

**НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ L_p ПРИ $p \geq 1$
ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.**

В.А.Ильин, А.А.Кулешов

Рассмотрим на этот раз в открытом с одной стороны прямоугольнике

$Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t < T)$ смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ в } Q_T \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и с граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = \mu(t), u(l, t) = 0, \quad (3)$$

второе из которых мы, не ограничивая общности, будем брать однородным.

От граничной функции $\mu(t)$, определенной на полусегменте $0 \leq t < T$, будем требовать, чтобы она при фиксированном $p \geq 1$ и при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$ принадлежала классу L_p на сегменте $[0, T - \varepsilon]$.

При этих условиях из теоремы 1 работы [1] вытекает существование функции $u(x, t)$, которая определена почти всюду в Q_T и при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ является решением соответствующей смешанной задачи в

прямоугольнике $\overline{Q}_{T-\varepsilon} = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T - \varepsilon]$, принадлежащим классу $L_p(Q_{T-\varepsilon})$. Наша цель - установить в терминах требований на граничную функцию $\mu(t)$ необходимое и достаточное условие принадлежности этого решения $u(x, t)$ классу $L_p(Q_T)$. Отметим, что данная работа является развернутым и технически усовершенствованным изложением результатов, анонсированных авторами в [2].

Основная теорема. *Если при фиксированных $T > 0$ и $p \geq 1$ функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_p[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$, то необходимым и достаточным условием принадлежности обобщенного решения $u(x, t)$ смешанной задачи (1)-(3) классу $L_p(Q_T)$ является существование интеграла*

$$\int_0^T (T - t) |\mu(t)|^p dt, \quad (4)$$

т.е. существование конечного предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{T-\varepsilon} (T - t) |\mu(t)|^p dt. \quad (5)$$

Проведем доказательство основной теоремы.

Произвольное $T > 0$ представим в виде $T = 2ln - \Delta$, где n - натуральное, $0 \leq \Delta < 2l$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, T)$ и рассмотрим в прямоугольнике $\overline{Q}_{T-\varepsilon}$ смешанную задачу (1)-(3) с той же граничной функцией $\mu(t)$. В силу теоремы

1 работы [1] исследуемая смешанная задача обладает обобщенным из класса $L_p(Q_{T-\varepsilon})$ решением $u_{T-\varepsilon}(x, t)$, которое определяется равенством

$$u_{T-\varepsilon}(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^m \underline{\mu}(t + x - 2lk),$$

где $m \geq \frac{T - \varepsilon}{2l}$, $m \leq n$, а символ $\underline{\mu}(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(\tau)$ при $\tau \geq 0$ и равную нулю при $\tau < 0$. Покажем, что почти всюду на прямоугольнике $Q_{T-\varepsilon}$ функция $u_{T-\varepsilon}(x, t)$ совпадает с функцией

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2lk). \quad (6)$$

Пусть $n > m$, т.е. $n = m + q$ для некоторого натурального q . Тогда получим

$$u(x, t) - u_{T-\varepsilon}(x, t) = \sum_{k=m}^{m+q-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=m+1}^{m+q} \underline{\mu}(t + x - 2lk). \quad (7)$$

Из неравенств $k \geq m$, $-2lm \leq T - \varepsilon$ следует, что аргументы всех функций $\underline{\mu}$, входящих в первую сумму из (7), отрицательны почти всюду в $Q_{T-\varepsilon}$. Аналогично проверяется, что аргументы всех функций $\underline{\mu}$, входящих во вторую сумму из (7), отрицательны всюду в $Q_{T-\varepsilon}$. Отсюда с учетом того, что $\underline{\mu}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ следует, что функция $u(x, t) - u_{T-\varepsilon}(x, t)$ равна нулю почти всюду в $Q_{T-\varepsilon}$.

Таким образом показано, что функция $u(x, t)$, определяемая равенством (6), является (единственным) обобщенным решением соответствующей смешанной задачи (1)-(3) в прямоугольнике $\overline{Q}_{T-\varepsilon}$ при любом $\varepsilon \in (0, T)$.

Функцию $u(x, t)$, определяемую равенством (6), мы и будем называть обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3) в незамкнутом прямоугольнике Q_T .

Теперь предположим, что $T > l$. Учитывая, что при этом полусегмент $[0, T)$ представляет собой сумму сегмента $[0, T - l]$ и интервала $(T - l, T)$, мы представим граничную функцию $\mu(t)$ в виде суммы $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$ со слагаемыми

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq T - l, \\ \mu(t) & \text{при } T - l < t < T, \end{cases} \quad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T - l, \\ 0 & \text{при } T - l < t < T. \end{cases}$$

При этом (в силу свойств функций $\mu_1(t)$ и $\underline{\mu}(t)$) определяемое равенством (6) решение $u(x, t)$ представляется суммой $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ со слагаемыми, определяемыми равенствами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - x \leq T - l, \\ \mu_1(t - x) = \mu(t - x) & \text{при } T - l < t - x < T, \end{cases} \quad (8)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}_2(t + x - 2lk), \quad (9)$$

во втором из которых символ $\underline{\mu}_2(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq T - l$ и равную нулю при $\tau < 0$ и $\tau > T - l$.

Нетрудно убедиться в том, что для функции $\mu_2(\tau)$ существует интеграл $\int_0^T (T-t)|\mu_2(t)|^p dt$, а функция $u_2(x, t)$ принадлежит классу $L_p(Q_T)$. Это вытекает из того, что в силу условия теоремы существует интеграл $\int_0^{T-l} |\mu(t)|^p dt$, из цепочки соотношений $\int_0^T (T-t)|\mu_2(t)|^p dt = \int_0^{T-l} (T-t)|\mu_2(t)|^p dt \leq T \int_0^{T-l} |\mu(t)|^p dt$ и из того, что для каждого из $2n$ слагаемых, стоящих в правой части (9), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\int_0^T |\underline{\mu}_2(t \mp x - 2lk)|^p dt \right] dx &= \int_0^l \left[\int_{\mp x - 2lk}^{T \mp x - 2lk} |\underline{\mu}_2(\tau)|^p d\tau \right] dx \leq \\ &\leq \int_0^l \left[\int_0^{T-l} |\mu_2(\tau)|^p d\tau \right] dx = l \int_0^{T-l} |\mu(\tau)|^p d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы в случае $T > l$ в силу соотношения (8) достаточно убедиться в том, что интеграл

$$\int_0^l \left[\int_{T-l}^T |\mu_1(t-x)|^p dt \right] dx \quad (10)$$

существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_{T-l}^T (T-t)|\mu_1(t)|^p dt. \quad (11)$$

А для этого в силу свойства полной аддитивности интеграла Лебега от неотрицательной функции достаточно доказать, что функция

$$I(\varepsilon) = \int_0^l \left[\int_{T-l}^{T-\varepsilon} |\mu_1(t-x)|^p dt \right] dx \quad (12)$$

ограничена на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда на множестве всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничена функция

$$K(\varepsilon) = \int_{T-l}^{T-\varepsilon} (T-t)|\mu_1(t)|^p dt. \quad (13)$$

Произведя в интеграле (12) замену переменной $\tau = t - x$ и учитывая, что $\mu_1(t)$ обращается в нуль при $t \leq T - l$ и что $T - \varepsilon - x \geq T - l$ только при $x \leq l - \varepsilon$, мы получим, что

$$I(\varepsilon) = \int_0^l \left[\int_{T-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau)|^p d\tau \right] dx = \int_0^{l-\varepsilon} \left[\int_{T-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau)|^p d\tau \right] dx.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$I(\varepsilon) = \left[x \int_{T-l}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1(\tau)|^p d\tau \right]_{x=0}^{x=l-\varepsilon} + \int_0^{l-\varepsilon} x |\mu_1(T - \varepsilon - x)|^p dx.$$

При любом $\varepsilon > 0$ обе подстановки обращаются в нуль. Поэтому, сделав в последнем интеграле замену $y = x + \varepsilon$, мы получим, что

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^l (y - \varepsilon) |\mu_1(T - y)|^p dy. \quad (14)$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие два тривиальных неравенства

$$y - \varepsilon \leq y \text{ при всех } \varepsilon \leq y \leq l, \quad (15)$$

$$y - \varepsilon \geq \frac{1}{2}y \text{ при всех } 2\varepsilon \leq y \leq l. \quad (16)$$

Из соотношения (14) и из неравенств (15) и (16) вытекают следующие неравенства

$$\int_{\varepsilon}^l y |\mu_1(T-y)|^p dy \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{2\varepsilon}^l y |\mu_1(T-y)|^p dy.$$

Последние неравенства с помощью замены $t = T - y$ можно переписать в виде

$$\int_{T-l}^{T-\varepsilon} (T-t) |\mu_1(t)|^p dt \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{T-l}^{T-2\varepsilon} (T-t) |\mu_1(t)|^p dt,$$

т.е. в виде

$$K(\varepsilon) \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} K(2\varepsilon). \quad (17)$$

В силу сказанного выше, неравенства (17) завершают доказательство основной теоремы для случая $T > l$.

Пусть теперь $0 < T \leq l$. В этом случае решение смешанной задачи (1)-(3) определяется формулой

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x),$$

и доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство одновременного существования интегралов (10) и (11) в случае $T > l$.

Тем самым, основная теорема полностью доказана.

Замечание. При формулировке основной теоремы достаточно требовать принадлежности функции $\mu(t)$ классу $L_1[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала

$0 < \varepsilon < T$, так как при этом из принадлежности функции $u(x, t)$, определяемой равенством (6), классу $L_p(Q_T)$ следует принадлежности функции $\mu(t)$ классу $L_p[0, T - \varepsilon]$ при любом ε из интервала $0 < \varepsilon < T$. Доказательство этого факта может быть проведено по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения для обобщенной производной $\mu'(t)$ в теореме 2 работы [3].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-01-00436а и № 11-01-12031-офи-м-2011, а также Программы Президиума РАН № 14 (Проект 208).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильин В. А., Кулешов А. А. Обобщенные решения волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // Докл. РАН 2012. Т. 446, № 4. С. 374-377.
- [2] Ильин В. А., Кулешов А. А. Критерий принадлежности классу L_p при $p \geq 1$ обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Докл. РАН 2012. Т. 446, № 6. С. .
- [3] Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geq 1$ // Дифференц. уравнения 2012. Т. 48, № . С..

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА.