ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 466, № 4, с. 412–417

МЕХАНИКА

УДК 532.526.4

АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА И НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНА ДЕФЕКТА ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

© 2016 г. И. И. Вигдорович

Представлено академиком РАН А.И. Леонтьевым 11.02.2015 г.
Поступило 07.08.2015 г.

Предлагается рациональная асимптотическая теория, описывающая динамический и тепловой турбулентный пограничный слой на пластине при нулевом градиенте давления. Тот факт, что течение зависит от конечного числа определяющих параметров позволяет сформулировать алгебраические условия замыкания, которые связывают турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток тепла с градиентами усредненной скорости и температуры. В результате точного асимптотического решения уравнений пограничного слоя получены известные законы стенки для скорости и температуры и законы дефекта скорости и температуры, а также выражения для коэффициента трения, числа Стантона и аналогии Рейнольдса. Последнее позволяет дать две новые формулировки закона дефекта температуры, одна из которых полностью аналогична закону дефекта скорости и не содержит числа Стантона и турбулентного числа Прандтля, а вторая не содержит коэффициента трения на стенке. Получен также закон теплопередачи, который связывает только тепловые величины. Выводы теории хорошо согласуются с экспериментальными данными.

DOI: 10.7868/S0869565215360128

1. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине. Набегающий поток имеет скорость u_e и температуру T_e. Температура пластины T_w задана постоянной. Начало декартовой системы координат на передней кромке пластины.

Течение описывается уравнениями Навье–Стокса, неразрывности и переноса тепла:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla T = \chi\nabla^2 T. \qquad (2)$$

Для низкоскоростного течения несжимаемой жидкости кинетический нагрев, связанный с вязкой диссипацией энергии, пренебрежимо мал и в уравнении (2) не учитывается.

Для течения несжимаемой жидкости динамическая задача (1) не зависит от тепловой (2), и все динамические величины, в том числе градиент усредненной продольной скорости и турбулентное касательное напряжение, являются функциями декартовых координат x, y и трех определяющих параметров – плотности ρ, кинематической вязкости ν и скорости набегающего потока u_e:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = F_1(x, y, \rho, \nu, u_e), \quad \overline{u'v'} = F_2(x, y, \rho, \nu, u_e). \qquad (3)$$

Введем в рассмотрение толщину пограничного слоя

$$\Delta = F_3(x, \rho, \nu, u_e) \qquad (4)$$

как некоторую величину, характеризующую поперечный масштаб турбулентного течения. Например, как это обычно делается на практике, толщиной пограничного слоя можно считать расстояние до стенки δ_{99}, на котором усредненная скорость на 1% отличается от u_e. Разрешая первое уравнение (3) и уравнение (4) относительно величин x и u_e и подставляя их во второе уравнение (3), получим

$$\overline{u'v'} = F_4\left(\Delta, y, \rho, \nu, \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right).$$

Применяя к этому соотношению П-теорему, будем иметь

$$\overline{u'v'} = -\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 S(\mathrm{Re}, \eta), \quad \mathrm{Re} = \frac{y^2}{\nu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}. \qquad (5)$$

Здесь S – некоторая универсальная функция, Re – локальное число Рейнольдса, образованное по градиенту усредненной скорости и расстоянию до стенки.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

Поле температуры вычисляется на основе поля скорости, поэтому определяющие параметры тепловой задачи – ρ, ν, u_e, коэффициент температуропроводности χ и разность температур $T_w - T_e$:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} = F_5(x, y, \rho, \nu, \chi, u_e, T_w - T_e),$$
$$\overline{T'v'} = F_6(x, y, \rho, \nu, \chi, u_e, T_w - T_e). \tag{6}$$

Поперечный градиент и турбулентный поток температуры зависят только от разности температур на стенке и в набегающем потоке в силу линейности уравнения (2). Разрешая первое уравнение (3), уравнение (4) и первое уравнение (6) относительно величин x, u_e и $T_w - T_e$ и подставляя их во второе уравнение (6), получим

$$\overline{T'v'} = F_7\left(\Delta, y, \rho, \nu, \chi, \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Поскольку, как сказано выше, кинетический нагрев не учитывается, уравнение для температуры (2) однородно. Поэтому для температуры можно выбрать произвольную размерность. С учетом этого обстоятельства применение к соотношению (7) П-теоремы дает

$$\overline{T'v'} = -y^2\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}H(\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \eta),$$
$$\mathrm{Pe} = \frac{y^2}{\chi}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}. \tag{8}$$

Здесь H – некоторая универсальная функция, Pe – локальное число Пекле, образованное по градиенту усредненной скорости и расстоянию до стенки. Числа Рейнольдса и Пекле связаны равенством $\mathrm{Pe} = \mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\chi}$ – молекулярное число Прандтля.

Можно считать S и H непрерывными и дифференцируемыми функциями своих аргументов. Мы поставим более слабые условия Гёльдера:

$$S(\mathrm{Re}, \eta) = S(\mathrm{Re}, 0) + O(\eta^{\alpha_1}),\ \ \eta \to 0,\ \ \mathrm{Re} = O(1),$$
$$S(\mathrm{Re}, 0) = S(\infty, 0) + O(\mathrm{Re}^{-\alpha_2}), \quad \mathrm{Re} \to \infty,$$
$$S(\mathrm{Re}, \eta) = S(\infty, \eta) + O(\mathrm{Re}^{-\alpha_2}),\ \ \mathrm{Re} \to \infty,\ \ \frac{1}{\eta} = O(1), \tag{9}$$
$$S(\infty, \eta) = S(\infty, 0) + O(\eta^{\alpha_1}), \quad \eta \to 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

и аналогичные условия для функции $H(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}, \eta)$. Условия (9) представляют собой математическую формулировку единственного, восходящего еще к Карману [1], физического предположения, согласно которому в рассматриваемом течении есть только два характерных масштаба длины – вязкий масштаб (определяющий толщину вязкого подслоя) и толщина пограничного слоя. При больших числах Рейнольдса молекулярные вязкость и теплопроводность не существенны вне вязкого подслоя, а внешний масштаб не оказывает влияния на течение в пристеночной области.

2. Уравнения пограничного слоя для усредненного течения, проинтегрированные поперек слоя, с учетом условий замыкания (5), (8) имеют вид

$$\left(y\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 S(\mathrm{Re}, \eta) + \nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \frac{\tau_w}{\rho} = \bar{u}\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \bar{u}^2 dy,$$
$$y^2\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}H(\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \eta) + \chi\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} + \frac{q_w}{\rho} = \tag{10}$$
$$= \bar{T}\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \bar{T}\bar{u}dy,$$

где τ_w, q_w – усредненные касательное напряжение и тепловой поток на стенке соответственно. Рассмотрим вязкий подслой, в котором переменные

$$y_+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad \theta_+ = \frac{\rho u_\tau(T_w - \bar{T})}{q_w},$$
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{11}$$

имеют порядок единицы. В вязком подслое будем искать решение в виде

$$u_+ = U_+(y_+) + O(\mathrm{Re}_\tau^{-\alpha}), \quad \theta_+ = \Theta_+(y_+) + O(\mathrm{Re}_\tau^{-\alpha}),$$
$$\mathrm{Re}_\tau = \frac{u_\tau\Delta}{\nu}, \quad \alpha > 0. \tag{12}$$

Подстановка (11), (12) в (10) и предельный переход $\mathrm{Re}_\tau \to \infty$, $y_+ = O(1)$ с учетом (9) и связи $\eta = \dfrac{y_+}{\mathrm{Re}_\tau}$ дают для главных членов разложений обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\left(y_+\frac{dU_+}{dy_+}\right)^2 S(\mathrm{Re}, 0) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1, \quad U_+(0) = 0, \tag{13}$$

$$y_+^2\frac{d\Theta_+}{dy_+}\frac{dU_+}{dy_+}H(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}, 0) + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{d\Theta_+}{dy_+} = 1,$$
$$\Theta_+(0) = 0, \quad \mathrm{Re} = y_+^2\frac{dU_+}{dy_+}, \tag{14}$$

которые означают, что в первом приближении правыми частями уравнений (10), т. е. конвективными членами в уравнениях пограничного слоя, можно пренебречь. Из уравнений (13), (14) и условий, поставленных на функции S и H (9), следует, что скорость и температура вне вязкого подслоя имеют логарифмическую асимптотику

$$U_+ = \frac{1}{\kappa}(\ln y_+ + C) + O(y_+^{-\alpha}), \tag{15}$$

$$\Theta_+ = \frac{\sigma}{\kappa}[\ln y_+ + D(\Pr)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \to \infty, \quad \alpha > 0,$$
$$\kappa = \sqrt{S(\infty, 0)}, \quad \sigma = \frac{S(\infty, 0)}{H(\infty, \infty, 0)}. \tag{16}$$

В соответствии с экспериментальными данными примем значение постоянной Кармана $\kappa = 0.41$ и $C = 2.05$, а для турбулентного числа Прандтля в логарифмической области σ в соответствии с рекомендациями [2, 3] – значение 0.85. Для воздуха $D(0.7) = 1.8$ [2], асимптотика этой функции при малых и больших числах Прандтля исследована в [2, 4].

3. Перейдем к новым переменным по формулам [5]

$$\psi = u_e\Delta\Psi(\xi, \eta), \quad \bar{T} = T_e + (T_w - T_e)\Phi(\xi, \eta),$$
$$\xi = \ln \mathrm{Re}_\Delta, \quad \Lambda(\xi) = \frac{d\Delta}{dx}, \quad \mathrm{Re}_\Delta = \frac{u_e\Delta}{\nu}, \tag{17}$$

где ψ – функция тока усредненного течения. В качестве независимых переменных ξ и η выбраны логарифм числа Рейнольдса, образованного по толщине пограничного слоя, и относительное расстояние до стенки. Для функций $\Psi(\xi, \eta)$, $\Phi(\xi, \eta)$ и $\Lambda(\xi)$ из уравнений пограничного слоя с учетом условий замыкания (5), (8) получим

$$\Lambda[\Psi_\eta\Psi_{\xi\eta} - (\Psi + \Psi_\xi)\Psi_{\eta\eta}] =$$
$$= [(\eta\Psi_{\eta\eta})^2 S(\mathrm{Re}, \eta) + e^{-\xi}\Psi_{\eta\eta}]_\eta,$$
$$\Lambda[\Psi_\eta\Phi_\xi - (\Psi + \Psi_\xi)\Phi_\eta] =$$
$$= [\eta^2\Phi_\eta\Psi_{\eta\eta}H(\mathrm{Re}, \Pr\mathrm{Re}, \eta) + \Pr^{-1}e^{-\xi}\Phi_\eta]_\eta, \tag{18}$$
$$\mathrm{Re} = e^\xi\eta^2\Psi_{\eta\eta};$$
$$\xi > -\infty, \quad \eta = 0\colon\ \Psi = 0, \quad \Psi_\eta = 0, \quad \Phi = 1;$$
$$\eta \to \infty\colon\ \Psi_\eta \to 1, \quad \Phi \to 0.$$

Входящая в уравнения (18) относительная толщина пограничного слоя Λ – малая величина, а переменная ξ, равная логарифму числа Рейнольдса – большая величина, что позволяет искать асимптотическое решение задачи при $\xi \to \infty$. Асимптотические разложения искомых функций будут иметь более простой вид, если ввести новую независимую переменную $\zeta \to \infty$ по формуле $\xi = \zeta + k\ln\zeta$, где коэффициент k будет выбран в дальнейшем. Во внешней области пограничного слоя, где $\frac{1}{\eta} = O(1)$, решение уравнений (18) будем искать в виде

$$\Lambda(\xi) = \lambda\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}),$$
$$\Psi(\xi, \eta) = \eta + \lambda f(\eta)\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}), \tag{19}$$
$$\Phi(\xi, \eta) = \omega\varphi(\eta)\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}),$$

где λ и ω – постоянные коэффициенты. Подставляя разложения (19) в уравнения (18) и переходя к пределу при $\zeta \to \infty$, $\frac{1}{\eta} = O(1)$, для функций f и φ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$[(\eta f'')^2 S(\infty, \eta)]' + \eta f'' = 0, \quad f(0) = f'(\infty) = 0,$$
$$[\eta^2\varphi' f'' H(\infty, \infty, \eta)]' + \eta\varphi' = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \tag{20}$$

первые интегралы которых есть

$$(\eta f'')^2 S(\infty, \eta) = f - f(\infty) - \eta f', \tag{21}$$

$$\eta^2\varphi' f'' H(\infty, \infty, \eta) = -\int_\eta^\infty \varphi d\eta - \eta\varphi. \tag{22}$$

Из (21), принимая во внимание (9), получим асимптотику решения на стенке

$$f'(\eta) = \frac{F_1}{\kappa}(\ln\eta + A - \ln F_1) + O(\eta^\alpha),$$
$$F_1 = \sqrt{-f(\infty)}, \quad \eta \to 0, \quad \alpha > 0, \tag{23}$$

где A – постоянная интегрирования, которая, как можно проверить с помощью уравнения (21), не зависит от выбора поперечного масштаба Δ. Функция φ удовлетворяет линейному однородному уравнению (20) и определена с точностью до постоянного множителя. Для определенности поставим дополнительное условие

$$\int_0^\infty \varphi d\eta = \frac{F_1}{\sigma}. \tag{24}$$

Из (22), (24) и (9) получим, что профиль температуры имеет логарифмическую асимптотику на стенке

$$\varphi(\eta) = -\frac{1}{\kappa}(\ln\eta + E - \ln F_1) + O(\eta^\alpha),$$
$$\eta \to 0, \quad \alpha > 0, \tag{25}$$

где E – постоянная интегрирования, которая также не зависит от выбора поперечного масштаба Δ.

4. Выполним асимптотическое сращивание решений для двух областей – внешней и пристеночной. Введем коэффициент трения и число Стантона по формулам $c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_e}$, $\mathrm{St} = \frac{q_w}{\rho u_e c_p(T_w - T_e)}$. Связь между внутренними и внешними переменными на основании (11), (19) задается равенствами

$$\ln y_+ = \ln\eta + \ln \mathrm{Re}_\tau,$$
$$u_+\sqrt{c_f/2} = 1 + \lambda f'(\eta)\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}), \tag{26}$$
$$\theta_+\mathrm{St} = \sqrt{c_f/2}[1 - \omega\varphi(\eta)\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2})].$$

Поскольку, согласно (12), разница между u_+ и U_+ и θ_+ и Θ_+ меньше любой отрицательной степени ζ, для сращивания можно использовать асимптотические представления (15), (16). Заменив в равенствах (26) функции f', φ, u_+ и θ_+ их асимптотическими представлениями (23), (24), (15) и (16), получим условия сращивания

$$\frac{\sqrt{c_f/2}}{\kappa}(\ln\eta + \ln \mathrm{Re}_\tau + C) =$$

$$= 1 + \frac{\lambda F_1}{\kappa\zeta}(\ln\eta + A - \ln F_1) + O(\zeta^{-2}),$$

$$\frac{\sigma \mathrm{St}}{\kappa\sqrt{c_f/2}}(\ln\eta + \ln \mathrm{Re}_\tau + D) =$$

$$= 1 + \frac{\omega}{\kappa\zeta}(\ln\eta + E - \ln F_1) + O(\zeta^{-2}),$$

из которых следуют равенства

$$\sqrt{c_f/2} = \frac{\lambda F_1}{\zeta} + O(\zeta^{-2}), \tag{27}$$

$$\frac{\sqrt{c_f/2}}{\kappa}[\ln(F_1 \mathrm{Re}_\tau) + C - A] = 1 + O(\zeta^{-2}), \tag{28}$$

$$\frac{\sigma \mathrm{St}}{\sqrt{c_f/2}} = \frac{\omega}{\zeta} + O(\zeta^{-2}), \tag{29}$$

$$\frac{\sigma \mathrm{St}}{\kappa\sqrt{c_f/2}}[\ln(F_1 \mathrm{Re}_\tau) + D - E] = 1 + O(\zeta^{-2}). \tag{30}$$

Соотношения (27), (29) получены из условия равенства коэффициентов при $\ln\eta$. На основании (27)

$$\ln \mathrm{Re}_\tau = \zeta + k\ln\zeta + \ln\sqrt{c_f/2} =$$

$$= \zeta + k\ln\zeta - \ln\zeta + O(1).$$

С другой стороны, из (27), (28) $\ln \mathrm{Re}_\tau = \zeta + O(1)$. Откуда следует, что нужно положить $k = 1$.

5. Из (19), (27), (29) следуют известные законы дефекта скорости и дефекта температуры для внешней области пограничного слоя:

$$\frac{u_e - \bar{u}}{u_e\sqrt{c_f/2}} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O(\sqrt{c_f}), \tag{31}$$

$$\frac{(T_e - \bar{T})\sqrt{c_f/2}}{(T_e - T_w)\mathrm{St}} = \sigma\varphi(\eta) + O(\sqrt{c_f}). \tag{32}$$

Исключив число Рейнольдса из равенств (28), (30), для коэффициента аналогии Рейнольдса получим формулу

$$\frac{2\mathrm{St}}{c_f} = \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{\sqrt{c_f/2}}{\kappa}[A - E + D(\mathrm{Pr}) - C] + O(c_f)\right], \tag{33}$$

которая по структуре совпадает с выражением, приведенным в [6, глава 6]. Из (33) в частности следует, что в турбулентном течении коэффициент аналогии Рейнольдса весьма слабо зависит от молекулярного числа Прандтля.

Умножив равенство (32) на (33), получим новую формулировку закона дефекта температуры

$$\frac{T_e - \bar{T}}{(T_e - T_w)\sqrt{c_f/2}} = \varphi(\eta) + O(\sqrt{c_f}), \tag{34}$$

которая полностью аналогична закону дефекта скорости (31). В соотношение (34), в отличие от (32), не входит ни число Стантона, ни турбулентное число Прандтля. Другая форма закона дефекта температуры, которая также следует из (32) и (33), имеет вид

$$\frac{T_e - \bar{T}}{(T_e - T_w)\sqrt{\sigma \mathrm{St}}} = \varphi(\eta) + O(\sqrt{\mathrm{St}}). \tag{35}$$

Достоинством соотношения (35) является то, что оно не содержит коэффициента трения. Интегрируя (34) и (35) поперек слоя, с учетом (24) будем иметь

$$\frac{\delta_T}{\delta\sqrt{c_f/2}} = \frac{F_1}{\sigma} + O(\sqrt{c_f}), \quad \frac{\delta_T}{\delta\sqrt{\sigma \mathrm{St}}} = \frac{F_1}{\sigma} + O(\sqrt{\mathrm{St}}),$$
$$\delta_T = \int_0^\infty \frac{T_e - \bar{T}}{T_e - T_w}dy. \tag{36}$$

Отсюда видно, что аналогом известной для динамического пограничного слоя толщины Клаузера [7] для теплового пограничного слоя являются величины $\delta_T\sqrt{2/c_f}$ и $\delta_T/\sqrt{\sigma \mathrm{St}}$.

На рис. 1 в переменных подобия (34) и (35) построены экспериментальные профили температуры [8]. Коэффициент трения в этой работе не измерялся и поэтому взят из параллельного экспериментального исследования [9]. В качестве поперечных масштабов используются величины (36). Сплошная кривая на рис. 1 построена по известной эмпирической формуле Коулса [10] для профиля скорости, в которой поперечная координата растянута в $1/\sigma$ раз. В отличие от соотношения, приведенного в [6, глава 6], такая аппроксимация профиля температуры учитывает тот факт, что толщина динамического и теплового пограничных слоев разная. Данные на рис. 1 очень хорошо подтверждают справедливость законов подобия (34) и (35) – вне вязкого подслоя все экспериментальные точки лежат на одной кривой.

Соотношение (28) дает закон трения на пластине

$$\ln \mathrm{Re}_{\delta*} = \frac{\kappa}{\sqrt{c_f/2}} + A - C + O(\sqrt{c_f}), \tag{37}$$

где $\mathrm{Re}_{\delta*}$ – число Рейнольдса, образованное по толщине вытеснения пограничного слоя. Соот-

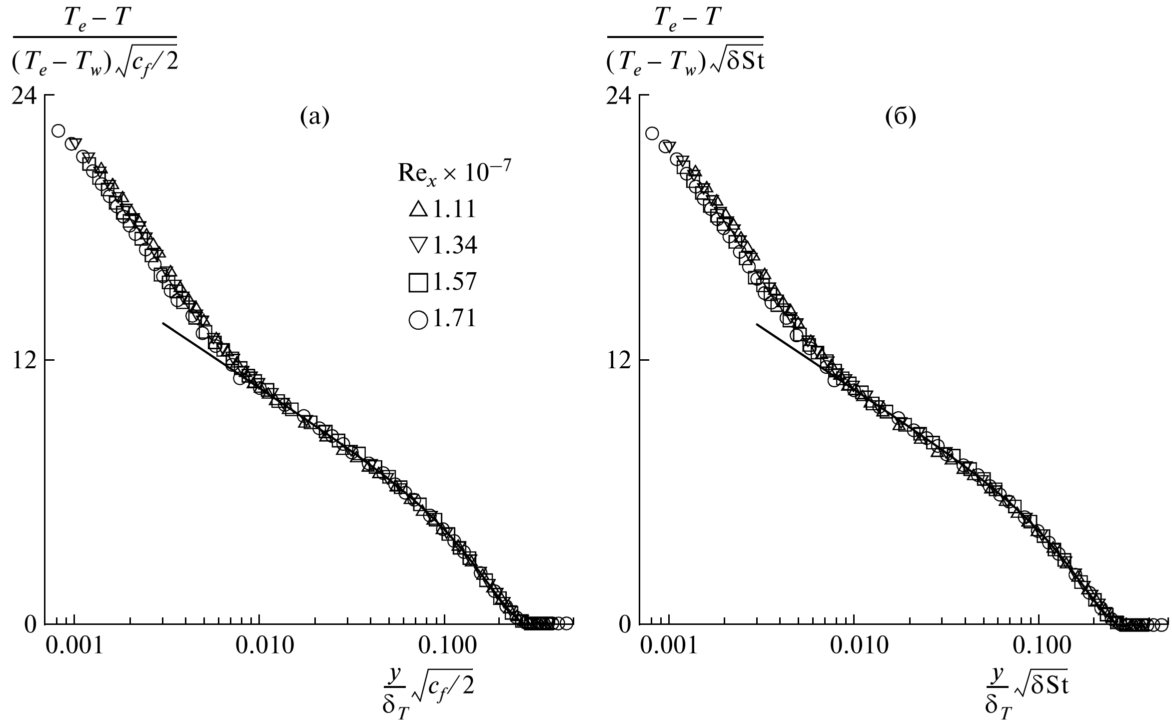

Рис. 1. Экспериментальные профили температуры [8] в турбулентном пограничном слое на пластине в переменных подобия (34) (а) и (35) (б); сплошная кривая – аппроксимационная формула.

ношение (33) позволяет получить выражение коэффициента трения через число Стантона, подстановка которого в (37) дает

$$\ln \mathrm{Re}_{\delta_T} = \frac{\kappa}{\sqrt{\sigma \mathrm{St}}} - \ln \sigma + \frac{1}{2}[A + E - C - D(\mathrm{Pr})] + O(\sqrt{\mathrm{St}}), \qquad (38)$$

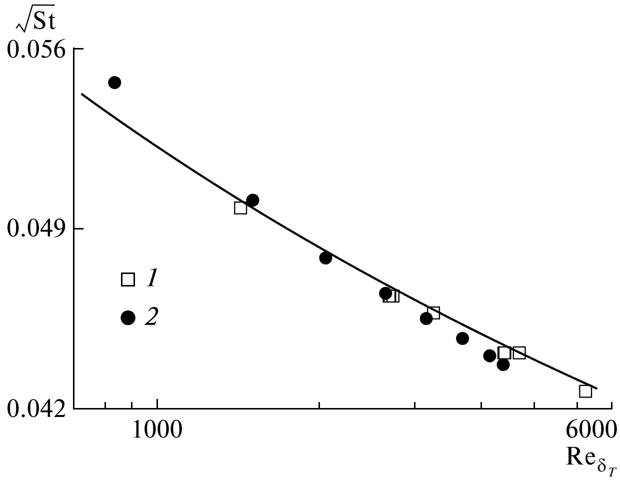

Рис. 2. Распределение числа Стантона на пластине. Экспериментальные данные [11] (*1*), [8] (*2*) и расчетная кривая (38).

где Re_{δ_T} – число Рейнольдса, образованное по толщине δ_T. Построенная на рис. 2 формула (38) хорошо описывает экспериментальные данные [11, 8], притом, что эмпирические постоянные, которые в нее входят, так же, как в случае соотношения (37), определены в результате анализа профилей скорости и температуры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–01–00172).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von Kármán Th.* Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Proc. III Intern. Congress Applied Mechanics. Stockholm, 24–29 August 1930. Stockholm: Aktiebolaget Sveriges Litografiska Tryckerier, 1931. V. 1. P. 85–93.
2. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
3. *Kays W.M.* // J. Heat Transfer. 1994. V. 116. № 2. С. 284–295.
4. *Вигдорович И.И.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. В. 5 (11). С. 1180–1191.
5. *Вигдорович И.И.* // ДАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 443–448.

6. *Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. 590 с.
7. *Clauser F.H.* // Adv. Appl. Mech. 1956. T. 4. C. 1–51.
8. *Blackwell B.F., Kays W.M., Moffat R.J.* The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Heat Transfer Behavior with Adverse Pressure Gradients. Rept № HMT–16. Stanford: Stanford Univ., 1972.
9. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Fluid Mechanics for Adverse Free–Stream Pressure Gradient. Rept № HMT–15. Stanford: Stanford Univ., 1972.
10. *Coles D.* // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt. 2. P. 191–226.
11. *Simpson R. L., Moffat R. J., Whitten D. G.* // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1970. V. 13. № 1. P. 125–143.