y) = O(1) r^{\nu+1/2} \tau_{\alpha/2}(r) (1+|x|+r)^{\nu+2} |q(y)|. \tag{3.14}$$

Так как любая функция, удовлетворяющая условию Като, равномерно локально суммируема в $\mathbb{R}^N$, то, покрывая множество $\{y : 1 \leq |x-y| \leq r\}$ шарами радиуса 1, получим $\int_{1 \leq |x-y| \leq r} |q(y)|\, dy = O(r^N)$. Тем самым из оценки (3.14) следует, что $\int_1^\infty \int_{1 \leq |x-y| \leq r} I_\nu(r,y)\, dy dr < \infty$. ■

Используя равенство (3.6), получим представление обобщенных образов Фурье (1.4) функции из класса Соболева–Лиувилля.

Лемма 3. *Пусть потенциал $q \in L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$ при некотором $p > N/2$. Пусть, кроме того, число $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $N/p - N/2 < \alpha \leq 2$, если $N/2 < p \leq 2$, $N = 2, 3$, или условию $N/p < \alpha \leq 2$, если $p > \max\{N/2, 2\}$, $N \geq 2$. Тогда для каждой функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство*

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \frac{\widehat{h}_i(\lambda)}{(1+\mu^2)^{\alpha/2}} - \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|, \mu) \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dy dz, \tag{3.15}$$

второй интеграл в правой части которого есть предел по норме $\mathcal{H}_{(0)}$ интеграла $\int_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu) \cdot \int_{|y| \leq A} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dy dz$ при $A \to +\infty$.

Доказательству этого результата предпошлем две леммы, обоснование которых отложим до п.4 и п.6.

Пусть $W_*(\rho,\mu)$ – произвольная функция, определенная при $\mu \geq 0$ и $\rho > 0$, а H и Q – функции, принадлежащие, соответственно, пространствам $L_2(\mathbb{R}^N)$ и $L_p(\mathbb{R}^N)$ при некотором $p \in (N/2, \infty]$. Для каждого $i = \overline{1,m}$ и $\lambda = \mu^2 \geq 0$ положим

$$(T_i Q)(\lambda) = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} W_*(|z|, \mu) \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(y-z) Q(y) u_i(y,\lambda)\, dy dz, \tag{3.16}$$

понимая правую часть так же, как и второе слагаемое в правой части равенства (3.15). Отображение $Q \mapsto TQ = (T_i Q)_{i=1}^m$, очевидно, линейно. Отображение T как оператор, действующий из пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ в пространство $\mathcal{H}_{(\beta)}$ при $\beta \geq 0$, характеризует

Лемма 4. *Пусть функция $W_*(\rho,\mu)$ удовлетворяет для всех $0 < \alpha \leq 2$ оценке*

$$W_*(\rho,\mu) = O(1)(1+\sqrt{\rho}) \tau_{\alpha/2}(\rho) (1+\mu^2)^{-1} \tag{3.17}$$

равномерно по $\mu \geq 0$ и $\rho > 0$. Пусть, кроме того, числа $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$ удовлетворяют условиям

– $(\alpha;\beta) \in (2/p-1,2] \times [0,1)$ *или* $(\alpha;\beta) \in (1,2] \times [0,3-2/p)$, *если* $p \in (1,2)$, $N=2$;

– $(\alpha;\beta) \in (3/p-3/2,2] \times [0,1/2)$ *или* $(\alpha;\beta) \in (3/2,2] \times [0,13/2-9/p)$, *если* $p \in (3/2,2)$, $N=3$;

– $(\alpha;\beta) \in (0,2] \times [0,2-N/2)$ *или* $(\alpha;\beta) \in (N/2,2] \times [0,2]$, *если* $p=2$, $N=2,3$;

– $(\alpha;\beta) \in (N/p,2] \times [0,2]$, *если* $p > \max\{N/2,2\}$, $N \geq 2$.

Тогда найдется такая постоянная $M_* > 0$, что для произвольных $H \in L_2(\mathbb{R}^N)$ и $Q \in L_p(\mathbb{R}^N)$ выполнена оценка

$$\|TQ\|_{(\beta)} \leq M_* \cdot \|H\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \|Q\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.18}$$

Лемма 5. *Пусть $\nu \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 2$. Тогда функция (3.7) равномерно по $\mu \geq 0$ и $\rho > 0$ удовлетворяет оценке*

$$W_\nu(\rho,\mu) = O(1)\tau_{\alpha/2}(\rho)(1+\mu^2)^{-1}. \tag{3.19}$$

Покажем, как с помощью лемм 4 и 5 может быть получено представление (3.15).

Доказательство леммы 3. В силу оценок (3.3)–(3.5) функция $\tau_{\alpha/2}(|z|)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^N)$, откуда, согласно (3.1) и неравенству Юнга [11, с.25], следует, что можно указать такую постоянную $C_5 > 0$, не зависящую от f, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq C_5 \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.20}$$

Так как $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N) \subset L_2(\mathbb{R}^N)$, то интеграл $\int_{|y|\leq A_1} f(y)u_i(y,\lambda)\,dy$ сходится к $\widehat{f}_i(\lambda)$ по норме $\mathcal{H}_{(0)}$. В силу равенства Парсеваля (1.6)

$$\left\| \widehat{f}_i(\lambda) - \int\limits_{|y|\leq A_1} f(y)u_i(y,\lambda)\,dy \right\|_{(0)}^2 = \int\limits_{|y|\geq A_1} |f(y)|^2 dy. \tag{3.21}$$

Из равенства (3.1) и оценки (3.20) следует, что для любого $A_2 > 0$:

$$\left\| f(y) - \int\limits_{|x|\leq A_2} \tau_{\alpha/2}(|y-x|)h(x)\,dx \right\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C_5^2 \int\limits_{|x|\geq A_2} |h(x)|^2\,dx. \tag{3.22}$$

Положим $I = \int\limits_{|y|\leq A_1} \int\limits_{|x|\leq A_2} \tau_{\alpha/2}(|y-x|)h(x)\,dx \cdot u_i(y,\lambda)\,dy$. Пусть числа $A_1, A_2 \geq 1$ удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{|y|\geq A_1} |f(y)|^2 dy \leq \varepsilon^2, \qquad \int\limits_{|x|\geq A_2} |h(x)|^2\,dx \leq \varepsilon^2/C_5^2. \tag{3.23}$$

Тогда, учитывая (1.6), (3.21)–(3.23), имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_i(\lambda) - I\|_{(0)} &\leq \varepsilon + \left\| \int\limits_{|y|\leq A_1} f(y)u_i(y,\lambda)\,dy - I \right\|_{(0)} = \\ &= \varepsilon + \left\| f(y) - \int\limits_{|x|\leq A_2} \tau_{\alpha/2}(|y-x|)h(x)\,dx \right\|_{L_2(|y|\leq A_1)} \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Так как функции $u_i(x,\lambda)$ непрерывны, а функция $\tau_{\alpha/2}(|z|)$ суммируема, то в I можно изменить порядок интегрирования. После этого выполним преобразование внутреннего интеграла:

$$I = \int\limits_{|x|\leq A_2} h(x) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} - \int\limits_{|y|\geq A_1} \right] \tau_{\alpha/2}(|y-x|)u_i(y,\lambda)\,dydx \equiv I_1 - I_2. \tag{3.25}$$

Пусть числа A_1 и A_2 связаны неравенством $A_1 \geq 2A_2$. Тогда, если $|x| \leq A_2$ и $|y| \geq A_1$, то $|y-x| \geq A_1 - A_2 \geq A_2$. Поэтому в силу неравенства Минковского и равенства (1.6) имеем

$$\|I_2\|_{(0)} \leq \int\limits_{|x|\leq A_2} |h(x)| \Big\| \int\limits_{|y|\geq A_1} \tau_{\alpha/2}(|y-x|) u_i(y,\lambda)\, dy \Big\|_{(0)} dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\leq A_2} |h(x)| \cdot \Big(\int\limits_{|y|\geq A_1} \tau^2_{\alpha/2}(|y-x|)\, dy \Big)^{1/2} dx \leq \int\limits_{|x|\leq A_2} |h(x)| \Big(\int\limits_{|\xi|\geq A_2} \tau^2_{\alpha/2}(|\xi|)\, dy \Big)^{1/2} dx. \quad (3.26)$$

В силу оценки (3.3) $\int_{|\xi|\geq A_2} \tau^2_{\alpha/2}(|\xi|)\, d\xi = O(\exp(-2A_2))$. Поэтому правая часть (3.26) есть $O(1) \cdot \exp(-A_2) \int_{|x|\leq A_2} |h(x)|\, dx = O(1) \exp(-A_2) A_2^{\nu+1} \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}$. Тем самым из (3.25) следует, что можно выбрать A_2 так, чтобы

$$\|I - I_1\|_{(0)} \leq \varepsilon. \quad (3.27)$$

Используя теперь равенство (3.6), представим интеграл I_1 в виде

$$I_1 = (1+\mu^2)^{-\alpha/2} \int\limits_{|x|\leq A_2} h(x) u_i(x,\lambda)\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{|y-z|\leq A_2} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dydz. \quad (3.28)$$

Отметим, что в силу (1.6) и (3.23)

$$\Big\| (1+\mu^2)^{-\alpha/2} \int\limits_{|x|\leq A_2} h(x) u_i(x,\lambda)\, dx - (1+\mu^2)^{-\alpha/2} \widehat{h}_i(\lambda) \Big\|_{(0)} \leq \varepsilon / C_5. \quad (3.29)$$

Во втором интеграле правой части (3.28) выполним преобразование $\int_{\mathbb{R}^N} = \int_{|z|\leq A_3} + \int_{|z|\geq A_3}$, где $A_3 \geq 1$ пока произвольно. Функция $(1+\sqrt{|z|}) W_\nu(|z|,\mu)$ в силу (3.19) удовлетворяет условию (3.17), поэтому из оценки (3.18) следует, что[7]

$$\Big\| \int\limits_{|z|\geq A_3} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{|y-z|\leq A_2} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dydz \Big\|_{(0)} \leq$$

$$\leq (1+\sqrt{A_3})^{-1} M_* \cdot \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \big(\|q_1\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} + \|q_2\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \big) \equiv C_6 (1+\sqrt{A_3})^{-1}. \quad (3.30)$$

Из неравенства треугольника следует, что при $|z| \leq A_3$ справедливо включение $\{y : |y-z| \leq A_2\} \subset B_1$, где $B_1 \equiv \{y : |y| \leq A_2 + A_3\}$. Положим $B_2 = B_1 \setminus \{y : |y-z| \leq A_2\}$. Тогда $\int_{|z|\leq A_3} \int_{|y-z|\leq A_2} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_1} - \int_{|z|\geq A_3} \int_{B_1} - \int_{|z|\leq A_3} \int_{B_2}$. Аналогично (3.30) для второго интеграла правой части этого равенства имеем

$$\Big\| \int\limits_{|z|\geq A_3} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{B_1} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dydz \Big\|_{(0)} \leq C_6 (1+\sqrt{A_3})^{-1}, \quad (3.31)$$

а для третьего (в силу (3.23)):

$$\Big\| \int\limits_{|z|\leq A_3} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{B_2} h(y-z) q(y) u_i(y,\lambda)\, dydz \Big\|_{(0)} \leq M_* \|h\|_{L_2(|x|\geq A_2)} \cdot \big(\|q_1\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} + \|q_2\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \big) \leq$$

$$\leq C_5^{-1} M_* \big(\|q_1\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} + \|q_2\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} \big) \varepsilon \equiv C_7 \varepsilon. \quad (3.32)$$

Если число A_3 удовлетворяет условию

$$C_6 (1+\sqrt{A_3})^{-1} \leq \varepsilon, \quad (3.33)$$

[7] Отметим, что если α удовлетворяет условиям леммы 3, то оценка (3.18) имеет место с $\beta = 0$.

то из (3.30)–(3.32) следует, что

$$\Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{|y-z|\le A_2} h(y-z)q(y)u_i(y,\lambda)\,dydz -$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu)\cdot \int\limits_{|y|\le A_2+A_3} h(y-z)q(y)u_i(y,\lambda)\,dydz \Bigg\|_{(0)} \le (2+C_7)\varepsilon.$$

Из этой оценки, равенства (3.28) и оценок (3.27), (3.29) получим

$$\Bigg\| I-(1+\mu^2)^{-\alpha/2}\widehat{h}_i(\lambda) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{|y|\le A_2+A_3} h(y-z)q(y)u_i(y,\lambda)\,dydz \Bigg\|_{(0)} \le$$
$$\le (3+C_7+C_5^{-1})\varepsilon. \quad (3.34)$$

Тем самым из (3.24) и (3.34) вытекает неравенство

$$\Bigg\| \widehat{f}_i(\lambda)-(1+\mu^2)^{-\alpha/2}\widehat{h}_i(\lambda) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} W_\nu(|z|,\mu) \int\limits_{|y|\le A_2+A_3} h(y-z)q(y)u_i(y,\lambda)\,dydz \Bigg\|_{(0)} \le$$
$$\le (5+C_7+C_5^{-1})\varepsilon,$$

если число $A_3 \ge 1$ выбрано так, что выполнено (3.33), а число $A_2 \ge 1$ – так, что выполнены (3.23) и (3.27). ■

4. Доказательство леммы 4

Исходя из определения нормы (1.3), равенства (3.16) и оценки (3.17), получим, что квадрат нормы $\|TQ\|^2_{(\beta)}$ при $\beta \ge 0$ равен

$$O(1)\sum_{i=1}^m \int\limits_0^\infty (1+\lambda)^{\beta-2}\cdot \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|) \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(y-z)Q(y)u_i(y,\lambda)\,dy \Bigg| dz \Bigg\}^2 d\rho(\lambda). \quad (4.1)$$

Из (3.3) следует, что при $r \ge 1$ имеет место неравенство $(1+\sqrt{r})\tau_{\alpha/2}(r) \le C_1\exp(-r)$. Поэтому в силу (3.4) и (3.5) интеграл $\int_{\mathbb{R}^N}[(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)]^\gamma dz$ сходится, если $0<\gamma<N/(N-\alpha)$, $\alpha\in(0,2]$.

Предположим сначала, что $Q\in L_p(\mathbb{R}^N)$ с некоторым $p\in[2,\infty]\cap(N/2,\infty]$. Пусть $\alpha\in(N/p,2]$. Тогда, применяя к интегралу в фигурных скобках правой части (4.1) неравенство Коши–Буняковского, при любом $\beta\in[0,2]$ получим

$$\|TQ\|^2_{(\beta)} = O(1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} [(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)]^{p/(p-1)}dz\cdot$$
$$\cdot\sum_{i=1}^m \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} [(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)]^{(p-2)/(p-1)} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(y-z)Q(y)u_i(y,\lambda)\,dy \Bigg|^2 dzd\rho(\lambda). \quad (4.2)$$

Так как при $\alpha > N/p$ справедливо неравенство $p/(p-1) < N/(N-\alpha)$, то первый множитель правой части (4.2) конечен, и мы придем к тому, что $\|TQ\|^2_{(\beta)}$ есть

$$O(1)\int\limits_{\mathbb{R}^N} [(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)]^{(p-2)/(p-1)}\cdot \Bigg\{ \sum_{i=1}^m \int\limits_0^\infty \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^N} H(y-z)Q(y)u_i(y,\lambda)\,dy \Bigg|^2 d\rho(\lambda) \Bigg\} dz. \quad (4.3)$$

Выражение в фигурных скобках в (4.3) в силу (1.6) равно $\int_{\mathbb{R}^N}|H(y-z)|^2\cdot|Q(y)|^2dy$. Из неравенства Юнга вытекает, что для этого интеграла выполнена оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |H(y-z)|^2|Q(y)|^2dy \Bigg]^{p/2} dz \le \|H\|^p_{L_2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^p_{L_p(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.4)$$

Учитывая (4.4), применим неравенство Гельдера к правой части (4.3):

$$\|TQ\|^2_{(\beta)} = O(1)\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^N} [(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)]^{p/(p-1)}dz\biggr)^{(p-2)/p} \cdot \|H\|^2_{L_2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^2_{L_p(\mathbb{R}^N)}.$$

Тем самым оценка (3.18) доказана при $\alpha \in (N/p, 2]$, $\beta \in [0,2]$ и $p \in [2,\infty] \cap (N/2,\infty]$.

Пусть теперь $Q \in L_p(\mathbb{R}^N)$ с некоторым $p \in (N/2, 2]$ при $N = 2, 3$. Пусть $(p^{-1} - 2^{-1})N < \alpha \le 2$. Покажем, что в этом случае оценка (3.18) имеет место с любым $\beta \in [0,1)$ при $N = 2$ и любым $\beta \in [0, 1/2)$ при $N = 3$.

Будем использовать оценку фундаментальных функций [12]

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mu \le \sqrt{t} \le \mu+1} |u_i(y,t)|^2 d\rho(t) \le C_{13}(1+\mu)^{N-1}, \tag{4.5}$$

справедливую равномерно по $y \in \mathbb{R}^N$ и $\mu \ge 0$ при $N = 2$ и $N = 3$. Для каждого $\beta < 2 - N/2$ из (4.5) вытекает равномерная по $y \in \mathbb{R}^N$ оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^\infty (1+\lambda)^{\beta-2}|u_i(y,\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \le C_{14}. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и неравенства Коши–Буняковского следует, что равномерно по $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$ выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^\infty (1+\lambda)^{\beta-2}|u_i(y_1,\lambda)||u_i(y_2,\lambda)|\, d\rho(\lambda) \le C_{14}. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.7), из оценки (4.1) получим

$$\|TQ\|^2_{(\beta)} = O(1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}(1+\sqrt{|z_1|})\tau_{\alpha/2}(|z_1|)\int\limits_{\mathbb{R}^N}(1+\sqrt{|z_2|})\tau_{\alpha/2}(|z_2|)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|H(y_1-z_1)||Q(y_1)|\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^N}|H(y_2-z_2)||Q(y_2)|\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^\infty(1+\lambda)^{\beta-2}|u_i(y_1,\lambda)||u_i(y_2,\lambda)|\,d\rho(\lambda)dy_2dy_1dz_2dz_1 =$$

$$= O(1)\biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^N}(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)\biggl[\int\limits_{\mathbb{R}^N}|H(y-z)||Q(y)|\,dy\biggr]dz\biggr\}^2. \tag{4.8}$$

В силу неравенства Юнга норма величины в квадратных скобках правой части (4.8) в пространстве $L_{2p/(2-p)}(\mathbb{R}^N)$ не превосходит $\|H\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$, поэтому, применяя к правой части (4.8) неравенство Гельдера, имеем

$$\|TQ\|^2_{(\beta)} = O(1)\|(1+\sqrt{|z|})\tau_{\alpha/2}(|z|)\|^2_{L_{2p/(3p-2)}(\mathbb{R}^N)} \cdot \|H\|^2_{L_2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^2_{L_p(\mathbb{R}^N)} = O(1)\|H\|^2_{L_2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^2_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

поскольку при $\alpha > (p^{-1} - 2^{-1})N$ верно неравенство $2p/(3p-2) < N/(N-\alpha)$.

Используя интерполяцию, покажем, что верхняя граница допустимых значений параметра β ($\beta = 1$ при $N = 2$ и $\beta = 1/2$ при $N = 3$) может быть увеличена.

Пусть $N = 2$. Фиксируем произвольное $\alpha \in (1, 2]$. Тогда оценка (3.18) выполнена при $\beta = p = 2$ и при любых $\beta \in [0,1)$ и $p \in (1,2)$, так как $\alpha > 1 > 2(p^{-1} - 2^{-1})$. Фиксируем теперь произвольное $p \in (1, 2)$. Из оценки (3.18) следует, что оператор T для каждого $p_0 \in (1, p]$ является ограниченным из $L_{p_0}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{H}_{(\beta_0)}$ с любым $\beta_0 \in [0,1)$, а также является ограниченным из $L_2(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{H}_{(2)}$.

Интерполяционная теорема Стейна–Вейса [13, с.156] позволяет утверждать, что оператор T является ограниченным из $L_s(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{H}_{(\beta)}$, где

$$\beta = \beta_0\varkappa + 2(1-\varkappa), \quad s^{-1} = p_0^{-1}\varkappa + 2^{-1}(1-\varkappa), \quad \varkappa \in (0,1). \tag{4.9}$$

Так как $\varkappa = p_0(2-s)/(s(2-p_0))$ и β_0 – любое число из полуинтервала $[0,1)$, то тем самым оператор T ограниченно действует из $L_s(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{H}_{(\beta)}$ с любым β, удовлетворяющим условию $2-2\varkappa \leq \beta < 2-\varkappa$, что в силу произвольности $p_0 \in (1,p]$ эквивалентно условию $0 \leq \beta < 3-2/s$. Отметим, что из интерполяционной теоремы следует, что константа $M_* > 0$ в (3.18) зависит только от p и β и не зависит от нормы H в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $N = 3$. Фиксируем произвольное $\alpha \in (3/2,2]$. Тогда оценка (3.18) выполнена при $\beta = p = 2$ и при любых $\beta \in [0,1/2)$ и $p \in (3/2,2)$, так как $\alpha > 3/2 > 3(p^{-1}-2^{-1})$. Фиксируем теперь произвольное $p \in (3/2,2)$. Из оценки (3.18) следует, что оператор T для каждого $p_0 \in (3/2,p]$ является ограниченным из $L_{p_0}(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}_{(\beta_0)}$ с любым $\beta_0 \in [0,1/2)$, а также ограниченным из $L_2(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}_{(2)}$.

Указанная выше интерполяционная теорема позволяет утверждать, что оператор T — ограниченный оператор из $L_s(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}_{(\beta)}$, где β и s определяются равенствами (4.9). Так как β_0 – любое число из полуинтервала $[0,1/2)$, то тем самым оператор T ограниченно действует из $L_s(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}_{(\beta)}$ с любым β, удовлетворяющим условию $2-2\varkappa \leq \beta < 2-3\varkappa/2$, что в силу произвольности $p_0 \in (3/2,p]$ эквивалентно условию $0 \leq \beta < 13/2-9/s$.

Автор выражает благодарность В.А.Ильину и В.С.Серову за внимание к результатам настоящей работы.

Работа выполнена в рамках проекта CTIAC сотрудничества между ЕС и Россией.

Литература

1. *Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. - М.: 1990.
2. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. - 1996. - Т.32, N 3. - С.357–374.
3. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. - М., 1991.
4. *Ильин В.А., Антониу И.* // Дифференц. уравнения. - 1995. - Т.31, N 10. - С.1649–1657.
5. *Ильин В.А., Крицков Л.В.* // Дифференц. уравнения. - 1996. - Т.32, N 1. - С.32–36.
6. *Simon B.* // Bull. Amer. Math. Soc.- 1982.- V.7, N 3.- P.447–526.
7. *Крицков Л.В.* // Дифференц. уравнения. - 1995. - Т.31, N 12. - С.2038–2045.
8. *Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч.2.- М.,1961.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. - М., 1966.
10. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. - М., 1969.
11. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М., 1975.
12. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. - 1995. - Т.31, N 11. - С.1829–1842.
13. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. - М., 1980.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
17 марта 1998 г.

УДК 517.984.52

Крицков Л.В. **О спектральных разложениях, отвечающих многомерному оператору Шредингера с суммируемым потенциалом. I** // Дифференц. уравнения. 1998. Т.34, N 5. - С.609–618.

Пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательное самосопряженное расширение в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ формального дифференциального оператора $-\Delta u + q(x)u$ с потенциалом $q \in L_p(\mathbb{R}^N) + L_\infty(\mathbb{R}^N)$, $p > N/2$. Получены интегральные представления его обобщенных собственных функций и обобщенных образов Фурье функции из класса $L_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $0 < \alpha \leq 2$.

Библиогр. 13 назв.