ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Артема Евгеньевича Звонарева

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИПЕРГРАФОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОЙ ТЕОРИИ РАМСЕЯ

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Вопросы, рассматриваемые в диссертации А.Е. Звонарева, находятся на стыке комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов. Примерами классических задач комбинаторной геометрии являются задачи И. Кеплера и Э. Нельсона, а также проблема К. Борсука. В задаче И. Кеплера (начало XVII века) ставится вопрос о максимальном количестве одинаковых материальных шаров, которые можно приложить к равному всем им шару в евклидовом пространстве. К. Борсук в 1933 году поставил проблему отыскания минимального количества $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное ограниченное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В 1950 году Э. Нельсон предложил рассмотреть $\chi(\mathbb{R}^n)$ — минимальное количество цветов, которые можно так раскрасить все точки евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, что никакие две точки не находятся на расстоянии 1. О сложности задач комбинаторной геометрии говорят следующие факты. Полное и строгое решение задачи И. Кеплера было дано лишь в 1953 году Б. Л. Ван-дер-Варденом и К. Шютте. К. Борсук предположил, что $f(n) = n+1$ и это предположение было доказано при малых n. Вместе с тем, это предположение оказалось неверным, поскольку в 1993 году Дж. Кан и Г. Калаи построили контрпримеры в размерностях $n \geq 2014$. Точное значение хроматического числа евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ не известно уже при $n = 2$. Интерес к задачам комбинаторной геометрии подтверждается большим количеством публикаций по этой тематике.

В диссертации рассматриваются некоторые вопросы евклидовой теории Рамсея и связанные с ней задачи экстремальной теории гиперграфов. Именно, множество $S \subset \mathbb{R}^d$ называется *рамсеевским*, если для любого r существует такое $n_0(r) \geq d$, что при любом $n \geq n_0(r)$ и при любой раскраске $\mathbb{R}^n$ в r цветов найдется конгруэнтная одноцветная копия S. Например, известно, что любое двухточечное множество и любой симплекс являются рамсеевскими. Идея доказательства нижних оценок величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ и идея доказательства рамсеевости тех или иных множеств состоит в рассмотрении не всего пространства $\mathbb{R}^n$, а его специальной части — множества вершин n-мерного единичного куба, которые имеют фиксированное количество единичных компонент. Легко видеть, что расстояние между такими вершинами равно заданному числу тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих им векторов фиксировано. Можно построить гиперграф на вершинах $1, 2, \ldots, n$, а гиперребра образуют множества номеров единичных координат векторов из $\{0,1\}^n$. Условие запрета на величину скалярного произведения эквивалентно условию запрета на мощность пересечения двух гиперребер. Изучение свойств такого рода гиперграфов является одним из центральных разделов современной теории гиперграфов. Классическим примером результата в этой области является теорема П. Франкля и В. Редля.

Диссертация А. Е. Звонарева состоит из списка основных обозначений, введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приводятся история рассматриваемых задач, ряд ранее известных результатов, описание структуры и полученных результатов диссертации.

В первой главе приводятся необходимые определения, обозначения и доказывается некоторое усиление классической теоремы Франкля-Редля.

Во второй главе диссертации рассматривается величина $\chi_{\Delta}(\mathbb{R}^n)$ — минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить все точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что никакие три одноцветные точки не образуют единичного правильного треугольника. Во второй главе доказывается оценка $\chi_{\Delta}(\mathbb{R}^n) \geq (1.052... + o(1))^n$.

В третьей главе рассматривается задача оценивания хроматического числа дистанционных графов, не содержащих достаточно больших клик. Именно, доказывается, что если $k(n)$ — произвольная стремящаяся к бесконечности функция, то существует последовательность $\{G_n\}$ дистанционных графов, что $\chi(G_n) \geq (1.239... + o(1))^n$ и G_n не содержит клики размера $k(n)$.

В заключении приводится обзор полученных результатов и указываются возможные направления для дальнейших исследований.

К диссертации А. Е. Звонарева имеются следующие замечания:

1. В диссертации некоторые определяемые объекты выделены курсивом, а некоторые нет.

2. Имеются повторы некоторых одних и тех же утверждений и определений в разных частях диссертации.

3. Некоторые определения сформулированы расплывчато. Не приведена расшифровка некоторых обозначений. Например, представленное определение числа независимости (10 страница, 22 строка сверху) может быть интерпретировано с искажением смысла этого понятия. Другой пример — запись «$G \subset \mathbb{R}^n$» на 11 странице 16 строка снизу. Что она означает? То, что G — дистанционный в $\mathbb{R}^n$ граф?

4. В диссертации сообщается, что результат третьей главы является обобщением классической теоремы П. Эрдеша о существовании графа со сколь угодно большими хроматическим числом и обхватом. Результатом третьей главы является существование семейства дистанционных графов с экспоненциальным ростом хроматического числа и слабым ростом кликового. Нельзя говорить о том, что этот результат обобщает теорему П. Эрдеша.

5. Список литературы упорядочен не по алфавиту.

6. Замечены следующие опечатки (число до точки означает номер страницы, а после нее означает номер строки, считая сверху или снизу на странице, соответственно):

6.-11: поспособств**а**в**о**ло
7.10: пропущена запятая
7.18: лишнее тире
13.3: множе**ж**ств
14.4: пропущена запятая
21.3: пропущено слово «через» перед $\overline{\alpha}$
28.–7: пропущены запятые
34.-8: **п**простое
47.12: теории **р**амсея
49.-5: теорем**ы**

Указанные замечания являются незначительными и ни в коей мере не умаляют значения полученных результатов.

Диссертация А. Е. Звонарева имеет теоретический характер. Она, несомненно, посвящена актуальной тематике и производит весьма положительное впечатление. Текст написан ясно и четко, обладает внутренним единством, автор работы демонстрирует отличное владение методами экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов. Полученные в диссертации результаты представляют значительный интерес для специалистов в профильных российских и ведущих международных центрах: МФТИ, компания «Яндекс», МГУ им. М.В. Ломоносова, МИ РАН им. В.А. Стеклова, ИППИ РАН, НИУ ВШЭ.

Все основные результаты диссертации являются новыми и достоверными. Они опубликованы в четырех работах (все из списка ВАК РФ), апробированы на конференциях и семинарах. Личный вклад автора в совместных работах очень четко описан. Публикации и автореферат в полной мере и правильно отражают содержание диссертации.

Диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика. Она, безусловно, удовлетворяет всем требованиям пп. 9–14 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Артем Евгеньевич Звонарев заслуживает присуждения искомой степени.

Официальный оппонент:
д.ф.-м.н., доц., проф. каф. ПМИ НИУ ВШЭ НН Д.С. Малышев

11. 05. 2016

Сведения об оппоненте:
Малышев Дмитрий Сергеевич
д.ф.-м.н., доц., проф. кафедры
прикладной математики и информатики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде
603155, г. Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25/12
телефон: 8 (831) 436-13-97
Email: dsmalyshev@rambler.ru; dmalishev@hse.ru

Д.С. Малышева

Подпись заверена начальником отдела кадров Н. А. Ермолиной