

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-Математический факультет, кафедра Общих Проблем Управления

На правах рукописи
УДК 517.977

Локуциевский Лев Вячеславович

Особые экстремали в задачах с многомерным управлением

Специальность 01.01.02 —
«дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
чл.-корр. РАН, проф.
Зеликин М.И.

Москва — 2015

Содержание

Введение	5
 I Основные свойства гамильтоновых систем с разрывной правой частью в окрестности особых экстремалей	 18
1 Гамильтоновость потока особых траекторий	19
1.1 Краткое введение в теорию особых экстремалей	20
1.2 Гамильтоновы системы с негладким гамильтонианом	21
1.3 Различные определения порядков особой траектории	23
1.4 Натуральный порядок	26
1.5 Гамильтоновость потока особых траекторий	31
1.6 Ниспадающая система скобок Пуассона	35
1.7 Теоремы о единственности и сопряжении для неособых траекторий	37
1.8 Управление намагниченным волчком Лагранжа	44
 2 Флаг порядков особой экстремали с задачах с многомерным управлением	 54
2.1 Особые экстремали в задачах с многомерным управлением	54
2.2 Обобщенное условие Лежандра-Клебша при многомерном управлении	55
2.3 Флаг локальных порядков	56
2.4 Флаг глобальных порядков для систем, аффинных по многомерному управлению	60
2.5 Условия сопряжения неособой траектории с особой	62
2.6 Оптимальное управление в виде обмотки клиффордова тора	64
2.7 Применение теории Галуа для доказательства иррациональности обмотки клиффордова тора	70
 3 Оптимальный поток в одном классе нильпотентно-выпуклых задач	 74
3.1 Класс нильпотентно-выпуклых задач	74
3.2 Формулировка теорем об оптимальном потоке	77
3.3 Существование и единственность	79
3.4 Группа почти симметрий	81
3.5 Свойства функции Беллмана	86
3.6 Доказательство теорем об оптимальном потоке	92
3.7 Достаточность принципа максимума Понтрягина в нильпотентно-выпуклой задаче	94

3.8	Модификация для конечного промежутка времени	95
3.9	Обратимость оптимального потока	96
3.10	Примеры	97
4	Особые траектории первого порядка в задачах с управлением из многогранника . .	105
4.1	Введение	105
4.2	Особые по граням траектории	107
4.3	Аналитические формулы для особых по граням траекторий.	108
4.4	Поверхности особых экстремалей	111
4.5	Голономный случай	112
4.6	Сведение гамильтоновой системы для голономной задачи к модельной задаче оптимального управления	114
4.7	Модельная задача оптимального управления с многогранником	117
4.8	Структура выхода на особую траекторию и схода с нее.	120
II	Хаотическая динамика в гамильтоновых системах с разрывной правой частью	124
5	Первая теорема о хаотичном поведении траекторий в интегральных воронках . . .	125
5.1	Постановка	125
5.2	Симметрии задачи и одномерные задачи Фуллера внутри	126
5.3	Барицентрические координаты в случае правильного треугольника	128
5.4	Важнейшие примеры периодических траекторий на фактор-пространстве M/g . . .	130
5.5	Поведение оптимальных траекторий в окрестности периодических траекторий . . .	134
5.6	Формулировка первой теоремы о хаотичном поведении траекторий в модельной задаче	136
5.7	Раздутие особенности в вершине интегральной воронки	137
5.8	Перепараметризация времени	139
5.9	Грубость автомодельных траекторий	141
5.10	Гомоклиническая траектория на нулевом сечении цилиндра C	144
5.11	Завершение доказательства первой теоремы о хаотичности	147
6	Топологические свойства отображения последования Пуанкаре	150
6.1	Топологическая структура поверхности переключения	150
6.2	Редукция по действию группы S_3	152
6.3	Известные элементы синтеза	153
6.4	Глобальная структура отображения Пуанкаре	155
6.5	Переходы циклического и осциллирующего типа	156
6.6	Аттрактор в обратном направлении времени	156
6.7	Промежуточные области	158
6.8	Разрешение динамики на области V	162

6.9	Разрешение динамики отображений типа B	164
6.10	Динамика отображений типа A и C	166
7	Фрактальная структура гиперболических липшицевых динамических систем	168
7.1	Введение	168
7.2	Локальные свойства гиперболических липшицевых отображений	169
7.3	Эволюция липшицевых поверхностей	171
7.4	Гиперболическая липшицева динамика	174
7.5	Символическая динамика на графе	177
7.6	Размерность аттрактора матричной итерационной системы	182
7.7	Оценка размерностей множества неблуждающих точек	188
8	Хаотическая динамика отображения Пуанкаре	192
8.1	Билипшицевость отображения последования Пуанкаре	192
8.2	Условия липшицевой гиперболичности	194
8.3	Сопряженность с топологической марковской цепью	198
8.4	Оценка размерностей	198
8.5	Односторонняя марковская цепь	199
8.6	Фрактальная структура отображения Пуанкаре	200
8.7	Теорема о точной структуре хаоса в оптимальном синтезе в модельной задаче с правым треугольником	203
9	Хаотичность на конечных интервалах времени в гамильтоновых системах с разрывной правой частью	208
9.1	Гамильтоновы системы с разрывной правой частью	208
9.2	Формулировки теорем о хаосе в гамильтоновых системах с разрывной правой частью	209
9.3	Ниспадающая система скобок Пуассона	213
9.4	Раздутие особенности в странной точке	217
9.5	Модельная задача оптимального управления на нулевом сечении C_0^H	220
9.6	Нильпотентизация в окрестности странной точки	222
9.7	Отображение последования Пуанкаре в гамильтоновой системе	224
9.8	Окончание доказательства хаотического поведения траекторий в общей гамильтоновой системе	229
	Заключение	246
	Литература	247
	Список рисунков	254
	Список таблиц	256

Введение

Актуальность темы.

Одной из основных задач оптимального управления является задача построения оптимального синтеза. Оптимальным синтезом называется совокупность оптимальных решений системы с фиксированными начальными или конечными условиями. Зачастую построение оптимального синтеза сопряжено с серьезными трудностями: дело заключается в том, что оптимальный синтез на фазовом пространстве, вообще говоря, не образует гладкую динамическую систему (даже локально). Оптимальные траектории могут быть негладкими, и, более того, отсутствует единственность: траектории могут как пересекаться, так и разветвляться. Наличие таких сложных особенностей связано с тем, что гамильтонова система принципа максимума Понтрягина чаще всего имеет разрывную правую часть. В этом случае ее решение понимается в обобщенном смысле по Филиппову [1]. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение с разрывной правой частью

$$\dot{x} = f(x)$$

Тогда если правая часть f непрерывна на некотором открытом всюду плотном множестве G , то дифференциальное уравнение заменяется дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(x)$$

где $F(x)$ – есть минимальное выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $f(y)$ при $y \rightarrow x$, $y \in G$. Решение такого включения обязано существовать (при довольно общих предположениях [2]), однако уже в тривиальных примерах единственность нарушается.

Основные идеи качественного исследования поведения решений гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений восходят к Пуанкаре, который в своих мемуарах 1881-1882 годах создал начала качественной теории дифференциальных уравнений [3]. В его основе лежит изучение динамики траекторий в окрестности стационарных точек и циклов системы. Например, линеаризация системы в окрестности стационарной точки позволяет отыскать сепаратрисные многообразия [4]. Для изучения структуры решений в окрестности цикла Z обычно используют отображение последования Пуанкаре. Для этого рассматривают произвольную достаточно малую площадку S , трансверсально пересекающую Z в некоторой точке x_0 . Отображение последования

$$\Phi : S \rightarrow S$$

переводит точку $x \in S$ в точку следующего пересечения с S траектории системы, проходящей через x . Если точка x достаточно близка к Z , то отображение Φ корректно определено. Точка x_0 очевидно является неподвижной точкой отображения Φ , поэтому линеаризация Φ в окрестности x_0 позволяет построить устойчивые и не устойчивые поверхности, сотканые из траекторий системы, стремящихся к Z в прямом или попятном времени соответственно.

Основным препятствием к исследованию поведения траекторий принципа максимума Понтрягина является негладкость гамильтониана, в результате чего правая часть гамильтоновой системы оказывается разрывной. А именно, рассмотрим задачу оптимального управления на гладком многообразии M управление u меняется в некотором множестве Ω . Тогда гамильтоновы поднятия оптимальных траекторий в кокасательное расслоение T^*M являются траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(q, p) = \max_{u \in \Omega} H(q, p, u),$$

где H – функция Понтрягина. Если максимум в этом выражении единственен и гладко зависит от q и p в какой-то области, то гамильтониан $\mathcal{H}$ является гладкой функцией в этой области. Чаще всего гамильтониан $\mathcal{H}$ является гладким на некотором открытом всюду плотном множестве, а множество его точек негладкости $\mathcal{S}$ является замкнутым подмножеством T^*M (например стратифицированным подмногообразием). Предположим также, что $\mathcal{S}$ делит пространство на конечное количество областей $\Omega_i, i = 1, \dots, N$,

$$T^*M = \mathcal{S} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^N \Omega_i,$$

и

$$\mathcal{H}|_{\Omega_i} \in C^\infty(\overline{\Omega_i}) \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N.$$

На областях Ω_i систему можно изучать с помощью классических инструментов теории гладких гамильтоновых систем. Однако для построения полной картины оптимального синтеза этого оказывается недостаточно, так как в точках множества $\mathcal{S}$ единственность может теряться (что полностью меняет характер глобального поведения решений). Более того, могут возникать траектории, целиком лежащие на множестве разрыва $\mathcal{S}$. Такие траектории принято называть особыми (или особыми экстремальями). Первые примеры особых экстремалей относятся к 1960-ым годам. Отметим работы Д.П. ЛяСалля [5] в 1960 г., П. Контенсу [6] в 1962, Г.Д. Кэлли [7] в 1964 г., Г.М. Роббинса [8] в 1965 г., Р.Е. Коппа и Г.Д. Мойера [9] в 1965 г. и др. Довольно быстро стало понятно, что в огромном количестве задач оптимального управления особые экстремали являются оптимальными и, более того, выступают в качестве магистралей: любая неособая траектория из их окрестности выходит на особую за конечное время [10].

Важно отметить, что единственность решения системы принципа максимума Понтрягина теряется далеко не во всех точках $\mathcal{S}$. В большинстве случаев оптимальная траектория теряет глад-

кость при пересечении с S , но единственность при этом сохраняется. Потеряться же единственность обычно может только в точках особых траекторий на S . Поэтому, наряду со стационарными точками и циклами, особые экстремали и геометрическая структура их окрестности лежат в основе изучения поведения траекторий гамильтоновых систем с разрывной правой частью.

Структуру оптимального синтеза в целом и, в частности, поведение оптимальных траекторий в окрестности особых экстремалей возможно исследовать с помощью методов теории динамических систем, которая в последние годы получила очень глубокое и серьезное развитие. На текущий момент известен огромный спектр методов и средств, для изучения статистического поведения орбит. Достаточно упомянуть символическую динамику, предложенную М. Морсом и Г.А. Хедлунд [11] в 1938 г. и с успехом примененную С. Смейлом при изучении динамики его знаменитой подковы [12] а 1967 г.; эргодическую теорию и теорему Биркхофа [13]; меру Синая-Рюэля-Боуэна [14]; полулокальный анализ и гомоклиническую динамику [15]; и др. Однако, до недавнего времени применение современных результатов теории динамических систем в теории оптимального управления натывалось на серьезное непреодолимое препятствие: как уже было сказано, решение гамильтоновой системы с разрывной правой частью не единственно, и поэтому динамическая система (пусть даже и не гладкая) в классическом смысле не определена. В настоящей диссертации частично восполнен этот пробел: предложен оригинальный метод выписывания ниспадающей системы скобок Пуассона, позволяющий эффективно исследовать качественное поведение решений в окрестности точек неединственности (например точек на особых экстремальных) для задач с многомерным управлением за счет разрешения особенности отображения последования Пуанкаре поверхности S негладкости гамильтониана на себя. Отметим, что получающаяся в результате динамическая система уже корректно определена, но, вообще говоря, не является гладкой, а только липшицевой. Поэтому автор обобщил некоторые классические результаты теории гладких гиперболических динамических систем на липшицев случай [16].

Субриманова геометрия, очень активно развивающаяся в последние годы, является важным приложением теории задач с многомерным управлением. Особые траектории, с одной стороны, играют в ней очень важную роль, а, с другой стороны, с ними всегда сопряжено много сложностей. Основная трудность в исследовании особых траекторий в субримановой геометрии заключается в следующем: любая нормальная траектория (коэффициент при функционале в функции Понтрягина $\lambda_0 \neq 0$) не является особой, а любая аномальная траектория ($\lambda_0 = 0$) обязана быть особой и, вообще говоря, может быть негладкой. Поэтому понятия аномальной траектории и особой экстремали сливаются. Известно следующее:

- (i) Легко показать, что любая не особая субриманова геодезическая является гладкой;
- (ii) В 1994 г. Р. Монтгомери построил пример субриманового многообразия, в котором некоторая гладкая особая экстремаль является строго кратчайшей траекторией, соединяющей две данные точки [17].

- (iii) Есть примеры негладких особых экстремалей, которые не являются оптимальными. Например в 2014 г. Р. Монти построил пример левоинвариантной субримановой задачи на группе Карно, в которой есть семейство (не оптимальных) особых экстремалей, которые являются лишь липшицевыми [18].

Однако открытым уже больше 20 лет [19, 20] остается следующий вопрос, особенно активно обсуждаемый в последнее время: существуют ли субримановы задачи, в которых негладкая особая траектория является кратчайшей траекторией, соединяющей две данные точки. Ответ на этот вопрос имеет огромное значение, так как многие важные теоремы в субримановой геометрии получены для задач, в которых нет особых траектории, являющихся кратчайшими.

Таким образом, построение оптимального синтеза в задачах с многомерным управлением тесно связано с изучением особых экстремалей и геометрической структуры их окрестностей. Поэтому актуальность тематики диссертации не вызывает сомнений.

Степень разработанности темы.

Во многих работах исследовались особые траектории в задачах оптимального управления с одномерным управлением из отрезка $\Omega = [a, b]$. В этом случае множество $\mathcal{S}$ точек разрыва правой части принципа максимума Понтрягина обычно является гиперповерхностью (возможно с особенностями). Важно отметить, что степень вырождения системы в окрестности особой траектории на гиперповерхности $\mathcal{S}$ определяется ее порядком $h \in \mathbb{N}$. Впервые определение порядка возникло практически одновременно в 1967 г. в работах Келли, Коппа, Мойера [21] и Робинс [22]. Эти определения существенно различаются, поэтому исторически с определением порядка связано большое количество путаницы: многие авторы использовали в формулировках одно определение порядка, а результаты доказывали с помощью другого. Впервые явно на существующую путаницу указал Р. М. Льюис [23] в 1979 г. Он выделил два различных, наиболее часто используемых авторами определения порядка: локальный порядок траектории и глобальный (intrinsic) порядок системы. В качестве мотивации он указал, что хорошо известная и часто обсуждаемая теорема о невозможности регулярного сопряжения (стыковки) неособой траектории с особой экстремалью четного порядка верна в терминах глобального порядка и не верна в терминах локального порядка. Также Льюис в своей работе доказал, что локальный порядок всегда не меньше глобального.

Определение глобального порядка удобно тем, что позволяет использовать гамильтонов формализм и поэтому дает мощный инструментальный не только для исследования самих особых траекторий, но и для изучения поведения неособых траекторий в их окрестности. Однако если локальный порядок траектории строго больше глобального порядка системы, то инструментальный, полученный благодаря определению глобального порядка, фактически перестает работать. Такие особые траектории принято называть атипичными. Несмотря на название, атипичные особые экстремаль встречаются очень часто. В огромном спектре задач любая особая экстремаль является атипичной. Определение локального порядка напротив работает и для атипичных траекторий. Однако вычисление локального порядка связано с дифференцированием управляющего параметра

на особой траектории (которое не всегда корректно и почти всегда очень не удобно) и не дает никакого инструментария для исследования окрестности особой экстремали. Таким образом, на данный момент даже в задачах с одномерным управлением существует серьезный пробел в методах исследования особых экстремалей и их окрестностей. Правильное (с точки зрения автора диссертации) определение порядка особой экстремали задачах с одномерным управлением было недавно введено автором в [24] (подробнее см. ниже).

Теория особых экстремалей первого и второго порядка в задачах с одномерным управлением разработана весьма полно. Окрестность особой экстремали первого (глобального) порядка устроена довольно просто: через каждую точку такой траектории проходят ровно две входящие неособые траектории, и две исходящие [25] (см. рис. 1). Тем не менее особые экстремали первого порядка довольно часто встречаются в приложениях, особенно в задачах мат. экономики. Упомянем недавнюю работу [26], в которой автору диссертации совместно с В. Рунге за счет особых траекторий первого порядка удалось построить оптимальный синтез в задаче Хеле-Шоу, управляемой при помощи мультиполей.

С особыми экстремальными второго (глобального) порядка ситуация намного более изысканная. В большом количестве задач оптимального управления удается доказать, что сопряжение неособых траекторий с особыми неизбежно. При этом четность глобального порядка запрещает регулярную стыковку – управление обязано иметь разрыв второго рода. В 1960-70х годах широкую известность получил феномен чаттеринга, когда оптимальные траектории перед выходом на особую траекторию второго (глобального) порядка за конечное время пересекают счетное число раз гиперповерхность разрыва $\mathcal{S}$, счетное число раз переходя из области Ω_i в область Ω_j , $i \neq j$, и обратно. Оптимальное управление при этом совершает счетное число переключений между концами отрезка $\Omega = [a, b]$. Впервые этот феномен был обнаружен А.Т. Фуллером [27] в 1963 г. Однако, несмотря на большое количество примеров, довольно долго считалось, что феномен чаттеринга является чем-то исключительным и не встречается в реальных приложениях. Опровержение этого заблуждения произошло в 1990 г., когда в работах И. Купки [28] и Зеликина, Борисова [29, 30] было доказано, что феномен чаттеринга носит общий характер, не уничтожается малым шевелением гамильтоновой системы в общем положении, а чаттеринг траектории являются локально оптимальными.

В работах Купки и Зеликина, Борисова доказано, что в данную точку на особой траектории второго порядка входит с чаттерингом однопараметрическое семейство траекторий, образующих двумерную поверхность с конической особенностью в точке пересечения с особой экстремалью (показано в работе автора диссертации [31]). Аналогичным образом неособые траектории сходят с особой экстремали второго порядка. Важно отметить, что Зеликин и Борисов предложили естественную процедуру замены координат в окрестности особой траектории второго порядка, позволившую явно построить оптимальный синтез в большом количестве [32] (на тот момент не решенных) прикладных задач (в экономике, инженерном деле, астронавтике, робототехнике и др.).

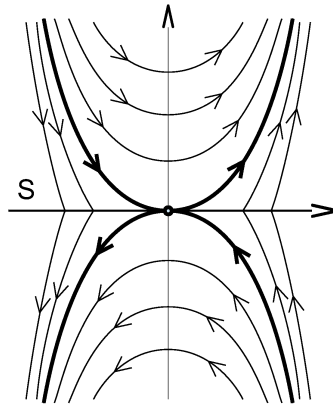


Рисунок 1: Топологическая структура окрестности особой экстремали первого порядка.

Теория задач оптимального управления с многомерным управлением разработана намного хуже. Пожалуй самое глубокое развитие получили субримановы задачи в которых многомерное управление не ограничено, $u \in \mathbb{R}^k$ и, что наиболее важно, отсутствует снос (хороший обзор современных результатов можно найти в [33]). Для задач с ограниченным управлением оптимальный синтез частично или полностью построен лишь в нескольких конкретных задачах [34]. Построение оптимального синтеза для задач с ограниченным многомерным управлением сопряжено с огромными трудностями. Во-первых, порядок особой траектории уже не корректно описывать с помощью одного натурального числа. Во-вторых, в связи с ростом размерности гамильтоновой системы принципа максимума, серьезную трудность начинает представлять явное отыскание решений. Даже для задач субримановой геометрии, в самом первом нетривиальном случае субримановых геодезических на группе Энгеля [35] (4-х мерное фазовое пространство с двумерным управлением $u \in \mathbb{R}^2$) экстремали явно выписываются через эллиптические функции Якоби. Здесь важно сказать, что в этой задаче есть особые экстремали, которые являются оптимальными, но не строго аномальными (то есть совпадают с неособыми траекториями). Тем не менее, субримановы сферы S_R на группе Энгеля радиуса R имеют особенности в точках пересечения с особыми экстремалими. Более того, Е. Trélat в 2001 году доказал [36], что сферы S_R не субаналитичны (он изучал субаналитичность сфер в трехмерных пространствах Мартине, но при подходящей проекции результат переносится и на группу Энгеля).

В последние годы широкое развитие в субримановой геометрии получили методы нильпотентизации [37]. Для субримановых задач с неограниченным управлением $u \in \mathbb{R}^k$ и без сноса хорошо известна локально-аппроксимативная теорема Громова, в которой утверждается, что субриманово расстояние в ε -окрестности точки приближается с точностью $o(\varepsilon)$ с помощью левоинвариантной субримановой метрике на нильпотентном касательном конусе в этой точке [38].

Еще один показательный пример дает следующая задача, являющаяся простейшим обобщением задачи Фуллера на случай двумерного управления:

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 dt \rightarrow \inf;$$

$$\ddot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq 1,$$

с некоторыми фиксированными начальными данными

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

В этой задаче до сих пор нет явного описания оптимального синтеза. Известны лишь некоторые явные решения в виде логарифмических спиралей, проходимых за конечное время. Естественное обобщение этой задачи на n -ую производную исследовалось в работе А.А. Милютин и С.В. Чуканова [39]. Явные решения в этой задаче тесно связаны со следующими полиномами специального вида:

$$P_h(\alpha) = (2h + i\alpha)((2h - 1) + i\alpha) \dots (1 + i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

А именно, эти решения определяются корнями мнимой части $P_h(\alpha)$ при которых действительная часть имеет нужный знак:

$$\operatorname{Im} P_h(\alpha) = 0, \quad (-1)^{h+1} \operatorname{Re} P_h(\alpha) > 0, \quad \alpha > 0.$$

Впервые этот многочлен был выписан А.А. Милютиным и С.В. Чукановым в 1993 г. в упомянутой работе. Недавно выяснилось в работах автора диссертации (совместно с М.И. Зеликиным) [40, 41], что линейная независимость специальных корней $\operatorname{Im} P_h(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ влечет существование оптимального управления в виде иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора.

Особенности оптимальных траекторий в одномерных и многомерных задачах поиска были исследованы в работах автора [42, 43]. В таких задачах оптимальные траектории могут иметь так называемые вихревые особенности, сходные чаттерингу. Эти особенности возникают как при начале движения, так и при окончании [44]. При наличии вихревой особенности в начале движения оптимальное управление имеет разрыв второго рода, а оптимальная траектория за любой сколь угодно малый начальный промежуток времени обязана побывать с обеих сторон от любой гиперплоскости, проходящей через точку начала движения. При этом существование оптимальной траектории гарантирует соответствующая теорема [45].

Еще один важный вопрос связан с возможными типами особенностей оптимального управления. А именно, оба основополагающих результата теории оптимального управления — и теорема А.Ф. Филиппова о существовании оптимальной траектории, и принцип максимума Понтрягина — предполагают, что управление есть измеримая функция времени. В 1995 г. М.И. Зеликиным был построен пример, в котором оптимальное управление имеет счетное число точек разрыва со счетным числом точек накопления [46]. Известен C^∞ пример, построенный А.Ф. Филипповым в 1959 г., в котором оптимальное управление имеет особенность на множестве канторова типа [47], однако, в примере А.Ф. Филиппова это канторово множество уже вмонтировано в функ-

цию, определяющую постановку задачи. Еще один интересный пример был построен в 1986 г. Д.Б. Силиным [47], в котором управление терпит разрыв на множестве положительной лебеговой меры. Множеством допустимых управлений в этом примере является не субаналитичный выпуклый многогранник с бесконечным числом граней.

Таким образом, вопрос о том, насколько «плохим» может быть оптимальное управление, до сих пор остается открытым. В задачах, аффинных по одномерному управлению, оптимальное управление в общем положении имеет счетное число точек разрыва на конечном промежутке времени (доказано в приведенных выше работах И. Купки и М.И. Зеликина-В.Ф. Борисова). В работе 1995 г. А.А. Аграчев [48, 49] доказал, что в этом классе задач множество точек разрыва оптимального управления не может быть совершенным множеством, если выполнено условие Хермандера.

Необходимо отметить, что А.И. Овсеевичем для линейных управляемых систем были получены весьма удобные аппроксимативные теоремы для множеств достижимости и оптимального управления в задаче быстрогодействия [50].

Довольно полно изучены необходимые и достаточные условия второго порядка локальной оптимальности траекторий. Исследования в этом направлении начались с работ Гоха [51, 52] в 1966 г. Далее над необходимыми и достаточными условиями работали такие известные специалисты как А.Д. Кренер [53], Гамкрелидзе и Аграчев [54, 55], А.А. Милютин [56], А.В. Дмитрук [57, 58] и Н.П. Осмоловский [59]. Стоит отметить работу Зеликина, Зеликиной и Хлюстова [60], в которых в помощь метода дифференциальных форм построен оптимальный синтез в ряде задач с особыми траекториями первого порядка и управлением из тетраэдра, и, более того, доказана глобальная оптимальность этого синтеза.

Таким образом, экстремальные задачи с ограниченным многомерным управлением, несмотря на очень серьезный интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной, на данный момент остаются одной из наименее разработанных областей теории оптимального управления.

Цели и задачи.

Целями проведенного в диссертации исследования являются разработка методов анализа типичной структуры оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, и применение полученных результатов к изучению характерных особенностей гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Основными задачами исследования являются:

1. Качественное исследование нового феномена хаотической динамики оптимальных траекторий на конечных промежутках времени в задачах, аффинных по двумерному управлению из треугольника.
2. Доказательство того факта, что новый феномен хаотического поведения экстремалей на конечных промежутках времени является ситуацией общего положения в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

3. Обобщение классических результатов полулокального анализа гомоклинической динамики на случай липшицевых систем.
4. Определение и исследование понятия нормального порядка особой экстремали в задачах с одномерным управлением. Построение и исследование флага порядков особой экстремали в задачах с многомерным управлением.
5. Исследование структуры множества всех особых экстремалей фиксированного порядка в задачах, аффинных по одномерному управлению.
6. Исследование геометрической структуры окрестности особой экстремали первого порядка в задачах, аффинных по многомерному управлению.
7. Исследование новых типов стыковки неособых траекторий с особыми экстремальными в задачах с многомерным управлением с помощью методов теории Галуа.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- Разработан оригинальный метод ниспадающей системы скобок Пуассона, который позволяет сводить изучение структуры интегральных воронок произвольной гамильтоновой системы с разрывной правой частью к исследованию оптимального синтеза в соответствующей экстремальной нильпотентно-выпуклой задаче с ограниченным управлением.
- В гамильтоновых системах с разрывной правой частью обнаружен и качественно исследован новый феномен хаотического поведения на сколь угодно малых промежутках времени траекторий, лежащих в интегральных воронках точек, находящихся на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части системы. Данное исследование дает ответ на вопрос о типичной структуре оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, поскольку доказана теорема о структурной устойчивости феномена.
- Установлено свойство полупотока для оптимального синтеза в широком классе нильпотентно-выпуклых задач. С его помощью для данного класса задач получен ответ на давний вопрос: насколько «плохим» может быть оптимальное управление. А именно, доказано, что в этом классе задач оптимальное управление может иметь не более чем счетное число точек разрыва.
- Разработан новый аппарат исследования атипичных особых экстремалей и их окрестностей в задачах с одномерным управлением. Он опирается на данное автором новое определение (натурального) порядка особой экстремали, сочетающее в себе преимущества обоих классических определений (локального порядка траектории и глобального порядка системы).

- Доказано, что особые экстремали фиксированного натурального порядка образуют гамильтонов поток на некотором симплектическом подмногообразии.
- Найдены семейства явных оптимальных решений в многомерной задаче Фуллера с n -ой производной, представляющие собой обобщенные логарифмические спирали, моделирующие вращение по иррациональной всюду плотной обмотке клиффордова тора.
- Построено обобщение классических методов символической динамики на случай липшицевых гиперболических динамических систем. В том числе, получены удобные оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек, использующие лишь константы Липшица исходной динамической системы.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертации имеют теоретический характер.

Значение разработанного автором диссертации метода ниспадающей системы скобок Пуассона заключается в том, что он является эффективным инструментом исследования особенностей гамильтоновых систем с разрывной правой частью как с теоретической точки зрения (см. [61]), так и с практической (см. [24]). Этот метод имеет широкие перспективы применения в теории негладких гамильтоновых систем, в теории оптимального управления, в особенности в задачах с многомерным управлением.

Результат о наличии хаотической структуры оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, имеет принципиальное значение. С одной стороны, получен ответ на вопрос о типичной структуре оптимального синтеза в таких задачах, а, с другой стороны, разработанная техника позволяет качественно описывать оптимальный синтез в тех задачах, которые до этого момента не поддавались исследованию.

Теорема о гамильтоновости особого потока дает возможность применять весь спектр методов теории гладких гамильтоновых систем к изучению потока особых экстремалей в задачах с одномерным управлением. Например, автором был явно найден поток особых экстремалей в задаче быстрогодействия для управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле. Прямой счет в этой задаче чрезвычайно сложен и неэффективен. Тем не менее, оказалось, что особый поток является интегрируемым по Лиувиллю, что и позволило получить явные формулы. Таким образом, теорема о гамильтоновости особого потока имеет широкие перспективы применения в задачах с одномерным управлением.

Существование правостороннего оптимального потока в нильпотентно-выпуклых задачах позволяет применять топологические методы к исследованию оптимального синтеза в этих задачах. Например, полученный результат о структуре множества точек разрыва оптимального управления доказан с помощью сочетания свойства полупотока и теоремы Кантора-Бендиксона, а с помощью формулы Лефшеца доказано существование некоторых оптимальных траекторий специального вида.

Методология и методы исследования

С помощью разработанного автором оригинального метода ниспадающей системы скобок Пуассона получены результаты в первой, четвертой и девятой главах диссертации.

Также в настоящем исследовании использовались нижеследующие классические методы:

1. Классические методы теории оптимального управления: принцип максимума Понтрягина, функция Беллмана, необходимые условия второго порядка Гоха-Кренера.
2. Классические методы теории групп и алгебр Ли.
3. Современные методы теории динамических систем. В основном использовались методы символической динамики (например, топологические цепи Маркова, полулокальный анализ гомоклинических точек, теорема Адамара-Перрона).
4. Теория фрактальных множеств и, в особенности, теория нецелых размерностей по Хаусдорфу и Минковскому.
5. Классические методы теории функций и функционального анализа: классическая теория банаховых пространств, слабая* топология и теорема Алоглу.
6. Классические методы теории гладких систем ОДУ и теории гладких гамильтоновых систем в частности: гамильтонов формализм, скобки Пуассона, теорема Лиувилля-Арнольда, разрешение особенностей.
7. Классические результаты теории Галуа.
8. Числа Лефшеца.
9. Теорема Кантора-Бендиксона

Достоверность и апробация.

Результаты диссертации прошли апробацию на большом количестве международных конференций и научных семинаров, в том числе, за последние 3 года:

1. Международная конференция Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ-2012, «Фрактальная структура гиперболических липшицевых динамических систем».
2. Международная конференция «Математическая теория управления и механика», 2013 г., «Stochastic dynamics of Lie algebras of Poisson brackets in the neighborhood of points of non-smoothness the Hamiltonian» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
3. Конференция «Оптимальное управление и приложения», посвященная 105-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, 2013 г., «Хаотическая динамика оптимальных траекторий в задачах с многомерным управлением» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).

4. Международная молодежная конференция «Геометрия и управление», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 2014 г., «Hamiltonian Flow of Singular Trajectories».
5. Международная конференция «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», 2014 г., «Chaos in optimal synthesis in problems with multidimensional control» в двух частях (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
6. Международная конференция «Hamiltonian systems and their application», институт Эйлера, Санкт-Петербург (2015), «On new phenomenon of chaotic behavior of non-smooth Hamiltonian systems coming from optimal control» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
7. Семинар по оптимизации и управлению, ИЦСА и ИЦПУ ИПС имени А.К.Айламазяна, 31 мая 2012 г., «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением».
8. Семинар «Теория приближений и теория экстремальных задач» под руководством В.М. Тихомирова и Г.Г. Магарил-Ильяева, механико-математический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва (2012), «Хаотическая динамика оптимальных траекторий в задачах оптимального управления с управлением из многогранника» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
9. Заседание Московского математического общества 12 февраля 2013 г., «Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
10. Семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» под руководством А.В. Фурсикова, В.М. Тихомирова, М.И. Зеликина и В.Ю. Протасова, 25 февраля 2013 г., «Хаотическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным)
11. Семинар по эргодической теории «Случайные процессы и динамические системы» под руководством В.И. Оселедца и Б.М. Гуревича., 27 февраля 2013 г. «Хаотическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в негладких гамильтоновых системах» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
12. Семинар по многомерному комплексному анализу (семинар имени А.Г. Витушкина), 3 апреля 2013 г., «Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
13. Семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» под руководством А.В. Фурсикова, В.М. Тихомирова, М.И. Зеликина и В.Ю. Протасова, 14 октября 2013 г., «Гамильтоновость потока особых траекторий».

14. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством А.Т. Фоменко, 24 марта 2014 г., «Особые траектории в гамильтоновых системах с разрывной правой частью» (совместно с М.И. Зеликиным).
15. Общеинститутский семинар ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, заседание №12, 24 апреля 2014 г., «Хаотическая структура оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению».
16. Общественный постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации», под руководством Б.Т. Поляка, 2 декабря 2014 г., (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).

Автором диссертации в 2014 г. был прочитан курс лекций «Особые траектории в теории оптимального управления» в лаборатории Геометрической теории управления Института математики имени С.Л. Соболева сибирского отделения Российской Академии Наук, содержащий результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации.

Результаты диссертации и их доказательства опубликованы в 15 работах в журналах и изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК для опубликования основных результатов, в том числе 12 работ изданы в российских журналах и 3 в иностранных изданиях. Все сформулированные результаты являются новыми. Все приведенные в диссертации совместные результаты содержат указания соавторов.

Структура диссертации.

Диссертационная работа содержит 256 страниц и состоит из введения, заключения, списков рисунков и таблиц, литературы (содержит 83 наименования) и 9 глав, которые условно объединены в две части для удобства изложения и ориентирования читателя в тексте. Первая часть содержит 4 главы, вторая – 5. В первой части преобладает обсуждение основных свойств гамильтоновых систем с разрывной правой частью в окрестности особых экстремалей. Во второй части – обсуждение хаотической динамики в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

Часть I

*Основные свойства гамильтоновых систем с разрывной правой
частью в окрестности особых экстремалей*

ГЛАВА 1

Гамильтоновость потока особых траекторий

Принцип максимума Понтрягина сводит задачи оптимального управления к изучению гамильтоновых систем ОДУ с разрывной правой частью. Оптимальный синтез – это совокупность решений этой системы с фиксированным конечным (или начальным) условием, однозначно покрывающих некоторую область фазового пространства. Определяющую роль при построении оптимального синтеза играют особые траектории – траектории, идущие вдоль поверхности разрыва правой части гамильтоновой системы ОДУ. Самый важный и наиболее часто встречающийся случай – это случай, когда поверхность негладкости гамильтониана является гиперповерхностью. Этот случай отвечает экстремальным задачам с одномерным управлением, хотя и встречается в задачах с многомерным управлением.

Отличительной особенностью гамильтоновых систем с разрывной правой частью является наличие особых траекторий (экстремалей)¹ – траекторий, движущихся вдоль поверхности разрыва правой части гамильтоновой системы. Особые экстремали сродни стационарным точкам в гладких системах ОДУ. Дело заключается в следующем: любое гладкое векторное поле выпрямляется в окрестности любой нестационарной точки. Поэтому исследование стационарных точек лежит в основе исследования поведения решений любой гладкой системы ОДУ. Более того, стационарные точки сравнительно просто находить. С особыми экстремальями дело обстоит сходным образом. Решение гамильтоновой системы с разрывной правой частью существует по теореме Филиппова (см. [62]), но вообще говоря не единственно. Единственность решения может нарушаться в точках разрыва правой части системы. Тем не менее будет доказано, что при достаточно общих предположениях единственность может нарушаться не в любой такой точке на поверхности разрыва, а только в точках особых экстремалей. Поэтому исследование особых экстремалей и их окрестности является ключевым при построении оптимального синтеза. К тому же особые экстремали сравнительно нетрудно находить (как и стационарные точки).

В данной главе для задач оптимального управления с одномерным управлением построено новое определение порядка особой траектории, сочетающие в себе достоинства обоих классических определений (определение локального порядка траектории и глобального порядка системы). Доказано, что совокупность особых траекторий фиксированного порядка образует гамильтонов

¹Термины «особая экстремаль» и «особая траектория» эквивалентны.

поток на некотором подмногообразии гиперповерхности разрыва ПМП. В качестве важного приложения предлагаемой техники показано, что поток особых траекторий в задаче управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю и включается в поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве (см. [24]).

1.1 Краткое введение в теорию особых экстремалей

Хорошо известно, что принцип максимума Понтрягина сводит решение задач оптимального управления к нахождению решений гамильтоновой системы ОДУ. Гамильтониан $\mathcal{H}$ этой системы часто является негладким, а правая часть системы, соответственно, терпит разрыв на некотором стратифицированном многообразии N . Пусть N_1 – страта N коразмерности 1. Нетрудно показать, что предел поля скоростей системы ξ может иметь на N_1 в силу гамильтоновости лишь тангенциальный скачок. Большинство траекторий системы пересекает N_1 трансверсально, однако, в некоторых точках предел поля ξ с обеих сторон от N_1 становится касательным к N_1 . В этом случае возникают траектории системы, целиком лежащие в N_1 . Их принято называть особыми.

В основе исследования геометрических свойств гладкой системы ОДУ лежит изучение особых точек и предельных циклов системы. Аналогично, особые траектории гамильтоновой системы с разрывной правой частью, обычно играют ключевую роль при построении полного фазового портрета. Как уже было сказано, единственность решения гамильтоновой системы с разрывной правой частью может нарушаться только в точках особых траекторий (см. теорему 1.3). Поэтому особые траектории определяют строение поля неособых траекторий в своей окрестности. Особое управление сравнительно нетрудно находить с помощью дифференцирования гамильтониана принципа максимума Понтрягина. В огромном спектре задач удастся доказать так называемую «теорему о магистрали», т.е. показать, что любая оптимальная траектория за конечное время выходит на особую траекторию², и далее оптимальное движение продолжается вдоль особой траектории (см. [63], и теорему 3.1).

Достаточно много работ посвящено изучению оптимальности особых траекторий. Известны как необходимые условия (см. [21, 53, 54]) так и достаточные условия (см. [57]) второго порядка. Наиболее удобную форму эти условия принимают в задачах субримановой геометрии (см. [64]).

Данная глава, однако, посвящена не исследованию свойств одной отдельно взятой особой траектории, но изучению потока всех особых траекторий системы в целом и поведению неособых траекторий в их окрестности. Доказана теорема 1.2 о том, что множество всех особых экстремалей данного порядка образует симплектическое подмногообразие $\mathcal{S}$, а их поток на $\mathcal{S}$ является гамильтоновым относительно ограничения $\mathcal{H}$ на $\mathcal{S}$. В качестве приложения этой теоремы в §1.8 доказано, что поток особых траекторий в задаче оптимального управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю на $\mathcal{S}$ и включается в

²Единственность решения теряется в окрестности особых траекторий, см. П. 1.2.

поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве.

С понятием особой траектории тесно связано понятие порядка, характеризующего, в каком-то смысле, степень вырождения системы. Есть два классических определения – определение локального порядка траектории (local order) и определение глобального порядка системы (intrinsic order, см. [23]). Первое определение дает хорошие инструменты для исследования оптимальности одной отдельной особой траектории, и работает в большинстве конкретных задач. Второе определение, напротив, часто оказывается не рабочим, но уж если его можно применить в какой-то задаче, то оно позволяет не только сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности особой траектории удобным образом в терминах скобок Пуассона, но и дает возможность исследовать поведение неособых траекторий в окрестности особой траектории. Например, хорошо известна теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка (см. [65]), верная в терминах глобального порядка, и, вообще говоря, неверная в терминах локального порядка (см. [23]).

В этой главе предложено новое, наиболее естественное на взгляд автора, определение порядка особой траектории (понятие натурального порядка, см. [24]). Оно не требует (обычно неудобного) дифференцирования управляющего параметра (в отличие от локального порядка) и не требует коммутирования серии гамильтонианов (в отличие от глобального порядка). При этом оно сочетает в себе достоинства обоих классических определений. А именно, новое определение, во-первых, позволяет изучать оптимальность особой траектории и поведение неособых траекторий в ее окрестности, используя гамильтонов формализм и алгебры Ли скобок Пуассона (как и определение глобального порядка), а, во-вторых, оно работает в большинстве конкретных задач (как и определение локального порядка). Теорема о гамильтоновости особого потока доказана в терминах нового определения порядка, хотя верна и в более ограничительном случае глобального порядка. В терминах нового определения также доказана теорема 1.4 о сопряжении, обобщающая классическую теорему о сопряжении.

1.2 Гамильтоновы системы с негладким гамильтонианом

Пусть M – $2n$ -мерное симплектическое многообразие с симплектической формой³ $\omega \in \Lambda^2(M)$. Через i_ω обозначим канонический изоморфизм $i_\omega : T^*M \rightarrow TM$, индуцированный формой⁴ ω . В этой главе исследуются системы с кусочно-гладкими гамильтонианами. Система ОДУ, определяемых кусочно-гладким гамильтонианом, имеет разрывную правую часть. Поэтому мы начнем с общепринятого определения траектории такой системы, которое совпадает в точках гладкости гамильтониана с классическим определением для гладких систем ОДУ.

³То есть $\omega(x)$ – невырожденная кососимметрическая замкнутая 2-форма на касательном расслоении $T_x M$. В канонических координатах (q, p) форма ω принимает вид $\omega = dp \wedge dq$.

⁴В канонических координатах (q, p) изоморфизм i_ω принимает вид $i_\omega : dH \mapsto (H'_p, -H'_q) = \text{sgrad } H$

Пусть $\mathcal{H}$ – непрерывный, кусочно-гладкий гамильтониан, с множеством N точек разрыва первой производной (т.е. $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathcal{M} \setminus N)$ и $\mathcal{H} \in C^0(\mathcal{M})$), где множество точек негладкости N является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{M}$, не содержащим страт полной размерности $2n$.

Определение 1.1. Абсолютно непрерывная траектория $x(t)$ является траекторией системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, если для почти всех t выполнено дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in i_\omega K(x(t)),$$

где $K(x_0) \subseteq T_{x_0}^* \mathcal{M}$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $d\mathcal{H}(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

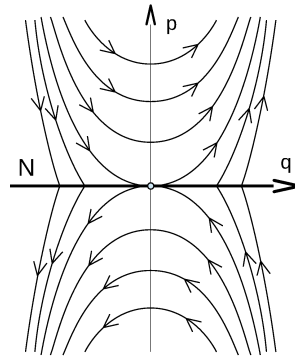


Рисунок 1.1: Фазовый портрет потока из примера 1.1

Такое определение гарантирует существование траектории (подробнее про системы ОДУ с разрывной правой частью см. [62]). Единственность однако теряется. Часто встречаются случаи, когда существуют траектории, целиком лежащие в N . Причем в каждую точку такой траектории входят траектории не лежащие в N (и выходят из нее). Чтобы наглядно продемонстрировать этот феномен рассмотрим классический

Пример 1.1. Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $x = (q, p)$ и $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q^2 + |p|$ (см рис. 1.1) – кусочно-гладкий гамильтониан с поверхностью негладкости $p = 0$. Траектория может войти в начало координат по одной из ветвей $p = -q^2 \operatorname{sign} q$, простоять в начале координат любое время (в том числе бесконечное) и выйти по одной из ветвей $p = q^2 \operatorname{sign} q$. Во всех остальных случаях решение единственно. Существует ровно одна траектория $q(t) = p(t) = 0$, которая остается в $N = \{(q, p) : p = 0\}$ при всех t .

Определение 1.2. Траекторию $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ будем называть особой (или особой экстремалью), если она лежит на множестве точек разрыва $x(t) \in N$ при $t \in (t_0, t_1)$.

В этой главе проведено исследование поведения особых траекторий гамильтоновой системы на поверхности разрыва $\mathcal{H}$ коразмерности 1, а также строение поля неособых траекторий в их

окрестности. Поверхность разрыва правой части системы типично является гиперповерхностью в задачах оптимального управления с одномерным управлением. Предположим, что в окрестности V точки $x_0 \in N$ множество N является гладкой гиперповерхностью, разбивающей V на две области Ω_1 и Ω_2 . Пусть $\mathcal{H}|_{\Omega_i} = H_i$, $i = 1, 2$, и H_i гладко продолжаются в окрестность $\bar{\Omega}_i$. Тогда гамильтониан $\mathcal{H}$ в окрестности x_0 задается одним из двух соотношений

$$\mathcal{H} = \max(H_1, H_2), \text{ или } \mathcal{H} = \min(H_1, H_2).$$

По другому можно записать так:

$$\mathcal{H} = H + Gu$$

где $H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$, $G = \frac{1}{2}(H_1 - H_2)$, а $u = 1$ в Ω_1 и $u = -1$ в Ω_2 (или наоборот)⁵. Будем считать, что $dG(x_0) \neq 0$ – этого достаточно, чтобы множество N было гладкой гиперповерхностью в окрестности $x_0 \in N$.

1.3 Различные определения порядков особой траектории

С понятием особой траектории тесно связано понятие ее порядка, который, в каком-то смысле, определяет степень вырождения системы в окрестности особой траектории. Существует два не совпадающих классических определения порядка: так называемый локальный порядок траектории и глобальный (intrinsic) порядок системы (см. [23]). Напомним их. Обозначим⁶ $A_k = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ при $k \geq 1$.

Определение 1.3. Пусть $x(t)$ – некоторая особая траектория и k_1 – первый номер, при котором A_k не является тождественно нулевой функцией на особой траектории $x(t)$. По теореме Кэлли-Коппа-Мойера (см. [21]) число k_1 должно быть четно или бесконечно. Число $h_{loc} = k_1/2$ называется локальным порядком особой траектории $x(t)$.

Определение 1.4. Пусть k_2 – первый номер, при котором A_k не является тождественно нулевой функцией в V . По теореме Роббинса (см. [22]) число k_2 должно быть четно или бесконечно. Число $h_{glob} = k_2/2$ называется глобальным порядком системы $\mathcal{H} = H + Gu$ в V .

Глобальный порядок всегда меньше или равен локального порядка. Использование глобального порядка системы позволяет выписывать необходимые условия и отыскивать особые траектории в терминах скобок Пуассона, что очень удобно и при конкретном счете и при теоретических исследованиях. Точнее, если система имеет глобальный порядок $h = h_{glob} < \infty$, то на любой траектории выполнено

⁵Всюду в этой главе $u \in [-1; 1]$. Общий случай $u \in [a, b]$ немедленно сводится к $u \in [-1; 1]$ очевидной аффинной заменой.

⁶Подобная форма записи достаточно неудобна, так как может быть неверно истолкована. Эту запись следует понимать так: символ $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ обозначает G ; $\left(\frac{d}{dt} \right)^k G$ является формальной функцией от $x, u, \dot{u}, \ddot{u}$ и т.д. Левый символ $\frac{\partial}{\partial u}$ означает формальное дифференцирование по u .

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^k G &= (\text{ad } H)^k G, & \text{при } k < 2h; \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{2h} G &= (\text{ad } H)^{2h} G + \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}u, & \text{при } k = 2h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и далее через $\{H, G\} = (\text{ad } H)G$ обозначена скобка Пуассона⁷ функций H и G : $\{H, G\} = \omega(i_\omega dH, i_\omega dG)$. Таким образом, $A_{2h} = \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}$. Если при этом $A_{2h} \neq 0$ на особой траектории (т.е. ее локальный порядок совпадает с глобальным, $h_{loc} = h_{glob}$), то формулы (1.1) позволяют легко находить управление на особой траектории. Более того, с их помощью может быть доказана теорема о сопряжении: если $h = h_{glob}$ четно, $2|h$, и на особой траектории выполнено усиленное обобщенное условие Лежандра-Клебша $(-1)^h A_{2h} < 0$, то в точке стыковки этой особой траектории с любой неособой управление на последней обязано иметь разрыв второго рода (см. [65]). Особые траектории, на которых $A_{2h} = 0$ (такие траектории принято называть атипичными), невозможно исследовать с помощью определения глобального порядка.

Локальный порядок напротив не позволяет использовать гамильтонов формализм. Однако, в большом количестве задач, локальный порядок любой особой траектории строго больше глобального порядка системы (в таких случаях мы будем говорить, что определение глобального порядка вырождается). В этом случае в понятии глобального порядка мало смысла – все особые траектории атипичны и их невозможно найти, используя формулы (1.1). Также в этом случае не работает теорема о сопряжении (см. [23]). Использовать определение локального порядка для отыскания особых траекторий в этих случаях тоже не очень удобно, так как A_k при $k > 2h_{glob}$ становится формальной функцией от u , $\dot{u}$, $\ddot{u}$ и т.д. В защиту определения локального порядка скажем, что обобщенное условие Лежандра-Клебша (см. [21]) формулируется очень просто даже для атипичных особых траекторий⁸:

$$(-1)^{h_{loc}} A_{2h_{loc}} = (-1)^{h_{loc}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2h_{loc}-1} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \leq 0$$

В этой главе мы будем использовать модифицированное определение порядка, сочетающее в себе положительные качества обоих классических определений, и будем называть его **натуральным порядком** во избежание путаницы. Во-первых новое определение порядка позволяет без труда использовать Гамильтонов формализм, а во-вторых в большинстве конкретных примеров, в которых локальный порядок траекторий больше глобального порядка системы, натуральный порядок оказывается равным локальному порядку, и все неудобства связанные с вычислениями в терминах локального порядка исчезают. В результате удастся получить важную новую теорему о гамильтоновости потока особых траектории. Теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории и особой траекторией в системе четного порядка остается верной при замене глобального порядка на натуральный.

⁷В канонических координатах (q, p) скобка Пуассона имеет вид $\{H, G\} = H'_p G'_q - H'_q G'_p$. Часто скобку Пуассона определяют с противоположным знаком. В работе сделан именно такой выбор знаков, так как он позволяет избежать большого количества ненужных $(-1)^k$.

⁸Неравенство сформулировано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве необходимо обратить.

Порядок особой траектории (в любом определении) связан со следующим ключевым вопросом: как найти управление на особой траектории. Из принципа максимума Понтрягина его найти не возможно, так как $G = 0$ на особой траектории и априори может подойти любое управление $u \in [-1; 1]$. Тем не менее «особое» управление можно найти, с помощью следующего классического эвристического метода. Начнем с простого утверждения

Предложение 1.1. Если $x(t)$ – особая траектория, то для любой пробной функции $F(x)$ для почти всех t найдется такое число $u \in [-1; 1]$, что

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \{H, F\}(x(t)) + u\{G, F\}$$

Доказательство. Поскольку $x(t)$ – особая траектория, то для почти всех t определена скорость $\dot{x}(t) = i_\omega dH(x(t)) + ui_\omega dG(x(t))$ для некоторого $u \in [-1; 1]$. Тогда для этих t значение $\frac{d}{dt}F(x(t))$ вычисляется по правилу сложной функции. Осталось напомнить, что

$$i_\omega dH(F) = \{H, F\}, \quad \text{и} \quad i_\omega dG(F) = \{G, F\}.$$

□

Для того, что отыскать особые траектории, обычно достаточно найти «особое» управление. Итак, для функции G на любой особой траектории $x(t)$ имеем $x(t) \in N$ и $G(x(t)) \equiv 0$. Обозначим $\mathcal{S}_1 = \{x : G(x) = 0\} = N$. Итак, $\frac{d^n}{dt^n}G(x(t)) \equiv 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В случае $n = 1$ получаем:

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \{H, G\}(x(t)) + u\{G, G\}(x(t)) = \{H, G\}(x(t)) \equiv 0,$$

так как $\{G, G\} \equiv 0$ в силу кососимметричности скобки Пуассона. Итак, особая траектория должна лежать на множестве⁹ $\mathcal{S}_2 = \{x : G(x) = (\text{ad } H)G(x) = 0\}$. Дифференцируя второй раз, получаем,

$$\frac{d}{dt}\{H, G\}(x(t)) = \{H, \{H, G\}\} + u\{G, \{H, G\}\} = 0$$

Таким образом после второго дифференцирования возможны три варианта:

(а) Если $\{G, \{H, G\}\} \neq 0$ на $\mathcal{S}_2$, то мы находим управление

$$u^s = -\frac{\{H, \{H, G\}\}}{\{G, \{H, G\}\}}.$$

Подставляя его в систему принципа максимума, мы, вообще говоря, можем пытаться найти особую траекторию.

(б) Если $\{G, \{H, G\}\} = 0$ на $\mathcal{S}_2$, то особая траектория обязана лежать на множестве $\mathcal{S}_3 = \{x : G(x) = (\text{ad } H)G(x) = (\text{ad } H)^2G(x) = 0\}$.

⁹По определению $(\text{ad } H)G = \{H, G\}$.

(с) Если $\{G, \{H, G\}\} = 0$ в некоторых точках $\mathcal{S}_2$ (но не во всех), то мы получаем так называемую «атипичную» особую траекторию.

Если мы оказались в случае (b), то для нахождения особого управления процесс дифференцирования необходимо продолжить. На k -ом шаге, мы получим множество

$$\mathcal{S}_k = \{x : G(x) = (\operatorname{ad} H)G(x) = \dots = (\operatorname{ad} H)^{k-1}G(x) = 0\}.$$

и процесс остановится, если управление появится в явном виде, то есть в случае

$$\{G, (\operatorname{ad} H)^{k-1}G\} \neq 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_k.$$

1.4 Натуральный порядок

Определение натурального порядка (которое дано ниже) мотивировано следующей теоремой:

Теорема 1.1 (О порядке особой траектории). *Предположим, что дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \dots, d(\operatorname{ad} H)^{2h-1}G$ линейно независимы в V и*

$$\{G, (\operatorname{ad} H)^{k-1}G\} = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_k$$

для любого четного $k \leq 2h$. Тогда

$$\{G, (\operatorname{ad} H)^{2h}G\} = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_{2h+1}.$$

Таким образом, в теореме 1.1 утверждается, что описанный выше индуктивный процесс отыскания особого управления не может закончиться на нечетном шаге в намного более общей ситуации, нежели наличие глобального порядка.

Доказательство теоремы 1.1 основано на следующей несложной лемме:

Лемма 1.1. *Предположим, что дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \dots, d(\operatorname{ad} H)^{k-1}G$ линейно независимы в V . Пусть F – произвольная гладкая функция на V . Тогда значения скобки $\{H, F\}$ в точках множества $\mathcal{S}_{k+1}$ зависят только от значений F в точках $\mathcal{S}_k$ и не зависят от продолжения F в $V \setminus \mathcal{S}_k$. Другими словами, если $F_1|_{\mathcal{S}_k} = F_2|_{\mathcal{S}_k}$, то $\{H, F_1\}|_{\mathcal{S}_{k+1}} = \{H, F_2\}|_{\mathcal{S}_{k+1}}$.*

Доказательство. Поскольку дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \dots, d(\operatorname{ad} H)^{k-1}G$ линейно независимы, то $\mathcal{S}_k$ является гладким многообразием. Введем в его окрестности локальную систему координат:

$$g_1 = G, \quad g_2 = (\operatorname{ad} H)G, \quad \dots \quad g_k = (\operatorname{ad} H)^{k-1}G$$

и дополним координаты $g_1, \dots, g_k$ до полной системы локальных координат координатами $y_1, \dots, y_{2n-k}$, где $2n = \dim \mathcal{M}$. Тогда $F(x) = F(g_1, \dots, g_k, y_1, \dots, y_{2n-k})$ и

$$\{H, F\} = F'_{g_1}\{H, G\} + F'_{g_2}\{H, (\text{ad } H)G\} + \dots + F'_{g_k}\{H, (\text{ad } H)^{k-1}G\} + \sum_j F'_{y_j}\{H, y_j\}.$$

Первые k слагаемых обнуляются на $\mathcal{S}_{k+1}$ по определению, а последние $(2n - k)$ в любой точке многообразия $\mathcal{S}_k$ зависят только от значений F на $\mathcal{S}_k$, так как при $g_1 = \dots = g_k = 0$ переменные y_j являются локальными координатами на $\mathcal{S}_k$. $\square$

Для доказательства теоремы 1.1 нам еще потребуется следующее утверждение: если для некоторого k все скобки $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ обнулились при m и l лежащих на диагонали $m + l = k - 1$, то скобки $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ на диагонали $m + l = k$ совпадают по модулю и чередуют знаки. Точнее, выполнено следующее

Следствие 1.1. В условиях леммы 1.1, если в каждой точке $\mathcal{S}_k$ выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = 0 \quad \text{при всех } m + l = k - 1; \quad m, l \geq 0,$$

то в каждой точке $\mathcal{S}_{k+1}$ выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = (-1)^m \{G, (\text{ad } H)^k G\} \quad \text{при всех } m + l = k; \quad m, l \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $m + l = k - 1$, и $m, l \geq 0$. Согласно тождеству Якоби имеем

$$\{(\text{ad } H)^{m+1} G, (\text{ad } H)^l G\} = \{H, \{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}\} - \{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^{l+1} G\}$$

Первое слагаемое в правой части равенства обнуляется в точках $\mathcal{S}_{k+1}$ согласно лемме 1.1. $\square$

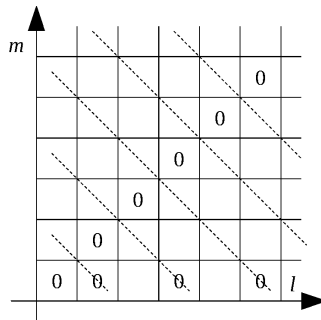


Рисунок 1.2: Диаграмма обнуления скобок $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$.

Доказательство теоремы 1.1. Покажем, что

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = 0 \quad \text{в точках } \mathcal{S}_k$$

при $m + l = k - 1$ и $k \leq 2h + 1$.

Докажем утверждение индукцией по k . При $k = 1$ имеем $m = l = 0$ и $\{G, G\} \equiv 0$ ввиду антисимметричности скобки Пуассона. Пусть теперь утверждение верно для некоторого $k \geq 1$, $k \leq 2h$. Тогда (по следствию 1.1) в любой точке $\mathcal{S}_{k+1}$ на диагонали $m + l = k$ все элементы $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ совпадают по модулю. Осталось найти на этой диагонали хотя бы один нулевой элемент. Если $k + 1$ четно, то $k + 1 \leq 2h$ и $\{G, (\text{ad } H)^k G\} = 0$ в точках $\mathcal{S}_{k+1}$ по условию. Если же $k + 1$ нечетно, $k = 2r$, то на диагонали $m + l = k$ обнуляется элемент $\{(\text{ad } H)^r G, (\text{ad } H)^r G\}$ (см. рис. 1.2). $\square$

В доказательстве теоремы 1.1 хорошо видно, почему управление в первый раз явно может возникнуть только только на четном шаге дифференцирования $(\frac{d}{dt})^k G$. Это есть следствие антисимметричности скобки Пуассона: $\{(\text{ad } H)^r G, (\text{ad } H)^r G\} \equiv 0$.

Таким образом, мы введем следующее

Определение 1.5. Мы будем говорить, что гамильтонова система с кусочно-гладким гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V **натуральный порядок** $h \in \mathbb{N}$, если для всех четных $k < 2h$ выполнены соотношения

$$\{G, (\text{ad } H)^{k-1} G\} = 0 \text{ на } \mathcal{S}_k \quad (1.2)$$

а также¹⁰

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \neq 0 \text{ в любой точке из } \mathcal{S}_{2h}.$$

Если же равенства (1.2) выполнены для всех четных $k \in \mathbb{N}$, то натуральный порядок системы равен ∞ .

Другими словами, порядок особой траектории в два раза меньше, чем число шагов, необходимых, чтобы найти особое управление¹¹.

В доказательстве теоремы 1.1 мы фактически получили, следующую лемму:

Лемма 1.2. Предположим, что дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V , и система имеет натуральный порядок h . Тогда в любой точке многообразия $\mathcal{S}_k$, $k < 2h$, выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = 0 \text{ при всех } m + l = k - 1; \ m, l \geq 0,$$

а в точках $\mathcal{S}_{2h}$ выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = (-1)^m \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \text{ при всех } m + l = 2h - 1; \ m, l \geq 0.$$

¹⁰Если в каких-то точках из $\mathcal{S}_{2h}$ (но не во всех) скобка $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}$ обнуляется (обозначим множество таких точек через $\mathcal{S}_{2h}^0$), то в V натуральный порядок не определен. Но в $V \setminus \mathcal{S}_{2h}^0$ система имеет натуральный порядок равный h . В ситуации общего положения $\dim \mathcal{S}_{2h}^0 = \dim \mathcal{S}_{2h} - 1$. На множестве $\mathcal{S}_{2h}^0$ вообще говоря могут лежать атипичные особые траектории.

¹¹Если соответствующие дифференциалы линейно независимы.

Легко убедиться, что

локальный порядок $\geq$ натуральный порядок $\geq$ глобальный порядок.

Правое неравенство выполнено, так как $\{G, (\text{ad } H)^k G\} \equiv 0$, если $k \leq 2h_{glob} - 1$. Более того, если $A_{2h_{glob}} \neq 0$ в V (т.е. атипичных особых экстремалей в V нет), то $h = h_{glob} = h_{loc}$. Однако подобную ситуацию можно назвать везением. Левое неравенство будет доказано в дальнейшем и будет показано, что если система имеет натуральный порядок h в V , то локальный порядок любой особой траектории в V тоже равен h (см. замечание 1.10).

Для того, чтобы пояснить определение порядка, проведем подробное исследование одного нетривиального примера.

Пример 1.2 (Модифицированная задача Фуллера). Рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$\int_0^T x^2 dt \rightarrow \min$$

с некоторыми начальными и конечными условиями, которые несущественны для дальнейшего, и при ограничении на вторую производную

$$|\ddot{x}| \leq |1 + x|.$$

В классической задаче Фуллера, предыдущее условие немного другое: $|\ddot{x}| \leq 1$. Поэтому при x и $\dot{x}$ близких к началу координат, эта задача (в каком-то смысле) не сильно отличается от задачи Фуллера. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина: пусть $q_1 = x$, $q_2 = \dot{x}$, а p_1, p_2 — сопряженные переменные к q_1, q_2 . Тогда¹²

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2(1 + q_1)u$$

и управление u выбирается в зависимости от знака произведения $p_2(1 + q_1)$. Получаем

$$H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2; \quad \text{и} \quad G = p_2(1 + q_1).$$

Траектория является особой, если на ней обнуляется G . Поэтому множество $\mathcal{S}_1$ определяется условием $p_2(1 + q_1) = 0$ и не является гладким многообразием. Прямые вычисления дают

$$0 = \frac{d}{dt}G = \{H, G\} + \{G, G\}u = \{H, G\} = p_2q_2 - p_1(1 + q_1).$$

и

$$0 = \frac{d}{dt}\{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u$$

¹²Будет считать, что $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$.

Поскольку скобка $\{G, \{H, G\}\}$ не равно тождественно 0, то глобальный порядок системы равен $h_{glob} = 1$. Однако $\{G, \{H, G\}\} = 2G$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_1$. Поэтому любая особая экстремаль является атипичной (локальный порядок не меньше $h_{loc} \geq 2$) и понятие глобального порядка вырождается в этой задаче. Тем не менее понятие натурального порядка работает, так как $\{G, \{H, G\}\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$, и натуральный порядок системы не меньше двух, $h \geq 2$.

Найдем особые траектории и натуральный порядок системы в их окрестности. Итак,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{ad } H)^2 G = -q_1(1 + q_1) - 2p_1 q_2; & \{G, (\text{ad } H)^2 G\} = 2\{H, G\}; \\ (\text{ad } H)^3 G = -q_2(1 + 4q_1); & \{G, (\text{ad } H)^3 G\} = -(1 + q_1)(1 + 4q_1); \\ (\text{ad } H)^4 G = -4q_2^2; & \{G, (\text{ad } H)^4 G\} = -4q_2(1 + q_1). \\ (\text{ad } H)^k G \equiv \{G, (\text{ad } H)^k G\} \equiv 0 & \text{при } k \geq 5 \end{array} \right.$$

Поскольку $\{G, (\text{ad } H)G\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$ и $\{G, (\text{ad } H)^2 G\}|_{\mathcal{S}_3} = 0$, то на любой особой траектории выполнено¹³

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} G = (\text{ad } H)G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 G = (\text{ad } H)^2 G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^3 G = (\text{ad } H)^3 G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^4 G = (\text{ad } H)^4 G + \{G, (\text{ad } H)^3 G\}u, \end{array} \right.$$

Дальнейшие вычисления зависят от того, обнулилась ли скобка $\{G, (\text{ad } H)^3 G\}$. Существует две возможности, в зависимости от того, в окрестности какой особой траектории рассматривается система. Разобьем $\mathcal{S}_1$ на 3 множества

$$\mathcal{S}_1^1 = \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, \quad \mathcal{S}_1^2 = \{q_1 = -1, p_2 \neq 0\} \text{ и } \mathcal{S}_1^0 = \{p_2 = 0, q_1 = -1\}$$

и изучим по отдельности поведение системы в малых окрестностях V^j многообразий $\mathcal{S}_1^j$, $j = 1, 2$. Будем считать, что $V^j \cap \mathcal{S}_1^0 = \emptyset$, $j = 1, 2$.

В области V^1 имеем,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^1 &= \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, & \mathcal{S}_2^1 &= \mathcal{S}_1^1 \cap \{p_1 = 0\}, \\ \mathcal{S}_3^1 &= \mathcal{S}_2^1 \cap \{q_1 = 0\}, & \mathcal{S}_4^1 &= \mathcal{S}_3^1 \cap \{q_2 = 0\}. \end{aligned}$$

С другой стороны $\{G, (\text{ad } H)^3 G\}|_{\mathcal{S}_4^1} \neq 0$. Поэтому есть единственная особая траектория $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = u = 0$ в V^1 , и натуральный порядок системы в V^1 равен 2 и совпадает с локальным порядком этой траектории (как и в не модифицированной задаче Фуллера).

В область V^2 ситуация следующая: $\mathcal{S}_2^2 = \mathcal{S}_1^2 \cap \{q_2 = 0\}$, а при $k \geq 3$, $\mathcal{S}_k^2 = \mathcal{S}_2^2$. Все особые траектории образуют двумерную поверхность $\{q_1 = -1, q_2 = 0\}$, а p_1, p_2 – любые. Действительно, если $q_1 = -1$ и $q_2 = 0$, то $\dot{q}_1 \equiv \dot{q}_2 \equiv 0$, поэтому никакое управление не может сдвинуть систему

¹³Важно отметить, что не на особой траектории эта система вообще говоря не выполняется, так как глобальный порядок вырождается.

из этой точки. Поскольку $\{G, (\text{ad } H)^{k-1}G\}|_{\mathcal{S}_k^2} = 0$ при всех k , то натуральный порядок системы в V^2 равен ∞ .

Таким образом, в приведенном выше примере, глобальный порядок h_{glob} в любой открытой области равен 1. Однако (i) есть одна особая траектория второго локального порядка, $h_{loc} = 2$, и в ее окрестности система имеет второй натуральный порядок, $h = 2$; и (ii) есть двумерная поверхность $\mathcal{S}_2^2$ особых траекторий бесконечного локального порядка, $h_{loc} = \infty$, и в окрестности $\mathcal{S}_2^2$ система тоже имеет бесконечный натуральный порядок, $h = \infty$.

Особые траектории второго (глобального) порядка часто возникают в механических задачах, так как в них управлением является внешняя сила, которая воздействует на вторую производную фазовых координат. Особые траектории первого порядка чаще всего встречаются в задачах мат. экономики. Если система имеет первый натуральный порядок, то очевидно она имеет и первый глобальный порядок. Недавно в [26] автору совместно с В. Рунге удалось обнаружить в задаче управления потоком Хеле-Шоу особые траектории первого порядка и построить с их помощью полный оптимальный синтез в некоторых частных случаях.

1.5 Гамильтоновость потока особых траекторий

Априори особые траектории могут себя вести очень плохо – быть не гладкими и даже пересекаться. Однако, оказывается, что это не так. В теореме 1.1 доказано, что управление на особой траектории с помощью описанной в параграфе 1.3 процедуры последовательного дифференцирования G может быть найдено лишь на четном шаге дифференцирования $2h$. Поэтому в ситуации общего положения все особые траектории данного натурального порядка h лежат на четномерном многообразии $\mathcal{S}$ коразмерности $2h$ в $\mathcal{M}$. Само многообразие $\mathcal{M}$ симплектично, имеет четную размерность, и, значит, $\dim \mathcal{S}$ тоже четно. Истинная причина того, что многообразие $\mathcal{S}$ всегда имеет четную размерность, заключается в том, оно является симплектическим подмногообразием в $\mathcal{M}$. Более того, особые траектории образуют на $\mathcal{S}$ гамильтонов поток с гладким гамильтонианом $\mathcal{H}|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}}$.

Поэтому, например, две различные особые траектории не могут пересекаться. Тем не менее единственность решения нарушается как раз в точках особых траекторий (см. теорему 1.3): в эти точки могут приходить неособые траектории и из них могут выходить неособые траектории.

Нижеследующая теорема о гамильтоновости особого потока будет сформулирована и доказана в терминах натурального порядка, однако останется верной если заменить в ее формулировке натуральный порядок на глобальный и не рассматривать атипичные особые траектории (тогда, правда, применимость теоремы сильно уменьшится). Итак,

Теорема 1.2 (о гамильтоновости особого потока). *Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V натуральный порядок $h \neq \infty$, и дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Тогда все особые траектории системы лежат в множестве*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : u^s(x) \in [-1; 1]\},$$

где

$$u^s(x) = \frac{-(\operatorname{ad} H)^{2h} G}{\{G, (\operatorname{ad} H)^{2h-1} G\}}.$$

Более того,

- (i) Множество $\mathcal{S}_{2h}$ (если не пусто) является гладким симплектическим многообразием с симплектической формой $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$.
- (ii) Особые траектории на $\mathcal{S}$ получаются следующим образом. Необходимо взять участки траекторий гладкого гамильтонового потока на $\mathcal{S}_{2h}$ с гамильтонианом $H|_{\mathcal{S}_{2h}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}_{2h}}$, проходящие в множестве $\{u^s \in [-1; 1]\}$.
- (iii) Поток гладкого гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}(x) = H(x) + G(x)u^s(x)$ в объемлющем пространстве V является касательным к $\mathcal{S}_{2h}$ и его траектории на $\mathcal{S}$ совпадают с особыми.

Замечание 1.1. Например, из пункта (ii) теоремы 1.2 следует, что особые траектории являются бесконечно гладкими и не пересекаются друг с другом, хотя могут пересекаться с неособыми.

Замечание 1.2. Если управление u принадлежит не отрезку $[-1; 1]$ а некоторому замкнутому промежутку, например $I = [a; b]$, $I = [a; +\infty)$, $I = (-\infty; b]$ или $I = \mathbb{R}$, то теорема 1.2 останется верной если переобозначить $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{u^s \in I\}$.

Доказательство теоремы 1.2. Докажем сначала, что любая особая траектория в V лежит в множестве $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : |u(x)| \leq 1\}$. Пусть $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, – особая траектория. Докажем по индукции, что $x(t)$ лежит в $\mathcal{S}_k$ при $k \leq 2h$. Если $k = 1$, то очевидно $G(x(t)) \equiv 0$ по определению особой траектории (значит $x(t) \in \mathcal{S}_1$). Пусть теперь $x(t)$ лежит в $\mathcal{S}_k$ для некоторого $k \leq 2h - 1$, т.е. $(\operatorname{ad} H)^{k-1} G(x(t)) \equiv 0$. Тогда, согласно предложению 1.1, в любой точке дифференцируемости $x(t)$ для некоторого $v \in [-1; 1]$ выполняется

$$0 = \frac{d}{dt}((\operatorname{ad} H)^{k-1} G(x(t))) = (\operatorname{ad} H)^k G|_{x(t)} + v \{G, (\operatorname{ad} H)^{k-1} G\}|_{x(t)}$$

Но $x(t) \in \mathcal{S}_k$ по предположению индукции, а последнее слагаемое обнуляется на $\mathcal{S}_k$ по лемме 1.2. Поэтому $(\operatorname{ad} H)^k G(x(t)) = 0$ в точках дифференцируемости $x(t)$. Следовательно, $(\operatorname{ad} H)^k G(x(t)) = 0$ при всех $t \in (t_0, t_1)$, так как траектория $x(t)$ абсолютно непрерывна и множество точек ее дифференцируемости всюду плотно на (t_0, t_1) . Получаем $x(t) \in \mathcal{S}_{k+1}$.

Таким образом, при $k = 2h$ получаем $x(t) \in \mathcal{S}_{2h}$. Поэтому в любой точке дифференцируемости $x(t)$ для некоторого $v \in [-1; 1]$ выполнено $(\operatorname{ad} H)^{2h} G + \{G, (\operatorname{ad} H)^{2h-1} G\}v = 0$. Немедленно находим: $v = u^s(x(t))$ лежит на отрезке $[-1; 1]$ в точках дифференцируемости $x(t)$, и, следовательно, $|u^s(x(t))| \leq 1$ всюду, что и требовалось.

Теперь докажем, что множество $\mathcal{S}_{2h}$ является гладким симплектическим подмногообразием (если не пусто). Обозначим для краткости $F_k = (\text{ad } H)^k G$. В условии теоремы требуется, чтобы дифференциалы dF_k , $k \leq 2h - 2$, были линейно независимы. Мы докажем, что множество $\mathcal{S}_{2h}$ является гладким многообразием в V коразмерности $2h$, как только покажем, что dF_k , $k \leq 2h - 1$, линейно независимы. Предположим, что это так (этот факт доказан ниже).

Покажем, что ограничение симплектической формы ω на $\mathcal{S}_{2h}$ является симплектической формой. Форма $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$ замкнута в силу замкнутости ω . Покажем невырожденность $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$. Касательное пространство $T_x \mathcal{S}_{2h}$ определяется следующим свойством:

$$\xi \in T_x \mathcal{S}_{2h} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} F_k(x) = 0 \text{ при } k \leq 2h - 1.$$

Или по-другому $0 = dF_k(\xi) = \omega(\xi, i_\omega dF_k)$. Поэтому подпространство $T_x \mathcal{S}_{2h} \subseteq T_x \mathcal{M}$ относительно ω является дополнительным к подпространству $L \subseteq T_x \mathcal{M}$ порожденному векторами $i_\omega dF_k(x)$. Невырожденность ω на $T_x \mathcal{S}_{2h}$ равносильна невырожденности ω на L , как на дополнительных подпространствах. Матрица формы ω в ограничении на L в базисе $i_\omega dF_k(x)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(x) = \left(\omega(i_\omega dF_k, i_\omega dF_l)|_x \right)_{k,l=0}^{2h-1} = \left(\{F_k, F_l\}|_x \right)_{k,l=0}^{2h-1}$$

Таким образом, осталось показать невырожденность матрицы $\mathcal{F}$ в точках $\mathcal{S}_{2h}$. Согласно лемме 1.2 в матрице $\mathcal{F}(x)$ выше побочной диагонали стоят нули при $x \in \mathcal{S}_{2h}$, а на самой побочной диагонали при $x \in \mathcal{S}_{2h}$ стоят элементы вида $\pm \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}$ где знаки $\pm$ чередуются и выбираются в зависимости от четности номера строки. Поскольку по определению натурального порядка $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \neq 0$ в точках $\mathcal{S}_{2h}$, мы немедленно получаем невырожденность матрицы $\mathcal{F}(x)$. Во-первых, это доказывает, что $\mathcal{S}_{2h}$ является гладким многообразием. Действительно, дифференциалы dF_k , $k \leq 2h - 1$, должны быть линейно независимы. Во-вторых, мы получаем, что форма ω на $\mathcal{S}_{2h}$ невырождена. Пункт (i) доказан.

Докажем теперь пункт (ii). Любая особая траектория в $\mathcal{S}$ имеет в любой своей точке дифференцируемости $x \in \mathcal{S}$ скорость $\xi(x) = i_\omega dH(x) + u^s(x) i_\omega dG(x) \in T_x \mathcal{S}_{2h}$. Определим на всем многообразии $\mathcal{S}_{2h}$ гладкое касательное векторное поле $\xi(x) = i_\omega dH(x) + u^s(x) i_\omega dG(x) \in T_x \mathcal{S}$, $\xi(x) \in T_x \mathcal{S}_{2h}$. По теореме Коши о существовании и единственности решения ОДУ с гладкой правой частью, через каждую точку $\mathcal{S}_{2h}$ проходит не более одной траектории поля $\xi(x)$.

Покажем, что особые траектории на $\mathcal{S}$ есть в точности части траекторий векторного поля ξ на $\mathcal{S}_{2h}$, проходящие в $\mathcal{S}$. Итак, если $x(t)$ – особая траектория при $t \in (t_1; t_2)$, то $x(t) \in \mathcal{S}_{2h}$ и $\dot{x}(t) = \xi(x(t))$ для почти всех t . Поэтому $\dot{x}(t) = \xi(x(t))$ для всех t , а особая траектория $x(t)$ является бесконечно гладкой. Обратно, пусть траектория $x(t)$ на $\mathcal{S}_{2h}$ есть решение уравнения $\dot{x} = \xi(x)$ и $x(t) \in \mathcal{S}$ при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда $x(t)$ является траекторией гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ при $u(t) = u^s(x(t))$, и является особой, так как $\mathcal{S}_{2h} \subset N$.

Покажем теперь, что поток на $\mathcal{S}_{2h}$, определяемый гладким гамильтонианом H , состоит из особых траекторий, что, во-первых, докажет гамильтоновость потока особых траекторий (и завершит доказательство пункта (ii)), а, во-вторых, приведет к доказательству пункта (iii).

Для того, чтобы найти поток H на $\mathcal{S}_{2h}$ воспользуемся соображениями, аналогичными тем, что пользовался Мозер при доказательстве полной интегрируемости геодезического потока на n -мерном эллипсоиде (см. [66]). Рассмотрим гладкий гамильтониан

$$\tilde{\mathcal{H}}(x) = H(x) + u^s(x)G(x).$$

определенный в окрестности $\mathcal{S}_{2h}$. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{H}}|_{\mathcal{S}_{2h}} = H|_{\mathcal{S}_{2h}}$, поэтому потоки определяемые ими при ограничении на $\mathcal{S}_{2h}$ совпадают. Покажем, что поток гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ в объемлющей окрестности V является касательным к $\mathcal{S}_{2h}$, и потому не изменяется при ограничении $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{S}_{2h}$. Это завершит доказательство.

Итак, найдем гамильтоново векторное поле для $\tilde{\mathcal{H}}$. По правилу Лейбница

$$i_\omega d\tilde{\mathcal{H}} = i_\omega dH + u^s i_\omega dG + G i_\omega du^s.$$

Поэтому в точках $\mathcal{S}_1 = \{G = 0\}$ (а, значит, и в точках $\mathcal{S}_{2h}$) выполняется

$$i_\omega d\tilde{\mathcal{H}} = i_\omega dH + u^s i_\omega dG = \xi(x).$$

Выше было показано, что векторное поле $\xi(x)$ касательно к $\mathcal{S}_{2h}$, что и требовалось. □

Следствие 1.2. Очевидное следствие заключается в том, что H есть первый интеграл потока особых траекторий (этот факт, конечно, нетрудно получить и прямым счетом).

Замечание 1.3. Если множество допустимых управлений в $\mathcal{H} = H + Gu$ есть вся прямая, $u \in \mathbb{R}$, то все траектории являются особыми. Действительно, если $G \neq 0$, то максимум Gu по $u \in \mathbb{R}$ не достигается. В этом случае есть только особые траектории, и они образуют гамильтонов поток на $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h}$.

Замечание 1.4. Множество $\mathcal{S}$ является многообразием с краем, если дифференциал $u^s(x)$ в точках $\mathcal{S}_{2h} \cap \{u^s(x) = \pm 1\}$ линейно независим с дифференциалами dF_k .

Замечание 1.5. Если существуют $n - h$ независимых функций $H_1, \dots, H_{n-h}$ в V , коммутирующих на $\mathcal{S}$ с H, G и друг с другом, то поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, он включается в поток гладкого гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ в V , который часто бывает суперинтегрируемым (см. [67]) на $\mathcal{S}$ с $n + h$ интегралами $H_1, \dots, H_{n-h}, H_{n-h+1} = G, H_{n-h+2} = (\text{ad } H)G, \dots, H_{n+h} = (\text{ad } H)^{2h-1}G$

Замечание 1.6. Если H и G бесконечно гладкие функции, то многообразие особых траекторий $\mathcal{S}$ бесконечно гладко, и, более того, все особые траектории на $\mathcal{S}$ бесконечно гладкие. Если же $H, G \in C^k(\mathcal{M})$, где $k > 2h$, то $\mathcal{S}$ и особые траектории на $\mathcal{S}$ будут иметь гладкость не меньше $k - 2h$.

1.6 Ниспадающая система скобок Пуассона

В этом параграфе мы опишем метод выписывания ниспадающей системы скобок Пуассона, на который в этой главе опираются две важные теоремы о поведении траекторий в окрестности поверхности негладкости $N = \{x : G(x) = 0\}$ гамильтониана

$$\mathcal{H} = H + Gu, \quad u = \text{sign } G.$$

Решения такой не гладкой гамильтоновой системы обязаны существовать (см. [62]), но, вообще говоря, могут пересекаться, т.е. единственность может быть нарушена. Первый важный результат заключается в том, что единственность решения может нарушаться только в точках особого многообразия $\mathcal{S}$. Вне любой сколь угодно малой окрестности этого многообразия решение единственно и не может пересекать поверхность негладкости N слишком часто (точнее см. теорему 1.3).

Второй важный результат – это обобщение классической теоремы о сопряжении для натурального порядка, которая гласит, что если натуральный порядок системы является четным, то при стыковке особой траектории и неособой управление на неособой обязано иметь разрыв второго рода при подходе к особой. Теоремы о невозможности регулярного сопряжения (в том или ином смысле) неособой траектории с особой обычно доказываются в терминах глобального порядка. Например, если система имеет четный глобальный порядок, то при сопряжении неособой траектории с особой (не атипичной) управление обязано иметь разрыв второго рода. При этом (см. [23]) заменить глобальный порядок на локальный в формулировке нельзя – существуют контрпримеры (см. пример 1.4).

Обе эти теоремы доказываются с помощью нового метода выписывания ниспадающей системы¹⁴ скобок Пуассона. Построение ниспадающей системы в каком-то смысле подобно процедуре нильпотентизации, часто используемой в субримановой геометрии. Этот метод оказался очень эффективным и будет часто применяться в данной диссертации. Например, результаты второй части диссертации, связанные с хаосом на конечных промежутках времени в гамильтоновых системах с разрывной правой частью также опираются на этот метод (см., например, [68]). Эта техника позволяет эффективно исследовать поведение неособых траекторий в окрестности особого многообразия, даже когда определение глобального порядка вырождается.

Опишем подробно структуру этой системы. Выпишем набор дифференциальных уравнений, вдоль произвольной траектории системы, и упорядочим их по строкам. Первые две строки системы содержат по одному уравнению (будем перед уравнениями, стоящими в k -ой строке, ставить символ $\lceil k \rceil$):

$$\begin{aligned} \lceil 1 \rceil \quad & \frac{d}{dt} G = \{H, G\}; \\ \lceil 2 \rceil \quad & \frac{d}{dt} \{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\} u. \end{aligned}$$

¹⁴Descending system.

Третья строка содержит два уравнения.

$$\begin{aligned} \lceil 3 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{H\{H, G\}\} &= \{H\{H, \{H, G\}\}\} + \{G, \{H\{H, G\}\}\}u; \\ \lceil 3 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G\{H, G\}\} &= \{H\{G, \{H, G\}\}\} + \{G, \{G\{H, G\}\}\}u. \end{aligned}$$

В общем случае в m -ой строке, $m \geq 2$, выписаны уравнения вида

$$\lceil m \rceil \quad \frac{d}{dt} \mathcal{K}_m = \{H, \mathcal{K}_m\} + \{G, \mathcal{K}_m\}u,$$

где $\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, $K_1 = G$, $K_2 = H$, а остальные символы K_j могут обозначать как H так и G (т.е. всего 2^{m-2} уравнений). Уравнения в $(m+1)$ -ой строке получаются дифференцированием по t правых частей уравнений в m -ой строке. Т.е. например

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{H, \mathcal{K}_m\} = \{H, \{H, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{H, \mathcal{K}_m\}\}u,$$

и

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G, \mathcal{K}_m\} = \{H, \{G, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{G, \mathcal{K}_m\}\}u.$$

Ниспадающая система выписывается вплоть до строки с номером $2h$, где h – натуральный порядок системы.

Таким образом, в m -ой строке выписаны уравнения на производную по времени от скобок m -ого порядка, а правые части этих уравнений есть аффинные по управлению u функции, где коэффициентами выступают скобки $(m+1)$ -ого порядка.

Главными скобками ниспадающей системы мы будем называть скобки G , $(\text{ad } H)G$, $\dots$, $(\text{ad } H)^{2h-1}G$. Остальные скобки порядка не больше $2h$ мы будем называть не главными. Основное свойство главных скобок заключается в том, что если некоторая траектория пересекает S_k , $k < 2h$, в момент времени τ , то в любой строке с номером $m \leq k$ не главные скобки имеют больший порядок малости по $t - \tau$, чем главные скобки, и потому не влияют на принципиальное поведение системы. Этот факт следует из двух следующих лемм.

Первая лемма аналогична лемме 1.1 с заменой H на G в условии и S_{k+1} на S_k в утверждении леммы:

Лемма 1.3. *Предположим гамильтонова система с гамильтонианом $\mathcal{H}$ имеет в V натуральный порядок h . Пусть F – произвольная гладкая функция в V , $k < 2h$, а дифференциалы dG , $d(\text{ad } H)G$, $\dots$, $d(\text{ad } H)^{k-1}G$ линейно независимы. Тогда значения скобки $\{G, F\}$ в точках множества S_k зависят только от значений F в точках S_k и не зависят от продолжения F в $M \setminus S_k$*

Доказательство. Доказательство можно провести аналогично доказательству леммы 1.1: для произвольной функции F имеем

$$\{G, F\} = F'_{g_1}\{G, G\} + F'_{g_2}\{G, (\text{ad } H)G\} + \dots + F'_{g_k}\{G, (\text{ad } H)^{k-1}G\} + \sum_j F'_{y_j}\{G, y_j\}.$$

Первые k слагаемых обнуляются на $\mathcal{S}_k$ по лемме 1.2, а последние $2n - k$ слагаемых зависят только от значений F на $\mathcal{S}_k$ по тем же соображениям, что и в лемме 1.1. $\square$

Вторая лемма утверждает, что почти все скобки, участвующие в ниспадающей системе скобок Пуассона, обнуляются на соответствующей многообразии $\mathcal{S}_m$

Лемма 1.4. Пусть $\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, где $K_1 = G$, $K_2 = H$, а при каждом $i \geq 3$ символ K_i обозначает H либо G . Пусть $1 \leq m < 2h$ и $j \geq 0$. Тогда $\mathcal{K}_{m+j} = 0$ на $\mathcal{S}_m$, если скобка $\mathcal{K}_{m+j}$ содержит не более $m - 1$ символов H (и любое количество символов G). При $m = 2h$ это утверждение верно для всех скобок $\mathcal{K}_{2h+j}$, в которых крайний слева символ есть H .

Доказательство. Заметим, что в ниспадающей системе скобок Пуассона $K_1 = G$. Поэтому $K_1 = 0$ на $\mathcal{S}_1$. Для K_2 есть два варианта $K_2 = H$ и $K_2 = G$. Случай $K_2 = G$ тривиален. Если $K_2 = H$, то $\mathcal{K}_2 = \{H, G\} = 0$ на $\mathcal{S}_2$ по определению $\mathcal{S}_2$.

Если $K_3 = H$, то $\mathcal{K}_3 = \{K_3, \{K_2, K_1\}\} = 0$ на $\mathcal{S}_3$ по лемме 1.1. Если же $K_3 = G$, то $\mathcal{K}_3 = 0$ на $\mathcal{S}_2$ по лемме 1.3. Отметим, что при добавлении нового крайнего слева символа мы должны увеличить на 1 индекс у $\mathcal{S}_m$, если этот символ есть H , и не менять индекс $\mathcal{S}_m$, если этот символ — G .

Этот процесс можно продолжать по индукции, пока индекс у многообразия $\mathcal{S}_m$ меньше $2h$. Займемся последним шагом. Пусть теперь скобка $\mathcal{K}_{2h+j}$ содержит ровно $2h - 1$ символов H , причем крайний слева символ $K_{2h+j} = H$. Тогда скобка $\mathcal{K}_{2h+j-1}$ содержит $2h - 2$ символов H , поэтому к ней применимо уже доказанное индуктивное утверждение, то есть $\mathcal{K}_{2h+j-1} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h-1}$. Применяя лемму 1.1 получаем $\mathcal{K}_{2h+j} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$, что и требовалось. Объясним еще, почему последний шаг нельзя сделать, если $K_{2h+j} = G$. Действительно, в этом случае на предыдущем шаге скобка $\mathcal{K}_{2h+j-1}$ содержит снова $2h - 1$ символов H . Поэтому максимум на что можно рассчитывать: $\mathcal{K}_{2h+j-1} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$. Но на $\mathcal{S}_{2h}$ лемма 1.3 не применима. $\square$

Следствие 1.3. Если скобка $\mathcal{K}_{2h+1}$ не есть ни $(\text{ad } H)^{2h}G$ ни $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$, то $\mathcal{K}_{2h+1} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$

Доказательство. Действительно, в этом случае один из символов K_j с номерами $3 \leq j \leq 2h$ должен быть G . Поэтому в обоих случаях, когда K_{2h+1} есть либо H либо G , скобка $\mathcal{K}_{2h+1}$ удовлетворяет условию леммы 1.4 $\square$

1.7 Теоремы о единственности и сопряжении для неособых траекторий

Теорема 1.3 (О единственности вне особого многообразия). Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + G$ имеет натуральный порядок h . Пусть $k \leq 2h$, и $x^* \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k+1}$ если $k < 2h$

или $x^* \in \mathcal{S}_{2h} \setminus \mathcal{S}$ если $k = 2h$. Предположим также, что дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{k-1}G$ линейно независимы в V . Тогда

- (i) Существует такой достаточно малый промежуток времени $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что траектория $x(t)$ гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, проходящая через $x^* = x(0)$ существует и единственна при $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$. Число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы эта траектория при $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ пересекала N в единственной точке x^* . Более того, если $m < k$, то траектория $x(t)$ касается $\mathcal{S}_m$ в x^* при $t \rightarrow \pm 0$ с порядком касания $k - m$, а при $m = k$ траектория $x(t)$ трансверсальна $\mathcal{S}_k$ при $t \rightarrow \pm 0$.
- (ii) Если k четно, то траектория остается в $\{G \geq 0\}$ при $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$, если $(\text{ad } H)^k G(x^*) > 0$, или наоборот в $\{G \leq 0\}$, если $(\text{ad } H)^k G(x^*) < 0$, и в любом случае является бесконечно гладкой. Если же k нечетно, то $x(t)$ переходит в x^* из области $G < 0$ при $t \in (-\varepsilon; 0)$ в область $G > 0$ при $t \in (0; \varepsilon)$ (если $(\text{ad } H)^k G(x^*) > 0$) или наоборот (если $(\text{ad } H)^k G(x^*) < 0$), а $x(t)$ является негладкой в точке $t = 0$.

Доказательство. Если точка $x^* \notin \mathcal{S}_1 = \{G = 0\}$, то в окрестности x^* гамильтониан $\mathcal{H}$ является гладким и ее траектории в окрестности x^* образуют поток. То есть являются гладкими, не пересекаются и вообще обладают всеми свойствами решений гладких систем ОДУ.

Если $x^* \in \mathcal{S}_1$, то гладкость траектории, вообще говоря, может потеряться. Пусть $x^* \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k+1}$ и $k < 2h$, или $x^* \in \mathcal{S}_{2h} \setminus \mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \setminus \{|u^s| \leq 1\}$ и $k = 2h$. Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$ гамильтоновой системы в V , проходящую через¹⁵ $x^* = x(0)$. Выпишем ниспадающую систему вплоть до строки с номером k , и покажем обратной индукцией, что главные скобки имеют меньший порядок малости по t , чем главные.

По лемме 1.4 получаем, что для любой скобки $\mathcal{K}_m$ из ниспадающей системы длины $m \leq k$ выполнено

$$\mathcal{K}_m(x(t)) = \int_0^t \left(\{H, \mathcal{K}_m\}(x(s)) + u(s)\{G, \mathcal{K}_m\}(x(s)) \right) ds. \quad (1.3)$$

где $u(t)$ – управление на $x(t)$.

Докажем теперь базу обратной индукции. Рассмотрим последнюю строчку ниспадающей системы. Если $\mathcal{K}_k$ – не главная скобка, то подынтегральное выражение в (1.3) обнуляется при $t = 0$. Действительно, в подынтегральных скобках порядка $k + 1$ крайний правый символ есть G , и еще хотя бы один символ есть G , так как $\mathcal{K}_k$ – не главная скобка. Поэтому по лемме 1.4, они обнуляются в $x(0) = x^* \in \mathcal{S}_k$. Следовательно, при малых $t > 0$ для некоторого $b_k > 0$ выполнено

$$|\mathcal{K}_k(x(t))| \leq b_k t^2, \quad \text{если } \mathcal{K}_k \text{ – не главная скобка.}$$

Рассмотрим подробно главную скобку $(\text{ad } H)^{k-1}G$ в последней строке. Покажем для нее, что подынтегральное выражение в (1.3) при $t = 0$ отлично от 0. Действительно, разберем два слу-

¹⁵Любую такую траекторию, если их много (хотя бы одна должна существовать по теореме существования Филиппова, см. [62]). Далее мы докажем, что решение единственно, по крайней мере локально.

чая.

1. Если $k < 2h$, то, с одной стороны $x^* \in \mathcal{S}_k$, поэтому $\{G, (\text{ad } H)^{k-1}G\}(x^*) = 0$ по лемме 1.4, а с другой стороны, $x^* \notin \mathcal{S}_{k+1}$, поэтому $(\text{ad } H)^k G(x^*) \neq 0$ (по определению $\mathcal{S}_{k+1}$).
2. Если $k = 2h$, то, вообще говоря, обе подынтегральные скобки могут не обнуляться в $x^* \in \mathcal{S}_{2h} \setminus \{|u^s| \leq 1\}$. Однако знак выражения

$$(\text{ad } H)^{2h} G(x^*) + u\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$$

не меняется при $u \in [-1; 1]$ и совпадает со знаком скобки $(\text{ad } H)^{2h} G(x^*)$. Действительно, это выражение аффинно по u и обнуляется при значении $u = u^s(x^*)$, которое лежит вне промежутка $[-1; 1]$.

Пусть для определенности $(\text{ad } H)^k G(x^*) > 0$. Итак, при малых t для некоторых положительных констант c_k и c'_k выполнено

$$\begin{cases} c'_k t \geq (\text{ad } H)^{k-1} G(x(t)) \geq c_k t > 0 & \text{при } t > 0; \\ c'_k t \leq (\text{ad } H)^{k-1} G(x(t)) \leq c_k t < 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Шаг обратной индукции очень похож на базу. Пусть $m < k$. Если $\mathcal{K}_m$ – не главная скобка, то подынтегральное выражение в (1.3) содержит только не главные скобки. Поэтому из результата для строчки $m + 1$ получаем, что для некоторого $b_m > 0$ при малых $t \geq 0$ выполнено

$$|\mathcal{K}_m(x(t))| \leq b_m t^{k-m+2}, \quad \text{если } \mathcal{K}_m \text{ – не главная скобка.}$$

Для главной скобки $(\text{ad } H)^{m-1} G$ получаем следующее: первое подынтегральное слагаемое в (1.3) является главной скобкой в строке с номером $(m + 1)$, а второе – не главной скобкой и мажорируется первым при малых $t \geq 0$. Поэтому при малых $t \geq 0$ для некоторых $c_m, c'_m > 0$, если $k - m$ нечетно, то

$$c'_m t^{k-m+1} \geq (\text{ad } H)^{m-1} G(x(t)) \geq c_m t^{k-m+1} > 0$$

а если $k - m$ четно, то

$$\begin{cases} c'_m t^{k-m+1} \geq (\text{ad } H)^{m-1} G(x(t)) \geq c_m t^{k-m+1} > 0 & \text{при } t > 0; \\ c'_m t^{k-m+1} \leq (\text{ad } H)^{m-1} G(x(t)) \leq c_m t^{k-m+1} < 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

В первой строчке получаем при малых t , что если $k - m$ – четно, то

$$c'_1 t^k \geq G(x(t)) \geq c_1 t^k > 0$$

А если $k - m$ – нечетно, то

$$\begin{cases} c_1' t^k \geq G(x(t)) \geq c_1 t^k > 0 & \text{при } t > 0; \\ c_1' t^k \leq G(x(t)) \leq c_1 t^k < 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

Таким образом, траектория $x(t)$ пересекает N ровно в одной точке x^* при $t = 0$. Поэтому решение единственно при $t \geq 0$ и при $t \leq 0$ по теореме Коши для гладких ОДУ.

Если k – четно, то $G(x(t)) \geq 0$, и следовательно траектория $x(t)$ удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению с гладкой правой частью и при $t > 0$ и при $t < 0$, и потому является гладкой. Если k нечетно, то $u(t)$ меняет знак в $t = 0$. Поэтому производная $\dot{x}(t) = i_\omega dH + u(t)i_\omega dG$ рвется в $t = 0$, так как $dG \neq 0$. $\square$

Замечание 1.7. Здесь важно отметить, что число $\varepsilon = \varepsilon(x^*) > 0$ в теореме 1.3 можно выбрать непрерывно зависящим от $x^* \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k+1}$ (или соответственно $x^* \in \mathcal{S}_{2h} \setminus \{|u^s| \leq 1\}$) если x^* меняется в компактном подмножестве. Это связано с тем, что $\varepsilon(x^*)$ определяется лишь через максимальные и минимальные значения скобок $\mathcal{K}_m$ в окрестности x^* .

Замечание 1.8. Если $x^* \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k+1}$ (или соответственно $x^* \in \mathcal{S}_{2h} \setminus \{|u^s| \leq 1\}$) и $x^* \rightarrow \mathcal{S}_{k+1}$ (или соответственно $x^* \rightarrow \{|u^s| \leq 1\}$), то, вообще говоря, $\varepsilon(x^*) \rightarrow 0$.

Известно, что оптимальные траектории часто содержат существенные неустранимые особенности в окрестности точек на особых экстремальных. А именно, скорость (или, эквивалентно, управление) на оптимальной траектории содержит разрыв второго рода при выходе в особую точку. Удивительным образом оказывается, что наличие такого рода особенностей не является лишь следствием принципа максимума Понтрягина. Например в задачах поиска часто возникают неустранимые особенности при начале движения (см. [42]). В задаче поиска неподвижного объекта на прямой оптимальная траектория содержит счетное число переключений при начале движения, однако асимптотика точек переключения, в отличие от феномена чаттеринга, не описывается геометрическими прогрессиями, а подобна $(-1)^n 2^{-2^n}$ (см. [43, 44]). Существование оптимальной траектории поиска неизбежно и доказано в [45]. Также в этой работе выведены дифференциальные уравнения, которым подчиняется движение вдоль оптимальной траектории поиска. Эти уравнения не являются разновидностью принципа максимума Понтрягина, тем не менее управление оптимального поиска часто содержит разрыв второго рода при начале движения.

Далее будет доказана теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории особой траекторией четного натурального порядка в гамильтоновой системе с гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$. А именно: в этом случае при стыковки неособой траектории с особой траекторией управление на неособой необходимо содержит разрыв второго рода в точке стыковки. Подобного рода теоремы широко известны и обычно носят название «теоремы о сопряжении». Важно отметить, что подобного сорта результаты ранее доказывались в предположении о совпадении глобального порядка системы и локального порядка траектории, то есть в предположении, что особая траектория не является атипичной. Автор приводит очередную теорему о сопряжении чтобы продемонстрировать, что определение натурального порядка и в этом случае с успехом заменяет понятие глобального порядка. Доказательство этой теоремы основано на необходимом

условии оптимальности Кэлли-Коппа-Мойера (см. замечание 1.10).

Теорема 1.4 (о сопряжении). *Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет на $\mathcal{M}$ четный натуральный порядок $h \neq \infty$, и дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Рассмотрим точку $x^* \in \mathcal{S}$, на которой $u^s(x^*) \in (-1; 1)$, где $u^s(x)$ – особое управление из теоремы 1.2. Предположим также, что выполнено условие Лежандра-Клебша:*

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}(x^*(t)) < 0$$

Тогда, если неособая траектория $x(t), u(t)$ определена при $t \geq \tau$ (или $t \leq \tau$) и сопрягается в точке τ с особым многообразием в точке $x(\tau) = x^$, то управление $u(t)$ имеет разрыв второго рода при $t \rightarrow \tau + 0$ (соответственно $t \rightarrow \tau - 0$).*

Доказательство теоремы 1.4. Доказательство очень близко к доказательству теоремы 1.3.

Без ограничения общности будем считать, что $\tau = 0$, и неособая траектория сходит с особого многообразия $\mathcal{S}$, т.е. $x(t), u(t)$ определены при малых $t \geq 0$. Предположим противное: пусть управление $u(t)$ имеет предел при $t \rightarrow +0$. Поскольку траектория $x(t)$ неособа, то $u(t) = \pm 1$ при любом t . Пусть $\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = 1$ (случай -1 аналогичен). Тогда $u(t) = 1$ при малых $t \geq 0$, и, следовательно $G(x(t)) > 0$, а траектория $x(t)$ является гладкой при малых $t > 0$.

Придем к противоречию с $G(x(t)) > 0$. Докажем обратной индукцией следующее утверждение: если $\mathcal{K}_m$ – главная скобка в ниспадающей системе скобок Пуассона, то $\mathcal{K}_m(x(t)) \leq -c_m t^{2h-m+1}$ для некоторой константы $c_m > 0$ при малых $t > 0$, а если $\mathcal{K}_m$ – не главная скобка, то $|\mathcal{K}_m(x(t))| \leq b_m t^{2h-m+2}$ для $b_m > 0$, то есть имеет больший порядок малости по $t \rightarrow +0$. При $m = 1$ получим противоречие, так как $0 < G(x(t)) \leq -c_1 t^{2h} < 0$.

По лемме 1.4 получаем, что для любой скобки $\mathcal{K}_m$ из ниспадающей системы длины $m \leq 2h$ выполнено ключевое соотношение (1.3). Докажем теперь базу обратной индукции. Рассмотрим последнюю строчку ниспадающей системы. Если $\mathcal{K}_{2h}$ – не главная скобка, то подынтегральное выражение в (1.3) обнуляется при $t = 0$, так как $x(0) = x^*(0) \in \mathcal{S}_{2h}$. Следовательно, при малых $t > 0$ для некоторого $b_{2h} > 0$ выполнено

$$|\mathcal{K}_{2h}(x(t))| \leq b_{2h} t^2, \quad \text{если } \mathcal{K}_{2h} \text{ – не главная скобка.}$$

Рассмотрим подробно главную скобку $(\text{ad } H)^{2h-1}G$ в последней строке. Покажем для нее, что подынтегральное выражение в (1.3) при $t = 0$ отрицательно. Действительно, если в нем заменить $u(0) = 1$ на $u^*(0) < 1$ то получится 0 по теореме 1.2, а $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}(x(0)) < 0$ по условию теоремы. Поэтому при малых $t > 0$ для некоторого $c_{2h} > 0$ выполнено

$$(\text{ad } H)^{2h-1}G(x(t)) \leq -c_{2h} t < 0.$$

Далее, действуя обратной индукцией как в доказательстве теоремы 1.3, на шаге с номером m для некоторого $b_m > 0$ при малых $t \geq 0$

$$|\mathcal{K}_m(x(t))| \leq b_m t^{2h-m+2}, \quad \text{если } \mathcal{K}_m - \text{не главная скобка.}$$

Для главной скобки $(\text{ad } H)^{m-1}G$ при малых $t \geq 0$

$$(\text{ad } H)^{m-1}G(x(t)) \leq -c_m t^{2h-m+1} < 0.$$

Поэтому при $m = 1$ получаем $G(x(t)) \leq -c_1 t^{2h} < 0$, что противоречит $G(x(t)) > 0$. $\square$

Замечание 1.9. Условие $|u^s(t)| < 1$ в теореме 1.4 существенно. Это означает, что теорема 1.4 запрещает регулярное сопряжение в точках многообразия особых траекторий $\mathcal{S} \cap \{|u^s| < 1\}$, но ничего не утверждает про сопряжение на $\mathcal{S} \cap \{u^s = \pm 1\}$.

Пример 1.3. В рассмотренном выше примере 1.2 в окрестности особой траектории $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ система имеет второй натуральный порядок, поэтому¹⁶ по доказанной теореме 1.4 регулярное сопряжение с неособой траекторией невозможно.

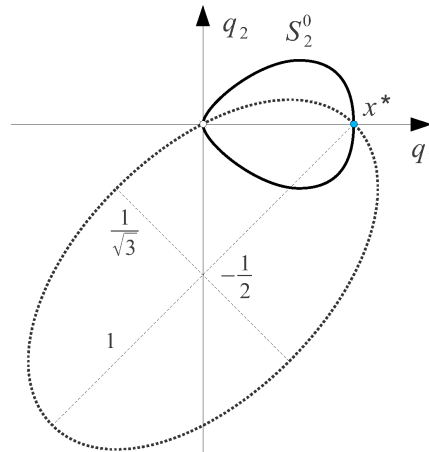


Рисунок 1.3: Проекция множества $\mathcal{S}_2^0$ на плоскость (q_1, q_2) .

Таким образом, невозможность регулярного сопряжения на самом деле определяется четностью натурального порядка, а не глобального. Четность локального порядка напротив не препятствует регулярному сопряжению. Это хорошо видно из примера Льюиса, который изначально и послужил толчком для введения двух разных определений порядка – глобального и локального. Разберем его с точки зрения натурального порядка.

Пример 1.4 (Льюис, 1980, [23]). Рассматривается задача минимизации интеграла:

$$\int_0^\infty \left(q_1 - \frac{1}{2} \right)^2 dt \rightarrow \min$$

при условии, что

¹⁶Обобщенное условие Лежандра-Клебша выполнено, так как $\{G, (\text{ad } H)^3 G\} = -1$ в начале координат.

$$\dot{q}_1 = uq_2; \quad \dot{q}_2 = u - q_1; \quad u \in [-1; 1].$$

Согласно принципу максимума Понтрягина

$$\mathcal{H} = - \left(q_1 - \frac{1}{2} \right)^2 - p_2 q_1 + (p_2 + q_2 p_1) u,$$

Как показал Льюис, траектория $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = p_1 = p_2 = u = 0$ является особой, и ее локальный порядок равен двум. Обобщенное условие Лежандра-Клебша (в терминах локального порядка) выполнено, но при этом существуют неособые траектории, сопрягающиеся с ней регулярно. Это не противоречит классической теореме о сопряжении, так как глобальный порядок в системе равен 1, а особая экстремаль является атипичной.

С точки зрения натурального порядка ситуация устроена следующим образом:

$$G = p_2 + q_2 p_1; \quad \{H, G\} = 2q_1 q_2 - q_1 p_1 + q_2 p_2 - q_2$$

Поэтому в окрестности точки $x^* = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ имеем

$$\mathcal{S}_1 = \{p_2 = -q_2 p_1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \left\{ p_1 = \frac{q_2(2q_1 - 1)}{q_1 + q_2^2} \right\}$$

Переменные q_1 и q_2 являются локальными координатами на $\mathcal{S}_2$ в окрестности x^* , то есть q_1 и q_2 на $\mathcal{S}_2$ могут быть любыми из окрестности точки $(\frac{1}{2}, 0)$, а p_1 и p_2 по ним однозначно находятся. Найдем натуральный порядок системы в окрестности x^* :

$$\{G, (\text{ad } H)G\}|_{\mathcal{S}_2} = \frac{\left(q_2^2 + q_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(q_2^2 - q_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}{2(q_1 + q_2^2)}.$$

Поэтому скобка $\{G, (\text{ad } H)G\}$ обнуляется не во всех точках многообразия $\mathcal{S}_2$, а лишь на поверхности

$$\mathcal{S}_2^0 = \mathcal{S}_2 \cap \left\{ \left(q_2^2 + q_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(q_2^2 - q_1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \right\} \quad (1.4)$$

Если в формулах (1.4) заменить q_2^2 на q_2 , то на плоскости (q_1, q_2) получится эллипс L . Теперь, чтобы построить $\mathcal{S}_2^0$ необходимо к множеству $L \cap \{q_2 \geq 0\}$ применить преобразование $q_2 \mapsto \sqrt{q_2}$ (см. рис. 1.3). Таким образом, в окрестности траектории $x^* \in \mathcal{S}_2^0$ натуральный порядок не определен, а натуральный порядок $\mathcal{S}_2$ без $\mathcal{S}_2^0$ равен 1 (как и глобальный) и не препятствует регулярному сопряжению неособых траекторий с x^* .

Замечание 1.10. Если система в V имеет натуральный порядок h , то локальный порядок любой особой траектории в V совпадает с h (хотя глобальный порядок может быть меньше). Действительно, предположим, что дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-1}G$ линейно независимы и вычислим в старых обозначениях $\left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ как формальный многочлен от $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots$. Коэффициентами при мономах будут линейные комбинации скобок от H и G длины k . Поэтому по лемме

1.4 если $k < 2h$, то $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$. Если же $k = 2h$, то по той же лемме получаем:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2h} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \neq 0 \text{ на } \mathcal{S}$$

Более того, как элементарное следствие, получаем обобщенное неравенство Лежандра-Клебша для натурального порядка, вытекающее из его аналога для локального порядка:

$$(-1)^h \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \leq 0$$

Неравенство сформулировано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве надо обратить. Эта форма хорошо известна в случае, когда h – глобальный порядок. Здесь же она доказана для более общего определения натурального порядка, и работает во многих случаях несовпадения локального и глобального порядков.

1.8 Управление намагниченным волчком Лагранжа

В этом параграфе будут рассмотрены два примера. Первый пример об управлении перевернутым маятником. Он достаточно прост и приведен здесь, чтобы проиллюстрировать используемую технику на простых вычислениях. Второй пример об управлении намагниченным волчком Лагранжа, помещенным в контролируемое магнитное поле. Получить явные формулы во втором примере без использования предлагаемой техники представляется практически невозможным ввиду чрезмерной сложности прямых выкладок. В обоих случаях будет доказано, что поток особых траекторий является интегрируемым по Лиувиллю, и будут выписаны полные наборы первых интегралов в инволюции.

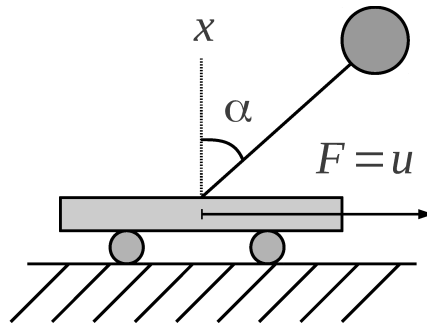


Рисунок 1.4: Механическая система перевернутого маятника.

Пример 1.5. Рассмотрим задачу оптимального управления перевернутым математическим маятником на тележке (см. рис. 1.4). Тележка движется в одномерном направлении по горизонтальной прямой. Маятник закреплен на шарнире. Тогда, если x – положение тележки, α – угол отклонения маятника от вертикали, а $u \in [-1, 1]$ – сила, то, с точностью до членов второго и высшего порядков, получаем

$$\ddot{x} = u; \quad \ddot{\alpha} = \alpha + u$$

Задача – минимизировать средне квадратичное отклонение тележки от начала координат (с теми или иными условиями на положение и скорости тележки и маятника в начальный и конечный моменты времени):

$$\frac{1}{2} \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \inf$$

Применим принцип максимума Понтрягина: пусть $q_1 = x$, $q_2 = \dot{x}$, $q_3 = \alpha$ и $q_4 = \dot{\alpha}$, а p_i , $i = 1, \dots, 4$, сопряженные к ним переменные. Тогда (легко показать, что $\lambda_0 \neq 0$)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2u + p_3q_4 + p_4(q_3 + u)$$

Таким образом, $H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_3q_4 + p_4q_3$, $G = p_2 + p_4$ и $u = \text{sign } G$. Прямые вычисления показывают, что система имеет второй натуральный (и глобальный) порядок (как часто это бывает в задачах управления механическими системами):

$$\{G, (\text{ad } H)G\} \equiv 0, \quad \{G, (\text{ad } H)^3G\} \equiv -1$$

Многообразие особых траекторий $\mathcal{S}$ четырех-мерно и определяется соотношениями

$$\begin{cases} G & = p_2 + p_4 = 0; \\ (\text{ad } H)G & = -p_1 - p_3 = 0; \\ (\text{ad } H)^2G & = -q_1 + p_4 = 0; \\ (\text{ad } H)^3G & = -q_2 - p_3 = 0; \\ u^s & = p_4 \in (-1, 1). \end{cases}$$

Выберем q_3, q_4, p_3, p_4 в качестве координат на $\mathcal{S}$. Тогда

$$\omega|_{\mathcal{S}} = dp_3 \wedge d(q_3 - p_4) + dp_4 \wedge d(q_4 + p_3) \quad \text{и} \quad H|_{\mathcal{S}} = p_3^2 - \frac{1}{2}p_4^2 + p_3q_4 + p_4q_3$$

В качестве канонических координат на $\mathcal{S}$ можно выбрать $Q_1 = q_3 - p_4$, $Q_2 = q_4 + p_3$, $P_1 = p_3$ и $P_2 = p_4$. Тогда

$$\omega|_{\mathcal{S}} = dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2 \quad \text{и} \quad H|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}P_2^2 + P_1Q_2 + P_2Q_1$$

Данная гамильтонова система имеет очевидный первый интеграл $P_1^2 - P_2^2 = p_3^2 - p_4^2$ независимый с $H|_{\mathcal{S}}$ (т.е. является вполне интегрируемой) и, более того, интегрируется в элементарных функциях:

$$\begin{cases} P_1 = -Ae^t + Be^{-t}; P_2 = Ae^t + Be^{-t}; \\ Q_1 = \frac{1}{2}Ate^t - \frac{1}{2}Bte^{-t} + (C - \frac{1}{4}A)e^t + (D - \frac{1}{4}B)e^{-t}; \\ Q_2 = \frac{1}{2}Ate^t + \frac{1}{2}Bte^{-t} + (C + \frac{1}{4}A)e^t - (D + \frac{1}{4}B)e^{-t}; \end{cases}$$

где A, B, C и D – произвольные постоянные.

Поскольку и натуральный и глобальный порядки системы равны 2 и $\{G, (\text{ad } H)^3 G\} < 0$, то по теореме 1.4 неособые траектории не могут сопрягаться с особыми регулярно¹⁷. Добавим еще, что согласно теореме Зеликина-Борисова о расслоении (см. [32]) для систем с особыми траекториями второго глобального порядка, в окрестности особого многообразия $\mathcal{S}$ имеется два расслоения E^+ и E^- с базой $\mathcal{S} \cap \{|u^s| < 1\}$ и слоями гомеоморфным двумерному диску. Каждый слой F расслоения E_+ соткан из однопараметрического семейства локально оптимальных экстремалей, каждая из которых выходит на особое многообразие $\mathcal{S}$ в точке $F \cap \mathcal{S}$, совершая при этом счетное число переключений управления (т.е. счетное число раз пересекая поверхность $\mathcal{S}_1$). Расслоение E^- устроено аналогично, с той лишь разницей, что траектории сходят с $\mathcal{S}$ по слоям E^- .

Поток гладкого гамильтониана

$$\tilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u^s(x) = H + Gp_2 = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2^2 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_2p_4.$$

в $\mathcal{M}$ обладает на $\mathcal{S}$ 6-ю первыми интегралами $F_1 = G, \dots, F_4 = (\text{ad } H)^3 G, F_5 = \tilde{\mathcal{H}}$ и $F_6 = p_3^2 - p_4^2$, и, следовательно, является суперинтегрируемым на $\mathcal{S}$.

Прежде чем, переходить к следующему примеру, отметим, что леммы 1.1 и 1.3 оказываются очень полезными и могут сильно сократить вычисления, в тот момент, когда сложность формальных выкладок переходит все разумные пределы. Действительно, построение особого многообразия напрямую связано с последовательным вычислением $(\text{ad } H)^k G$ при $k = 1, 2, \dots$ и $\{G, (\text{ad } H)^k G\}$ при нечетных k . Леммы 1.1 и 1.3 позволяют производить вычисления на k -ом шаге с точностью до членов, обнулившихся на предыдущих шагах.

Пример 1.6. Рассмотрим задачу оптимального управления вращением твердого тела в контролируемом магнитном поле. Пусть осесимметричное намагниченное твердое тело (волчок Лагранжа) закреплено в точке на оси симметрии и помещено внутрь индукционной магнитной катушки (в невесомости). Магнитное поле катушки приближенно будем считать в каждый момент времени постоянным: $h(t)e$, где $e \in \mathbb{R}^3$ – единичный вектор, а $h(t) \in \mathbb{R}$ – напряженность поля, и пренебрежем эффектом Барнетта. Вычисления будем проводить в системе координат, связанной с телом. Обозначим через $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_2)$ – матрицу, обратную к тензору инерции, через $m \in \mathbb{R}^3$ – момент тела, а через $N \in \mathbb{R}^3$ – постоянный магнитный момент тела. Будем считать, что вектор N лежит на оси симметрии и, следовательно, является собственным вектором J , т.е. $JN = J_2 N$.

¹⁷За исключением, быть может, точек на границе $\mathcal{S}$, в которых особое управление $u = \pm 1$.

Тогда, если $u(t) \in [-u_0, u_0]$ – напряжение на катушке в момент времени t , а R – ее внутреннее сопротивление, то

$$\begin{cases} \dot{m} &= [m, Jm] + h[e, N]; \\ \dot{e} &= [e, Jm]; \\ \dot{h} &= -Rh + u; \end{cases} \quad (1.5)$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение.

Система (1.5) почти совпадают с системой уравнений вращения волчка Лагранжа в однородном силовом поле тяжести (см. [69]). Существенная разница заключается в том, что модуль силы меняется со временем.

Система (1.5) не изменяется при следующих заменах координат: пусть $\lambda > 0$, тогда (i) $t \mapsto \frac{1}{\lambda}t$, $m \mapsto \lambda m$, $h \mapsto \lambda^2 h$, $u \mapsto \lambda^3 u$, $R \mapsto \lambda R$, поэтому мы можем считать, что $R = 1$; (ii) $h \mapsto \lambda h$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda}N$, $u \mapsto \lambda u$, поэтому можно считать, что $u_0 = 1$; и (iii) $e \mapsto \lambda e$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda}N$, поэтому будем считать, $N = (0, 0, 1)$, а вектор e может иметь вообще говоря не единичную длину. Таким образом, фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$ семимерно: $M = \mathbb{R}^7 \setminus \{e = 0\}$.

Требуется, управляя напряжением на катушке $u \in [-1, 1]$, перевести систему из начального состояния в конечное за минимальное время:

$$T \rightarrow \inf. \quad (1.6)$$

Начальное и конечное состояния могут быть либо фиксированными, либо лежащими на некоторых терминальных многообразиях – это несущественно для дальнейшего.

Система (1.5) обладает следующими очевидными первыми интегралами

1. Проекция вектора момента на ось симметрии: $\langle m, N \rangle = \text{const}$;
2. Проекция вектора момента на направление магнитного поля: $\langle m, e \rangle = \text{const}$;
3. Геометрический интеграл: $\langle e, e \rangle = \text{const}$.

Длина вектора момента m и аналог энергии E не сохраняются в системе, так как напряженность магнитного поля h меняется со временем.

Пусть p, q, r – переменные, сопряженные к m, e и h соответственно (координаты в слое на кокасательном расслоении $\mathcal{M} = T^*M$). То есть $p \in \mathbb{R}^3$, $q \in \mathbb{R}^3$ и $h \in \mathbb{R}$. Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальные траектории должны быть траекториями гамильтоновой системы с разрывной правой частью:

$$\mathcal{H} = \langle p, [m, Jm] \rangle + h \langle p, [e, N] \rangle + \langle q, [e, Jm] \rangle - rh + ru = H + Gu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается спаривание вектора и ковектора (скалярное произведение), а симплектическая форма имеет вид $\omega = dp \wedge dm + dq \wedge de + dr \wedge dh$. Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{p} &= [p, Jm] - J[p, m] - J[q, e]; \\ \dot{q} &= h[p, N] + [q, Jm]; \\ \dot{r} &= -\langle p, [e, N] \rangle + r; \end{cases}$$

Найдем особое многообразие $\mathcal{S}$ и докажем, что поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю. В этой задаче можно было бы воспользоваться Пуассоновой/бигамильтоновой структурой системы (1.5) при постоянном h (см. [70]) или LA-парой (см. [71]), но прямые вычисления предпочтительнее для того, чтобы явно продемонстрировать развитую технику.

Как обычно, будем обозначать через x – точку $\mathcal{M}$, т.е. $x = (m, e, h, p, q, r)$. Итак, $G = r$, значит, $\mathcal{S}_1 = \{x : r = 0\}$, и

$$(\text{ad } H)G = -\langle p, [e, N] \rangle + G.$$

Поскольку слагаемое G обнулилось на предыдущем шаге, т.е. $G = 0$ на $\mathcal{S}_1$, то оно не может повлиять на дальнейшие вычисления. Действительно, при вычислении $(\text{ad } H)^2G$ и $\{G, (\text{ad } H)G\}$ на $\mathcal{S}_2$ это слагаемое не дает никакого вклада, т.к. и $(\text{ad } H)G$ и $\{G, G\}$ обнуляются на $\mathcal{S}_2$. Аналогично, это слагаемое не внесет никакого вклада в дальнейшем. Другими словами, по леммам 1.1 и 1.3, для всех последующих вычислений нам, вообще говоря, достаточно знать, что

$$(\text{ad } H)G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_1}{=} -\langle p, [e, N] \rangle.$$

Легко видеть, что $\{G, (\text{ad } H)G\} \equiv 0$, то есть натуральный и глобальный порядки не меньше 2-х, и

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \left\{ x : \langle p, [e, N] \rangle = 0 \right\}.$$

Воспользуемся тем, что N является собственным вектором матрицы J : для любого вектора x выполнено $J[x, N] = [Jx, N] = J_1[x, N]$. Получаем

$$\begin{aligned} (\text{ad } H)^2G &= J_1 \left(\langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle \right) + (\text{ad } H)G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_2}{=} \\ &\stackrel{\text{на } \mathcal{S}_2}{=} J_1 \left(\langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle \right), \end{aligned}$$

и $\{G, (\text{ad } H)^2G\} \equiv 0$. На самом деле, достаточно того, что $\{G, (\text{ad } H)^2G\} = 0$ на $\mathcal{S}_3$, что следует без вычислений из леммы 1.2 или из леммы 1.4. Итак,

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2 \cap \left\{ x : \langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle = 0 \right\}$$

На четвертом шаге прямая выкладка дает:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} H)^3 G = & J_1^2 \left(\langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2 \langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle \right) + \\
& + J_1 \left(2h \langle e, N \rangle - J_1 \langle m, m \rangle \right) \left((\operatorname{ad} H)G - G \right) + (\operatorname{ad} H)^2 G,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \cap \left\{ x : \langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2 \langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0 \right\}$$

Более того,

$$\{G, (\operatorname{ad} H)^3 G\} = 2J_1 \langle e, N \rangle \left((\operatorname{ad} H)G - G \right)$$

Таким образом, скобка $\{G, (\operatorname{ad} H)^3 G\}$ не обнуляется тождественно, но обнуляется на $\mathcal{S}_4$. Поэтому локальный порядок любой особой траектории не меньше 3-х, а глобальный порядок системы вырождается и равен 2-м. Натуральный порядок наоборот не вырождается и не меньше 3-х.

Последние два слагаемых в (1.7) можно отбросить по леммам 1.1 и 1.3. До этого момента мы тащили за собой все лишние слагаемые, чтобы продемонстрировать, каким образом работают леммы 1.1 и 1.3, и показать, почему эти слагаемые не влияют на финальный результат. Однако, с этого момента формулы становятся слишком тяжеловесные. Итак, нам достаточно того, что

$$(\operatorname{ad} H)^3 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_3}{=} J_1^2 \left(\langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2 \langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle \right)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} H)^4 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_4}{=} & 2J_1^3 \langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle + 2J_1 h \left((\operatorname{ad} H)^2 G - (\operatorname{ad} H)G \right) \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_4}{=} \\
& \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_4}{=} 2J_1^3 \langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle,
\end{aligned}$$

и

$$\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \cap \left\{ x : \langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0 \right\}. \tag{1.8}$$

Скобка $\{G, (\operatorname{ad} H^4)G\} = 0$ на $\mathcal{S}_5$ по лемме 1.2 или по лемме 1.4.

Для того, чтобы найти $(\operatorname{ad} H)^5 G$ вычислим отдельно

$$\begin{aligned}
\{H, \langle e, [m, q] \rangle\} &= \frac{1}{J_1} h \left((\operatorname{ad} H)^2 G - (\operatorname{ad} H)G \right) \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_5}{=} 0; \\
\{H, \langle e, [m, N] \rangle\} &= J_1 \langle [e, m], [m, N] \rangle - h \langle [e, N], [e, N] \rangle.
\end{aligned}$$

Поэтому по правилу Лейбница

$$(\operatorname{ad} H)^5 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_5}{=} 2J_1^3 \langle e, [m, q] \rangle \left(J_1 \langle [e, m], [m, N] \rangle - h \langle [e, N], [e, N] \rangle \right)$$

Таким образом,

$$\{G, (\text{ad } H)^5 G\} \stackrel{\text{на } S_5}{=} -2J_1^3 \langle e, [m, q] \rangle \langle [e, N], [e, N] \rangle,$$

и, следовательно, натуральный порядок системы равен 3-м на открытом всюду плотном множестве

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap (\{x : [e, N] \neq 0, \langle e, [m, q] \rangle \neq 0\})$$

Обобщенное условие Лежандра-Клебша в этой задаче имеет вид

$$\langle e, [m, q] \rangle < 0 \quad \text{на особых траекториях.}$$

Опишем теперь наиболее простым образом множество $\mathcal{S}_6$. Вначале, заметим, что $r = 0$, а переменная p_3 вообще не входит систему уравнений, описывающих $\mathcal{S}_6$. Рассмотрим три уравнения $(\text{ad } H)^k G = 0$ при $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} E_1 = \langle e, [p, N] \rangle = 0; \\ E_2 = \langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle = 0 \\ E_3 = \langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2\langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0 \end{cases}$$

Поскольку $m \neq 0$ на $\mathcal{M}'$, то p_1 и p_2 однозначно выражаются из первых двух уравнений. Третье уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle m, e \rangle \langle [m, e], [m, N] \rangle E_1 + \langle m, e \rangle \langle e, [m, N] \rangle E_2 - \langle m, [e, [e, N]] \rangle E_3 = \\ = -\langle q, [e, m] \rangle \langle m, \underbrace{(\langle N, N \rangle \langle e, e \rangle + \langle e, N \rangle^2) e - 2\langle e, N \rangle \langle e, e \rangle N}_{\gamma} \rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поэтому, на $\mathcal{S}_6$ из (1.8) и (1.9) мы получаем, что момент m перпендикулярен γ и $[e, N]$. Поэтому момент m параллелен их векторному произведению. Но

$$[\gamma, [e, N]] = \langle [e, N], [e, N] \rangle (\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N).$$

Следовательно,

$$m = \rho (\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N), \quad \text{где } 0 \neq \rho \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Далее, если $\langle m, [e, [e, N]] \rangle \neq 0$, то согласно (1.9) уравнение $E_3 = 0$ можно заменить условием $m \perp \gamma$, и поэтому условия (1.8) и $E_3 = 0$ равносильны условию (1.10). Если же $m \perp [e, [e, N]]$, то $m \parallel [[e, N], [e, [e, N]]]$, то есть $m \parallel e$. Поэтому из (1.10) получаем, что $e \parallel N$ (т.к. $m \neq 0$), и уравнение $E_3 = 0$ тоже выполняется. Значит, пара условий (1.8) и $E_3 = 0$ в любом случае равносильна условию (1.10).

Таким образом мы получаем:

Лемма 1.5. На $\mathcal{M}'$ система имеет третий натуральный порядок, и множество $\mathcal{S}_6$ описывается так: p_3 и q – любые, $r = 0$, p_1 и p_2 находятся однозначно из линейных уравнений $(\text{ad } H)G = (\text{ad } H)^2 G = 0$ (т.е. $E_1 = E_2 = 0$), векторы m и e удовлетворяют условию (1.10), а h находится из уравнения $(\text{ad } H)^5 G = 0$, т.е.

$$h = \rho^2 J_1 \langle e, e \rangle \langle e, N \rangle. \quad (1.11)$$

Следствие 1.4. Множество $\mathcal{S}_6$ по теореме 1.2 является симплектическим подмногообразием $\mathcal{M}'$ размерности 8 с локальными координатами e, ρ, q и p_3 .

Доказательство. Действительно, условие (1.10) дает два уравнения, дифференциалы которых линейно зависимы только в точках, где либо $m = 0$ либо $\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N = 0$. Но первый вектор не равен 0 на $\mathcal{M}'$, а второй отличен от 0 всегда, так как $e \neq 0$.

Коразмерность $\mathcal{S}_6$ в два раза больше натурального порядка, а $\dim \mathcal{M} = 14$, поэтому $\dim \mathcal{S}_6 = 8$. $\square$

Лемма 1.6. На любой особой траектории длины векторов e и m , а также попарные углы между e, m и N постоянны.

Доказательство. Достаточно показать, что матрица Грамма векторов e, m и N постоянна. Очевидно, что скалярные произведения $\langle N, N \rangle, \langle e, e \rangle, \langle m, e \rangle$ и $\langle m, N \rangle$ постоянны на любой траектории. Осталось показать, что $\langle e, N \rangle$ и $\langle m, m \rangle$ постоянны на особых траекториях:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle e, N \rangle &= \langle [e, Jm], N \rangle = -J_1 \langle m, [e, N] \rangle \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 0 \\ \frac{d}{dt} \langle m, m \rangle &= 2 \langle m, [m, Jm] \rangle + 2u^s \langle m, [e, N] \rangle \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 0 \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 1.5. На любой особой траектории $\rho = \text{const}$, $h = \text{const}$ и $E = \langle m, Jm \rangle = \text{const}$.

Следствие 1.6. На любой особой траектории $u^s = h$.

Найденное управление $u^s(x)$ на особых траекториях согласуется с теоремой 1.2. Действительно,

$$(\text{ad } H)^6 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 2J_1^4 \langle e, [m, q] \rangle \langle [e, m], [m, N] \rangle.$$

По теореме 1.2 получаем

$$u^s(x) = \frac{-(\text{ad } H)^6}{\{G, (\text{ad } H)^5 G\}} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} J_1 \frac{\langle [e, m], [m, N] \rangle}{\langle [e, N], [e, N] \rangle} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} h$$

Многообразие особых траекторий $\mathcal{S} = \mathcal{S}_6 \cap \{x : |h| < 1\}$ – симплектическое подмногообразие $\mathcal{S}_6$.

Теорема 1.5. Движение по любой особой траектории на M' в задаче (1.5,1.6) оптимального управления волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле устроено следующим образом:

- (i) Вектор момента импульса m , магнитный момент тела N и направление магнитного поля e во время движения лежат в одной плоскости и образуют друг с другом постоянные углы.
- (ii) Вектор момента m во время движения имеет постоянную длину и параллелен сумме вектора магнитного момента N и его проекции на направление магнитного поля e .
- (iii) Векторы m и e вращаются вокруг N с постоянной угловой скоростью

$$\Omega = \langle e, e \rangle + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle}$$

- (iv) Управление u выбирается так, чтобы напряженность магнитного поля h внутри катушки была постоянной: $u = hR \in (-u_0, u_0)$.

Доказательство. Первое и второе утверждения теоремы есть прямое следствие лемм 1.5 и 1.6. Четвертое – следствия 1.6.

Найдем угловую скорость вращения e вокруг N . По пункту (i) теоремы она совпадает с угловой скоростью вращения m вокруг N . Вычислим $\frac{d}{dt}e$. Из (1.10) получаем, что

$$Jm \stackrel{\text{на } S_6}{=} \rho \left(J_1 \langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle} N \right) \quad (1.12)$$

Поэтому, согласно (1.5),

$$\frac{d}{dt}e \stackrel{\text{на } S_6}{=} \left(\langle e, e \rangle + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle} \right) [e, N]$$

□

Таким образом при движении по особой траектории волчок равномерно вращается с постоянной скоростью вокруг вектора направления магнитного поля. Прецессия и нутация отсутствуют, а сумма магнитного момента и его проекции на направление магнитного поля в любой момент времени параллельна вектору момента вращения тела.

Теорема 1.5 описывает проекцию особых траекторий на фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$. В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ имеем:

Лемма 1.7. Гамильтонов поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ обладает 4-мя независимыми первыми интегралами в инволюции: $F_1 = \langle e, e \rangle$, $F_2 = \langle m, e \rangle$, $F_3 = \langle m, N \rangle$ и $F_4 = \tilde{\mathcal{H}} \stackrel{\text{на } S}{=} \mathcal{H} \stackrel{\text{на } S}{=} H \stackrel{\text{на } S}{=} \langle q, [e, Jm] \rangle$. Первые интегралы h , ρ и $E = \langle m, Jm \rangle$ через них выражаются.

Доказательство. Функции F_1 , F_2 и F_3 являются первыми интегралами исходной системы. Гамильтониан H является первым интегралом потока особых траекторий по следствию 1.2. Поскольку $p \perp [e, N]$, а $[m, Jm] \parallel [e, N]$ на $\mathcal{S}$, то

$$H|_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{H}} = \langle q, [e, Jm] \rangle.$$

Интегралы F_1 , F_2 и F_3 независимы на $\mathcal{S}$, так как (учитывая, что на $\mathcal{S}$ выполнено (1.10)) однозначно задают длины и расположение друг относительно друга векторов e , m и N . Интеграл F_4 содержит переменную q и тоже независим от первых трех. Функция ρ однозначно находится через F_1 , F_2 и F_3 по формуле (1.10), а h по формуле (1.11). Поскольку на $\mathcal{S}$ выполнено равенство (1.12), то E на $\mathcal{S}$ так же является функцией от F_1 , F_2 и F_3 . $\square$

Таким образом, по теореме 1.2 поток особых траекторий в задаче (1.5, 1.6) оптимального управления волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, по той же теореме его можно включить в поток гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u^s(x)$, который (как было отмечено в замечании 1.5) обладает на $\mathcal{S}$ дополнительно еще 6-ю первыми интегралами: $F_5 = G$, $F_6 = (\text{ad } H)G$, ..., $F_{10} = (\text{ad } H)^5 G$. Матрица $(\{F_i, F_j\})_{i,j=1}^{10}$ имеет ранг 6 и потому, система с гамильтонианом $\tilde{\mathcal{H}}$ является суперинтегрируемой¹⁸ на $\mathcal{S}$.

¹⁸Отметим, что вне $\mathcal{S}$ эта система теряет первые интегралы $F_5, \dots, F_{10}$, но это не имеет значения, так как все особые траектории лежат на $\mathcal{S}$.

ГЛАВА 2

Флаг порядков особой экстремали с задачах с многомерным управлением

В этой главе показано, что порядок особой экстремали в задачах с многомерным управлением описывается флагом линейных подпространств в пространстве управлений. В терминах этого флага построены необходимые условия регулярного сопряжения неособой экстремали с особой в аффинных по управлению системах (см. [40]).

Построены примеры многомерных задач, в которых оптимальное управление имеет вид иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, которая проходится за конечное время (см. [40, 41]). Оптимальная траектория при этом имеет форму обобщенной логарифмической спирали, натянутой на эту обмотку, и попадает в начало координат за конечное время.

2.1 Особые экстремали в задачах с многомерным управлением

Пусть U и V – конечномерные линейные пространства и на V задана управляемая динамическая система с многомерным управлением $u \in \Omega \subset U$:

$$\dot{q} = \varphi(t, q, u).$$

Здесь $q \in V$, а отображение $\varphi : \mathbb{R} \times V \times U \rightarrow V$ предполагается гладким. Относительно этой системы задана оптимизационная задача с терминальным функционалом при некоторых краевых условиях, которые не существенны для дальнейшего изложения.

Если траектория $q^*(t), u^*(t)$ оптимальна, то согласно принципу максимума Понтрягина найдется нетривиальный множитель Лагранжа $p^*(t) \in V^*$, удовлетворяющий гамильтоновой системе

$$\begin{cases} \mathcal{H}(q, p, u) = p\varphi(t, q, u); \\ \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{H}; \\ \dot{p} = - \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{H}; \\ u^*(t) \in \arg \max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(t, q^*(t), p^*(t), u). \end{cases} \quad (2.1)$$

Всюду в дальнейшем в этой главе оптимальную траекторию мы полагаем нормальной, то есть множитель Лагранжа $p^*(t)$ определен единственным образом с точностью до умножения на положительную константу.

Предположим, что оптимальное управление $u^*(t)$ является внутренней точкой множества Ω . В этом случае $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$, и гессиан $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H}$ является не положительно определенной квадратичной формой. Так как $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$, то гессиан $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H}$ является корректно определенной симметрической билинейной формой на $T_{u^*(t)}\Omega = U$.

Определение 2.1. Если на некотором промежутке $t \in (t_0, t_1)$ управление $u^*(t)$ лежит во внутренней Ω (значит $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$) и гессиан $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H}(t, q^*(t), p^*(t), u^*(t))$ имеет не полный ранг, то оптимальная траектория называется особой траекторией (или экстремалью) гамильтониана $\mathcal{H}(t, q, p, u)$ на этом промежутке времени.

2.2 Обобщенное условие Лежандра-Клебша при многомерном управлении

В этом параграфе сформулированы известные результаты, необходимые для дальнейшего изложения. Символ $\frac{d}{dt}$ будет обозначать формальное дифференцирование вдоль траекторий системы (2.1), то есть вместо $\dot{q}$ и $\dot{p}$ подставлены их значения из (2.1).

Обозначим размерность пространства управлений U через d , $\dim U = d$. В случае $d = 1$ широко известны классические определения локального порядка особой экстремали и глобального порядка системы [23, 32], а также обобщенное условие Лежандра-Клебша [21].

Исследование понятия порядка особой траектории в задачах с многомерным управлением $d > 1$ является целью данной главы (некоторые интересные примеры и результаты по необходимым и достаточным условиям второго порядка см. [39, 51, 53, 54, 57, 64]).

Пусть $u_i, i = 1, \dots, d$ — координаты в пространстве U . Обозначим через $h_i \in \bar{\mathbb{Z}}_+ := \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ максимальное из целых чисел таких, что на особой экстремали при $t \in (t_1, t_2)$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial}{\partial u_i} \mathcal{H} \right\}^* = 0 \quad \forall k \leq 2h_i - 1,$$

то есть h_i — это порядок по координате u_i .

Замечание 2.1. Здесь и далее $\{\cdot\}^*$ означает подстановку особой экстремали. То есть если, например, $f = f(t, q, p, u, \dot{u})$, то

$$\{f\}^* = f(t, q^*(t), p^*(t), u^*(t), \dot{u}^*(t)).$$

Многомерное условие Лежандра-Клебша формулируется следующим образом:

Теорема 2.1 (Goh [51], 1966; Krener [53], 1977). Для любых i и j на особой траектории

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H} \right\}^* = 0 \quad \forall k \leq h_i + h_j - 1.$$

Более того, если все h_i конечны, то $d \times d$ матрица

$$\left((-1)^{h_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^{h_i+h_j}}{dt^{h_i+h_j}} \frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H} \right\}^* \right)_{i,j=1}^d \quad (2.2)$$

на особой траектории должна быть симметрической неположительно определенной.

Отметим, что результат данной теоремы существенно зависит от выбора системы координат в U . Неудачный выбор координат в пространстве U может дать неполный набор необходимых условий. В следующий простом показательном примере хорошо видна эта «неудобная» зависимость.

Пример 2.1. Запишем одну и ту же задачу оптимального управления

$$\int_0^{+\infty} (q_1^2 + q_2^2) dt \rightarrow \inf; \quad \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2 \leq 1; \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R};$$

в разных координатах на пространстве U :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \\ \ddot{q}_2 = u_2 \\ u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = v_1 \cos t - v_2 \sin t \\ \ddot{q}_2 = v_1 \sin t + v_2 \cos t \\ v_1^2 + v_2^2 \leq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Единственная особая экстремаль имеет вид $q_1 = q_2 = 0$. Для системы координат (2.3) легко видеть, что порядок u_1 равен единице а порядок u_2 – двум и матрица Гоха-Кренера (2.2) есть единичная матрица с обратным знаком. В координатах же (2.4) картина совсем другая: порядок обоих управлений v_1 и v_2 равен 1 и матрица Гоха-Кренера (2.2) имеет неполный ранг 1:

$$\left(\left\{ \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial v_j} \mathcal{H} \right\}^* \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 t & -\cos t \sin t \\ -\cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix}$$

В случае (2.4) получены не все необходимые условия, так как вместо отрицательно определенной матрицы ранга 2 получена неположительно определенная матрица ранга 1.

2.3 Флаг локальных порядков

В этом параграфе мы определим величину Ord , которая играет роль порядка в многомерном случае и совпадает в одномерном случае с классическим определением.

Пусть $\xi \in U$ – произвольный вектор. Мы можем рассмотреть локальный порядок системы (2.1) вдоль этого вектора, зафиксировав все остальные направления и разрешив меняться управлению u только вдоль ξ . Пусть $\text{Ord } \xi$ обозначает порядок особой экстремали вдоль ξ при $t \in (t_1, t_2)$. Из теоремы 2.1 видно, что если ξ есть линейная комбинация ξ_1 и ξ_2 , то порядок ξ не меньше минимального из порядков ξ_1 и ξ_2 , то есть

$$\text{Ord}(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) \geq \min\{\text{Ord}(\xi_1), \text{Ord}(\xi_2)\} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, Ord удовлетворяет условию следующей несложной леммы, которая восходит, по-видимому, к Ляпунову:

Лемма 2.1. Пусть $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – некоторая функция. Если для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$f(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) \geq \min\{f(\xi_1), f(\xi_2)\} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

то f принимает не более чем $d + 1$ значение $h_0 < h_1 < \dots < h_k$, $k \leq d$. Более того, если обозначить $U_i = f^{-1}\{h \geq h_i\}$, то U_i – линейные подпространства $\mathbb{R}^d$ образующие флаг, то есть $U_k \subseteq \dots \subseteq U_0 = \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Покажем, что f на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ принимает не более чем d значений. Предположим противное: пусть $f(\xi_1) > \dots > f(\xi_{d+1})$, где $\xi_i \neq 0$. Поскольку вектора ξ_i линейно зависимы, то найдется вектор ξ_k , который линейно выражается через предыдущие. Значит по условию леммы $f(\xi_k) \geq f(\xi_j)$ для некоторого $j < k$. Противоречие. Осталось добавить, что множество $f^{-1}[h; +\infty)$ является линейным подпространством в $\mathbb{R}^d$ при любом h , что и завершает доказательство. $\square$

Для функции Ord мы получаем, что пространство U раскладывается во флаг $U_k \subseteq \dots \subseteq U_0 = U$ такой, что порядок всех направлений из $U_i \setminus U_{i-1}$ равен h_i . Однако, из примера 2.1 хорошо видно, что в «правильном» определении порядка необходимо разрешить подпространствам U_i каким-то образом поворачиваться со временем вдоль особой экстремали.

Для того чтобы построить «правильное» определение флага порядков в задачах с многомерным управлением рассмотрим особую траекторию $q^*(t), p^*(t), u^*(t)$ (управление $u^*(t)$ предполагается гладким на (t_0, t_1)). В каждый момент времени $t \in (t_0, t_1)$ введем индуктивно флаг линейных подпространств $U_0(t) \supseteq U_1(t) \supseteq \dots$ в пространстве U и билинейные формы $B_j(t)$ на $U_j(t)$. А именно, положим

$$U_0(t) \equiv U;$$

$$B_0(t) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H} \right\}^*.$$

Если ранг формы $B_{j-1}(t)$, $j \geq 1$, не полный, то продолжим индукцию и определим

$$U_j(t) = \ker B_{j-1}(t);$$

$$B_j(t) = (-1)^j \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_j(t)}.$$

Теорема 2.2. Предположим, что ранги форм $B_j(t)$ постоянны на некотором промежутке времени (τ_1, τ_2) . Тогда формы $B_j(t)$ и флаг пространств $U_j(t)$ гладко зависят¹ от t и определены инвариантно относительно гладких (вообще говоря, не линейных) зависящих от времени замен координат на U . Формы $B_j(t)$ являются симметрическими неположительно определенными и

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_{j+1}(t)} = 0 \quad \forall j \geq 0.$$

Для того, чтобы выбрать интервал (τ_1, τ_2) необходимо выбрать промежуток (t_1^0, t_2^0) на котором ранг $B_0(t)$ постоянен. Потом сузить этот промежуток (если потребуется) до $(t_1^1, t_2^1) \subset (t_1^0, t_2^0)$ на котором ранг $B_1(t)$ постоянен и так далее.

На теорему 2.2 можно смотреть с двух точек зрения: во-первых она ведет к «правильному» определению флага порядков в задачах с многомерным управлением, а, во-вторых, позволяет записать условие Гоха-Кренера (теорема 2.1) в инвариантном виде, что избавляет от проблемы неудачного выбора координат в U .

Доказательство теоремы 2.2. Пусть u^i и v^j — две системы координат в U , которые могут гладко меняться в зависимости от t . Покажем, что определение флага $U_h(t)$ и билинейных форм $B_h(t)$ совпадает в координатах u^i и v^j .

Имеем для дифференцирований

$$\frac{\partial}{\partial v^i} = \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial u^j},$$

где якобиан $\frac{\partial u^j}{\partial v^i}$, вообще говоря, зависит от t . По повторяющимся индексам как всегда ведется суммирование. Теперь докажем утверждение теоремы по индукции. Очевидно, что определение $U_0(t) = U$ совпадает в координатах u и v . Для формы $B_0(t)$ стандартным образом имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} \mathcal{H} \right\}^* &= \left\{ \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial u^l}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} \right) \right\}^* = \\ &= \left\{ \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} \right\}^* + \left\{ \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^l} \mathcal{H} \right\}^*, \end{aligned}$$

и первое слагаемое обнуляется, так как $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* = 0$ на особой траектории. Таким образом, форма $B_0(t)$ и пространство $U_1(t) = \ker B_0(t)$ определены инвариантным образом и совпадают во всех системах координат. Очевидно форма $B_0(t)$ зависит гладко от t . Подпространство $U_1(t)$ зависит от t гладко, так как по предположению теоремы ранг $B_0(t)$ постоянен при $t \in (t_1, t_2)$. Согласно условию Гоха-Кренера форма $B_0(t)$ неположительно определена и, очевидно, симметрична. Далее имеем

¹Гладкая зависимость $U_j(t)$ от t при $\dim U_j(t) = \text{const}$ понимается как обычно: требуется гладкость отображения в грассманиан $U_j : (\tau_0, \tau_1) \rightarrow Gr(d, \dim U_j(t))$.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^j} \mathcal{H} \right\}^* = \left\{ \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \mathcal{H} + \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u^k} \mathcal{H} \right) \right\}^*.$$

Учитывая, что на особой экстремали $\left\{ \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* \equiv 0$ для любого $m \geq 0$, получаем в ограничении на $U_1(t)$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^j} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_1(t)} = \left\{ \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_1(t)}.$$

Итак, билинейная форма $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_1(t)}$ определена инвариантным образом, независимо от выбора системы координат. Поэтому выбрав линейный базис в U согласовано с флагом $U_1(t) \subseteq U_0(t)$ по теореме 2.1 Гоха-Кренера получаем, что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_1(t)} \equiv 0.$$

Продолжая по индукции на r -ом шаге получим:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{d^r}{dt^r} \frac{\partial}{\partial v^j} \mathcal{H} \right\}^* = \left\{ \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{d^{r-s}}{dt^{r-s}} \frac{\partial}{\partial u^k} \mathcal{H} \right) \right\}^*. \quad (2.5)$$

Учитывая выше приведенные соображения, при четном $r = 2h$ мы получим корректность определения формы $B_h(t)$ на $U_h(t)$, их гладкую зависимость от t , а также симметричность и неположительную определенность формы $B_h(t)$. На нечетном шаге $r = 2h + 1$ получим, что

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2h+1}}{dt^{2h+1}} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\}^* \Big|_{U_{h+1}(t)} \equiv 0.$$

□

Итак, максимальный набор необходимых условий из теоремы Гоха-Кренера записывается в инвариантной форме следующим образом:

$$B_h(t) = (-1)^h \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \right\} \Big|_{U_h(t)} \leq 0$$

Для приведенного в предыдущем параграфе примера 2.1 в «неудачных» координатах v_i мы получим $U_0(t) = U_1(t) = U$ и $U_2(t) = \text{span}((\sin t, \cos t))$, что в точности соответствует «правильному» направлению вариаций второго порядка u_2 . Таким образом, подпространство $U_h(t)$ следует воспринимать как «подпространство направлений, по которым порядок особой траектории не меньше h ».

Дадим точное определение порядка особой экстремали вдоль меняющегося со временем направления $\xi(t) \in U$. Пролонгируем систему (2.1) по направлению $\xi(t)$. Для этого рассмотрим систему с одномерным управлением $v \in \mathbb{R}$:

$$K(t, q, p, v) = \mathcal{H}(t, q, p, u^*(t) + v\xi(t)), \text{ где } v \in \Omega_\xi(t) \subseteq \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Отметим, что $v \in \Omega_\xi(t)$, где множество $\Omega_\xi(t) \subseteq \mathbb{R}$ выбирается так, что $u^*(t) + v\xi(t) \in \Omega$. Более того 0 является внутренней точкой $\Omega_\xi(t)$ при любом t . Траектория $q^*(t), p^*(t)$ и $v^*(t) = 0$ очевидно минимизирует исходный функционал.

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial v} K = \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}(\xi(t)) = 0$ при $v = 0$. Более того

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathcal{H} \right\}^* = B_0(t)(\xi(t), \xi(t)).$$

Поэтому управление $v^*(t) = 0$ является особым на промежутке (t_0, t_1) , только если $\xi(t) \in \ker B_0(t) = U_1(t)$ при всех $t \in (t_1, t_2)$. Аналогично, управление $v^*(t) = 0$ является особым с локальным порядком h , если $\xi(t) \in U_h(t)$ при всех $t \in (t_1, t_2)$ и $\xi(t) \notin U_{h+1}(t)$ для некоторого $t \in (t_0, t_1)$. Такое возможно, только если $U_h(t) \neq U_{h+1}(t)$.

Определение 2.2. Будем называть локальным порядком направления $\xi(t)$ наибольшее число $h \in \overline{\mathbb{Z}_+}$ такое, что $\xi(t) \in U_h(t)$ при всех $t \in (t_1, t_2)$.

Структура флага $U_h(t)$ определяет локальные порядки кривых $\xi(t)$. Нетривиальные кривые с бесконечным локальным порядком существуют только когда все формы $B_h(t)$ вырождаются при h больше некоторого h_0 , и при этом $U_{h_0}(t)$ имеет ненулевую размерность.

Определение 2.3. Предположим, что размерности подпространств $U_h(t)$ постоянны при $t \in (t_1, t_2)$ (или, что равносильно, ранги форм $B_h(t)$ постоянны). Тогда локальным порядком экстремали $q^*(t), u^*(t)$ называется последовательность неотрицательных целых чисел $(h_0, h_1, h_2, \dots)$, где

$$h_s = \text{rk } B_s(t)|_{U_s(t)} = \dim U_s(t) - \dim U_{s+1}(t).$$

Данное определение локального порядка особой траектории совпадает с классическим определением при $d = 1$. А именно, если локальный порядок в классическом смысле равен h , то в смысле определения 2.3 порядком будет $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где 1 стоит на h -ом месте.

2.4 Флаг глобальных порядков для систем, аффинных по многомерному управлению

В одномерном случае ($d = 1$) классические условия сопряжения неособой траектории с особой формулируются в терминах глобального порядка всей системы (2.1) в окрестности особой траектории (см. [23]). В главе 1 было показано (см. теорему 1.4), что наличие глобального порядка можно заменить более общим (и, соответственно, более слабым) требованием натурального порядка. В этом параграфе мы построим обобщение условий сопряжения для задач с многомерным управлением (при $d > 1$). Для этого нам потребуется определение флага пространств отвечающих глобальным порядкам.

В этом параграфе мы проведем процедуру построения глобального порядка, аналогичную переходу с локального порядка на глобальный в одномерном случае $d = 1$.

Условие $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$ выполнено на особой экстремали, но, вообще говоря, нарушается в ее окрестности. Поэтому форма $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H}$ не является корректно определенной квадратичной формой в касательном пространстве $T_{u^*(t)}U$. С другой стороны, если по каким-либо причинам нам разрешены только линейные (а точнее аффинные) замены координат в пространстве U , то мы можем корректно определить $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathcal{H}$.

Предположим, что система (2.1) аффинна по u , то есть $\mathcal{H}$ зависит от u аффинно:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, q, p, u) &= H(t, q, p) + \langle G(t, q, p), u \rangle; \\ \begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial}{\partial p} H + \langle \frac{\partial}{\partial p} G, u \rangle; \\ \dot{p} &= -\frac{\partial}{\partial q} H - \langle \frac{\partial}{\partial q} G, u \rangle. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции $H : [t_0; t_1] \times V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : [t_0; t_1] \times V \times V^* \rightarrow U^*$ предполагаются гладкими.

Для того, чтобы сохранить аффинность системы (2.7) по u мы должны потребовать, чтобы замены координат в U были аффинными. При этом, они могут гладко меняться в зависимости от t .

Очевидно, что $B_0(t, q, p) = \frac{\partial}{\partial u} G(t, q, p) \equiv 0$ для всех (t, q, p) , и $U_1(t, q, p) = U$. При однократном дифференцировании по t по теореме 2.2 получаем, что форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} G(t, q, p)$ должна обращаться в 0 на особой траектории. Для глобального порядка мы, естественно, должны потребовать, чтобы форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} G(t, q, p)$ обращалась в 0 в целой окрестности особой траектории.

Так как $\frac{d}{dt} G$ не зависит от u , то $B_1(t, q, p) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} G(t, q, p)$. По теореме 2.2 эта форма не отрицательно определена на особой траектории. Более того, как отмечалось выше, мы будем считать, что форма $B_1(t, q, p)$ имеет на особой траектории постоянный ранг. Для глобального порядка мы, естественно, должны потребовать, чтобы форма $B_1(t, q, p)$ была симметрической не отрицательно определенной и имела постоянный ранг в окрестности особой траектории. Тогда $U_2(t, q, p) = \ker B_1(t, q, p)$. Так как $B_1(t, q, p)$ имеет постоянный ранг, то U_2 гладко зависит от (t, q, p) .

Вообще говоря, $\frac{d^2}{dt^2} G$ зависит от u , но $\frac{d^2}{dt^2} G|_{U_2(t, q, p)}$ уже от u не зависит. Поэтому корректно определена форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^3}{dt^3} G(t, q, p)|_{U_2(t, q, p)}$, которая по теореме 2.2 должна обращаться в 0 на особой оптимальной траектории. Для того, чтобы определить глобальный порядок мы должны потребовать, чтобы форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^3}{dt^3} G(t, q, p)|_{U_2(t, q, p)}$ обращалась в 0 в некоторой окрестности особой траектории и так далее.

Определение 2.4. Предположим, что для аффинной по управлению системы (2.7) в некоторой открытой области $Z \subseteq \mathbb{R} \times V \times V^*$ формы $(-1)^{h+1} B_h(t, q, p)$ являются симметрическими не отрицательно определенными и имеют постоянный ранг и

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2h+1}}{dt^{2h+1}} G(t, q, p) \Big|_{U_{h+1}(t, q, p)} = 0.$$

В этом случае мы будем говорить, что система (2.7) имеет глобальный порядок $(h_1, h_2, \dots)$, где

$$h_s = \text{rk } B_s(t, p, q) \Big|_{U_s(t, p, q)} = \dim U_s(t, p, q) - \dim U_{s+1}(t, p, q).$$

Отметим, что данное выше определение может отличаться от классического определения глобального порядка ($d = 1$). Точнее, стандартное определение глобального порядка в одномерном случае не требует условия постоянного ранга, если обобщенное условие Лежандра-Клебша не является усиленным. Однако, выполнение усиленного обобщенного условия Лежандра-Клебша влечет за собой условие постоянного ранга. Другими словами, мы исключаем из рассмотрения атипичные особые экстремали. В этом случае определение 2.4 при $d = 1$ совпадает с классическим. В любом случае теорема о сопряжении особой экстремали с неособой требует выполнения усиленного условия Лежандра-Клебша [23].

Теорема 2.3. Если аффинная по управлению система (2.7) имеет глобальный порядок $(h_1, h_2, \dots)$ в некоторой области, то формы $B_h(t, q, p)$ и подпространства $U_h(t, q, p)$ определены инвариантно относительно выбора аффинных координат в U вида $u^i = u^i(t)$.

Доказательство. Все выкладки проводятся аналогично теореме 2.2. Разница заключается лишь в том, что в сумме (2.5) нужные слагаемые обнуляются не за счет сомножителя $\frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial}{\partial u^i} \mathcal{H}$, а за счет сомножителя $\frac{\partial}{\partial u^l} \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial u^k}{\partial v^j}$ □

Отметим, что если система (2.7) имеет в некоторой области глобальный порядок, то мы можем определить глобальный порядок по направлению $\xi(t) \in U$ вдоль произвольной (не обязательно особой) траектории $q(t), p(t)$, $t \in (t_1, t_2)$: это максимальное h такое, что $\xi(t) \in U_h(t, q(t), p(t))$ при $t \in (t_1, t_2)$.

2.5 Условия сопряжения неособой траектории с особой

В одномерном случае ($d = 1$) невозможно регулярное сопряжение неособой траектории с особой (см. ниже определение 2.5), если система имеет четный натуральный порядок (см. теорему 1.4). В случае $d > 1$ порядок в пространстве U зависит от флага $U_h(t, q, p)$. Поэтому условия сопряжения естественно формулируются в терминах флага порядков.

Определение 2.5. Пусть $u^*(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ – управление на особой траектории, которая сопрягается (стыкуется) в некоторой точке τ с неособой траекторией с управлением $\tilde{u}(t)$. Тогда сопряжение называется регулярным, если

1. Особое управление $u^*(t)$ гладко зависит от t в окрестности τ ;
2. Неособое управление $\tilde{u}(t)$ гладкое в односторонней окрестности² τ и непрерывно в самой точке τ .

Отметим, что невозможность регулярной стыковки неособой траектории с особой не является лишь следствием уравнений принципа максимума Понтрягина. Например в работах [43, 44] доказано, что в многомерной задаче поиска (при некоторых предположениях на структуру задачи)

²При сходе с особой траектории управление $\tilde{u}(t)$ должно быть гладким в $(\tau; \tau + \varepsilon)$, а при выходе на особую траекторию, то на $(\tau - \varepsilon; \tau)$.

оптимальные траектории содержат сложную особенность при начале движения. А именно: оптимальная траектория за любой сколь угодно малый промежуток времени должна покинуть любой выпуклый конус с вершиной в точке начала движения. При этом оптимальная траектория в задачах поиска обязана существовать (доказательство теоремы существования см. в [45]). В случае поиска на прямой, оптимальные траектории содержат счетное число переключений при начале движения. Однако асимптотика точек переключения принципиально отличается от асимптотики в задаче Фуллера.

Теорема 2.4. Пусть для аффинной по управлению системы (2.7) определен глобальный порядок в окрестности особой на промежутке (t_0, t_1) экстремали $q^*(t)$, $p^*(t)$, $u^*(t)$. Предположим, что особая экстремаль $q^*(t)$, $p^*(t)$, $u^*(t)$ регулярно сопрягается с неособой $\tilde{q}(t)$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{u}(t)$ в некоторой точке $\tau \in (t_1, t_2)$. Если выполнено усиленное обобщенное условие Лежандра-Клебша

$$(-1)^h \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \Big|_{(\tau, q^*(\tau), p^*(\tau))} [\tilde{u}(\tau) - u^*(\tau); \tilde{u}(\tau) - u^*(\tau)] < 0, \quad (2.8)$$

где $h < \infty$ – глобальный порядок направления $\tilde{u}(t) - u^*(t)$, то h нечетно.

Из этой теоремы мы немедленно получаем

Следствие 2.1. Если в окрестности особой траектории система (2.7) имеет глобальный порядок $(h_1, h_2, \dots)$, такой, что

$$\begin{cases} h_{2s+1} = 0 & \forall s; \\ \sum_{s=1}^{\infty} h_{2s} = d = \dim U; \end{cases}$$

и выполнено условие (2.8), то регулярное сопряжение особой траектории с неособой в этой окрестности не оптимально³.

Доказательство теоремы 2.4. Без ограничения общности мы будем считать, что сопряжение особой траектории с неособой происходит справа, то есть $\tilde{u}(t)$ определено при $t \in (\tau, \tau + \varepsilon)$.

Теорема доказывается от противного: предположим, что глобальный порядок направления $u^*(t) - \tilde{u}(t)$ на промежутке $(\tau, \tau + \varepsilon)$ является четным $h = 2r$. Рассмотрим вектор $\xi(t) = u^*(t) - \tilde{u}(t)$ как элемент пространства $T_{\tilde{u}(t)}U$.

Зафиксируем на U какую-нибудь евклидову структуру, и сделаем замену координат: $v \in \mathbb{R}$, $v^\perp \in \mathbb{R}^{d-1}$ и

$$u = u^*(t) + v \xi(t) + \xi^\perp(t) v^\perp,$$

где $\xi^\perp(t) : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow U$ линейное невырожденное отображение, гладкое по t , и $\text{Im } \xi^\perp(t) \perp \xi(t)$. В данной системе координат, управление $v = 0$, $v^\perp = 0$ является особым, а управление $v = 1$, $v^\perp = 0$ соответствует неособому. Гамильтониан $\mathcal{H}$ запишется в виде

³То есть, если неособое управление $\tilde{u}(t)$ гладко зависит от t в односторонней окрестности τ , то $\tilde{u}(t)$ имеет разрыв второго рода в точке τ .

$$\mathcal{H} = G(t, q, p) + H^v(t, q, p)v + H^\perp(t, q, p)v^\perp. \quad (2.9)$$

Продифференцируем H^v по траекториям гамильтоновой системы (2.9). Тогда $\frac{d^k}{dt^k}H^v$ при $k < 2h$ может зависеть от $v^\perp, \dot{v}^\perp$ и т.д., но не зависит от v , так как $\xi(t) \in U_k(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t))$ при $k < 2h$. Так как h чётно, учитывая (2.8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} H^v(\tau, q^*(\tau), p^*(\tau)) = B_h(\tau, q^*(\tau), p^*(\tau)) [\xi(\tau), \xi(\tau)] < 0.$$

Так как это неравенство строгое, то при t близких к τ получаем

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} H^v(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) = B_h(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) [\xi(t), \xi(t)] = \beta(t) < \beta^0 < 0,$$

Значит

$$\left. \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} H^v(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) \right|_{v^\perp=0} = \alpha(t) + \beta(t)v,$$

и

$$\alpha(t) \rightarrow \left. \frac{d^{2h}}{dt^{2h}} H^v(\tau, q^*(\tau), p^*(\tau)) \right|_{v^\perp=0} = 0 \text{ при } t \rightarrow \tau + 0.$$

Таким образом, на неособом участке экстремали, где $v = 1$, получаем

$$H^v(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) = \frac{1}{(2h-1)!} \int_\tau^t (\alpha(s) + \beta(s))(t-s)^{2h-1} ds,$$

так как все начальные условия $\frac{d^k}{dt^k} H^v(\tau, \tilde{q}(\tau), \tilde{p}(\tau)) = \frac{d^k}{dt^k} H^v(\tau, q^*(\tau), p^*(\tau))$ обнуляются при $k < 2h$ (это связано с тем, что разрыв производной $\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{H}$ может появиться только на $2h$ -ом шаге, когда впервые начинает зависеть от v). Итак

$$H^v(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) < 0$$

при t достаточно близких к τ , чего не может быть, так как противоречит принципу максимума. Действительно, произведение $H^v(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t))v$ должно достигать максимума при $v = 1$. $\square$

2.6 Оптимальное управление в виде обмотки клиффордова тора

В этом и следующем параграфах будет изучен класс задач, в которых, с одной стороны, сопряжение особых оптимальных траекторий с неособыми неизбежно (по теореме 3.1 в главе 3), а, с другой стороны, теорема 2.4 (см. [40]) запрещает регулярное сопряжение.

Рассмотрим оптимизационную задачу⁴

⁴Множитель $\frac{1}{2}$ конечно можно отбросить — он ни на что не влияет. Однако он удобен в дальнейших вычислениях.

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle x, Cx \rangle dt \rightarrow \min \quad (2.10)$$

на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} x^{(h)} &= u, \quad |u| \leq 1, \quad x \in U, \quad u \in U; \\ x^{(k-1)}(0) &= q_k^0, \quad \text{при } 1 \leq k \leq h. \end{aligned}$$

Здесь U – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а C – некоторая симметрическая билинейная форма. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2h - 1$ производными. Управление $u(t) \in L_\infty(0; +\infty)$ – измеримая функция.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – собственные числа формы C , а $U_1, \dots, U_s$ – соответствующие собственные подпространства. Очевидно, что если хоть одно из собственных чисел отрицательно, то минимум задачи равен $-\infty$. Поэтому будем считать, что форма C неотрицательно определена. Если $\dim \ker C \neq 0$, то при проектировании $U \rightarrow U / \ker C$, значение функционала $J(x)$ не изменяется. Поэтому оптимальные траектории задачи с $\dim \ker C \neq 0$ находятся тривиально из решений аналогичной задачи в $U / \ker C$ взятием прообраза. Поэтому будем считать, что форма C положительно определена. В этом случае у данной задачи решение существует и единственно (см. теорему 3.1).

Нетрудно доказать следующую теорему (подробнее см. [40, 41]):

Теорема 2.5 (М.И. Зеликин и Л.В. Локуциевский). *Если $L = \text{span}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_h^0)$ лежит в некотором собственном подпространстве U_j формы C , то оптимальная траектория задачи (2.10) остается в L в течение всего времени.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу, являющуюся ограничением задачи (2.10) на подпространство L . Это означает, что допустимыми управлениями будут служить измеримые функции $u(t) \in L$, $|u| \leq 1$, допустимые траектории лежат в подпространстве L , функционал остается прежним. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования $\pi : \mathbb{U} \rightarrow L$. Пусть $x(t)$ любая допустимая траектория, с начальными данными в подпространстве L . Тогда траектория $\pi x(t)$ с управлением $\pi u(t)$ является допустимой траекторией во вспомогательной задаче. Поскольку форма C неотрицательно определена ($C \succeq 0$), и $L \subseteq U_j$, то

$$\int_0^\infty \langle x, Cx \rangle dt \geq \int_0^\infty \langle \pi x, C\pi x \rangle dt.$$

Существование и единственность решения задачи (2.10) и вспомогательной задачи (см. теорему 3.1) означают, что оптимальная траектория задачи (2.10) лежит в L .

□

Легко видеть, что если форма C положительно определена (как было сказано, только такие задачи интересны для рассмотрения), то в данной задаче есть равно одна особая экстремаль $x = u = 0$ и ее глобальный порядок (по определению 2.4) есть последовательность $(0, \dots, 0, \dim U, 0, \dots)$ где

$\dim U$ стоит на h -ом месте (подробнее см. [40, 41]). Значит, если h четно, то по теореме 2.4 регулярное сопряжение неособой траектории с особой $x = u = 0$ не оптимально. С другой стороны, теорема 3.1 (см. главу 3) гарантирует, что при любых начальных данных $q^0 = (q_1^0, \dots, q_h^0)$ существует и единственное оптимальное решение задачи (2.10) и оно попадает в начало координат за конечное время $T(q^0)$. Таким образом, интересным для исследования представляется следующий вопрос: каким образом оптимальные траектории в задаче (2.10) могут выходить в начало координат.

В этом параграфе будут найдены некоторые явные решения задачи (2.10) (лежащие в интегральной воронке точки $x = 0$), оптимальное управление в которых движется вдоль некоторой обмотки клиффордова тора, вложенного в сферу $|u| = 1$, а оптимальная траектория является обобщенной логарифмической спиралью, порожденной этой обмоткой. В следующем параграфе мы покажем, что для некоторых h найденная обмотка на самом деле является иррациональной и, следовательно, всюду плотна в клиффордовом торе. Для остальных h вопрос об иррациональности остается открытым.

Для того, чтобы выделить большую нетривиальную группу симметрий задачи (2.10) выпишем систему принципа максимума. Положим

$$q_1 = x, \dot{q}_1 = q_2, \dots, \dot{q}_{h-1} = q_h$$

В теореме 3.2 (см. главу 3) доказано, что $\lambda_0 \neq 0$. Положив $\lambda_0 = 1$, получаем, что гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид $(p_1, \dots, p_h - \text{сопряженные переменные})$

$$H = -\langle Cq_1, q_1 \rangle + \langle p_1, q_2 \rangle + \dots + \langle p_h, u \rangle.$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = Cq_1; \dot{p}_2 = -p_1; \dots, \dot{p}_h = -p_{h-1}; \quad \text{и} \quad u = \frac{p_h}{|p_h|}, \quad \text{если} \quad p_h \neq 0.$$

Вид этой системы сильно упростится, если обозначить

$$z_k = (-1)^{h-k} p_{h-k+1} \text{ и } z_{h+k} = Cq_k \text{ при } k \leq h. \quad (2.11)$$

Тогда $x = C^{-1}z_{h+1}$ и

$$\dot{z}_1 = z_2; \dot{z}_2 = z_3; \dots; \dot{z}_{2h} = Cu; \quad u = (-1)^{h+1} \frac{z_1}{|z_1|}. \quad (2.12)$$

Данная система обладает следующими симметриями:

1. Группа $G_1 = SO(U_1) \times SO(U_2) \times \dots \times SO(U_s) \subseteq SO(U)$ действует на z_k и u одновременными поворотами и переводит векторы скоростей (а значит и решения) системы (2.12) в себя.

2. Группа $G_2 = \mathbb{R}_+$ действует масштабированием: пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$ тогда $z_k \mapsto \lambda^{2h-k+1} z_k$. На самом деле, вектор скорости системы (2.12) удлинняется в λ раз при этом действии. Однако, интегральные кривые по-прежнему переходят в интегральные кривые (только скорость движения по ним возрастает в λ раз).

Ключевую роль в отыскании траекторий, в виде логарифмической спирали, моделирующих движение вдоль иррациональной обмотки клиффордова тора будет играть следующий многочлен:

$$P_h(\alpha) = (2h + i\alpha)((2h - 1) + i\alpha) \dots (1 + i\alpha). \quad (2.13)$$

и корни $\alpha_j > 0$ его мнимой части, при которых действительная часть имеет нужный знак:

$$\operatorname{Im} P_h(\alpha_j) = 0, \quad (-1)^{h+1} \operatorname{Re} P_h(\alpha_j) > 0, \quad \alpha_j > 0. \quad (2.14)$$

Будем считать, что $\dim U_j \geq 2$ при всех j .

Теорема 2.6 (М.И. Зеликин и Л.В. Локуцкий). Рассмотрим любой набор двумерных плоскостей $L_m \subseteq U_{k_m}$, $m = 1, \dots, N$, где U_{k_m} – какие-то различные⁵ собственные подпространства формы C . Если набор собственных значений $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_N}$ формы C удовлетворяет условию

$$\frac{P_h(\alpha_{j_1})}{\lambda_{k_1}} = \frac{P_h(\alpha_{j_2})}{\lambda_{k_2}} = \dots = \frac{P_h(\alpha_{j_N})}{\lambda_{k_N}} = \mu.$$

для каких-то (различных) $\alpha_{j_m} > 0$ из (2.14), то любая траектория вида⁶

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{m=1}^N t^{2h} \exp\{\pm i\alpha_{j_m} \ln |t|\} y_m, \\ u &= \mu \sum_{m=1}^N \exp\{\pm i\alpha_{j_m} \ln |t|\} y_m, \end{aligned} \quad (2.15)$$

является оптимальной для задачи (2.10) при любом выборе ненулевых векторов $y_m \in L_m$, для которых выполняется условие

$$\mu^2 \sum |y_m|^2 = 1.$$

Более того, таким способом описываются все возможные (с точностью до сдвига по времени) оптимальные траектории задачи (2.10), не покидающие какую-либо фиксированную орбиту группы $G = G_1 \times G_2$.

Отметим, что в решениях (2.15) управление движется по обмотке клиффордова тора

$$\mathbb{T}^N = \left(L_1 \cap \{|u| = \mu|y_1|\} \right) \times \dots \times \left(L_N \cap \{|u| = \mu|y_N|\} \right)$$

⁵Случай $N = 1$ не исключается. В этом случае подойдет любое собственное значение λ_j формы C , лишь бы $\dim U_j \geq 2$.

⁶Если L – это двумерная плоскость, то через $\exp\{a \pm \phi i\} = e^a (\cos \phi \pm i \sin \phi)$ обозначено растяжение в e^a раз и поворот на угол ϕ на L в заранее выбранной ориентации.

проходит ее целиком⁷ за конечное время. Сама траектория $x(t)$ представляет собой соответствующую логарифмическую спираль, которая тоже проходится за конечное время.

Доказательство теоремы 2.6. Поскольку задача (2.10) является выпуклой, то принцип максимума является также и достаточным условием оптимальности (см. теорему 3.3). Таким образом, любая траектория принципа максимума, приходящая в начало координат является оптимальной.

Без ограничения общности будем считать, что базис в U согласован с разложением $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$, т.е. $z = (w^1, \dots, w^s)$, где $z \in U$ и $w^j \in U_j$. Действие группы G на z_k определяет представление

$$\varphi : G = \mathbb{R}_+ \times SO(U_1) \times SO(U_2) \times \dots \times SO(U_s) \rightarrow \prod_{j=1}^{2h} GL(U),$$

$$\varphi(\lambda, M_1, \dots, M_s)z_k = \lambda^{2h-k+1}(M_1 w_k^1, \dots, M_s w_k^s) \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R}_+, M_j \in SO(U_j) \text{ и } k \leq 2h.$$

По теореме существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральная кривая системы (2.12) не покинет одной фиксированной орбиты орбиты группы Ли G , если и только если в начальной точке $z = (z_1, \dots, z_{2h})$ вектор скорости системы (2.12) касается этой орбиты. Это в точности означает, что

$$(z_2, \dots, z_{2h}, (-1)^{h+1} \frac{Cz_1}{|z_1|}) \in d\varphi(T_e G).$$

Здесь $T_e G$ – касательное пространство к группе Ли G , то есть алгебра Ли $\mathbb{R} \oplus so(U_1) \oplus \dots \oplus so(U_s)$, где $so(U_j)$ – алгебра Ли кососимметрических 2-форм на U_j . Вычислив $d\varphi$, получаем, что для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{m}_j \in so(U_j)$ выполняется

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ (-1)^{h+1} \frac{Cz_1}{|z_1|} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2hz_1 \\ (2h-1)z_2 \\ \dots \\ z_{2h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{m}z_1 \\ \mathfrak{m}z_2 \\ \dots \\ \mathfrak{m}z_{2h} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Здесь $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s)$. Заметим, что $a \neq 0$, так как в противном случае уравнение (2.16) имеет только тривиальное решение $z_k = 0$. Заменяя $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}/a$ получаем

$$(-1)^{h+1} \frac{z_1}{a^{2h}|z_1|} = C^{-1}(2h + \mathfrak{m})((2h-1) + \mathfrak{m}) \dots (1 + \mathfrak{m})z_1 = C^{-1}Q(\mathfrak{m})z_1 \quad (2.17)$$

Поскольку на z_1 еще можно подействовать масштабной группой, то остается найти все такие матрицы $\mathfrak{m} \in so(U_1) \oplus \dots \oplus so(U_s)$, чтобы у оператора, стоящего в правой части (2.17) было действительное собственное значение знака $(-1)^{h+1}$. Итак, пусть $z = (w^1, \dots, w^s)$ – собственный вектор оператора $C^{-1}Q(\mathfrak{m}) = C^{-1}(2h + \mathfrak{m})((2h-1) + \mathfrak{m}) \dots (1 + \mathfrak{m})$ с собственным значением μ знака $(-1)^{h+1}$. Тогда

⁷Точнее ту ее половину, что соответствует положительному направлению времени

$$Q(\mathfrak{m}_j)w_j = (2h + \mathfrak{m}_j)((2h - 1) + \mathfrak{m}_j) \dots (1 + \mathfrak{m}_j)w_j = \mu\lambda_j w_j \quad (2.18)$$

Таким образом, либо $w_j = 0$, либо w_j – собственный вектор оператора $Q(\mathfrak{m}_j)$. Исследуем собственные значения оператора из предыдущего равенства. Используя теорему о приведении кососимметрической формы к нормальному виду, можно считать, что матрицы $\mathfrak{m}_j$ имеют вид⁸

$$\mathfrak{m}_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_1^j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2^j & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2^j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_r^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_r^j & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку собственные значения блочно-диагональной матрицы есть собственные значения ее блоков, то вопрос сводится к вычислению собственных значений матрицы ранга 2. Зафиксируем произвольную двумерную плоскость $L_j \subset U_j$ (и ориентацию на ней). Воспользовавшись комплексной структурой на L_j получаем, что многочлен⁹ $P_h(\alpha)$ из (2.13) имеет мнимую часть равную 0. Итак, уравнение (2.18) на плоскости L_j с учетом знаков переписывается в виде системы (2.14), а вектор w_j должен быть собственным вектором оператора $Q(\mathfrak{m}_j)$ с собственным значением $P_h(\alpha)$ для некоторого α из (2.14). Отсюда немедленно получаем, что для этого α с необходимостью $P_h(\alpha) = \mu\lambda_j$.

Пусть теперь $z = (w^1, \dots, w^s)$ – набор из векторов w_j , каждый из которых либо является собственным вектором оператора $Q(\mathfrak{m}_j)$, либо нулевой. Таким образом, вектор z является собственным вектором исходного оператора $C^{-1}Q(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда

$$\mu = \frac{P_h(\alpha_{j_1})}{\lambda_{j_1}} = \frac{P_h(\alpha_{j_2})}{\lambda_{j_2}} = \dots = \frac{P_h(\alpha_{j_N})}{\lambda_{j_N}},$$

где $j_1, \dots, j_N$ – номера ненулевых w_j . Если обозначить $w_{j_m} = y_m$, где y_m – ненулевые вектора, то мы получим траектории, заявленные в формулировке теоремы. Осталось сказать, что условие $\mu^2 \sum |y_m|^2 = 1$ следует из того, что $1 = |u|^2 = \mu^2 \sum |y_m|^2$. $\square$

На каждой оптимальной траектории (2.15) управление проходит обмотку клиффордова тора

$$\mathbb{T}^N = (L_1 \cap \{|u| = \mu|y_1|\}) \times \dots \times (L_N \cap \{|u| = \mu|y_N|\}).$$

Более того, она выходит за конечное время на особый режим $x = u = 0$. Тор $\mathbb{T}^N$ вложен в сферу $S^{n-1} = \{|u| = 1\} \subseteq U$ единичного радиуса. Более того, если значения $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_N}$ несоизмеримы над $\mathbb{Q}$, то полученная обмотка тора $\mathbb{T}$ является всюду плотной.

⁸Последний двумерный блок в матрице $\mathfrak{m}_j$ заменяется одномерным 0, если $r = \dim U_j$ нечетно.

⁹Можно считать, что $1 \in \mathbb{C}$ – это единичная 2×2 матрица, а $i \in \mathbb{C}$ – матрица 2×2 с 1 и -1 на побочной диагонали.

Количество решений в (2.14) нетрудно вычислить:

Предложение 2.1. *Условие (2.14) имеет ровно $\left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$ решений, и они попарно различны.*

Доказательство. Каждый из сомножителей в формуле (2.13) является комплексным числом, аргумент которого при росте α от 0 до $+\infty$ монотонно возрастает от 0 до $\pi/2$. Следовательно, аргумент их произведения монотонно возрастает от 0 до πh . При этом, если h четно, то он $[h/2]$ раз пересекает отрицательную часть действительной оси, а если h нечетно, то он $[h/2]$ раз пересекает положительную часть действительной оси. $\square$

2.7 Применение теории Галуа для доказательства иррациональности обмотки клиффордова тора

В статье [41] доказано, что в задаче (2.10) при $h \leq 15$ возникают семейства оптимальных траекторий с управлением в виде иррациональной всюду плотной обмотки тора. Положительный ответ на вопрос о линейной независимости корней $\{\alpha_j\}_{j=1}^{[h/2]}$ полинома (2.13) над полем рациональных чисел для произвольного h позволит получить описанную картину с иррациональной обмоткой любого k -мерного тора.

Заметим, что многочлен $P_h(\alpha)$ имеет очень специфичную природу коэффициентов. Это дает нам смелость высказать следующую гипотезу.

Гипотеза 2.1 (см. [40, 72]). *Решения $\{\alpha_j\}_{j=1}^{[h/2]}$ ключевого условия (2.14) линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Приведем простое доказательство этой гипотезы для случаев $h = 2, 3, 4$ и построим явные решения при этих h .

Пример 2.2 (А.А. Милютин и С.В. Чуканов [39], М.И. Зеликин и В.Ф. Борисов [32]). Пусть $h = 2$, тогда есть единственный решение (2.14) $\alpha = \sqrt{5}$. Находим экстремали:

$$x = \frac{1}{126}(4 \pm i\alpha)(3 \pm i\alpha)t^2 \exp\{\pm i\alpha \ln |t|\}, u = \exp\{\pm i\alpha \ln |t|\} \quad (2.19)$$

Поскольку $\ln |t| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, то управление совершает счетное число оборотов по окружности S^1 за конечное время. При этом $x \rightarrow 0$ и траектория выходит на особый режим. Траекторией в конфигурационном пространстве служит логарифмическая спираль. В отличие от траекторий особой точки типа фокуса для обыкновенных дифференциальных уравнений, кривая подходит к началу координат за конечное время, совершая счетное число оборотов.

В случай $h = 3$ также есть ровно один корень в (2.14), и поэтому этот случай ничем принципиально не отличается от случая $h = 2$.

Пример 2.3 (М.И. Зеликин и Л.В. Локуциевский). Разберем подробно случай $h = 4$. Если начальные векторы $\{q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0\}$ лежат на одной прямой $l \subset U_j$, то, в соответствии с теоремой 2.6, вопрос сводится к решению одномерной задачи типа Фуллера четвертого порядка. В этом случае в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$ имеются два автомодельных семейства оптимальных траекторий, ведущих в начало координат со счетным числом переключений на конечном интервале времени (см. [32]). В конфигурационном пространстве все эти оптимальные траектории не покидают какой-либо прямой l . Если же начальные векторы в задаче (2.10) принадлежат некоторой двумерной плоскости $L \subset U_j$, то возникает двумерная задача типа Фуллера четвертого порядка. Согласно (2.13) имеем

$$\operatorname{Im} P_4(\alpha) = \alpha(109584 - 67284\alpha^2 + 4536\alpha^4 - 36\alpha^6) = 0.$$

$$\operatorname{Re} P_4(\alpha) = 40320 - 118124\alpha^2 + 22449\alpha^4 - 546\alpha^6 + \alpha^8 < 0;$$

Получаем $\alpha_1^2 \cong 1,86$; $\alpha_2^2 \cong 109,13$. Корни $\alpha_3^2 \cong 15,01$ и $\alpha_4 = 0$ лишние, так как для них нарушается неравенство $\operatorname{Re} P_4(\alpha) < 0$. Итак, $A_1 \cong 78 \cdot 10^{-7}$; $A_2 \cong 32 \cdot 10^{-9}$. Оптимальные управления и решения системы (2.12) имеют вид (если соответствующее собственное значение λ_j равно 1):

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(\alpha_1 i \ln |t|), & u_2 &= \exp(\alpha_2 i \ln |t|); \\ z_1^1 &= A_1 t^8 \exp(\alpha_1 i \ln |t|), & z_1^2 &= A_2 t^8 \exp(\alpha_2 i \ln |t|). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим исходную задачу (2.10) при $h = 4$, когда начальные условия не лежат в одной двумерной плоскости $L \subset U_j$. Построим, используя найденные явные решения в пространствах U_j , оптимальные траектории не лежащие в собственных подпространствах U_j .

Пусть решения z_1^1 и z_1^2 из (2.20) лежат в разных собственных подпространствах U_1 и U_2 , отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_2 формы C . Рассмотрим их линейную комбинацию: пусть $L_j, j = 1, 2$ – двумерные плоскости в U_j , а y_j – два фиксированных ненулевых вектора в L_1 и L_2 . Тогда

$$z_1 = t^8 \exp(\alpha_1 i \ln |t|) y_1 + t^8 \exp(\alpha_2 i \ln |t|) y_2. \quad (2.21)$$

Определим $z_j, j \geq 2$ так, чтобы z_1 удовлетворяло всем уравнениям системы (2.12) кроме, возможно, последнего. Для того, чтобы удовлетворялось последнее уравнение, длины векторов y_1 и y_2 должны быть такими, чтобы при любом t выполнялось равенство

$$\begin{aligned} z_1^{(2h)} &= P_4(\alpha_1) \exp(\alpha_1 i \ln |t|) y_1 + P_4(\alpha_2) \exp(\alpha_2 i \ln |t|) y_2 = \\ &= -\frac{\lambda_1}{\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}} \exp(\alpha_1 i \ln |t|) y_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}} \exp(\alpha_2 i \ln |t|) y_2 = \\ &= (-1)^{h+1} C \frac{z_1}{|z_1|}. \end{aligned}$$

Поскольку y_1 и y_2 фиксированные линейно независимые векторы, то данное уравнение выполнено при любом t , тогда и только тогда, когда их длины удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \lambda_1 / \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} = -P_4(\alpha_1), \\ \lambda_2 / \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} = -P_4(\alpha_2). \end{cases} \quad (2.22)$$

Как было показано $-P_4(\alpha_j) \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2$. Поэтому, система (2.22) разрешима, если пара собственных значений формы S удовлетворяет соотношению

$$\mu = \frac{P_4(\alpha_1)}{\lambda_1} = \frac{P_4(\alpha_2)}{\lambda_2} = -\frac{1}{\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}} < 0. \quad (2.23)$$

В этом случае задача (2.10) имеет семейство оптимальных траекторий вида (2.21) при $\mu^2(|y_1|^2 + |y_2|^2) = 1$. На каждом таком решении управление проходит обмотку клиффордова тора $\mathbb{T}^2$ и выходит за конечное время на особую экстремаль $x = u = 0$. Тор $\mathbb{T}^2$ вложен в сферу $S^{n-1} \subseteq U$ единичного радиуса и описывается уравнениями

$$|u_1| = \frac{|y_1|}{\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}}, \quad |u_2| = \frac{|y_2|}{\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}}.$$

Более того, если значения α_1 и α_2 несоизмеримы над $\mathbb{Q}$, то полученная обмотка тора $\mathbb{T}^2$ является всюду плотной.

Покажем, что корни α_1 и α_2 линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Для этого докажем более сильное утверждение: покажем, что их квадраты линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Предположим противное: пусть для некоторых рациональных $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ выполнено

$$c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 = 0.$$

Обозначим

$$Q_h(\alpha^2) = \text{Im} P_h(\alpha) / \alpha.$$

Корнями многочлена Q_4 являются α_i^2 , $i = 1, 2, 3$. Легко видеть (простым перебором, или, например, из формулы Кордано), что многочлен Q_4 не имеет рациональных корней. Поскольку $\deg Q_4 = 3$, то он не приводим над $\mathbb{Q}$, и, значит, группа Галуа действует транзитивно на α_1^2 , α_2^2 и α_3^2 (см. [73]). Поэтому

$$c_1 \alpha_i^2 + c_2 \alpha_j^2 + 0 \alpha_k^2 = 0,$$

для любой четной перестановки $(ijk) \in S_3$. Данная линейная система относительно α_i^2 должна иметь нетривиальное решение, что возможно только если $c_1 + c_2 = 0$. Это противоречит тому, что $\alpha_1^2 \neq -\alpha_2^2$.

Итак, мы доказали, что в задаче (2.10) при $h = 4$ возникают семейства оптимальных траекторий с управлением в виде иррациональной всюду плотной обмотки тора, проходимой за конечное время, если (i) некоторая пара собственных значений λ_1 и λ_2 формы C находится в отношении (2.23); и (ii) соответствующие собственные подпространства U_1 и U_2 имеют размерность не меньше двух.

ГЛАВА 3

Оптимальный поток в одном классе нильпотентно-выпуклых задач

В данной главе проведено полное исследование оптимального синтеза в одном классе нильпотентно-выпуклых задач с многомерным управлением. Показано, что синтез оптимальных траекторий образует в фазовом пространстве негладкий правосторонний поток (который разумно называть оптимальным). Оптимальное решение, начинающееся в некоторой точке фазового пространства представляет собой траекторию движения этой точки под действием оптимального потока. Гамильтоновы поднятия оптимальных траекторий в кокасательное расслоение образуют липшицево лагранжево многообразие L . Многообразие L является графиком некоторого согласованного с оптимальным потоком гомеоморфизма, который с точностью до знака совпадает с дифференциалом функции Беллмана.

3.1 Класс нильпотентно-выпуклых задач

В данной главе исследована структура оптимального синтеза в следующем классе нильпотентно-выпуклых задач оптимального управления:

$$\begin{aligned} J(x) = \int_0^{+\infty} f(x(t)) dt &\rightarrow \inf \\ x^{(h)}(t) = u(t); \quad u(t) &\in \Omega; \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными данными

$$x(0) = q_1^0, \quad \dot{x}(0) = q_2^0, \quad \dots, \quad x^{(h-1)}(0) = q_h^0. \quad (3.2)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$; векторы x и u лежат в конечномерном линейном пространстве $U \simeq \mathbb{R}^N$; множество $\Omega \subset U$ является выпуклым и компактным, а начало координат – его внутренняя точка, $0 \in \text{Int } \Omega$; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая неотрицательная выпуклая функция, $f(0) = 0$; а $q^0 = (q_1^0, \dots, q_h^0)$ – произвольные начальные данные.

Основной целью данной главы является построение инструментария для изучения структуры оптимального синтеза в задачах с ограниченным многомерным управлением. Для субримановых задач с неограниченным многомерным управлением существует достаточно обширный арсенал средств, позволяющих исследовать оптимальные траектории, их свойства и асимптотики. На данный момент большое количество субримановых задач решено полностью или по крайней мере частично. С другой стороны, задачи с ограниченным многомерным управлением $u \in \Omega$ традиционно трудны как с точки зрения явного отыскания оптимальных траекторий, так и с точки зрения описания свойств оптимального синтеза.

Основные результаты главы сформулированы в теоремах 3.1 и 3.2, в которых доказано, что оптимальный синтез в задаче (3.1) образует в фазовом пространстве правосторонний поток P^t . Оптимальное решение, начинающееся в произвольной точке представляет собой траекторию движения этой точки под действием потока P^t . Более того, построено согласованное с потоком P^t отображение E , дающее возможность переходить от фазовых переменных $q_k = x^{(k-1)}$ к сопряженным переменным p^k в кокасательном пространстве. Отображение E позволяет изучать оптимальные траектории в терминах сопряженных координат p , которые часто оказываются намного удобнее исходных фазовых координат q (см. например [40, 41, 61, 68]). Дело в том, что управление в принципе максимума Понтрягина определяется из условия $\langle p^h, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}$, и потому легко может быть найдено в терминах сопряженных координат, и не просто выражается в терминах фазовых координат. Особенно важным этот переход становится в задачах с многомерным управлением, когда Ω – это не отрезок, а многомерное выпуклое множество, и рассуждения типа «оптимальная траектория содержит конечное¹ число переключений» не помогают в отыскании оптимальной траектории.

Скажем чуть подробнее о структуре оптимального потока в задаче (3.1). Обозначим $q_k = x^{(k-1)}$. В теоремах 3.1 и 3.2 доказано, что в пространстве $U^h = \{q = (q_1, \dots, q_h)\}$ определено такое действие P^t полугруппы $\mathbb{R}_+$, что траектория $\hat{q}(t) = P^t q^0$ является оптимальной для произвольной начальной точки q^0 . Доказано, что

1. Поток P^t непрерывен, сюръективен и определен корректно, то есть

$$P^0 = \text{id} \quad \text{и} \quad P^{t_1+t_2} = P^{t_1} \circ P^{t_2} \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

2. Любая точка под действием потока P^t попадает в начало координат за конечное время:

$$\forall q^0 \quad \exists T(q^0) : \quad P^t q^0 = 0 \quad \forall t \geq T(q^0).$$

3. Поднятия оптимальных траекторий в кокасательное расслоение (с помощью принципа максимума Понтрягина) образуют некоторое липшицево лагранжево подмногообразие L . Причем L биективно проектируется как на пространство фазовых переменных q , так и на про-

¹Или даже счетное.

странство сопряженных переменных p .

Лагранжево многообразие L , вообще говоря, не является гладким. Например, в классической задаче Фуллера двумерная поверхность L состоит из двух гладких частей, склеивающихся вдоль кривой l , на которой L имеет особенность типа излома. Кривая l состоит в свою очередь из двух гладких кривых, смыкающихся в начале координат с гладкостью C^1 , но не C^2 . При этом L имеет в начале координат особенность конического типа (см. [31]).

В задачах с многомерным управлением поверхность L может иметь и более изысканные особенности. Чтобы продемонстрировать это рассмотрим следующую задачу:

$$\int_0^\infty x^2 dt \rightarrow \min, \ddot{x} \in \Omega,$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, а Ω является правильным треугольником с центром в начале координат. Как показано в части II настоящей диссертации (или см. [68, 74]) четырехмерная поверхность L в этой задаче содержит счетное число гладких кусков, смыкающихся по множеству NW фрактального типа. Множество NW обладает рядом свойств, присущим множествам неблуждающих траекторий. Например, оно обладает нецелой размерностью по Хаусдорфу и Минковскому²:

$$3,204762 \leq \dim_H NW \leq \overline{\dim}_K NW \leq 3,407495$$

Опишем теперь кратко геометрические свойства потока P^t в задаче (3.1). Оптимальный поток P^t может склеивать точки, то есть отображение $P^t : U^h \rightarrow U^h$, вообще говоря, не обратимо при $t > 0$. Например, $P^t q^0 = P^t q^1 = 0$ если время t достаточно велико, то есть $t \geq \max(T(q^0), T(q^1))$. Вообще говоря, возможна даже ситуация³, когда точки q^0 и q^1 склеиваются оптимальным потоком до попадания в начало координат: $P^t q^0 = P^t q^1 \neq 0$ при некотором $0 < t < \min(T(q^0), T(q^1))$. Такая ситуация типична для случая, когда Ω – многогранник (см. главу 4, или [61])

Тем не менее, всегда можно гарантировать сюръективность потока P^t . В случае если Ω является сильно выпуклым множеством с гладкой границей, то можно гарантировать, что оптимальные траектории пересекаются только в начале координат (обобщение теоремы 1.3 для задачи 3.1 с многомерным управлением). Другими словами, из равенства $P^{t_1} q^1 = P^{t_0} q^0$ при некоторых $t_1 \geq t_0$ следует, что либо $P^{t_1-t_0} q^1 = q^0$, либо $P^{t_1} q^1 = P^{t_0} q^0 = 0$ (см. теорему 3.4).

Отметим еще, что выпуклость задачи (3.1) приводит к тому, что принцип максимума Понтрягина является не только необходимым условием оптимальности но и по существу достаточным (см. теорему 3.3)

Задачу (3.1) можно рассматривать как задачу на группе Карно с вектором роста $(N, 2N, \dots, hN)$. Действительно, управляемую систему в (3.1) можно записать в виде $\dot{q} = \mathfrak{N}q + bu$, где оператор $\mathfrak{N}$ является нильпотентным и содержит в разложении Жордана h одинаковых клеток

²В англоязычной литературе ее называют box dimension.

³Например, когда множество Ω не является строго выпуклым, то есть когда $\partial\Omega \neq \text{extr } \Omega$.

размера $N \times N$, а векторные поля $\mathfrak{N}q + bu$ удовлетворяет условию управляемости (то есть условию Хёрмандера)

$$\text{span}_{u \in U} \langle bu, \mathfrak{N}bu, \mathfrak{N}^2bu, \dots, \mathfrak{N}^{h-1}bu \rangle = U^h.$$

3.2 Формулировка теорем об оптимальном потоке

Для краткости будем писать $q^0 = (q_1^0, \dots, q_h^0)$ и $q = (q_1, \dots, q_h)$, где $q_k = x^{(k-1)}$.

Теорема 3.1. *Предположим, что Ω – выпуклое компактное множество, $0 \in \text{Int } \Omega$, а функция f является неотрицательной строго выпуклой функцией с глобальным минимумом в точке 0 , $f(0) = 0$, и удовлетворяет в некоторой окрестности W начала координат неравенствам⁴*

$$C_1|x|^\gamma \leq f(x) \leq C_2|x|^\gamma \quad (3.3)$$

для некоторых положительных констант C_1, C_2 и $\gamma \geq 1$.

Тогда в задаче (3.1) определен такой непрерывный⁵ правосторонний поток $P^t : U^h \rightarrow U^h$, $t \geq 0$, что $P^0 = \text{id}$, $P^{t_1+t_2} = P^{t_1} \circ P^{t_2}$ при $t_1, t_2 \geq 0$, и для любых начальных данных q^0

- (i) Существует и единственная оптимальная траектория $\hat{q}(t, q^0)$ задачи (3.1) с начальными условиями (3.2), и она имеет вид $\hat{q}(t, q^0) = P^t q^0$.
- (ii) Найдется такой момент времени $T(q^0) \geq 0$, что $P^t q^0 = 0$ при $t \geq T(q^0)$. Причем функция $T(q^0)$ непрерывна. Более того, существуют такие положительные константы α и β , что для любой точки q^0 из некоторой окрестности начала координат выполнено

$$\alpha \max(|q_1^0|^{\frac{1}{h}}, |q_2^0|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |q_h^0|) \leq T(q_0) \leq \beta \max(|q_1^0|^{\frac{1}{h}}, |q_2^0|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |q_h^0|).$$

Если $W = U$, то эта оценка выполнена для всех q^0 .

- (iii) Отображение P^t является сюръекцией при любом $t \geq 0$.

Предположим дополнительно, что функция f дважды дифференцируема. Обозначим через $p = (p^1, \dots, p^h)$ – сопряженные к $q = (q_1, \dots, q_h)$ переменные из принципа максимума Понтрягина. Тогда гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид

$$\mathcal{H}(p, q, u) = -\lambda_0 f(q_1) + \sum_{i=1}^{h-1} \langle p^i, q_{i+1} \rangle + \langle p^h, u \rangle,$$

и (равенства и включения как всегда должны выполняться для почти всех t)

⁴Формально линейное пространство U не снабжено нормой. Однако, все нормы на U эквивалентны, что придает смысл написанным неравенствам.

⁵Это означает, что отображение $P : (t, q^0) \mapsto P^t q^0$ непрерывно по совокупности аргументов.

$$\begin{cases} \dot{p}^i = -p_{i-1}, \text{ при } i \geq 2; \\ \dot{p}^1 = \lambda_0 f'(q_1); \\ u \in \arg \max_{u \in \Omega} \langle p^h, u \rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

Теорема 3.2. Если выполняются условия теоремы 3.1 и к тому же $f \in C^2(U)$, то

(i) Оптимальная траектория $\hat{q}(t, q^0) = P^t q^0$ нормальна, т.е. $\lambda_0 \neq 0$ (положим, $\lambda_0 = 1$), и сопряженная функция $\hat{p}(t, q^0)$ единственна.

Более того, определено такое⁶ отображение $E : U^h \rightarrow U^{h*}$, $E(0) = 0$, что

(ii) Для любых $t \geq 0$ и q^0 выполняется $\hat{p}(t, q^0) = E(P^t q^0)$.

(iii) Отображение $E : q^0 \mapsto \hat{p}(0, q^0)$ является локально липшицевым гомеоморфизмом U^h и U^{h*} .

(iv) Липшицева поверхность $L = \{(q, E(q)), q \in U^h\} \subset U^h \oplus U^{h*}$, сотканная из оптимальных траекторий, является лагранжевой. Другими словами, интеграл от формы $p dq$ по любой замкнутой липшицевой кривой в L равен 0.

Отображение E , описанное в теореме 3.2 есть, с точностью до знака, дифференциал функции Беллмана. В том числе, мы докажем, что функция Беллмана в этой задаче является строго выпуклой и по крайней мере 1 раз дифференцируемой. Этот факт имеет большое значение, так как в этом случае достаточно отыскать решение уравнения Гамильтона-Якоби для построения оптимального синтеза. Теоремы 3.1 и 3.2 в менее общей форме доказаны в [61, 72].

В пункте (ii) теоремы 3.2 утверждается, что на U^{h*} определен поток $Q^t = E \circ P^t \circ E^{-1}$, согласованный с принципом максимума Понтрягина. Другими словами, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} U^h & \xrightarrow{P^t} & U^h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ U^{h*} & \xrightarrow{Q^t} & U^{h*} \end{array}$$

а сопряженная функция $\hat{p}(t, q^0)$ удовлетворяет равенству $\hat{p}(t, q^0) = Q^t E(q^0)$.

Поверхность L соткана из траекторий, входящих в начало координат. Не трудно найти траектории выходящие из начала координат.

Замечание 3.1. В теореме 3.3 и ее следствиях доказано, что L содержит все траектории системы (3.4), попадающие в начало координат за конечное время. Другими словами L – это интегральная воронка начала координат при $t \leq 0$. Построим L' – интегральную воронку начала координат при $t \geq 0$. Для этого рассмотрим отображение

⁶Здесь и далее для краткости $U^{h*} = (U^*)^h$

$$q_k \mapsto (-1)^{h-k+1} q_k; \quad p^k \mapsto (-1)^{h-k} p^k; \quad u \mapsto u.$$

При этом отображении гамильтониан $\mathcal{H}$ перейдет в гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$, в котором вместо функции $f(q_1)$ стоит функция $f((-1)^h q_1)$. Симплектическая форма $\omega = dp \wedge dq$ изменит знак на противоположный. Поэтому при таком отображении поверхность L переходит в поверхность, сотканную из траекторий выходящих из начала координат для гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ и наоборот.

Отметим еще, что система принципа максимума для гамильтониана $\mathcal{H}$ имеет единственную особую траекторию $q = p = 0$ если $f \in C^2$ удовлетворяет условию теоремы 3.1. Действительно, если $u(t) \in \text{Int } \Omega$ при $t \in (t_1, t_2)$, то $p^h(t) = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. Поэтому $p^1(t) = \dots = p^h(t) = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$ в силу системы (3.4). По теореме 3.2 имеем $\lambda_0 \neq 0$. Поэтому $q_1(t) = 0$ и, значит, $q_1(t) = \dots = q_h(t) = u(t) = 0$.

Более того, в этом случае система имеет глобальный порядок (по определению 2.4) и он есть $(0, \dots, 0, \dim U, 0, \dots)$, где $\dim U$ стоит на месте с номером h .

3.3 Существование и единственность

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 опираются на серию лемм о свойствах оптимальных траекторий и структуре оптимального синтеза в задаче (3.1).

Лемма 3.1. Для любого q^0 существует оптимальное решение $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (3.1).

Доказательство. Поскольку каждому измеримому управлению $u(t) \in \Omega$ соответствует единственная траектория $q(t)$ с начальными условиями $q(0) = q_0$, то мы можем рассматривать функционал J , как функционал на пространстве управлений $L_\infty(0; +\infty)$. Множество $\mathbb{U}$ всех допустимых функций управления ограничено, выпукло и замкнуто в $L_\infty(0; +\infty)$ в силу ограниченности, выпуклости и замкнутости Ω . Следовательно, по теореме Банаха-Алаоглу (см. [75]) получаем, что множество $\mathbb{U}$ слабо* предкомпактно ($L_\infty(0; +\infty) = L_1^*(0; +\infty)$). Слабая* замкнутость $\mathbb{U}$ тривиально следует из выпуклости и компактности Ω . Покажем, что функционал J полунепрерывен снизу относительно слабой* топологии.

Рассмотрим оператор $K : L_\infty(0; +\infty) \rightarrow AC[0, +\infty)$ следующего вида

$$(Ku)(t, q^0) = q_1^0 + q_2^0 t + \dots + \frac{q_h^0}{(h-1)!} t^{h-1} + \frac{1}{(h-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{h-1} u(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Оператор K переводит управление $u(t)$ в соответствующее решение $x(t)$. Таким образом необходимо доказать, что для любой последовательности управлений $u_h \xrightarrow{w^*} \hat{u}$ выполнено

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f((Ku_h)(t, q^0)) dt \geq \int_0^{+\infty} f((K\hat{u})(t, q^0)) dt.$$

Поскольку $(t-\tau)^{h-1} \theta(t-\tau) \in L_1(0; +\infty)$, то $(Ku_h)(t, q^0)$ сходится к $(K\hat{u})(t, q^0)$ поточечно. Искомое неравенство следует из теоремы Фату. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{B}(q_0)$ – функцию Беллмана:

$$\mathfrak{B}(q_0) = \inf \left\{ \int_0^{+\infty} f(x(t)) dt, \text{ где } x^{(h)}(t) \in \Omega \text{ при п.в. } t \geq 0 \text{ и } x^{(k-1)}(0) = q_k^0, k \leq h \right\}.$$

Очевидно, что $0 \leq \mathfrak{B}(q_0)$ для любого q_0 . Не трудно показать (см. лемму 3.4), что существует траектория, попадающая в начало координат за конечное время. Поэтому продолжив ее нулем до бесконечности, немедленно получаем, что $\mathfrak{B}(q_0) < \infty$.

Лемма 3.2. *Оптимальное решение единственно, а функция Беллмана $\mathfrak{B}$ строго выпукла (и, значит, непрерывна).*

Доказательство. Пусть $x^0(t)$ и $x^1(t)$ – две произвольные траектории. Для любого $\lambda \in [0; 1]$ из строгой выпуклости f получаем:

$$J(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^0) \leq \lambda J(x^1) + (1 - \lambda)J(x^0),$$

причем равенство может достигаться, только если $x^0(t) = x^1(t)$ почти всюду (а значит всюду, в силу непрерывности $x(t)$). Если $x^0(t)$ и $x^1(t)$ – оптимальные траектории начинающиеся в q^0 и q^1 соответственно, то для $0 < \lambda < 1$ получаем

$$\lambda \mathfrak{B}(q^1) + (1 - \lambda) \mathfrak{B}(q^0) \geq J(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x_0) \geq \mathfrak{B}(\lambda q^1 + (1 - \lambda)q^0).$$

Причем равенство может быть только если $x^0(t) \equiv x^1(t)$. Если $q^0 = q^1$ получаем единственность оптимального решения. Если $q^0 \neq q^1$ получаем строгую выпуклость функции Беллмана $\mathfrak{B}$. $\square$

Из выпуклости функции Беллмана $\mathfrak{B}$ и ее конечности (см. лемму 3.4) немедленно следует ее непрерывность.

Лемма 3.3. *Отображение*

$$U^h \rightarrow C[0; t_0]; \quad q^0 \mapsto \hat{q}(\cdot, q^0),$$

является непрерывным при любом $t_0 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность q^k стремящуюся к точке q^0 . Обозначим через $u^k(\cdot)$ – оптимальное управление из точки q^k . Покажем, что последовательность $u^k(\cdot)$ слабо* сходится к оптимальному управлению в точке q^0 . Из последовательности u^k можно выбрать слабо* сходящуюся подпоследовательность u^{k_m} , так как множество $\mathbb{U}$ слабо* компактно. Итак, $u^{k_m} \xrightarrow{w^*} u^0$. Докажем, что траектория $x^0(t) = \mathcal{K}(u^0, q^0)(t)$ является оптимальной для начальной точки q^0 . Действительно, обозначим через $x^k(t) = \mathcal{K}(u^k, q^k)(t)$ оптимальную траекторию из точки q^k . Тогда, из непрерывности функции $\mathfrak{B}$ и из теоремы Фату получаем

$$\mathfrak{B}(q^0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{B}(q^{k_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} J(x^{k_m}) \geq J(x^0)$$

Поэтому траектория x^0 оптимальна. Следовательно, существует единственная предельная точка последовательности u^k – оптимальное управление u^0 в точке q_0 , т.е. последовательность u^k слабо* сходится к u_0 .

Осталось заметить, что $\widehat{q}_1(\cdot, q^k) = x^k(\cdot)$ и $\widehat{q}_1(\cdot, q^0) = x^0(\cdot)$, поэтому из формулы (3.5) немедленно следует, что $\widehat{q}_1(t, q^k) \rightarrow \widehat{q}_1(t, q^0)$ для всех t и эта сходимость равномерна при $t \in [0; t_0]$. Аналогично доказывается сходимость $\widehat{q}_j(\cdot, q^k) \rightarrow \widehat{q}_j(\cdot, q^0)$ при любом индексе $j > 1$. $\square$

3.4 Группа почти симметрий

Отличительной чертой задачи (3.1) является наличие не только оптимального потока P^t , но и действия g масштабной группы симметрий $\mathbb{R}_+$ следующего вида:

$$\begin{cases} g(\lambda)q_1 = \lambda^h q_1; \\ g(\lambda)q_2 = \lambda^{(h-1)} q_2; \\ \dots \\ g(\lambda)q_h = \lambda q_h; \\ g(\lambda)u = u; \\ g(\lambda)t = \lambda t; \end{cases} \quad (3.6)$$

Действие g сохраняет управляемую систему (3.4), но, вообще говоря, не сохраняет функцию f . Тем не менее, g «почти» сохраняет f в окрестности начала координат, так как по условию теоремы 3.1 функция f удовлетворяет оценкам (3.3). Этот факт оказывается очень полезным.

Используя действие g , сначала покажем существование допустимой траектории, идущей из любой начальной точки q^0 в начало координат:

Лемма 3.4. *Для любой начальной точки q^0 существует допустимая траектория управляемой системы (3.1), попадающая в начало координат за конечное время.*

Доказательство. Действительно, так как $0 \in \text{Int } \Omega$, то существует такая окрестность начала координат, что для любой точки q^0 из этой окрестности нужная траектория $q(t)$ найдется. Если q^0 не лежит в этой окрестности, то точка $g(\lambda)q^0$ уже лежит в этой окрестности, при достаточно малом $\lambda > 0$. Если траектория $q(t)$ – искомая допустимая траектория для точки $g(\lambda)q^0$, то траектория $g(\frac{1}{\lambda})q(\lambda t)$ будет допустимой для точки q^0 . $\square$

Воспользуемся теперь действием g для получения удобных оценок на функцию Беллмана:

Лемма 3.5. *Пусть $\lambda > 0$, а проекции точек q^0 и $g(\lambda)q^0$ на первую координату q_1 лежат в окрестности W из условия теоремы 3.1. Если оптимальные траектории $\widehat{x}(t, q^0)$, $\widehat{x}(t, g(\lambda)q^0)$ и их образы $g(\lambda)\widehat{x}(t, q^0)$, $g(1/\lambda)\widehat{x}(t, g(\lambda)q^0)$ не покидают W , то*

$$\frac{C_1}{C_2} \lambda^{h\gamma+1} \mathfrak{B}(q^0) \leq \mathfrak{B}(g(\lambda)q^0) \leq \frac{C_2}{C_1} \lambda^{h\gamma+1} \mathfrak{B}(q^0)$$

Доказательство. Докажем оценку сверху. Пусть $y = \lambda^h x$, $s = \lambda t$. Тогда для любой траектории $x(t)$ из W выполнено

$$J(x) = \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} f(\lambda^{-h} y(s)) ds$$

Более того, траектория $y(s)$ будет допустимой, так как $(\frac{d}{ds})^h y|_s = (\frac{d}{dt})^h x|_{t=s/\lambda} \in \Omega$. Теперь, поскольку для любых точек z и $\lambda^{-h} z$ из W выполнено

$$f(\lambda^{-h} z) \geq C_1 \lambda^{-h\gamma} |z|^\gamma \geq \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-h\gamma} f(z),$$

то мы немедленно получаем

$$\mathfrak{B}(q^0) \geq \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-h\gamma-1} J(g(\lambda) \hat{x}(t, q^0)) \geq \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-h\gamma-1} \mathfrak{B}(g(\lambda) q^0)$$

Оценка снизу получается аналогично. □

Лемма 3.6. Для любых начальных данных q_0 найдется момент времени $T(q_0)$ такой, что $\hat{q}(t, q^0) = 0$ при всех $t \geq T(q^0)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\hat{q}(t, q^0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку интеграл $\int_0^\infty f(\hat{x}(\tau)) d\tau$ конечен, то $\int_t^\infty f(\hat{x}(\tau)) d\tau$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, функция $\mathfrak{B}(\hat{q}(t, q^0))$ монотонно убывая стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Оптимальная траектория должна стремиться к началу координат в силу убывания функции $\mathfrak{B}$. Действительно, функция $\mathfrak{B}$ непрерывна, строго выпукла и 0 – ее абсолютный минимум. Поэтому $M_\varepsilon = \min_{|q|=\varepsilon} \mathfrak{B}(q) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\mathfrak{B}(q) \geq M_\varepsilon$ для любого $|q| \geq \varepsilon$. С другой стороны $\mathfrak{B}(\hat{q}(t, q^0)) < M_\varepsilon$ для достаточно больших t , что и требовалось.

Теперь докажем, что любая траектория попадает в начало координат за конечное время. Сначала перенесем все действия в окрестность W . Поскольку функция $\mathfrak{B}$ строго выпукла, то проекция множества $\{q^0 = (q_1^0, \dots, q_h^0) : \mathfrak{B}(q^0) \leq C\}$ на первое слагаемое q_1^0 содержится в W для некоторого $C > 0$. Другими словами, если $\mathfrak{B}(q^0) \leq C$, то $q_1^0 \in W$. В силу убывания функции $\mathfrak{B}(\hat{q}(t, q^0))$ по t получаем, что

1. Если $\mathfrak{B}(q^0) \leq C$, то $\hat{q}_1(t, q^0) \in W$ при всех $t \geq 0$.
2. Если $\mathfrak{B}(q^0) > C$, то найдется момент t_0 такой что, $\mathfrak{B}(\hat{q}(t_0, q^0)) = C$ и $\hat{q}_1(t, q^0) \in W$ при всех $t \geq t_0$.

Таким образом, мы можем без ограничения общности считать, $\hat{q}(t, q^0) \in W$ при всех $t \geq 0$.

Обозначим $\rho(q) = \max(|\frac{q_1}{c_1}|^{\frac{1}{h}}, |\frac{q_2}{c_2}|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |\frac{q_h}{c_h}|)$. Числа $c_k > 0$, $k = 1, \dots, h$ фиксированы, и точный их выбор будет произведен ниже. Далее мы докажем, воспользовавшись действием g группы $\mathbb{R}_+$, что функция $\rho(\hat{q}(q^0, t))$ обращается в 0 за конечное время. Важно отметить, что $\rho(g(\lambda)q) = \lambda \rho(q)$.

Пусть $0 < \Lambda < 1$ – произвольное число, и пусть $t_\Lambda(q_0)$ – минимальное время, через которое значение $\rho(q^0)$ уменьшится в Λ раз на оптимальной траектории:

$$\rho(\widehat{q}(q^0, t_\Lambda(q^0))) = \Lambda \rho(q^0), \quad t_\Lambda(q^0) \text{ – минимально возможное.}$$

Функция $t_\Lambda(q^0)$ определена корректно, так как $\widehat{q}(q^0, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Оценим $t_\Lambda(q^0)$ сверху через $\mathfrak{B}(q^0)$. Для этого зафиксируем $\delta > 0$ и оценим снизу интеграл от f на промежутке $t \in [t_0; t_0 + \delta]$, где время $t_0 \geq 0$ – любое, лишь бы $\rho(\widehat{q}(q^0, t_0)) = \delta$. Для некоторого $k \in \{1, \dots, h\}$ должно выполняться $\left| \frac{\widehat{x}_k(t_0, q^0)}{c_k} \right|^{\frac{1}{h-k+1}} = \delta$. По формуле (3.5) для всех $t \geq t_0$ получаем (для удобства $c_{h+1} = n! \text{diam } \Omega < \infty$)

$$|\widehat{x}(t, q^0)| \geq \max \left\{ 0, \frac{2c_k}{k!} \delta^{h-k+1} (t - t_0)^{k-1} - \sum_{j=1}^{h+1} \frac{c_j}{j!} \delta^{h-j+1} (t - t_0)^{j-1} \right\}. \quad (3.7)$$

Конечно, эта оценка становится бессмысленной когда $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим подробнее, эту оценку на промежутке $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Положим $\tau = \frac{t-t_0}{\delta} \in [0, 1]$. Тогда

$$|\widehat{x}(t, q^0)| \geq -\delta^h \min \left\{ 0, -2d_k \tau^{k-1} + \sum_{j=1}^{h+1} d_j \tau^{j-1} \right\}$$

где $d_j = \frac{c_j}{j!}$. Таким образом, в правой части стоит многочлен

$$P(\tau) = \sum_{j=1}^{h+1} d_j \tau^{j-1},$$

в котором знак при τ^{k-1} изменен на противоположный (обозначим этот многочлен через $P_k^-(\tau)$). Для того, чтобы оценка (3.7) была осмысленной при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ многочлен $P_k^-(\tau)$ должен принимать отрицательные значения на $[0, 1]$. Выбор коэффициентов c_k (а значит и d_k) находится в нашей власти⁷. Трудность в том, что k произвольно, т.е. числа $d_j > 0$ должны быть выбраны так, чтобы при любом k многочлен $P_k^-(\tau)$ менял знак на $[0, 1]$.

В нижеследующей лемме 3.7 доказано, что такой выбор $d_j > 0$ возможен. А именно: найдутся такие числа $d_j > 0$, $0 < A < 1$ и $B > 0$, что при любом $k = 1, \dots, h$ неравенство $P_k^-(\tau) \leq -B$ выполняется на подмножестве $[0, 1]$ меры не меньше A . Отсюда немедленно получаем, что неравенство

$$|\widehat{x}(t, q^0)| \geq B\delta^h$$

выполняется на подмножестве $[t_0, t_0 + \delta]$ меры не меньше $A\delta$. По другому этот факт можно записать так:

$$\mu \{ t \in [t_0; t_0 + \delta] : |\widehat{x}(t, q^0)| \geq B\delta^h \} \geq A\delta.$$

⁷Коэффициент $c_{h+1} = n! \text{diam } \Omega$ можно считать фиксированным.

Таким образом, мы получили, что если $\rho(\widehat{q}(t_0, q^0)) = \delta$, то

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} f(\widehat{x}(t, q^0)) dt \geq (C_1 A B^\gamma) \delta^{h\gamma+1} = C_3 \delta^{h\gamma+1} \quad (3.8)$$

Выберем теперь число $\Delta > 0$ достаточно малым, а именно так, чтобы $\mathfrak{B}(q^0) \leq C$ для всех q^0 , что $\rho(q^0) \leq \Delta$. При таком выборе Δ траектория $\widehat{x}(t, q^0)$ лежит в W , если $\rho(q^0) \leq \Delta$. Рассмотрим такую точку q^0 , что $\rho(q^0) = \Delta$. Будем для краткости писать $\rho(t) = \rho(\widehat{q}(t, q^0))$. Согласно определению $t_\Lambda(q^0)$ неравенство $\rho(t) \geq \Lambda\Delta$ выполняется для всех $t \in [0, t_\Lambda(q^0)]$. Положим $\delta = \Lambda\Delta$ и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} t_0 &= 0; & t_1 &= t_0 + \tau_1; & t_2 &= t_1 + \tau_2; & \dots; & t_{k+1} &= t_k + \tau_{k+1}; & \dots \\ \tau_1 &= \rho(t_0); & \tau_2 &= \rho(t_1); & \tau_3 &= \rho(t_2); & \dots; & \tau_{k+1} &= \rho(t_k); & \dots \end{aligned}$$

Пусть n – такой минимальный номер, что $t_{n-1} \leq t_\Lambda(q^0)$, а $t_n > t_\Lambda(q^0)$. Номер n конечен, так как $t_{k+1} - t_k \geq \delta$, если $t_k \leq t_\Lambda(q^0)$. Поскольку $\tau_k \geq \delta$ при $k \leq n$, то по неравенству (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(q^0) &\geq \int_0^{t_n} f(\widehat{x}(t, q^0)) dt \geq C_3 \sum_{k=1}^n \tau_k^{h\gamma+1} = \\ &= C_3 \delta^{h\gamma+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\tau_k}{\delta}\right)^{h\gamma+1} \geq C_3 \delta^{h\gamma+1} \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k}{\delta} \geq C_3 \delta^{h\gamma} t_\Lambda(q^0). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $0 < \Lambda < 1$ выполнено

$$t_\Lambda(q^0) \leq \frac{1}{C_3} \frac{1}{\Delta^{h\gamma}} \frac{1}{\Lambda^{h\gamma}} \beta(\Delta),$$

где $\beta(\Delta) < \infty$ обозначает максимальное значение функции $\mathfrak{B}$ на сфере $\{q^0 : \rho(q^0) = \Delta\}$.

Рассмотрим теперь последовательность точек $q^k = \widehat{q}(t_\Lambda(q^{k-1}), q^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $\rho(q^k) = \Lambda^k \Delta$. Итак, через время

$$T(q^0) \leq t_\Lambda(q^0) + t_\Lambda(q^1) + \dots$$

траектория $\widehat{q}(t, q^0)$ попадет в начало координат. Время $T(q^0)$ конечно, так как правая часть неравенства не превосходит суммы сходящейся геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} T(q^0) &\leq \sum_k t_\Lambda(q^k) \leq \frac{1}{C_3} \frac{1}{\Delta^{h\gamma}} \sum_k \frac{1}{\Lambda^{(k+1)h\gamma}} \beta(\Lambda^k \Delta) \leq \\ &\leq \frac{C_2}{C_1 C_3} \frac{\beta(\Delta)}{\Delta^{h\gamma} \Lambda^{h\gamma}} \sum_k \Lambda^k = \frac{C_2}{C_1 C_3} \frac{1}{\Lambda^{h\gamma} (1 - \Lambda)} \frac{\beta(\Delta)}{\Delta^{h\gamma}}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, так как по лемме 3.5 для любого $0 < \lambda < 1$ выполняется

$$\beta(\lambda\Delta) \leq \frac{C_2}{C_1} \lambda^{h\gamma+1} \beta(\Delta).$$

□

Далее через $T(q^0)$ будем обозначать минимальный момент времени такой, что $\widehat{q}(t, q^0) = 0$ при $t \geq T(q^0)$.

Следствие 3.1. Для некоторых положительных констант α и β оценки

$$\alpha\rho(q^0) \leq T(q^0) \leq \beta\rho(q^0)$$

выполнены для всех q^0 из некоторой окрестности начала координат. Если $W = U$, то эти оценки выполнены всюду.

Доказательство. Оценка сверху получается следующим образом. Просуммируем геометрическую прогрессию в лемме 3.6:

$$T(q^0) \leq \frac{C_2}{C_1 C_3} \frac{1}{\Lambda^{h\gamma}(1-\Lambda)} \frac{\beta(\Delta)}{\Delta^{h\gamma}}.$$

Положив $\Lambda = \frac{1}{2}$ и учитывая, что по лемме 3.5 $\beta(\Delta) \sim \Delta^{h\gamma+1}$, получаем искомое. Отметим, что если $W \neq U$, то $\beta(\Delta) \sim \Delta^{h\gamma+1}$ лишь в некоторой окрестности начала координат. Если же $W = U$, то этой проблемы нет, и, более того, в доказательстве леммы 3.6 можно отказаться от первого шага, использующего свойство $\widehat{q}(t, q^0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Этот шаг мы использовали для того, чтобы перенести действия в окрестность начала координат.

Оценка снизу немедленно следует из того, минимально возможное время T_0 достижения начала координат из точки q^0 с помощью траектории управляемой системы (3.1) тривиально удовлетворяет оценке

$$T_0 \geq \beta' \max(|q_1^0|^{\frac{1}{h}}, |q_2^0|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |q_h^0|).$$

□

Лемма 3.7. Существуют такие положительные константы⁸ $d_j > 0$, $0 < A < 1$ и $B > 0$, что при любом $0 \leq k \leq h$ мера множества тех точек τ отрезка $[0; 1]$, для которых выполняется неравенство

$$P_k^-(\tau) = -2d_k \tau^{k-1} + \sum_{j=1}^{h+1} d_j \tau^{j-1} \leq -B$$

не меньше A .

⁸Константу $d_{h+1} > 0$ можно считать фиксированной.

Доказательство. В силу непрерывности P_k^- , достаточно доказать, что существуют такие $d_j > 0$, что при изменении знака у коэффициента при τ^{k-1} многочлен $P_k^-(\tau)$ будет принимать отрицательное значение хоть при одном $\tau \in [0; 1]$. Для такого многочлена можно взять

$$B = -\frac{1}{2} \max_k \min_{\tau \in [0,1]} P_k^-(\tau) > 0,$$

и

$$A = \min_k \left(\mu \{ \tau \in [0; 1] : P_k^-(\tau) \leq -B \} \right) > 0$$

Рассмотрим многочлен $Q(\tau)$ следующего вида $Q(\tau) = 1 + \sum_{j=1}^h e_j \tau^j$, где $e_j = h^{\frac{1}{2}j - \frac{3}{2}j^2}$. Непосредственно проверяется, что при любом $k = 0, 1, \dots, h$ многочлен $Q(\tau) - 2e_k \tau^k$ принимает отрицательные значения на промежутке $(h^{3k-1}; h^{3k})$. В качестве $P(\tau)$ подойдет $CQ(\tau/h^{3h})$, где $C > 0$ — произвольная константа. $\square$

Лемма 3.8. *Время $T(q^0)$ достижения начала координат непрерывно зависит от q^0 .*

Доказательство. Функция $T(q_0)$ непрерывна в $q_0 = 0$ по теореме о двух милиционерах. Покажем непрерывность в $q_0 \neq 0$. Рассмотрим последовательность $q_k \rightarrow q_0$. Обозначим

$$T^- = \liminf_{k \rightarrow \infty} T(q^k) \quad T^+ = \limsup_{k \rightarrow \infty} T(q^k)$$

Заметим, что $T(q^0) \leq T^-$. Действительно, если $t > T^-$, то по лемме 3.3 выполнено $\hat{q}(t, q^0) = 0$.

Покажем, что $T(q^0) \geq T^+$. По лемме 3.3 имеем $\hat{q}(T(q^0), q^k) \rightarrow \hat{q}(T(q^0), q^0) = 0$. То есть за время $T(q^0)$ оптимальные траектории из точек q^k окажутся в сколь угодно малой окрестности начала координат. Но в начале координат функция $T(\cdot)$ непрерывна. Поэтому $T(\hat{q}(T(q^0), q^k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Осталось заметить, что для любого k либо $T(q^k) \leq T(q^0)$, либо $T(q^k) = T(q^0) + T(\hat{q}(T(q^0), q^k))$, что и завершает доказательство. $\square$

3.5 Свойства функции Беллмана

В данном параграфе мы, в том числе, докажем, что производная функции Беллмана $\mathfrak{B}'$ является локально липшицевым отображением $\mathfrak{B}' : U^h \rightarrow U^{h*}$.

Лемма 3.9. *Если $f \in C^2(U)$, то любая оптимальная траектория нормальна, т.е. $\lambda_0 \neq 0$. Выбрав $\lambda_0 = 1$ получаем, что для любого q^0 сопряженная функция $\hat{p}(t, q^0)$ единственна.*

Доказательство. Поскольку $\hat{u}(t, q^0) = 0$ при $t \geq T(q^0)$, то $\langle p^h, u \rangle$ достигает максимума во внутренней точке Ω ($0 \in \text{Int } \Omega$). Поэтому $\hat{p}^h(t, q^0) = 0$ при $t \geq T(q^0)$. Из (3.4) немедленно получаем, что $\hat{p}^k(t, q^0) = 0$ при всех k и $t \geq T(q^0)$.

Если $\lambda_0 = 0$, то из системы (3.4) видно, что функция $\hat{p}^h(t, q^0)$ обязана являться многочленом по t . Поскольку $\hat{p}^h(t, q^0) = 0$ при $t \geq T(q^0)$, то $\hat{p}^1 \equiv \dots \equiv \hat{p}^h \equiv 0$. Противоречие.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда при $t < T(q^0)$ функция $\widehat{p}(t, q^0)$ может быть найдена единственным образом из уравнений (3.4):

$$\begin{cases} \widehat{p}^1(t, q^0) = - \int_t^{T(q^0)} f'(\widehat{x}(\tau, q^0)) d\tau; \\ \widehat{p}^k(t, q^0) = \int_t^{T(q^0)} \widehat{p}^{k-1}(\tau, q^0) d\tau; \text{ при } k \geq 2 \end{cases} \quad (3.9)$$

□

Лемма 3.10. Если $f \in C^2(U)$, то функция Беллмана является функцией класса C^1 , и $\mathfrak{B}'(q_0) = -\widehat{p}(0, q_0)$

Под $\mathfrak{B}'(q_0) \in U^{h*}$ здесь и далее подразумевается дифференциал функции Беллмана в точке q_0 .

Доказательство. Пусть для краткости $q_i(t) = \widehat{q}_i(t, q^0)$, $u(t) = \widehat{u}(t, q^0)$ – оптимальная траектория. По построению сопряженных переменных в принципе максимума Понтрягина (см. [76]), пара (λ_0, p_0) может быть выбрана в качестве начального значения для сопряженной функции $(\lambda_0, p(t))$, удовлетворяющей принципу максимума

$$\begin{aligned} \max_{v \in U} \left(-\lambda_0 f(q_1(t)) + \sum_{i=1}^{h-1} \langle p^i(t), q_{i+1}(t) \rangle + \langle p^h(t), v \rangle \right) = \\ = -\lambda_0 f(q_1(t)) + \sum_{i=1}^{h-1} \langle p^i(t), q_{i+1}(t) \rangle + \langle p^h(t), u(t) \rangle, \end{aligned}$$

если и только если она отделяет $(-1, 0)$ от конуса вариаций $(\delta J, \delta q)$, порожденного всеми элементарными игольчатыми вариациями во всех положительных временах. В силу единственности $\widehat{p}(t, q_0)$ такая пара единственна ($\lambda_0 = 1$).

С другой стороны, подходит любая пара $(1, -p_0)$, где в качестве p_0 может быть выбран любой субградиент функции Беллмана $\mathfrak{B}$ в точке q^0 . Таким образом функция Беллмана имеет в любой точке единственный субградиент, и, значит, $\mathfrak{B} \in C^1$. □

Здесь важно отметить, что даже в случае когда f – аналитическая функция, функция Беллмана $\mathfrak{B}$, вообще говоря, не будет иметь гладкость больше чем C^1 . Простейшим примером может служить задача Фуллера (см. [32]).

Лемма 3.11. Если $f \in C^2$, то отображение $E : q_0 \mapsto \widehat{p}(0, q_0) = -\mathfrak{B}'(q_0)$ непрерывно, открыто и инъективно на U^h . Более того, $E(U^h) = U^{h*}$, и, следовательно, E есть гомеоморфизм U^h на U^{h*} .

Доказательство. Отображение E непрерывно, так как $\mathfrak{B} \in C^1$. Инъективность отображения E немедленно следует из строгой выпуклости $\mathfrak{B}$. Покажем, что открытость E так же следует из строгой выпуклости $\mathfrak{B}$. Зафиксируем точку q^0 . Для любого $\delta > 0$ положим

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta} \min_{|q-q^0|=\delta} (\mathfrak{B}(q) - \mathfrak{B}(q^0) - \langle \mathfrak{B}'(q^0), q - q^0 \rangle) > 0.$$

Тогда из строгой выпуклости $\mathfrak{B}$ получаем, что для любого $p \in U^*$, $|p| < \varepsilon$ при $|q - q_0| \geq \delta$ выполнено $\mathfrak{B}(q) - \langle \mathfrak{B}'(q^0) + p, q - q^0 \rangle > \mathfrak{B}(q^0)$. Поэтому при фиксированном p , $|p| < \varepsilon$, минимум функции $\mathfrak{B}(q) - \langle \mathfrak{B}'(q^0) + p, q - q^0 \rangle$ по q достигается в шаре $|q - q_0| < \delta$. Следовательно, для каждого p , $|p| < \varepsilon$, найдется такое q , $|q - q_0| < \delta$, что $\mathfrak{B}'(q) = \mathfrak{B}'(q^0) + p$, и открытость E доказана. Из открытости и инъективности E немедленно получаем, что $E(U^h)$ открыто и $E : U^h \rightarrow E(U^h)$ есть гомеоморфизм.

Покажем теперь, что $E(U^h) = U^{h*}$. Обозначим $C = \min_{|x|=1} f(x) > 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то в силу выпуклости функции f имеем

$$f(x) \geq C|x| \quad \text{если} \quad |x| \geq 1$$

В лемме 3.6 доказано, что существуют такие положительные константы A и B , что если $\rho(q^0) = \delta$, то для оптимальной траектории $\hat{x}(t, q^0)$, начинающейся в q^0 , мера множества $\Sigma = \{t \in [0; \delta] : |\hat{x}(t, q^0)| \geq B\delta^h\}$ не меньше $A\delta$. Поэтому, если $B(\rho(q^0))^h \geq 1$, то

$$\mathfrak{B}(q^0) = J(\hat{x}(\cdot, q^0)) \geq \int_{\Sigma} f(\hat{x}(t, q^0)) dt \geq ABC\delta^{h+1} = ABC(\rho(q^0))^{h+1}.$$

Пусть k обозначает индекс максимального по модулю q_j . Поскольку норма $|q|$ эквивалентна норме $\max_j |q_j|$ получаем, что для некоторой константы $D > 0$ выполнено

$$\rho(q) \geq \left| \frac{q_k}{c_k} \right|^{\frac{1}{h-k+1}} \geq D|q|^{\frac{1}{h-k+1}} \geq D|q|^{\frac{1}{h}}, \text{ если } |q| \geq 1.$$

Поэтому $\mathfrak{B}(q) \geq ABCD|q|^{1+\frac{1}{h}}$ при $|q| \geq \max\{1, (B^{\frac{1}{h}}D)^{-h}\}$. Таким образом, функция $\mathfrak{B}(q) - \langle p, q \rangle$ коэрцитивна, так как $1 + \frac{1}{h} > 1$, и, значит, достигает минимума при любом p . $\square$

Докажем липшицевость отображения $E = -\mathfrak{B}'$. Разобьем доказательство на 2 леммы.

Лемма 3.12. Для любой точки $q_0 \in U$ найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что для всех $\Delta q \in U$, $|\Delta q| < \delta$ выполнены неравенства

$$0 \leq \mathfrak{B}(q_0 + \Delta q) - \mathfrak{B}(q_0) - \langle \mathfrak{B}'(q_0), \Delta q \rangle \leq C|\Delta q|^2.$$

При этом константы C и δ могут быть выбраны непрерывно зависящими от q_0 .

Доказательство. Определим траекторию $q(t) = (q_1(t), \dots, q_h(t))$ следующим образом: при $t \in [0; T(q_0)]$ она находится из условий

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = q_2(t); & \dot{q}_2(t) = q_3(t); & \dots & \dot{q}_h(t) = u(t); \\ u(t) = \hat{u}(t, q_0); & q(0) = q_0 + \Delta q; \end{cases}$$

а после момента времени $t = T(q_0)$ траектория $q(t)$ совпадает с оптимальной из точки $q(T(q_0))$, то есть $q(t) = \hat{q}(t - T(q_0), q(T(q_0)))$. Фактически траектория $q(t)$ начинается в точке $q_0 + \Delta q$ и движется с управлением, оптимальным для точки q_0 пока оно не станет тождественным 0, а потом переключается на настоящее оптимальное управление.

Траектории $q(t)$ и $\hat{q}(t, q_0)$ движутся с одинаковым управлением, но начинаются в разных точках. Проследим за ними до момента $t = T(q^0)$ (для упрощения записи будем опускать аргументы t и q^0 и писать, например, $\hat{q}_1$ вместо $\hat{q}_1(t, q^0)$ или q_1 вместо $q_1(t)$):

$$\mathfrak{B}(q^0 + \Delta q) - \mathfrak{B}(q^0) \leq \int_0^{T(q^0)} (f(q_1) - f(\hat{q}_1)) dt + \mathfrak{B}(\Delta q) \leq \int_0^{T(q^0)} \langle f'(q_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle dt + \mathfrak{B}(\Delta q).$$

Под знаком интеграла в правой части удобно заменить $f'(q_1)$ на $f'(\hat{q}_1)$, так как выполнено равенство

$$\int_0^{T(q^0)} \langle f'(\hat{q}_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle dt = \langle \mathfrak{B}'(q^0), \Delta q \rangle. \quad (3.10)$$

Докажем это равенство. Действительно, интегрируя по частям, $\frac{d}{dt}\hat{p}^1 = f'(\hat{q}_1)$, получаем

$$\int_0^{T(q^0)} \langle f'(\hat{q}_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle dt = \langle \hat{p}^1, q_1 - \hat{q}_1 \rangle \Big|_0^{T(q^0)} - \int_0^{T(q^0)} \langle \hat{p}^1, q_2 - \hat{q}_2 \rangle dt.$$

Повторяя этот процесс h раз, $\frac{d}{dt}\hat{p}^{k+1} = -\hat{p}^k$, получаем

$$\int_0^{T(q^0)} \langle f'(\hat{q}_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle dt = \left(\sum_{k=1}^h \langle \hat{p}^k, q_k - \hat{q}_k \rangle \Big|_0^{T(q^0)} \right) - \int_0^{T(q^0)} \langle \hat{p}^h, u - \hat{u} \rangle dt.$$

Интеграл в правой части обнуляется, так как $u(t) = \hat{u}(t)$ при $t \in [0; T(q^0)]$. Учитывая $\hat{p}^k(T(q^0)) = 0$, $-\mathfrak{B}'(q^0) = (\hat{p}^k(0))_{k=1}^h$ и $q_k(0) - \hat{q}_k(0) = \Delta q_k$ получаем равенство (3.10). Таким образом,

$$\mathfrak{B}(q^0 + \Delta q) - \mathfrak{B}(q^0) - \langle \mathfrak{B}'(q^0), \Delta q \rangle \leq \int_0^{T(q^0)} \langle f'(q_1) - f'(\hat{q}_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle dt + \mathfrak{B}(\Delta q).$$

Из условия, что функция $f \in C^2$ выпукла, получаем, что если траектории $\hat{q}_1$ и q_1 при $t \in [0; T(q^0)]$ лежат в шаре радиуса R с центром в начале координат, то

$$0 \leq \langle f'(q_1) - f'(\hat{q}_1), q_1 - \hat{q}_1 \rangle \leq \max_{|x| \leq R} |f''(x)| |q_1 - \hat{q}_1|^2.$$

По лемме 3.8 функция $T(q^0)$ непрерывна (а, значит, ограничена) в окрестности q^0 . Поэтому

$$\mathfrak{B}(q^0 + \Delta q) - \mathfrak{B}(q^0) - \langle \mathfrak{B}'(q^0), \Delta q \rangle \leq C \sup_{t \in [0; T(q^0)]} |q_1(t) - \widehat{q}_1(t)|^2 + \mathfrak{B}(\Delta q).$$

для некоторой константы $C > 0$.

Поскольку $\frac{d^h}{dt^h}(q_1 - \widehat{q}_1) \equiv 0$ при $t \in [0; T(q^0)]$, то $q_1(t) - \widehat{q}_1(t)$ есть многочлен по t степени $h - 1$, коэффициенты которого есть векторы, линейно выражающиеся с помощью факториалов через Δq . Поэтому выражение $\sup_{t \in [0; T(q^0)]} |q_1(t) - \widehat{q}_1(t)|^2$ оценивается квадратом нормы $|\Delta q|$. Итак, для некоторой константы $C' > 0$ выполнено

$$\mathfrak{B}(q^0 + \Delta q) - \mathfrak{B}(q^0) - \langle \mathfrak{B}'(q^0), \Delta q \rangle \leq C' |\Delta q|^2 + \mathfrak{B}(\Delta q).$$

Осталось заметить, что $\mathfrak{B}(\Delta q) \leq C'' |\Delta q|^{h\gamma+1}$ в окрестности начала координат по лемме 3.5. $\square$

Основная трудность в оставшейся части доказательства липшицевости $\mathfrak{B}'(q)$ заключается в том, что функция Беллмана $\mathfrak{B}(q)$ может не быть дважды дифференцируемой (и это по существу так). Докажем липшицевость отображения $E = -\mathfrak{B}'$ с помощью следующей леммы (мы докажем ее в чуть более широкой форме чем нужно)

Лемма 3.13. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ – произвольная функция. Если для некоторых констант $C \geq C'$ и для всех q_1, q_2 из некоторой открытой выпуклой области $V \subset \mathbb{R}^m$ выполнено

$$C' |\Delta q|^2 \leq g(q_2) - g(q_1) - \langle g'(q_1), \Delta q \rangle \leq C |\Delta q|^2,$$

где $\Delta q = q_2 - q_1$, то $g' : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m*}$ есть липшицево отображение в этой области с константой Липшица $\max\{|C|, |C'|\}$. Если к тому же $C' > 0$ (или $C < 0$), то отображение g' является билипшицевым в этой области с константами Липшица $\min\{|C|, |C'|\}$ и $\max\{|C|, |C'|\}$.

Доказательство. Будем считать, что в $\mathbb{R}^m$ задано скалярное произведение, и, следовательно, $g'(q) \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\omega(q) \geq 0$ – шапочка, то есть ω – неотрицательная, бесконечно-гладкая функция с компактным носителем $\text{supp } \omega \subseteq \{|q| \leq 1\}$ и $\int \omega(q) dq = 1$. Обозначим $\omega_k(q) = k\omega(kq)$ и $g_k = g * \omega_k$ (свертка). Тогда g_k есть бесконечно-гладкая функция, $g'_k = g' * \omega_k$. Зафиксируем точки $q_1, q_2 \in V$. Тогда

$$\Lambda_k(q_1, q_2) = g_k(q_2) - g_k(q_1) - g'_k(q_1) \Delta q = \int_{|y| \leq \frac{1}{k}} (g(q_2 - y) - g(q_1 - y) - g'(q_1 - y) \Delta q) \omega_k(y) dy$$

Область V открыта, поэтому $q_j - y \in V$ если $|y| \leq \frac{1}{k}$ при достаточно больших k . Итак,

$$C' |\Delta q|^2 \leq \Lambda_k(q_1, q_2) = g''_k(q_1) [\Delta q; \Delta q] + o(|\Delta q|^2) \leq C |\Delta q|^2.$$

Подставив $\lambda\Delta q$ вместо Δq в это неравенство и устремив λ к 0 получаем, что для всех $q, \Delta q$ и достаточно больших k выполнено

$$C'|\Delta q|^2 \leq g_k''(q)[\Delta q; \Delta q] \leq C|\Delta q|^2.$$

Итак, для всех $q \in V$ выполнено $\|g_k''(q)\| \leq C'' = \max\{|C|, |C'|\}$. Область V выпукла, поэтому отрезок соединяющих точки $q_1, q_2 \in V$ в ней содержится. Следовательно,

$$|g_k'(q_2) - g_k'(q_1)| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} |g_k''(q_1 + \theta(q_2 - q_1))| |\Delta q| \leq C'' |\Delta q|.$$

Устремив k к бесконечности (при фиксированных q_1 и q_2) получаем, искомое:

$$|g'(q_2) - g'(q_1)| \leq C'' |\Delta q|.$$

Пусть теперь $C' > 0$ (случай $C < 0$ аналогичен). Покажем билипшицевость отображения g :

$$g_k'(q_2) - g_k'(q_1) = \int_0^1 g_k''(q_1 + \theta\Delta q) \Delta q d\theta.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} |\langle g_k'(q_2) - g_k'(q_1), \Delta q \rangle| &= \left| \int_0^1 g_k''(q_1 + \theta\Delta q) [\Delta q, \Delta q] d\theta \right| = \\ &= \int_0^1 g_k''(q_1 + \theta\Delta q) [\Delta q, \Delta q] d\theta \geq C' |\Delta q|^2. \end{aligned}$$

Итак, при любых $q_1, q_2 \in V$ и достаточно больших k выполнено

$$|\langle g_k'(q_2) - g_k'(q_1), \Delta q \rangle| \geq C' |\Delta q|^2.$$

устремив k к бесконечности (при фиксированных q_1 и q_2), получаем

$$|\langle g'(q_2) - g'(q_1), \Delta q \rangle| \geq C' |\Delta q|^2.$$

Учитывая, что $|g'(q_2) - g'(q_1)| |\Delta q| \geq |\langle g'(q_2) - g'(q_1), \Delta q \rangle|$, получаем

$$|g'(q_2) - g'(q_1)| \geq C' |\Delta q|,$$

что означает билипшицевость отображения g .

□

3.6 Доказательство теорем об оптимальном потоке

Соберем теперь все полученные факты об оптимальном синтезе в задаче (3.1) воедино.

Доказательство теоремы 3.1. Если $\widehat{q}(\cdot, q_0)$ – оптимальная траектория, начинающаяся в q_0 , и $t_0 \geq 0$, то оптимальная траектория из точки $q_1 = \widehat{q}(t_0, q_0)$ совпадает с частью оптимальной траектории $\widehat{q}(\cdot, q_0)$ при $t \geq t_0$, т.е.

$$\widehat{q}(t_1, \widehat{q}(t_0, q_0)) = \widehat{q}(t_0 + t_1, q_0) \quad \text{при} \quad t_0, t_1 \geq 0. \quad (3.11)$$

Действительно, ни функционал J , ни правая часть управляемой системы (3.1) не зависят явно от времени. Поэтому этот факт немедленно следует из существования и единственности оптимальной траектории (леммы 3.1 и 3.2) и равенства $\int_0^\infty = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^\infty$

По-другому можно сказать, что на U^h определено действие P полугруппы $\mathbb{R}_+$ (оптимальный правосторонний поток) следующим образом:

$$P^t(q_0) = \widehat{q}(t, q_0), \quad t \geq 0$$

Из определения P немедленно получаем, что $P^0 = \text{id}$. Из (3.11) следует, что

$$P^{t_0} \circ P^{t_1} = P^{t_0+t_1} \quad t_0, t_1 \geq 0.$$

Поток P^t является непрерывным по лемме 3.3.

Пункт (ii) фактически доказан в леммах 3.6 и 3.8 и следствии 3.1. Осталось только заметить, что функция $\rho(q) = \max(|\frac{q_1}{c_1}|^{\frac{1}{h}}, |\frac{q_2}{c_2}|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |\frac{q_h}{c_h}|)$, построенная в лемме 3.6 тривиально удовлетворяет неравенствам

$$D_1 \max(|q_1|^{\frac{1}{h}}, |q_2|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |q_h|) \leq \rho(q) \leq D_2 \max(|q_1|^{\frac{1}{h}}, |q_2|^{\frac{1}{h-1}}, \dots, |q_h|),$$

где $\frac{1}{D_1} = \max |c_k|$ и $\frac{1}{D_2} = \min |c_k|$.

Докажем теперь сюръективность отображения P^t при $t \geq 0$, заявленную в пункте (iii). Зафиксируем $t_0 \geq 0$ и произвольную точку q^1 . Требуется доказать, что найдется такая точка q^0 , что $P^{t_0}q^0 = q^1$. Обозначим⁹ $r = \rho(q^1)$. Покажем сначала, что найдется такое достаточно большое число $R > 0$, что если $\rho(q^0) \geq R$ для некоторой точки q^0 , то $\rho(P^t q^0) > r$ для всех $t \in [0, t_0]$. Действительно, двигаясь в обратном времени от произвольной точки шара $\{q : \rho(q) \leq r\}$ вдоль траекторий управляемой системы (3.1) за время $-t_0$ можно замести лишь ограниченное множество. Это связано с тем, что $(h - k + 1)$ -ая производная от $q_k(t)$ есть $u(t) \in \Omega$. Поэтому найдется такая константа $C > 0$, что если $\rho(q(0)) = r$, то $\rho(q(t)) \leq C(1 + |t|)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ независимо от выбора управления $u(t) \in \Omega$.

⁹От выбора констант $c_k > 0$ в этом рассуждении ничего не зависит. Можно, например, считать здесь, что $c_k = 1$ для всех k .

Итак, для любой такой точки q^0 , что $\rho(q^0) = R$ выполнено $\rho(P^t q^0) > r$ при $t \in [0; t_0]$. Рассмотрим непрерывную гомотопию P^t шара $B_R = \{q : \rho(q) \leq R\}$ при $t \in [0; t_0]$. Образ границы шара ∂B_R при этой гомотопии ни разу не пересекает сферу $\{q : \rho(q) = r\}$, а, значит, $q^1 \notin P^t \partial B_R$ при $t \in [0; t_0]$. Докажем, что отсюда следует, что найдется такая точка $q^0 \in B_R$, что $P^{t_0} q^0 = q^1$ (своего рода обобщение теоремы о промежуточном значении).

Предположим противное: пусть $q^1 \notin P^{t_0} B_R$. Обозначим через $\pi(q)$ проекцию точки q на сферу ∂B_R вдоль луча l , исходящего из точки q^1 и проходящего через q , то есть $\pi(q) = l \cap \partial B_R$. Проекция π непрерывна и корректно определена для $q \neq q^1$. Заметим, что $\pi|_{\partial B_R} = \text{id}$. Сконструируем теперь гомотопию сферы ∂B_R по себе следующим образом. Сначала используем гомотопию с помощью проекции потока P^t , а именно $\pi \circ P^t$ при t от 0 до t_0 , а потом применим гомотопию с помощью гомотетии $g(\lambda)$, а именно $\pi \circ P^{t_0} \circ g(\lambda)$ при λ от 1 до 0. Первая гомотопия корректно определена, так как $q^1 \notin P^t \partial B_R$ при $t \in [0; t_0]$. Вторая гомотопия определена корректно, так как $g(\lambda) B_R \subset B_R$ при $\lambda \in [0; 1]$ и $q^1 \notin P^{t_0} B_R$. В первой гомотопии при $t = 0$ получаем $\pi \circ P^0|_{\partial B_R} = \text{id}$. Стыковка обеих гомотопий непрерывна, так как $g(1) = \text{id}$.

Таким образом, мы построили непрерывную гомотопию сферы ∂B_R по себе в точку $\pi(P^{t_0}(0))$, так как $g(0)(q) = 0$ для любой точки q . Однако, такая гомотопия существовать не может, так сфера не стягиваема. $\square$

Предположим теперь дополнительно, что функция f является дважды дифференцируемой и перейдем к доказательству теоремы 3.2.

Доказательство теоремы 3.2. Нормальность оптимальной траектории и единственность сопряженной функции, заявленные в пункте (i) теоремы 3.2, доказаны в лемме 3.9.

Докажем теперь пункт (ii), а именно, что $\hat{p}(t_0, q^0) = E(P^{t_0} q^0)$ при любых q^0 и $t_0 \geq 0$. Для этого обозначим $q^1 = P^{t_0} q^0$ и рассмотрим траекторию $q(t) = P^t q^1$. Тогда траектория $q(t)$ является оптимальной для начальной точки q^1 . Но $q(t) = P^{t_0+t} q^0$, поэтому пара функций $q(t)$ и $p(t) = \hat{p}(t+t_0, q^0)$ удовлетворяет системе (3.4) принципа максимума Понтрягина. Поэтому, в силу единственности сопряженной функции, имеем $p(t) = \hat{p}(t, q^1)$. Следовательно,

$$\hat{p}(t_0, q^0) = \hat{p}(0, q^1) = E(q^1) = E(P^{t_0} q^0).$$

В пункте (iii) утверждается, во-первых, что отображение E есть гомеоморфизм U^h на $E(U^h) = U^{h*}$. Этот факт доказан в лемме 3.11. Во-вторых, утверждается локальная липшицевость функции E — это есть в точности пара лемм 3.12 и 3.13.

Осталось доказать пункт (iv), то есть показать, что липшицева поверхность $L = \{(q, E(q))\}$ является лагранжевой. Пусть Γ — произвольная замкнутая липшицева кривая в L . Тогда $p = -\mathfrak{B}'(q)$ на L по лемме 3.11, и, следовательно,

$$\int_{\Gamma} p dq = - \int_{\Gamma} \mathfrak{B}'(q) dq = - \int_{\Gamma} d \mathfrak{B}(q) = 0$$

так как форма $d \mathfrak{B}(q)$ является точной. $\square$

3.7 Достаточность принципа максимума Понтрягина в нильпотентно-выпуклой задаче

Важно отметить, что из выпуклости задачи (3.1) вытекает, что принцип максимума Понтрягина является не только необходимым условием оптимальности траектории, но и достаточным. А именно верна следующая

Теорема 3.3. *Предположим, что в задаче (3.1) выполнены условия теоремы 3.2. Рассмотрим произвольную траекторию $q(t), p(t), u(t)$ системы (3.4) с $\lambda_0 > 0$, определенную при всех $t \geq 0$. Если $\langle p^k(t), q_k(t) \rangle \rightarrow 0$ при любом $k = 1, \dots, h$ и $t \rightarrow +\infty$, то траектория $q(t)$ является оптимальной для начальной точки $q^0 = q(0)$.*

Доказательство. Доказательство почти стандартно. Без ограничения общности, будем считать, что $\lambda_0 = 1$. Обозначим для краткости $\hat{q}(t) = \hat{q}(t, q^0)$ – оптимальную траекторию из точки $q^0 = q(0)$. Достаточно доказать, что $J(\hat{q}_1) - J(q_1) \geq 0$. Итак, в силу выпуклости f имеем

$$J(\hat{q}_1) - J(q_1) = \int_0^\infty (f(\hat{q}_1(t)) - f(q_1(t))) dt \geq \int_0^\infty \langle f'(q_1(t)), \hat{q}_1(t) - q_1(t) \rangle dt.$$

Поскольку $\dot{p}^1 = f'(q_1)$, то интегрируя по частям получаем

$$J(\hat{q}_1) - J(q_1) \geq \langle p^1(t), \hat{q}_1(t) - q_1(t) \rangle \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \langle p^1(t), \dot{\hat{q}}_1(t) - \dot{q}_1(t) \rangle dt.$$

Первое слагаемое обнуляется и при $t = 0$ (так как $q_1(0) = \hat{q}_1(0) = q_1^0$) и при $t \rightarrow \infty$ (так как $\hat{q}_1(t) = 0$ при $t \geq T(q^0)$ и $\langle p^1(t), q_1(t) \rangle \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Далее снова интегрируем по частям, используя $\dot{p}^2 = -p^1$. Повторяя индуктивно этот процесс h раз, получаем

$$J(\hat{q}_1) - J(q_1) \geq - \int_0^\infty \langle p^h(t), \hat{u}(t) - u(t) \rangle dt = \int_0^\infty \langle p^h(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle dt.$$

Подынтегральное выражение не отрицательно, так как произведение $\langle p^h(t), v \rangle$ достигает максимума по $v \in \Omega$ при $v = u(t)$. $\square$

Таким образом, если траектория системы (3.4) принципа максимума Понтрягина с $\lambda_0 > 0$ попадает в начало координат за конечное время, то она оптимальна. Более того, если траектория системы (3.4) хотя бы стремится к началу координат при $t \rightarrow +\infty$, то она оптимальна, и, на самом деле, попадает в начало координат за конечное время по теореме 3.1.

Следствие 3.2. *Поднятия оптимальных траекторий задачи 3.1 в кокасательное расслоение T^*U^h с помощью принципа максимума Понтрягина образуют локально липшицево многообразие $M_+ = \{(q, E(q)) | q \in U^h\}$. Каждая оптимальная траектория задачи 3.1 приходит в начало координат за конечное время, и других стремящихся при $t \rightarrow +\infty$ к началу координат траекторий гамильтоновой системы 3.4 не существует.*

Следствие 3.3. *Предположим, что выполняются условия теоремы 3.2 и $q(t), p(t), u(t)$ – некоторая траектория системы (3.4) с $\lambda_0 > 0$ определенная при всех $t \geq 0$. Тогда если для некоторого T_0 выполнено $q^1(t) = 0$ при $t \geq T_0$, то траектория $q(t)$ является оптимальной для начальной точки $q^0 = q(0)$.*

Доказательство. Аналогично лемме 3.9 получаем: поскольку $q^1(t) = 0$ при $t \geq T_0$, то в силу системы (3.4) получаем, что $q^2(t) = \dots = q^h(t) = u(t) = 0$ при $t \geq T_0$. Произведение $\langle p_h(t), v \rangle$ достигает максимума по $v \in \Omega$ при $v = u(t)$. Поэтому из $0 \in \text{Int } \Omega$ следует, что $p_h(t) = 0$ при $t \geq T_0$, а, значит, и $p_1(t) = p_2(t) = \dots = p_{h-1}(t) = 0$ при $t \geq T_0$. Осталось применить теорему 3.3. $\square$

Рассмотрим для системы (3.4) принципа максимума Понтрягина (с $\lambda_0 > 0$) интегральные воронки L и L' начала координат при $t \leq 0$ и $t \geq 0$ соответственно (см. замечание 3.1). Другими словами, L – это объединение всех траекторий системы (3.4) входящих в начало координат, а L' – выходящих из начала координат.

Следствие 3.4. *Предположим, что выполняются условия теоремы 3.2. Тогда $L \cap L' = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $(q_0, p^0) \in L \cap L'$. Так как $(q_0, p^0) \in L'$, то должна существовать траектория $(q^+(t), p^+(t), u^+(t))$ системы (3.4), начинающаяся в 0 и заканчивающаяся в (q_0, p^0) . Аналогично должна существовать траектория $(q^-(t), p^-(t), u^-(t))$, идущая обратно. Поскольку система (3.4) автономна, то эти две траектории можно объединить в одну траекторию $(q(t), p(t), u(t))$, начинающуюся и заканчивающуюся в начале координат, и проходящую в некоторый промежуточный момент времени через точку (q_0, p^0) . Если продолжить эту траекторию 0 после конечного момента попадания в начало координат, мы получим по теореме 3.3 оптимальную траекторию, начинающуюся в начале координат, и, следовательно, тождественно нулевую. $\square$

3.8 Модификация для конечного промежутка времени

Отметим, что если в задаче (3.1) заменить бесконечный промежуток времени на конечный:

$$J(x) = \int_0^{t_0} f(x(t)) dt \rightarrow \inf,$$

где $t_0 > 0$ – фиксированное число, то оптимальные траектории не изменятся для тех начальных точек q^0 , в которых $T(q^0) \leq t_0$ (если $f \in C^2$). Действительно, при $t_0 < \infty$ точно также доказывается существование и единственность оптимальной траектории и единственность сопряженной функции $p(t)$. Отличие от случая $t_0 = \infty$ заключается в том, что теперь, из условий трансверсальности следует, что $p(t_0) = 0$. Поэтому, если $T(q^0) \leq t_0$, то достаточно обрезать оптимальную траекторию в задаче (3.1) на бесконечном промежутке на промежуток $[0; t_0]$, и она будет удовлетворять принципу максимума Понтрягина и в задаче с $t_0 < \infty$ и, в силу выпуклости задачи, будет оптимальной (доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3).

3.9 Обратимость оптимального потока

Как уже было сказано выше, оптимальный поток P^t не является биекцией. Под действием оптимального потока все точки попадают в начало координат за конечное время. Более того, оптимальный поток может склеивать точки и до попадания в начало координат. Этот феномен возникает когда множество допустимых управлений Ω не является сильно выпуклым (см. главы 4 и 5, или, например, [61, 68]).

В этом параграфе мы докажем обобщение теоремы 1.3 для задачи (3.1) и покажем, что если Ω является сильно выпуклым множеством с гладкой границей, то оптимальные траектории могут пересекаться только в начале координат. В этом случае можно корректно доопределить действие $P^t : U \setminus 0 \rightarrow U \setminus 0$ для отрицательных $t < 0$.

Теорема 3.4. *Предположим, что в задаче (3.1) выполняются условия теоремы 3.2, а множество Ω является отрезком (если $\dim U = 1$) или выпуклым множеством с гладкой границей $\partial\Omega$, (гауссова) кривизна которой не вырождается (если $\dim U \geq 2$). Тогда если $t \geq 0$, то*

$$P^t q^1 = P^t q^0 \neq 0; \quad \implies \quad q^1 = q^0.$$

Доказательство. Рассмотрим опорную функцию s_Ω множества Ω . Так как Ω является выпуклым множеством с гладкой границей, то функция s_Ω является строго выпуклой (полюса Ω^0 множества Ω обязана быть строго выпуклой). И обратно, поскольку множество Ω является строго выпуклым, то функция s_Ω лежит в классе $C^1(U \setminus 0)$. На самом деле верно $s_\Omega \in C^2(U \setminus 0)$, так как кривизна границы Ω не вырождается (см., например, [77]).

Производная опорной функции s_Ω есть

$$ds_\Omega(\xi) = \arg \max_{u \in \Omega} \langle \xi, u \rangle \quad \text{при} \quad \xi \neq 0.$$

Поскольку $ds_\omega \in C^1(U \setminus 0)$, то по теореме существования и единственности Коши для системы (3.4) мы получаем, что единственность может нарушаться только в точках подпространства¹⁰ $p^h = 0$.

Таким образом, если через некоторую точку (q^0, p_0) проходит более одной траектории принципа максимума (3.4), то, как минимум, $p_0^h = 0$. Покажем, что необходимо $p_0^{h-1} = 0$. Действительно, если $p_0^{h-1} \neq 0$, то при достаточно малых t выполнено

$$|p^h(t)| \geq \left| \frac{p_0^{h-1}}{2} \right| |t|$$

на любой траектории $(q(t), p(t))$ проходящей через точку (q^0, p_0) при $t = 0$. Таким образом, при малых t траектория $(q(t), p(t))$ пересекает подпространство $p^h = 0$ только в одной точке,

¹⁰По-видимому требования на множество Ω в теореме 3.4 можно ослабить. На самом деле достаточно, чтобы производная опорной функции s_Ω была липшицевой. Хорошим кандидатом на класс множеств Ω является класс сильно выпуклых множеств произвольного ненулевого радиуса $R \neq 0$.

и потому единственна и при $t \geq 0$, и при $t \leq 0$. Продолжая процесс по индукции получаем, что единственность решения системы (3.4) может теряться только в точках подпространства $\{p^1 = p^2 = \dots = p^h = 0\}$.

Если же точка (q^0, p_0) лежит на L , то $p_0 = E(q^0) = 0$. Отображение E инъективно, поэтому $q^0 = 0$. Итак, если две оптимальные траектории $q^1(t)$ и $q^2(t)$ пересеклись в некоторой точке q^0 , то их гамильтоновы поднятия $(q^j(t), p_j(t))$, $j = 1, 2$, в кокасательное расслоение также пересеклись в точке $(q^0, E(q^0))$. Поэтому оптимальные траектории могут пересекаться только в точке $q_0 = 0$. $\square$

В условиях теоремы 3.4 мы получаем возможность определить $P^t q$ для отрицательных t и $q \neq 0$. Действительно, отображение $P^{|t|}$ является сюръективным по теореме 3.2, поэтому для любой точки q^1 найдется точка q^0 такая, что $P^{|t|} q^0 = q^1$. В условиях теоремы 3.4 если $q^1 \neq 0$ то точка q^0 единственна. Поэтому мы можем при $t < 0$ определить $P^t q^1 = q^0$. Отображение

$$P^t : U^h \setminus 0 \longrightarrow U^h \setminus \{q \in U^h : T(q) \geq t\} \text{ при } t < 0$$

непрерывно, так как отображение E непрерывно, а интегральная воронка зависит непрерывно от начальных данных (см. [62], стр. 68, теорема 1).

Следствие 3.5. *Предположим выполнены условия теоремы 3.4 и $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$P^{t_1} q \neq 0 \implies P^{t_0+t_1} q = P^{t_0} \circ P^{t_1} q$$

Итак, оптимальный поток P^t естественно доопределяется для отрицательных t с сохранением группового свойства до тех пор, пока точка под действием потока не попадает в начало координат.

3.10 Примеры

Пример 3.1. Предположим, что в задаче (3.1) множество Ω является строго выпуклым, $\partial\Omega = \text{extr } \Omega$, а функция f удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Покажем, что управление на любой (не обязательно оптимальной) траектории принципа максимума Понтрягина (3.4) (с $\lambda_0 > 0$) может иметь лишь конечное или счетное число точек разрыва. Причем если $f''(0) \succ 0$, то множество S точек разрыва управления может иметь не более двух точек накопления: момент попадания траектории в начало координат и момент схода траектории из начала координат.

Рассмотрим произвольную траекторию $(q(t), p(t), u(t))$ системы (3.4) с $\lambda_0 = 1$. Управление в системе (3.4) удовлетворяет условию

$$u \in \arg \max_{u \in \Omega} \langle p^h, u \rangle = \partial s_\Omega(p^h),$$

где s_Ω – опорная функция множества Ω . Множество Ω является строго выпуклым, поэтому $s_\Omega \in C^1(U \setminus 0)$. Итак, управление $u(t)$ может быть разрывно только в такие моменты t , что $p^h(t) = 0$:

$$\mathbb{T} = \{t \geq 0 : p^h(t) = 0\}.$$

Исследуем структуру множества $\mathbb{T}$, которое, очевидно, замкнуто. По теореме Кантора-Бендиксона его можно представить в виде объединения совершенного множества $\mathbb{T}_p$ и не более чем счетного множества $\mathbb{T}_c$. Таким образом, $\mathbb{T} = \mathbb{T}_p \sqcup \mathbb{T}_c$. Покажем, что множество $\mathbb{T}_p$, если не пусто, является либо отрезком, либо замкнутой полупрямой, либо совпадает с $\mathbb{R}$.

Предположим $\mathbb{T}_p \neq \emptyset$. Выберем произвольный момент $t \in \mathbb{T}_p$. Тогда в любой окрестности t есть бесконечное (континуальное) число элементов $\tau \in \mathbb{T}_p$. Поэтому из $p^h(t) = p^h(\tau) = 0$ вытекает, что $\dot{p}^h(t) = 0$. Таким образом $p^{h-1}(t) = 0$ для любого $t \in \mathbb{T}_p$. Аналогично приходим к выводу, что $p^1(t) = \dots = p^h(t) = 0$ для любого $t \in \mathbb{T}_p$. Дифференцируя p^1 получаем, что $f'(q_1(t)) = 0$ в точках $\mathbb{T}_p$. Поскольку функция f строго выпукла и достигает минимума в 0, то необходимо $q_1(t) = 0$ при $t \in \mathbb{T}_p$. Продолжая дифференцировать, приходим к выводу, что $q_1(t) = \dots = q_h(t) = 0$ для любого $t \in \mathbb{T}_p$.

Обозначим $a = \inf \mathbb{T}_p$ и $b = \sup \mathbb{T}_p$. Если $a < t < b$, то точка $(q(t), p(t))$ лежит одновременно в L и L' (см. замечание 3.1), которые по следствию 3.4 пересекаются только в 0. Поэтому $q(t) = p(t) = 0$ при всех $t \in (a; b)$. Таким образом, $\mathbb{T}_p$ либо пусто, либо есть отрезок, полупрямая, или прямая. Итак, $S \subset \mathbb{T}_c \cup \{a, b\}$, и поэтому множество S не более чем счетно.

Предположим теперь дополнительно, что $f''(0) \succ 0$. Пусть $t_k \in \mathbb{T}_c$ и $t_k \rightarrow \tau$. Без ограничения общности $\tau = 0$. Покажем, что $p^j(0) = 0$ и $q_j(0) = 0$ для всех j . Поскольку $p^h(t_k) = 0$, то по непрерывности $p^h(0) = 0$. Так как $|p^h(t)| \geq \frac{1}{2}|p^{h-1}(0)||t|$ при малых t , то из $p^h(t_k) = 0$ следует, что с необходимостью $p^{h-1}(0) = 0$. Поэтому $|p^h(t)| \geq \frac{1}{4}|p^{h-2}(0)|t^2$ при малых t , и опять с необходимостью $p^{h-2}(0) = 0$. Действуя аналогично, получаем, что $p^j(0) = 0$ для всех j . Предположим теперь $q_1(0) \neq 0$. Тогда $f'(q_1(0)) \neq 0$ и $|p^h(t)| \geq \frac{1}{2} \frac{1}{h!} |f'(q_1(0))| |t|^h$ при малых t , что не возможно. Предположим $q_2(0) \neq 0$ тогда из $f''(0) \succ 0$ получаем $|f'(q_1(t))| \geq C|q_1(t)| \geq \frac{1}{2}C|q_2(0)||t|$ при малых t . Поэтому $|p^h(t)| \geq C'|q_2(0)||t|^{h+1}$ при малых t , что опять же не возможно. Повторяя этот процесс, приходим к выводу, что $q_j(0) = 0$ при всех j . Осталось заметить, что если $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ — три различные предельные точки множества $\mathbb{T}_c$, то $(q(\tau_m), p(\tau_m)) = 0$, $m = 1, 2, 3$, и следовательно, $(p(t), q(t)) \in L \cap L'$ при любом $t \in (\tau_1; \tau_3)$. По следствию 3.4 $(q(t), p(t)) = 0$, и потому $[\tau_1; \tau_3] \subset \mathbb{T}_p$. Таким образом τ_2 не может быть предельной точкой множества $\mathbb{T}_c$ и мы пришли к противоречию.

Пример 3.2. Предположим, что в задаче (3.1) функция $f(x) \in C^2$ удовлетворяет условию $f(\lambda x) = \lambda^\gamma f(x)$ при некотором $\gamma \geq 1$ и любом $\lambda \geq 0$. Оказывается, что в этом случае можно перенести оптимальный поток P^t на фактор-пространство (сферу) по действию g масштабной группы симметрий $\mathbb{R}^+$, описанной в (3.6). Это позволяет, например, с успехом применять теорему о причесывании ежа (формулу Лефшеца).

Найдем в этом случае связь оптимального потока P^t и действия g . Действие g сохраняет оптимальные траектории. Действительно, пусть $\hat{q}(t, q^0)$ — оптимальная траектория из точки q^0 . Рассмотрим траекторию $q(t) = g(\lambda)\hat{q}(t/\lambda, q^0)$, начинающуюся в точке $g(\lambda)q^0$. Тогда

$$\mathfrak{B}(g(\lambda)q^0) \geq J(q) = \int_0^\infty f(\lambda^h \hat{q}_1(t/\lambda, q^0)) dt = \lambda^{h\gamma+1} \int_0^\infty f(\hat{q}_1(t, q^0)) dt = \lambda^{h\gamma+1} \mathfrak{B}(q^0)$$

Заменяя λ на $1/\lambda$ получаем обратное неравенство, и следовательно, траектория $g(\lambda)\hat{q}(t/\lambda, q^0)$ является оптимальной для начальной точки $g(\lambda)q^0$.

Таким образом, для оптимального потока и времени достижения начала координат выполняется

$$P^{\lambda t}g(\lambda)q^0 = g(\lambda)P^tq^0 \quad \text{и} \quad T(g(\lambda)q^0) = \lambda T(q^0).$$

Поток P^t не является эквивариантным, из-за того, что при действии $g(\lambda)$ время изменяется в λ раз. Однако скорость движения вдоль потока P^t можно перепараметризовать таким образом, чтобы новый поток уже был эквивариантным.

Итак, определим $\hat{P}^s q^0$ следующим образом

$$\hat{P}^s q^0 = P^t q^0,$$

где $s \geq 0$ и $t \in [0; T(q^0))$ связаны равенствами

$$s = \ln \frac{T(q^0)}{T(q^0) - t} \quad \text{и} \quad t = T(q^0)(1 - e^{-s}).$$

При фиксированном $q^0 \neq 0$ отображение $s(t, q^0)$ монотонно отображает $[0; T(q^0))$ на $[0; +\infty)$. Легко видеть, что $t(s, g(\lambda)q^0) = \lambda t(s, q^0)$. Поэтому

$$\hat{P}^s g(\lambda)q^0 = P^{t(s, g(\lambda)q^0)}g(\lambda)q^0 = P^{\lambda t(s, q^0)}g(\lambda)q^0 = g(\lambda)P^{t(s, q^0)}q^0 = g(\lambda)\hat{P}^s q^0$$

Следовательно, поток $\hat{P}^s$ является эквивариантным.

Таким образом, мы построили на фактор-пространстве $(U^h \setminus 0)/g \simeq S^{h \dim U - 1}$ поток $\hat{P}^s/g$ определяющий оптимальные траектории. Более того, если множество Ω удовлетворяет условиям теоремы 3.4, то поток $\hat{P}^s/g$ обратим и определен для всех $s \in \mathbb{R}$. Любая дополнительная симметрия (как, например в примере 3.4), позволяет уменьшить размерность фактор-пространства.

Пример 3.3. Простой показательный пример дает задача Фуллера.

$$\int_0^\infty x^2 \rightarrow \min, \quad \dot{x} = y, \quad |\dot{y}| \leq 1, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

Фактор-пространство $(\mathbb{R}^2 \setminus 0)/g$ является окружностью. Поток $\hat{P}^s/g$ обратим и определен для всех $s \in \mathbb{R}$ по теореме 3.4. Более того, не трудно показать, что $\hat{P}^s/g$ не имеет неподвижных точек (см. пример 3.5). Поэтому $\hat{P}^s/g$ – это вращение по окружности, а оптимальные траектории – это кусочно-гладкие спирали¹¹ со счетным числом переключений и за конечное время попадающие в начало координат (подробнее см. [32]).

В исходном расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$ оптимальные траектории образуют многообразие L , имеющее особенность конического типа в начале координат. Более того, удастся

¹¹На любом промежутке $[0; T(q^0) - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

доказать (см. [31]), что в окрестности любой особой траектории второго порядка множество траекторий входящих в данную точку на особой траектории (или сходящих с нее) имеет коническую особенность того же типа. Доказательство основано на процедуре раздутия особенности, аналогичной тем, что построены в главах 4 и 9.

Пример 3.4. Рассмотрим случай, когда x и y в задаче Фуллера двумерны:

$$\int_0^\infty \langle x, x \rangle \rightarrow \min, \quad \dot{x} = y, \quad |\dot{y}| \leq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

Эта задача обладает дополнительной симметрией: группа $SO(2, \mathbb{R})$, действуя одновременным поворотом векторов x и y , очевидно сохраняет оптимальные траектории. Обозначим это действие через κ .

Оптимальный поток $\hat{P}^s/g$ на фактор-пространстве $(\mathbb{R}^4 \setminus 0)/g$ можно дополнительно профакторизовать по действию группы $SO(2, \mathbb{R})$. Пространство $(\mathbb{R}^4 \setminus 0)/g$ есть трехмерная сфера. Отображение факторизации $(\mathbb{R}^4 \setminus 0)/g \rightarrow (\mathbb{R}^4 \setminus 0)/(g \times \kappa)$ есть в точности расслоение Хопфа пространства $S^3 = (\mathbb{R}^4 \setminus 0)/g$ над базой $S^2 = (\mathbb{R}^4 \setminus 0)/(g \times \kappa)$ со слоем $S^1 = SO(2, \mathbb{R})$.

По теореме 3.4 поток $\hat{P}^s$ обратим на пространстве $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, а значит обратим и поток $\hat{P}^s/(g \times \kappa)$ на фактор-пространстве $S^2 = (\mathbb{R}^4 \setminus 0)/(g \times \kappa)$.

По формуле Лефшеца должна найтись хотя бы одна неподвижная точка. Соответствующая оптимальная траектория построена в примере 2.2 (изначально она была угадана в [32], стр. 231, prop. 7.9, и в [39]). Эта траектория является гладкой¹² логарифмической спиралью, входящей в начало координат со счетным числом оборотов и за конечное время. Как было доказано в теореме 2.6 в больших размерностях могут появляться оптимальные траектории типа логарифмических спиралей, но моделирующих не вращение по окружности, а движение вдоль иррациональной обмотки клиффордова тора (также см. [40, 41]).

Пример 3.5. В условиях примера 3.2 найдем неподвижные точки оптимального потока $\hat{P}^s$ на фактор-пространстве $(U^h \setminus 0)/g$. Другими словами, найдем все оптимальные траектории, управление на которых постоянно вплоть до попадания в начало координат. Точнее, докажем, что при четном h таких траекторий нет¹³, а при нечетном h таких траекторий не меньше двух, и, более того, выпишем явно простое необходимое и достаточное условие на соответствующее управление.

Обозначим искомое управление через $u_0 \in \Omega$, $u_0 \neq 0$. По теореме 3.1 любая оптимальная траектория приходит в начало координат за конечное время. Обозначим это время через $t_0 \geq 0$. Получим $q(t_0) = 0$. Поэтому при $t \leq t_0$ имеем $q_1 = \frac{1}{h!}(-1)^h(t_0 - t)^h u_0$. Далее по теореме 3.2 в принципе максимума Понтрягина $\lambda_0 = 1$ и $p(t_0) = 0$. Очевидно выполнено $f'(\lambda x) = \lambda^{\gamma-1} f'(x)$ при $\lambda \geq 0$ (напомним, $\gamma \geq 1$). Поэтому при $t \leq t_0$

¹²Кроме точки 0.

¹³На самом деле, если h четно, то управление на любой оптимальной траектории должно иметь разрыв второго рода при подходе к началу координат. Это следует из теоремы 2.4 о сопряжении (или см. [40]).

$$\dot{p}^1 = f'(q_1) = \left(\frac{1}{h!}\right)^{\gamma-1} (t_0 - t)^{h(\gamma-1)} f'((-1)^h u_0).$$

Последовательно интегрируя равенства $\dot{p}^{k+1} = -p^k$ находим

$$p^h(t) = -C(t_0 - t)^{h\gamma} f'((-1)^h u_0),$$

где $C > 0$ некоторая положительная константа, которая не существенна для дальнейшего. Таким образом, управление $u_0 \in \Omega$ должно удовлетворять условию $u_0 \in \arg \max_{v \in \Omega} \langle -f'((-1)^h u_0), v \rangle$.

Если h четно, то такого управления $u_0 \neq 0$ не существует. Действительно, функция f строго выпукла и $f'(0) = 0$. Поэтому в силу монотонности f' выполнено $\langle -f'(u_0), u_0 \rangle < 0$, но $0 \in \Omega$.

Если h нечетно, то получаем

$$u_0 \in \arg \min_{v \in \Omega} \langle f'(-u_0), v \rangle \quad (3.12)$$

Условие (3.12) выполняется тогда и только тогда, когда $u_0 \in \partial\Omega$ и ковектор $f'(-u_0)$ определяет в u_0 опорную гиперплоскость к Ω . Действительно, если $u_0 \in \text{Int } \Omega$, то необходимо $f'(-u_0) = 0$, поэтому $p(t) = 0$, и, следовательно $q(t) = 0$ по теореме 3.2.

Необходимое условие (3.12) является также и достаточным (при нечетном h): если u_0 удовлетворяет условию (3.12), то найденная траектория $(q(t), p(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, попадает в начало координат за конечное время и, следовательно, по теореме 3.3 является оптимальной.

Отметим еще, что если h нечетно, то существует как минимум два управления, удовлетворяющих условию (3.12) – это минимум и максимум функции $f(-x)$ на $\partial\Omega$.

Пример 3.6. Построим оптимальный синтез в следующем простом, но показательном примере¹⁴:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \langle x, x \rangle \rightarrow \min, \quad \dot{x} = u \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.13)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутый треугольник и $0 \in \text{Int } \Omega$ с вершинами A_i , $i = 1, 2, 3$. По теореме 3.2 в принципе максимума Понтрягина $\lambda_0 = 1$. Поэтому

$$\dot{p} = x, \quad u \in \arg \max_{u \in \Omega} \langle p, u \rangle.$$

Если $p \neq 0$ и вектор p не перпендикулярен ни одному из ребер треугольника Ω , то u – это одна из его вершин. Найденные в примере 3.5 управления – это в точности вершины A_i и ортогональные проекции начала координат на ребра треугольника, если проекция попадает на нужное ребро (соответствующую оптимальную траекторию, мы будем называть особой по этому ребру).

¹⁴Автор выражает благодарность Мыриковой В.А. за совместный расчет этого примера.

Обозначим через O_i проекцию начала координат прямую, содержащую вершины A_j и A_k , где $i \neq j, k$:

$$O_i = \frac{\langle A_k, A_k - A_j \rangle A_j + \langle A_j, A_j - A_k \rangle A_k}{\langle A_k - A_j, A_k - A_j \rangle}.$$

Так как $0 \in \text{Int } \Omega$, то существует всего три возможных расположения точек O_i относительно ребер треугольника Ω : (i) все три точки O_i лежат внутри соответствующих ребер; (ii) ровно одна из точек O_i совпадает с одной из вершин треугольника Ω , а остальные две лежат внутри своих ребер; и (iii) ровно одна из точек O_i лежит вне своего ребра, а остальные две – внутри. Геометрическая структура оптимального синтеза во всех трех случаях различна.

Во всех трех случаях мы будем использовать общую схему, основанную на теоремах 3.1 и 3.2. Оптимальность полученного синтеза автоматически гарантируется теоремой 3.3. Итак, любая оптимальная траектория приходит в начало координат за конечное и время. Воспользуемся замечанием 3.1, согласно которому достаточно построить траектории системы принципа максимума, выходящие из начала координат. Таким образом, необходимо найти все траектории системы¹⁵

$$\ddot{p}(t) \in \arg \max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle; \quad p(0) = \dot{p}(0) = 0.$$

Если мы построим семейство решений $p(t)$ этого дифференциального включения, заполняющее всю плоскость, то траектории $x(t) = -\dot{p}(-t)$ будут оптимальными (с точностью до сдвига по времени) и по теореме 3.2 будут заполнять всю плоскость, так как $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является гомеоморфизмом.

Начнем со случая (i). Сразу видны 6 подходящих траекторий $p_i(t) = \frac{1}{2}A_i t^2$ и $p_i^0(t) = \frac{1}{2}O_i t^2$, $i = 1, 2, 3$. Не трудно найти и остальные траектории. Выберем на траектории $p_i^0(t)$ произвольный момент времени $t_0 > 0$ и переключимся на любое из двух управлений A_j , $j \neq i$. Получим траекторию

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}O_i t^2 & \text{при } t \leq t_0; \\ -\frac{1}{2}O_i t_0^2 + O_i t_0 t + A_j(t - t_0)^2 & \text{при } t \geq t_0; \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} O_i & \text{при } t < t_0; \\ A_j & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Поскольку $O_k \in [A_i; A_j]$, $k \neq i, j$, то $\arg \max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = A_j$ при любом $t > t_0$. Действительно, при $t \geq t_0$ кривая $p(t)$ представляет собой часть параболы, ось которой параллельна вектору OA_j (где O – начало координат), и поэтому не может пересечь луч $\{\lambda A_j, \lambda \geq 0\}$. Более того, получившиеся траектории заполняют всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Поэтому оптимальные траектории с точностью до сдвига по времени будут иметь вид $\hat{x}(t) = -\dot{p}(-t)$ (см. рис. 3.1a).

¹⁵Отметим, что в выписанной системе нарушается единственность в начале координат.

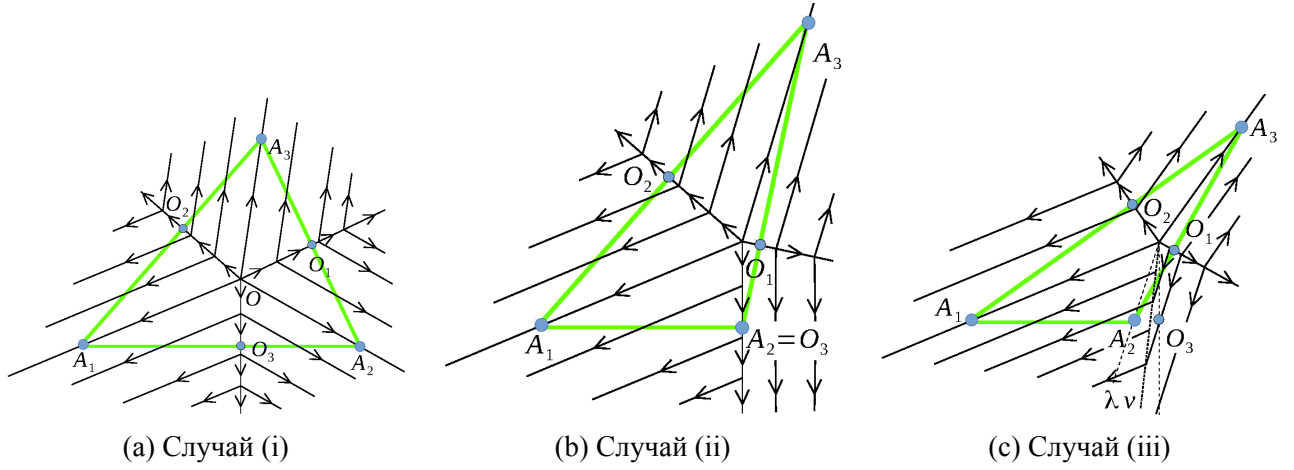


Рисунок 3.1: На рисунках изображен поток $-P^{-t}$.

Случай (ii) почти совпадает со случаем (i). А именно, если, скажем, $O_3 = A_1$, то теряется серия траекторий, на которых управление совершает переключение с O_3 на A_1 . Тем не менее все остальные траектории заполняют плоскость $\mathbb{R}^2$ и определяют оптимальный синтез (см. рис. 3.1b).

Рассмотрим случай (iii). Для определенности будем считать, что $O_3 \notin [A_1, A_2]$, и $A_2 \in [A_1, O_3]$. В случае (iii) есть три сильных отличия:

1. Отсутствует особая траектория по ребру $[A_1, A_2]$, то есть нет траектории $p_3^0(t)$.
2. Нет траектории $p_2(t)$. Действительно, если $p_2(t) = \frac{1}{2}A_2t^2$, то $\arg \max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = A_1 \neq A_2$, и траектория $p_2(t)$ не удовлетворяет принципу максимума.
3. Наблюдается перестройка траекторий, идущих из начала координат сначала с управлением O_1 , а потом переключающихся в момент времени t_0 на управление A_2 . Действительно, ось параболы $p(t)$ при $t > t_0$ параллельна лучу $\{\lambda A_2, \lambda \geq 0\}$, и поэтому в некоторый конечный момент времени $t = t_1$ пересечет луч $\{\lambda O_3, \lambda \geq 0\}$, а управление совершит переключение с A_2 на A_3 .

Таким образом, на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x\}$ определена кривая γ переключения управления с A_2 на A_1 . Эта кривая определяется из условия, что $p(t)$ пересекает луч $\{\lambda O_3, \lambda \geq 0\}$. Прямая выкладка дает, что γ есть луч $\{\lambda v, \lambda \geq 0\}$, где

$$v = \langle A_2, A_2 - A_1 \rangle O_1 + \sqrt{\langle O_1, A_2 - A_1 \rangle} \sqrt{\langle O_1 - A_2, A_2 - A_1 \rangle} A_2$$

Легко проверяется, что $\langle v, A_1 - A_2 \rangle > 0$. Поэтому луч $\{\lambda v, \lambda \geq 0\}$ лежит в выпуклом конусе с образующими O_3 и A_2 (см. рис. 3.1c)

Как видно из примера 3.6 случай когда проекции начала координат попадают внутрь граней является наиболее простым для исследования. В главе 4 будет решена общая задача вида (3.13) для не слишком скошенных многогранников и результаты перенесены на голономные задачи с

помощью ниспадающей системы скобок Пуассона. Ниспадающая система скобок Пуассона уже дала сильные результаты в главе 1.6 (например, теорема 1.2 о гамильтоновости особого потока, или теорема 1.3 о единственности вне особого многообразия).

ГЛАВА 4

Особые траектории первого порядка в задачах с управлением из многогранника

Основной объект исследования в этой главе – это гамильтоновы системы, аффинные по многомерному управлению, меняющемуся в некотором многограннике Ω (см. [61]). Достаточно часто ключевую роль при изучении глобального поведения решений таких систем играют особые траектории и геометрия их окрестностей. В этой главе доказана теорема о структуре выхода оптимальных траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и схода с нее) для систем с голономным управлением. Доказано, что лагранжева поверхность в окрестности особой траектории первого порядка является стратифицированным подмногообразием, листы которого специальным образом сотканы из траекторий системы, особых по граням многогранника Ω . Предложен простой метод явного отыскания особых траекторий первого порядка по граням многогранника Ω . В результате описывается полная картина оптимального синтеза, полученная последовательным сопряжением особых экстремалей первого порядка по набору последовательно вложенных граней.

4.1 Введение

Как уже неоднократно упоминалось в настоящей диссертации, в задачах оптимального управления при построении оптимального синтеза особые траектории и геометрия их окрестностей зачастую определяют структуру всего синтеза. Наиболее хорошо изученный случай – это аффинные по управлению гамильтоновы системы принципа максимума Понтрягина (ПМП) с одномерным управлением (см. главу 1):

$$\mathcal{H}(q, p, u) = H(q, p) + G(q, p)u; \quad u \in [\alpha; \beta].$$

Согласно принципу максимума Понтрягина $u = \alpha$, если $G < 0$, и $u = \beta$, если $G > 0$. Если же на оптимальной траектории $G \equiv 0$ на некотором промежутке времени, то управление не может быть найдено из принципа максимума. Такая траектория называется особой и управление на ней часто может быть найдено из условий $\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0$. По теореме Келли-Коппа-

Моейра (см. [21]), управление на особой траектории в явном виде в первый раз может возникнуть только в производной G четного порядка $2h$, и однозначно выражается из условия $G^{(2h)} = 0$. Число h принято называть порядком особой траектории.

Особые траектории первого порядка часто встречаются в задачах мат. экономики. Например, хорошо известна теорема о магистрали (см. [63]). Особые траектории второго порядка естественным образом возникают в управляемых механических системах – робототехнике, астронавтике и т.д. (см. [32]). Это связано с тем, что в качестве управления в таких задачах выступает вторая производная фазовых координат (сила). Определение порядка особой экстремали для задач с многомерным управлением приводит к так называемому флагу порядков (подробнее см. главу 2 или [40]).

В данной главе изучаются особые траектории первого порядка в гамильтоновых системах аффинных по многомерному управлению. Понятие «первый порядок» в терминах определения 2.3 означает, что флаг порядков имеет вид $(h_0, h_1, h_2, \dots)$, где $h_0 = h_2 = h_3 = \dots = 0$ и $h_1 = \dim U$, где U – пространство управлений. На управление наложен ряд аффинных ограничений, а именно $u \in \Omega \subseteq U$, где Ω – выпуклый компактный многогранник. В данной главе для изучения окрестности особой экстремали используется (уже показавший свою эффективность) метод выписывания ниспадающей системы скобок Пуассона. На участвующие в системе гамильтонианы H и G и на их скобки Пуассона выписывается система дифференциальных уравнений специального вида. Оказывается, что с помощью некоторого раздувающего отображения, в этой системе можно выделить набор главных скобок Пуассона, определяющих поведение всей системы в целом. Зародыш идеи построения раздувающего отображения уже появлялся в примерах 3.2 и 3.5. В системах с голономным управлением¹ структура системы относительно главных переменных совпадает с оптимальным синтезом в одной нильпотентно выпуклой модельной задаче оптимального управления. Это позволяет применить мощную технику выпуклого анализа из главы 3 для построения синтеза в окрестности особой траектории (а именно теоремы 3.1, 3.2 и 3.3).

Для нелинейных систем с голономным управлением доказана теорема об эквивалентности синтеза в окрестности особой траектории первого порядка и синтеза в модельной задаче оптимального управления. Структура оптимальных траекторий в модельной задаче полностью построена в многомерном случае для «не слишком скошенных» компактных многогранников (подробнее см. теоремы 4.2, 4.3). Построен метод аналитического отыскания особых траекторий для заданной грани многогранника.

В параграфах 2 и 3 даются основные определения. В параграфе 4 показано, что в ситуации общего положения особые траектории по граням размерности ≥ 2 не оптимальны. Начиная с 5-ого параграфа исследуется класс задач с голономным управлением, в которых (в отличие от общего случая) возникают особые траектории по граням всех возможных размерностей.

¹Аффинная по управлению система имеет голономное управление, если, грубо говоря, поля плоскостей, отвечающих граням многогранника Ω интегрируемы. Точнее см. определение 4.4.

4.2 Особые по граням траектории

Пусть на многомерное управление u наложен ряд линейных ограничений типа равенств и неравенств. Другими словами u меняется в некотором выпуклом многограннике Ω из линейного пространства U . Без ограничения общности, $\dim U = \dim \Omega$. На симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ задана гамильтонова система ПМП

$$\mathcal{H}(x, u) = H(x) + \langle G(x), u \rangle. \quad (4.1)$$

Здесь $x = (q, p) \in \mathcal{M}$, а $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : \mathcal{M} \rightarrow U^*$ – достаточно гладкие функции², а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает действие ковектора на векторе. Оптимальное управление $\hat{u}$ выбирается согласно принципу максимуму Понтрягина

$$\langle G, \hat{u} \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle G, v \rangle. \quad (4.2)$$

Очевидная геометрическая интерпретация ПМП заключается в том, что $\hat{u}$ лежит в опорной гиперплоскости $\langle G, v \rangle = \text{const}$ к многограннику Ω (если $G \neq 0$). Пересечение опорной гиперплоскости с Ω может быть либо вершиной, либо гранью большей размерности.

Рассмотрим произвольную траекторию $x(t), u(t)$ системы (4.1, 4.2)

- Определение 4.1.** (i) Если для почти всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (4.2) достигается ровно в одной вершине (возможно в разных при разных t), то траекторию $x(t), u(t)$ будем называть неособой на (t_1, t_2) .
- (ii) Зафиксируем грань Γ многогранника Ω . Если при всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (4.2) достигается одновременно на всех точках Γ и только в них, то такую траекторию будем называть особой по грани Γ .

Данное выше определение особой траектории по всему многограннику Ω совпадает с классическим определением особой траектории: $G(x(t)) = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$.

Замечание 4.1. В данной главе изучаются окрестности особых экстремалей. Если траектория $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ является особой по грани Γ на промежутке (t_1, t_2) , то для любой точки x , близкой к $\hat{x}(t)$, максимум в (4.2) может достигаться только на точках некоторой подграницы $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Поэтому при изучении окрестности особой экстремали (в том числе ее самой) можно редуцировать задачу и считать, что $\Omega = \Gamma$, а траектория является особой по всему многограннику.

В данной главе доказана теорема о выходе на особую траекторию первого порядка по всему многограннику в голономном случае (см. определение 4.4). А именно, пусть

$$\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k$$

²Например бесконечно гладкие.

некоторый набор последовательно вложенных граней³. Тогда существует траектория, выходящая на особую по всему многограннику следующим образом: сначала используется управление, особое по Γ_1 , потом оно скачком переключается на особое управление по Γ_2 и так далее, пока не переключится на особое управление по всему многограннику (см. теорему 4.3). Подобное поведение оптимальных траекторий в широком классе задач впервые было получено для случая, когда Ω – тетраэдр, в работах М.И. Зеликина, Л.Ф. Зеликиной и К.В. Хлюстова (см., например, [60]).

4.3 Аналитические формулы для особых по граням траекторий.

Согласно замечанию 4.1 для отыскания особых экстремалей по граням, достаточно построить алгоритм отыскания особой экстремали по всему многограннику.

Итак, пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ – траектория, особая по всему многограннику Ω , т.е.

$$G|_{\hat{x}(t)} = 0 \quad (4.3)$$

при $t \in (t_1, t_2)$ и управление не может быть найдено однозначно из ПМП. Однако, из определения (4.1) немедленно следует, что

$$\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0$$

Здесь и далее производная берется вдоль траектории системы (4.1). Производная может быть вычислена стандартным образом через скобки Пуассона. Однако необходимо действовать аккуратно – например, скобка $\{G, G\}$, вообще говоря, нулю не равна, так как $G(x)$ является векторнозначной функцией. Дадим строгое определение.

Определение 4.2. Пусть $F : \mathcal{M} \rightarrow T_m^n(U)$ и $K : \mathcal{M} \rightarrow T_l^k(U)$ – две тензорнозначные функции. Тогда их скобкой Пуассона называется тензорнозначная функция $R : \mathcal{M} \rightarrow T_{m+l}^{n+k}(U)$ определяемая формулой⁴

$$R_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} = \{F_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, K_{\delta_1 \dots \delta_l}^{\gamma_1 \dots \gamma_k}\}$$

Прямое вычисление показывает, что это определение корректно, то есть R действительно является тензором типа $(n+k, m+l)$. Это определение позволяет производить вычисления в безкоординатной форме (например оно используется для нахождения первых интегралов в гамильтоновых системах классической механики, см. [69], доб. 5).

Линейность скобки Пуассона для функций влечет линейность тензорной скобки Пуассона. Кососимметричность и тождество Якоби записываются в виде

$$\{F, K\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} + \{K, F\}_{\delta_1 \dots \delta_l \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \alpha_1 \dots \alpha_n} = 0;$$

³Возможно Γ_1 – точка

⁴Справа в равенстве стоит классическая скобка Пуассона для функций.

$$\{G, \{F, K\}\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k \epsilon_1 \dots \epsilon_s} + \{F, \{K, G\}\}_{\delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \epsilon_1 \dots \epsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n} + \{K, \{G, F\}\}_{\zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\epsilon_1 \dots \epsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} = 0.$$

Таким образом, $\{G, G\}$ является кососимметрическим билинейной формой над U . Найдем производную G вдоль системы (4.1). По правилу Лейбница получаем

$$\left(\frac{d}{dt}G\right)_\alpha = \{H, (G)_\alpha\} + \{(G)_\beta, (G)_\alpha\}\hat{u}^\beta.$$

Здесь $\hat{u} = \hat{u}(t)$ – управление на особой траектории. Коротко предыдущее равенство можно записать так:

$$\frac{d}{dt}G = \{H, G\} + \{G, G\}\hat{u}. \quad (4.4)$$

По теореме Гоха-Кренера (см. [51–53]) билинейная форма $\{G, G\}$ должна обнуляться в точках особой траектории:

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0 \text{ при } t \in (t_1, t_2), \quad (4.5)$$

и, следовательно,

$$\{H, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0. \quad (4.6)$$

Далее аналогичным образом

$$\frac{d}{dt}\{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}\hat{u} = 0. \quad (4.7)$$

Теперь управление $\hat{u}$ может быть найдено, если

- (i) Билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}$ невырождена в $\hat{x}(t)$. В этом случае особое управление $\hat{u}$ непрерывно и однозначно находится: $\hat{u}(t) = O_\Omega(\hat{x}(t))$, где

$$O_\Omega(x) = -\left(\{G, \{H, G\}\}|_x\right)^{-1}\{H, \{H, G\}\}|_x$$

Будем определять функцию $O_\Omega(x)$ только в таких точках x , для которых выполняются условия (4.3), (4.5) и (4.6).

- (ii) Найденное особое управление $\hat{u}(t)$ лежит во внутренности Ω .

Определение 4.3. Будем говорить, что особая по Ω траектория $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ имеет первый порядок, если она удовлетворяет условиям (i), (ii).

Замечание 4.2. Теорема Гоха-Кренера требует также симметричности и неотрицательной определенности формы $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ (подробнее см. теорему 2.2 и лемму 4.3).

Воспользуемся замечанием 4.1, чтобы найти особую траекторию по некоторой грани Γ . Пусть Γ' – линейное подпространство в U , параллельное $\text{Aff } \Gamma$; $\Gamma^\perp$ – аннулятор Γ' в U^* .

Зафиксируем произвольную точку $u^0 \in \Gamma$ и положим $u = u^0 + v$, где $v \in \Gamma'$. Тогда

$$\mathcal{H} = (H + \langle G, u^0 \rangle) + \langle G, v \rangle = H^\Gamma + \langle G^\Gamma, v \rangle,$$

где $H^\Gamma(x) = H(x) + \langle G(x), u^0 \rangle$ и $G^\Gamma(x) = G(x)|_{\Gamma'}$ определены для таких $x \in \mathcal{M}$, что $\arg \max_{u \in \Omega} \langle G, u \rangle \subseteq \Gamma$. Прямое вычисление дает:

Лемма 4.1. Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ является особой траекторией первого порядка по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда

(i) Условие (4.3) превращается в

$$G|_{\hat{x}(t)} \in \Gamma^\perp \text{ при } t \in (t_1, t_2),$$

(ii) Условие (4.6) преобразуется в

$$\{H^\Gamma, G\}|_{\hat{x}(t)} = \{H, G\}|_{\hat{x}(t)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t)} u^0 \in \Gamma^\perp$$

(iii) Условие (4.5) из теоремы Гоха-Кренера означает

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} \Gamma' \subseteq \Gamma^\perp \text{ при } t \in (t_1, t_2).$$

В этом случае особое управление находится их формулы $\hat{u}_\Gamma(t) = O_\Gamma(\hat{x}(t))$, где

$$O_\Gamma(\hat{x}(t)) = u^0 - \left(\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)} \right)^{-1} \{H^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)}$$

если форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)}$ невырождена на Γ' , $\hat{u}(t) \in \Gamma$ и $\langle G, v \rangle$ достигает на Γ максимума по Ω (а не минимума)⁵.

Для экстремалей первого порядка при стыковке особых траекторий по разным граням, характерно регулярное поведение управления. То есть управление терпит разрыв первого рода в точке стыковки⁶. Рассмотрим экстремаль $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$, которая является особой по грани Γ_0 при $t \in (t_0, t_1)$ и особой по грани Γ_1 при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда в точке стыковки $x^0 = x(t_1)$ с очевидностью должны быть выполнены условия (i), (ii) и (iii) из леммы 4.1 для обеих граней Γ_1 и Γ_2 .

Отметим, что в точке стыковки x^0 функция $\langle G(x^0), v \rangle$ достигает максимума одновременно в точках $v \in \Gamma_1$ и в точках $v \in \Gamma_2$. Поэтому условие (i) должно быть выполнено в усиленной форме:

$$G|_{x^0} \in (\text{conv}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1))^\perp, \quad (4.8)$$

где $\text{conv}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ – минимальная грань многогранника Ω , содержащая Γ_1 и Γ_2 .

⁵Нетрудно увидеть, что определение $O_\Gamma(x)$ не зависит от выбора $u_0 \in \Gamma$.

⁶Для особых экстремалей второго порядка (или вообще любого четного порядка) регулярная стыковка вообще невозможна. Ее запрещает обобщенное условие Лежандра-Клебша (см. теоремы 1.4 и 2.4, а также [23, 24, 40]).

4.4 Поверхности особых экстремалей

Условия (i) и (ii) из леммы 4.1 определяют в $\mathcal{M}$ некоторую поверхность $\mathcal{M}_\Gamma$ внутри которой должны лежать все особые траектории первого порядка по грани Γ . Необходимое условие Гоха-Кренера – условие (iii) из леммы 4.1 – определяет в $\mathcal{M}_\Gamma$ поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^0 \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$. Особые траектории также не должны покидать и поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^0$ по теореме Гоха-Кренера.

С другой стороны, особое управление u_Γ фактически выбирается только в точках $\mathcal{M}_\Gamma^0$ из того условия, что траектория гамильтоновой системы (4.1,4.2) не покидает $\mathcal{M}_\Gamma$. Другими словами, векторное поле отвечающее гамильтониану $\mathcal{H}(x, \hat{u}_\Gamma)$ должно быть касательным к $\mathcal{M}_\Gamma$ в точках $\mathcal{M}_\Gamma^0$. В ситуации общего положения такое управление может быть выбрано единственным образом, что определяет в точках $\mathcal{M}_\Gamma^0$ единственно возможное векторное поле ξ_Γ управляемой системы (4.1,4.2), касательное к $\mathcal{M}_\Gamma$.

С другой стороны, условие (iii) – теорема Гоха-Кренера – накладывает дополнительные требования типа равенств. Форма $\{G, G\}|_{\Gamma'}$ в случае общего положения имеет ранг $\dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Значит, если $\dim \Gamma \neq 0, 1$, то $\mathcal{M}_\Gamma^0$ имеет ненулевую коразмерность в $\mathcal{M}^\Gamma$, $\text{codim}_{\mathcal{M}_\Gamma} \mathcal{M}_\Gamma^0 = \dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Поэтому, в ситуации общего положения, поле ξ_Γ не будет касаться $\mathcal{M}_\Gamma^0$, и, следовательно траектории системы (4.1,4.2) будут протыкать $\mathcal{M}_\Gamma^0$ и необходимое условие оптимальности будет нарушено (см. рис. 4.1). Конечно в $\mathcal{M}_\Gamma^0$ в ситуации общего положения найдется поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^1$ той же коразмерности, в точках которой поле ξ_Γ будет касательным к $\mathcal{M}_\Gamma^0$. Однако ξ_Γ не будет касательным к $\mathcal{M}_\Gamma^1$, и траектории покинут $\mathcal{M}_\Gamma^1$, а значит и $\mathcal{M}_\Gamma^0$. Исключение составляет точки из поверхности $\mathcal{M}_\Gamma^2$ в $\mathcal{M}_\Gamma^1$ (той же коразмерности), в которых поле ξ_Γ касается $\mathcal{M}_\Gamma^1$. Продолжая этот процесс, получим, что, вообще говоря, траектории поля ξ_Γ не будут лежать в $\mathcal{M}_\Gamma^0$ в ситуации общего положения. Поэтому в общем случае особые траектории по граням размерности больше 1 не оптимальны.

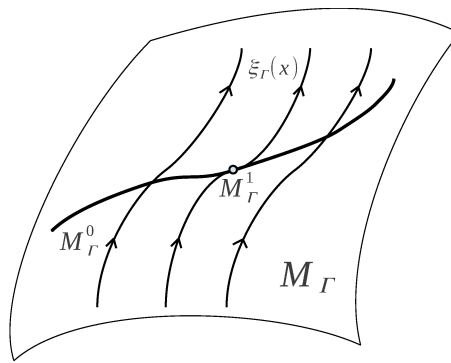


Рисунок 4.1: Структура поверхностей $\mathcal{M}_\Gamma^i$

Поскольку оптимизационные задачи моделируют процессы, возникающие в реальной жизни, практический интерес представляют только те оптимальные траектории, которые не разрушаются при малом шевелении самой задачи. То есть неособые траектории и траектории, особые по ребру.

Естественный класс систем, в которых природа задачи препятствует возникновению описанной выше ситуации – это системы, в которых $\mathcal{M}_\Gamma^0 = \mathcal{M}_\Gamma$. Это так в важном частном случае, когда гамильтонова система (4.1, 4.2) получена из оптимизационной задачи управления голономной системой. В следующем параграфе мы покажем, что в этом случае необходимое условие Гоха-Кренера (iii) будет выполнено автоматически на особых траекториях.

4.5 Голономный случай

Все утверждения и определения в этом параграфе носят исключительно локальный характер. Однако они будут сформулированы в глобальной форме для упрощения записи.

Рассмотрим оптимизационную управляемую динамическую систему на многообразии M

$$\dot{q} = a(q) + B(q)u. \quad (4.9)$$

Здесь $q \in M$, $a(q) \in T_q M$ и $B(q) \in \text{Hom}(U, T_q M)$ гладко зависят от $q \in M$. Будем считать, что $\dim M \geq \dim U = \dim \Omega$. Целевой функционал – терминального типа и не влияет на гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина.

Определение 4.4. Будем говорить, что управление в системе (4.9) голономно по грани Γ , если отображение $B(q)|_{\Gamma'}$ невырождено, и поле плоскостей $B(q)\Gamma' \subseteq T_q M$ является интегрируемым.

Голономность управления по какой-либо грани Γ , вообще говоря, не влечет голономность по подгранице $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Стоит также отметить, что поскольку определенное выше условие голономности никак не зависит от поля $a(q)$, то система (4.9) может одновременно иметь голономное управление по Ω и быть вполне управляемой, даже если $\dim M > \dim U$.

Теорема 4.1. Если управление в системе (4.9) голономно по грани Γ , то поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$ и $\mathcal{M}_\Gamma^0$ совпадают.

Другими словами, необходимое условие Гоха-Кренера (условие (iii) из леммы 4.1) выполнено автоматически на любой особой траектории, если система (4.9) голономна по соответствующей грани.

Лемма 4.2. Если управление в системе (4.9) голономно по Ω , то существует функция $\varepsilon : M \rightarrow \text{Lin}(U^*, \Lambda^2(U))$, такая, что

$$\{G, G\}(q, p) = \varepsilon(q)G(q, p) \text{ для всех } (q, p) \in T^*M = \mathcal{M}$$

Доказательство. Рассмотрим гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина для управляемой системы (4.9):

$$\mathcal{H} = \langle p, B(q)u + a(q) \rangle = \langle p, a(q) \rangle + \langle B^t(q)p, u \rangle,$$

где p – сопряженные к q переменные. Таким образом $H(q, p) = \langle p, a(q) \rangle$ и $G(q, p) = B^t(q)p$. Если u_i – базис U , то $G_i(q, p) = \langle p, B(q)u_i \rangle$ и

$$\{G_i, G_j\} = \{\langle p, B(q)u_i \rangle, \langle p, B(q)u_j \rangle\} = \langle p, [B(q)u_i, B(q)u_j] \rangle.$$

Поскольку поле плоскостей $B(q)U$ интегрируемо, то по теореме Фробениуса (см. [76], п. 5.6) $[B(q)u_i, B(q)u_j] \in B(q)U$. Другими словами, должен существовать набор гладких функций $\varepsilon_{ij}^k : M \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$[B(q)u_i, B(q)u_j] = \varepsilon_{ij}^k(q)B(q)u_k.$$

Значит $\{G_i, G_j\}(q, p) = \varepsilon_{ij}^k(q)G_k(q, p)$. Очевидно, $\varepsilon_{ij}^k(q) \in \text{Lin}(U^*, \Lambda^2(U))$. □

Доказательство теоремы 4.1. Докажем теорему для случая $\Gamma = \Omega$ (см. замечание 4.1). Из леммы 4.2 следует, что если $G = 0$, то и $\{G, G\} = \varepsilon G = 0$. □

Таким образом, в системах с голономным управлением траектории, особые по граням, возникают в ситуации общего положения. Точнее:

Следствие 4.1. В системах общего положения вида (4.9), голономных по грани Γ , множество всех особых по Γ траекторий первого порядка является подмногообразием в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ коразмерности $2 \dim \Gamma$, если совместный дифференциал отображений G^Γ и $\{H^\Gamma, G^\Gamma\}$ имеет максимальный ранг $2 \dim \Gamma$.

Следствие 4.2. В системах с голономным управлением по грани Γ форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$ является симметричной в точках траектории, особой по Γ

Доказательство. Доказательство проведем для случая $\Gamma = \Omega$. Докажем, что форма $\{H, \{G, G\}\}$ обнуляется в точках особой траектории. Этого будет достаточно ввиду тождества Якоби:

$$\{G_i, \{H, G_j\}\} - \{G_j, \{H, G_i\}\} = \{H, \{G_i, G_j\}\}$$

Итак, по лемме 4.2 и правилу Лейбница получаем

$$\{H, \{G_i, G_j\}\} = \{H, \varepsilon_{ij}^k G_k\} = \{H, \varepsilon_{ij}^k\} G_k + \{H, G_k\} \varepsilon_{ij}^k \quad (4.10)$$

Последние два слагаемых обнуляются, так как на особой траектории $G = \{H, G\} = 0$. □

Замечание 4.3. Любая управляемая система (4.9) голономна по любому ребру многогранника Ω .

Замечание 4.4. Если система голономна по грани Γ , то из леммы 4.1 можно выбросить условие (iii) – оно является следствием условия (i).

Следствие 4.3. Для системы с голономным управлением по Γ , отображение $O_\Gamma(x)$ корректно определено во всех точках поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$, в которых форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$ невырождена.

Более того, если $\mathcal{M}_\Gamma$ является гладким многообразием, то отображение $O_\Gamma : \mathcal{M}_\Gamma \rightarrow \text{Aff } \Gamma$ является гладким в окрестности точек невырожденности формы $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$.

Естественный класс систем – это системы, голономные по любой грани многогранника Ω . Это так, если, например, векторные поля $B(x)u$ коммутируют, когда u пробегает базисные вектора U . Конечно же условие коммутирования базисных векторных полей чрезмерно сильно: голономные по всем граням многогранника Ω системы встречаются и гораздо более общих ситуациях.

4.6 Сведение гамильтоновой системы для голономной задачи к модельной задаче оптимального управления

В этом параграфе будет описана ниспадающая система скобок Пуассона для гамильтониана $\mathcal{H} = H + \langle G, u \rangle$ голономной системы (4.9). Эта система ОДУ специального вида на скобки Пуассона позволит (с помощью некоторого раздувающего отображения) свести изучение окрестности особой экстремали к оптимальному синтезу в одной модельной задаче оптимального управления.

Рассмотрим управляемую гамильтонову систему (4.1, 4.2), голономную по любой грани многогранника Ω . Пусть $x^0 \in \mathcal{M}$ – некоторая точка особой траектории $\hat{x}(t)$ первого порядка по всему многограннику Ω , $x^0 = \hat{x}(0)$. Будем предполагать, что особое управление $\hat{u}(t)$ непрерывно в x_0 (см. следствие 4.3). Итак,

$$G|_{x_0} = \{H, G\}|_{x_0} = 0 \text{ и, следовательно } \{G, G\}|_{x_0} = 0.$$

Предположим, что набор дифференциалов функций $(G)_i$ и $\{H, G\}_j$ имеют максимальный ранг в x_0 :

$$\text{rk}(dG_i, d\{H, G\}_j) = 2 \dim \Omega,$$

Введем локальную систему координат в окрестности точки x_0 . Положим $z_1 = G$ и $z_2 = \{H, G\}$, $z = (z_1, z_2)$, и дополним до полной системы локальных координат набором переменных w , так что $w(x_0) = 0$. Тогда гамильтонова система (4.1, 4.2) переписывается в виде ниспадающей системы скобок Пуассона:

$$\begin{cases} \langle z_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \\ \dot{z}_1 = z_2 + \varepsilon z_1 u; \\ \dot{z}_2 = \alpha(z, w) + \beta(z, w)u; \\ \dot{w} = R(z, w) + S(z, w)u. \end{cases} \quad (4.11)$$

Здесь $z_1, z_2, \alpha \in U^*$; $\beta \in T_2(U)$ – билинейная форма:

$$\alpha = \{H, \{H, G\}\}; \quad \beta = \{G, \{H, G\}\}; \quad \varepsilon z_1 = \varepsilon G = \{G, G\}.$$

Лемма 4.3. Билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0} = \beta(0,0)$ является симметричной, положительно определенной:

$$\beta(0,0) \succ 0 \text{ и } \beta(0,0)[u,v] = \beta(0,0)[v,u] \forall u,v \in U.$$

Доказательство. Симметричность была доказана в следствии 4.2. Покажем, что положительная определенность следует из теоремы Гоха-Кренера. Согласно теореме Гоха-Кренера, форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}|_{x_0}$ должна быть неотрицательно определенной. Прямые вычисления дают:

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} = \{G_k, \{H, G_l\}\} + \{H, \{G_k, G_l\}\} + \{G_k, \{G_i, G_l\}\} \hat{u}^i + \{G_i, \{G_k, G_l\}\} \hat{u}^i.$$

Покажем, что в случае голономного управления три последних слагаемых обнуляются. Действительно, второе слагаемое обнуляется по формуле (4.10), а последние два слагаемых обнуляются, так как для голономной по управлению системы из леммы 4.2 имеем

$$\{G_k, \{G_i, G_l\}\} = \{G_k, \varepsilon_{il}^j G_j\} = \{G_k, G_j\} \varepsilon_{il}^j + \{G_k, \varepsilon_{il}^j\} G_j = 0.$$

Поэтому в $x_0 \in \mathcal{M}_\Gamma$ немедленно получаем неотрицательную определенность формы $\beta(0,0)$. Ее невырожденность следует из того, что исследуемая траектория $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ имеет первый порядок. $\square$

Естественно использовать форму $\{G_k, \{H, G_l\}\}|_{x_0} = \beta(0,0)$ в качестве скалярного произведения на U . Это задаст отождествление U и U^* , а форма $\beta(0,0)$ запишется как единичная матрица в любом ортонормированной базисе. Взяв $-\beta^{-1}(0,0)\alpha(0,0)$ за начало координат в аффинном пространстве U , мы можем считать, что $\alpha(0,0) = 0$. В новых координатах на U особое управление в точке x_0 — это $\hat{u} = 0$.

Оказывается, что поведение переменных z_1 и z_2 в окрестности особой точки x_0 определяет поведение всей системы в целом. Чтобы показать это воспользуемся процедурой раздутия особенности⁷: пусть

$$\begin{cases} \mu = \sqrt[4]{\frac{1}{2}|z_1|^2 + \frac{1}{4}|z_2|^4} \\ z_1 = \mu^2 \zeta_1; \quad z_2 = \mu \zeta_2; \quad w = \mu \omega. \end{cases}$$

То есть переменные z_2 и w имеют первый порядок по раздувающей переменной μ , а z_1 — второй⁸. Переменные $\mu, \zeta_1, \zeta_2, \omega$ лежат на цилиндре

$$\mathcal{C} = \left\{ (\mu, \zeta_1, \zeta_2, \omega) : \frac{1}{2}|\zeta_1|^2 + \frac{1}{4}|\zeta_2|^4 = 1 \right\}.$$

⁷Эта же процедура будет использована в главе 9 для изучения хаотического поведения решений гамильтоновой системы с разрывной правой частью с помощью сведения к выпуклой модельной задаче оптимального управления.

⁸Переменные z_1 , z_2 и w должны иметь именно такие порядки относительно раздувающего отображения, чтобы векторное поле системы (4.11) в новых координатах имело особенность одинакового типа по всем переменным ζ_1 , ζ_2 и w при приближении к гиперплоскости $\mu = 0$.

Точка x_0 раздувается на сечение $\mathcal{C}_0$ этого цилиндра гиперплоскостью $\mu = 0$. В новых координатах система (4.11) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \frac{1}{4} \left(\langle \zeta_1, \zeta_2 + \mu \varepsilon \zeta_1 u \rangle + |\zeta_2|^2 \langle \zeta_2, \alpha + \beta u \rangle \right) = \Upsilon(\mu, \zeta_1, \zeta_2, \omega); \\ \dot{\zeta}_1 = \frac{1}{\mu} (\zeta_2 - 2\Upsilon \zeta_1 + \mu \varepsilon \zeta_1); \\ \dot{\zeta}_2 = \frac{1}{\mu} (\alpha + \beta u - \Upsilon \zeta_2); \\ \dot{\omega} = \frac{1}{\mu} (F + G u - \Upsilon \omega). \\ \langle \zeta_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases} \quad (4.12)$$

Векторное поле $\xi = (\dot{\mu}, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\omega})$ не продолжается на сечение $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \{\mu = 0\}$ гиперплоскостью $\mu = 0$ ввиду наличия особенности типа $\frac{1}{\mu}$ по каждой координате ζ_1 , ζ_2 и ω . Однако, интегральные кривые все же могут быть перенесены на сечение $\mathcal{C}_0$. Дело в том, что траектории векторных полей ξ и $\mu \xi$ совпадают. Различаются лишь скорости движения по этим траекториям. Поле же $\mu \xi$ может быть продолжено на гиперплоскость $\mu = 0$. Итак на $\mathcal{C}_0$ траектории поля $\mu \xi$ удовлетворяют системе (через s обозначен параметр времени s движения вдоль поля $\mu \xi$, т.е. $ds = \frac{1}{\mu} dt$ на $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$):

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \mu = 0; \\ \frac{d}{ds} \zeta_1 = \zeta_2 - 2\Upsilon_0 \zeta_1; \\ \frac{d}{ds} \zeta_2 = \alpha(0,0) + \beta(0,0)u - \Upsilon_0 \zeta_2 = u - \Upsilon_0 \zeta_2; \\ \frac{d}{ds} \omega = F(0,0) + G(0,0)u - \Upsilon_0 \omega. \\ \langle \zeta_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases} \quad (4.13)$$

Здесь $\Upsilon_0 = \Upsilon|_{\mathcal{C}_0} = \frac{1}{4} \left(\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle + |\zeta_2|^2 \langle \zeta_2, u \rangle \right)$. Полученная система (4.13) фактически описывает предельное поведение исходной системы (4.11) в бесконечно малой окрестности точки x_0 . Она обладает следующими важными свойствами

1. Система (4.13) зависит лишь от значений $F(0,0)$ и $G(0,0)$ и не зависит от поведения функций F и G в окрестности точки x_0 . Поэтому система (4.13) получится одинаковой во всех задачах с данными значениями $F(0,0)$ и $G(0,0)$.
2. Так как переменная ω не входит в правую часть системы (4.13), то достаточно ограничиться изучением поведения главных переменных ζ_1 и ζ_2 (которое не зависит от $F(0,0)$ и $G(0,0)$), а переменная ω однозначно найдется из линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{d}{ds} \omega = a(s)\omega + b(s),$$

где $a(s) = \Upsilon_0(\zeta_1(s), \zeta_2(s), u(s))$ и $b(s) = F(0,0) + G(0,0)u(s)$.

В следующем параграфе приведена задача оптимального управления, уравнения ПМП в которой полностью совпадает с главной частью (ζ_1, ζ_2) системы (4.13). Оптимальный синтез в этой

задаче будет построен для не «слишком скошенных» компактных многогранников. После чего в параграфе 4.8 доказывается теорема о структуре выхода траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и схода с нее) для систем с голономным управлением.

4.7 Модельная задача оптимального управления с многогранником

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle q(t), q(t) \rangle dt \rightarrow \inf \\ \dot{q} &= u; \quad u \in \Omega \subset U; \\ q(0) &= q_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь q и u лежат в евклидовом пространстве $U \simeq \mathbb{R}^n$, а 0 является внутренней точкой⁹ Ω . Случай, когда $\dim U = 2$, а Ω – произвольный треугольник уже подробно разбирался в примере 3.6. Из этого примера видно, что топология оптимального синтеза принципиально различается в случаях, когда проекция начала координат попадает внутрь ребер или снаружи от них. В этом параграфе будет построен оптимальный синтез для самого простого случая, когда проекции начала координат попадают внутрь соответствующих граней.

Пусть p – сопряженная к q переменная из ПМП, тогда $\lambda_0 = 1$ по теореме 3.2 и

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \langle q, q \rangle + \langle p, u \rangle$$

то есть

$$\begin{cases} \dot{p} = q; & \Leftrightarrow & \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{q} = u; & \Leftrightarrow & \dot{z}_2 = u \\ \langle p, u \rangle = \langle z_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases} \quad (4.15)$$

В этой задаче существует ровно одна особая по всему многограннику траектория: $q \equiv p \equiv u \equiv 0$. Она имеет первый порядок. Поведение оптимальных траекторий в окрестности начала координат является типичным, потому что раздутие данной системы приводит к тем же уравнениям (4.13) с $\omega = 0$, что и раздутие общей системы (4.11). Поэтому оптимальные траектории задачи (4.14) являются модельными для системы (4.11).

По теореме 3.2, множество всех пар $(q_0, \hat{p}(0, q_0))$ образует в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ липшицево многообразие M_+ , однозначно проектирующееся на плоскость $\{p = 0\}$. По теореме 3.3 все оптимальные траектории (и только они) лежат в M_+ и приходят в начало координат за конечное время. Других попадающих в начало координат траекторий гамильтоновой системы (4.15) не существует¹⁰.

⁹Это условие необходимо для локальной управляемости.

¹⁰Иначе по теореме 3.3 и следствию 3.3 они были бы оптимальны в силу выпуклости исходной задачи.

Стоит еще сказать, что замена $q \mapsto -q$, $p \mapsto p$ (см. замечание 3.1) не меняет гамильтониана $\mathcal{H}$, но изменяет знак симплектической формы $dq \wedge dp$. Поэтому при такой замене траектории гамильтоновой системы (4.15) переходят в себя, но меняется направление движения по ним. Липшицева поверхность M_+ переходит в поверхность M_- траекторий, выходящих из начала координат.

Найдем теперь особые траектории задачи (4.14) в случае когда Ω – многогранник. Рассмотрим произвольную грань Γ многогранника Ω . Нас интересует траектория $\hat{q}, \hat{p}, \hat{u}$, особая по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Поскольку $\{G, G\} \equiv 0$, то по лемме 4.1 немедленно получаем, что $\hat{p} \in \Gamma^\perp$ и $\hat{q} \in \Gamma^\perp$. Пусть O_Γ – ортогональная проекция начала координат на $\text{Aff } \Gamma$. Так как $\{G, \{H, G\}\} \equiv \text{id}$, то особое управление $\hat{u}$ по Γ есть O_Γ , если $O_\Gamma \in \Gamma$.

Определение 4.5. Будем называть многогранник Ω не слишком скошенным, если $O_\Gamma \in \text{Int } \Gamma$ для любой грани Γ многогранника Ω .

Компактные не слишком скошенные многогранники обладают тем замечательным свойством, что подпространства $\Gamma^\perp$, ортогональные граням, разрезают «удобным образом» все пространство на конусы, наподобие барицентрического разбиения. А именно верна следующая

Лемма 4.4 (о барицентрическом разбиении многогранника). Пусть на каждой грани $\Gamma \neq \Omega$ выпуклого компактного многогранника $\Omega \subseteq U$, $0 \in \text{Int } \Omega$, выбрано по внутренней точке O_Γ . Тогда для любой точки $q_0 \in U$, $q_0 \neq 0$, найдется единственный набор граней $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$ и положительных чисел $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ таких, что

$$q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k}.$$

Множество всех q_0 с данным набором граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k$ будем обозначать через

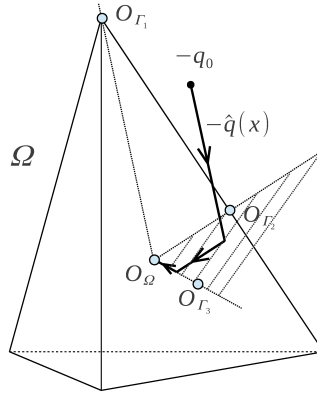
$$\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k) = \{q_0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j O_{\Gamma_j}, \text{ где } \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0\}.$$

Доказательство тривиально.

В случае не слишком скошенного компактного многогранника Ω линейное пространство U разбивается на конусы, грани которых порождены особыми управлениями O_{Γ_i} по всем возможным различным наборам вложенных друг в друга граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$.

Для любой такой начальной точки q_0 , что $-q_0$ лежит в $\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, оптимальная траектория начинает двигаться с управлением, особым по грани Γ_1 до тех пор, пока траектория $\hat{q}(t, q_0)$ не попадет на $(k-1)$ -мерную грань $\text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_k)$. В этот момент управление скачком переключается на особое управление O_{Γ_2} по грани Γ_2 и процесс повторяется до момента выхода траектории в начало координат (см. рис. 4.2).

Точнее, имеет место

Рисунок 4.2: Оптимальная траектория $-\hat{q}(x)$

Теорема 4.2. Если компактный многогранник Ω является не слишком скошенным, то любая оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$, $\hat{u}(t, q_0)$ устроена следующим образом. Пусть $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$ и $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ из предыдущей леммы для точки $-q_0$, т.е.

$$-q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k), \quad \lambda_j > 0 \forall j.$$

Тогда найдутся такие моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T(q_0)$, $t_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i$, что при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ управление $\hat{u}(t, q_0) = O_{\Gamma_j}$ и

$$-q(t) = \mu(t) O_{\Gamma_j} + \lambda_{j+1} O_{\Gamma_{j+1}} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_j, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_k),$$

где μ – линейно убывающая функция от $\mu(t_{j-1}) = \lambda_j$ до $\mu(t_j) = 0$, т.е. $\mu(t) = \lambda_j \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}}$.

В частности, управление выбирается по принципу обратной связи: $\hat{u}(t, q_0) = \hat{u}(\hat{q}(t, q_0)) = O_{\Gamma}$, где Γ – грань наименьшей размерности из разложения $-\hat{q}(t, q_0)$ по лемме 4.4.

Доказательство теоремы 4.2. Будем доказывать теорему индукцией по количеству граней k . Пусть $k = 1$ и $-q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1}$, $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} O_{\Gamma_1}, & \text{при } t \in (0, \lambda_1); \\ 0, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда из (4.15) при $t \in (0, \lambda_1)$ получаем: $q(t) = (t - \lambda_1) O_{\Gamma_1}$, $p = \frac{1}{2}(t - \lambda_1)^2 O_{\Gamma_1}$ и $q(t) = p(t) = 0$ при $t > \lambda_1$. Поскольку $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1)$, то $\max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = \langle p(t), O_{\Gamma_1} \rangle$ и тройка $q(t), p(t), u(t)$ удовлетворяет системе принципа максимума Понтрягина. Значит, в силу существования и единственности решения (теорема 3.1), эта тройка является оптимальной по теореме 3.3, так как попадает в начало координат за конечное время.

Предположим теперь, что для некоторого k доказано, что если $-q_0 \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, то $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, и оптимальная траектория такая как заявлено в условиях теоремы. Докажем аналогичное утверждение для $k + 1$. Пусть $-q_0 = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i O_{\Gamma_i}$. Обозначим $q_1 = q_0 - \lambda_1 O_{\Gamma_1}$. Рассмотрим управление $u(t) = O_{\Gamma_1}$ при $t \in (0; \lambda_1)$. Тогда из (4.15) получаем

$$q(t) = q_1 + (t - \lambda_1)O_{\Gamma_1}, \text{ и } p(t) = p(\lambda_1) + \frac{1}{2}(t - \lambda_1)^2 O_{\Gamma_1} \quad \text{при } t \in [0; \lambda_1].$$

Таким образом, тройка $q(t), p(t), u(t)$ на промежутке $t \in (0; \lambda_1)$ удовлетворяет системе (4.15) за исключением, быть может, условия максимума. Покажем, что и оно выполнено. По предположению индукции $\widehat{p}(0, q_1) \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$. Точке q_1 по теореме 3.2 соответствует единственное значение $E(q_1) = \widehat{p}(0, q_1)$. Положив $p(\lambda_1) = E(q_1)$ немедленно получаем, что $p(t) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1})$, и, следовательно $\max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = \langle p(t), O_{\Gamma_1} \rangle$.

Поскольку $-q(\lambda_1) = -q_1 \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$ и $p(\lambda_1) \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$ то траектория продолжается до оптимальной по предположению индукции. $\square$

4.8 Структура выхода на особую траекторию и схода с нее.

Как было показано ранее, структура решений модельной задачи определяет поведение траекторий управляемой гамильтоновой системы (4.1) в окрестности особой траектории. В предыдущем параграфе в модельной задаче были найдены все траектории выходящие на особую траекторию и сходящие с нее для случая не слишком скошенного компактного многогранника Ω . Для произвольной управляемой системы условие «не слишком скошенности» Ω в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ означает следующее: необходимо в пространстве управлений U выбрать в качестве начала координат особое управление в точке x_0 , а в качестве скалярного произведения – форму $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$.

Определение 4.6. Мы будем говорить, что компактный многогранник $\Omega \subset U$ является не слишком скошенным в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ относительно гамильтоновой системы (4.1), если

- (i) Форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$ является симметрической и положительно определенной в x_0 ;
- (ii) Проекция (относительно скалярного умножения с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$) особого управления $O_\Omega(x_0)$ по всему многограннику на любую грань Γ попадает строго внутрь этой грани.

Как было доказано в лемме 4.3, в голономном случае форма $\{G, \{H, G\}\}$ является симметричной. Согласно необходимому условию локальной оптимальности Гоха-Кренера форма $\{G, \{H, G\}\}$ должна быть неотрицательно определенной. Поэтому если мы имеем дело с локально оптимальной особой траекторией первого порядка в голономной задаче 4.9, то условие (i) определения 4.6 выполнено автоматически.

Естественно, если многогранник Ω является не слишком скошенным в $x \in \mathcal{M}_\Omega$ (для голономной задачи), то он является не слишком скошенным и для любой точки из $\mathcal{M}_\Omega$, достаточно близкой к x . Итак, в рамках этого ограничения мы докажем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы 4.2 для произвольной управляемой системы (4.1, 4.2) с голономным управлением (см. рис. 4.3).

Теорема 4.3. Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$ – особая траектория по всему выпуклому компактному многограннику Ω гамильтоновой системы (4.1, 4.2) с голономным управлением по каждой грани Ω . При этом форма $\{G, \{H, G\}\}$ положительно определена в точке $\hat{x}(t^*)$ при $t^* \in (\tau_1, \tau_2)$.

Если многогранник Ω является не слишком скошенным относительно точки $\hat{x}(t^*)$ (относительно скалярного умножения на U с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$), то определено следующее семейство траекторий выходящих из $\hat{x}(t^*)$ и удовлетворяющих ПМП и необходимым условиям Гох-Кренера: для каждого набора граней $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \dots \supset \Gamma_k$ определена траектория $x(t)$, $u(t)$ выходящая из $\hat{x}(t^*)$ при $t > t^*$, где

$$\begin{cases} x(t^*) = \hat{x}(t^*), \dot{x}(t) = u(x(t)); \\ u(x(t)) = O_{\Gamma_i}(x(t)), \text{ при } t \in (t_{i-1}, t_i) \end{cases}$$

Здесь $t^* = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ – любой набор времен, лишь бы разница $t_k - t^*$ была достаточно мала. Выход на особую траекторию при $t < t^*$ устроен аналогично – необходимо лишь изменить направление течения времени и порядок прохождения граней на противоположный.

Замечание 4.5. Мы не проверяем достаточные условия второго порядка в данной главе, однако скажем о них пару слов. Рассмотрим случай нормальной траектории ($\lambda_0 = 1$ и сопряженный множитель $p(t)$ определен однозначно). На самом деле, поскольку на особой траектории выполняются равенства $\{G, G\} = 0$ и $\{G, \{G, G\}\} = 0$, то достаточные условия второго порядка для локального Понтрягинского минимума (П-минимума) фактически совпадают с достаточными условиями слабого локального минимума (см. [57]). Последние же в нашем случае требуют положительной определенности формы $\{G, \{H, G\}\}$ (которая уже выполнена) вкупе с некоторыми условиями трансверсальности на концах траектории. Поэтому проверка достаточных условий в конкретных примерах сведется к проверке граничных условий и не должна вызвать затруднений (подробнее см. [64])

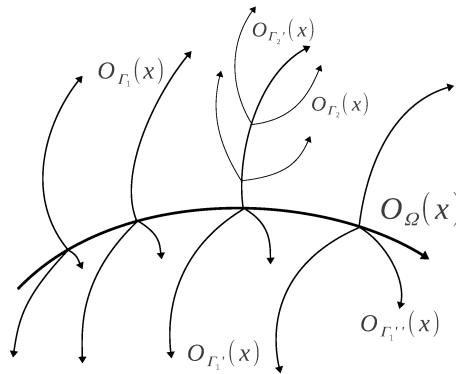


Рисунок 4.3: Оптимальный синтез в окрестности особой траектории.

Теорема 4.3 дает наглядное описание поверхностей $\mathcal{M}_\Gamma$: для произвольной грани Γ^0 в окрестности $\mathcal{M}_{\Gamma^0}$ поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$ по всем $\Gamma \subsetneq \Gamma^0$ примыкают друг к другу по $\mathcal{M}_{\Gamma^0}$ (см. рис. 4.3).

Данная теорема может оказаться полезной в приложениях. Например в [26] для задачи управления потоком Хеле-Шоу автором (совместно с В. Рунге) был построен оптимальный синтез в

случае когда лишь два момента Ричардсона отличны от 0. Этот случай соответствует одномерному управлению, а в задаче есть ровно одна траектория первого порядка, выход на которую устроен так, как описано в теореме 4.3. Также в [26] построены необходимые и достаточные условия управляемости, когда конечное количество моментов отличны от 0. В этом случае управление многомерно и меняется в некотором многограннике. Поэтому есть надежда построить полный оптимальный синтез с помощью теоремы 4.3.

Доказательство теоремы 4.3. Сначала докажем, что проекция особого управления $\hat{u}(t^*) = O_\Omega(\hat{x}(t^*))$ на любую грань Γ (относительно скалярного умножения с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$) совпадает с $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$. Вычислим (как в лемме 4.1)

$$\begin{aligned} \{H^\Gamma, \{H^\Gamma, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} = & \left(\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0 + \right. \\ & \left. + \{H, \{G, G\}\}u_0 + \{G, \{G, G\}\}(u_0, u_0) \right)|_{\hat{x}(t^*)}. \end{aligned}$$

Форма $\{G, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$ обнуляется, как было доказано в лемме 4.3. Форма $\{H, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$ обнуляется ввиду равенства $\{G_i, \{H, G_j\}\} - \{G_j, \{H, G_i\}\} = \{H, \{G_i, G_j\}\}$ и симметричности формы $\{G, \{H, G\}\}$.

Поскольку $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$ не зависит от выбора u_0 , то естественно положить $u_0 = O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$. В этом случае мы немедленно получаем, что

$$-\{G^\Gamma, \{H, G^\Gamma\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)} \left(\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0 \right)|_{\hat{x}(t^*)} = 0 \in \Gamma'$$

Это равносильно тому, что разность $-\{G, \{H, G\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)} \left(\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0 \right)|_{\hat{x}(t^*)}$ и $-\{G, \{H, G\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)} \{H, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$ лежит в $\Gamma^\perp$, то есть $u^0 \in \Gamma^\perp$, что и требовалось.

Значит в силу условия несокошенности Ω особое управление $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$ по любой грани Γ лежит внутри Γ

Теперь покажем, что участок траектории $x(t), u(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$ удовлетворяет ПМП и теореме Гоха-Кренера, если разница $t_1 - t_0$ достаточно мала. Утверждение теоремы для остальных промежутков доказывается применением замечания 4.1 и очевидной индукции. Сначала проверим, что $x(t) \in \mathcal{M}_{\Gamma_1}$. Векторное поле гамильтоновой системы (4.1) при $u = O_\Gamma(x)$ в точках $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$ является касательным к $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$ – управление $O_{\Gamma_1}(x)$ выбиралось именно из этого условия. Поэтому достаточно проверить, что $x(t_0) = \hat{x}(t^*)$ лежит на $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$. Проверим все три условия леммы 4.1: (i) $G(\hat{x}(t^*)) = 0 \in \Gamma_1^\perp$; (iii) $\{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)} = 0$, поэтому $\{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)}\Gamma' \in \Gamma^\perp$; (ii) $\{H^\Gamma, G\}|_{\hat{x}(t^*)} = \{H, G\}|_{\hat{x}(t^*)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)}u^0 = 0 \in \Gamma^\perp$.

Поскольку $G(x(t)) \in \Gamma_1^\perp$, то $\langle G(x(t)), u \rangle$ достигает в точках $u \in \Gamma_1$ либо максимума либо минимума по всему многограннику Ω . Покажем, что это именно максимум, что и завершит доказательство. Вычислим производные от G в t^* вдоль траектории $x(t)$. Выбрав $\hat{u}(t^*) = O_\Omega(\hat{x}(t^*))$ в качестве начала координат в U и снабдив его ортонормированным базисом относительно $\{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$,

МЫ МОЖЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО

$$\{H, \{H, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} = 0; \text{ и } \{G, \{H, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} = \text{id}.$$

Итак,

$$\dot{G}(t^*) = \{H, G\}|_{\widehat{x}(t^*)} + \{G, G\}|_{\widehat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)) = 0;$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{G}(t^*) &= \{H, \{H, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} + \{G, \{H, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)) + \\ &+ \{H, \{G, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)) + \{G, \{G, G\}\}|_{\widehat{x}(t^*)} \left(O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)), O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)) \right) = \\ &= O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)). \end{aligned}$$

Поэтому $G(t^* + \Delta t) = \frac{1}{2} \Delta t^2 O_{\Gamma_1}(\widehat{x}(t^*)) + o(\Delta t^2)$, что и завершает доказательство.

□

Часть II

*Хаотическая динамика в гамильтоновых системах с разрывной
правой частью*

ГЛАВА 5

Первая теорема о хаотичном поведении траекторий в интегральных воронках

В данной главе дана постановка двумерной нильпотентно-выпуклой модельной задачи оптимального управления. Задача содержит ровно одну особую экстремаль второго порядка – начало координат. Управление меняется в некотором (чаще всего правильном, или близком к правильному) треугольнике Ω . Благодаря наличию нетривиальной группы симметрий $S_3 \times \mathbb{R}_+$ в этой главе будут найдены некоторые важные автомодельные траектории – траектории, являющиеся периодическими с точностью до подкрутки на действие $S_3 \times \mathbb{R}_+$. Если треугольник Ω является правильным, то данная задача содержит три одномерных подзадачи Фуллера внутри, каждая из которых отвечает одной из высот треугольника Ω . Будет описана динамика в окрестности оптимальных траекторий этих подзадач и в окрестности найденных автомодельных траекторий.

Ключевым результатом данной главы является теорема 5.1 о наличии хаотического поведения оптимальных траекторий в интегральной воронке гамильтоновой системы (5.2) для случая, когда треугольник Ω в модельной задаче (5.1) не слишком сильно отличается от правильного треугольника (см. [72]). Эта теорема является первой из доказанных во второй части диссертации серии теорем о наличии хаотического поведения траекторий в гамильтоновых системах с разрывной правой частью. Более того, основные результаты о структуре оптимального синтеза задачи (5.1), которые мы получим в этой главе, также лягут в основу доказательства теоремы о том, что подобное хаотическое поведение траекторий в интегральных воронках является общим для гамильтоновых систем высоких размерностей с разрывной правой частью. Для случая правильного треугольника в следующих главах будет доказана теорема $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ включающая в себя в этом случае результаты теоремы 5.1. В теореме $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, помимо прочего, найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств неблуждающих точек и соответствующая топологическая энтропия.

5.1 Постановка

Рассмотрим следующую нильпотентно-выпуклую задачу оптимального управления:

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf$$

$$\ddot{x} = u; \quad u \in \Omega \subset U;$$
(5.1)

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Здесь x и u лежат в двумерном евклидовом пространстве $U \simeq \mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а Ω является (замкнутым) треугольником, и $0 \in \text{Int } \Omega$ (такие треугольники мы будем называть допустимыми).

Замечание 5.1. Исследование задачи (5.1) будет опираться на случай, когда Ω является правильным треугольником с центром в начале координат. Однако, доказанные в этой главе результаты, связанные с хаотическим поведением оптимальных траекторий, будут получены и для более общего случая, когда треугольник Ω не обязательно является правильным.

Обозначим $y = \dot{x}$. Пусть ϕ, ψ – сопряженные к x и y переменные из ПМП. Иногда для сокращения записи мы будем писать $q = (x, y)$ и $p = (\phi, \psi)$. Для фазового пространства мы будем использовать обозначение $M = U \oplus U = \{(x, y)\}$, а для расширенного – $\mathcal{M} = T^*M = \{(p, q)\}$.

В теореме 3.2 доказано, что в функции Понтрягина $\lambda_0 \neq 0$. Положив $\lambda_0 = 1$ получаем

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, u \rangle$$

и соответствующую гамильтонову систему с разрывной правой частью:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\phi; & \dot{\phi} = x; & \dot{x} = y; & \dot{y} = u. \\ \langle \psi, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases}$$
(5.2)

Согласно теоремам 3.2 и 3.3 оптимальные траектории образуют в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M}$ липшицеву поверхность M_+ , и $\dim M_+ = 4$.

В системе (5.2) существует ровно одна особая по Ω траектория: $x \equiv y \equiv \phi \equiv \psi \equiv u \equiv 0$. Она имеет второй глобальный порядок по определению 2.4. Точнее, флаг глобальных порядков имеем вид $(0, 0, 2, 0, \dots)$. Как будет показано в главе 9, поведение оптимальных траекторий задачи (5.1) в окрестности начала координат является типичным для гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Поэтому мы произведем максимально полный и подробный анализ оптимального синтеза для задачи (5.1).

5.2 Симметрии задачи и одномерные задачи Фуллера внутри

Гамильтонова система (5.2) обладает двумя важными группами симметрий. Первая масштабирующая группа $\mathbb{R} \setminus 0$ одномерна и позволяет уменьшить размерность фазового пространства

системы. Подобная симметрия уже использовалась в примерах 3.2 и 3.5. Вторая группа S_3 дискретна, есть только в случае, когда Ω является правильным треугольником и ведет к доказательству хаотичности.

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим преобразование $g(\lambda) \in GL(8, \mathbb{R})$ расширенного фазового пространства $\mathcal{M}$:

$$x \mapsto \lambda^2 x, \quad y \mapsto \lambda y, \quad \phi \mapsto \lambda^3 \phi, \quad \psi \mapsto \lambda^4 \psi.$$

Преобразование $g(\lambda)$ изменяет гамильтониан $\mathcal{H}$ в λ^4 раз и симплектическую форму $\omega = dp \wedge dq = d\phi \wedge dx + d\psi \wedge dy$ в λ^5 раз. Поэтому $g(\lambda)$ переводит траектории системы (5.2) в траектории, однако меняет скорость движения по ним в λ раз. Поскольку $\lambda > 0$, то оптимальные траектории переходят в оптимальные, так как функционал J изменяется в λ^5 раз.

2. Если треугольник Ω является правильным, то в группе ортогональных преобразований плоскости U есть дискретная подгруппа $S_3 \subset O(2, \mathbb{R})$ симметрий треугольника Ω . Одновременное действие S_3 на векторах x, y, ϕ и ψ определяет преобразование расширенного фазового пространства, сохраняющее оптимальные траектории, гамильтониан $\mathcal{H}$ и симплектическую структуру ω .

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют перенести оптимальный синтез из пространства $M = \{(x, y)\}$ в пространство $N = \{(\phi, \psi)\}$. Более того, с помощью отображения E из теоремы 3.2 мы можем отождествить M, M_+ и N . Это оказывается очень полезным при изучении поверхности переключения управления $\mathcal{S}$, так как наиболее простой вид она принимает в пространстве сопряженных переменных N . Поскольку E коммутирует с $g(\lambda)$ при $\lambda > 0$, то пространства $(M \setminus 0)/g, (M_+ \setminus 0)/g$ и $(N \setminus 0)/g$ также отождествляются. Отметим, что начало координат является (единственной) неподвижной точкой действия g . На пространствах $M \setminus 0, M_+ \setminus 0$ и $N \setminus 0$ группа $\mathbb{R}_+$ действует свободно, и потому корректно определены фактор-пространства. Допуская некоторую вольность записи будем писать $M/g, M_+/g$ и N/g всегда подразумевая соответственно $(M \setminus 0)/g, (M_+ \setminus 0)/g$ и $(N \setminus 0)/g$.

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда начало координат лежит на одной из высот треугольника Ω . В этом случае в оптимальном синтезе задачи (5.1) удастся найти такую двумерную плоскость в M , что (i) оптимальная траектория системы начавшись на этой плоскости не может ее покинуть и (ii) поведение оптимальных траекторий на этой плоскости эквивалентно одномерной задаче Фуллера с несимметричным отрезком управлений.

Лемма 5.1. *Предположим, что аффинная прямая A , содержащая одну из высот Ω , проходит через начало координат. Тогда если выполнено одно из двух*

- (i) *Начальные условия лежат в A : $x_0, y_0 \in A$;*

(ii) Значения сопряженных переменных в начальный момент времени лежат в A , т.е. $\phi^0, \psi^0 \in A$, где $(\phi^0, \psi^0) = E(x_0, y_0)$;

то оптимальная траектория не покидает A при всех $t \geq 0$: $\hat{x}(t, q_0) \in A$, $\hat{y}(t, q_0) \in A$, $\hat{\phi}(t, q_0) \in A$, $\hat{\psi}(t, q_0) \in A$ и $\hat{u}(t, q_0) \in A$ (напомним, $q_0 = (x_0, y_0)$).

Доказательство. Предположим, что выполнен пункт (i). По теореме 3.1 оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$ существует и единственна. Рассмотрим траекторию $q(t)$, которая получена из оптимальной с помощью ортогональной проекции на A . Траектория $q(t)$ допустима, так как A является высотой в Ω , и, значит, проекция Ω на A содержится в Ω . Поскольку при ортогональном проектировании на любое одномерное линейное подпространство длина вектора не может увеличиться, то $J(q) \leq J(\hat{q})$. Осталось заметить, что $q(t)$ и $\hat{q}(t, q_0)$ начинаются в одной точке $q_0 \in A$, поэтому $\hat{q}(t, q_0) \equiv q(t)$ в силу единственности оптимального решения (по теореме 3.1). Следовательно, $\hat{q}(t, q_0) \in A$ при всех t . Траектории $\hat{\phi}(t, q_0)$ и $\hat{\psi}(t, q_0)$ лежат в A в силу формул (3.9).

При ограничении на подпространство $A \oplus A \subset M$ мы получаем одномерную задачу Фуллера, отрезком управления в которой выступает высота треугольника Ω . Поэтому $E(A \oplus A) = A \oplus A$ (см. [32], параграф 3.5).

Пусть теперь выполнен пункт (ii). По теореме 3.2 найдутся и при том единственные x_0 и y_0 такие, что $E(x_0, y_0) = (\phi^0, \psi^0)$. При этом x_0 и y_0 должны лежать в A (так как отображение E биективно, а $E(A \oplus A) = A \oplus A$). Поэтому пункт (ii) следует из уже доказанного пункта (i). $\square$

Отметим, что в условиях леммы 5.1 особое управление по ребру (ij) , содержащему основание высоты A , может быть использовано только на оптимальной траектории, целиком лежащей в A . Действительно, если максимум по u скалярного произведения $\langle \psi, u \rangle$ достигается одновременно во всех точках ребра (ij) , то вектор ψ перпендикулярен ребру (ij) . Для особого управления, следовательно, необходимо, чтобы вектор ψ на оптимальной траектории был перпендикулярен ребру (ij) в течении некоторого промежутка времени $t \in (t_1, t_2)$. Дифференцируя $\psi(t)$ в силу системы (5.2) немедленно получаем, что вектора $\phi(t)$, $x(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ также перпендикулярны ребру (ij) .

Определение 5.1. Мы будем называть оптимальную траекторию *полуособой* по ребру (ij) треугольника Ω , если в течение всего времени эта траектория лежит на прямой A , содержащей высоту Ω на ребро (ij) .

5.3 Барицентрические координаты в случае правильного треугольника

Доказательство теорем о хаотичности опирается на ключевые элементы оптимального синтеза в задаче (5.1) в случае когда треугольник Ω является правильным. Поэтому основной целью до конца главы будет являться выделение ключевых элементов оптимального синтеза в этом важном частном случае, а треугольник Ω будет предполагаться правильным и центрированным относительно начала координат (в дальнейшем для краткости этот случай мы будем называть «случай правильного треугольника»).

Для того, чтобы в явном виде описать некоторые важные примеры оптимальных траекторий, нам потребуется удобная система координат. Когда множество Ω является правильным треугольником с центром в начале координат, в этой задаче удобнее всего использовать барицентрическую систему координат¹:

$$\begin{cases} x = (x^1, x^2, x^3), & x^1 + x^2 + x^3 = 0; & y = (y^1, y^2, y^3), & y^1 + y^2 + y^3 = 0; \\ \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), & \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0; & \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), & \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0; \\ u = (u^1, u^2, u^3), & u^1 + u^2 + u^3 = 0; & u_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Вершинами треугольника Ω являются точки² $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$ и $(1, 1, -2)$. Мы будем их называть первой второй и соответственно третьей вершинами треугольника Ω . Условие максимума (5.2) переписывается в барицентрических координатах в виде

$$u^i = -2, u^j = u^k = 1, \text{ если } \psi_i < \min(\psi_j, \psi_k), \text{ где } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

за исключением случаев $\psi_i = \psi_j \leq \psi_k$.

Действие дискретной группы S_3 в барицентрической системе координат – это просто перестановка индексов. Обозначим через A_{ij} прямую в U , симметричную относительно транспозиции $(ij) \in S_3$. Из леммы 5.1 следует, что при ограничении на каждую из трех прямых A_{ij} , где совпадают i -ая и j -ая координаты, мы получаем одномерную задачу Фуллера с несимметричным отрезком управления:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 dt &\rightarrow \min; \\ \dot{x} &= y; \quad \dot{y} = u; \quad u \in [-\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{6}]. \end{aligned}$$

Здесь x , y и u одномерны. Такие задачи очень хорошо изучены, оптимальный синтез построен и может быть явно выписан в координатах, функция Беллмана и отображение E выписаны в явном виде (см. [32]). Опишем геометрические свойства оптимального синтеза (см. пример 3.3): на плоскости $\mathbb{R}^2$ определено однопараметрическое семейство траекторий, переходящих друг в друга при действии g масштабной группы $\mathbb{R}_+$. Каждая оптимальная траектория за конечное время попадает в начало координат. При этом оптимальное управление совершает счетное число переключений с левого конца отрезка управлений на правый и обратно. После факторизации фазового пространства $\mathbb{R}^2$ (без начала координат) по действию масштабной группы g , получается окружность S^1 , а все оптимальные траектории переходят в единственно возможный цикл $Z \simeq S^1$. Причем цикл Z разбивается точками переключения управления на два (открытых) интервала Z^l и Z^r . Управление на Z^l – левый конец отрезка, а на Z^r – правый. Счетное число переключений управления на оптимальной траектории соответствует счетному числу оборотов по циклу Z .

¹Вообще говоря, в барицентрической системе сумма координат равна 1. Тем не менее, мы будем употреблять слово «барицентрический» по аналогии, допуская некоторую вольность речи.

²Здесь рассмотрен случай, когда расстояние от вершин Ω до начала координат есть $\sqrt{6}$. Случай, когда треугольник Ω имеет другие размеры мгновенно к нему сводится очевидной линейной заменой.

При отображении оптимального синтеза исходной задачи (5.1) на фактор-пространство $M/g \simeq S^3$ все оптимальные траектории из A_{ij} переходят в одну и ту же траекторию $Z_{ij} \simeq S^1$. Траектория Z_{ij} является циклом, который разбит точками переключения управления на два гладких интервала Z_{ij}^s и Z_{ij}^n . На Z_{ij}^n используется управление в k -ой вершине треугольника Ω , т.е. $u_i = u_j = 1, u_k = -2, k \neq i, j$, а на Z_{ij}^s – середина (ij) ребра, $u_i = u_j = -\frac{1}{2}, u_k = 1$. Мы будем называть первое управление неособым, а второе – полусособым по ребру³ (ij) треугольника Ω .

Таким образом, на фактор-пространстве M/g определены три взаимно зацепленных цикла Z_{ij} . Нетрудно посчитать, что коэффициенты взаимного зацепления равны 1 (но это не существенно для дальнейшего).

5.4 Важнейшие примеры периодических траекторий на фактор-пространстве M/g

Огромную роль при построении полного оптимального синтеза в задаче (5.1) играют автомодельные траектории – это такие траектории, которые являются периодическими, с точностью до подкрутки на действие g группы $\mathbb{R}_+$:

Определение 5.2. Мы будем называть траекторию $(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$ системы (5.2) автомодельной, если существуют такие момент времени $t_0 > 0$ и число $\lambda_0 > 0$, что

$$g(\lambda_0)(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) = (x(t_0 + \lambda_0 t), y(t_0 + \lambda_0 t), \phi(t_0 + \lambda_0 t), \psi(t_0 + \lambda_0 t))$$

Замечание 5.2. Если $\lambda_0 < 1$, то автомодельная траектория за конечное время $\frac{1}{1-\lambda_0}t_0$ попадает в начало координат, следовательно, по теореме 3.3 (и следствию 3.3 из нее) лежит в M_+ и является оптимальной. Если $\lambda_0 > 1$, то автомодельная траектория лежит в $M_- = g(-1)M_+$ и выходит из начала координат за конечное время (см. замечание 3.1). Если же $\lambda_0 = 1$, то автомодельная траектория является настоящей периодической траекторией и не стремится в 0 ни при $t \rightarrow +\infty$ ни при $t \rightarrow -\infty$.

Поскольку действие g уважает оптимальный синтез в задаче, то $g(\lambda)$ при $\lambda > 0$ переводит любую автомодельную траекторию с $\lambda_0 < 1$ в автомодельную с тем же λ_0 , и все траектории из этого семейства проектируются в одну и ту же периодическую траекторию на фактор-пространстве M_+/g . Как будет доказано ниже, на M_+/g существует счетное число периодических траекторий, и, следовательно в исходной задаче есть счетное число типов семейств автомодельных траекторий.

В этом параграфе будут найдены некоторые примеры периодических траекторий на M_+/g , описание которых лежит в основе доказательства хаотичности оптимального синтеза на M_+/g .

³Символы s и n в Z_{ij}^s и Z_{ij}^n выбраны по ассоциации с singular и non-singular. Термин «полусособое управление по ребру» использован во второй части диссертации, чтобы избежать путаницы с особым управлением в начале координат.

Начнем с точного определения отображения последования Пуанкаре и поверхности переключения. Под поверхностью переключения обычно подразумевают множество точек, на которых управление на траекториях системы ПМП терпит разрыв. Однако, ввиду наличия траекторий с полуюсобым управлением в середине ребра, мы расширим это определение:

Определение 5.3. Поверхностью переключения $\mathcal{S}$ в задаче (5.1) мы будем называть множество точек расширенного фазового пространства $\mathcal{M} = T^*M$, на которых максимум по u скалярного произведения $\langle \psi, u \rangle$ из (5.2) достигается не в единственной точке треугольника Ω . То есть

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{23} \cup \mathcal{S}_{13} \subset \mathcal{M}.$$

Здесь $\mathcal{S}_{ij} \subset \mathcal{M}$ – множество тех точек, на которых $\arg \max_{u \in \Omega} \langle \psi, u \rangle$ содержит ребро (ij) треугольника Ω (в этом случае ковектор ψ необходимо перпендикулярен ребру (ij) треугольника Ω). Через $\mathcal{S}_{123}$ будем обозначать пересечение

$$\mathcal{S}_{123} = \mathcal{S}_{12} \cap \mathcal{S}_{23} \cap \mathcal{S}_{13} = \{\psi = 0\} \subset \mathcal{M}$$

Если треугольник Ω является правильным, то в барицентрических координатах

$$\mathcal{S}_{ij} = \{\psi_i = \psi_j \leq \psi_k\}, \quad k \neq i, j.$$

Множество $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ является гладким некомпактным многообразием без края коразмерности 1. В любой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ скорость системы (5.2) терпит касательный скачок. То есть в любой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ разность пределов скоростей системы (5.2) с обеих сторон от $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ является касательным вектором к $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$. Если скорость в некоторой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ трансверсальна $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ (с обеих сторон), то траектория системы (5.2), начинающаяся в этой точке, в течении некоторого промежутка времени не пересекает $\mathcal{S}$. Рассмотрим те точки многообразия $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ в которых определено отображение последования Пуанкаре, переводящее точку $q \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ в первое пересечение с $\mathcal{S}$ траектории гамильтоновой системы (5.2), начинающейся в q . Обозначим образ q через $\Phi(q) \in \mathcal{S}$, а Φ будем называть отображением последования Пуанкаре поверхности переключения на себя. Отметим, что отображение Φ определено не во всех точках $(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}) \cap M_+$.

Исследуем теперь периодические оптимальные траектории на M_+/g для случая правильного треугольника. Конечно, траектории Z_{ij} являются периодическими на M_+/g . Все остальные оптимальные траектории системы пересекают поверхность переключения $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ трансверсально. Точнее, если в момент $t_1 \in (0; T(q_0))$ в точке $(x_1, y_1, \phi^1, \psi^1)$ пересечения некоторой оптимальной траектории с поверхностью переключения $\mathcal{S}_{ij}$ выполнено не только условие пересечения $\psi_i^1 = \psi_j^1$, но и условие касания $\phi_i^1 = \phi_j^1$, то по лемме 5.1 часть этой траектории при $t \geq t_1$ целиком лежит в A_{ij} . Поэтому такая оптимальная траектория счетное число раз пересекает поверхность $\mathcal{S}_{123}$ при $t \in (t_1, T(q_0))$. Итак, если оптимальная траектория не пересекается с $\mathcal{S}_{123}$ вплоть до момента выхода в начало координат, то она обязана пересекать поверхности $\mathcal{S}_{ij}$ с обеих сторон только трансверсально. Таким образом, доказана

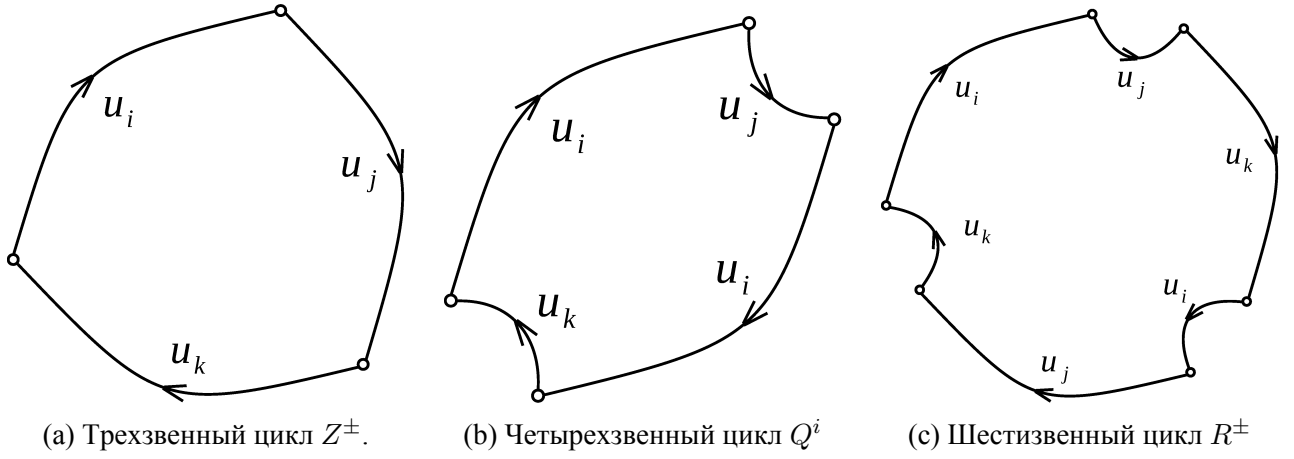


Рисунок 5.1: Схематичное изображение периодических траекторий $Z^\pm$, Q^i и $R^\pm$ на сфере M_+/g .

Лемма 5.2. Все периодические оптимальные траектории на M_+/g системы (5.2) не пересекающие $\mathcal{S}_{123}/g$ являются периодическими точками отображения Пуанкаре поверхности переключения на себя. Более того, каждая такая траектория в каждой точке пересечения с поверхностью переключения⁴ $\mathcal{S}_{ij}/g$ управления трансверсальна ей с обеих сторон.

Отметим, что отрезок траектории γ , соединяющий q и $\Phi(q)$ является гладкой кривой, а векторы $x(t)$, $y(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t)$ на траектории γ являются полиномами 2-ой, 1-ой, 3-ей и 4-ой степени по t соответственно.

Поскольку действие g сохраняет траектории гамильтоновой системы (5.2), то при $\lambda > 0$ оно коммутирует с отображением последования Пуанкаре Φ , и индуцирует отображение $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$ в себя, которое мы будем обозначать так же: $\Phi : (\mathcal{S} \cap M_+)/g \rightarrow (\mathcal{S} \cap M_+)/g$.

Рассмотрим периодическую траекторию (цикл) на M_+/g , имеющую k звеньев гладкости, т.е. пересекающую поверхности $\mathcal{S}_{ij}/g$ последовательно в точках $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k = z_0$, где $z_i \notin \mathcal{S}_{123}$. Такую траекторию можно найти из следующих очевидных соображений

$$\Phi(z_0) = z_1, \dots, \Phi(z_{k-1}) = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^k(z_0) = z_0.$$

Лемма 5.3 (см. [78]). На M_+/g существуют следующие периодические траектории:

- (i) два трехзвенных цикла $Z^\pm$. Управление на каждом из них чередует по очереди все вершины треугольника Ω по часовой $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и против часовой стрелки $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ соответственно.
- (ii) три четырехзвенных цикла Q^i , $i = 1, 2, 3$. Управление на Q^i чередует все вершины треугольника Ω в следующем порядке: $i \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow k \rightarrow i$, где $j, k \neq i$.
- (iii) два шестизвенных цикла $R^\pm$. Управление на R^+ чередует все вершины треугольника Ω в следующем порядке: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, а на R^- в обратном порядке.

⁴Мы опять для удобства пишем $\mathcal{S}_{ij}/g$ вместо $(\mathcal{S}_{ij} \setminus 0)/g$

Доказательство. Сначала докажем пункт (i). Уравнение $\Phi^3(z) = z$, $z \in S/g$, решать в явном виде неудобно, так как возникающие в результате полиномы имеют очень большую степень. Для упрощения вычислений воспользуемся дискретной группой симметрий S_3 оптимального синтеза, описанной в параграфе 5.2. Пусть $\alpha = (123) \in S_3$. Найдем решение упрощенного уравнения

$$(\alpha \circ \Phi)(z) = z. \quad (5.3)$$

Решение упрощенного уравнения очевидно будет решением исходно уравнения $\Phi^3(z) = z$, так как α и Φ коммутируют.

Пусть прообраз $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)$ имеет координаты $\tilde{z} = (x_0, y_0, \phi^0, \psi^0)$ и $\tilde{\gamma}$ есть траектория системы (5.2) в $\mathcal{M}$, выходящая из $\tilde{z}$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{z}$. Опишем теперь переключения управления. Пусть в точке $\tilde{z}$ управление переключается с третьей вершины треугольника Ω на первую. Это означает, что

$$\psi_1^0 = \psi_3^0 < \psi_2^0 \quad \text{и} \quad \phi_1^0 > \phi_3^0. \quad (5.4)$$

Поскольку управление постоянно от точки z до точки $\Phi(z)$ и $u_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3) = (-2, 1, 1)$, то $\tilde{\gamma}$ имеет вид (до первого переключения управления)

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + u_0 t \\ x(t) = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} u_0 t^2 \\ \phi(t) = \phi^0 + x_0 t + \frac{1}{2} y_0 t^2 + \frac{1}{6} u_0 t^3 \\ \psi(t) = \psi^0 - \phi^0 t - \frac{1}{2} x_0 t - \frac{1}{6} y_0 t^2 - \frac{1}{24} u_0 t^3 \end{cases} \quad (5.5)$$

Если траектория $\tilde{\gamma}$ пересекает поверхность переключения управления в момент времени $t_0 > 0$, то $\alpha(\pi(\tilde{\gamma}(t_0))) = z$, поскольку z удовлетворяет уравнению (5.3). Другими словами, существует такое число $\lambda_0 > 0$, что $\alpha(\tilde{\gamma}(t_0)) = g(\lambda_0)\tilde{z}$. Последнее условие можно переписать с помощью (5.5) в виде системы алгебраических уравнений, линейных по x_0, y_0, ϕ^0 и ψ^0 , и полиномиальных по t_0 и λ_0 . Решение этой системы определено не однозначно, а с точностью до действия g . Это связано с тем, что точка $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)$ определена тоже с точностью до действия g . Поэтому, без ограничения общности, можем положить $t_0 = 1$. Разрешая полученную систему относительно линейно входящих x^0, y^0, ϕ^0 и ψ^0 и подставляя в равенство $\psi_1^0 = \psi_3^0$ из (5.4), получаем полиномиальное уравнение на λ_0 :

$$P_Z(\lambda_0) = \lambda_0^6 - 4\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 1 = 0.$$

Методом Штурма немедленно получаем, что полином $P_Z(\lambda_0)$ имеет ровно 1 корень на промежутке $(0, 1)$. Этому корню отвечает такая точка z , что выполняются неравенства (5.4). Таким образом, на M_+/g определена ровно одна периодическая траектория Z^+ . Вторая траектория $Z^- \in M_+/g$ получается из Z^+ с помощью отражения $(12) \in S_3$, или заменой цикла $\alpha = (123)$ на $\alpha^{-1} = (132)$.

Пункты (ii) и (iii) доказываются аналогично пункту (i). Для получения четырехзвенных циклов на M_+/g необходимо решать уравнение $(\beta \circ \Phi^2)(z) = z$, где $\beta \in S_3$ есть одна из трех транспозиций

(12), (23) или (13) из S_3 . Описанный выше метод приводит к полиному

$$\begin{aligned}
 P_Q(\lambda_0) = & 1 + 4\lambda_0 + 60\lambda_0^2 + 220\lambda_0^3 - 607\lambda_0^4 - 5080\lambda_0^5 - 19700\lambda_0^6 - 73944\lambda_0^7 - \\
 & -192258\lambda_0^8 - 416272\lambda_0^9 - 918956\lambda_0^{10} - 1609184\lambda_0^{11} - 2528300\lambda_0^{12} - \\
 & -4868880\lambda_0^{13} - 5019696\lambda_0^{14} - 10839184\lambda_0^{15} - 8659545\lambda_0^{16} - \\
 & -18568404\lambda_0^{17} - 12399696\lambda_0^{18} - 27180572\lambda_0^{19} - 14695579\lambda_0^{20} - \\
 & -31988656\lambda_0^{21} - 16556344\lambda_0^{22} - 31988656\lambda_0^{23} - 14695579\lambda_0^{24} - \\
 & -27180572\lambda_0^{25} - 12399696\lambda_0^{26} - 18568404\lambda_0^{27} - 8659545\lambda_0^{28} - \\
 & -10839184\lambda_0^{29} - 5019696\lambda_0^{30} - 4868880\lambda_0^{31} - 2528300\lambda_0^{32} - \\
 & -1609184\lambda_0^{33} - 918956\lambda_0^{34} - 416272\lambda_0^{35} - 192258\lambda_0^{36} - 73944\lambda_0^{37} - \\
 & -19700\lambda_0^{38} - 5080\lambda_0^{39} - 607\lambda_0^{40} + 220\lambda_0^{41} + 60\lambda_0^{42} + 4\lambda_0^{43} + \lambda_0^{44} = 0,
 \end{aligned}$$

который имеет единственный корень на промежутке $(0,1)$. Координаты точек z и $\Phi(z)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным (5.4), и, следовательно, на M_+/g определены три четырехзвенных периодических траектории.

Для получения шестизвенных циклов на M_+/g необходимо решать уравнение $(\alpha \circ \Phi^2)(z) = z$, где α есть перестановка (123) или (132) из S_3 . В результате получаем

$$\begin{aligned}
 P_R(\lambda_0) = & \lambda_0^{20} - 12\lambda_0^{19} + 30\lambda_0^{18} + 66\lambda_0^{17} - 117\lambda_0^{16} - 504\lambda_0^{15} - 207\lambda_0^{14} + \\
 & + 942\lambda_0^{13} + 1271\lambda_0^{12} - 390\lambda_0^{11} - 1599\lambda_0^{10} - 390\lambda_0^9 + 1271\lambda_0^8 + 942\lambda_0^7 - \\
 & - 207\lambda_0^6 - 504\lambda_0^5 - 117\lambda_0^4 + 66\lambda_0^3 + 30\lambda_0^2 - 12\lambda_0 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Этот полином тоже имеет единственный корень на промежутке $(0,1)$, а координаты точек z и $\Phi(z)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным (5.4), и, следовательно, на M_+/g определены две шестизвенных периодических траектории. $\square$

Полиномы P_Z , P_Q и P_R получились возвратными, так как примененный метод фактически позволял находить автомодельные траектории на $\mathcal{M}$ без учета условия $\lambda_0 < 1$. Осталось лишь сказать, что отображение $g(-1)$ переводит любую автомодельную траекторию на $\mathcal{M}$ в автомодельную, но меняет направление течения времени, поэтому λ_0 переходит в $\frac{1}{\lambda_0}$.

5.5 Поведение оптимальных траекторий в окрестности периодических траекторий

Мы покажем, что почти все оптимальные траектории задачи (5.1) в обратном времени притягиваются к одному из двух найденных в предыдущем параграфе трехзвенных циклов $Z^\pm$, а в прямом времени выходят за конечное время со счетным числом переключений на один из трех двугривенных циклов Z_{ij} . Выражение «почти все» означает, что на M/g определено множество точек X полной лебеговой меры, удовлетворяющих описанным свойствам. Циклы Q^i и $R^\pm$ не

лежат в множестве X . Более того, существует счетное число периодических траекторий не лежащих в X , само множество $(M/g) \setminus X$ имеет нецелую размерность, а поведение траекторий на нем является хаотическим.

Чтобы получить эти результаты, необходимо воспользоваться результатами статьи [78]. В этом параграфе будут описаны полученные в [78] результаты и снабжены необходимыми пояснениями.

Начнем с изучения поведения оптимальных траекторий в окрестности циклов $Z^\pm$ и Z_{ij} . Найденные в предыдущем параграфе циклы $Z^\pm$ оказываются отталкивающими на сфере M/g . Дадим точную формулировку этого утверждения. Рассмотрим отображение Пуанкаре Φ поверхности переключения на себя. Каждый из циклов $Z^\pm$ пересекает поверхность переключения в трех точках $z_i^\pm$, $i = 1, 2, 3$, и каждая из этих точек является неподвижной точкой отображения Φ^3 . В статье [78] вычислены в явном виде собственные значения дифференциала отображения Φ^3 в точках $z_i^\pm$ (эти числа конечно не зависят от выбора точки $z_i^\pm$) и все эти числа по модулю строго больше 1. Поэтому любая (оптимальная) траектория, оказавшись в окрестности $Z^\pm$, при движении в попятном времени будет на M_+/g приближаться к одному из циклов $Z^\pm$. Отметим, что это не доказывает, вообще говоря, что почти любая траектория на M/g в попятном времени стремится к $Z^\pm$.

Поведение оптимальных траекторий в окрестности циклов Z_{ij} устроено совершенно иным образом. Как уже отмечалось выше, каждый двузвенный цикл Z_{ij} состоит из двух частей Z_{ij}^n и Z_{ij}^s . Управление на интервале Z_{ij}^n не особое и находится в k -ой вершине треугольника Ω , $k \neq i, j$. Управление на интервале Z_{ij}^s является особым по противоположному ребру (ij) и находится в его середине.

Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in M$ на A_{ij} , т.е. $x_0, y_0 \in A_{ij}$. По лемме 5.1, $\pi(x_0, y_0) \in Z_{ij}$. Предположим сначала, что точка (x_0, y_0) не является точкой переключения и $\pi(x_0, y_0)$ лежит на Z_{ij}^n , т.е. управление – это k -ая вершина треугольника Ω , $k \neq i, j$. Тогда, если точка $(x_1, y_1) \in M$ достаточно близка к (x_0, y_0) , то точка $E(x_1, y_1)$ близка к $E(x_0, y_0)$ по теореме 3.2, и, следовательно, управление на оптимальной траектории, начинающейся в (x_1, y_1) в течении некоторого промежутка времени совпадает с неособым управлением на Z_{ij}^n .

Предположим теперь, что $\pi(x_0, y_0)$ лежит на Z_{ij}^s , и, следовательно, оптимальное управление на Z_{ij}^s является серединой ребра (ij) треугольника Ω . Положим $(\phi^0, \psi^0) = E(x_0, y_0)$. Тогда $\psi_i^0 = \psi_j^0 > \psi_k^0$. Если точка (x_1, y_1) лежит в окрестности (x_0, y_0) , $(\phi^1, \psi^1) = E(x_1, y_1)$ и $\psi_i^1 \neq \psi_j^1$, то в силу непрерывности отображения E управление на оптимальной траектории, проходящей через точку x_1, y_1 , должно быть либо i -ой, либо j -ой вершиной треугольника Ω .

Более того, в [78] показано, что существует такая окрестность V интервала Z_{ij}^s в M_+/g , что оптимальная траектория, проходящая через любую точку (x_1, y_1) , образ которой $\pi(x_1, y_1)$ лежит в V , за конечное время, не покидая $\pi^{-1}(V)$, выходит на $\pi^{-1}(Z_{ij}^s)$. Оптимальное управление при этом совершает счетное число переключений между i -ой и j -ой вершинами треугольника Ω . Этот процесс аналогичен чаттеринг режиму в одномерной задаче Фуллера с той лишь разницей, что в качестве отрезка допустимых управлений выступает ребро (ij) треугольника Ω . Подробное доказательство этого факта, а также точные аналитические формулы, описывающие этот процесс

можно найти в [78]. Более того, в [78] показано, что на M_+/g у каждого цикла Z_{ij} существует такая окрестность, что любая траектория, оказавшись в этой окрестности, не покидает ее и попадает со счетным числом переключений на Z_{ij} .

5.6 Формулировка первой теоремы о хаотичном поведении траекторий в модельной задаче

Мы начнем с формулировки теоремы о хаотичном поведении оптимальных траекторий в экстремальной задаче (5.1), снабдив ее всеми необходимыми пояснениями. Первые три пункта теоремы описывают исследуемое множество точек Ξ на M_+ , сотканное из траекторий гамильтоновой системы (5.2), а в последнем пункте теоремы описана хаотическая динамика траекторий на этом множестве. Множество Ξ является аналогом множества неблуждающих траекторий, естественным для интегральных воронок.

Так как флаг глобальных порядков (по определению 2.4) единственной особой траектории $x = y = \phi = \psi = u = 0$ в задаче (5.1) есть $(0,0,2,0 \dots)$, то по теореме 2.4 любая траектория из множества Ξ пересекает стратифицированное многообразие $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{13} \cup \mathcal{S}_{23}$ разрыва правой части системы (5.2) счетное (бесконечное) число раз. Поэтому хаотическая динамика поведения этих траекторий описана в теореме 5.1 в терминах последовательности пересечения страт $\mathcal{S}_{ij}$. А именно, последовательность пересечения страт кодируется с помощью пространства Σ_{01} бесконечных в обе стороны слов из 0 и 1, снабженного стандартной топологией прямого произведения. Пространство Σ_{01} гомеоморфно подкове Смейла. Через $l : \Sigma_{01} \rightarrow \Sigma_{01}$ обозначена топологическая цепь Маркова бернуллиевского сдвига, т.е. l – отображение, сдвигающее каждое слово на одну позицию влево.

Теорема 5.1. *Существует такое число $\varepsilon > 0$, что если углы треугольника Ω в задаче (5.1) отличаются от $\pi/3$ не более чем на ε и расстояние от центра Ω до начала координат⁵ не превосходит $\varepsilon \operatorname{diam} \Omega$, то в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M = \{(x, y, \phi, \psi)\}$ гамильтоновой системы (5.2) определено множество точек Ξ , обладающее следующими свойствами:*

- (I) *Для любой точки $z \in \Xi$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$ гамильтоновой системы (5.2), проходящая через z , существует и единственная при $t \in [-\infty; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в начало координат за время $T(z)$, $X(T(z), z) = 0$.*
- (II) *Множество Ξ соткано из траекторий гамильтоновой системы (5.2) и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \Xi$, то $X(t, z)$ лежит в Ξ при всех $t \in [-\infty; T(z))$.*

⁵В качестве центра треугольника Ω можно выбрать, например, любую из точек пересечения высот, биссектрис, медиан или серединных перпендикуляров, поскольку треугольник Ω близок к правильному и расстояния между ними не превосходят $\varepsilon C \operatorname{diam} \Omega$, для некоторого фиксированного $C > 0$.

(III) Проекция траектории $X(t, z)$ на фазовое пространство M , продолженная 0 при $t > T(z)$, является оптимальной при любом $z \in \Xi$ (то есть $\Xi \subset M_+$). Более того, траектория $X(t, z)$ пересекает поверхность переключения $\mathcal{S}$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \dots < T(z)$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}$ и $t_0 \leq 0 < t_1$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$ и $t_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow -\infty$.

(IV) Рассмотрим динамическую систему $\Phi : \Xi \cap \mathcal{S} \rightarrow \Xi \cap \mathcal{S}$, переводящую точку $z \in \Xi$ на $\mathcal{S}$ в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с $\mathcal{S}$, т.е. $\Phi(z) = X(t_1, z)$. Существует такое натуральное $n > 0$ (одинаковое для всех треугольников Ω), что отображение Φ^n полусопряжено с топологической марковской цепью бернуллиевского сдвига на несвязном объединении двух экземпляров подковы Смейла. Другими словами, существует такое непрерывное сюръективное отображение Ψ_{01} из $\Xi \cap \mathcal{S}$ в пространство $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Xi \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi^n} & \Xi \cap \mathcal{S} \\ \downarrow \Psi_{01} & & \downarrow \Psi_{01} \\ \bigsqcup^2 \Sigma_{01} & \xrightarrow{l} & \bigsqcup^2 \Sigma_{01} \end{array}$$

где l обозначает сдвиг влево на каждом экземпляре Σ_{01} .

5.7 Раздутие особенности в вершине интегральной воронки

Для доказательства теоремы 5.1 нам потребуется произвести модифицированную процедуру раздутия начала координат (см. пример 3.2). С топологической точки зрения это означает вклеивание сферы S^7 в начало координат. При построении процедуры раздутия мы никак не будем использовать тот факт, что Ω является треугольником – подойдет любой выпуклое компактное множество, лишь бы $0 \in \text{Int } \Omega$ (т.е. должны выполняться условия теоремы 3.1).

Однако отметим, что оптимальные траектории задачи (5.1) попадают в начало координат за конечное время, поэтому после раздутия начала координат векторное поле (5.2) будет бесконечно расти при приближении ко вклеенной сфере.

Определение 5.4. Раздутием особенности в начале координат мы будем называть отображение $\mathbf{B}$ устроенное следующим образом:

$$\mathbf{B} : (x, y, \phi, \psi) \mapsto (\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}),$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, а $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2, \tilde{\phi} \in \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^2$ лежат на многообразии

$$\mathcal{C}_0 = \{|\tilde{y}|^{24} + |\tilde{x}|^{12} + |\tilde{\phi}|^8 + |\tilde{\psi}|^6 = 1\} \subset \mathbb{R}^8. \quad (5.6)$$

Отображение $\mathbf{B}$ задается следующими формулами:

$$\tilde{y} = y/\mu, \quad \tilde{x} = x/\mu^2, \quad \tilde{\phi} = \phi/\mu^3 \text{ и } \tilde{\psi} = \psi/\mu^4, \quad (5.7)$$

где

$$\mu = (|y|^{24} + |x|^{12} + |\phi|^8 + |\psi|^6)^{\frac{1}{24}}. \quad (5.8)$$

Перенесем действие g группы $\mathbb{R}_+$ на цилиндр $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ естественным образом так, чтобы отображение $\mathbf{B}$ было эквивариантным относительно действия g :

$$\mathbf{B} \circ g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} g(\lambda) \circ \mathbf{B} \implies g(\lambda)(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\lambda\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \quad \forall \lambda > 0.$$

Мы задали процедуру раздутия особенности системы (5.2) в начале координат именно формулами (5.7, 5.8), потому что в этом случае действие g группы $\mathbb{R}_+$ записывается в наиболее простом виде.

Определение 5.5. Через $\mathcal{C}$ будем обозначать цилиндр $\mathcal{C}_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ над $\mathcal{C}_0$. Само многообразие $\mathcal{C}_0$ будем отождествлять с нулевым сечением: $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \{\mu = 0\}$. Поверхности переключения $\mathcal{S}_{ij}$ мы продолжим на $\mathcal{C}_0$ естественным образом. Под вертикальным направлением будет пониматься направление по вектору $\frac{\partial}{\partial \mu}$.

Лемма 5.4. Отображение раздутия $\mathbf{B}$ есть диффеоморфизм $\mathcal{M} \setminus 0$ на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$.

Доказательство. Легко видеть из формул (5.7, 5.8), что отображение $\mathbf{B}$ корректно определено на $\mathcal{M} \setminus 0$, и биективно отображает $\mathcal{M} \setminus 0$ на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$. Более того, отображение $\mathbf{B}$ является гладким на $\mathcal{M} \setminus 0$.

Покажем, что дифференциал $d\mathbf{B}$ невырожден в точках сферы $\{|y|^{24} + |x|^{12} + |\phi|^8 + |\psi|^6 = 1\} = \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$. В остальных точках невырожденность $d\mathbf{B}$ следует из эквивариантности $\mathbf{B}$ относительно действия g . Ограничение отображения $\mathbf{B}$ на сферу $\mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$ является диффеоморфизмом согласно (5.7), и, значит, ограничение дифференциала $d\mathbf{B}|_{T_z \mathbf{B}^{-1}\{\mu=1\}}$ невырождено в любой точке $z \in \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$. С другой стороны если $z \in \mathcal{M} \setminus 0$, то

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{B}(g(\lambda)z))|_{\lambda=1} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}|_{\mathbf{B}(z)} \in T_{\mathbf{B}(z)}\mathcal{C}.$$

Если $z \in \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$, то касательный вектор $\frac{\partial}{\partial \mu}|_{\mathbf{B}(z)}$ не лежит в касательном пространстве $T(\mathcal{C} \cap \{\mu = 1\})$. Поэтому отображение $d\mathbf{B}|_z$ является сюръективным, и, следовательно невырождено. $\square$

Отметим, что формально отображение $\mathbf{B}^{-1}$ определено только на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$, однако мы доопределим его естественным образом на $\mathcal{C} \cap \{\mu < 0\}$ теми же формулами:

$$\mathbf{B}^{-1} : (\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \mapsto (x, y, \phi, \psi), \text{ где } y = \mu \tilde{y}, x = \mu^2 \tilde{x}, \phi = \mu^3 \tilde{\phi}, \psi = \mu^4 \tilde{\psi}$$

В этом случае $\mathbf{B}^{-1}$ становится тривиальным двулистным накрытием $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ над $\mathcal{M} \setminus 0$.

Если множество Ω является треугольником, то на цилиндре $\mathcal{C}$ определена поверхность переключения $\tilde{\mathcal{S}}$. А именно, обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$ замыкание множества тех точек из $\mathcal{C}$, которые при отображении $\mathbf{B}^{-1}$ переходят в $\mathcal{S}_{ij}$. Другими словами множество $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$ состоит из таких точек $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, что $\arg \max_{u \in \Omega} \langle \tilde{\psi}, u \rangle$ содержит (ij) ребро треугольника Ω . Положим также $\tilde{\mathcal{S}}_{123} = \tilde{\mathcal{S}}_{12} \cap \tilde{\mathcal{S}}_{23} \cap \tilde{\mathcal{S}}_{13}$ и $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_{12} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{23} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{13}$. Для упрощения записи мы будем опускать знак волны над $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{123}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$, так как это никогда не приводит к путанице.

5.8 Перепараметризация времени

Разрывное векторное поле в правой части системы (5.2) записывается в координатах $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ следующим образом (треугольник Ω не обязан быть правильным):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu} = \Upsilon(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, u) = \frac{1}{24} (24|\tilde{y}|^{22} \langle \tilde{y}, u \rangle + 12|\tilde{x}|^{10} \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle + 8|\tilde{\phi}|^6 \langle \tilde{\phi}, \tilde{x} \rangle - 6|\tilde{\psi}|^4 \langle \tilde{\psi}, \tilde{\phi} \rangle) \\ \dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{\mu} (-\tilde{\phi} - 4\Upsilon \tilde{\psi}); \\ \dot{\tilde{\phi}} = \frac{1}{\mu} (\tilde{x} - 3\Upsilon \tilde{\phi}); \\ \dot{\tilde{x}} = \frac{1}{\mu} (\tilde{y} - 2\Upsilon \tilde{x}); \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{1}{\mu} (u - \Upsilon \tilde{y}); \\ \langle \tilde{\psi}, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Решение систем (5.9) и (5.2) определяется классическим образом по Филиппову (см. [62]) как решение системы ОДУ с разрывной правой частью.

Обозначим векторное поле на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$ в правой части (5.9) через ξ . Формально поле ξ определено при $\mu > 0$, однако мы его продолжим теми же формулами на нижнюю половину цилиндра $\mathcal{C} \cap \{\mu < 0\}$. В этом случае отображение $\mathbf{B}^{-1}$ отображает поле ξ в векторное поле системы (5.2) и при $\mu > 0$ и при $\mu < 0$.

Отметим, что при $\mu \rightarrow 0$ поле ξ растет как $\frac{1}{\mu}$. Однако, поле $\mu\xi$ уже может быть продолжено на сечение цилиндра $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \{\mu = 0\}$ во всех точках, в которых ковектор $\tilde{\psi}$ не перпендикулярен ни одному из ребер треугольника Ω . Траектории поля $\mu\xi$ либо не пересекают сечение $\mathcal{C}_0$ либо лежат в нем, так как вдоль поля $\mu\xi$ имеем $\dot{\mu} = \mu\Upsilon$ и Υ не зависит от μ . Более того, компоненты поля $\mu\xi$, отвечающие переменным $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ не зависят от μ . Поэтому любая траектория поля $\mu\xi$ на $\mathcal{C}_0$ может быть единственным образом поднята на $\mathcal{C} \cap \{\mu \neq 0\}$ при задании значения μ в начальный момент времени и наоборот.

Таким образом, интегральные кривые полей ξ и $\mu\xi$ совпадают на $\mathcal{C} \cap \{\mu \neq 0\}$, отличается лишь скорость движения по ним. Если обозначить через s параметр времени движения по траектории поля $\mu\xi$, то s и t связаны соотношением

$$ds = \frac{1}{\mu} dt.$$

Параметр s движения по траектории оказывается удобен тем, что оптимальные траектории легко отслеживаются по стремлению к сечению C_0 благодаря следующим двум леммам. В первой лемме доказано, что функция $\mu(s)$ экспоненциально быстро стремится к 0 на любой оптимальной траектории, а во второй доказано достаточное условие оптимальности в терминах стремления к 0 функции $\mu(s)$.

Лемма 5.5. *Рассмотрим образ оптимальной траектории $(\hat{x}(t, q_0), \hat{y}(t, q_0), \hat{\phi}(t, q_0), \hat{\psi}(t, q_0))$ на $C \cap \{\mu > 0\}$ при $t < T(q_0)$ под действием отображения $\mathbf{B}$. Зафиксируем моменты времени $t_0 = t(s_0) < T(q_0)$ и $t_1 = t(s_1) < T(q_0)$. Тогда для некоторых положительных констант γ_1 и γ_2 (независящих от выбора траектории и времен t_0 и t_1) выполнено*

$$D_1 \mu_0 e^{-\gamma_1(s_1-s_0)} \leq \mu_1 \leq D_2 \mu_0 e^{-\gamma_2(s_1-s_0)},$$

где $\mu_k = \mu(\hat{x}(t_k, q_0), \hat{y}(t_k, q_0), \hat{\phi}(t_k, q_0), \hat{\psi}(t_k, q_0))$, $k = 0, 1$, а $D_1 = \frac{1}{D_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

Доказательство. Обозначим $\mu(t) = \mu(\hat{x}(t, q_0), \hat{y}(t, q_0), \hat{\phi}(t, q_0), \hat{\psi}(t, q_0))$. Из оценок на $T(q_0)$, полученных в теореме 3.1, немедленно следует, что существуют такие $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, что для любой начальной точки q_0 на оптимальной траектории выполнено

$$\gamma_2(T(q_0) - t) \leq \mu(t) \leq \gamma_1(T(q_0) - t). \quad (5.10)$$

Поэтому

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu(t)} dt \leq \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{T(q_0) - t_0}{T(q_0) - t_1},$$

$$\geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{T(q_0) - t_0}{T(q_0) - t_1}.$$

Следовательно,

$$e^{-\gamma_1(s_1-s_0)} \leq \frac{T(q_0) - t_1}{T(q_0) - t_0} \leq e^{-\gamma_2(s_1-s_0)}.$$

Для получения заявленных в условии леммы неравенств осталось еще раз воспользоваться оценками (5.10). □

Следствие 5.1. *На оптимальной траектории при $t \rightarrow T(q_0) - 0$ выполнено $\mu \rightarrow +0$ и $s \rightarrow +\infty$.*

Лемма 5.6. *Рассмотрим $\tilde{z}(s)$, $s \in \mathbb{R}$ – траекторию поля $\mu\xi$ на верхней половине цилиндра $C \cap \{\mu > 0\}$. Если $\mu(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$, то*

$$T = \int_0^{+\infty} \mu(s) ds < \infty,$$

и на траектории $\tilde{z}(s)$ выполнено $s(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T - 0$ и $s(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$. Более того, траектория $\mathbf{B}^{-1}(\tilde{z}(s(t)))$ лежит в M_+ и является оптимальной, если ее продолжить 0 при $t \geq T$.

Доказательство. Так как $dt = \mu ds$, то на траектории $\tilde{z}(s)$ выполнено

$$t = \int_0^s \mu(\sigma) d\sigma$$

В силу положительности $\mu(s)$ получаем, что $t \rightarrow T - 0$ тогда и только тогда, когда $s \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь траекторию $z(t) = \mathbf{B}^{-1}(\tilde{z}(s(t)))$, определенную при $t < T$. Согласно (5.8) получаем, что $x, y, \phi, \psi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T - 0$. Если $T < \infty$, продолжим траекторию $z(t)$ при $t \geq T$ нулем. Таким образом, $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, независимо от конечности T . Так как траектория $z(t)$ является траекторией гамильтоновой системы (5.2) то, по теореме 3.3 она обязана быть оптимальной. Следовательно, на самом деле, по теореме 3.1 траектория $z(t)$ попадает в начало координат за конечное время и случай $T = \infty$ не возможен.

По теореме 3.1 время достижения начала координат на оптимальной траектории оценивается сверху через расстояние до начала координат. Следовательно, существует окрестность 0 в $\mathcal{M}$ в которую не заходит оптимальная траектория $z(t)$ при $t < 0$. Поэтому функция $\mu(s)$ отделена от нуля при $s < 0$, и, следовательно, $\int_0^{-\infty} \mu(s) ds = -\infty$, то есть $t(s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow -\infty$. $\square$

Замечание 5.3. Отметим, что сечение $\mathcal{C}_0$ может быть отождествлено с фактор-пространством $(\mathcal{M} \setminus 0)/g$, а траектории поля $\mu\xi$ могут рассматриваться как образы траекторий системы (5.2) при естественном проектировании $(\mathcal{M} \setminus 0) \rightarrow (\mathcal{M} \setminus 0)/g$. Однако конкретная реализация $(\mathcal{M} \setminus 0)/g$ как сечения $\mathcal{C}_0$ дает принципиальные улучшения: она дает систему ОДУ поля $\mu\xi$ на всем цилиндре $\mathcal{C}$, равномерное стремление к $\mathcal{C}_0$ оптимальных траекторий и возможность определения оптимальности траектории за счет лемм 5.5 и 5.6.

5.9 Грубость автомодельных траекторий

В этом параграфе мы рассмотрим изменения, которые претерпевает гамильтонова система (5.2) при замене треугольника Ω на близкий треугольник Ω' .

Итак, пусть каждая вершина треугольника Ω' находится в ε -окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда $0 \in \text{Int } \Omega'$ и Ω' является допустимым треугольником в задаче (5.1). Все описанные ранее объекты, отвечающие системе (5.2) с треугольником Ω' мы будем снабжать штрихами. Например поле (5.9), отвечающее треугольнику Ω' будем обозначать через ξ' .

Поскольку при любых $i \neq j$ ребра (ij) и $(ij)'$ треугольников Ω и Ω' близки, то гиперплоскости переключения $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}'_{ij}$ образуют в $\mathcal{M}$ угол α_{ij} , близкий к нулевому. Поэтому, когда нам потребуется говорить о близости отображений, заданных на $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}'_{ij}$, мы будем отождествлять гиперплоскости $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}'_{ij}$ с помощью отображения pr , устроенного следующим образом:

$$\text{pr}(x, y, \phi, \psi) = (x, y, \phi, O_{\alpha_{ij}} \psi) \in \mathcal{S}'_{ij}, \text{ где } (x, y, \phi, \psi) \in \mathcal{S}_{ij},$$

а $O_{\alpha_{ij}} \in SO(2, \mathbb{R})$ обозначает поворот в плоскости на угол α_{ij} . Отображение pr коммутирует с действием g группы $\mathbb{R}_+$ и гладко продолжается на пересечение с нулевым сечением $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{C}_0$.

Лемма 5.7. *Предположим, что на $\mathcal{C}_0$ некоторая траектория поля $\mu\xi$ с треугольником Ω пересекает последовательно поверхности $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{C}_0$ и $\mathcal{S}_{jk} \cap \mathcal{C}_0$ в точках A и B соответственно, $A, B \notin \mathcal{S}_{123}$, и эти пересечения трансверсальны⁶ (возможно $k = i$, но $j \neq i, k$). Тогда для любых $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что если каждая вершина некоторого треугольника Ω' находится в ε окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , то отображения последования Пуанкаре Φ и Φ' полей $\mu\xi$ и $\mu\xi'$ являются α -близкими диффеоморфизмами окрестностей A и $A' = \text{pr } A$ в метрике $\mathcal{C}^r$.*

Доказательство. Для того, чтобы работать в окрестностях $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}_{jk}$ мы продолжим поле $\mu\xi$ гладким образом в их окрестность, например, выбросив в (5.9) последнее условие, заменив управление u на постоянное в j -ой вершине Ω . Полученное поле обозначим через $\mu\tilde{\xi}$. Прделав аналогичную процедуру для треугольника Ω' получим поле $\mu\tilde{\xi}'$.

В силу замкнутости поверхностей переключения и трансверсальности поля $\mu\xi$ к $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}_{jk}$ в точках A и B , любая траектория, начинающаяся на $\mathcal{S}_{ij}$ в окрестности A в первый раз пересечет $\mathcal{S}$ в окрестности точки B . Поэтому можно заменить поле $\mu\xi$ полем $\mu\tilde{\xi}$. При этом интересующие нас траектории, идущие без переключений из окрестности A на $\mathcal{S}_{ij}$ в окрестность B на $\mathcal{S}_{jk}$, не изменятся. Аналогичное утверждение верно при замене поля $\mu\xi'$ полем $\mu\tilde{\xi}'$.

Поскольку поля $\mu\tilde{\xi}$ и $\mu\tilde{\xi}'$ являются гладкими, то утверждение леммы немедленно следует из трансверсальности поля $\mu\tilde{\xi}$ в точках A и B поверхностям $\mathcal{S}_{ij}$ и $\mathcal{S}_{jk}$ соответственно. $\square$

Любой траектории $z(t)$ системы (5.2) мы можем поставить в соответствие ее образ $\pi(z(t))$ на $\mathcal{C}_0 = \mathcal{M}/g$ при канонической проекции $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/g$. Явно этот образ можно найти так: отправить траекторию $z(t)$ в цилиндр $\mathcal{C}$ с помощью отображения $\mathbf{B}$ и отбросить координату μ . При этом автомодельные траектории перейдут в периодические траектории поля $\mu\xi$ на $\mathcal{C}_0$.

В этом параграфе мы изучим грубые периодические траектории на $\mathcal{C}_0$. Полученные результаты мы будем применять к найденным в лемме 5.3 шестизвенным циклам $R^\pm$.

Определение 5.6. Мы будем называть оптимальную автомодельную траекторию $z(t)$ системы (5.2) грубой, если она не является полуособой траекторией, она не пересекается с $\mathcal{S}_{123}$, а ее образ $\pi(z(t))$ на $\mathcal{C}_0$ является грубой периодической траекторией, то есть (i) состоит из конечного числа гладких участков (звеньев), трансверсальных $\mathcal{S}$; (ii) дифференциал соответствующей степени отображения последования Пуанкаре Φ/g в точках $\pi(z(t)) \cap \mathcal{S}$ не имеет единичных собственных значений.

Предыдущее определение корректно, в том смысле, что отображение последования Пуанкаре вдоль такой периодической траектории является гладким диффеоморфизмом, в силу лемм 5.2 и

⁶Трансверсальность в данном случае формально можно понимать так: скорость слева в точке A трансверсальна $\mathcal{S}_{ij}$ а скорость справа в точке B трансверсальна $\mathcal{S}_{jk}$. Хотя на самом деле, скачок поля $\mu\xi$, например, в точке A (или в B) на гиперповерхности $\mathcal{S}_{ij}$ (соответственно $\mathcal{S}_{jk}$) является тангенциальным к этой поверхности. Поэтому для определения трансверсальности не имеет значения, с какой стороны брать предел скоростей.

5.7. Оказывается, что грубые автомодельные оптимальные траектории не могут разрушаться при малом изменении треугольника Ω :

Лемма 5.8. Пусть $z(t) \in \mathcal{M}$ – некоторая грубая оптимальная автомодельная траектория задачи (5.1). Тогда для любых $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что если каждая вершина некоторого треугольника Ω' находятся в ε окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , то для задачи (5.1) с треугольником Ω' найдется (и при том единственная) такая грубая оптимальная автомодельная траектория $z'(t)$, что периодические траектории $\pi(z(t))$ и $\pi(z'(t))$ α -близки в метрике C^0 , а отображения последования Пуанкаре на цилиндре $\mathcal{C}$ вдоль обеих систем (5.2) с треугольниками Ω и Ω' в точках траекторий $\pi(z(t))$ и $\pi(z'(t))$ α -близки в метрике C^r .

Доказательство. Рассмотрим периодическую траекторию $\tilde{z}(s)$ поля $\mu\xi$, являющуюся вертикальной проекцией образа $\mathbf{B}(z(t))$ на $\mathcal{C}_0$. Пусть s_0 такой момент времени, что траектория $\tilde{z}(s)$ является гладкой в окрестности $s = s_0$, а $L \ni \tilde{z}(s_0)$ – малая гладкая площадка коразмерности 1 в $\mathcal{C}$, трансверсальная $\tilde{z}(s)$. Так как $\dot{\tilde{z}}(s) \in T_{\tilde{z}(s)}\mathcal{C}_0$, то площадка L также трансверсальна $\mathcal{C}_0$. Обозначим через $\hat{\Phi}$ отображение последования Пуанкаре $\hat{\Phi} : L \rightarrow L$ вдоль траекторий поля $\mu\xi$. Точка $\tilde{z}(s_0)$ является неподвижной точкой отображения $\hat{\Phi}$.

Пусть также $s_1 < \dots < s_m$ – все точки негладкости траектории $\tilde{z}(s)$ и они пронумерованы так, что s_1 – первая точка негладкости после s_0 . Обозначим через L_l – пересечение малой δ -окрестности точки $\tilde{z}(s_l)$ с соответствующей поверхностью разрыва $\mathcal{S}_{ij}$ поля $\mu\xi$. Тогда отображение последования Пуанкаре $\hat{\Phi} : L \rightarrow L$ есть композиция отображений последования

$$\hat{\Phi} : L \xrightarrow{\Phi_0} L_1 \xrightarrow{\Phi_1} L_2 \xrightarrow{\Phi_2} \dots \xrightarrow{\Phi_{m-1}} L_m \xrightarrow{\Phi_m} L.$$

Из этой схемы и леммы 5.7 вытекает, что отображение $\hat{\Phi}$ является гладким диффеоморфизмом.

Обозначим через $\tilde{\Phi}$ – ограничение $\hat{\Phi}$ на $\mathcal{C}_0$. По определению грубости автомодельной траектории $z(t)$ дифференциал $d\tilde{\Phi}$ в точке $\tilde{z}(s_0)$ является грубым, то есть не имеет единичных собственных значений. Отображение $\hat{\Phi}$ явно выражается через $\tilde{\Phi}$ следующим образом

$$\hat{\Phi}(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\lambda_0 \mu, \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})), \quad (5.11)$$

где λ_0 из определения автомодельности 5.2. Поэтому дифференциал $d\hat{\Phi}|_{z(s_0)}$ по сравнению с $d\tilde{\Phi}|_{z(s_0)}$ содержит одно дополнительное собственное значение λ_0 . В силу оптимальности $z(t)$ имеем $0 < \lambda_0 < 1$ (см. замечание 5.2). Таким образом $d\hat{\Phi}|_{z(s_0)}$ является грубым.

Опишем теперь как изменяется отображение $\hat{\Phi}$ при замене треугольника Ω на близкий треугольник Ω' . Рассмотрим поле $\mu\xi'$ полученное на $\mathcal{C}$ из системы (5.2) с треугольником Ω' . Треугольники Ω и Ω' можно считать настолько близкими, что отображения Φ_k и Φ'_k достаточно близки в метрике C^r , и, следовательно достаточно близки и отображения $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}'$. Поскольку точка $z(s_0) \in L$ является грубой неподвижной точкой отображения $\hat{\Phi}$, то она не разрушается при малом шевелении $\hat{\Phi}$ в C^1 метрике (см. [15], например, предл. 1.1.4). $\square$

Добавим еще, что если треугольник Ω сжать в $\lambda > 0$ раз, то, после растяжения всех координат в λ раз, траектории системы (5.2) не изменятся – изменится лишь в λ раз скорость движения по ним. Поворот треугольника Ω вокруг начала координат приводит к повороту всего оптимального синтеза на тот же угол. Поэтому условие предыдущей леммы можно переформулировать в терминах близости углов и центров треугольников Ω и Ω' (как это сделано для правильного треугольника в формулировке теоремы 5.1).

5.10 Гомоклиническая траектория на нулевом сечении цилиндра $\mathcal{C}$

В данном параграфе мы построим гомоклиническую траекторию в раздутой системе (5.9) для случая, когда треугольник Ω является правильным и покажем, что она не разрушается при малом шевелении треугольника Ω .

Итак, пусть Ω – правильный треугольник с центром в начале координат. В работе [78] показано, что автомодельные траектории $Z^\pm$, Q^i и $R^\pm$ найденные в лемме 5.3 являются грубыми (см. [78], утверждения 6.3, 6.4 и 6.5). Более того, показано, что цикл $Z^\pm$ является отталкивающим (точнее все собственные значения $d\tilde{F}$ вещественны и по модулю строго больше 1), а циклы Q^i и $R^\pm$ являются гиперболическими (точнее ровно одно собственное значение $d\tilde{F}$ по модулю строго меньше 1, а остальные – больше). Таким образом, если треугольник Ω близок к правильному и его центр близок к началу координат, то по лемме 5.8 для системы (5.2) на $\mathcal{C}_0$ по-прежнему определены циклы, близкие к $Z^\pm$, Q^i и $R^\pm$ (которые мы будем обозначать также). Также близки отображения последования Пуанкаре вдоль этих циклов.

Таким образом, в окрестности каждой точки $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$ на $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_0$ определено одномерное гладкое устойчивое многообразие и пятимерное гладкое неустойчивое многообразие отображения последования Пуанкаре $\tilde{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Действительно, $\tilde{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ является гладким в окрестности точек $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$ по лемме 5.7. Однако, вообще говоря, отображение $\tilde{F}$ является разрывным на $\mathcal{S}$. Более того, если продолжать одномерное устойчивое многообразие $\tilde{F}$ за пределы окрестностей точек $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$, оно неизбежно наткнется на поверхность разрыва $\tilde{F}$. Тем не менее верна следующая

Лемма 5.9. *Предположим, что треугольник Ω достаточно близок к правильному треугольнику с центром в начале координат. Тогда существует такая гомоклиническая точка $z_0 \in \mathcal{C}_0$ на поверхности разрыва $\mathcal{S}$, что итерации $\tilde{F}^n(z_0)$ стремятся к шестизвенному циклу $R^+ \cap \mathcal{S}$ при $n \rightarrow \pm\infty$ (см. рис. 5.2). Более того, для любой достаточно малой ε -окрестности $V \subset \mathcal{C}_0$ точек $R^+ \cap \mathcal{S}$ найдется такая δ -окрестность $W \subset \mathcal{C}_0$ точки z_0 и целые числа $m > 0$ и $l < 0$, что (i) образы $\tilde{F}^m(W)$ и $\tilde{F}^l(W)$ содержатся в одной связной компоненте V ; (ii) отображения $\tilde{F}^m$ и $\tilde{F}^l$ являются диффеоморфизмами в ограничении на W ; и (iii) образ устойчивого многообразия периодической орбиты $R^+ \cap \mathcal{S}$ в области $\tilde{F}^m(W)$ при отображении $\tilde{F}^{-m}$ и образ неустойчивого многообразия в $\tilde{F}^l(W)$ при отображении $\tilde{F}^{-l}$ пересекаются в гомоклинической точке z_0 , и это пересечение трансверсально.*

Аналогичное утверждение выполнено для орбиты $R^- \cap \mathcal{S}$.

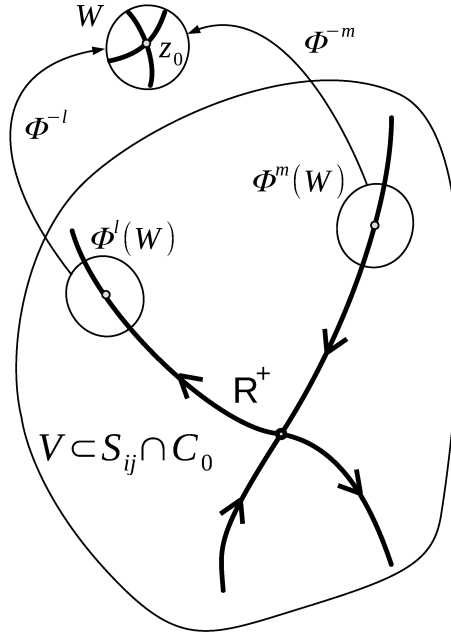


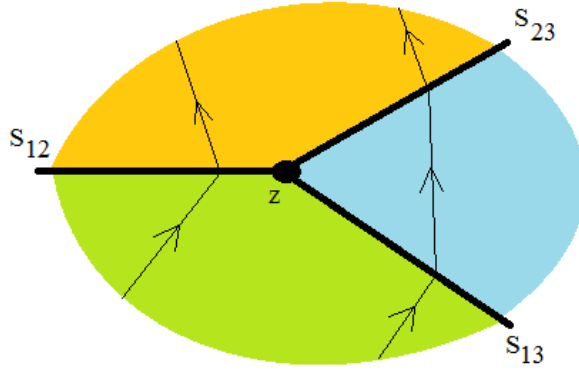
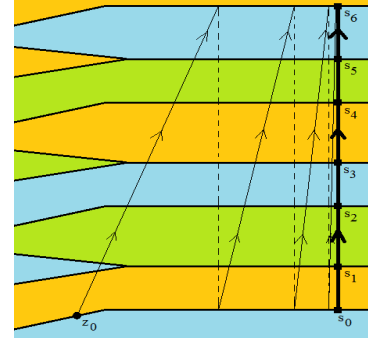
Рисунок 5.2: Схематичное изображение результатов леммы 5.9.

Доказательство. Ввиду вышесказанного, достаточно показать существование трансверсальной гомоклинической точки z_0 для случая правильного треугольника Ω и убедиться в том, что траектория, на которой она лежит, отделена от поверхности разрыва $\mathcal{S}_{123}$. Оба условия были проверены посредством численного анализа системы (5.9) для случая правильного треугольника.

Пусть $H_5 \subset \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}$ — пятимерное неустойчивое многообразие отображения $\tilde{\Phi}^6$ в окрестности некоторой точки переключения $\tilde{z}(s_0)$ цикла R^+ , а H_5^0 — компонента связности множества $H_5 \setminus \mathcal{S}_{123}$, в которой лежит точка $\tilde{z}(s_0)$. Тогда ограничение $\tilde{\Phi}^{-6}|_{H_5^0}$ будет гладким, $\tilde{\Phi}^{-6}[H_5^0] \subset H_5^0$, и $\tilde{z}(s_0) \in H_5^0$ будет единственной неподвижной точкой и аттрактором отображения $\tilde{\Phi}^{-6}$.

Обозначим через $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_6 = \sigma_0$ одномерные устойчивые многообразия отображения $\tilde{\Phi}^6$, исходящие из точек переключения $\tilde{z}(s_0), \tilde{z}(s_1), \dots, \tilde{z}(s_6) = \tilde{z}(s_0)$ цикла R^+ соответственно. Отметим, что отображение $\tilde{\Phi}$ переводит кривую σ_k в кривую σ_{k+1} , одновременно прижимая образ к точке переключения $\tilde{z}(s_{k+1})$. Множество траекторий системы (5.9), проходящие через кривые σ_k , образуют некоторую цилиндрическую 2-мерную поверхность Σ , содержащую периодическую траекторию R^+ . Кривые σ_k являются подмножеством пересечения $\Sigma \cap \mathcal{S}$.

Рассмотрим поведение кривой σ_k в случае, когда она натывается на поверхность разрыва $\mathcal{S}_{123}$ отображения $\tilde{\Phi}$. Напомним, что $\mathcal{S}_{123}$ является пересечением трех страт $\mathcal{S}_{12}, \mathcal{S}_{13}, \mathcal{S}_{23}$ поверхности переключения $\mathcal{S}$. Если траектории системы (5.9) пересекают поверхность переключения $\mathcal{S}$ трансверсально в некоторой точке $z \in \mathcal{S}_{123}$, то в окрестности этой точки они претерпевают одно переключение по одну сторону от $\mathcal{S}_{123}$, и два последовательных переключения по другую сторону. Эта ситуация схематически изображена на рис. 5.3а. Поэтому при пересечении поверхности кривая σ_k либо разветвляется на две ветки, либо две ветки сливаются в одну. Получаемая сетка кривых по-прежнему лежит на цилиндрической поверхности Σ и является ее пересечением с $\mathcal{S}$. Отметим,

(a) Поведение траекторий в окрестности $\mathcal{S}_{123}$ (b) Цилиндрическая поверхность Σ , кривые σ_k , гомоклиническая точка z_0 и проходящая через z_0 траектория системы (13)Рисунок 5.3: Схематичное изображение кривых σ_k .

что прообразы точек ветвления при отображении $\tilde{\Phi}$ являются точками излома кривых, из которых состоит множество $\Sigma \cap \mathcal{S}$.

Проследивая кривые σ_k по направлению от точек переключения $\tilde{z}(s_k)$ цикла R^+ , мы находим, что кривые σ_k с нечетным индексом k проходят через точку ветвления, а кривые σ_k с четным индексом k — через точку излома, которая является прообразом вышеназванных точек ветвления. Пройдя точку излома, кривая σ_0 трансверсально пересекает многообразие H_5^0 , таким образом определяя искомую гомоклиническую точку z_0 . Данная ситуация схематически изображена на рис.5.3b. На рисунке изображена цилиндрическая поверхность Σ . При этом следует отождествить верх и низ рисунка. Цветами закодировано управление u в системе (13), принимающее значения в вершинах правильного треугольника Ω . Периодическая траектория R^+ соответствует жирной вертикальной кривой, ветки σ_k — горизонтальным жирным кривым. Тонкая линия обозначает траекторию, проходящую через точку z_0 , штрихованные линии символизируют отождествление точек на этой траектории на кривых σ_0 и σ_6 . Периодичность всей картины есть следствие инвариантности периодической траектории R^+ по отношению к циклической перестановке порядка 3 группы симметрии S_3 .

Из вышесказанного ясно, что числа m, l можно, например, положить равными $m = 7$ и $l = 0$. Более того, ясно, что траектория, проходящая через z_0 , отделена от поверхности разрыва $\mathcal{S}_{123}$.

Для цикла R^- доказательство аналогичное.

□

Отметим, что окрестность W в лемме 5.9 можно заменить на любую сколь угодно малую окрестность точки z_0 в ней содержащуюся.

5.11 Завершение доказательства первой теоремы о хаотичности

Хорошо известно, что трансверсальная гомоклиническая точка генерирует подкову в окрестности периодической точки. В нашей ситуации отображение последования формально не является гладким, но лемма 5.9 позволяет полностью игнорировать разрывы отображения Пуанкаре и напрямую воспользоваться классической теоремой о том, что трансверсальная гомоклиническая точка генерирует подкову в любой сколь угодно малой окрестности периодической точки.

Доказательство теоремы 5.1. Мы начнем с построения множества Ξ . Для этого необходимо перенести подкову в окрестности 6-периодической точки $R_+ \cap \mathcal{S}$ отображения $\tilde{\Phi}$ из нулевого сечения $\mathcal{C}_0$ на весь цилиндр $\mathcal{C}$ и показать, что все полученные траектории будут стремиться к $\mathcal{C}_0$ и удовлетворять условиям леммы 5.6.

Рассмотрим отображение Φ^6 определенное на $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ в окрестности точек $R_+ \cap \mathcal{S}$. Поскольку цикл R_+ получен из автомодельной траектории с $\lambda_0 < 1$, то из (5.11) получаем $d\Phi^6(\frac{\partial}{\partial \mu}) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \mu}$ в точках $R_+ \cap \mathcal{S}$. Зафиксируем любую из 6-ти точек $R_+ \cap \mathcal{S}$ и рассмотрим ее окрестность, в которой отображение Φ^6 является сжимающим в вертикальном направлении. Эту окрестность можно выбрать как цилиндр над окрестностью в $\mathcal{C}_0$, так как согласно (5.11) свойство сжатия не зависит от выбора μ .

Итак, пусть $V_0 \subset V$ такая открытая окрестность одной из 6-ти точек $R_+ \cap \mathcal{S}$ в $\mathcal{C}_0$, что отображение Φ^6 в $V_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ является сжимающим в $\tilde{\lambda}_0 < 1$ раз. Для окрестности V_0 ввиду леммы 5.9 существует подкова Λ_0 для некоторой итерации $(\tilde{\Phi}^6)^{N'}$ (см., например, [15], теорема 6.5.5). Обозначим $N = 6N'$.

Подкова Λ_0 разделена на две части следующим образом. В окрестности V определено два открытых множества W_0 и W_1 . Множество W_0 есть $\Phi^l(W)$, где окрестность $W \ni z_0$ и степень l из леммы 5.9 (см. рис. 5.2). Таким образом, для любой точки $z \in W_0$ выполнено $\Phi^{m-l}(z) \in V$, и отображение $\Phi^{m-l}|_{W_0}$ является диффеоморфизмом. Множество W_1 состоит из точек $z \in V$, не покидающих окрестность $R_+ \cap \mathcal{S}$ при итерациях Φ^k , $0 \leq k \leq m-l$, $W_1 = \bigcap_{k=0}^{m-l} \Phi^{-k}(V)$. Отображение $\Phi^{m-l}|_{W_1}$ является диффеоморфизмом. Очевидно $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Подкова Λ_0 состоит из двух частей: $\Lambda_0 = (\Lambda_0 \cap W_0) \sqcup (\Lambda_0 \cap W_1)$.

Пусть $z \in (W_0 \sqcup W_1) \cap \Phi^{-N}(W_0 \sqcup W_1)$. Обозначим через $S(z)$ время (по параметру s), движения по траектории поля $\mu\xi$ (см. систему (5.9)) из точки z при последовательном пересечении N страт $\mathcal{S}_{ij}$. Поскольку отображение Φ^{m-l} является диффеоморфизмом в ограничении на W_0 и W_1 и траектории поля $\mu\xi$ из $(W_0 \sqcup W_1) \cap \Phi^{-N}(W_0 \sqcup W_1)$ пересекают поверхность переключения $\mathcal{S}$ трансверсально, то для некоторых констант $S_{\min}$ и $S_{\max}$ выполнена оценка

$$0 < S_{\min} \leq S(z) \leq S_{\max} \quad (5.12)$$

Отметим, что из любой точки подковы Λ_0 существует и единственная траектория поля $\mu\xi$ при всех $s \in (-\infty; +\infty)$. Действительно, любая степень Φ^n отображения последования Пуанкаре корректно определена в точках Λ_0 , так как $\Lambda_0 \subset V_0 \cap \Phi^{-N}(V_0)$ и $\Phi^N(\Lambda_0) = \Lambda_0$. Более того траектория

поля $\mu\xi$, выпущенная из любой точки подковы Λ_0 пересекает поверхность переключения только трансверсально, и, следовательно, единственна. Существование при $s \in (-\infty; +\infty)$ следует из полученных оценок на время перехода (5.12).

Любой точке подковы $z \in \Lambda_0$ мы стандартным образом поставим в соответствие бесконечную последовательность $\Psi(z) \in \Sigma_{01}$ из 0 и 1. На позиции с номером $j \in \mathbb{Z}$ в $\Psi(z)$ стоит 0, если все итерации $\Phi^k(z)$ при k между jN и $(j+1)N$ лежат в V_0 , и стоит 1 в противном случае (то есть, если $\Phi^k(z)$ окажется в окрестности гомоклинической точки z_0 при каком-то $k \in (jN, (j+1)N)$). Заметим, что итерации $\Phi^{jN}(z)$ в любом случае лежат в V_0 .

Ограничение Φ^N на цилиндр в $\mathcal{C}$ над основанием $\Lambda_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$, вообще говоря, может не являться сжимающим в вертикальном направлении (не смотря на то, что Φ^6 является сжимающим в окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$). Это связано с тем, что при N итерациях отображения последования Φ точки из подковы Λ_0 могут покинуть окрестность $R_+ \cap \mathcal{S}$ и побывать в окрестности гомоклинической точки z_0 .

Обозначим через $\lambda_{\max}$ – максимально возможное растяжение в вертикальном направлении отображения Φ^N в точках этого цилиндра:

$$\lambda_{\max} = \max_{z \in \Lambda_0 \times \mathbb{R} \setminus 0} \frac{\mu(\tilde{\Phi}^N(z))}{\mu(z)}.$$

Максимум здесь корректно определен, так как множество Λ_0 компактно, а непрерывная функция $\frac{\mu(\Phi^N(z))}{\mu(z)}$ не изменяется, если заменить z на $g(\lambda)z$ при любом $\lambda \neq 0$.

Таким образом, если в последовательности $\Psi(z)$ на j -ой позиции стоит 0, то отображение Φ^N является сжимающим в вертикальном направлении в окрестности точки $\Phi^{jN}(z)$ в $\tilde{\lambda}_0^{N/6}$, так как итерации $\Phi^k(z)$ при $k \in [jN; (j+1)N]$ не покидают окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$. Если же в последовательности $\Psi(z)$ на j -ой позиции стоит 1, то отображение Φ^N растягивает в вертикальном направлении в окрестности $\Phi^{jN}(z)$ не более чем в $\lambda_{\max}$ раз.

Выберем $K \in \mathbb{N}$, $K > 2$ так, чтобы $\tilde{\lambda}_0^{KN/6} \lambda_{\max} < 1$. Рассмотрим подкову $\Lambda_1 \subset \Lambda_0$, состоящую из тех точек $z \in \Lambda_0$, что в последовательности $\Psi(z)$ на позициях с номерами не кратными K стоят 0 (на позициях с номерами, кратными K , могут стоять как 0 так и 1). Тогда отображение Φ^{KN} , в ограничении на $\Lambda_1 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ является сжимающим как минимум в $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_0^{KN/6} \lambda_{\max} < 1$ раз. Обозначим $n = KN$ (здесь n из пункта (IV) теоремы 5.1).

Множество Ξ_1 определим так: необходимо рассмотреть верхнюю половину цилиндра $\Lambda_1 \times \mathbb{R}_+$, выпустить из каждой точки полученного множества траекторию поля $\mu\xi$ при $s \in (-\infty; +\infty)$ и перенести полученное множество с помощью отображения $\mathbf{B}^{-1}$ на исходное расширенное фазовое пространство $\mathcal{M}$.

В окрестности траектории R_- тоже существует подкова Λ_2 для отображения Φ^n (без ограничения общности степени отображения Φ для подков Λ_1 и Λ_2 можно считать совпадающими). Определим множество Ξ_2 аналогично множеству Ξ_1 . Эти множества не пересекаются. Действительно, для любой точки $z \in \Lambda_1$ большая часть итераций $\Phi^k(z)$ лежит в окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$ (а именно каждые $(K-1)N$ из каждых KN и $K > 2$). Поскольку аналогичное утверждение верно

для подковы Λ_2 в окрестности $R_- \cap \mathcal{S}$, мы немедленно получаем, что $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$.

Определим $\Xi = \Xi_1 \sqcup \Xi_2$.

Существование времени $T(y)$ из пункта (I) теоремы 5.1 выполняется ввиду леммы 5.6. Действительно, при отображении $\Phi^n : \Lambda_1 \times \{\mu > 0\} \rightarrow \Lambda_1 \times \{\mu > 0\}$ координата $\mu(z)$ любой точки $z \in \Lambda_1 \times \{\mu > 0\}$ уменьшается не меньше, чем в $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_0^{(K-1)N/6} \lambda_{\max} < 1$ раз, а параметр s на траектории $X(z, s(t))$ увеличивается на $KS(z) \in [KS_{\min}, KS_{\max}]$. Поэтому на траектории из точки z параметр $\mu(z(s))$ экспоненциально убывает, и, следовательно, выполняются условия леммы 5.6. Единственность следует из определения отображения последования Пуанкаре.

Пункты (II) и (III) теоремы 5.1 выполняется по построению множества Ξ (оптимальность также следует из леммы 5.6). Для доказательства пункта (IV) теоремы необходимо для $z \in \Xi_1$ в качестве последовательности $\Psi_{01}(z) \in \Sigma_{01}$ рассмотреть элементы $\Psi(\pi(z))$ на позициях с кратными K номерами: $\Psi_{01}(z)_j = \Psi(z)_{jK}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Для $z \in \Xi_2$ последовательность $\Psi_{01}(z)$ лежит во втором экземпляре подковы Σ_{01} и определяется аналогично. $\square$

Доказанная теорема 5.1 позволяет отыскивать в исходной модельной задаче (5.1) элементы динамической системы бернуллиевского сдвига $l : \Sigma_{01} \rightarrow \Sigma_{01}$ с положительной энтропией. Например, верно следующее

Следствие 5.2. *Если треугольник Ω удовлетворяет условию теоремы 5.1, то в задаче (5.1) существует счетное (бесконечное) число различных однопараметрических семейств автомодельных траекторий.*

Доказательство. Рассмотрим любую периодическую траекторию бернуллиевского сдвига l . Их очевидно счетное (бесконечное) число. Прообраз любой такой траектории при отображении Ψ_{01} дает однопараметрическое (относительно действия g группы $\mathbb{R}_+$) семейство автомодельных траекторий. $\square$

ГЛАВА 6

Топологические свойства отображения последования Пуанкаре

В доказанной теореме 5.1 получен полулокальный результат о существовании хаоса в оптимальном синтезе задачи (5.1) с произвольным треугольником Ω , не сильно отличающимся от правильного треугольника с центром в начале координат. Для случая правильного треугольника оптимальный синтез может быть описан точно: в теореме 8.2 найдено множество всех неблуждающих траекторий, описан точный граф топологической марковской цепи, полусопряженной с отображением последования Пуанкаре Φ , найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих траекторий и соответствующая топологическая энтропия. Для получения этих результатов необходимо начать с точного изучения глобальных топологических свойств отображения Φ поверхности переключения $\mathcal{S}$ на себя (см. [72]).

В этой главе мы будем предполагать (если не оговорено противного), что треугольник Ω является правильным и центрирован в начале координат.

6.1 Топологическая структура поверхности переключения

В основе изучения глобальной структуры оптимального синтеза в модельной задаче (5.1) с правильным треугольником Ω лежит подробное изучение отображения последования Пуанкаре Φ . Как было сказано выше, отображение Φ определено на некотором подмножестве поверхности переключения. Поэтому в данном параграфе мы дадим точное топологическое описание самой поверхности переключения и подмножества точек, на котором определено отображение Φ .

Поскольку поверхность переключения $\mathcal{S}$ описывается через переменные ψ_i , то пересечение $M_+ \cap \mathcal{S}$ проще всего описывать в пространстве сопряженных переменных $N = \{(\phi, \psi)\}$ отождествив его с M и M_+ при помощи отображения E по теореме 3.2. Пусть $\varepsilon : N/g \rightarrow N$ – правое обратное отображение к канонической проекции $\pi : N \setminus 0 \rightarrow N/g$. Зададим для удобства вложение ε следующим образом

$$(\varepsilon \circ \pi)(\phi, \psi) = (\mu^{-3}\phi, \mu^{-4}\psi), \text{ где } \mu = \sqrt[12]{|\phi|^4 + |\psi|^3}$$

Мы выбрали именно такой способ задания ε , так как ε коммутирует с действием g , и проекцию π можно себе представлять как отображение точки $(\phi_0, \psi_0) \in N \setminus 0$ в пересечение ее орбиты $g(\mathbb{R}_+)(\phi_0, \psi_0)$ со сферой $\varepsilon(N/g) = \{(\phi, \psi) : |\phi|^4 + |\psi|^3 = 1\}$. Пространство N/g автоматически наделяется структурой гладкого риманова многообразия, отображение π становится гладкой сюръекцией, а ε – гладким вложением.

Пересечение $\mathcal{S} \cap M_+$ состоит из трех двумерных полусфер D_k определяемых соотношениями $\psi_i = \psi_j \leq \psi_k$, пересекающихся по окружности $\psi = 0$.

$$D_k = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi_i = \psi_j \leq \psi_k\},$$

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi = 0\}.$$

Каждая полусфера D_k в свою очередь делится плоскостью $\phi_i = \phi_j$, $i, j \neq k$, на два диска: $D_k = D_{ij} \cup D_{ji}$, где

$$D_{ij} = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi_i = \psi_j \geq \psi_k \text{ и } \phi_i \leq \phi_j\}$$

Обозначим $\tilde{d}_k = D_{ij} \cap D_{ji} = D_k \cap \{\phi_i = \phi_j\}$.

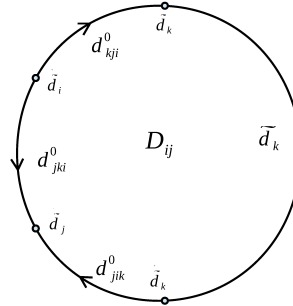


Рисунок 6.1: Схематичное изображение диска D_{ij} поверхности переключения $\pi(\mathcal{S})$.

В любой оптимальной траектории, проходящей через точку D_{ij} не лежащую на $\tilde{d}_k$, управление совершает переключение с i -ой вершины треугольника Ω на j -ую.

Окружность $\varepsilon(N/g) \cap \{\psi = 0\}$ разбивается на 6 отрезков (см. рис. 6.1)

$$d_{ijk}^0 = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) : \psi = 0 \text{ и } \phi_i \leq \phi_j \leq \phi_k\}$$

точками

$$\tilde{d}_k^+ = \varepsilon(N/g) \cap \{\phi_k > \phi_i = \phi_j\} \text{ и } \tilde{d}_k^- = \varepsilon(N/g) \cap \{\phi_k < \phi_i = \phi_j\}.$$

Итак, образ поверхности переключения $\pi(\mathcal{S})$ на фактор-пространстве N/g является двумерным конечным CW-комплексом с клетками D_{ij} , d_{ijk}^0 , $\tilde{d}_k$ и $d_k^\pm$. Нетрудно заметить, что поверхность $\pi(\mathcal{S})$ гомотопически эквивалентна букету двух двумерных сфер. Ориентации отрезков d_{ijk}^0

выберем в зависимости от четности перестановки (ijk) как показано на рис. 6.1 (их ориентации пригодятся при факторизации по дискретной группе S_3).

Как уже неоднократно отмечалось выше, отображение последования Пуанкаре Φ определено для всех точек $\pi(\mathcal{S})$ кроме точек, лежащих на $\tilde{d}_k$.

Поскольку отображение последования Φ коммутирует с действием группы S_3 , то для изучения различных его асимптотических свойств можно ограничиться рассмотрением одного диска D_{ij} . Действие группы S_3 на $\pi(\mathcal{S})$ является клеточным и устроено следующим образом:

1. Группа S_3 свободно и транзитивно действует на 0-мерных клетках d_i^+ и d_i^- .
2. Группа S_3 свободно и транзитивно действует на 1-мерных клетках d_{ijk}^0 сохраняя введенную ориентацию.
3. Нормальная подгруппа S_3 свободно и транзитивно действует на 1-мерных клетках $\tilde{d}_k$. Стабилизатором в группе S_3 фиксированной клетки $\tilde{d}_k$ является подгруппа, порожденная транспозицией $(ij) \in S_3, i, j \neq k$.
4. Группа S_3 свободно и транзитивно действует на 2-мерных клетках D_{ij} .

6.2 Редукция по действию группы S_3

Прежде чем приступить к описанию свойств отображения Φ мы введем несколько соглашений, которые позволят сделать текст значительно более легким для восприятия. Образ $\Phi(z)$ любой точки $z \in D_{ij}$ лежит в D_{jk} или в D_{ji} . Применением соответствующей перестановки из $\sigma \in S_3$ можно получить $(\sigma \circ \Phi)(z) \in D_{ij}$. Поэтому траекторию $\Phi^n(z)$ любой точки $z \in D_{ij}$ можно изображать только на одном из дисков D_{ij} . Более того, говоря, что образ точки $z \in D_{ij}$ при отображении Φ есть точка $z' \in D_{ij}$ в этой главе мы всегда будем подразумевать применение соответствующей перестановки $\sigma \in S_3$ и писать, допуская некоторую вольность записи, $\Phi(z) = z'$. Вместо этого можно было бы перейти к фактор-пространству $\mathcal{S}/S_3$. Отображение Пуанкаре Φ корректно переносится на $\mathcal{S}/S_3$, так как оно коммутирует с действием S_3 . Однако описанный выше способ нам кажется более предпочтительным (хотя по сути эквивалентен), потому что не нарушает исходной топологии диска D_{ij} .

Мы будем производить вычисления в пространстве N/g , отождествив его с M/g и M_+/g по теореме 3.2 с помощью отображения E . В этом случае диск $D_{ij} \subset (N/g)$ может быть задан как подмножество N , описываемое следующей системой неравенств

$$\begin{cases} |\psi|^2 + |\phi|^2 = 1; \\ \psi_i = \psi_j \leq \psi_k; \\ \phi_i \leq \phi_j; \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0; \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что в предыдущем параграфе использовалась нормировка $|\psi|^3 + |\phi|^4 = 1$, которая удобна тем, что согласована с действием g группы $\mathbb{R}_+$. Однако численные расчеты нам удобнее будет проводить именно в нормировке $|\psi|^2 + |\phi|^2 = 1$.

Введем следующие координаты на диске D_{ij} :

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_j) - \sqrt{3}\psi_i \\ \chi_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\phi_k \end{cases}$$

Тогда диск D_{ij} отображается в эллипсоид $2\chi_1^2 + \chi_2^2 \leq 1$, а координаты ϕ и ψ могут быть восстановлены по формулам

$$\begin{cases} \phi_i = \frac{1}{2}(-\sqrt{2/3}\chi_2 - \chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}); & \psi_i = -\frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{2\sqrt{3}}; \\ \phi_j = \frac{1}{2}(-\sqrt{2/3}\chi_2 - \chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}); & \psi_j = -\frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{2\sqrt{3}}; \\ \phi_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_2; & \psi_k = \frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

6.3 Известные элементы синтеза

В этом разделе мы опишем области в D_{31} , соответствующие элементам синтеза, наличие которых было установлено в статье [78].

К дуге $\tilde{d}_2$ примыкает область C , такая, что из каждой соответствующей точки переключения с управления 3 на управление 1 траектория в прямом направлении времени, через бесконечное число переключений с управления 1 на управления 3 и обратно, попадает на особый режим по ребру $[A_1 A_3]$. Эта область ограничена дугой $\tilde{d}_2$, частью дуги d_{132}^0 , и некоторой кривой c , соединяющей точку $\tilde{d}_2^-$ и дугу d_{132}^0 . На рис. 6.2 область C закрашена зеленым цветом. Отображение Пуанкаре в прямом направлении времени переводит область C в подмножество $\tilde{C}$ самой себя, при этом точки дуги $\tilde{d}_2$ остаются неподвижными, а кривая c переходит в отрезок $\tilde{c}$ самой себя, примыкающий к точке $\tilde{d}_2^-$. Образ $\tilde{C}$ на рис. 6.2 закрашен темно-зеленым цветом. Кривая, отделяющая область $\tilde{C}$ от комплемента $C \setminus \tilde{C}$, примыкает к точке $\tilde{d}_2^+$. Эта кривая является образом пересечения дуги d_{132}^0 с границей C при отображении Пуанкаре в прямом времени.

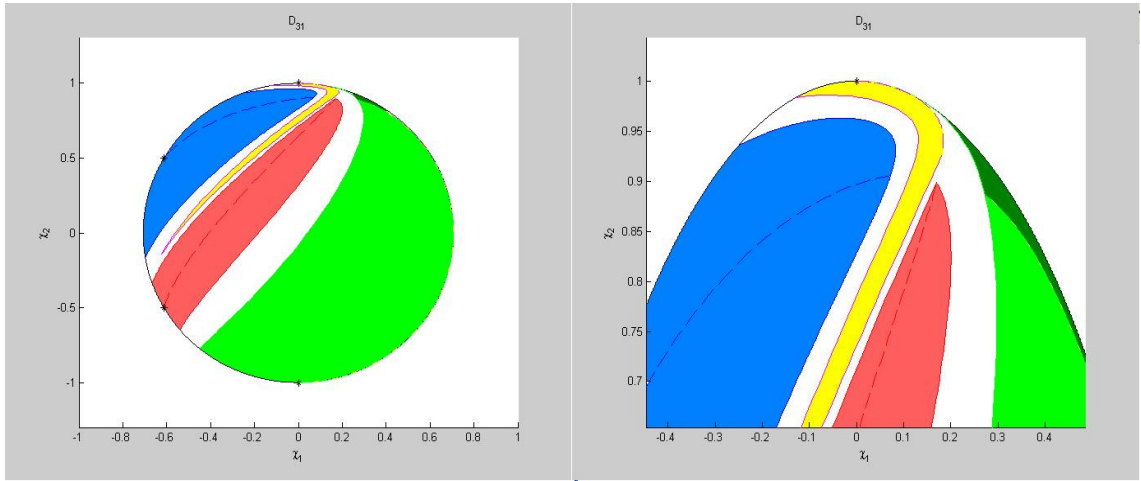


Рисунок 6.2: Известные области

Комплемент $C \setminus \tilde{C}$, на рис. 6.2 закрашенный светло-зеленым цветом, в обратном направлении времени переводится отображением Пуанкаре последовательно в области, на рис. 6.2 закрашенные синим, красным, и желтым цветом, соответственно. Напомним, что при отображении Пуанкаре в исходном пространстве дуги d_{132}^0, d_{123}^0 отождествляются. Поэтому граница области $C \setminus \tilde{C}$ при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени следующим образом переходит в границу синей области. Кривая, отделяющая область $\tilde{C}$ от комплемента $C \setminus \tilde{C}$, переходит в отрезок дуги d_{123}^0 . Отрезок дуги d_{132}^0 переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а пересечение границы $C \setminus \tilde{C}$ с D_{31} переходит в пересечение границы синей области с D_{31} .

Отображение Пуанкаре из синей области в красную область в обратном направлении времени, или из красной области в синюю область в прямом направлении времени, претерпевает разрыв в топологии D_{31} . Точнее, пересечения дуг d_{132}^0, d_{123}^0 с границей красной области сшиваются и переводятся в прямом направлении времени в темно-синюю штрихованную кривую, а пересечения дуг d_{213}^0, d_{123}^0 с границей синей области в обратном направлении времени сшиваются и переводятся в темно-красную штрихованную кривую.

Граница красной области при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени следующим образом переходит в границу желтой области. Отрезок дуги d_{132}^0 переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а отрезок дуги d_{123}^0 переходит в штрихованный отрезок границы желтой области.

Заметим еще, что в любой окрестности точки $\tilde{d}_2^-$ существуют точки, не принадлежащие ни к желтой, ни к зеленой областям. Из результатов [78] следует, что все такие точки, лежащие в достаточно малой окрестности $\tilde{d}_2^-$, в прямом направлении времени конечным числом итераций отображения Пуанкаре переводятся в желтую область. Эти отображения соответствуют переключениям, в которых попеременно чередуются управления 1 и 3. Число переключений для каждой точки конечно, но по мере приближения к границе области C неограниченно возрастает.

Таким образом, поведение отображения Пуанкаре в некоторой окрестности замыкания дуги $\tilde{d}_2^-$ полностью описано. Опишем связь с областями фактора по группе Фуллера поверхности переключения, обозначенных на рис. 4 в статье [78]. Страт C_{ij}^{ij} на рис. 4 соответствует зеленой области, части желтой области и другим точкам достаточно малой окрестности точки $\tilde{d}_2^-$.

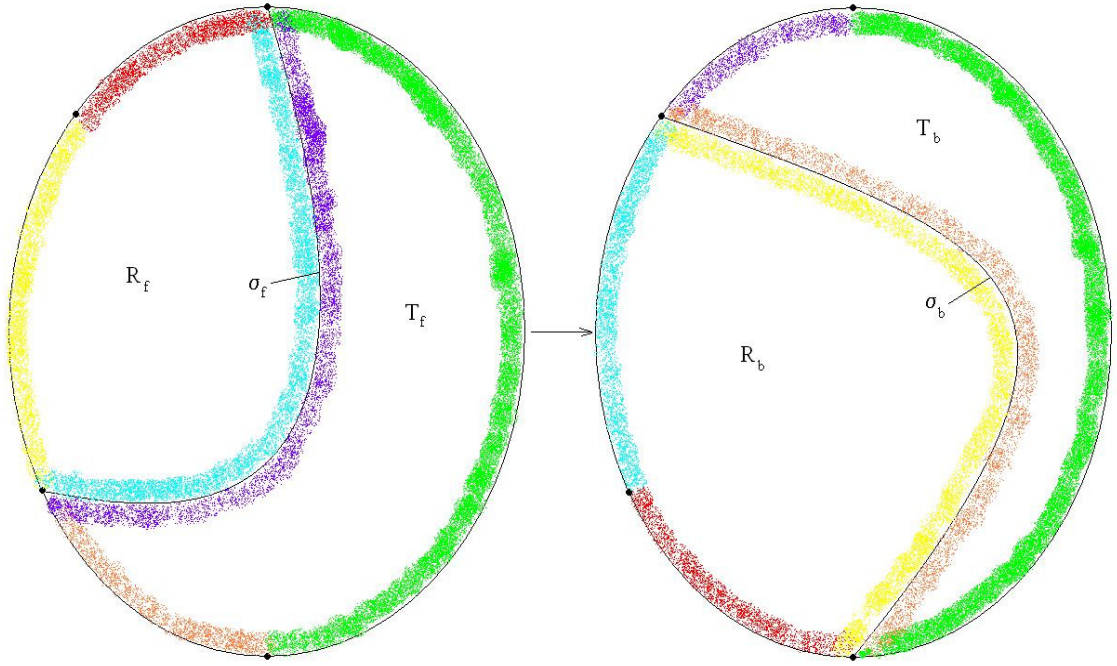


Рисунок 6.3: Глобальная структура отображения Пуанкаре

6.4 Глобальная структура отображения Пуанкаре

Рассмотрим теперь образ окрестности дуг d_{132}^0, d_{123}^0 при отображении Пуанкаре в прямом направлении времени. Напомним, что при этом отображении данные окрестности сшиваются по этим дугам, а образ дуг представляет собой некоторую кривую σ_b , соединяющую точки $\tilde{d}_2^+$ и $\tilde{d}_3^+$. Темно-синяя штрихованная линия и граница между светло-зеленой и темно-зеленой областями являются частями этой кривой. Кривая σ_b разделяет область D_{31} на две части. Обозначим ту часть, которая содержит темно-зеленую область, через T_b , а ту часть, которая содержит светло-зеленую область, через R_b .

Рассмотрим образ окрестности дуг d_{213}^0, d_{123}^0 при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом отображении данные окрестности сшиваются по этим дугам, а образ дуг представляет собой некоторую кривую σ_f , соединяющую точки $\tilde{d}_1^-$ и $\tilde{d}_2^-$. Темно-красная штрихованная линия и штрихованная часть границы желтой области являются частями этой кривой. Кривая σ_f разделяет область D_{31} на две части. Обозначим ту часть, которая содержит зеленую область, через T_f , а ту часть, которая содержит синюю область, через R_f .

Таким образом, отображение Пуанкаре непрерывно на областях T_f, R_f и переводит их биективно в области T_b, R_b , соответственно. Если продолжить отображение непрерывным образом на границу области T_f , то эта граница следующим образом переходит в границу области T_b . Дуга $\tilde{d}_2$ остается неподвижной, дуга d_{132}^0 переходит в кривую σ_b , а кривая σ_f — в дугу d_{213}^0 . Если продолжить отображение непрерывным образом на границу области R_f , то эта граница следующим образом переходит в границу области R_b . Дуга d_{213}^0 переходит в дугу d_{132}^0 , дуга d_{123}^0 переходит в кривую σ_b , а кривая σ_f — в дугу d_{123}^0 . Схематически структура отображения Пуанкаре изображена

на рис. 6.3.

Кривые σ_f и σ_b пересекаются в одной точке. Координаты этой точки являются решением некоторой системы алгебраических уравнений, так как эта точка трехкратным применением отображения Пуанкаре переходит в желтую область. Численные значения координат равны $\chi_1 \approx 0.174146349178$, $\chi_2 \approx 0.907326683652$.

6.5 Переходы циклического и осциллирующего типа

Рассмотрим отображение Пуанкаре, переводящее точку переключения с управления i на управление j в точку переключения с управления j на управление k . Введем следующее определение.

Если $i = k$, то будем называть данный переход *осциллирующим*, если же $i \neq k$, и таким образом $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, то будем называть данный переход *циклическим*. Введем для этих переходов обозначения T (transposition) и R (rotation).

Преимущество описания последовательности управлений на какой-либо конкретной траектории в терминах этого определения заключается в том, что оно инвариантно по отношению действия группы перестановок S_3 , переставляющей вершины множества допустимых управлений Ω .

Заметим, что отображение Пуанкаре области T_f в T_b осуществляется переходом осциллирующего типа, а отображение Пуанкаре области R_f в R_b — переходом циклического типа. Индексы b и f обозначают сокращения от английских слов *backward* и *forward*. Заметим также, что любая точка зеленой области C в ходе эволюции в прямом направлении времени претерпевает исключительно переходы осциллирующего типа, пока через бесконечное число переключений не попадает на особый режим.

6.6 Аттрактор в обратном направлении времени

В статье [78] установлено наличие отталкивающей неподвижной точки F_R отображения Пуанкаре на области D_{31} , соответствующей трехзвенным автомодельным циклам в факторпространстве по группе Фуллера (теорема 3), а также гиперболической периодической траектории, состоящей из двух точек F_R^1, F_R^2 , и соответствующей шестизвенным автомодельным циклам (теорема 5). На рис. 6.4 точка F_R и пара точек F_R^1, F_R^2 обозначены синим и красными крестиками, соответственно.

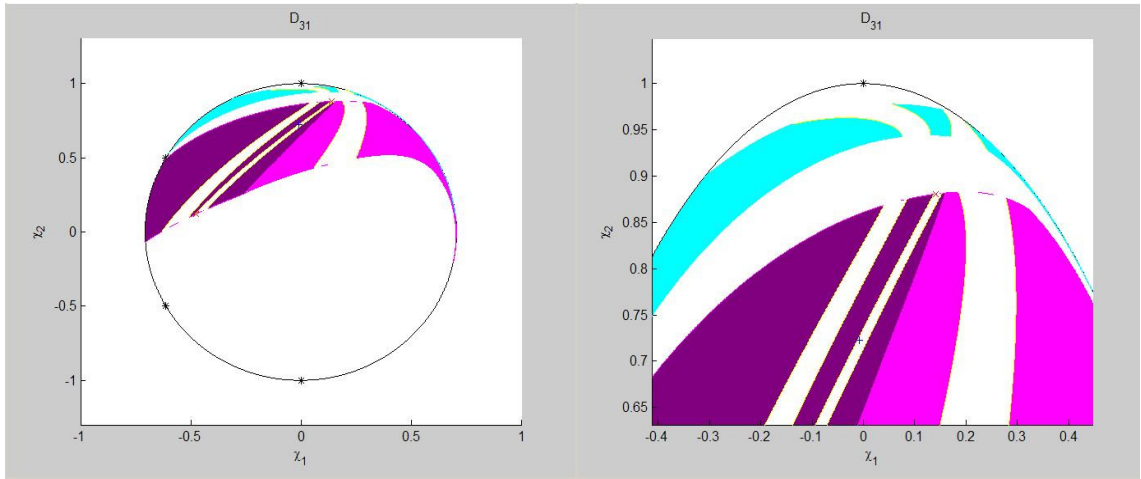


Рисунок 6.4: Области I и Ib

На всех вышеназванных автомодельных траекториях имеет место циклическая последовательность всех трех управлений. Таким образом, соответствующие переходы имеют циклический тип, и все три точки F_R, F_R^1, F_R^2 лежат в пересечении областей R_f, R_b .

В силу того факта, что точка F_R отталкивающая в прямом направлении времени, а значит, притягивающая в обратном направлении времени, существует окрестность точки F_R такая, что любая точка из этой окрестности стремится к F_R в обратном направлении времени и при этом претерпевает исключительно переходы циклического типа. Определим область I как наибольшую из этих окрестностей. Ясно, что область I является подмножеством области R_b .

Численным счетом установлено, что одна из ветвей устойчивого уса гиперболической периодической траектории (F_R^1, F_R^2) принадлежит области I. Из этого следует, что F_R^1, F_R^2 лежат на границе области I, а эта граница определяется неустойчивым усом периодической траектории (F_R^1, F_R^2) . Таким образом, область I является пересечением полосы, находящейся между устойчивыми усами периодической траектории (F_R^1, F_R^2) , с областью R_b . Наряду с этими усами, ее граница состоит из отрезков дуги d_{123}^0 и кривой σ_b .

Пересечения области I с синей, желтой, красной и зеленой областями на рис. 6.4 закрашены сиреневым цветом. Обозначим прообраз области I при отображении Пуанкаре через Ic. Поскольку неподвижная точка притягивающая в обратном направлении времени, то область Ic является подмножеством области I. Пересечения области Ic с синей, желтой и красной областями на рис. 6.4 закрашены темно-сиреневым цветом. Обозначим комплемент области Ic в области I через Ia. Пересечения области Ia с красной и зеленой областями на рис. 6.4 закрашены светло-сиреневым цветом. В качестве границы между областями Ia и Ic выступает отрезок кривой σ_f . Этот отрезок при отображении Пуанкаре области Ic в прямом направлении времени отображается на границу области I, а именно, в отрезок дуги d_{123}^0 . Этот отрезок одновременно лежит на границе области Ic, и при отображении Пуанкаре в прямом направлении времени отображается на границу области I, а именно, в отрезок кривой σ_b .

В силу вышесказанного образом области I при отображении Пуанкаре (в прямом направлении времени) является объединение области I с образом области Ia. Обозначим образ области Ia через

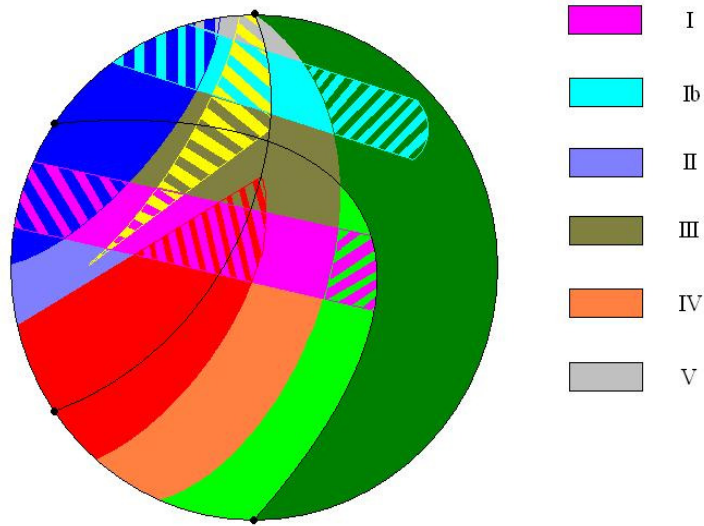


Рисунок 6.5: Схематическое расположение областей

Ib. Пересечения области Ib с синей, частью желтой и зеленой областями на рис. 6.4 закрашены голубым цветом. При отображении Пуанкаре в прямом направлении времени области Ia отрезок кривой σ_f переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а отрезок кривой σ_b — вовнутрь темно-зеленой области. Обратим внимание на то, что пересечение кривой σ_f с областью Ib полностью лежит на границе желтой области, но граница желтой области не содержит пересечения кривых σ_f, σ_b .

6.7 Промежуточные области

В предыдущих разделах мы установили, что точки, лежащие в синей или красной областях, через одно или два переключения, соответственно, переходят в зеленую область, а оттуда через бесконечное число переходов осциллирующего типа попадают на особый режим. С другой стороны, точки, лежащие в области Ib, (в обратном направлении времени) через одно переключение попадают в область I и далее стремятся к неподвижной точке F_R , при этом претерпевая переходы исключительно циклического типа. В этом разделе мы рассмотрим остальные точки множества D_{31} .

Любая точка из D_{31} , не лежащая в замыкании зеленой, синей, или красной области, или одной из областей I, Ib, должна лежать в замыкании одной из следующих четырех областей.

Область II ограничивается отрезком дуги d_{132}^0 , отрезком границы красной области, отрезком границы области Ic, и отрезком границы синей области. Область III ограничивается отрезком границы области I, отрезком границы зеленой области, отрезком границы области Ib, и отрезком границы синей области. Область IV ограничивается отрезком дуги d_{123}^0 , отрезком границы зеленой области, отрезком границы области Ia, и отрезком границы красной области. Область V ограничивается отрезком границы области Ib, отрезком границы зеленой области, и отрезком дуги d_{213}^0 . Взаимное расположение областей схематически изображено на рис. 6.5, см. также рис. 6.6.

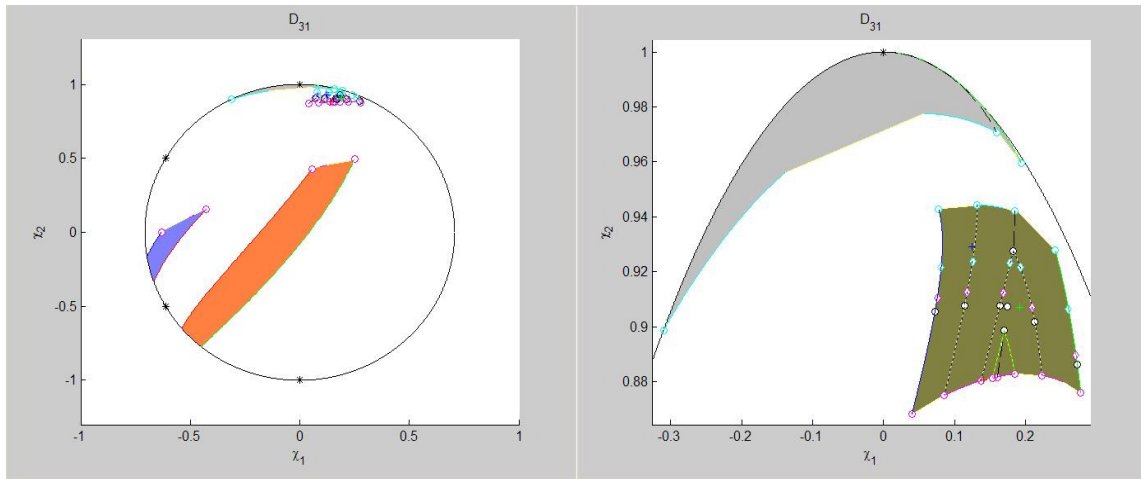


Рисунок 6.6: Области II, III, IV, V

Рассмотрим сейчас динамику системы, задаваемой отображением Пуанкаре, на промежуточных областях. Заметим, что обе кривые σ_f и σ_b разделяют область III на две части. Обозначим части области III, определяемые кривой σ_f , через IIII и IIIr, а части, определяемые кривой σ_b , через IIIu и IIId. При этом область IIII примыкает к синей области, IIIr к зеленой области, IIIu к области Ib, а IIId — к области I. Заметим также, что кривая σ_f разделяет область V на две части. Обозначим эти части через VI и Vr, при этом VI примыкает к дуге d_{213}^0 , а Vr — к зеленой области.

Тогда отображение Пуанкаре биективно отображает область II на область IIId, при этом отрезок границы синей области переходит в отрезок границы зеленой области, отрезок границы красной области переходит в отрезок границы синей области, отрезок границы области Ic переходит в отрезок границы области I, а отрезок дуги d_{132}^0 — в отрезок кривой σ_b . Соответствующий переход имеет циклический тип.

Оно также биективно отображает область IV на область IIIu, при этом отрезок границы светло-зеленой области переходит в отрезок границы темно-зеленой области, отрезок границы красной области переходит в отрезок границы синей области, отрезок границы области Ia переходит в отрезок границы области Ib, а отрезок дуги d_{123}^0 — в отрезок кривой σ_b . Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Как явствует из рис. 6.3, образ области VI примыкает к дугам d_{132}^0 и d_{123}^0 . При этом пересечение границы областей Ib и VI переходит в кривую, соединяющую эти дуги. Эта кривая не может пересекать область I, поскольку прообраз области I не пересекается с областью VI. Концы этой кривой лежат в синей и желтой областях, соответственно, поэтому концы ее образа должны лежать в зеленой и красной областях, соответственно. Таким образом, отображение Пуанкаре переводит область VI в объединение подмножеств замыканий красной и зеленой областей, и подмножества области IV. Соответствующий переход имеет циклический тип.

Для того чтобы выяснить, как отображается область Vr, рассмотрим прообраз области V при отображении Пуанкаре. Из вышесказанного следует, что этот прообраз ограничен границей зеленой области, кривой σ_f , и границей области Ia. В частности, он содержит область Vr. Поэтому отображение Пуанкаре переводит область Vr в подмножество области V. Соответствующий пе-

реход имеет осциллирующий тип.

Из предыдущего абзаца следует, что область IIIg содержится в прообразе области V , поэтому она переводится в подмножество области V . Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Рассмотрим теперь образ области III . Пересечение границ области III и синей области переводится в отрезок границы зеленой области. Пересечение границ областей III и Ic переводится в отрезок границы области I . Отрезок кривой σ_f , граничащий с областью III , переводится в отрезок дуги d_{123}^0 . Так как концы этого отрезка кривой σ_f находятся в красной и желтой областях соответственно, то концы отрезка дуги d_{123}^0 должны находиться в синей и красной областях соответственно. Из этого следует, что образ области III является объединением подмножеств замыканий красной и синей областей, области II и подмножества области IV . Соответствующий переход имеет циклический тип.

Образы областей II , III , IIIg , IV , VI и Vg схематически изображены на рис. 6.7. На рис. 6.7 справа видно, что область IV делится образами областей III и V на три полосы IVa , IVb , IVc . При этом определим множество IVa как пересечение области IV с образом замыкания области III , множество IVc как пересечение области IV с образом замыкания области V , а множество IVb — как комплемент множеств IVa , IVc в области IV .

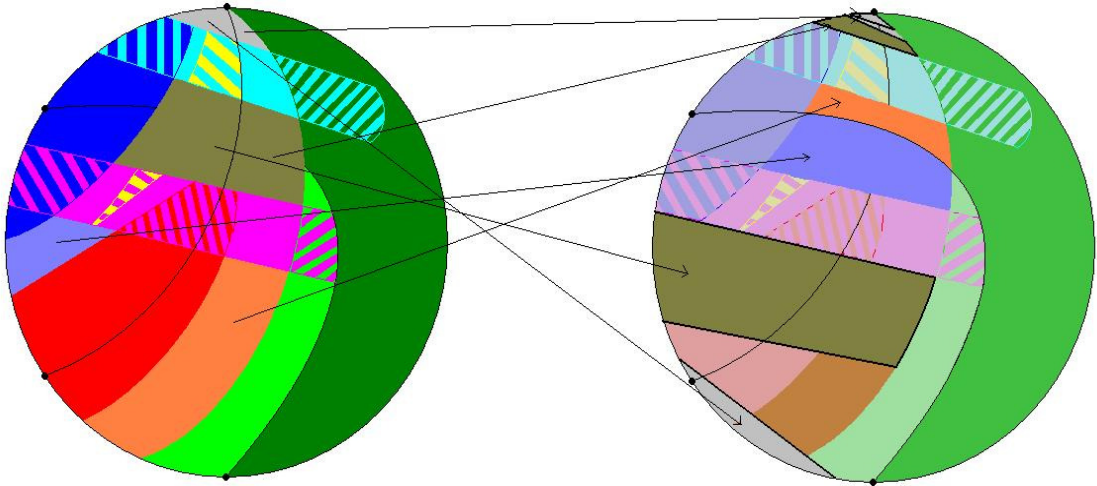


Рисунок 6.7: Образы областей II , III , IV , V

Перейдем сейчас к прообразам областей II – V . При отображении Пуанкаре в обратном направлении времени область II переходит в подмножество области III . При этом отрезок дуги d_{123}^0 , примыкающий к области II , переходит в отрезок кривой σ_f , отрезки границ синей и красной областей переходят в отрезки границ красной и желтой областей, соответственно, а отрезок границы области Ic — в отрезок границы области Ic . Соответствующий переход имеет циклический тип.

Рассмотрим прообраз области IV . Отрезок дуги d_{132}^0 , примыкающий к области II , переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , отрезки границ зеленой и красной областей переходят в отрезки границ синей и желтой областей соответственно, а отрезок границы области Ia — в отрезок границы области Ic . Таким образом, прообраз области IV является объединением замыканий подмножеств областей

III и VI и подмножеством области Ib. Обозначим замыкание этого подмножества области VI через Va. Соответствующий переход имеет циклический тип.

Прообразами областей IIIu и IIId являются области IV и II, соответственно, а соответствующие переходы имеют осциллирующий и циклический тип соответственно.

Наконец, прообраз области V был описан выше. Он является объединением областей IIIr и Vr и подмножеством замыкания области Ib. Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Прообразы областей II, IIId, IIIu, IV и V схематически изображены на рис. 6.8.

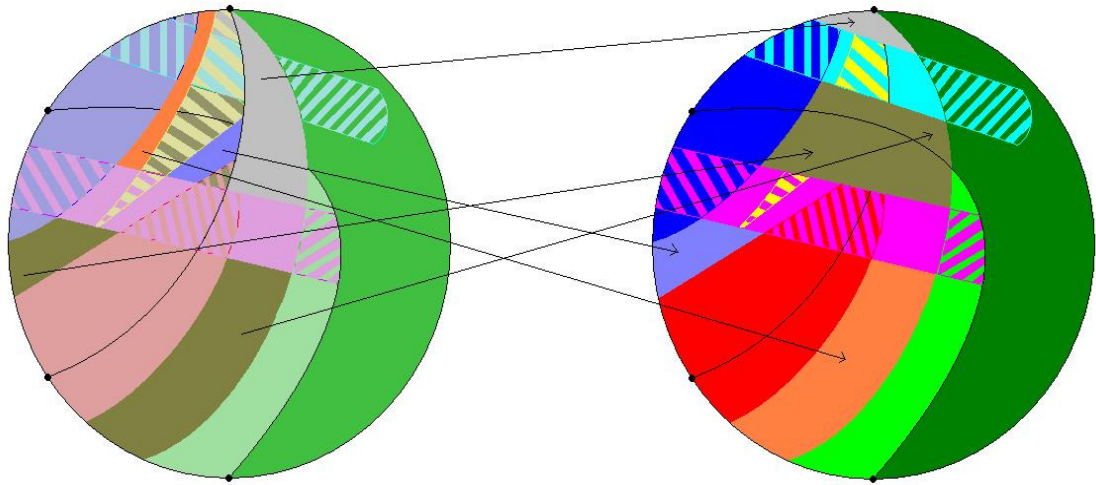


Рисунок 6.8: Прообразы областей II, III, IV, V

Динамику отображения Пуанкаре на замыканиях областей II-V можно описать ориентированным графом, представленным на рис. 6.9. При этом выходящие стрелки соответствуют переходам в точки красной, синей или зеленой областей, откуда они попадают в область притяжения особого режима, а входящие стрелки — переходам из точек областей I или Ib, откуда они в обратном времени попадают в область притяжения неподвижной точки F_R . Буквы t, r обозначают осциллирующий или циклический тип перехода, соответственно.

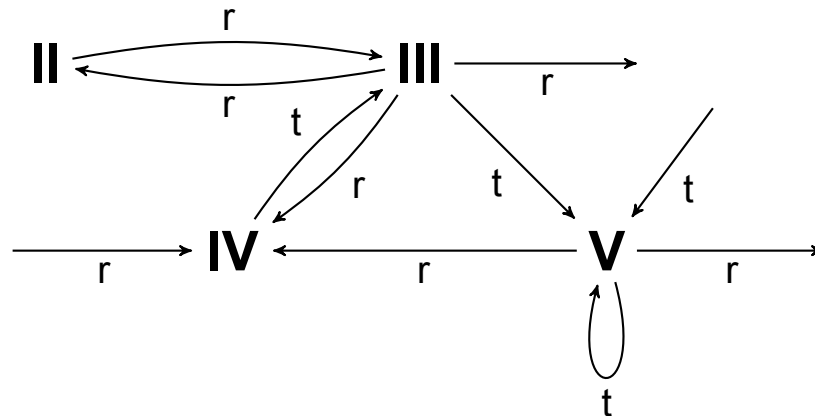


Рисунок 6.9: Граф переходов

6.8 Разрешение динамики на области V

Рассмотрим пересечения области V с образами областей III и V, с одной стороны, и с прообразами областей IV и V, с другой стороны. Эти пересечения схематически изображены на рис. 6.10 справа. (На рис. 6.10 слева видны точные расположения точек, изображенных справа полными кружочками).

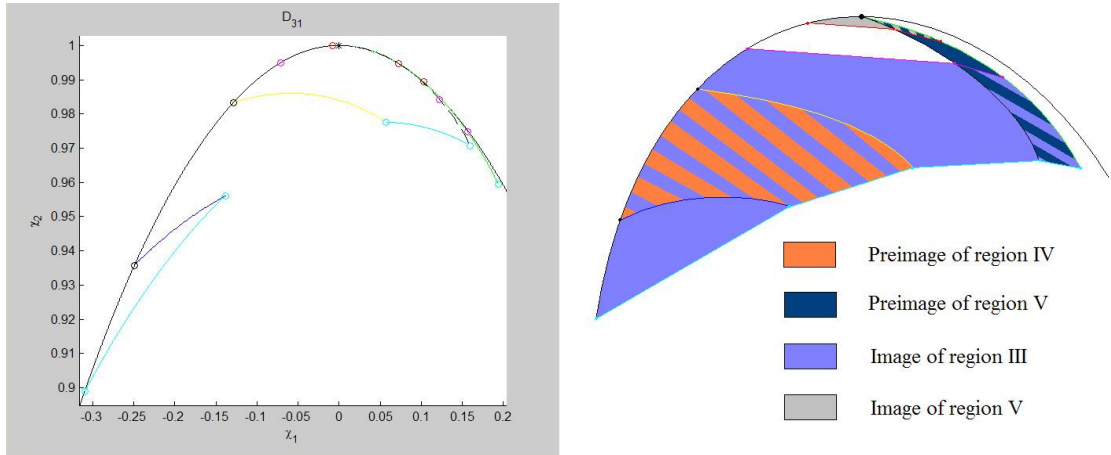


Рисунок 6.10: Динамика на области V

Из рис. 6.10 явствует, что множество V_a является подмножеством замыкания пересечения образа области III с областью V. Поэтому любая точка, приходящая в область V не из области III, уже никогда не может вернуться в одну из областей II, III или IV. Такая точка, если она не лежит в пересечении области V с синей или желтой областью, обязательно через конечное число переходов осциллирующего типа попадает в желтую область, из которой через три перехода попадает в зеленую область, т.е. область притяжения особого режима.

Из графа, изображенного на рис. 6.9, тогда следует, что любая траектория, не попадающая в прямом направлении времени в область притяжения особого режима, а в обратном направлении времени — в область притяжения неподвижной точки F_R , должна бесконечно много раз проходить через замыкание области III. Поэтому при изучении этих траекторий мы можем ограничиться изучением отображения замыкания области III на себя.

Из графа 6.9 следует, что это отображение может происходить тремя способами: двумя переходами циклического типа через область II, двумя переходами, циклического и осциллирующего типа соответственно, через область IV, и наконец, тремя переходами, осциллирующего, циклического и снова осциллирующего типа соответственно, через области V и IV. Обозначим эти способы отображения замыкания области III на себя через A, B, C , соответственно. Таким образом, любая траектория, не попадающая в прямом направлении времени в область притяжения особого режима, а в обратном направлении времени — в область притяжения неподвижной точки F_R , может быть представлена двусторонне бесконечной последовательностью символов A, B, C . Точке замыкания области III, которая в прямом направлении времени претерпевает отображения $i_1, i_2, \dots, i_{n_f} \in \{A, B, C\}$, а в обратном направлении времени — отображения $j_1, j_2, \dots, j_{n_b}$, где

n_f, n_b могут быть конечными или бесконечными, сопоставим в соответствие последовательность символов $j_{n_b}, j_{n_b-1}, \dots, j_1, i_1, i_2, \dots, i_{n_f}$. Здесь точка отделяет переходы, лежащие в будущем, от переходов, лежащих в прошлом.

С другой стороны, последовательности $j_{n_b}, j_{n_b-1}, \dots, j_1, i_1, i_2, \dots, i_{n_f}$ сопоставим множество точек замыкания области III, которые в прямом направлении времени претерпевают отображения $i_1, i_2, \dots, i_{n_f} \in \{A, B, C\}$, а в обратном направлении времени — отображения $j_1, j_2, \dots, j_{n_b}$. Таким образом, например, $A.B$ соответствует пересечению замыкания области III с прообразом отображения B и образом отображения A .

Таким образом, множество A совпадает с замыканием области IIId, множество B является образом определенного выше множества IVc, а множество C — образом множества IVa. С другой стороны, множество A является замыканием прообраза области II, множество B — замыканием пересечения прообраза области IV с областью III, а множество C — прообразом множества Va. Множества A, B, C изображены на рис. 6.11 слева, а множества A, B, C — справа. Отображения A, B, C переводят первые во вторые.

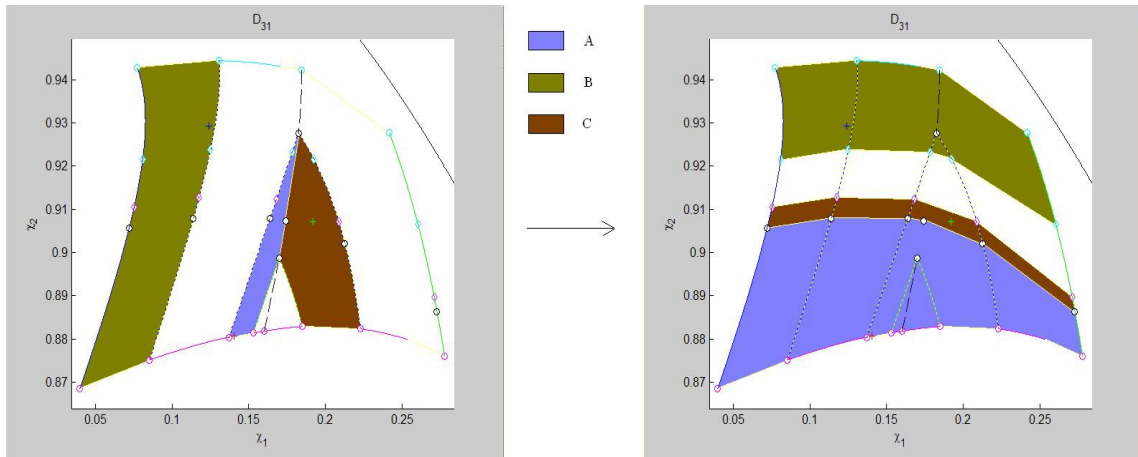
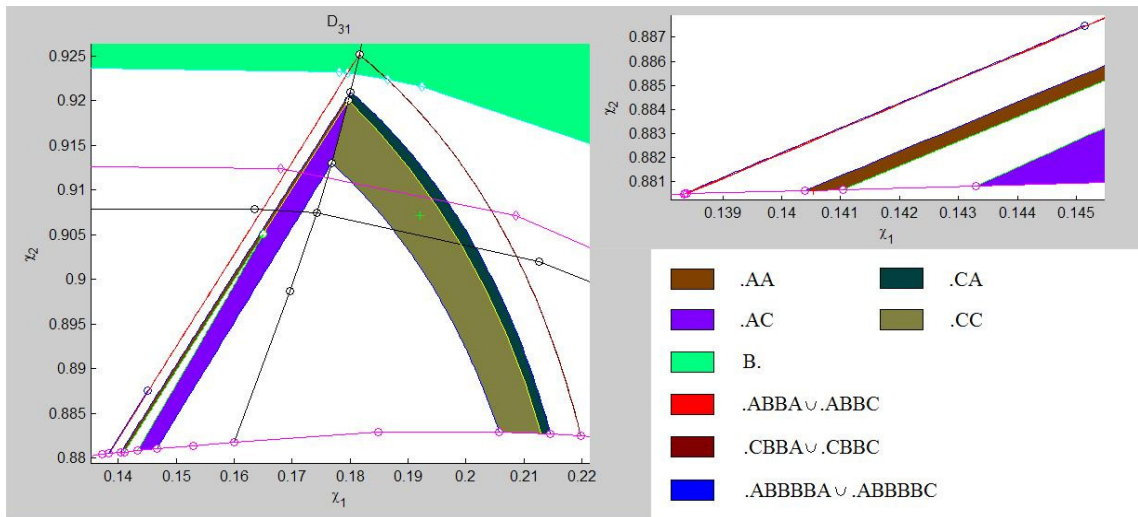


Рисунок 6.11: Динамика на области III

Заметим, что множества A, C пересекаются с кривой σ_f в одном и том же отрезке, который одновременно является частью их границы. Оба множества также граничат с областью I и с красной областью. Множество A также граничит с желтой областью, а множество C — с прообразом при отображении Пуанкаре пересечения желтого множества с областью V. С другой стороны, множество B граничит с областями I и Ib и с синей и желтой областью. Множество B граничит с областью Ib, с синей и зеленой областями, а также с образом области IVb. Множество C граничит с множеством A по кривой σ_b , а также примыкает к синей и зеленой областям и к образу области IVb.

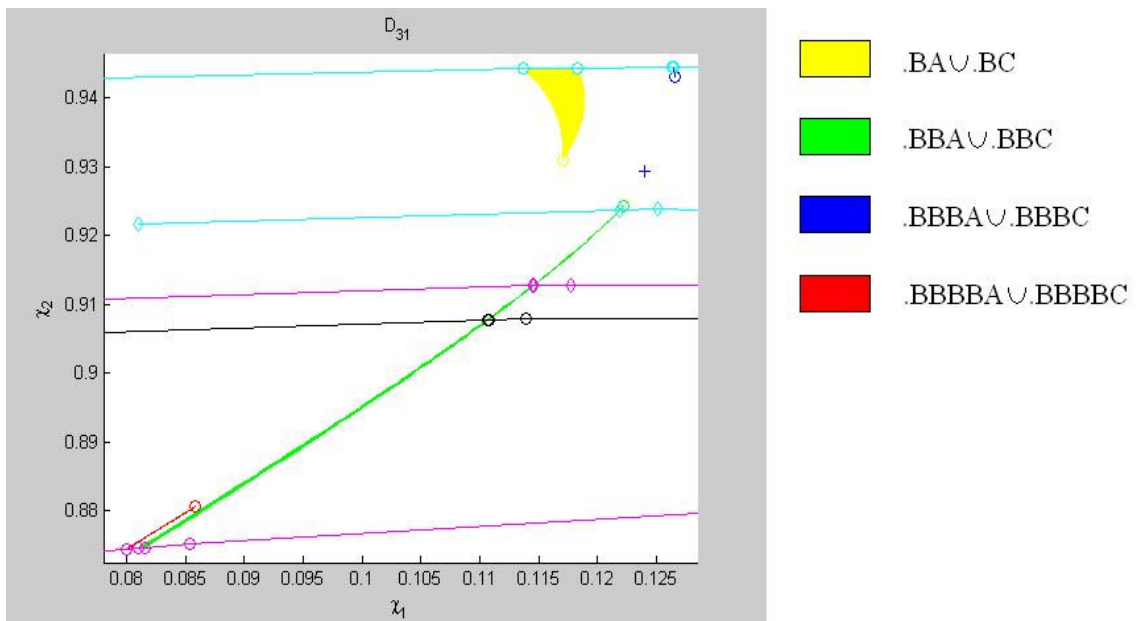
Отметим, что все три области на рис. 6.11 слева пересекаются со всеми тремя областями на рис. 6.11 справа. Поэтому возможны сочетания всех типов отображений A, B, C со всеми типами. Более того, каждое из отображений A, B, C имеет неподвижную точку. Эти точки обозначены на рис. 6.11 красным, синим и зеленым крестиком, соответственно для отображений A, B, C . При этом первая и вторая неподвижные точки соответствуют шестизвенному и четырехзвенному циклу,

Рисунок 6.12: Динамика с участием отображения B

соответственно, найденными в работе [78], а третья — девятизвенному циклу (открытому в 2002 г.).

6.9 Разрешение динамики отображений типа B

Как явствует из рис. 6.12, множества $.AA$, $.AC$, $.CA$, $.CC$ с множеством B не пересекаются. Таким образом, последовательность символов, отвечающая траектории системы, не может содержать подпоследовательности Bij , где $i, j \in \{A, C\}$. По индукции из этого следует, что если в последовательности где-либо встречаются подряд два символа из множества $\{A, C\}$, то символ B может встретиться только справа от них.

Рисунок 6.13: Динамика с участием отображения B

Множества $.BA$, $.BC$ являются подмножествами B ., а множества $.BBA$, $.BBC$ пересекаются со всеми тремя множествами A ., B ., C .. Множества $.BBBA$, $.BBBC$ также являются подмножествами B ., а $.BBBBA$, $.BBBBBC$ — подмножествами A . (см. рис. 6.13). Множества $.ABBBBA$, $.ABBBBC$ являются подмножествами A ., в то время как $.ABBA$, $.ABBC$, $.CBBA$, $.CBBC$ имеют не пустое пересечение с множеством B . (см. рис. 6.12).

Множества $.BABBA$, $.BABBC$, $.BCBBA$, $.BCBBC$ (начерченные синим на рис. 6.14) являются подмножеством объединения $.BA \cup .BC$ и поэтому также являются подмножеством B .. Однако, $.BBABBA$, $.BBABBC$, $.BBCBBA$, $.BBCBBC$ (начерченные красным на рис. 6.14) уже являются только подмножествами A ., а $.ABBABBA$, $.ABBABBC$, $.ABBCBBA$, $.ABBCBBC$ (начерченные зеленым на рис. 6.14) — не пересекаются с B ..

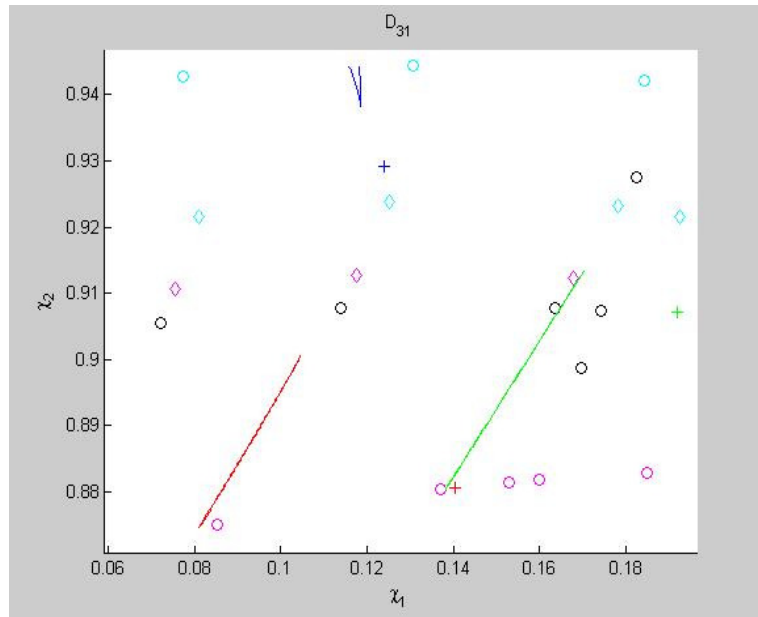


Рисунок 6.14: Динамика с участием отображения B

Из вышесказанного следует, что если в последовательности встречается подпоследовательность Bi , где $i \in \{A, C\}$, то эта подпоследовательность налево может продолжаться только одним из способов $\dots AABBBVi$, $\dots ABVjBBi$, $\dots BBVi$, где $j \in \{A, C\}$, а троеточие обозначает последовательность любой длины, состоящую из символов A, C .

В частности, двусторонне бесконечная последовательность либо состоит только из символов B , в коем случае она соответствует неподвижной точке отображения B , т.е., четырехзвенному циклу, либо она содержит подпоследовательность, состоящую только из символов B и продолжающуюся бесконечно вправо, и подпоследовательность, не содержащую ни одного символа B и продолжающуюся бесконечно влево, а между этими подпоследовательностями расположено максимально 6 символов, либо она не содержит ни одного символа B . Таким образом, если соответствующая траектория динамики на замыкании множества Π не является неподвижной точкой отображения B , то она проходит через объединение множеств $A.A$, $A.C$, $C.A$, $C.C$ и далее в обратном направлении времени остается в этом объединении.

6.10 Динамика отображений типа A и C

В дальнейшем мы рассмотрим динамику отображений A, C на объединении множеств $A.A, A.C, C.A, C.C$, а точнее — на замкнутом множестве IIIb , определяемым как объединение множеств $A.A, A.C, C.A, C.C$ и замыкания пересечения красной области и области III . Таким образом, множество IIIb граничит с областью I , с желтой областью, с образом множества IVb , и с прообразом пересечения желтой области с областью V . Множество IIIb изображено на рис. 6.15 слева и на рис. 6.16 справа.

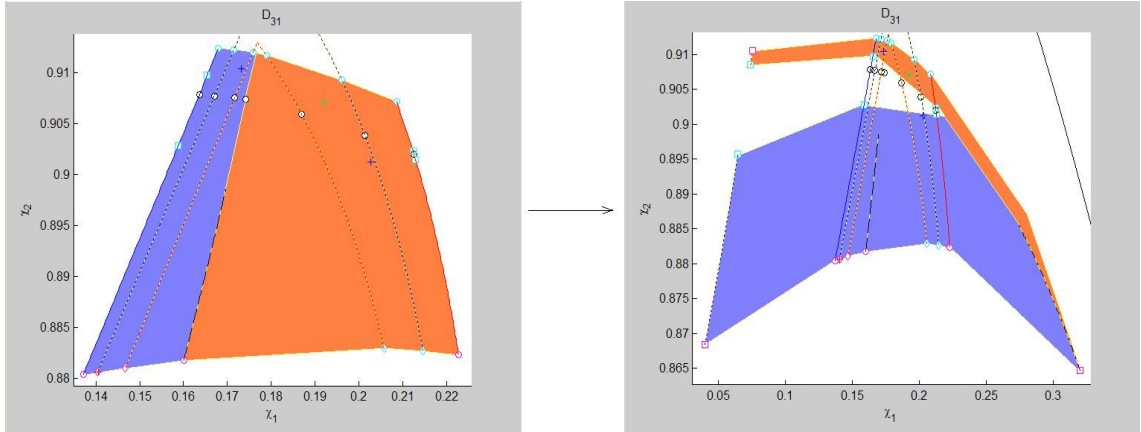


Рисунок 6.15: Образ области IIIb

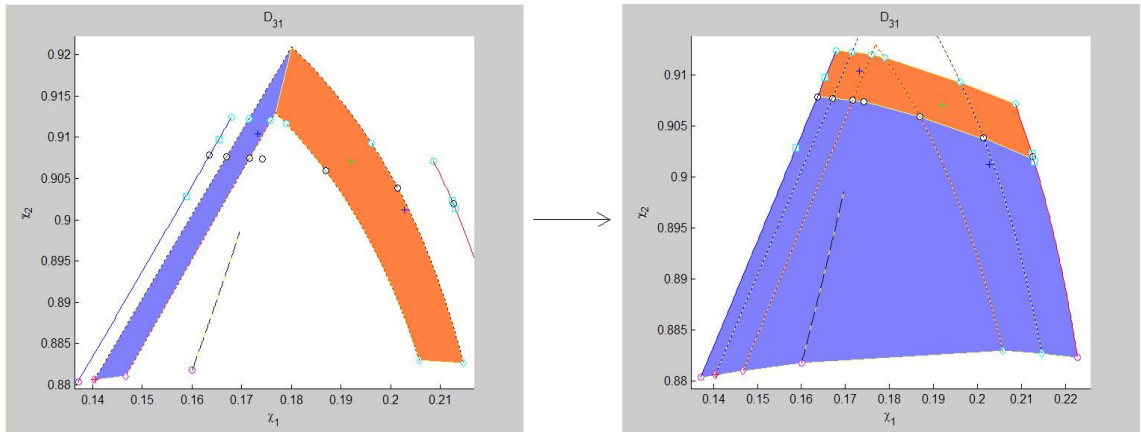


Рисунок 6.16: Прообраз области IIIb

Определим отображения $F, F^{-1} : \text{IIIb} \rightarrow D_{31}$ следующим образом. Для точки χ , расположенной в полосе между желтой областью и кривой σ_f , определим $F(\chi)$ как образ χ при отображении A , т.е., при двойном отображении Пуанкаре. При этом оба перехода имеют циклический тип. Для точки χ , расположенной в полосе между прообразом желтой области и кривой σ_f , определим $F(\chi)$ как образ χ при отображении C , т.е., при тройном отображении Пуанкаре. При этом переходы имеют осциллирующий, циклический, и снова осциллирующий тип соответственно. Отображение F непрерывно продолжается на пересечение множества IIIb с кривой σ_f . Для точки χ , расположенной в полосе между областью I и кривой σ_b , определим $F^{-1}(\chi)$ как прообраз χ

при отображении A , т.е., при двойном отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом оба перехода имеют циклический тип. Для точки χ , расположенной в полосе между образом множества IVb и кривой σ_b , определим $F^{-1}(\chi)$ как прообраз χ при отображении C , т.е., при тройном отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом переходы имеют осциллирующий, циклический, и снова осциллирующий тип соответственно. Отображение F^{-1} непрерывно продолжается на пересечение множества $IIIb$ с кривой σ_b .

Отображение F переводит отрезок кривой σ_f в отрезок кривой σ_b , а F^{-1} — отрезок кривой σ_b в отрезок кривой σ_f . При этом образы этих отрезков не пересекаются с множеством $IIIb$, и пересечение этого множества со своими образами при отображениях F, F^{-1} состоит из двух компонент связности соответственно. Таким образом, топология отображения множества $IIIb$ на себя эквивалентна топологии отображения в классической подкове Смейла. Образы множества $IIIb$ при отображениях F, F^{-1} изображены на рис. 6.15, 6.16.

На рис. 6.15, 6.16 неподвижные точки отображения F обозначены красным и зеленым крестиками. Эти две точки являются неподвижными точками отображений A и C , соответственно, и были обозначены выше на рис. 6.11. Синими крестиками на рис. 6.15, 6.16 обозначена двухэлементная периодическая траектория отображения F , состоящая из неподвижных точек отображений $A \circ C$ и $C \circ A$. Она соответствует семейству 15-звенных автомодельных циклов, инвариантному относительно элемента порядка 3 группы перестановок S_3 . Все три периодические траектории имеют гиперболический тип. Сжимающие собственные значения приблизительно равны 0.789389405489713, -0.195427788394708 , -0.064093706436160 , а растягивающие — 25.416902415438734, -2.553017991174260 , -73.29685207454 для неподвижных точек отображений $A, C, A \circ C$ соответственно.

Отметим, что отображение F непрерывно дифференцируемо (и даже алгебраическое) на всюду плотном подмножестве множества $IIIb$. Это множество точек, которые в прямом направлении времени переводятся многократным применением отображения Пуанкаре во внутренность зеленой области, при этом не проходя через границу области D_{31} . Поэтому любую такую точку можно получить, применяя отображение Пуанкаре в обратном направлении времени к некоторой точке зеленой, или, что эквивалентно, синей области.

ГЛАВА 7

Фрактальная структура гиперболических липшицевых динамических систем

В главе 3 доказана теорема 3.2 гарантирующая, что множество поднятий оптимальных траекторий в модельной задаче (5.1) является локально липшицевым лагранжевым подмногообразием M_+ в расширенном фазовом пространстве $T^*M = \mathcal{M}$. В главе 6 подробно изучена динамика отображения последования Пуанкаре в ограничении на M_+ . Однако, многообразие M_+ по существу не является гладким. Поэтому максимум на что можно рассчитывать – это на липшицевость отображения последования Пуанкаре в ограничении на M_+ .

В данной главе подробно изучены динамические системы не обладающие какой-либо гладкой структурой, а обладающие лишь свойством липшидовости. Построено понятие липшицевой гиперболической динамической системы, обобщающей классическое понятие гиперболичности для гладких систем. Доказана теорема о полусопряженности липшицевой гиперболической динамической системы с соответствующей марковской топологической цепью. Предложен новый способ вычисления оценок размерностей по Хаусдорфову и Минковскому множества неблуждающих точек по марковскому разбиению (см. [16]).

7.1 Введение

Обычным предположением при изучении динамических систем, обладающих фрактальной структурой, является требование гладкости. Однако в приложениях, требование гладкости иногда нарушается. Например, в динамических системах, возникающих в теории экстремальных задач, как правило, условие гладкости нарушается в точках переключения управления, и приходится рассматривать липшицевы отображения. Особенно важным это становится для экстремальных задач, в которых управление совершает счетное число переключений на конечном промежутке времени (см. главу 5). Поэтому в данной главе будет развита техника, применимая к изучению фрактальной природы липшицевых динамических систем.

Основной метод для исследования липшицевой динамической системы $f : B \rightarrow B$ заключается в том, что B разрезается на N областей B_i и поведение каждой точки кодируется бесконечной

последовательностью $(\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots)$ такой, что $f^k(x) \in B_{i_k}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$ (метод символической динамики).

В данной главе доказана теорема о сопряженности исходной динамической системы f с соответствующей топологической марковской цепью. Отметим, что условия теоремы формулируются исключительно в терминах липшицевых констант отображений $f|_{B_i}$.

Предложен новый способ вычисления размерности множества не блуждающих точек по марковскому разбиению: пусть на N метрических пространствах X_i задано не более чем N^2 отображений $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ с константами Липшица λ_{ij} . Тогда если s является верхней размерностью по Минковскому аттрактора этой системы, то спектральный радиус матрицы $\Lambda_s = (\lambda_{ij}^s)$ не превосходит 1. Подчеркнем, что в этом критерии в степень s возводится каждый элемент матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$. Аналогично получается и нижняя оценка хаусдорфовой размерности. В отличие от классических результатов здесь не требуется, чтобы отображения f_{ij} были сжимающими. Это требование заменено на более естественное требование сжатия вдоль простых циклов.

7.2 Локальные свойства гиперболических липшицевых отображений

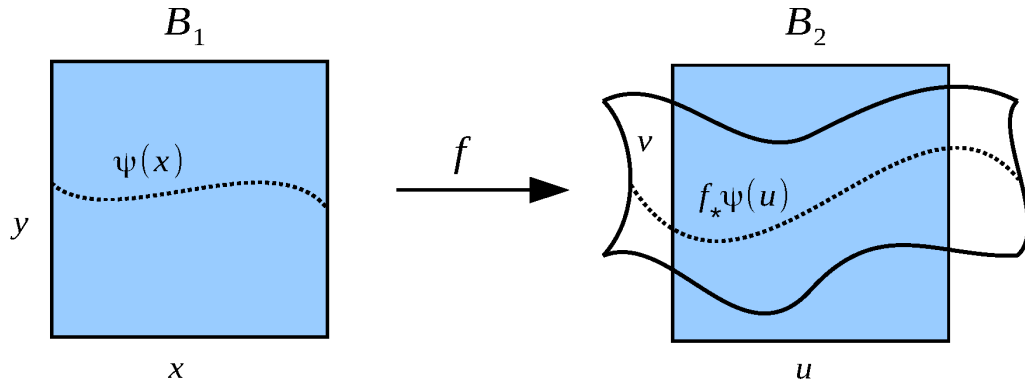


Рисунок 7.1: Схематическое изображения отображения $f: B_1 \rightarrow B_2$

Для изучения динамики отображения f мы должны начать с простейших свойств липшицевых отображений. Пусть B_1 и B_2 подмножества $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, и f – некоторое непрерывное отображение из B_1 в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Вообще говоря, некоторые точки из B_1 могут не попасть в B_2 (см. рис. 7.1). Обозначим через (x, y) – координаты на B_1 , а через u, v – координаты на B_2 . Здесь $x, u \in \mathbb{R}^k$ и $y, v \in \mathbb{R}^m$. Положим $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ – проекции $f(x, y)$ на $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Пространства $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ снабжены произвольными метриками, локально эквивалентными евклидовой (например, $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{R}^m$ может быть снабжено римановой метрикой).

Гиперболичность отображения f грубо говоря означает, что по координате x идет растяжение, а по координате y – сжатие. В терминах липшицевых констант это означает, что (через ρ обозначено расстояние в соответствующем пространстве).

$$\begin{cases} \underline{u}_x \Delta x \leq \rho(u(x_2, y_0), u(x_1, y_0)) \leq \overline{u}_x \Delta x, \\ \rho(u(x_0, y_2), u(x_0, y_1)) \leq \overline{u}_y \Delta y, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \underline{v}_y \Delta y \leq \rho(v(x_0, y_2), v(x_0, y_1)) \leq \overline{v}_y \Delta y, \\ \rho(v(x_2, y_0), v(x_1, y_0)) \leq \overline{v}_x \Delta x, \end{cases}$$

для любых x_0, x_1, x_2, y_0, y_1 и y_2 таких, что $f(x_i, y_j) \in B_2$. Здесь и далее $\Delta x = \rho(x_2, x_1)$, $\Delta y = \rho(y_2, y_1)$. Через $\overline{u}_x$, $\underline{u}_x$ и т.д. обозначены неотрицательные константы. Мы предполагаем, что $\overline{u}_x \geq \underline{u}_x > 0$ и $\overline{v}_y \geq \underline{v}_y > 0$, а $\overline{u}_y$ и $\overline{v}_x$, вообще говоря, могут быть нулями. Числа $\overline{u}_x - \underline{u}_x$, $\overline{v}_y - \underline{v}_y$, $\overline{u}_y$ и $\overline{v}_x$ показывают, насколько отображение f искривлено относительно диагонального линейного.

Отметим, что для нахождения констант $\overline{u}_x$ и $\underline{u}_x$ достаточно оценить липшицевость отображения $u(x, y_0)$ при фиксированном y_0 как функции от x . Остальные константы оцениваются аналогично. Конечно, из условий (7.1) немедленно следует липшицевость f с константой $c = \overline{u}_x + \overline{u}_y + \overline{v}_x + \overline{v}_y$.

Лемма 7.1. Если константы Липшица удовлетворяют неравенству

$$\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x > 0, \quad (7.2)$$

то отображение f является инъективным. Обратное отображение $f^{-1} : B_2 \rightarrow B_1$ также удовлетворяет условиям (7.1) с константами

$$\frac{\underline{v}_y}{\underline{u}_x \underline{v}_y + \overline{u}_y \overline{v}_x} \leq \underline{x}_u \leq \overline{x}_u \leq \frac{\underline{v}_y}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}; \quad \overline{x}_v \leq \frac{\overline{u}_y}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}$$

$$\frac{\underline{u}_x}{\underline{u}_x \underline{v}_y + \overline{u}_y \overline{v}_x} \leq \underline{y}_v \leq \overline{y}_v \leq \frac{\underline{u}_x}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}; \quad \overline{y}_u \leq \frac{\overline{v}_x}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}$$

Доказательство. Для начала получим пару удобных формул:

$$\begin{aligned} \underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \Delta y &\leq \rho(u(x_2, y_2), u(x_1, y_1)) \leq \overline{u}_x \Delta x + \overline{u}_y \Delta y \\ \underline{v}_y \Delta y - \overline{v}_x \Delta x &\leq \rho(v(x_2, y_2), v(x_1, y_1)) \leq \overline{v}_y \Delta y + \overline{v}_x \Delta x \end{aligned} \quad (7.3)$$

Докажем одно из неравенств:

$$\rho(u(x_2, y_2), u(x_1, y_1)) \geq \rho(u(x_2, y_2), u(x_1, y_2)) - \rho(u(x_1, y_2), u(x_1, y_1)) \geq \underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \Delta y.$$

Остальные доказываются аналогично.

Докажем теперь инъективность отображения f . Пусть для некоторых x_i и y_i , $i = 1, 2$ выполнено $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$ и $v(x_1, y_1) = v(x_2, y_2)$. Тогда согласно неравенствам (7.3) получаем

$$\underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \Delta y \leq 0 \quad \text{и} \quad \underline{v}_y \Delta y - \overline{v}_x \Delta x \leq 0.$$

Следовательно,

$$(\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x) \Delta x \leq 0.$$

Значит, $\Delta x = 0$. Аналогично, $\Delta y = 0$, и инъективность f доказана.

Найдем теперь константы Липшица для обратного отображения. Пусть (u_1, v) и (u_2, v) лежат в образе $f(B_1) \cap B_2$. Рассмотрим x_i и y_i , $i = 1, 2$ такие, что $u(x_i, y_i) = u_i$, а $v(x_i, y_i) = v$, $i = 1, 2$. Тогда согласно неравенствам (7.3) имеем

$$\underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \Delta y \leq \rho(u_2, u_1) \leq \overline{u}_x \Delta x + \overline{u}_y \Delta y,$$

$$\underline{v}_y \Delta y - \overline{v}_x \Delta x \leq 0.$$

Отсюда, сразу получаем

$$\frac{\underline{v}_y}{\overline{u}_x \underline{v}_y + \overline{u}_y \overline{v}_x} \Delta u \leq \Delta x \leq \frac{\underline{v}_y}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x} \Delta u.$$

Поскольку $\Delta y \leq \frac{\overline{v}_x}{\underline{v}_y} \Delta x$, то

$$\Delta y \leq \frac{\overline{v}_x}{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x} \Delta u.$$

Аналогично находятся остальные липшицевы константы для f^{-1} .

□

Лемма 7.2. Пусть $f_1 : B_1 \rightarrow B_2$ и $f_2 : B_2 \rightarrow B_3$ липшицевы отображения, удовлетворяющие неравенствам (7.1) с константами $\overline{u}_x^i, \underline{u}_x^i$ и т.д. для $i = 1, 2$. Тогда композиция $f_3 = f_2 \circ f_1$ также удовлетворяет неравенствам (7.1) с константами

$$\underline{u}_x^2 \underline{u}_x^1 - \overline{u}_y^2 \overline{v}_x^1 \leq \underline{u}_x^3 \leq \overline{u}_x^3 \leq \overline{u}_x^2 \overline{u}_x^1 + \overline{u}_y^2 \overline{v}_x^1; \quad \overline{u}_y^3 \leq \overline{u}_x^2 \overline{u}_y^1 + \overline{u}_y^2 \overline{v}_y^1$$

$$\underline{v}_y^2 \underline{v}_y^1 - \overline{v}_x^2 \overline{u}_y^1 \leq \underline{v}_y^3 \leq \overline{v}_y^3 \leq \overline{v}_y^2 \overline{v}_y^1 + \overline{v}_x^2 \overline{u}_y^1; \quad \overline{v}_x^3 \leq \overline{v}_x^2 \overline{u}_x^1 + \overline{v}_y^2 \overline{v}_x^1$$

Доказательство этой леммы, так же как и леммы 7.1, абсолютно прямолинейно и использует лишь неравенство треугольника.

7.3 Эволюция липшицевых поверхностей

Наличие гиперболической структуры у пусть даже не гладкого, а всего лишь липшицева отображения f естественным образом предполагает построение притягивающих и отталкивающих многообразий. Стандартным способом получения этих многообразий является изучение эволюции липшицевых поверхностей.

Пусть B_1 и B_2 два прямоугольника в пространстве $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m$, то есть $B_i = D_i \times D'_i$, где $D_i \subseteq \mathbb{R}^k$ и $D'_i \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, D_i и D'_i — компактные диски (или гомеоморфные им множества).

Определение 7.1. Пусть $f(B_1) \cap B_2 = f(C)$. Будем называть множество C полным для отображения f , если (см. рис. 7.1)

1. C связно;
2. $\text{pr}'(C) = D'_1$;
3. Для любого $z \in C$ отображение $\text{pr}|_{f(C \cap (D_1 \times \text{pr}'(z)))}$ является сюръекцией¹ на D_2 .

Здесь pr и pr' – проекции на $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Данные требования стандартны для систем типа подковы (см. [15], гл. 6). Мы будем обозначать через $\text{Lip}_c(x \rightarrow y)$ (или $\text{Lip}_c(u \rightarrow v)$) пространство липшицевых функций $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ с константой Липшица c и метрикой ρ из пространства C^0 .

Лемма 7.3. Рассмотрим произвольную константу $c \geq 0$, удовлетворяющую неравенству

$$\underline{u}_x - c\overline{u}_y > 0.$$

Тогда отображение f индуцирует отображение липшицевых функций

$$f_* : \text{Lip}_c(x \rightarrow y) \rightarrow \text{Lip}_{c'}(u \rightarrow v), \quad \text{где} \quad c' = \frac{c\overline{v}_y + \overline{v}_x}{\underline{u}_x - c\overline{u}_y}.$$

Если ψ_1 и ψ_2 из $\text{Lip}_c(x \rightarrow y)$, то

$$\frac{\underline{u}_x \underline{v}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}{\underline{u}_x + c\overline{u}_y} \rho(\psi_2, \psi_1) \leq \rho(f_*\psi_2, f_*\psi_1) \leq \frac{\underline{u}_x \overline{v}_y + \overline{u}_y \overline{v}_x}{\underline{u}_x - c\overline{u}_y} \rho(\psi_2, \psi_1)$$

Доказательство. Отображение $f_* : \text{Lip}_c(x \rightarrow y) \rightarrow \text{Lip}_{c'}(u \rightarrow v)$ устроено естественным образом: для $\psi \in \text{Lip}_c(x \rightarrow y)$ рассмотрим образ графика ψ . Необходимо проверить два факта: во-первых, требуется показать, что образ графика ψ , это график некоторой функции $f_*\psi : u \rightarrow v$, а, во-вторых, что полученная функция $f_*\psi$ липшицева.

Рассмотрим образ графика ψ и покажем, что если $x_1 \neq x_2$, то $u(x_1, \psi(x_1)) \neq u(x_2, \psi(x_2))$. Обозначим $F(x) = u(x, \psi(x)) : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$. Отображение F очевидно является непрерывным. Используя неравенства (7.3) и липшицевость ψ , получаем

$$\begin{aligned} \rho(F(x_2), F(x_1)) &= \rho(u(x_2, \psi(x_2)), u(x_1, \psi(x_1))) \geq \\ &\geq \underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \rho(\psi(x_2), \psi(x_1)) \geq (\underline{u}_x - c\overline{u}_y) \Delta x \end{aligned}$$

То есть отображение F инъективно. Покажем, что образ $F(D_1)$ содержит D_2 . Действительно, если $z \in \text{Int } D_2$ и $z \notin F(D_1)$, то в силу полноты компоненты C сферу ∂D_2 можно по $D_2 \setminus \{z\}$

¹Инъективность отображения $\text{pr}|_{f(C \cap (D_1 \times \text{pr}'(z)))}$ немедленно следует из условия $\underline{u}_x > 0$.

гомотопно стянуть в точку. Для построения нужной гомотопии потребуется произвольное сечение C горизонтальной плоскостью: $\Theta = C \cap (D_1 \times y)$, $y \in D'_1$. Искомая гомотопия получается из последовательного применения гомеоморфизма $(\text{pr} \circ f)^{-1}$ между ∂D_2 и $\partial \Theta$, гомотопии $\partial \Theta$ в точку по графику $\psi(x)$, как показано на рис. 7.2 и отображения f . Существование такой гомотопии противоречит нетривиальности n -ой гомотопической группы сферы² $\pi_k(D_2 \setminus \{z\}) = \mathbb{Z}$. Итак, $\text{Int } D_2 \subseteq F(D_1)$. Осталось заметить, что $\partial D_2 \subseteq F(D_1)$ так как $F(D_1)$ замкнуто.

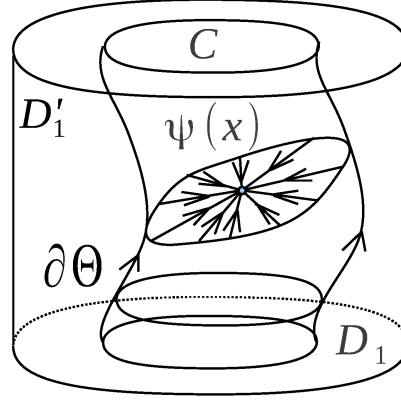


Рисунок 7.2: Гомотопия нижнего основания C в точку по графику ψ .

Итак, образ функции $\psi \in \text{Lip}_c(x \rightarrow y)$ есть некоторая функция $f_*\psi$ из u в v (см. рис. 7.1). Покажем, что $f_*\psi$ снова есть липшицева функция: пусть $u_i = u(x_i, \psi(x_i))$, $i = 1, 2$, тогда с помощью (7.3)

$$\rho(f_*\psi(u_2), f_*\psi(u_1)) = \rho(v(x_2, \psi(x_2)), v(x_1, \psi(x_1))) \leq (c\overline{v}_y + \overline{v}_x)\Delta x \leq \frac{c\overline{v}_y + \overline{v}_x}{\underline{u}_x - c\overline{u}_y}\Delta u.$$

То есть $f_*\psi \in \text{Lip}_c(u \rightarrow v)$. Осталось оценить расстояние между $f_*\psi_1$ и $f_*\psi_2$. Итак, рассмотрим любые u и x_i такие, что $u(x_i, \psi_i(x_i)) = u$. Тогда

$$\underline{u}_y \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)) - \overline{v}_x \Delta x \leq \rho(f_*\psi_2(u), f_*\psi_1(u)) \leq \overline{v}_y \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)) + \overline{v}_x \Delta x \quad (7.4)$$

Для Δx имеем

$$0 = \rho(u(x_2, \psi_2(x_2)), u(x_1, \psi_1(x_1))) \geq \underline{u}_x \Delta x - \overline{u}_y \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)).$$

Поставляя полученную оценку на Δx в (7.4) для $\rho_{12} = \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1))$ получаем

$$\frac{\underline{u}_x \underline{u}_y - \overline{u}_y \overline{v}_x}{\underline{u}_x} \rho_{12} \leq \rho(f_*\psi_2(u), f_*\psi_1(u)) \leq \frac{\underline{u}_x \overline{v}_y + \overline{u}_y \overline{v}_x}{\underline{u}_x} \rho_{12}. \quad (7.5)$$

²Точнее тому, что тождественное отображение сферы S^n в себя задает образующую n -ой гомотопической группы $\pi_n(S^n)$.

Для верхней оценки $\rho(f_*\psi_2(u), f_*\psi_1(u))$ осталось заметить, что для любых x_1 и x_2

$$\rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)) \leq \rho(\psi_2, \psi_1) + c\Delta x \leq \rho(\psi_2, \psi_1) + \frac{c\overline{u}_y}{\underline{u}_x} \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)).$$

Выражая $\rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1))$ и подставляя в (7.5), получаем искомую оценку сверху. Для нижней оценки необходимо в качестве x_2 выбрать точку в которой расстояние $\rho(\psi_2(x), \psi_1(x))$ максимально: $\rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_2)) = \rho(\psi_2, \psi_1)$. Тогда

$$\rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)) \geq \rho(\psi_2, \psi_1) - c\Delta x \geq \rho(\psi_2, \psi_1) - \frac{c\overline{u}_y}{\underline{u}_x} \rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1)).$$

Опять же выражая $\rho(\psi_2(x_2), \psi_1(x_1))$ и подставляя в (7.5), получаем нужную оценку снизу. $\square$

7.4 Гиперболическая липшицева динамика

Рассмотрим на B динамическую систему с дискретным временем: $f : B \rightarrow B$. Здесь f – липшицево отображение, а B – это компактная область³ в $\mathbb{R}^{k+m}$. Возможно, что $f(x) \notin B$ для некоторых $x \in B$. В этом случае мы считаем, что точка x после одной итерации перестает участвовать в динамике. Пусть B разрезано на прямоугольники, т.е. дано N прямоугольников $B_i = D_i \times D'_i$ в $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m$, причем прямоугольники B_i попарно не пересекаются, и $B = \sqcup_i B_i$. Более того, образы прямоугольников B_i и B_j не должны пересекаться в B_k при любых k и $i \neq j$.

Мы будем обозначать через f^{ij} ограничение f на B_i , причем только для тех $x \in B_i$, что $f(x) \in B_j$, $f^{ij} : B_i \rightarrow B_j$. Если образ $f(B_i)$ не пересекается с B_j , то отображение f^{ij} не определено. Системе отображений f^{ij} соответствует конечный ориентированный граф Γ с N вершинами. Из вершины с номером i ведет стрелка в вершину с номером j , если отображение f^{ij} определено, то есть если $f(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$. Естественно предположить, что в Γ есть хотя бы один цикл, иначе в динамической системе $f : B \rightarrow B$ не участвует ни одной точки.

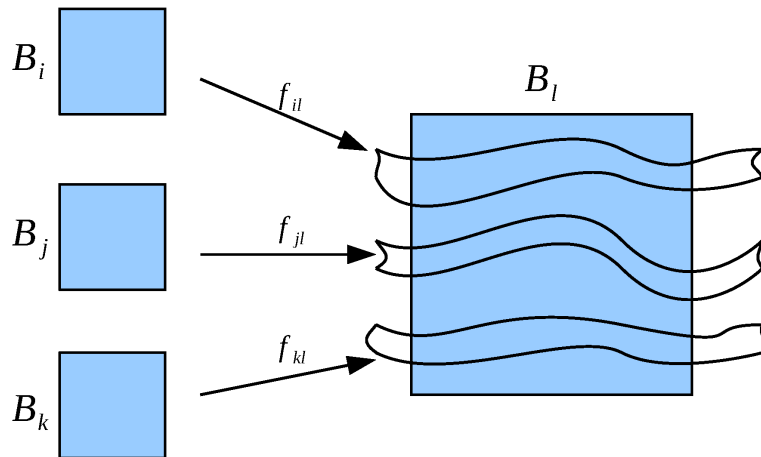


Рисунок 7.3: Схематичное изображение образов отображений f_{il} , f_{jl} и f_{kl} .

³ B может быть $(k+m)$ -мерным компактным подмногообразием в $\mathbb{R}^N$, $N \geq k+m$, что не принципиально для дальнейшего.

Для произвольного пути $\sigma = (i_1 \dots i_k)$ в графе Γ мы будем писать

$$f^\sigma = f^{i_1 \dots i_k} = f^{i_{k-1} i_k} \circ \dots \circ f^{i_1 i_2}$$

Наша цель – написать достаточные условия того, что липшицева динамическая система $f : B \rightarrow B$ полностью определяется символической динамикой графа Γ . Иными словами, $B = \sqcup B_i$ задает марковское разбиение для динамической системы $f : B \rightarrow B$.

Итак, потребуем, чтобы каждое отображение f_{ij} удовлетворяло условиям из предыдущего параграфа, а именно:

Определение 7.2. Будем говорить, что липшицева динамическая система $f : B \rightarrow B$ допускает разрезание на прямоугольники (или предмарковское разбиение), если существует конечный набор прямоугольников B_i , $B = \sqcup B_i$ такой, что

1. Для каждого отображения $f^{ij} = f|_{B_i \cap f^{-1}(B_j)}$ определены такие липшицевы константы $\overline{u}_x^{ij}$, $\underline{u}_x^{ij}$ и т.д., что выполняются условия (7.1);
2. $(f(B_i) \cap f(B_j)) \cap B_k = \emptyset$ при любых k и $i \neq j$;
3. Компоненты $f^{ij}(B_i) \cap B_j$ являются полными для f^{ij} .

Отметим, что обратимость f не предполагается.

Определение 7.3. Здесь и далее путь в Γ – это конечная или бесконечная последовательность вершин $i_0 \dots i_N$ последовательно соединенных стрелками в Γ . Вершины и стрелки могут повторяться. Если же вершины не повторяются, то такой путь будем называть простым.

Основные результаты о фрактальной структуре липшицевой динамической системы $f : B \rightarrow B$ в данной главе получены в предположении, что f удовлетворяет набору условий, которые для удобства мы объединим и назовем «условием липшицевой гиперболичности»:

Определение 7.4. Мы будем говорить, что липшицева динамическая система $f : B \rightarrow B$ на предмарковском разбиении $B = \sqcup_i B_i$ удовлетворяет условиям липшицевой гиперболичности, если

- (I) Существуют такие неотрицательные константы $c_i \geq 0$, что выполняются неравенства

$$\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{c_i \overline{v}_y^{ij} + \overline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij}} \leq c_j \quad \text{для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma; \quad (7.6)$$

- (II) Константы $c_i \geq 0$ можно выбрать так, что для каждого простого цикла⁴ $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k i_1)$, выполняется условие

⁴Цикл $(i_0, \dots, i_N, i_0)$, не содержащий повторяющихся вершин, будем называть простым.

$$\lambda_\sigma = \lambda_{i_1 i_2} \lambda_{i_2 i_3} \dots \lambda_{i_k i_1} < 1, \quad (7.7)$$

где

$$\lambda_{ij} = \frac{u_x^{ij} \overline{v_y}^{ij} + \overline{u_y}^{ij} \overline{v_x}^{ij}}{\overline{u_x}^{ij} - c_i \overline{u_y}^{ij}}. \quad (7.8)$$

Лемма 7.4. *Предположим, что динамическая система $f : B \rightarrow B$ удовлетворяет условиям липшицевой гиперболичности. Тогда для произвольного бесконечного влево пути $(\dots i_{-1} i_0)$ в графе Γ , множество точек z таких, что $f^k(z) \cap B_{i_k} \neq \emptyset$ при всех⁵ $k \leq 0$, представляет собой график некоторой липшицевой функции из $\text{Lip}_{c_{i_0}}(x \rightarrow y)$ в прямоугольнике B_{i_0} .*

Доказательство. Обозначим максимальное из λ_σ для простых циклов σ через λ . Очевидно, $\lambda < 1$. В силу конечности графа Γ .

Пусть (x_i, y_i) – координаты на прямоугольнике B_i . Для каждого B_i рассмотрим пространство липшицевых функций $\text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i)$. Согласно условию (i) и лемме 7.3 корректно определены отображения $f_*^{ij} : \text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i) \rightarrow \text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$. Более того, если σ – простой цикл, то отображение f_*^σ является сжимающим в λ раз.

Для бесконечной влево последовательности $(\dots i_{-1} i_0)$ в силу конечности графа Γ найдется номер j встречающийся в ней счетное число раз на местах с номерами $\dots < k_{-1} < k_0 \leq 0$.

Рассмотрим пространство X семейств $\{\psi_m\}_{m \leq 0}$ функций из $\text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$ с метрикой

$$\rho(\{\psi_m\}_{m \leq 0}, \{\phi_m\}_{m \leq 0}) = \sup_{m \leq 0} \rho(\psi_m, \phi_m).$$

Пространство X полно, так как полно пространство $\text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$.

На X отображение f в соответствии с последовательностью $(\dots i_{-1} i_0)$ индуцирует отображение $F : X \rightarrow X$ по правилу

$$F(\{\psi_m\}_{m \leq 0}) = \{\phi_m\}_{m \leq 0}, \text{ где } \phi_m = f_*^{\sigma_m} \psi_{m-1} \text{ и } \sigma_m = (i_{k(m-1)} i_{k(m-1)+1} \dots i_{k_m}).$$

Другими словами, отображение F переводит ψ_{m-1} вдоль цикла $(i_{k(m-1)} \dots i_{k_m})$ и увеличивает его номер на 1. Отображение F является сжимающим в $\lambda < 1$ раз и, в силу полноты X , имеет ровно одну неподвижную точку $\{\psi_m^0\}_{m \leq 0}$. Итак, мы нашли функцию $\psi \in \text{Lip}_{i_0}(x \rightarrow y)$, $\psi = f_*^{i_{k_0} \dots i_0}(\psi_0^0)$, то есть ψ это образ ψ_0^0 вдоль конечного отрезка пути $(i_{k_0} \dots i_0)$. По построению ψ , если точка $z \in B_{i_0}$ лежит на графике ψ , то $f^k(z) \cap B_{i_k} \neq \emptyset$ при $k \leq 0$.

Осталось показать обратное: пусть точка $z \in B_{i_0}$ не лежит на графике ψ , тогда в силу замкнутости графика ψ расстояние $d = \text{dist}(z, \text{graph } \psi) > 0$. Поскольку

$$\text{diam}(f_*^{i_{k_m} \dots i_0} \text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)) \leq \lambda^{|m|} \text{diam}(f_*^{i_{k_0} \dots i_0} \text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)) = C \lambda^{|m|},$$

⁵ Т.е. множество таких $z \in B_{i_0}$, что для каждого $k \leq 0$ найдется $z' \in B_{i_k}$ такой, что $f^{|k|}(z') = z$.

то найдется номер m такой, что z не принадлежит образу $f_*^{i_{k_m} \dots i_0}$ ни одного графика функции из $\text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$. Следовательно $f^{k_m}(z) \cap B_{i_{k_m}} = \emptyset$. $\square$

Замечание 7.1. Для каждого $\delta > 0$ существует такой отрезок пути $(i_K, \dots, i_0)$ длины $|K|$, что множество точек z : $f^k(z) \cap B_{i_k} \neq \emptyset$, $K \leq k \leq 0$, является объединением графиков функций из некоторого множества $L_K \subseteq \text{Lip}_{c_{i_0}}(x \rightarrow y)$, причем диаметр L_K не превосходит δ . В качестве L_K можно выбрать образ $\text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$ при отображении $f^{i_{k_m} \dots i_0}$ для достаточно большого $k_m = K$.

Условие леммы 7.4 на существование констант c_i в точности означает совместность следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} c_i \geq 0 & \forall 1 \leq i \leq N; \\ \underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij} > 0 & \forall (ij) \in \Gamma; \\ \frac{c_i \overline{v}_y^{ij} + \overline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij}} \leq c_j & \forall (ij) \in \Gamma; \\ \lambda_{i_1 i_2} \lambda_{i_2 i_3} \dots \lambda_{i_k i_1} < 1 & \forall \text{ простого цикла } \sigma. \end{cases} \quad (7.9)$$

Совместность системы (7.9) достаточно трудно проверяема из-за ее нелинейности. Однако, заменив в последних двух неравенствах $\overline{u}_y^{ij}$ на 0 мы немедленно получим линейную систему неравенств на c_i , совместность которой является необходимым условием. При этом, если константы $\overline{u}_y^{ij}$ не слишком велики, то решение исходной системы (7.9) можно найти среди решений упрощенной линейной системы.

7.5 Символическая динамика на графе

Обозначим множество путей в графе Γ бесконечных в обе стороны через Σ_Γ ,

$$\Sigma_\Gamma = \left\{ (\dots i_{-3} i_{-2} i_{-1} \cdot i_0 i_1 i_2 \dots), \text{ где } i_k i_{k+1} \text{ есть стрелка в } \Gamma \text{ при любом } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Таким образом, рассматриваются такие бесконечные в обе стороны последовательности вершин, что две последовательные вершины соединены стрелкой в графе. Каждый путь в Σ_Γ (см. определение 7.3) имеет выделенную «начальную» вершину i_0 , обозначаемую точкой перед ней.

На множестве Σ_Γ естественным образом задается компактно открытая топология из вложения Σ_Γ в множество всех отображений $C(\mathbb{Z}, \Gamma)$ из $\mathbb{Z}$ в множество вершин Γ . Таким образом, предбазу топологии на Σ_Γ задают цилиндры вида

$$\Sigma_\Gamma(i_k^0, \dots, i_{k+t}^0) = \left\{ (\dots, i_{-2} i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots) \in \Sigma_\Gamma : i_k = i_k^0, \dots, i_{k+t} = i_{k+t}^0 \right\}.$$

Очевидно, что Σ_Γ – регулярное (а значит хаусдорфово) топологическое пространство, так как $C(\mathbb{Z}, \Gamma)$ регулярно. На Σ_Γ классическим образом определена топологическая цепь Маркова $s : \Sigma_\Gamma \rightarrow \Sigma_\Gamma$ (сдвиг влево).

Во избежание путаницы в терминологии дадим стандартное

Определение 7.5. Ориентированный граф Γ (и соответствующая ему марковская цепь) называется связным, если из каждой вершины существует путь в каждую.

Отметим, что если f обратимо (точнее $\underline{u}_x^{ij} \underline{v}_y^{ij} - \overline{u}_y^{ij} \overline{v}_x^{ij} > 0$ для каждой стрелки в графе Γ , см. лемму 7.1), то разбиение $B = \sqcup B_i$ является предмарковским также и для f^{-1} . Отображению f^{-1} отвечает граф Γ^* , построенный по Γ обращением стрелок.

Для описания нетривиальных возвращений системы нам потребуется следующее классическое

Определение 7.6. Точка $x \in B$ называется неблуждающей, если для любой ее открытой окрестности U найдёт номер N такой, что пересечение $U \cap f^N(U)$ не пусто. Множество всех неблуждающих точек будем обозначать через $NW(f)$.

Множество $NW(f)$ конечно содержит все периодические точки, а также все минимальные инвариантные множества и все рекуррентные точки (см. [15] гл.3). Обозначим через $S(f)$ – множество таких точек $x \in B$, что $f^k(x) \in B$ при всех⁶ $k \in \mathbb{Z}$. Асимптотические свойства динамической системы $f : B \rightarrow B$ конечно же описываются с помощью ее ограничения $f : S(f) \rightarrow S(f)$.

Теорема 7.1. Предположим, что липшицева динамическая система $f : B \rightarrow B$ обладает предмарковским разбиением $B = \sqcup_{i=1}^N B_i$. Предположим также, что f обратимо:

$$\underline{u}_x^{ij} \underline{v}_y^{ij} - \overline{u}_y^{ij} \overline{v}_x^{ij} > 0 \text{ для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma,$$

и для f и f^{-1} выполнены условия липшицевой гиперболичности (по определению 7.4) с константами c_i и d_i соответственно, причем $c_i d_i < 1$ для $1 \leq i \leq N$. Тогда существует гомеоморфизм $\Phi_\Gamma : \Sigma_\Gamma \rightarrow S(f)$, сопрягающий динамическую систему $f : S(f) \rightarrow S(f)$ и марковский сдвиг $s : \Sigma_\Gamma \rightarrow \Sigma_\Gamma$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\Gamma & \xrightarrow{s} & \Sigma_\Gamma \\ \downarrow \Phi_\Gamma & & \downarrow \Phi_\Gamma \\ S(f) & \xrightarrow{f} & S(f) \end{array} \quad (7.10)$$

Более того, $NW(f) \subseteq S(f)$, а если граф Γ связан, то $NW(f)$ и $S(f)$ совпадают.

Доказательство. Сначала покажем, что для каждого пути $\sigma = (\dots i_{-1}.i_0 \dots)$ из Σ_Γ существует ровно одна точка z_σ из B такая, что

$$f^k(z_\sigma) \in B_{i_k} \text{ для всех } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.11)$$

Согласно лемме 7.4 множество точек удовлетворяющих условию (7.11) для $k \leq 0$ является графиком некоторой функции $\psi_\sigma^- \in \text{Lip}_{c_{i_0}}(x \rightarrow y)$. Аналогично для $k \geq 0$ – это график некоторой

⁶Напомним, что если $f^k(x) \in B$ и $f^{k+1}(x) \notin B$ для некоторого $k \geq 0$, то мы предполагаем, что точка x перестает участвовать в динамической системе $f : B \rightarrow B$ после k -ой итерации. Аналогично, если $f^k(x) \in B$ и $f^{k-1}(x) \notin B$ для некоторого $k \leq 0$.

функции $\psi_\sigma^+ \in \text{Lip}_{d_{i_0}}(y \rightarrow x)$. Поскольку $c_{i_0}d_{i_0} < 1$, то графики функций ψ_σ^- и ψ_σ^+ пересекаются ровно в одной точке $z_\sigma \in B_{i_0}$.

Положим по определению

$$\Phi_\Gamma : \Sigma_\Gamma \rightarrow B, \text{ и } \Phi_\Gamma(\sigma) = z_\sigma \text{ для любого пути } \sigma \in \Sigma_\Gamma.$$

Отображение Φ_Γ инъективно, так как прямоугольники B_i попарно не пересекаются (см. определение 7.2). Более того $\Phi_\Gamma(\Sigma_\Gamma) = S(f)$. По построению Φ_Γ , диаграмма (7.10) коммутативна.

Докажем теперь непрерывность Φ_Γ . Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует такой номер $K > 0$, что образ цилиндра $\Phi_\Gamma(\Sigma(i_{-K}, \dots, i_K))$ лежит в ε окрестности точки $\Phi_\Gamma(\sigma)$. Действительно, если $\delta > 0$, то, согласно замечанию 7.1, можно выбрать такой номер $K = K(\delta)$ и множества $L_K \subseteq \text{Lip}_{c_{i_0}}(x \rightarrow y)$ и $R_K \subseteq \text{Lip}_{d_{i_0}}(y \rightarrow x)$ диаметра меньше δ , что

$$\begin{aligned} \text{если } f^k(z) \in B_{i_k} \text{ для } -K \leq k \leq 0, \text{ то } z \in \text{graph } \psi^+, \text{ для некоторого } \psi^+ \in L_K; \\ \text{если } f^k(z) \in B_{i_k} \text{ для } 0 \leq k \leq K, \text{ то } z \in \text{graph } \psi^-, \text{ для некоторого } \psi^- \in R_K; \end{aligned}$$

Очевидно, что и образ цилиндра $\Phi_\Gamma(\Sigma(i_{-K}, \dots, i_K))$ (и, следовательно, $\Phi_\Gamma(\sigma)$) лежит как в $\text{graph } L_K$ так и в $\text{graph } R_K$, где

$$\text{graph } L_K = \bigcup_{\psi^+ \in L_K} \text{graph } \psi^+ \quad \text{и} \quad \text{graph } R_K = \bigcup_{\psi^- \in R_K} \text{graph } \psi^-.$$

Найдем расстояние между двумя произвольными точками (x_i, y_i) , $i = 1, 2$ из пересечения $\text{graph } L_K \cap \text{graph } R_K$. Поскольку $y_i = \psi_i^+(x_i)$ и $x_i = \psi_i^-(y_i)$, где $\psi_i^+ \in L_K$ и $\psi_i^- \in R_K$, то

$$\Delta y \leq c_{i_0} \Delta x + \delta \text{ и } \Delta x \leq d_{i_0} \Delta y + \delta.$$

Значит

$$\Delta x \leq \frac{1 + d_{i_0}}{1 - d_{i_0}c_{i_0}} \delta \text{ и } \Delta y \leq \frac{1 + c_{i_0}}{1 - d_{i_0}c_{i_0}} \delta$$

Итак, при достаточно маленьком δ образ цилиндра $\Phi_\Gamma(\Sigma(i_{-K}, \dots, i_K))$ лежит в ε окрестности $\Phi_\Gamma(\sigma)$, и непрерывность Φ_Γ доказана.

Множество Σ_Γ компактно, так как множество $C(\mathbb{Z}, \Gamma)$ компактно (так как количество вершин графа Γ конечно, а множество $\mathbb{Z}$ – счетно), а Σ_Γ есть замкнутое подмножество в $C(\mathbb{Z}, \Gamma)$. Отображение Φ_Γ инъективно, а значит является гомеоморфизмом между Σ_Γ и $S(f) = \Phi_\Gamma(\Sigma_\Gamma)$.

Если $x \notin S(f)$, то найдется такой номер $k \in \mathbb{Z}$, что $f^k(x) \notin B$. В силу непрерывности f и замкнутости B у точки x найдется такая окрестность U , что $f^k(U) \not\subset B$. Поэтому точка x не может принадлежать $\text{NW}(f)$. Итак $\text{NW}(f) \subseteq S(f)$.

Осталось доказать, что если ориентированный граф Γ связан, то $\text{NW}(f) \supseteq \Phi_\Gamma(\Sigma_\Gamma)$. Действительно, множество $\text{NW}(f)$ замкнуто (см. [15]) и содержит все периодические точки отображения f . Поэтому

$$\overline{\{\text{period}\}_f} \subseteq \text{NW}(f),$$

где $\{\text{period}\}_f$ – множество периодических точек отображения f . При этом

$$\{\text{period}\}_f = \Phi_\Gamma(\{\text{period}\}_s),$$

С другой стороны $\Sigma_\Gamma = \overline{\{\text{period}\}_s}$, так как граф Γ связан. Поэтому

$$\Phi_\Gamma(\Sigma_\Gamma) = \Phi_\Gamma(\overline{\{\text{period}\}_s}) \subseteq \overline{\Phi_\Gamma\{\text{period}\}_s} = \overline{\{\text{period}\}_f} \subseteq \text{NW}(f)$$

Что и требовалось. □

Замечание 7.2. Найденное полусопряжение Φ_Γ позволяет по графу Γ найти скорость роста орбит f и топологическую энтропию (см. [15] гл. 3):

$$h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f|_{\text{NW}(f)}) = h_{\text{top}}(s)$$

Важно отметить, что теорема 7.1 автоматически влечет структурную устойчивость в следующем смысле:

Теорема 7.2. *Предположим, что динамическая система $f : B \rightarrow B$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Если*

- (i) *Компоненты $f^{ij}(\text{Int } B_i) \cap B_j$ являются полными для f^{ij} ;*
- (ii) *$c_i > 0$ и $d_i > 0$ для любого i ;*
- (iii) *Для любой стрелки (ij) в Γ*

$$\frac{c_i \overline{v}_y^{ij} + \overline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij}} < c_j \quad \text{и} \quad \frac{d_j \overline{x}_u^{ji} + \overline{x}_v^{ji}}{\underline{y}_v^{ji} - d_j \overline{y}_u^{ji}} < d_i;$$

то любая достаточно близкая к ней в липшицевой смысле динамическая система $g : B \rightarrow B$ также будет удовлетворять условиям теоремы 7.1. Более того отображения Φ_Γ и $\tilde{\Phi}_\Gamma$ из теоремы 7.1 для f и g будут близки в C^0 метрике:

$$\rho(\Phi_\Gamma, \tilde{\Phi}_\Gamma) \leq C(\rho(f, g))^\gamma,$$

для некоторых констант $C > 0$ и $0 < \gamma < 1$.

Близость в липшицевом смысле означает, что (i) $\rho(f, g) < \varepsilon$ в C^0 метрике и (ii) $f - g$ есть липшицево отображение с константой Липшица ε .

Доказательство. Рассмотрим предмарковское разбиение $B = \sqcup_i B_i$ для динамической системы f . Покажем, что это же разбиение является предмарковским для g , если g достаточно близко к f в липшицевом смысле.

В силу компактности B_i отображения g^{ij} и f^{ij} определены и не определены одновременно. Условие 2 в определении предмарковости сохраняется в силу компактности B_i . Условие же 3 выполняет ввиду предположения (i).

Так как f и g близки как липшицевы отображения, то условие 1 очевидно выполнено и для g с некоторыми константами $\widetilde{u_x^{ij}}, \widetilde{u_y^{ij}}$ и т.д. и, значит $B = \sqcup_i B_i$ есть предмарковское разбиение для g . Причем константы Липшица отображений g^{ij} близки к константам Липшица отображений f^{ij} . Следовательно

$$\widetilde{u_x^{ij}} \widetilde{v_y^{ij}} - \widetilde{u_y^{ij}} \widetilde{v_x^{ij}} > 0 \text{ для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma,$$

и отображения g^{ij} обратимы. Осталось проверить выполнение условий леммы 7.4 для g и g^{-1} . Нетрудно убедиться, что подойдут $\tilde{c}_i = c_i$ и $\tilde{d}_i = d_i$. Действительно, благодаря предположениям (ii) и (iii) все нестрогие неравенства в условиях леммы 7.4 превращаются в строгие, и, значит, выдерживают малое шевеление.

Осталось показать близость отображений Φ_Γ и $\tilde{\Phi}_\Gamma$. Пусть $\sigma = (\dots i_{-1}.i_0 i_1 \dots) \in \Sigma_\Gamma$, и $\Phi_\Gamma(\sigma) = (x_1, y_1) \in B_{i_0}$ и $\tilde{\Phi}_\Gamma(\sigma) = (x_2, y_2) \in B_{i_0}$. Зафиксируем $n > 0$, положим $(x_1, y_1) = f^n(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, $(x_2, y_2) = g^n(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ и $(x, y) = f^n(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, и воспользуемся леммой 7.3:

$$\Delta y \leq \rho(y_1, y) + \rho((x, y), (x_2, y_2)) \leq \lambda_{i_{-n}i_{-n+1}} \dots \lambda_{i_{-1}i_0} \text{diam } B_{i_{-n}} + c_{i_0} \Delta x + \rho_0(f^n, g^n).$$

Здесь λ_{ij} из леммы 7.4, а ρ_0 – расстояние в метрике C^0 . С одной стороны, так как f – липшицево отображение с некоторой константой Липшица A (без ограничения общности можно считать, что $A > 1$), то

$$\begin{aligned} \rho(f^n(z), g^n(z)) &\leq \rho(f^n(z), f(g^{n-1}(z))) + \rho(f(g^{n-1}(z)), g^n(z)) \leq \\ &\leq A \rho(f^{n-1}(z), g^{n-1}(z)) + \rho_0(f, g). \end{aligned}$$

Применяя индукцию, получаем, что $\rho_0(f^n, g^n) \leq \frac{A^n - 1}{A - 1} \rho_0(f, g) < \frac{A^n - 1}{A - 1} \varepsilon$. С другой стороны, в силу условия сжатия вдоль простых циклов, существуют такие положительные константы B и $\lambda < 1$, что независимо от σ неравенство $\lambda_{i_{-n}i_{-n+1}} \dots \lambda_{i_{-1}i_0} < B \lambda^n$ выполнено при любом n . Итак,

$$\Delta y \leq B \text{diam } B_{i_{-n}} \lambda^n + \frac{A^n - 1}{A - 1} \varepsilon + c_{i_0} \Delta x \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (7.12)$$

Найдем первое такое n_ε , что $\lambda^{n_\varepsilon+1} \leq A^{n_\varepsilon+1} \varepsilon$. Тогда $\lambda^{n_\varepsilon} > A^{n_\varepsilon} \varepsilon$ и $n_\varepsilon < \frac{-\log \varepsilon}{\log A - \log \lambda}$. Поэтому $A^{n_\varepsilon} \varepsilon < \varepsilon \frac{-\log \lambda}{\log A - \log \lambda}$. Положим $\gamma_1 = \frac{-\log \lambda}{\log A - \log \lambda} > 0$, $\gamma_1 < 1$. Тогда неравенство (7.12) для $n = n_\varepsilon$ принимает вид

$$\Delta y \leq \alpha \varepsilon^{\gamma_1} + c_{i_0} \Delta x,$$

где $\alpha > 0$ некоторая константа. Аналогично, $\Delta x \leq \beta \varepsilon^{\gamma_2} + d_{i_0} \Delta y$. Поскольку $c_{i_0} d_{i_0} < 1$, то $\Delta x \leq \frac{d_{i_0} \alpha + \beta}{1 - c_{i_0} d_{i_0}} \varepsilon^\gamma$ и $\Delta y \leq \frac{\alpha + c_{i_0} \beta}{1 - c_{i_0} d_{i_0}} \varepsilon^\gamma$ для $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, что и требовалось. $\square$

Теорема 7.2 о структурной устойчивости как обычно дает возможность использовать предлагаемую технику для исследования реальных динамических систем на приближенных моделях.

7.6 Размерность аттрактора матричной итерационной системы

В данном параграфе доказана теорема, обобщающая классическую теорему (см. гл. 9 [79]) о размерности аттрактора итерационной системы. Для подсчета размерности полусамоподобного марковского аттрактора можно использовать технику развитую в [80, 81]. Однако, дословное применение этой техники невозможно, если марковская итерационная система не является гиперболической⁷. В теореме 7.4 условие гиперболичности заменено на более слабое требование сжатия вдоль простых циклов (см. определение 7.7). Теорема 7.4 сформулирована в терминах, более удобных для подсчета размерности множества неблуждающих точек по марковскому разбиению.

Итак, пусть дано N попарно не пересекающихся метрических пространств D_i , $i = 1, \dots, N$. Если (ij) – стрелка в ориентированном графе Γ , то определено отображение S^{ij} из множества D_i в множество D_j . Каждое из отображений S^{ij} предполагается липшицевым, точнее

$$|S^{ij}(x_2) - S^{ij}(x_1)| \leq \lambda_{ij} |x_2 - x_1|, \text{ где } \lambda_{ij} > 0. \quad (7.13)$$

Такой набор будем называть матричной итерационной системой если для каждого простого цикла $\sigma = (i_0 \dots i_k i_0)$ выполнено неравенство (7.7):

Определение 7.7. Матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$ называется сжимающей вдоль простых циклов, если для всех простых циклов выполнено условие (7.7).

Условие сжатия вдоль простых циклов является более естественным для матричной итерационной системы, чем условие гиперболичности, так как оно не меняется при заменах метрик D_i на пропорциональные. Сжатие вдоль простых циклов фактически означает, что отображение $S^\sigma = S^{i_k i_0} \circ \dots \circ S^{i_1 i_2} \circ S^{i_0 i_1}$ является сжимающим для любого достаточно длинного пути σ .

Набор компактных множеств $F = (F_1, \dots, F_N)$, $F_i \subseteq D_i$, хотя бы одно из которых не пусто, называется аттрактором матричной итерационной системы, если

$$F_i = \bigcup_{j=1}^N S^{ji}(F_j) \text{ для любого } i. \quad (7.14)$$

Здесь и далее для упрощения записи $S^{ij}(F_i) = \emptyset$, если отображение S^{ij} не определено. Для каждого набора компактных множеств $E = (E_1, \dots, E_N)$, $E_i \subseteq D_i$, определим отображение

⁷Итерационная система называется гиперболической, если каждое входящее в нее отображение является сжимающим.

$$S(E) = (\bigcup_{i=1}^N S^{i1}(E_i), \dots, \bigcup_{i=1}^N S^{iN}(E_i)).$$

В этом случае аттрактор F является неподвижной точкой отображения S .

Теорема 7.3. Если все пространства D_i полны, то для любой матричной итерационной системы $(S^{ij})_{i,j=1}^N$, существует и единственный аттрактор F такой, что $F_i \neq \emptyset$ для любого i . Более того

$$F_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)_i \quad 1 \leq i \leq N$$

для любого такого набора E непустых компактных множеств, что $(S(E))_i \subseteq E_i$ для любого i .

Доказательство. Положим Y_i – метрическое пространство всех непустых компактных подмножеств D_i с метрикой Хаусдорфа, а $Y = Y_1 \times \dots \times Y_N$ с метрикой

$$\rho(E, E') = \max_i \rho(E_i, E'_i).$$

Так как пространство D_i полно, то Y_i полно, и, следовательно Y также полно. Применим принцип сжимающих отображений. Вообще говоря, само отображение S может не являться сжимающим на Y , так как возможно $\lambda_{ij} > 1$ для некоторых i и j . Однако, условие сжатия вдоль простых циклов гарантирует, что найдется такие число $0 < \lambda < 1$ и достаточно большой номер m , что $0 < \lambda_\sigma < \lambda < 1$ для любого пути σ длины m или больше. Тогда если $k \geq m$, то

$$\begin{aligned} \rho(S^k(E), S^k(E')) &= \max_j (S^k(E)_j, S^k(E')_j) = \\ &= \max_j \left(\bigcup_{i_1, \dots, i_k} S^{i_1 \dots i_k j}(E_{i_1}), \bigcup_{i_1, \dots, i_k} S^{i_1 \dots i_k j}(E'_{i_1}) \right) \leq \\ &\leq \max_{i_1, \dots, i_k, j} (S^{i_1 \dots i_k j}(E_{i_1}), S^{i_1 \dots i_k j}(E'_{i_1})) < \lambda \rho(E, E'). \end{aligned}$$

Таким образом отображение $S^k : Y \rightarrow Y$ является сжимающим при любом $k \geq m$. Поэтому отображение S имеет единственную неподвижную точку $F \in Y$ и $S^k(E) \rightarrow F$ для любого $E \in Y$ при $k \rightarrow +\infty$. Если $S(E)_i \subseteq E_i$ для всех i , то и $S^{k+1}(E)_i \subseteq S^k(E)_i$. Поскольку набор непустых компактных множеств $(\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)_i)_{i=1}^N$ так же неподвижен относительно S , то он совпадает с F . $\square$

Замечание 7.3. Если искать аттрактор $F = (F_1, \dots, F_N)$, часть компонент которого может быть пустыми множествами, то единственность сразу теряется. Это хорошо видно на примере с линейными отображениями и $\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \delta_i^j$. Однако, если граф Γ связан, то это гарантирует, что аттрактор F не может содержать пустые компоненты.

Дальнейшие результаты будут сформулированы для примитивных графов, хотя, по-видимому, могут быть перенесены и на случай лишь связных графов при помощи спектрального разложения.

Определение 7.8. Граф Γ будем называть примитивным, если соответствующая ему 0,1-матрица ребер M_Γ примитивна, т.е. найдется номер k такой, что все элементы матрицы M_Γ^k будут положительными.

Примитивность графа Γ равносильна тому, что он связан, и наибольший общий делитель длин всех (простых) циклов равен 1.

Пусть $s \geq 0$. Обозначим $\Lambda_s = (\lambda_{ij}^s)_{i,j=1}^N$, т.е. каждый элемент матрицы Λ возвели в степень s , считая $\lambda_{ij}^s = 0$, если (ij) не является стрелкой в Γ . Если граф Γ примитивен, то нетрудно показать, что матрица Λ_s будет примитивной при любом $s \geq 0$. Тогда по теореме Перрона-Фробениуса матрица Λ_s будет иметь единственное максимальное по модулю собственное значение $\lambda_{\max}(\Lambda_s)$ и оно будет действительным (и совпадать со спектральным радиусом Λ_s). Более того, все компоненты соответствующего собственного вектора тоже будут положительны. Мы покажем, что размерность по Хаусдорфу аттрактора F определяется таким s , что максимальное по модулю собственное значение $\lambda_{\max}(\Lambda_s)$ равно 1. Или другими словами, спектральный радиус матрицы Λ_s равен 1.

На первый взгляд может показаться странным, что размерность F определяется с помощью такой не матричной операции как $\Lambda \mapsto \Lambda_s$. Чтобы проиллюстрировать естественность данной операции, предположим, что неравенства (7.13) превращаются в равенства. Пусть s – это размерность F , и $p_i = H^s(F_i)$ – s -мерный объем по Хаусдорфу множества F_i . Из (7.14) вытекает

$$p_j = \sum_{i=1}^N \lambda_{ij}^s p_i$$

Считая $p = (p_1, \dots, p_N)^T$, получаем $\Lambda_s p = p$. Поэтому, если $p_i < +\infty$ при всех i и $p \neq 0$, то по теореме Перрона-Фробениуса все координаты вектора p положительны и $\lambda_{\max}(\Lambda_s) = 1$. Таким образом, если s -мерный объем F_i не равен 0, то $s = \dim_H F$ определяется тем условием, что Λ_s имеет максимальное по модулю собственное значение равное 1.

Стоит сказать, что оба рассматриваемых условия – и условие $\lambda_{\max}(\Lambda_s) = 1$, и условие сжатия вдоль простых циклов – инвариантны относительно линейного растяжения метрик на X_i и перенумерации индексов. Условие $\lambda_{\max}(\Lambda_s) = 1$ тесно связано с уравнение Боувена (см. [82], гл. 5).

Через $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ обозначены соответственно размерность по Хаусдорфу и нижняя и верхняя размерности по Минковскому множества F .

Теорема 7.4. Предположим, что система $(S^{ij})_{i,j=1}^N$ удовлетворяет соотношениям

$$\lambda'_{ij} |x_2 - x_1| \leq |S^{ij}(x_2) - S^{ij}(x_1)| \leq \lambda_{ij} |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2.$$

Здесь $\Lambda = (\lambda_{ij})$ и $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ – матрицы, и $\lambda_{ij} \geq \lambda'_{ij} > 0$ если (ij) – стрелка в графе Γ и $\lambda_{ij} = \lambda'_{ij} = 0$ в противном случае. Пусть $F = (F_1, \dots, F_N)$ – аттрактор итерационной системы S^{ij} и объединение (7.14) дизъюнктное. Тогда, если граф Γ примитивен и матрица Λ сжимает вдоль простых циклов (см. условие (7.7)), то $\dim_H F_i = \dim_H F_j$ и $\overline{\dim}_B F_i = \overline{\dim}_B F_j$ при любых i и j , и

$$s' \leq \dim_H F_i \leq \overline{\dim}_B F_i \leq s,$$

где s и s' выбираются так, чтобы максимальное по модулю собственное значение матрицы Λ_s (соответственно $\Lambda'_{s'}$) равнялось 1 (здесь $\Lambda_s = (\lambda_{ij}^s)$ и $\Lambda'_{s'} = (\lambda_{ij}^{s'})$).

Доказательство. Покажем сначала, что размерности всех F_i совпадают. Поскольку граф Γ примитивен, то из вершины i найдется пусть σ в вершину j при любых i и j . Поскольку S^σ есть билипшицево отображение, то размерности (и по Хаусдорфу и по Минковскому) $S^\sigma(F_i)$ и F_j совпадают. Значит $\dim_H F_j \geq \dim_H F_i$ и $\overline{\dim}_B F_j \geq \overline{\dim}_B F_i$. Поменяв i и j местами получаем равенство.

Докажем оценку сверху. Пусть Σ_Γ^- обозначает множество всех бесконечных влево путей в графе Γ :

$$\Sigma_\Gamma^- = \{(\dots i_{-1}i_0) | (i_{k-1}i_k) - \text{стрелка в } \Gamma \text{ при любом } k\}.$$

Пусть $p = (p_1, \dots, p_N)^T > 0$ и $q = (q_1, \dots, q_N) > 0$ – собственные вектор и ковектор Λ_s и Λ_s^T соответствующие⁸ максимальному собственному значению 1. Тогда на Σ_Γ^- можно определить меру μ следующим образом. На предбазе топологии мера μ задается следующим образом:

$$\mu(\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k)) = q_{i_m} \lambda_{i_m i_{m+1}}^s \dots \lambda_{i_{k-1} i_k}^s p_{i_k}, \quad m \leq k \leq 0.$$

Здесь $\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k) \subseteq \Sigma_\Gamma^-$ состоит из последовательностей с $i_m, \dots, i_k$ на номерах $m, \dots, k$. Введенное таким образом μ является мерой, так как

$$\begin{aligned} \sum_j \mu(\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k j)) &= q_{i_m} \lambda_{i_m i_{m+1}}^s \dots \lambda_{i_{k-1} i_k}^s \left(\sum_j \lambda_{i_k j}^s p_j \right) = \\ &= q_{i_m} \lambda_{i_m i_{m+1}}^s \dots \lambda_{i_{k-1} i_k}^s p_{i_k} = \mu(\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k)) \\ \sum_j \mu(\Sigma_\Gamma^-(j i_m \dots i_k)) &= \left(\sum_j q_j \lambda_{j i_m}^s \right) \lambda_{i_m i_{m+1}}^s \dots \lambda_{i_{k-1} i_k}^s p_{i_k} = \\ &= q_{i_m} \lambda_{i_m i_{m+1}}^s \dots \lambda_{i_{k-1} i_k}^s p_{i_k} = \mu(\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k)) \end{aligned}$$

В том числе $\mu(\Sigma_\Gamma^-) = \langle p, q \rangle > 0$. Перенесем меру μ на $F = \sqcup_i F_i$. Для этого рассмотрим отображение $\Phi_\Gamma^- : \Sigma_\Gamma^- \rightarrow F$,

$$\Phi_\Gamma^-(\dots i_1 i_0) = \bigcap_{k \leq 0} F_{i_k \dots i_0},$$

где $F_{i_k \dots i_0} = (S^{i_{-1}i_0} \circ \dots \circ S^{i_k i_{k+1}})(F_{i_k})$. Очевидно $F_{i_{k-1} i_k \dots i_0} \subseteq F_{i_k \dots i_0}$, и множество $\bigcap_{k \leq 0} F_{i_k \dots i_0}$ состоит из одной точки в силу условия сжатия вдоль простых циклов. Поэтому отображение Φ_Γ^- определено корректно и очевидно сюръективно. Положим $\tilde{\mu} = \Phi_\Gamma^-(\mu)$.

⁸ A^T обозначает транспонированную матрицу.

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое $r > 0$ и построим покрытие F множествами диаметра не больше $r \max_i \text{diam } F_i$. Для этого рассмотрим множество Q_r состоящее из таких конечных путей $(i_k \dots i_0)$ в Γ , что

$$\lambda_{i_k i_{k+1}} \dots \lambda_{i_{-1} i_0} \leq r \text{ и } \lambda_{i_m i_{m+1}} \dots \lambda_{i_{-1} i_0} > r \quad \forall m > k.$$

Для любой последовательности $(\dots i_{-1} i_0) \in \Sigma_\Gamma^-$ найдется единственный номер k такой, что $(i_k \dots i_0) \in Q_r$. Поэтому множества $\Sigma_\Gamma^-(i_k \dots i_0)$, $(i_k \dots i_0) \in Q_r$ образуют покрытие Σ_Γ^- , и, следовательно, множества $F_{i_k \dots i_0}$, $(i_k \dots i_0) \in Q_r$ образуют покрытие F . Легко оценить диаметр этих множеств:

$$\text{diam } F_{i_k \dots i_0} \leq \lambda_{i_k i_{k+1}} \dots \lambda_{i_{-1} i_0} \text{diam } F_{i_k} \leq r \max_i \text{diam } F_i.$$

Таким образом, мы покрыли F множествами $F_{i_k \dots i_0}$, $(i_k \dots i_0) \in Q_r$, диаметра не больше $r \max_i \text{diam } F_i$. Осталось оценить количество элементов в покрытии, то есть $\#Q_r$:

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \tilde{\mu}(F) = \sum_{Q_r} \tilde{\mu}(F_{i_k \dots i_0}) \geq \sum_{Q_r} q_{i_k} \lambda_{i_k i_{k+1}}^s \dots \lambda_{i_{-1} i_0}^s p_{i_0} \geq \\ &\geq \#Q_r r^s \min_i p_i \min_j q_j \left(\min_{(ij) \in \Gamma} \lambda_{ij} \right)^s. \end{aligned}$$

Итак, поскольку все минимумы в предыдущем неравенстве положительны, получаем, что $\#Q_r \leq C r^{-s}$, и, значит, $\overline{\dim}_B F \leq s$.

Докажем теперь оценку снизу. Пусть p' и q' – собственные векторы $\Lambda'_{s'}$ и $\Lambda'^{T}_{s'}$ соответствующие максимальному собственному значению 1. Тогда на Σ_Γ^- аналогично μ определена борелевская мера μ' :

$$\mu'(\Sigma_\Gamma^-(i_m \dots i_k)) = q'_{i_m} \lambda'^{s'}_{i_m i_{m+1}} \dots \lambda'^{s'}_{i_{k-1} i_k} p'_{i_k}, \quad m \leq k \leq 0.$$

Положим $\tilde{\mu}' = \Phi_\Gamma^-(\mu')$ и покажем, что $\dim_H \tilde{\mu}' \geq s'$ (отсюда немедленно следует, что $\dim_H F \geq \dim_H \tilde{\mu}' \geq s'$).

Пусть d – это минимальное расстояние между F_{ji} и F_{ki} при $j \neq k$, то есть

$$d = \min_{i, j \neq k} \inf \{|x_2 - x_1|, x_1 \in F_{ji}, x_2 \in F_{ki}\}.$$

Тогда $d > 0$ так как по условию F_{ji} и F_{ki} компактны и не пересекаются при $j \neq k$. Обозначим через α максимальное из 1 и λ'^{σ} по всем простым путям σ в Γ . Если путь σ содержит циклы, то в силу условия (7.7) сжатия вдоль простых циклов немедленно получаем, что $\lambda'^{\sigma} < \alpha$. Таким образом, если $(i_k \dots i_0)$ и $(i'_k \dots i'_0)$ различны ($k \leq 0$), то

$$\text{dist}(F_{i_k \dots i_0}, F_{i'_k \dots i'_0}) \geq \frac{d}{\alpha} \lambda'_{i_{k+1} i_{k+2}} \dots \lambda'_{i_{-1} i_0}$$

Действительно, если m – это наибольший номер такой, что $i_m \neq i'_m$, тогда $F_{i_k \dots i_{m+1}} \subseteq F_{i_m i_{m+1}}$ и $F_{i'_k \dots i'_{m+1}} \subseteq F_{i'_m i_{m+1}}$ поэтому

$$\text{dist}(F_{i_k \dots i_0}, F_{i'_k \dots i'_0}) \geq \lambda'_{i_{m+1} i_{m+2}} \dots \lambda'_{i_{-1} i_0} d \geq \frac{\lambda'_{i_{k+1} i_{k+2}} \dots \lambda'_{i_m i_{m+1}}}{\alpha} \lambda'_{i_{m+1} i_{m+2}} \dots \lambda'_{i_{-1} i_0} d$$

Если $x \in F$ и $x = \Phi_{\Gamma}^{-}(\dots i_{-1} i_0)$ тогда (в силу сжатия вдоль простых циклов) для каждого положительного $r < \frac{d}{\alpha}$ найдется такой номер $k \leq 0$, что

$$\frac{d}{\alpha} \lambda'_{i_k i_{k+1}} \dots \lambda'_{i_{-1} i_0} \leq r < \frac{d}{\alpha} \lambda'_{i_{k+1} i_{k+2}} \dots \lambda'_{i_{-1} i_0}$$

Поэтому шар $U(x, r)$ радиуса r целиком лежит в $F_{i_k \dots i_0}$ и

$$\tilde{\mu}'(U(x, r)) = \tilde{\mu}'(U(x, r) \cap F) \leq \tilde{\mu}'(F_{i_k \dots i_0}) \leq \max_j q'_j \left(\frac{\alpha}{d} r \max_i \text{diam } F_i \right)^{s'} \max_i p'_i = C r^{s'},$$

и константа C не зависит от r . Теперь, если произвольное борелевское множество U пересекается с F , то $U \subseteq U(x, r)$ с $r = \text{diam } U$ и $x \in U \cap F$. Значит, $\tilde{\mu}'(U) \leq C(\text{diam } U)^{s'}$ и $\dim_H \tilde{\mu}' \geq s'$, что и требовалось. □

Естественно встают вопросы: сколько существует таких s , что $\lambda_{\max}(\Lambda_s) = 1$ и если одно, то как его найти (по крайней мере численно). Ответ на него дает следующее

Предложение 7.1. Пусть $A = (a_{ij})$ – примитивная $N \times N$ матрица с неотрицательными коэффициентами. Если A удовлетворяет условию (7.7) сжатия вдоль простых циклов, то функция $\lambda_{\max}(A_s)$ непрерывна и строго убывает по s . Причем $\lambda_{\max}(A_0) > 1$ и $\lambda_{\max}(A_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Итак, для любого простого цикла $(i_0, i_1, \dots, i_n, i_0)$ ($i_k \neq i_l$ при $k \neq l$) выполнено $0 \leq a_{i_0 i_1} \dots a_{i_n i_0} < \lambda < 1$. Зафиксируем достаточно большое K . Тогда для любого набора $(i_0, \dots, i_K)$ имеем $0 \leq a_{i_0 i_1} \dots a_{i_{K-1} i_K} < 1$. Так как коэффициенты матрицы A_s^K есть конечные суммы произведений вида $a_{i_0 i_1}^s \dots a_{i_{K-1} i_K}^s$, то они строго убывают по s . Значит (ввиду неразложимости $A_s^K > 0$), $\lambda_{\max}(A_s) = \sqrt[K]{\lambda_{\max}(A_s^K)}$ строго убывает по s .

Ввиду примитивности A_0 , матрица A_0^K состоит из элементов больших 1 и поэтому $\lambda_{\max}(A_0) > 1$. С другой стороны $\|A_s\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Поэтому $\lambda_{\max}(A_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Непрерывность $\lambda_{\max}(A_s)$ по s следует из непрерывности коэффициентов A_s по s и единственности максимального собственного значения. □

Итак, единственность такого s , что $\lambda_{\max}(\Lambda_s) = 1$, доказана. В свете предложения 7.1 теорема 7.4 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 7.4'. Если выполнены условия теоремы 7.4, а $d = \overline{\dim}_B F$ и $d' = \dim_H F$ то выполняются неравенства

$$\rho(\Lambda'_d) \leq 1 \leq \rho(\Lambda_d),$$

где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A .

7.7 Оценка размерностей множества неблуждающих точек

Теорема 7.4 является альтернативой к методам, предложенным в [80, 81] и представляется более удобной для оценки размерности множества не блуждающих точек динамической системы по марковскому разбиению. Для формулировки теоремы об оценках нам потребуются следующие обозначения.

Предположим, что для липшицевой динамической системы $f : B \rightarrow B$ выполнены условия теоремы 7.1. Обозначим $\Lambda_{\pm} = (\lambda_{ij}^{\pm})$, $\Lambda'_{\pm} = (\lambda_{ij}^{\pm'})$, где если (ij) стрелка в Γ , то⁹

$$0 < \lambda_{ij}^{-'} = \frac{\underline{u}_x^{ij} \underline{v}_y^{ij} - \overline{u}_y^{ij} \overline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} + c_i \overline{u}_y^{ij}} \leq \lambda_{ij}^{-} = \frac{\underline{u}_x^{ij} \overline{v}_y^{ij} + \overline{u}_y^{ij} \underline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij}} \quad (7.15)$$

и $\lambda_{ij}^{-} = \lambda_{ij}^{-'} = 0$ в противном случае. Аналогично, если (ij) стрелка в Γ , то¹⁰

$$0 < \lambda_{ji}^{+'} = \frac{\underline{y}_v^{ji} \underline{x}_u^{ji} - \overline{y}_u^{ji} \overline{x}_v^{ji}}{\underline{y}_v^{ji} + d_j \overline{x}_v^{ji}} \leq \lambda_{ji}^{+} = \frac{\underline{y}_v^{ji} \overline{x}_u^{ji} + \overline{y}_u^{ji} \underline{x}_v^{ji}}{\underline{y}_v^{ji} - d_j \overline{x}_v^{ji}} \quad (7.16)$$

и $\lambda_{ji}^{+} = \lambda_{ji}^{+'} = 0$ в противном случае.

Как обычно, если $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$ – матрица и $s \geq 0$, то через $A_s = (a_{ij}^s)$ обозначена матрица, каждый элемент которой возведен в степень¹¹ s .

Теорема 7.5. *Предположим, что липшицева динамическая система $f : B \rightarrow B$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Тогда если граф Γ примитивен, то*

$$(s'_- + s'_+)\alpha \leq \dim_H \text{NW}(f) \leq \overline{\dim}_B \text{NW}(f) \leq s_- + s_+.$$

Здесь $\alpha = \min_{\sigma} \left\{ \frac{\log \lambda_{\sigma}^{-}}{\log \lambda_{\sigma}^{-'}}, \frac{\log \lambda_{\sigma}^{+}}{\log \lambda_{\sigma}^{+'}} \right\}$ по всем простым циклам σ в Γ , а константы s_- , s'_- , s_+ и s'_+ выбираются так, чтобы спектральный радиус соответствующей матрицы равнялся 1:

$$\rho((\Lambda_-)_{s_-}) = 1; \quad \rho((\Lambda'_-)_{s'_-}) = 1; \quad \rho((\Lambda_+)_{s_+}) = 1; \quad \rho((\Lambda'_+)_{s'_+}) = 1.$$

Доказательство. Согласно лемме 7.4 для каждого бесконечного влево пути $(\dots, i_{-1}, i_0)$ множество точек $z \in B_{i_0}$ таких, что $f^k(z) \cap B_{i_k} \neq \emptyset$ при $k < 0$, является графиком некоторой функции

⁹Константы λ_{ij}^{-} и $\lambda_{ij}^{-'}$ вычислены в лемме 7.3.

¹⁰Константы $\underline{x}_u, \underline{x}_u$ и т.д. для отображения f^{-1} могут быть вычислены, например, по лемме 7.1. Также эти константы могут быть вычислены из каких-то сторонних соображений – это не имеет значения. Необходимо лишь, чтобы выполнялись условия (7.1) для отображений f_{ij}^{-1} .

¹¹Если $s = 0$, то A_0 состоит из 0 и 1, где единицы стоят на тех позициях, что $a_{ij} \neq 0$.

$\psi \in \text{Lip}_{c_{i_0}}(x_{i_0} \rightarrow y_{i_0})$. Описанное отображение $\Phi_\Gamma^- : \Sigma_\Gamma^- \rightarrow \sqcup_i \text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i)$ является непрерывным в силу замечания 7.1, поэтому $Q_i^- = \text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i) \cap \Phi_\Gamma^-(\Sigma_\Gamma^-)$ компактно при любом i . Аналогично определим Q_i^+ для бесконечных вправо путей.

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы получить оценки размерностей Q_i^+ и Q_i^- , построить липшицево отображение из $\sqcup_i(Q_i^- \times Q_i^+)$ в $\text{NW}(f)$ и проверить гильдеровость обратного.

Рассмотрим матричную итерационную систему $S^{ij} = f_*^{ij} : \text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i) \rightarrow \text{Lip}_{c_j}(x_j \rightarrow y_j)$. Согласно теореме 7.3 у данной системы существует единственный аттрактор, который совпадает с $Q^- = (Q_1^-, \dots, Q_N^-)$ в силу непустоты и компактности Q_i^- . Поэтому, в силу теоремы 7.4 и леммы 7.3, имеем

$$s'_- \leq \dim_H Q_i^- \leq \overline{\dim}_B Q_i^- \leq s_-.$$

Аналогичные оценки получаем и для Q_i^+ . Поэтому

$$s'_- + s'_+ \leq \dim_H(Q_i^- \times Q_i^+) \leq \overline{\dim}_B(Q_i^- \times Q_i^+) \leq s_- + s_+$$

Построим теперь липшицево отображение $\pi_i : Q_i^- \times Q_i^+ \rightarrow B_i$, такое, что $\pi_i(Q_i^- \times Q_i^+) = \text{NW}(f) \cap B_i$. Поскольку $c_i d_i < 1$ то для каждой пары $(\psi^-, \psi^+) \in \text{Lip}_{c_i}(x_i \rightarrow y_i) \times \text{Lip}_{d_i}(y_i \rightarrow x_i)$ существует единственная точка $z \in B_i$ такая, что $z \in \text{graph } \psi^- \cap \text{graph } \psi^+$. Определим

$$\pi_i(\psi^-, \psi^+) = \text{graph } \psi^- \cap \text{graph } \psi^+ \text{ для } \psi^- \in Q_i^- \text{ и } \psi^+ \in Q_i^+.$$

Образом $\pi_i(Q_i^- \times Q_i^+)$ является множество $S(f) \cap B_i$, где $S(f)$ есть множество всех точек $z \in B$ остающихся в B при всех итерациях f^k , $k \in \mathbb{Z}$. По теореме 7.1 имеем $\text{NW}(f) = S(f)$.

Липшицевость отображения π_i никак не связана со спецификой структуры множеств $Q_i^\pm$. Действительно, пусть $(\psi_j^-, \psi_j^+) \in Q_i^- \times Q_i^+$ и $\pi_i(\psi_j^-, \psi_j^+) = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\Delta y \leq \rho(\psi_2^-, \psi_1^-) + c_i \Delta x \text{ и } \Delta x \leq \rho(\psi_2^+, \psi_1^+) + d_i \Delta y$$

Значит,

$$\begin{aligned} \Delta x &\leq \frac{d_i}{1 - c_i d_i} \rho(\psi_2^-, \psi_1^-) + \frac{1}{1 - c_i d_i} \rho(\psi_2^+, \psi_1^+); \\ \Delta y &\leq \frac{1}{1 - c_i d_i} \rho(\psi_2^-, \psi_1^-) + \frac{c_i}{1 - c_i d_i} \rho(\psi_2^+, \psi_1^+); \end{aligned}$$

и липшицевость π_i доказана. Докажем теперь, что обратное отображение к π_i гильдерово. Пусть $\psi_1^- = \Phi_\Gamma^-(\dots, i_{-1}, i_0)$ и $\psi_2^- = \Phi_\Gamma^-(\dots, j_{-1}, j_0)$. Поскольку $\psi_j^- \in Q_i^-$, $j = 1, 2$, то $i_0 = j_0 = i$. Пусть $i_{-1} = j_{-1}, \dots, i_{-k} = j_{-k}$ и $i_{-k-1} \neq j_{-k-1}$. Тогда

$$\rho(\psi_2^-, \psi_1^-) \leq A \lambda_{i_{-k} i_{-k+1}}^- \dots \lambda_{i_{-1} i_0}^-.$$

Здесь A – это максимальный диаметр множеств B_j по всем $1 \leq j \leq N$. С другой стороны, поскольку $(x_1, y_1) \in \text{graph } \psi_1^- \subset f^{i_{-k-1}i_{-k}\dots i_0}(B_{i_{-k-1}})$, $(x_2, y_2) \in \text{graph } \psi_2^- \subset f^{j_{-k-1}j_{-k}\dots j_0}(B_{j_{-k-1}})$ и $i_{-k-1} \neq j_{-k-1}$, то

$$\Delta y + \Delta x \geq A' \lambda_{i_{-k}i_{-k+1}}^- \dots \lambda_{i_{-1}i_0}^-,$$

где A' – это минимальное расстояние между $f^{jl}(B_i)$ и $f^{j'l}(B_j)$ при всех l и $j \neq j'$. Константа A' отлична от нуля, так как $f^{jl}(B_i)$ и $f^{j'l}(B_j)$ компактны и не пересекаются.

Разрежем путь $\sigma = (i_{-k}, \dots, i_0)$ на простые циклы. Предположим в σ есть повторяющиеся вершины. Взяв две ближайшие $i_l = i_{l'} = j$, $l < l'$, выделяем простой цикл $\sigma_1 = (i_l, \dots, i_{l'})$. Остается путь $\sigma' = (i_{-k}, \dots, i_{l-1}, j, i_{l'+1}, \dots, i_0)$. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока не останется повторяющихся вершин. В результате выделяются простые циклы $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ и оставшийся простой путь $\tilde{\sigma}$. Итак, обозначим $\alpha_- = \min_{\sigma} \frac{\log \lambda_{\tilde{\sigma}}^-}{\log \lambda_{\sigma}^-}$. Тогда

$$\lambda_{i_{-k}i_{-k+1}}^- \dots \lambda_{i_{-1}i_0}^- = \lambda_{\tilde{\sigma}}^- \lambda_{\sigma_1}^- \dots \lambda_{\sigma_m}^- \leq \lambda_{\tilde{\sigma}}^- (\lambda_{\sigma_1}^- \dots \lambda_{\sigma_m}^-)^{\alpha} \leq C (\lambda_{i_{-k}i_{-k+1}}^- \dots \lambda_{i_{-1}i_0}^-)^{\alpha_-}$$

Здесь $C = \max \frac{\lambda_{\tilde{\sigma}}^-}{(\lambda_{\tilde{\sigma}}^-)^{\alpha}}$ по всем простым путям $\tilde{\sigma}$. Значит,

$$\rho(\psi_2^-, \psi_1^-) \leq \frac{AC}{(A')^{\alpha_-}} (\Delta y + \Delta x)^{\alpha_-} \quad (7.17)$$

Аналогичную оценку получаем для $\rho(\psi_2^+, \psi_1^+)$. Поэтому

$$\dim_H(Q_i^- \times Q_i^+) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(\text{NW}(f) \cap B_i),$$

где $\alpha = \min\{\alpha_-, \alpha_+\}$ что и требовалось. $\square$

В случае, если граф Γ связан, то по теореме 7.1 множество неблуждающих точек $\text{NW}(f)$ совпадает с множеством точек $S(f)$, не покидающих B при всех итерациях f^k , $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому отметим еще, в доказательстве теоремы 7.5 мы также получили оценку на размерность множества точек липшицевой гиперболической динамической системы $f : B \rightarrow B$, не покидающих B только при положительных (или при отрицательных) k . Обозначим

$$S^+(f) = \{z \in B : f^k(z) \in B \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+\} \quad \text{и} \quad S^-(f) = \{z \in B : f^k(z) \in B \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-\}.$$

Напомним, $B_i = D_i \times D'_i$, где D_i и D'_i диски в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Следствие 7.1. В условиях теоремы 7.5 размерности множества $S^+(f)$ удовлетворяют оценкам

$$m + \alpha^+ s'_+ \leq \dim_H S^+(f) \leq \overline{\dim}_B S^+(f) \leq m + s_+$$

где $\alpha^+ = \min_{\sigma} \alpha_{\sigma}^+$ по всем простым циклам σ в Γ , а $\alpha_{\sigma}^+ = \frac{\log \lambda_{\sigma}^+}{\log \lambda_{\sigma}^{+7}}$. Аналогично для размерностей множества $S^-(f)$ получаем

$$k + \alpha^- s'_- \leq \dim_H S^+(f) \leq \overline{\dim}_B S^+(f) \leq k + s_-$$

где $\alpha^- = \min_{\sigma} \alpha_{\sigma}^-$ по всем простым циклам σ в Γ , а $\alpha_{\sigma}^- = \frac{\log \lambda_{\sigma}^-}{\log \lambda_{\sigma}^{-7}}$.

Доказательство. Доказательство без ограничения общности проведем для множества $S^-(f)$. Множество $S^-(f)$ есть в точности $\bigsqcup_i \text{graph } Q_i^-$. Построим отображение

$$\pi_i^- : D_i \times Q_i^- \rightarrow B_i; \quad \pi_i^-(x, \psi^-) = (x, \psi^-(x_i)), \quad \text{для } x \in D_i, \psi^- \in Q_i^-.$$

Отображение π_i^- очевидно липшицево. Для обратного отображения имеем согласно доказательству теоремы 7.5: если $(x_j, y_j) \in \text{graph } \psi_j^-$, $j = 1, 2$, то выполнено (7.17). Поскольку $\alpha^- \leq 1$, обратное отображение к π_i^- является α^- гильдеровым, что и требовалось. □

ГЛАВА 8

Хаотическая динамика отображения Пуанкаре

В этой главе будет доказана вторая важная теорема 8.2 о полусопряженности динамики оптимального синтеза в модельной задаче (5.1) с некоторой топологической цепью Маркова (для случая правильного треугольника). Более того, с помощью результатов главы 7 будут найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и по Минковскому множества неблуждающих точек и вычислена топологическая энтропия (см. [72]). В этой главе мы продолжим использовать обозначения для элементов оптимального синтеза задачи (5.1), введенные в главах 5 и 6.

8.1 Билипшицевость отображения последования Пуанкаре.

Основным инструментом изучения оптимального синтеза задачи (5.1) в предыдущих параграфах выступали теоремы 3.1 и 3.2 о переходе к сопряженным переменным, точнее отображение E . Поэтому, для доказательства билипшицевости отображения Φ в ограничении на лагранжеву поверхность оптимальных траекторий M_+ нам потребуется начать с исследования отображения E на билипшицевость.

В теоремах 3.1 и 3.2 было доказано, что в широком классе задач оптимального управления (в том числе в модельной задаче (5.1)) отображение E является (локально) липшицевым и биективным. Вообще говоря, обратное отображение E^{-1} в общей задаче (5.1) может уже не быть липшицевым даже локально.

В нижеследующей лемме мы докажем, что в модельной задаче (5.1) отображение E является локально билипшицевым в окрестности любой точки, не лежащей на A_{ij} .

Лемма 8.1. *Рассмотрим точку $q_0 = (x_0, y_0)$ не лежащую ни в одной плоскости A_{ij} (т.е. $x_0 \notin \cup A_{ij}$ или $y_0 \notin \cup A_{ij}$). Тогда существует окрестность точки q_0 , в которой отображение E является билипшицевым.*

Доказательство. По сути, доказательство заключается в получении нижней оценки на разность $\mathfrak{B}(q_1) - \mathfrak{B}(q_0) - \mathfrak{B}'(q_0)\Delta q$ и последующего применения леммы 3.13. Здесь как обычно $q_i = (x_i, y_i)$ и $\Delta q = (\Delta x, \Delta y) = q_1 - q_0$.

Пусть $X_0(t)$ и $X_1(t)$ – две произвольные траектории, начинающиеся в точках x_0 и x_1 соответственно. Для произвольного $\lambda \in [0; 1]$ обозначим $X_\lambda(t) = (1 - \lambda)X_0(t) + \lambda X_1(t)$. Тогда для функционала J , определенного в (5.1), выполнено тождество

$$(1 - \lambda)J(X_0) + \lambda J(X_1) - J(X_\lambda) = \lambda(1 - \lambda)J(\Delta X),$$

где $\Delta X(t) = X_1(t) - X_0(t)$. Если же траектории X_0 и X_1 являются оптимальными и $\dot{X}_i(0) = y_i$, $i = 1, 2$, то

$$(1 - \lambda)\mathfrak{B}(q_0) + \lambda\mathfrak{B}(q_1) - \mathfrak{B}(q_\lambda) \geq \lambda(1 - \lambda)J(\Delta X),$$

где $q_\lambda = (1 - \lambda)q_0 + \lambda q_1$. Поскольку левая и правая часть написанного неравенства совпадают при $\lambda = 0$, то продифференцировав их по λ при $\lambda = 0$ получаем

$$\mathfrak{B}(q_1) - \mathfrak{B}(q_0) - \mathfrak{B}'(q_0)\Delta q \geq J(\Delta X),$$

Осталось оценить снизу $J(\Delta X)$. Простейший способ оценки $J(\Delta X) \geq \mathfrak{B}(\Delta q)$ дает плохой результат слишком высокого порядка, так как $\mathfrak{B}(\Delta q) \geq A\Delta x^{\frac{5}{2}} + B\Delta y^5$, и лучше оценить в произвольной точке функцию Беллмана, вообще говоря, нельзя.

Однако, если точка q_0 не лежит на A_{ij} , то оказывается, что значение функционала $J(\Delta X)$ можно оценить лучше. Пусть для начала точка $q_0 \notin \cup A_{ij} \times A_{ij}$ не является точкой переключения управления. Это означает, что для некоторой достаточно малой окрестности V точки q_0 определено время $\tau > 0$ такое, что в течении времени по крайней мере τ все оптимальные траектории из точек $q_1 \in V$ идут с одинаковым управлением u_0 в одной и той же вершине треугольника Ω . Действительно, поднятие оптимальной траектории $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t))$ из $(q_0, E(q_0))$ пересекает в первый раз поверхность переключения $\mathcal{S}$ в некоторой точке $(x', y', \phi', \psi') \neq (q_0, E(q_0))$ в момент времени $t_0 > 0$. Поскольку поверхность $\mathcal{S}$ замкнута, до для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если траектория гамильтоновой системы (5.2) начинается из δ -окрестности точки $(q_0, E(q_0))$, то она в первый раз пересечет $\mathcal{S}$ не раньше чем в $t_0 - \varepsilon$. Осталось отметить, что отображение E непрерывно по теореме 3.2, поэтому, если точка q_1 близка к q_0 , то $(q_1, E(q_1))$ близка к $(q_0, E(q_0))$.

Итак, при $t \in [0; \tau]$ выполнено равенство $\Delta X(t) = \Delta x + t\Delta y$, так как управления на оптимальных траекториях из q_0 и q_1 в течение этого промежутка времени совпадают (если q_1 лежит в окрестности q_0). Поэтому для некоторого $C' > 0$ выполняется

$$\mathfrak{B}(q_1) - \mathfrak{B}(q_0) - \mathfrak{B}'(q_0)\Delta q \geq J(\Delta X) \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau (\Delta x + t\Delta y)^2 dt \geq C'(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Таким образом, после применения леммы 3.13 мы получаем доказательство утверждения леммы 8.1 для точек q_0 не лежащих на поверхности переключения. Если же точка q_0 лежит на поверхности переключения, то для оценки $J(\Delta X)$ снизу необходимо сдвинуться по всем оптимальным траекториям из окрестности q_0 на одно и то же небольшое время $t_0 > 0$ и повторить описанное выше доказательство. $\square$

Таким образом¹,

1. Отображение $E : M \rightarrow N$ есть локально липшицевый гомеоморфизм, являющийся билипшицевым в окрестности точек не лежащих на $\cup A_{ij} \times A_{ij}$;
2. Отображение $q \mapsto (q, E(q))$ является (локально) билипшицевым гомеоморфизмом $M \rightarrow M_+$;
3. Отображение $(q, E(q)) \mapsto E(q)$ есть (локально) липшицев гомеоморфизм $M_+ \rightarrow N$, являющийся билипшицевым в окрестности точек не лежащих на $\cup A_{ij} \times A_{ij}$.

В том числе все эти отображения сохраняют описанные выше свойства после факторизации по действию g .

Исследуем теперь на билипшицевость отображение последования Пуанкаре Φ . Пусть точка $x \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ не лежит ни в множестве $\cup A_{ij}^{\times 4}/g$, ни в множестве $\mathcal{S}_{123}/g$. Согласно лемме 5.1, определен образ $\Phi(x) \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$. Предположим $\Phi(x) \notin \mathcal{S}_{123}/g$ и $\Phi(x) \notin \cup A_{ij}^{\times 4}/g$. Тогда проекция траектории гамильтоновой системы (5.2), проходящая через x , пересекает поверхность переключения и в точке x и в точке $\Phi(x)$ трансверсально. Поэтому, отображение $\Phi : \mathcal{S}/g \rightarrow \mathcal{S}/g$ определено в окрестности x в $\mathcal{S}/g$ и является локальным диффеоморфизмом окрестности x в $\mathcal{S}/g$ на ее образ. Воспользовавшись теперь билипшицевостью отображения E немедленно получаем, что ограничение Φ на $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$ является билипшицевым отображением в окрестности x . Итак,

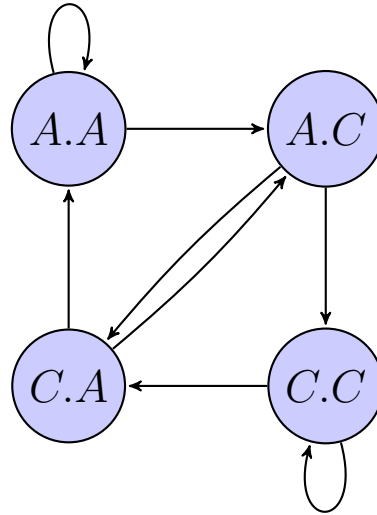
Лемма 8.2. *Отображение последования Пуанкаре $\Phi : (\mathcal{S} \cap M_+)/g \rightarrow (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ является билипшицевым в окрестности любой такой точки x , что x и $\Phi(x)$ не лежат ни на $\mathcal{S}_{123}/g$ ни на $\cup A_{ij}^{\times 4}/g$. Свойство локальной билипшицевости сохраняется у отображения Φ , записанного в терминах пространств M/g и N/g с помощью отождествления E .*

Следствие 8.1. *Отображение $F : A.A \cup A.C \cup C.A \cap C.C \rightarrow A.A \cup A.C \cup C.A \cap C.C$, определенное в параграфе 6.10 является билипшицевым.*

8.2 Условия липшицевой гиперболичности

Изучим подробно динамику отображения F . Выберем (как было показано в главе 6) не пересекающиеся прямоугольные окрестности B_1, B_2, B_3, B_4 множеств $A.A, A.C, C.A, C.C$ соответственно и координаты (X_i, Y_i) на $B_i, i = 1, 2, 3, 4$. Обозначим через F_{ij} ограничение F на множество тех точек B_i , которые при одной итерации F попадают в B_j , т.е. $F_{ij} = F|_{B_i \cap F^{-1}(B_j)}$. Отображения F_{ij} определены в соответствии с графом $\tilde{\Gamma}$ (см. рис. 8.1): отображение F_{ij} определено, если в графе $\tilde{\Gamma}$ есть стрелка, соединяющая соответствующие вершины.

¹На множествах M, N, M_+ естественным образом определены структуры метрических пространств, индуцированные из объемлющего линейного пространства $\mathcal{M} = T^*M = M \times N$. Однако множество M_+ не является, вообще говоря, гладким подмногообразием $\mathcal{M}$.

Рисунок 8.1: Граф $\tilde{\Gamma}$

F	$\underline{u_x}$	$\overline{u_x}$	$\overline{u_y}$	v_y	$\overline{v_y}$	$\overline{v_x}$
F_{11}	21	25.6	0.57	0.739	0.792	0.15
F_{31}	20.3	22.4	0.37	0.4	0.48	0.14
F_{12}	22.5	34	3.1	0.72	0.785	0.5
F_{32}	21	25	1.9	0.4	0.48	0.07
F_{23}	3.08	3.28	0.06	0.07	0.18	0.06
F_{43}	3.11	3.28	0.09	0.176	0.019	0.0591
F_{24}	2.35	2.9	0.75	0.1	0.22	0.1
F_{44}	2.3	2.9	0.8	0.175	0.21	0.1

Таблица 8.1: Константы $\overline{u_x}, \underline{u_x}$ и т.д. для отображения F .

F^{-1}	y_v	$\overline{y_v}$	$\overline{y_u}$	$\underline{x_u}$	$\overline{x_u}$	$\overline{x_v}$
F_{11}^{-1}	1.26	1.36	0.098	0.039	0.049	0.37
F_{31}^{-1}	2.09	2.51	0.16	0.0444	0.049	0.045
F_{12}^{-1}	1.342	1.384	0.0195	0.029	0.045	0.18
F_{32}^{-1}	2.1	2.5	0.0061	0.04	0.048	0.2
F_{23}^{-1}	5.6	14.1	0.25	0.305	0.323	0.171
F_{43}^{-1}	5.3	5.66	0.0094	0.303	0.323	0.151
F_{24}^{-1}	5	14.4	0.4	0.37	0.394	1.41
F_{44}^{-1}	4.6	5.6	0.21	0.364	0.381	1.55

Таблица 8.2: Константы $\overline{x_u}, \underline{x_u}$ и т.д. для отображения F^{-1} .

	B_1	B_2	B_3	B_4
c	0.00743	0.0225	0.022	0.0488
d	0.146	0.321	0.103	0.374

Таблица 8.3: Константы c_i и d_i отображений F и F^{-1} для прямоугольников B_i .

F	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
λ_{σ}^{-}	0.797	0.249	0.0748	0.0238	0.0201	0.0883
λ'_{σ}^{-}	0.734	0.137	0.0178	0.00462	0.0304	0.0271
α_{σ}^{-}	0.739	0.701	0.643	0.695	0.674	0.673

Таблица 8.4: Константы λ_{σ}^{-} , λ'_{σ}^{-} и α_{σ}^{-} для отображения F .

F^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
λ_{σ}^{+}	0.0484	0.46	0.000785	0.00829	0.000403	0.0162
λ'_{σ}^{+}	0.0386	0.288	0.000341	0.00294	0.0000864	0.0117
α_{σ}^{+}	0.931	0.625	0.895	0.822	0.835	0.927

Таблица 8.5: Константы λ_{σ}^{+} , λ'_{σ}^{+} и α_{σ}^{+} для отображения F^{-1} .

Пусть $U_{ij}(X_i, Y_i)$ и $V_{ij}(X_i, Y_j)$ обозначают первую и вторую координаты образа $F_{ij}(X_i, Y_i)$ в прямоугольнике B_j соответственно: $F_{ij}(X_i, Y_i) = (U_{ij}(X_i, Y_i), V_{ij}(X_i, Y_j))$. Согласно результатам главы 6 отображения F_{ij} удовлетворяют следующим неравенствам, выполненным для любой точки $(X_i, Y_i) \in B_i \cap F^{-1}(B_j)$ и для любого допустимого смещения $(\Delta X, \Delta Y)$

$$\begin{cases} \underline{u}_x^{ij} |\Delta x| \leq |U_{ij}(X_i + \Delta x, Y_i) - U_{ij}(X_i, Y_i)| \leq \overline{u}_x^{ij} |\Delta x|, \\ |U_{ij}(X_i, Y_i + \Delta y) - U_{ij}(X_i, Y_i)| \leq \overline{u}_y^{ij} |\Delta y|, \\ \underline{v}_y^{ij} |\Delta y| \leq |V_{ij}(X_i, Y_i + \Delta y) - V_{ij}(X_i, Y_i)| \leq \overline{v}_y^{ij} |\Delta y|, \\ |V_{ij}(X_i + \Delta x, Y_i) - V_{ij}(X_i, Y_i)| \leq \overline{v}_x^{ij} |\Delta x|, \end{cases}$$

где $\overline{u}_x^{ij}$, $\underline{u}_x^{ij}$ и т.д. обозначают положительные константы (их точные значения приведены в таблице 8.1). Более того, обратные отображения F_{ij}^{-1} удовлетворяют аналогичным соотношениям с константами $\overline{x}_u^{ij}$, $\underline{x}_u^{ij}$ и т.д., точные значения которых приведены в таблице 8.2.

Отметим, что точные значения констант $\overline{u}_x$, $\underline{u}_x$ и т.п. зависят от выбора координат X_i и Y_i . Данные в таблицах 8.1 и 8.2 приведены для X_i и Y_i , имеющих следующий явный вид

$$\begin{aligned} X_1 = X_3 &= 3636.74626682426\chi_1 - 4481.16386225848\chi_2 + 3855.15022264945\chi_1^2 - \\ &- 9508.94604117198\chi_1\chi_2 + 5858.26825049964\chi_2^2 + 1403.04809529772\chi_1^3 - \\ &- 5062.14415237999\chi_1^2\chi_2 + 6220.81334889828\chi_1\chi_2^2 - 2553.62800317877\chi_2^3, \end{aligned}$$

²Численные значения, приведенные во всех таблицах, выписаны с округлением в нужную сторону, в зависимости от знаков неравенств, в которых они участвуют.

$$\begin{aligned}
X_2 = X_4 &= 15(-434.85845004979\chi_1 - 1178.18255202967\chi_2 - 120.01821331858\chi_1^2 + \\
&+ 1034.23812583926\chi_1\chi_2 + 1197.94981377645\chi_2^2 + 294.58158248528\chi_1^3 - \\
&- 56.750230435401\chi_1^2\chi_2 - 570.219924579354\chi_1\chi_2^2 - 401.871126962896\chi_2^3), \\
Y_1 = Y_2 &= 3.239086633898\chi_1 - 908.305710474105\chi_2 - 19.706205900010\chi_1^2 - \\
&- 2.212072200027\chi_1\chi_2 + 1018.022649246405\chi_2^2 + 6.183323553959\chi_1^3 + \\
&+ 19.428876703623\chi_1^2\chi_2 - 1.286781359343\chi_1\chi_2^2 - 379.719994048579\chi_2^3, \\
Y_3 = Y_4 &= 7714.46037676461\chi_1 + 57227.20693518666\chi_2 - 1394.23893421762\chi_1^2 - \\
&- 16419.64632698288\chi_1\chi_2 - 61359.76468135373\chi_2^2 + 68.70577470503\chi_1^3 + \\
&+ 1493.59693767978\chi_1^2\chi_2 + 8734.94321423633\chi_1\chi_2^2 + 21935.18377642208\chi_2^3.
\end{aligned}$$

В дальнейшем для оценок размерностей (и вообще использования результатов главы 7) нам потребуются для отображений F и F^{-1} значения констант $\lambda_{ij}^\pm$ и $\lambda_{ij}'^\pm$, определенных в (7.15) и (7.16), и констант $\alpha^\pm$, определенных в лемме 7.1. Значения констант $\alpha_\sigma^\pm$, $\lambda_\sigma^\pm$ и $\lambda_\sigma'^\pm$ для отображения F по всем простым циклам σ в графе $\tilde{\Gamma}$ (которых всего шесть: $\sigma_1 = (A.A; A.A)$, $\sigma_2 = (C.C; C.C)$, $\sigma_3 = (A.A; A.C; C.A; A.A)$, $\sigma_4 = (C.C; C.A; A.C; C.C)$, $\sigma_5 = (A.A; A.C; C.C; C.A; A.A)$ и $\sigma_6 = (A.C; C.A; A.C)$) приведены в таблицах 8.4 и 8.5.

Поскольку прямоугольники B_i образуют предмарковское разбиение множества³ $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ относительно отображений F_{ij} , мы можем воспользоваться техникой исследования липшицевых гиперболических динамических систем, разработанной в главе 7 (см. [16]). Основным условием применимости этой техники является условие липшицевой гиперболичности (см. определение 7.4). Отображение F удовлетворяет условиям липшицевой гиперболичности на $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ с константами c_i , приведенными в таблице 8.3. Действительно, условие (I) проверяется непосредственной подстановкой, а условие (II) проверяется также прямой подстановкой по всем простым циклам в $\tilde{\Gamma}$. Численные значения произведений (7.7) для отображения F приведены в таблице 8.4.

Из липшицевой гиперболичности F следует, что $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ является предмарковским разбиением также и для обратного отображения F^{-1} (см. [16]). Отметим, что в общем случае, вообще говоря, из липшицевой гиперболичности F не следует, что обратное отображение F^{-1} удовлетворяет условиям (I) и (II) хоть с какими-то константами $d_i \geq 0$. Однако в этом конкретном случае такие константы d_i для отображения F^{-1} действительно существуют (их точное значение приведено в таблице 8.3).

Таким образом доказана

Лемма 8.3. *Отображения F и F^{-1} обладают предмарковским разбиением $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ и удовлетворяют на нем условиям липшицевой гиперболичности с положительными константами c_i и d_i ,*

³См. определение 7.2.

$i = 1, 2, 3, 4$ соответственно, значения которых приведены в таблице⁴ 8.3.

8.3 Сопряженность с топологической марковской цепью

Для доказательства того факта, что липшицева гиперболическая динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ полусопряжена с двусторонней топологической марковской цепью $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$ мы воспользуемся теоремой 7.1 (см. [16]). Отображение F удовлетворяет условиям теоремы 7.1 по лемме 8.3. В качестве прямого следствия этой теоремы мы получаем лемму о структуре множества неблуждающих точек исследуемого отображения F .

Лемма 8.4. *Липшицева динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ полусопряжена с левым сдвигом l на топологической марковской цепи $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$ бесконечных в обе стороны путей на графе $\tilde{\Gamma}$ (см. рис. 8.1), то есть существует непрерывное вложение $\Psi_{\tilde{\Gamma}} : \Sigma_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \mathcal{B}$ такое, что $F \circ \Psi_{\tilde{\Gamma}} = \Psi_{\tilde{\Gamma}} \circ l$. Более того $NW(F) = \Psi_{\tilde{\Gamma}}(\Sigma_{\tilde{\Gamma}})$ и $\Psi_{\tilde{\Gamma}}$ есть гомеоморфизм⁵ $NW(F) = S(F)$ и $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$*

Доказательство. Проверка условий теоремы для исследуемого отображения F тривиальна, поскольку константы c_i и d_i уже посчитаны (см. лемму 8.3), а связность графа $\tilde{\Gamma}$ очевидна. $\square$

8.4 Оценка размерностей

В связи с тем, что отображение E является билипшицевым в окрестности точек $\mathcal{B}$ по лемме 8.1, мы можем говорить о размерности по Хаусдорфу (или по Минковскому) множества неблуждающих точек $NW(F)$, так как билипшицевы отображения не меняют размерностей множеств (см. [79]).

Для оценки размерностей по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек $NW(F)$ мы воспользуемся еще одной теоремой 7.5 (см. [16]). Для ее использования достаточно знать только липшицевы константы $\overline{u}_x$, $\underline{u}_x$ и т.д. и константы c_i и d_i . Вычисленные на компьютере значения констант $s_{\pm}$, $s'_{\pm}$ и α для исследуемого отображения F приведены в (8.1).

$$s_+ = 0.408; \quad s'_+ = 0.327; \quad s_- = 0.876; \quad s'_- = 0.593. \quad (8.1)$$

Отметим, что отыскание (пусть даже численное) решение уравнения $\rho(\Lambda_s) = 1$ по s на первый взгляд представляется весьма нетривиальным, однако существование и единственность его решения, а также элементарный численный метод его нахождения с любой наперед заданной точностью дает лемма 7.1 о непрерывности и строгом убывании функции $\rho(\Lambda_s)$ по s .

Численные значения коэффициентов $\alpha_{\sigma}^{\pm}$ для F и F^{-1} по всем простым циклам приведены в таблицах 8.4 и 8.5 соответственно. Итак,

⁴ Явные значения констант c_i и d_i были найдены на компьютере с помощью не сложного алгоритма. Интересующийся читатель может убедиться в верности вычислений констант c_i и d_i с помощью прямой подстановки.

⁵ Напомним, что $S(F) \subset \mathcal{B}$ есть подмножество тех точек $z \in \mathcal{B}$, остающихся в $\mathcal{B}$ при всех итерациях F^k , $k \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha = \min_{\sigma} \{ \alpha_{\sigma}^{-}, \alpha_{\sigma}^{+} \} = 0.625$$

Итак, из теоремы 7.5 получаем

Лемма 8.5. *Размерности по Хаусдорфу и по Минковскому множества $NW(F)$ удовлетворяют следующим неравенствам*

$$0.575 \leq \dim_H NW(F) \leq \overline{\dim}_B NW(F) \leq 1.284 \quad (8.2)$$

8.5 Односторонняя марковская цепь

В главе 9, посвященной общим гамильтоновым системам с разрывной правой частью, потребуется описание множества точек, не сходящихся к полуособым циклам Z_{ij} в прямом направлении времени безотносительно рассмотрения асимптотики траектории в обратном направлении времени.

Очевидно, что точки $Q^k \cap D_{31}$, $k = 1, 3$, под действием отображения Пуанкаре Φ не притягиваются к Z_{13} в прямом времени (так как $(ij)\Phi^2(Q^k \cap D_{ij}) = Q^k \cap D_{ij}$, $k = i, j$, по лемме 5.3). Более того в статье [78] доказано, что дифференциал отображения Пуанкаре в объемлющем факторпространстве $\Phi : S/g \rightarrow S/g$ имеет ровно одно собственное значение по модулю меньше 1. Следовательно, по теореме Адамара-Перрона (см. [15]) на поверхности S/g определено гладкое погруженное одномерное устойчивое многообразие Q^k точек, стремящихся к $Q^k \cap D_{ij}$, $k = i, j$ под действием отображения Φ . Поднимаясь в расширенное фазовое пространство $\mathcal{M} = T^*M$ мы немедленно получаем, что траектории гамильтоновой системы (5.2), начинающиеся в точках прообраза $\pi^{-1}(Q^k)$ попадают в начало координат за конечное время и следовательно по теореме 3.3 являются оптимальными. Таким образом, на D_{31} определены два одномерных липшицевых⁶ погруженных подмногообразия $Q^k \supset Q^k \cap D_{13}$, $k = 1, 3$, таких, что для любой точки $z \in Q^k$ образы $\Phi^n(z)$ не стремятся к полуособым циклам Z_{ij} при $n \rightarrow \infty$.

Помимо Q^k , $k = 1, 3$ на D_{31} , присутствует множество $\tilde{\mathcal{Y}}$ таких точек, что их образы также не стремятся к полуособым циклам Z_{ij} . Множество $\tilde{\mathcal{Y}}$ имеет фрактальную природу: оно состоит из объединения множеств $i_0.i_1i_2\dots$ где i_k обозначают один из символов A или C . Структура этих множеств описана в лемме 7.4 (см. [16]) – каждое такое множество представляет собой липшицеву кривую из $\text{Lip}_{d_j}(Y_j \rightarrow X_j)$ в соответствующем прямоугольнике $B_j \supset i_0.i_1$. Рассмотрим естественное отображение Ψ_{Γ}^+ из $\tilde{\mathcal{Y}}$ в одностороннюю марковскую цепь Σ_{Γ}^+ бесконечных вправо путей на графе $\tilde{\Gamma}$. Прообразом каждой точки из Σ_{Γ}^+ является соответствующая липшицева кривая $i_0.i_1i_2\dots$. Очевидно, что по построению отображение Ψ_{Γ}^+ полусопрягает левый сдвиг l на Σ_{Γ}^+ и отображение F , т.е. $l \circ \Psi_{\Gamma}^+ = \Psi_{\Gamma}^+ \circ F$. Отображение Ψ_{Γ}^+ является непрерывным в силу замечания 7.1. Оценки на размерность множества $\tilde{\mathcal{Y}}$ так же посчитаны в следствии 7.1:

⁶На D_{31} нет, вообще говоря, гладкой структуры, сохраняемой отображением E , поэтому мы всегда используем лишь липшицеву структуру на D_{31} , которая уважается отображением E (см. теорему 3.2 и лемму 8.1).

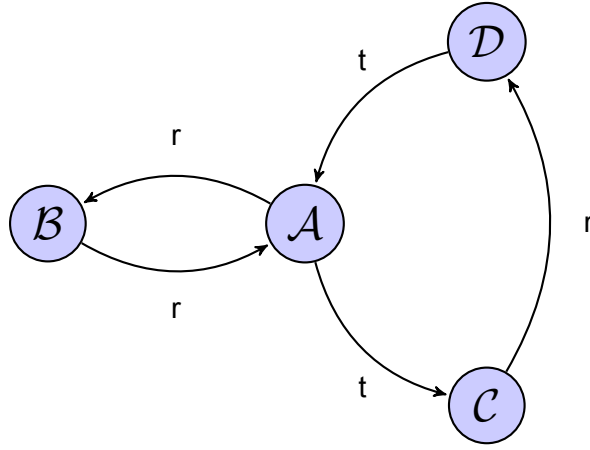


Рисунок 8.2: Граф $\widehat{\Gamma}$. Буквы r и t не важны для графа $\widehat{\Gamma}$, но участвуют в построении графа Γ в определении 8.1.

$$1 + \alpha_+ s'_+ \leq \dim_H \widetilde{\mathcal{Y}} \leq \overline{\dim}_B \widetilde{\mathcal{Y}} \leq 1 + s_+,$$

где $\alpha_+ = \min_{\sigma} \frac{\log \lambda_{\sigma}^+}{\log \lambda_{\sigma}^+}$

Таким образом, доказана

Лемма 8.6. (I) На диске D_{31} определено одномерное погруженное липшицево многообразие $\mathcal{Q}^2$ точек, которые стремятся в прямом времени под действием отображения последования Пуанкаре Φ к точкам пересечения четырехзвенного цикла $\mathcal{Q}^2$ с $\mathcal{S}/g$.

(II) На диске D_{31} определено множество $\widetilde{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{B}$ обладающее следующими свойствами: (i) для любой точки $z \in \widetilde{\mathcal{Y}}$ итерации $F^n(z)$ не стремятся к полусобным циклам Z_{ij} при $n \rightarrow +\infty$; (ii) ограничение отображения F на $\widetilde{\mathcal{Y}}$ полусопряжено с помощью непрерывного отображения Ψ_{Γ}^+ с левым сдвигом на односторонней топологической цепи Маркова Σ_{Γ}^+ , причем прообраз любой точки из Σ_{Γ}^+ есть одномерная липшицева кривая в $\mathcal{B}$; (iii) размерности множества $\widetilde{\mathcal{Y}}$ удовлетворяют оценкам

$$1.204 \leq \dim_H \widetilde{\mathcal{Y}} \leq \overline{\dim}_B \widetilde{\mathcal{Y}} \leq 1.408.$$

8.6 Фрактальная структура отображения Пуанкаре

Отображение F , конечно, является вспомогательным. Нашей основной целью является исследование отображения последования Пуанкаре Φ . Для формулировки основной теоремы об отображении Φ нам потребуется следующий граф Γ .

Определение 8.1. Изображенная схема графа $\widehat{\Gamma}$ на рис. 8.2 является прототипом ориентированного графа Γ . Граф Γ получается из прототипа $\widehat{\Gamma}$ следующим образом. Множество вершин графа Γ есть прямое произведение множества вершин $\widehat{\Gamma}$ и множества упорядоченных пар чисел (ij) ,

принимаящих значения $i, j \in \{1, 2, 3\}$, ($i \neq j$). Поэтому Γ имеет 24 вершины $\{A_{12}, A_{13}, \dots, D_{32}\}$. Из вершины A_{ij} графа Γ ведет стрелка в вершину $B_{i'j'}$ тогда и только тогда, когда $j = i'$ и $i \neq j'$, то есть $\{i, j = i', j'\} = \{1, 2, 3\}$. В знак этого факта стрелка $A \rightarrow B$ в прототипе $\hat{\Gamma}$ помечена значком r . Из вершины A_{ij} графа Γ ведет стрелка в вершину $C_{i'j'}$ тогда и только тогда, когда $i' = j$ и $j' = i$. В знак этого факта стрелка $A \rightarrow C$ в прототипе $\hat{\Gamma}$ помечена значком t . Стрелки $B_{ij} \rightarrow A_{i'j'}$, $C_{ij} \rightarrow D_{i'j'}$ и $D_{ij} \rightarrow A_{i'j'}$ строятся аналогичным образом. Других стрелок в графе Γ нет.

Отметим, что граф Γ состоит из двух несвязных идентичных компонент $\Gamma_{\pm}$, каждая из которых сильно связна и имеет одну компоненту в спектральном разложении⁷.

Теорема 8.1 (М.И. Зеликин, Л.В. Локуциевский и Р. Хильдебранд). *Динамика отображения последования Пуанкаре $\Phi : (\mathcal{S} \cap M_+)/g \rightarrow (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ описывается следующим образом:*

1. Множество неблуждающих точек $\mathcal{Y} = \text{NW}(\Phi) \subset (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ отображения Φ гомеоморфно топологической цепи Σ_{Γ} бесконечных в обе стороны путей на графе Γ с помощью некоторого отображения $\hat{\Psi}_{\Gamma}$. Более того, отображение $\hat{\Psi}_{\Gamma}$ сопрягает Φ и левый сдвиг l на Σ_{Γ} , то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Y} \\ \downarrow \hat{\Psi}_{\Gamma} & & \downarrow \hat{\Psi}_{\Gamma} \\ \Sigma_{\Gamma} & \xrightarrow{l} & \Sigma_{\Gamma} \end{array}$$

Размерности множества $\mathcal{Y}$ удовлетворяют неравенствам

$$0.575 \leq \dim_H \mathcal{Y} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{Y} \leq 1.284.$$

2. Множество точек $z \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, которые под действием Φ в прямом направлении времени не стремятся ни к одному из полуособых циклов Z_{ij} содержит (i) устойчивые многообразия $\mathcal{Q}^i$ в точках $Q^i \cap (\mathcal{S}/g)$ отображения Φ ; (ii) некоторое множество $\mathcal{Y}^+ \subset (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, инвариантное относительно Φ , т.е. $\Phi(\mathcal{Y}^+) \subset \mathcal{Y}^+$. Динамика Φ на $\mathcal{Y}^+$ полусопряжена левому сдвигу l на топологической цепи Маркова Σ_{Γ}^+ бесконечных вправо путей на графе Γ с помощью некоторого отображения $\hat{\Psi}_{\Gamma}^+ : \mathcal{Y}^+ \rightarrow \Sigma_{\Gamma}^+$, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}^+ & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Y}^+ \\ \downarrow \hat{\Psi}_{\Gamma}^+ & & \downarrow \hat{\Psi}_{\Gamma}^+ \\ \Sigma_{\Gamma}^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_{\Gamma}^+ \end{array}$$

⁷Граф имеет одну компоненту в спектральном разложении если он примитивен (см. определение 7.8), то есть наибольший общий делитель длин его простых циклов равен 1 (см. [15])

Отображение Ψ_Γ^+ непрерывно, сюръективно, и прообраз любой точки является липшицевым многообразием, гомеоморфным отрезку. Размерности множества $\mathcal{Y}^+$ удовлетворяют оценкам

$$1.204 \leq \dim_H \mathcal{Y}^+ \leq \overline{\dim}_B \mathcal{Y}^+ \leq 1.408.$$

Отметим, что в пункте (ii) Теоремы 8.1 описаны не все такие точки $z \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, которые под действием Φ в прямом направлении времени не стремятся ни к одному из полуособых циклов Z_{ij} . Например в теореме 8.1 ничего не утверждается про трехзвенные циклы.

Доказательство теоремы 8.1. Начнем с доказательства первого пункта. Обозначим через $S(\Phi)$ множество точек $z \in \mathcal{S}/g$, которые при итерациях $\Phi^k(z)$ не стремятся ни к одному из трех полуособых циклов Z_{ij} в прямом времени, $k \rightarrow +\infty$, и ни к одному из двух трехзвенных циклов $Z^\pm$ в обратном времени, $k \rightarrow -\infty$.

Для описания множества $S(\Phi)$ и динамической системы $\Phi : S(\Phi) \rightarrow S(\Phi)$ мы рассмотрим часть множества $S(\Phi)$ лежащую в диске D_{31} . Поскольку F есть в точности Φ^2 на $A.A \cup C.A$ или Φ^3 на $A.C \cup C.C$, то множество $S(F)$ содержит $NW(F)$, $\Phi(NW(F))$ и $\Phi^2(NW(F))$. Применяя все перестановки из S_3 к $NW(F)$ мы получаем, что

$$S(\Phi) \supset S_1(\Phi) = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma \left(NW(F) \cup \Phi(NW(F)) \cup \Phi^2(NW(F)) \right).$$

Как было показано в параграфах 6.9 и 6.10 пересечение разности $S(\Phi) \setminus S_1(\Phi)$ с замыканием области III в диске D_{31} состоит из точек z , которым отвечает последовательность $(\dots i_{-1}i_0.i_1\dots)$, $i_k \in \{A, B, C\}$, заканчивающаяся бесконечным хвостом из символов B . Любая такая точка z лежит на устойчивом усе $\mathcal{Q}^2$ и притягивается к четырехзвенному циклу Q^2 в прямом времени. Остальные точки разности $S(\Phi) \setminus S_1(\Phi)$ в диске D_{31} получаются применением Φ или Φ^2 к описанным точкам z и соответствующей симметрии из S_3 . Таким образом, мы получаем, что

$$S(\Phi) \setminus S_1(\Phi) = \tilde{S}(\Phi) \subset \bigsqcup_i \mathcal{Q}^i,$$

и, следовательно, точки множества $\tilde{S}(\Phi)$ не являются неблуждающими точками отображения Φ . Точки множества $(\mathcal{S}/g) \setminus S(\Phi)$ так же не являются неблуждающими точками Φ , так как либо притягиваются в обратном времени к одному из трехзвенных циклов $Z^\pm$, либо притягиваются к точке выхода соответствующей оптимальной траектории на один из полуособых отрезков Z_{ij}^s . Итак,

$$NW(\Phi) = S_1(\Phi) = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma \left(NW(F) \cup \Phi(NW(F)) \cup \Phi^2(NW(F)) \right).$$

Учитывая результаты лемм 8.4 и 8.5 для доказательства первого пункта осталось объяснить, как возникает граф Γ и построить отображение $\hat{\Psi}_\Gamma$.

Во-первых, отметим, что топологическая цепь Маркова $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$ идентична во всех смыслах цепи Σ_{AC} бесконечных в обе стороны слов с двухсимвольным алфавитом $\{A, C\}$. Напомним, что (с точностью до применения некоторой перестановки, переводящей точку в D_{31}) $F = \Phi^3$ на множестве $A.C \cup C.C$ и $F = \Phi^2$ на $A.A \cup C.A$. Поэтому, если рассмотреть на множестве $NW(\Phi) \cap D_{31}$ отображение $\hat{\Phi} : z \mapsto \sigma(\Phi(z))$, где $\sigma \in S_3$ переводит $\Phi(z)$ в D_{31} , то отображение $\Psi_{\tilde{\Gamma}}$ из леммы 8.4 немедленно даст сопряженность динамической системы $\hat{\Psi} : NW(\Phi) \cap D_{31} \rightarrow NW(\Phi) \cap D_{31}$ с левым сдвигом на топологической марковской цепи $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$ с помощью естественного гомеоморфизма $\hat{\Psi}_{\tilde{\Gamma}}$, построенного по $\Psi_{\tilde{\Gamma}}$ (ориентированный граф $\hat{\Gamma}$ имеет четыре вершины и изображен на рис. 8.2). Для того, чтобы вернуться к исходному отображению Φ , необходимо учитывать все диски D_{ij} и следить за тем, в каком из шести дисков находится точка $\Phi^k(z)$. Это можно легко проделать, если использовать буквы r и t над стрелками на рис. 8.2 (напомним, что $A = rr$ и $C = trt$). Буква r обозначает для диска D_{31} перестановку $(312) \in S_3$, а буква t перестановку $(13) \in S_3$, что немедленно дает сопряженность Φ на $NW(\Phi)$ с левым сдвигом на цепи Σ_{Γ} . Первая часть теорема доказана.

Пункт (i) второй части теоремы тривиален. Доказательство пункта (ii) основано на лемме 8.6 и абсолютно аналогично доказательству первой части, если в качестве множества $\mathcal{Y}^+$ выбрать, например,

$$\mathcal{Y}^+ = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma(\tilde{\mathcal{Y}} \cup \Phi(\tilde{\mathcal{Y}}) \cup \Phi^2(\tilde{\mathcal{Y}})).$$

□

Замечание 8.1. Множество $\mathcal{Y}^+$ можно выбрать не единственным образом. Например можно заменить его на $\Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ для любого наперед заданного $k \in \mathbb{Z}$. Однако, с множеством $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ связаны следующие трудности: во-первых, его размерность по Минковскому, вообще говоря, может быть строго больше размерности $\mathcal{Y}^+$; во-вторых, прообраз любой точки из Σ_{Γ}^+ в $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ уже перестает быть липшицевым многообразием, а превращается в погруженное липшицево многообразие. Вторая трудность сродни ситуации, возникающей из-за наличия в системе трансверсальной гомоклинической точки: устойчивое и неустойчивое многообразия некоторой неподвижной точки гиперболического отображения начинают сильно осциллировать и запутываться при удалении от неподвижной точки.

8.7 Теорема о точной структуре хаоса в оптимальном синтезе в модельной задаче с правильным треугольником

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему второй части работы, описывающую динамику оптимальных траекторий в исходной задаче оптимального управления (5.1) с правильным треугольником. Первые три пункта теоремы описывают исследуемые множества точек $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$, сотканные из траекторий гамильтоновой системы (5.2), а остальные пункты теоремы описы-

вают хаотическую динамику на этих множествах. Поскольку любая траектория из множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ пересекает стратифицированное многообразие $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{13} \cup \mathcal{S}_{23}$ разрыва правой части системы (5.2) счетное число раз, то хаотическая динамика поведения этих траекторий описана в терминах последовательности пересечения страт S_{ij} .

Теорема 8.2 (М.И. Зеликин, Л.В. Локуцкий и Р. Хильдебранд). *В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ задачи (5.1) определены два множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$, обладающие следующими свойствами*

- (I) *Для любой точки $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$ гамильтоновой системы (5.2), проходящая через z , существует и единственна при $t \in [-\infty; T(z)]$. Траектория $X(t, z)$ попадает в начало координат за время $T(z)$, $X(T(z), z) = 0$.*
- (II) *Множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ инвариантны относительно потока гамильтоновой системы (5.2) в следующих смыслах. Если $z \in \mathcal{X}^+$, то $X(t, z)$ лежит в $\mathcal{X}^+$ при всех $t \in [0; T(z))$. Если же $z \in \mathcal{X}$, то $X(t, z)$ лежит в $\mathcal{X}$ при всех $t \in [-\infty; T(z))$.*
- (III) *Проекция траектории $X(t, z)$ на фазовое пространство M , продолженная 0 при $t > T(z)$ является оптимальной траекторией при любом $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ (то есть $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+ \subset M_+$). Более того, траектория $X(t, z)$ пересекает поверхность переключения $\mathcal{S}$ счетное число раз в моменты $\dots < t_{-1} < t_0 \leq 0 < t_1 < t_2 \dots < T(y)$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$ и $t_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow -\infty$.*
- (IV) *Динамическая система $\Phi : \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ в точку первого пересечения траектории $X(t, z)$ с множеством $\mathcal{S}$, $\Phi(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с топологической цепью Маркова бесконечных в обе стороны путей на графе Γ с помощью некоторого отображения Ψ_Γ :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \\ \downarrow \Psi_\Gamma & & \downarrow \Psi_\Gamma \\ \Sigma_\Gamma & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma \end{array}$$

Отображение Ψ_Γ непрерывно, и сюръективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma$ есть одномерное гладкое многообразие, диффеоморфное открытому интервалу. Пусть V обозначает множество путей в Γ , начинающихся из вершины V . Тогда прообразы множеств $\Psi_\Gamma^{-1}(.A_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(.B_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(.C_{ij})$ и $\Psi_\Gamma^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте S_{ij} .

- (V) *Динамическая система $\Phi : \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $y \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S}$ в точку первого пересечения траектории $X(t, z)$ с множеством $\mathcal{S}$, $\Phi(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с левым сдвигом на топологической цепи Маркова Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на графе Γ (см. определение 8.1) с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^+ , т.е. нижеследующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}_+ \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{X}_+ \cap \mathcal{S} \\
\downarrow \Psi_\Gamma^+ & & \downarrow \Psi_\Gamma^+ \\
\Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma^+
\end{array}$$

Отображение Ψ_Γ^+ непрерывно, и сюръективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ есть липшицево многообразие, относительная внутренность которого гомеоморфна двумерному открытому диску. Прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте $\mathcal{S}_{ij}$.

(VI) Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ удовлетворяют неравенствам

$$3.204 \leq \dim_H \mathcal{X}^+ \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X}^+ \leq 3.408.$$

$$2.575 \leq \dim_H \mathcal{X} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X} \leq 3.284.$$

(VII) Топологическая энтропия левого сдвига l на Σ_Γ и Σ_Γ^+ равна

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0.4057$$

(VIII) Абсолютно аналогичная картина наблюдается в гамильтоновой системе (5.2) для траекторий исходящих из начала координат, за исключением того, что, они уже не будут оптимальными в задаче (5.1).

Доказательство. Для того, чтобы построить множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$, мы воспользуемся построенными в теореме 8.1 множествами $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^+$ соответственно. На самом деле, отличие этих пар множеств друг от друга заключается в том, что, во-первых, вторая пара лежит в фактор-пространстве M_+/g и первая – в исходном пространстве $\mathcal{M}$, а, во-вторых, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^+$ лежат на поверхности переключения $\mathcal{S}/g$ и не содержат самих оптимальных траекторий, а лишь точки переключения. Построим сначала промежуточные множества $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_+$ следующим образом: для каждой точки из $\mathcal{Y}$ или $\mathcal{Y}^+$ поместим в $\mathcal{Z}$ или $\mathcal{Z}_+$ соответственно выходящую из этой точки траекторию проекции гамильтоновой системы (5.2). В $\mathcal{Z}$ поместим траекторию целиком, а в $\mathcal{Z}_+$ только ее половину, отвечающую положительному направлению времени s . Заметим, что $\mathcal{Z} \cap (\mathcal{S}/g) = \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}_+ \cap (\mathcal{S}/g) = \mathcal{Y}^+$, так как множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^+$ инварианты относительно Φ , и, значит, мы не приобретем новых точек на $\mathcal{S}$ в следствии этой процедуры. Множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ есть просто прообразы множеств $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_+$ при проекции $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/g$. Поскольку множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^+$ лежат в M_+/g , то любая траектория, начинающаяся в точке $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ или $\pi^{-1}(\mathcal{Y}^+)$ является оптимальной и приходит в начало координат за конечное время. Таким образом, пункт (I) доказан. Пункты (II) и (III) получается автоматически из построения множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$.

Полусопрягающие отображения Ψ_Γ и Ψ_Γ^+ строятся одинаковым образом: необходимо сначала применить проекцию π из M_+ на фактор-пространство M_+/g , а потом соответствующее отображение $\widehat{\Psi}_\Gamma$ или $\widehat{\Psi}_\Gamma^+$ из теоремы 8.1:

$$\Psi_\Gamma = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi \quad \text{и} \quad \Psi_\Gamma^+ = \widehat{\Psi}_\Gamma^+ \circ \pi.$$

Изучим сначала свойства отображения Ψ_Γ : очевидно оно непрерывно, как композиция непрерывных отображений; сюръективно, как композиция сюръективного и биективного отображения. Чтобы избежать путаницы, будем писать $\Phi^\uparrow$ для отображения Пуанкаре на исходной поверхности переключения $\mathcal{S}$ и $\Phi^\downarrow$ для отображения Пуанкаре на факторе $\mathcal{S}/g$. Тогда коммутативность диаграммы в пункте (IV) получается так:

$$\Psi_\Gamma \circ \Phi^\uparrow = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi \circ \Phi^\uparrow = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \Phi^\downarrow \circ \pi = l \circ \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi = l \circ \Psi_\Gamma.$$

Второе равенство выполнено в силу того, что гамильтонова система (5.2) уважает действие g , и, следовательно, его уважает отображение последования Пуанкаре, а третье равенство выполнено по теореме 8.1. Прообразом $\pi^{-1}(z)$ любой точки из $z \in M_+/g$ является гладкая одномерная кривая – орбита действия g группы $\mathbb{R}_+$. В силу биективности $\widehat{\Psi}_\Gamma$ получаем, что $\Psi_\Gamma^{-1}(\sigma)$ для любого $\sigma \in \Sigma_\Gamma$ является гладкой кривой. Пункт (IV) доказан.

Доказательство пункта (V) для отображения Ψ_Γ^+ почти во всем эквивалентно доказательству пункта (IV) для отображения Ψ_Γ . Единственное небольшое отличие заключается в исследовании прообраза $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\sigma)$ любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$. В теореме 8.1 доказано, что $(\widehat{\Psi}_\Gamma^+)^{-1}(\sigma)$ является липшицевой кривой в $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$. Учитывая структуру проекции π^{-1} немедленно получаем, что $\pi^{-1}((\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\sigma))$ является двумерным липшицевым многообразием, гомеоморфным декартову произведению отрезка на интервал.

Чтобы получить оценки в пункте (VI) мы докажем, что

$$\begin{aligned} \dim_H \mathcal{X} &\geq 1 + \dim_H \mathcal{Z} \geq 2 + \dim_H \mathcal{Y} & \overline{\dim}_B \mathcal{X} &\leq 1 + \overline{\dim}_B \mathcal{Z} \leq 2 + \overline{\dim}_B \mathcal{Y} \\ \dim_H \mathcal{X}^+ &\geq 1 + \dim_H \mathcal{Z}_+ \geq 2 + \dim_H \mathcal{Y}^+ & \overline{\dim}_B \mathcal{X}^+ &\leq 1 + \overline{\dim}_B \mathcal{Z}_+ \leq 2 + \overline{\dim}_B \mathcal{Y}^+ \end{aligned}$$

Эти оценки получаются элементарным применением формул для оценки размерностей по Хаусдорфу и по Минковскому произведения множеств (см. [79], Chapter 7).

Вычислим теперь топологические энтропии левых сдвигов на Σ_Γ и Σ_Γ^+ . Поскольку граф Γ не связан и состоит из двух копий некоторого графа Γ' , то для вычисления топологической энтропии можно заменить граф Γ на Γ' . Граф Γ' получается из Γ склеиванием вершин одного типа, у которых совпадают индексы, то есть $\mathcal{A}_{ij}$ с $\mathcal{A}_{ji}$, $\mathcal{B}_{ij}$ с $\mathcal{B}_{ji}$ и т.д. Пусть A_{01} обозначает 0,1-матрицу графа Γ' . Поскольку A_{01} примитивна (так как граф Γ' сильно связан и у циклов нет общего делителя длины). Хорошо известно, что в этом случае по теореме Перрона-Фробениуса, у матрицы A_{01} существует единственное положительное собственное значение $\lambda_{\max} > 0$ и интересующие нас топологические энтропии совпадают и равняются $\log_2(\lambda_{\max})$ (см. [15]).

Если p – собственный вектор A_{01} , отвечающий собственному значению $\lambda_{\max}$, то, в силу единственности $\lambda_{\max}$ и p , он должен выдерживать любую перестановку координат, индуцированную из действия группы S_3 на графе Γ' . Поэтому, если вершине A_{12} отвечает координата a в векторе p , то всем вершинам A_{ij} также отвечает координата a в векторе p . Следовательно вершинам B_{ij} и C_{ij} отвечает координата $\lambda_{\max}^{-1}a$, а вершинам D_{ij} – координата $\lambda_{\max}^{-2}a$, и мы немедленно приходим к уравнению $a = \lambda_{\max}^{-2}a + \lambda_{\max}^{-3}a$. Поэтому

$$\lambda_{\max}^3 - \lambda_{\max} - 1 = 0.$$

По формуле Кордано находим значение $\lambda_{\max}$, заявленное в условии теоремы.

Последний пункт теоремы получается немедленно, после применения отражения $g(-1)$ к гамильтоновой системе (5.2). $\square$

Замечание 8.2. Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ при проекции на исходное фазовое пространство $M = \{(x, y)\} = \mathbb{R}^4$ не изменяются, так как отображение E является локально липшицевым, и, следовательно, проекция $M_+ = \text{graph } E \rightarrow M$ является локально билипшицевой.

Замечание 8.3. Множество Ξ , определенное в теореме 5.1, в случае, если треугольник Ω является правильным, содержится в множестве $\mathcal{X}$.

ГЛАВА 9

Хаотичность на конечных интервалах времени в гамильтоновых системах с разрывной правой частью

В этом параграфе будут сформулированы и доказаны две теоремы о хаотичном поведении траекторий в интегральных воронках в гамильтоновых системах с разрывной правой частью общего положения (см. [68, 72, 74, 83]). Доказательства этих теорем основываются на структуре оптимального синтеза в модельной задаче (5.1), точнее на теоремах 5.1 и 8.2.

9.1 Гамильтоновы системы с разрывной правой частью

Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие $\mathcal{M}^{2n}$. Пусть $(2n - 1)$ -мерное стратифицированное подмногообразие $\mathcal{S}^H \subset \mathcal{M}$ разделяет $\mathcal{M}$ на конечное число открытых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$: $(\mathcal{M} = \overline{\bigcup \Omega_i})$. Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q, p) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ продолжимую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$. Рассмотрим открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Пусть в множестве $\mathcal{U}$ содержатся части лишь от трех $(2n - 1)$ -мерных страт $\mathcal{S}_{ij}^H \subset \mathcal{S}^H$, $(i, j = 1, 2, 3)$, которые разделяют области Ω_i и Ω_j . Пусть $\mathcal{S}_{ij}^H$ примыкают друг к другу по страте $\mathcal{S}_{123}^H$ размерности $(2n - 2)$ как показано на рис. 9.1.

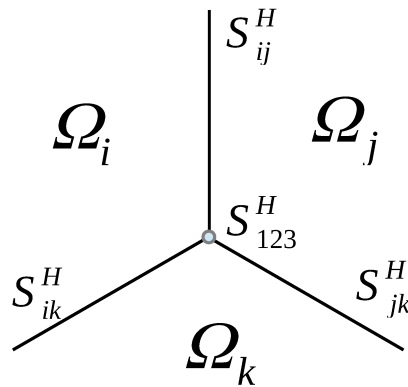


Рисунок 9.1: Взаимное расположение страт $\mathcal{S}_{ij}^H$, $\mathcal{S}_{123}^H$ и областей Ω_i

Главным инструментом исследования общих задач поведения решений дифференциальных уравнений является изучение их типичных особенностей. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью эта программа была в основном реализована в работах Пуанкаре. Но в теории оптимального управления ключевую роль играют гамильтоновы системы с разрывной правой частью и касательным скачком вектора скорости, которые возникают при применении принципа максимума Понтрягина.

В работах И.Купки и Зеликина-Борисова [28], [32] были изучены решения кусочно-гладкой гамильтоновой системы, которые входят в особую точку x_0 порядка 2, лежащую на поверхности разрыва S коразмерности 1. Было доказано, что моменты пересечения $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ таких решений с поверхностью S при подходе решения к точке x_0 в ситуации общего положения образуют двойную асимптотически геометрическую прогрессию – четтеринг, точнее, bi-constant ratio chattering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{2n+2} - t_{2n+1}}{t_{2n+1} - t_{2n}} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{2n+3} - t_{2n+2}}{t_{2n+2} - t_{2n+1}} = b.$$

В данной главе изучается ситуация, когда особая точка второго порядка лежит на страте коразмерности 2. Здесь возникает качественно новый феномен, типичный для задач оптимального синтеза и для гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Помимо траекторий, которые входят в x_0 с обычным четтерингом существует канторово множество траекторий $\mathcal{X}_H(x_0)$, динамика пересечения которых со стратами $\mathcal{S}_{ij}^H$ описывается топологической цепью Маркова Σ_Γ^+ , где Γ некоторый ориентированный граф (см. определение 8.1). Точнее, Σ_Γ^+ является фактором системы, описывающей динамику пересечений траекторий из $\mathcal{X}_H(x_0)$ с $\mathcal{S}_{ij}^H$. Пересечение множества траекторий $\mathcal{X}_H(x_0)$ с трансверсальной к ним поверхностью есть многомерное канторово множество типа подковы Смейла. Топологическая марковская цепь Σ_Γ^+ гомеоморфна стандартной подкове Смейла [15] как топологическое пространство, но не сопряжена с ней как динамическая система.

9.2 Формулировки теорем о хаосе в гамильтоновых системах с разрывной правой частью

Прежде чем перейти к основным формулировкам, определим формально ситуацию, изображенную на рис. 9.1. А именно, потребуем, чтобы выполнялись следующие неравенства (с возможной заменой H на $-H$):

$$H_i(x) > \max(H_j(x), H_k(x)) \quad \forall x \in \Omega_i, \text{ для всех различных } i, j \text{ и } k \text{ из } \{1, 2, 3\}. \quad (9.1)$$

Обозначим через G и F_i , $i = 0, 1, 2, 3$, следующие суммы

$$3G = 3F_0 = H_1 + H_2 + H_3, \quad 3F_1 = H_2 - H_3, \quad 3F_2 = H_3 - H_1, \quad 3F_3 = H_1 - H_2. \quad (9.2)$$

Очевидно, функции H_i однозначно выражаются через G , F_1 и F_2 и наоборот, а $F_3 \equiv -F_1 - F_2$ (функция F_3 введена для удобства обозначений).

Определение 9.1. Точку $x_0 \in \mathcal{S}_{123}^H$, $H_1(x_0) = H_2(x_0) = H_3(x_0)$, будем называть **странной**¹, если в x_0 выполнен следующий набор условий (без ограничения общности $H(x_0) = 0$):

- (i) В окрестности x_0 выполняется условие (9.1) (возможно с заменой H на $-H$).
- (ii) Функций F_r , $(\text{ad } F_i)F_r$, $(\text{ad } F_j)(\text{ad } F_i)F_r$ и $(\text{ad } F_k)(\text{ad } F_j)(\text{ad } F_i)F_r$ обращаются в ноль в точке x_0 , где индекс r пробегает числа 1,2,3, а индексы i,j,k – числа 0,1,2,3. Набор их дифференциалов в точке x_0 имеет максимальный ранг² (насколько это допускается условиями антикоммутативности, линейности, тождествами Якоби и тождеством $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$), иными словами, эти дифференциалы находятся в общем положении.
- (iii) Билинейная форма

$$B_{rr'} = \text{ad } F_r(\text{ad } G)^3 F_{r'}|_{x_0}, \quad r, r' = 1, 2, 3$$

имеет максимально возможный ранг 2, и является симметрической неположительно (неорицательно) определенной, если условие (9.1) выполняется для H (соответственно для $-H$). Остальные (независимые от перечисленных) коммутаторы пятого порядка от функций $G = F_0$ и F_r , $r = 1, 2, 3$, обращаются в ноль в точке x_0 .

Поведение траекторий в интегральной воронке траекторий, входящих в точку x_0 описывается в двух нижеследующих теоремах 9.1 и 9.2. В первой теореме дано намного более точное описание хаотичного поведения траекторий чем во второй, однако на форму $B_{rr'}$ наложено дополнительное ограничение, эквивалентное (для модельной задачи (5.1)) условию правильного треугольника (аналогично теореме 8.2). Во второй же теореме это условие заменено на естественное условие близости к правильному треугольнику (аналогично теореме 5.1).

Теорема 9.1 (М.И. Зеликин, Л.В. Локуциевский, Р. Хильдебранд). *Предположим точка $x_0 \in \mathcal{S}_{123}^H$ гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом H является странной (удовлетворяет условиям определения 9.1), а форма $B_{rr'}$ пропорциональна билинейной форме с матрицей*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

с положительным коэффициентом, если условие (9.1) выполняется для H , и с отрицательным коэффициентом, если условие (9.1) выполняется для $-H$.

Тогда в любой достаточно малой окрестности странной точки x_0 существует множество точек $\mathcal{X}_H(x_0)$, такое что

¹Мы надеемся, что это название вызовет у читателя ассоциации, связанные с понятием странный аттрактор.

²На самом деле это условие может быть ослаблено.

- (I) Для любой точки $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$, проходящая через z , существует и единственная при $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в x_0 за время $T(z)$, $X(T(z), z) = x_0$.
- (II) Множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ соткано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$, то $X(t, z)$ лежит в $\mathcal{X}_H(x_0)$ при всех $t \in [0; T(z))$. Более того, траектория $X(t, z)$ при $t \in (0; T(z))$ пересекает поверхность переключения $\mathcal{S}^H$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \dots$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$.
- (III) Динамическая система $\Phi_H : \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \rightarrow \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, переводящая точку $z \in \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с $\mathcal{S}^H$, т.е. $\Phi_H(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^H с односторонней топологической марковской цепью Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на фиксированном графе Γ (см. определение 8.1), не зависящем от x_0 и H :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H} & \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\ \downarrow \Psi_\Gamma^H & & \downarrow \Psi_\Gamma^H \\ \Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma^+ \end{array}$$

где l – бернуллиевский сдвиг влево, а Ψ_Γ^H – непрерывное сюръективное отображение. Прообраз $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma)$ любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2 , и диаметр $\Phi_H^k((\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma))$ стремится к 0 при $k \rightarrow +\infty$. Пусть $(.V)$ обозначает множество путей в Γ , начинающихся в вершине V . Тогда прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте $\mathcal{S}_{ij}^H$ с теми же индексами.

- (IV) Если³ $dG(x_0) = 0$, то размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ не зависят от x_0 и H (лишь бы точка x_0 удовлетворяла условиям теоремы), совпадают с размерностями множества $\mathcal{X}$ в теореме 8.2, и, следовательно, удовлетворяют оценкам

$$3.204762 \leq \dim_H \mathcal{X}_H(x_0) \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X}_H(x_0) \leq 3.407495 \quad (9.4)$$

- (V) Топологическая энтропия бернулевского сдвига l есть

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0.4057$$

- (VI) Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0 .

³К сожалению в статьях [68, 74] содержится досадная опечатка и условие $dG(x_0) = 0$ пропущено.

Множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ является прямым аналогом множества $\mathcal{X}^+$ из теоремы 8.2. Однако, с формальной точки зрения, гамильтонова система (5.2) ПМП в модельной задаче оптимального управления (5.1) не удовлетворяют условиям теоремы 9.1, так как большинство скобок Пуассона в определении странной точки обнуляются тождественно, и, значит, не выполняется условие о линейной независимости дифференциалов в 0. Можно было бы сформулировать теорему 9.1 так, чтобы подобные случаи удовлетворяли ее условиям, но тогда мы потеряли бы структурную устойчивость феномена (см. замечание 9.11).

Замечание 9.1. Используя методы вычисления топологической энтропии несложно найти меру Перри μ_P на Σ_Γ^+ , удовлетворяющую вариационному принципу и максимизирующую метрическую энтропию:

$$\max_{\mu} h_{\mu}(l) = h_{\mu_P}(l) = h_{top}(l).$$

Теорема 9.2. Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом H является странной (удовлетворяет условиям определения 9.1). Предположим также, что существует такое число $\lambda_H(x_0) > 0$ (если условие (9.1) выполняется для H) или $\lambda_H(x_0) < 0$ (если условие (9.1) выполняется для $-H$), что форма $\lambda_H(x_0)B_{rr'}$ достаточно близка⁴ к билинейной форме с матрицей (9.3).

Тогда в любой достаточно малой окрестности странной точки x_0 существует множество точек $\Xi_H(x_0)$, обладающее следующими свойствами:

- (I) Для любой точки $z \in \Xi_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$, проходящая через z , существует и единственная при $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в x_0 за время $T(z)$, $X(T(z), z) = x_0$.
- (II) Множество $\Xi_H(x_0)$ соткано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \Xi_H(x_0)$, то $X(t, z)$ лежит в $\Xi_H(x_0)$ при всех $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ при $t \in (0; T(z))$ пересекает поверхность переключения $\mathcal{S}^H$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \dots$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$.
- (III) Рассмотрим динамическую систему $\Phi_H : \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \rightarrow \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, переводящую точку $z \in \Xi_H(x_0)$ на $\mathcal{S}^H$ в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с $\mathcal{S}^H$, т.е. $\Phi_H(z) = X(t_1, z)$. Существует такое натуральное $n > 0$ (одинаковое для всех гамильтоновых систем и точек x_0 и совпадающее со степенью n в теореме 5.1), что отображение Φ_H^n полусопряжено с топологической марковской цепью бернуллиевского сдвига на несвязном объединении двух экземпляров пространств Σ_{01}^+ бесконечных в одну сторону последовательностей из 0 и 1. Другими словами, существует такое непрерывное сюръективное

⁴Под «достаточно близка» понимается существование такой независимой от x_0 и H окрестности матрицы (9.3) в пространстве симметрических матриц ранга 2, что форма $\lambda_H(x_0)B_{rr'}$ лежит в этой окрестности.

отображение Ψ_{01}^H из $\Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ в пространство $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H^n} & \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\ \downarrow \Psi_{01}^H & & \downarrow \Psi_{01}^H \\ \bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+ & \xrightarrow{l} & \bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+ \end{array}$$

где l обозначает сдвиг влево на каждом экземпляре Σ_{01}^+ . Прообраз $(\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma)$ каждой точки $\sigma \in \Sigma_{01}^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2 , и диаметр $\Phi_H^k((\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma))$ стремится к 0 при $k \rightarrow +\infty$.

(IV) Помимо описанного в пунктах (I)–(IV) канторова множества $\Xi_H(x_0)$ траекторий, в точку x_0 входит еще два множества четтеринг траекторий:

(a) Существует два однопараметрических семейства "трехзвенных" траекторий R_{123} и R_{132} , попадающих в точку x_0 за конечное время с четтеринг режимом, т.е. режимом со счетным числом последовательных пересечений стратов S_{12}^H , S_{23}^H и S_{31}^H в написанном порядке для R_{123} и в обратном порядке для R_{132} .

(b) Существует 3 двупараметрических семейства "четырёхзвенных" траекторий Q_1 , Q_2 и Q_3 . Каждая траектория из Q_i счетное число раз последовательно пересекает страты S_{ij}^H , S_{ik}^H , S_{ik}^H , S_{ij}^H и далее по циклу ($i \neq j \neq k$).

(V) Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0 .

Замечание 9.2. Если выполняется условие «правильного треугольника» из теоремы 9.1, то множество $\Xi_H(x_0)$, содержится в множестве $\mathcal{X}_H(x_0)$.

9.3 Ниспадающая система скобок Пуассона

Доказательства теорем 9.1 и 9.2 похожи и опираются на ключевые факты о хаотичности оптимального синтеза в модельной задаче, полученные соответственно в доказательствах теорем 8.2 и 5.1. Для того, чтобы в явном виде отыскать описанный в теоремах 9.1 и 9.2 оптимальный синтез модельной задачи (5.1), содержащийся внутри произвольной гамильтоновой системы с разрывной правой частью, мы воспользуемся так называемой ниспадающей системой скобок Пуассона, которая позволяет проводить эффективное исследование поведения траекторий в интегральных воронках. С помощью метода ниспадающей системы скобок Пуассона доказаны, например, теорема

о гамильтоновости 1.2 потока особых траекторий (см. [24]) и теорема 4.3 о структуре лагранжевого многообразия в окрестности особой траектории первого порядка в экстремальных задачах, голономных по управлению, меняющемуся в многограннике (см. [61]).

Опишем подробно структуру ниспадающей системы скобок Пуассона. Вместо гамильтонианов H_i будем использовать гамильтонианы F_i из (9.2), учитывая, что $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$. Гамильтониан H может быть записан так (здесь и далее по совпадающим верхним и нижним индексам ведется суммирование от 1 до 3):

$$H = G + \sum_{r=1}^3 u^r F_r = G + u^r F_r$$

где $u \in \mathbb{R}^3$, $u^1 + u^2 + u^3 = 0$ и функция $u(x)$ выбирается следующим образом:

$$u^i(x) = -1, u^j(x) = 1, u^k(x) = 0 \text{ если } x \in \Omega_k \text{ и } (ijk) - \text{четная перестановка.}$$

Таким образом, $u(x)$ находится в соответствующей вершине треугольника

$$\Omega = \text{conv}\{(-1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, -1)\} \subset U = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 0\}. \quad (9.5)$$

Поскольку гамильтониан H является негладким, то траектория гамильтоновой системы ОДУ с разрывной правой частью определяется по Филиппову (см. [62]). Дадим точное определение. Обозначим через ω симплектическую форму на $\mathcal{M}$, а через i_ω — задаваемый формой ω канонический изоморфизм $i_\omega(z) : T_z^* \mathcal{M} \rightarrow T_z \mathcal{M}$. Тогда абсолютно непрерывная траектория $z(t)$ является траекторией гамильтоновой системы ОДУ с гамильтонианом H , если и только если для почти всех t выполняется дифференциальное включение

$$\dot{z}(t) \in \overline{\text{conv}}\{\text{предельных точек } i_\omega dH(\tilde{z}) \text{ при } \tilde{z} \rightarrow z(t)\} \subset T_{x(t)} \mathcal{M}.$$

или равносильно

$$\dot{z}(t) = i_\omega \left(dG(z(t)) + u^r dF_r(z(t)) \right), \quad \text{для некоторого } u \in \arg \max_{u \in \Omega} \{u^r F_r(z(t))\}.$$

Замечание 9.3. Очень важно отметить, что на пространстве $U = \{u : u_1 + u_2 + u_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ не задано скалярное произведение. Свертку $u^r F_r$ правильно понимать как свертку вектора и ковектора, где $u(x) \in U$, а $F(x) \in U^*$.

Приведем теперь процедуру построения ниспадающей системы скобок Пуассона для гамильтониана H . Для этого выпишем набор дифференциальных уравнений, вдоль произвольной траектории системы, и упорядочим их по строкам. В первой строке ниспадающей системы стоят три ОДУ (будем перед уравнениями, стоящими в k -ой строке, ставить символ $\lfloor k \rfloor$):

$$\lfloor 1 \rfloor \frac{d}{dt} F_i = \{G, F_i\} + \{F_r, F_i\} u^r, \quad i = 1, 2, 3$$

Вторая строка содержит два типа уравнений.

$$\begin{aligned} \lceil 2 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G, F_i\} &= \{G, \{G, F_i\}\} + \{F_r, \{G, F_i\}\} u^r, \quad i = 1, 2, 3; \\ \lceil 2 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{F_i, F_j\} &= \{G, \{F_i, F_j\}\} + \{F_r, \{F_i, F_j\}\} u^r, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В общем случае в m -ой строке выписаны уравнения вида

$$\lceil m \rceil \quad \frac{d}{dt} \mathcal{K}^m = \{G, \mathcal{K}^m\} + \{F_r, \mathcal{K}^m\} u^r,$$

где $\mathcal{K}^m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, $K_1 = F_i$, $i = 1, 2, 3$, а остальные символы K_j могут обозначать как G так и F_i . Уравнения в $(m+1)$ -ой строке получаются дифференцированием по t правых частей уравнений в m -ой строке. Т.е. например

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G, \mathcal{K}^m\} = \{G, \{G, \mathcal{K}^m\}\} + \{F_r, \{G, \mathcal{K}^m\}\} u^r,$$

и

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{F_i, \mathcal{K}^m\} = \{G, \{F_i, \mathcal{K}^m\}\} + \{F_r, \{F_i, \mathcal{K}^m\}\} u^r, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ниспадающая система выписывается вплоть до строки с номером $2h$, где h – порядок особенности в точке x_0 (см. [40]). В нашем случае $h = 2$, так как управление в явном виде в точке x_0 возникает на 4 шаге дифференцирования.

Таким образом, в m -ой строке выписаны уравнения на производную по времени от скобок m -ого порядка, а правые части этих уравнений есть аффинные по u функции, где коэффициентами выступают скобки $(m+1)$ -ого порядка.

Отметим, что выписывание ниспадающей системы сродни отысканию особой траектории, когда равенства $F_i(x(t)) \equiv 0$ дифференцируются вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = G + F_r u^r$. Однако с нашей точки зрения ниспадающая система (хоть и содержит большое количество уравнений) значительно удобнее прямого дифференцирования, так как не содержит формальных производных от управляющего параметра $\dot{u}, \ddot{u}, \dots$, с которыми обычно очень неудобно работать.

Определение 9.2. Главными скобками в ниспадающей системе мы будем называть скобки F_r , $(\text{ad } G)F_r$, $(\text{ad } G)^2 F_r$, $(\text{ad } G)^3 F_r$, $r = 1, 2, 3$. Остальные скобки порядка не больше четырех мы будем называть не главными⁵.

Сведение гамильтоновой системы с разрывной правой частью к гамильтоновой системе ПМП модельной задачи (5.1) будет основано на том факте, что в окрестности любой странной точки в любой строке с номером m не главные скобки имеют больший порядок малости, чем главные скобки, и потому (как будет показано ниже) не влияют на принципиальное поведение системы:

⁵Отметим, что $\dot{G}$ не участвует в ниспадающей системе и потому не является ни главной скобкой, ни неглавной.

Лемма 9.1. Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$ входящую в странную точку $x_0 = x(0)$ при $t < T$. Тогда существует такая константа $c > 0$, что если $\mathcal{K}^m$ – главная скобка Пуассона в ниспадающей системе порядка $m \leq 4$, то при t близких к T выполнено

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq c(T - t)^{5-m},$$

а если $\mathcal{K}^m$ – не главная скобка Пуассона, $m \leq 4$, то

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq c(T - t)^{6-m},$$

Доказательство. Мы будем доказывать лемму обратной индукцией по m . Основным инструментом будет следующая формула, верная для любой скобки $\mathcal{K}_m$, $m \leq 4$, из ниспадающей системы при $t \in [0; T]$:

$$\mathcal{K}^m = \int_T^t \left(\{G, \mathcal{K}^m\}(x(\tau)) + u^r(\tau) \{F_r, \mathcal{K}^m\}(x(\tau)) \right) d\tau, \quad (9.6)$$

которая следует, из того, что $\mathcal{K}^m(x(T)) = 0$ для $m \leq 4$.

Докажем теперь базу обратной индукции. Рассмотрим последнюю строчку ниспадающей системы. Если $\mathcal{K}^4$ – не главная скобка, то подынтегральное выражение в (9.6) обнуляется при $t = T$ по определению странной точки x_0 . Следовательно, при малых $T - t$ для некоторого $b_4 > 0$ выполнено

$$|\mathcal{K}^4(x(t))| \leq b_4(T - t)^2, \quad \text{если } \mathcal{K}^4 \text{ – не главная скобка.}$$

Рассмотрим главную скобку $\mathcal{K}^m$ в последней строке ниспадающей системы. Для нее подынтегральное выражение в (9.6) при $t = T$ вообще говоря не обнуляется. Поэтому максимум что мы можем гарантировать, это

$$|\mathcal{K}^4(x(t))| \leq b_4(T - t), \quad \text{если } \mathcal{K}^4 \text{ – главная скобка.}$$

Шаг обратной индукции очень похож на базу. Пусть $m < 4$. Если $\mathcal{K}_m$ – не главная скобка, то подынтегральное выражение в (9.6) содержит только не главные скобки. Поэтому из результата для строчки $m + 1$ получаем, что для некоторого $b_m > 0$ при $t < T$ близких к T

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq b_m(T - t)^{6-m}, \quad \text{если } \mathcal{K}^m \text{ – не главная скобка.}$$

Для главной скобки $\mathcal{K}^m$ получаем следующее: первое подынтегральное слагаемое в (9.6) является главной скобкой в строке с номером $(m + 1)$, а второе – не главной и мажорируется первым при малых $t < T$ близких к T . Поэтому при малых $t \geq 0$

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq b_m(T - t)^{5-m}, \quad \text{если } \mathcal{K}^m \text{ – главная скобка.}$$

что и требовалось. □

Замечание 9.4. В конце доказательства теорем 9.1 и 9.2 мы покажем, что на интересующих нас траекториях в интегральной воронке странной точки x_0 для главных скобок Пуассона выполнена также оценка снизу:

$$c''(T - t) \leq \max_m \left| \mathcal{K}^m(x(t)) \right|^{\frac{1}{5-m}} \leq c'(T - t),$$

для которых констант $c', c'' > 0$.

Конечно оценки, аналогичные полученным в лемме 9.1, верны и для траекторий выходящих из странной точки – необходимо только заменить $T - t$ на время, прошедшее с выхода из странной точки x_0 .

9.4 Раздутие особенности в странной точке

В этом параграфе мы опишем процедуру раздутия особенности в странной точке, связанную лишь с невырожденностью формы $B_{rr'}$ и покажем, что на нулевом сечении (т.е. на сфере, вклеенной в особую точку) возникает гладкое подмногообразие, содержащее в точности траектории гамильтоновой системы (5.2) ПМП модельной задачи (5.1) с треугольником Ω . Причем форма $B_{rr'}$ задаст то самое скалярное произведение на плоскости $u^1 + u^2 + u^3 = 0$, относительно которого задан функционал J в модельной задаче (5.2), поэтому правильность треугольника Ω на самом деле определяется формой $B_{rr'}$.

Замечание 9.5. Без ограничения общности всегда будем предполагать, что условие (9.1) выполнено для H (а не для $-H$). В этом случае согласно определению 9.1 форма $B_{rr'}$ является отрицательно определенной на U . Поэтому форму $-B_{rr'}$ можно использовать в качестве скалярного произведения на U .

Введем новые локальные координаты в окрестности точки x_0 . Рассмотрим набор из всех возможных скобок $\mathcal{K}^m$, $m \leq 4$ из ниспадающей системы скобок Пуассона – всего 255 штук⁶. Набор функций $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}^m, m \leq 4\}$ конечно же является зависимым, ввиду тождества Якоби, кососимметричности скобки Пуассона и того, что $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$. Более того, некоторые скобки являются тождественно нулевыми. Однако, согласно определению 9.1 странной точки, набор дифференциалов $d\mathcal{K}^m$ имеет в x_0 максимально возможный ранг. Поэтому набор $\mathcal{K}$ определяет отображение окрестности x_0 в линейное подпространство $\mathbb{R}^{255}$ размерности⁷ 31. Дополним систему $\mathcal{K}$ до полного набора локальных координат в окрестности x_0 произвольным набором гладких функций $w(x) = (w_1(x), \dots, w_{(\dim \mathcal{M} - 31)}(x)) \in \mathbb{R}^{\dim \mathcal{M} - 31}$, лишь бы дифференциал dw в x_0 имел максимальный ранг и выполнялось $w(x_0) = 0$. На пространстве $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{M} - 31}$ введем стандартную евклидову

⁶Размерность 255 получается следующим образом. Скобок 1-ого порядка в ниспадающей системе всего 3: F_1, F_2 и F_3 (скобка G не участвует в процедуре последовательного дифференцирования в ниспадающей системе). Скобок второго порядка всего $3 \cdot 4 = 12$: $\{F_i, F_j\}$ и $\{G, F_i\}$. Итого $255 = 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3$.

⁷Размерность 31 получается следующим образом. Размерность свободной нильпотентной алгебры Ли 4-ого порядка с тремя образующими G, F_1 и F_2 равняется 32. Однако мы исключили G из набора локальных координат, поэтому размерность понижается на 1.

норму.

В координатах $(\mathcal{K}, w)$ гамильтонова система ОДУ с гамильтонианом H записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{K}^m = \{G, \mathcal{K}^m\} + \{F_r, \mathcal{K}^m\}u^r, & m \leq 4; \\ \frac{d}{dt}w = \alpha(\mathcal{K}, w) + \beta_r(\mathcal{K}, w)u^r; \\ F_ru^r \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (9.7)$$

для некоторых гладких функций α и β_r . Отметим, что скобки 5-ого порядка $\mathcal{K}^5$ в окрестности x_0 являются гладкими функциями от локальных координат $(\mathcal{K}, w)$.

Раздутие особенности произведем аналогично раздутию начала координат в модельной задаче (см. параграф 5.7). Для этого определим действие $g_H(x_0)$ группы $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ на пространстве $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{M}} = \{(K, w)\}$ следующим образом.

Определение 9.3. Для произвольного ненулевого числа λ определим действие $g_H(x_0)(\lambda)$ следующим образом:

$$g_H(x_0)(\lambda) : (\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2, \mathcal{K}^3, \mathcal{K}^4, w) \mapsto (\lambda^4 \mathcal{K}^1, \lambda^3 \mathcal{K}^2, \lambda^2 \mathcal{K}^3, \lambda \mathcal{K}^4, \lambda w).$$

Действие $g_H(x_0)$ конечно не уважает гамильтонову систему с гамильтонианом H . Однако главная часть системы может быть выделена благодаря раздутию особенности в точке x_0 с помощью действия $g_H(x_0)$. Для этого введем точные обозначения для локальных координат в окрестности странной точки x_0 . Положим здесь и далее $F_0 = G$, а также

$$\mathcal{K}_r^1 = F_r, \quad \mathcal{K}_{ir}^2 = \{F_i, \mathcal{K}_r^1\}, \quad \mathcal{K}_{jir}^3 = \{F_j, \mathcal{K}_{ir}^2\}, \quad \mathcal{K}_{kji}^4 = \{F_k, \mathcal{K}_{jir}^3\},$$

где индекс r может принимать значения 1, 2 и 3, а остальные индексы i, j и k принимают те же значения или 0. В качестве локальных координат возьмем $w, \mathcal{K}_r^1, \mathcal{K}_{ir}^2, \mathcal{K}_{jir}^3$ и $\mathcal{K}_{kji}^4$.

Учитывая замечание 9.5, положим

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{K}) = & \left((-B^{rr'} \mathcal{K}_r^1 \mathcal{K}_{r'}^1)^3 + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{0r}^2 \mathcal{K}_{0r'}^2)^4 + \right. \\ & \left. + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{00r}^3 \mathcal{K}_{00r'}^3)^6 + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{000r}^4 \mathcal{K}_{000r'}^4)^{12} \right)^{\frac{1}{24}}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где матрица $B^{rr'}$ обозначает матрицу обратной формы на U^* к отрицательно определенной форме $B_{rr'}$ на U из определения 9.1 странной точки. Также положим

$$(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) = g_H(x_0)(1/\mu(\mathcal{K}))(\mathcal{K}, w). \quad (9.9)$$

Переменные $\tilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{\mathcal{K}}^m, m \leq 4\}$ и $\tilde{w}$ лежат на сферическом цилиндре

$$C_0^H = \{(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) : \mu(\tilde{\mathcal{K}}) = 1\}.$$

Цилиндр $\mathcal{C}^H$ зададим аналогично определению 5.5 в параграфе 5.7: $\mathcal{C}^H = \mathcal{C}_0^H \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$. Цилиндра $\mathcal{C}_0^H$ будем отождествлять с нулевым сечением $\mathcal{C}^H \cap \{\mu = 0\}$. Направление $\frac{\partial}{\partial \mu}$ будем называть вертикальным.

Отображение $(\mathcal{K}, w) \mapsto (\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w})$ обозначим через $\mathbf{B}_H$. Топологически данная процедура раздутия эквивалентна вырезанию подмногообразия, на котором обнуляются главные скобки Пуассона, и вклеиванию сферического цилиндра $\mathcal{C}_0^H$ в странную точку x_0 .

В дальнейшем знак волны над скобкой Пуассона будет означать деление на μ в соответствующей степени. То есть например

$$\tilde{\mathcal{K}}^m = \mathcal{K}^m / \mu^{5-m} \quad \text{или} \quad \widetilde{\{G, \mathcal{K}_m\}} = \{G, \mathcal{K}_m\} / \mu^{4-m}.$$

Для скобок до 4-ого порядка включительно мы получаем одну их локальных координат на $\mathcal{C}^H$, а скобки 5-ого порядка не изменяются при добавлении знака волны.

Теперь перенесем гамильтонову систему ОДУ на пространство $\mathcal{C}^H$, аналогично тому, как мы действовали в параграфе 5.8. Прямым дифференцированием (9.8) и (9.9) вдоль произвольной траектории получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu &= \Upsilon(\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u); \\ \frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{K}}^m &= \frac{1}{\mu} \left(\widetilde{\{G, \mathcal{K}^m\}} + \widetilde{\{F_r, \mathcal{K}^m\}} u^r - (5-m)\Upsilon\tilde{\mathcal{K}}^m \right); \\ \frac{d}{dt}\tilde{w} &= \frac{1}{\mu} (\alpha + \beta_r u^r - \Upsilon\tilde{w}); \\ \tilde{F}_r u^r &\rightarrow \max_{u \in \Omega}; \end{cases} \quad (9.10)$$

где

$$\begin{aligned} 24\Upsilon(\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u) &= -6(B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_r^1\tilde{\mathcal{K}}_{r'}^1)^2 B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_r^1(\widetilde{\{G, \mathcal{K}_{r'}^1\}} + \widetilde{\{F_{r''}, \mathcal{K}_{r'}^1\}} u^{r''}) + \\ &+ 8(B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2\tilde{\mathcal{K}}_{0r'}^2)^3 B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2(\widetilde{\{G, \mathcal{K}_{0r'}^2\}} + \widetilde{\{F_{r''}, \mathcal{K}_{0r'}^2\}} u^{r''}) + \\ &+ 12(B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3\tilde{\mathcal{K}}_{00r'}^3)^5 B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3(\widetilde{\{G, \mathcal{K}_{00r'}^3\}} + \widetilde{\{F_{r''}, \mathcal{K}_{00r'}^3\}} u^{r''}) + \\ &+ 24(B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4\tilde{\mathcal{K}}_{000r'}^4)^{11} B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4(\widetilde{\{G, \mathcal{K}_{000r'}^4\}} + \widetilde{\{F_{r''}, \mathcal{K}_{000r'}^4\}} u^{r''}). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Аналогично параграфу 5.8 обозначим векторное поле на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ в правой части (9.10) через $\xi_H(x_0)$. Формально поле $\xi_H(x_0)$ определено в окрестности $\mathcal{C}_0^H$ при $\mu > 0$, однако мы его продолжим теми же формулами на нижнюю половину окрестности в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu < 0\}$. Точнее: отображение

$$\mathbf{B}_H^{-1} : (\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) \mapsto (\mathcal{K}, w), \quad \text{где} \quad (\mathcal{K}, w) = g_H(x_0)(\mu)(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w})$$

является двулистным накрытием окрестности $\mathcal{C}_0^H$ в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$ над ее образом в проколотой окрестности⁸ x_0 и позволяет перенести значения функций α и β и скобок Пуассона 5-ого поряд-

⁸Отметим, что образ окрестности $\mathcal{C}_0^H$ в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$ при отображении $\mathbf{B}_H^{-1}$ не содержит проколотую окрестность точки x_0 .

ка на нижнюю половину цилиндра $\mathcal{C}^H \cap \{\mu < 0\}$. В этом случае отображение $\mathbf{B}_H^{-1}$ отображает векторное поле системы (9.10) в поле гамильтониана H и при $\mu > 0$ и при $\mu < 0$.

Отметим, что при $\mu \rightarrow 0$ поле $\xi_H(x_0)$ растет как $\frac{1}{\mu}$. Однако, поле $\mu\xi_H(x_0)$ уже может быть продолжено по непрерывности на сечение цилиндра $\mathcal{C}_0^H = \mathcal{C}^H \cap \{\mu = 0\}$ во всех точках, кроме точек множества $\mathcal{S}^H = \{\tilde{K}_r^1 = \tilde{K}_{r'}^1, r \neq r'\}$. Поэтому мы в дальнейшем будем предполагать, что поле $\mu\xi_H(x_0)$ определено на $\mathcal{C}_0^H \setminus \mathcal{S}^H$ с помощью естественного продолжения по непрерывности. Конечно же $\mu\xi_H(x_0) \neq 0$ на $\mathcal{C}_H^0$, не смотря на то, что $\mu = 0$ на $\mathcal{C}_H^0$. Траектории поля $\mu\xi_H(x_0)$ либо не пересекают сечение $\mathcal{C}_0^H$, либо лежат в нем, так как вдоль поля $\mu\xi_H(x_0)$ имеем $\dot{\mu} = \mu\Upsilon$. Более того, на $\mathcal{C}_0^H$ компоненты поля $\mu\xi_H(x_0)$, отвечающие переменным $(\tilde{K}, \tilde{w})$ не зависят от μ .

Таким образом, интегральные кривые полей $\xi_H(x_0)$ и $\mu\xi_H(x_0)$ совпадают на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$, отличается лишь скорость движения по ним. Если обозначить через s параметр времени движения по траектории поля $\mu\xi_H(x_0)$, то s и t связаны соотношением

$$ds = \frac{1}{\mu} dt.$$

Система (9.10) перепишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mu &= \mu\Upsilon(\mu, \tilde{K}, \tilde{w}, u); \\ \frac{d}{ds}\tilde{K}^m &= \{\widetilde{G, \mathcal{K}^m}\} + \{\widetilde{F_r, \mathcal{K}^m}\}u^r - (5-m)\Upsilon\tilde{K}^m; \\ \frac{d}{ds}\tilde{w} &= \alpha + \beta_r u^r - \Upsilon\tilde{w}; \\ \tilde{F}_r u^r &\rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (9.12)$$

9.5 Модельная задача оптимального управления на нулевом сечении $\mathcal{C}_0^H$

Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$ входящую в странную точку $x_0 = x(0)$ при $t \rightarrow -0$. В этом случае $\mu(x(t)) \leq c'|t| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -0$ по лемме 9.1. Поэтому, если $x(t)$ лежит в множестве $\mathbf{B}_H^{-1}(\mathcal{C}^H \setminus \mathcal{C}_0^H)$ при малых $t < 0$, то образ траектории $\mathbf{B}_H(x(t))$ на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ стремится к $\mathcal{C}_0^H$ при $t \rightarrow -0$.

Нас будут интересовать такие траектории $x(t)$ входящие в $x_0 = x(0)$, что хотя бы одна из главных скобок Пуассона $\mathcal{K}^m(x(t))$ имеет максимально возможный порядок $|t|^{5-m}$ при $t \rightarrow -0$. В этом случае $\mu(x(t))$ имеет порядок $|t|$ при $t \rightarrow -0$. А именно, благодаря лемме 9.1, выполнено $c''|t| \leq \mu(x(t)) \leq c'|t|$ при малых $t < 0$. Поэтому, траектория $x(t)$ при малых $t < 0$ не покидает множества $\mathbf{B}_H^{-1}(\mathcal{C}^H \setminus \mathcal{C}_0^H)$, а ее образ $\mathbf{B}_H(x(t))$ на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ стремится к $\mathcal{C}_0^H$. На самом деле, верно более сильное утверждение: при $t \rightarrow -0$ образ $\mathbf{B}_H(x(t))$ стремится к подмногообразию $\mathcal{D}_0^H \subset \mathcal{C}_0^H$, на котором обнуляются все неглавные скобки Пуассона:

$$\mathcal{D}_0^H = \left\{ \mu = 0, \text{ и } \tilde{K}^m = 0, \tilde{K}^m \text{ пробегает все неглавные скобки Пуассона} \right\} \subset \mathcal{C}_0^H.$$

Более того, любая траектория поля $\mu_{\xi_H}(x_0)$, начинающаяся на $\mathcal{D}_0^H$ не покидает $\mathcal{D}_0^H$. Действительно, на $\mathcal{D}_0^H$ вдоль поля $\mu_{\xi_H}(x_0)$ имеем $\frac{d}{ds}\mu = 0$ и $\frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}^m = 0$, где $\tilde{\mathcal{K}}^m$ – любая неглавная скобка Пуассона в ниспадающей системе.

Система ОДУ (9.12) на $\mathcal{D}_0^H$ устроена также как и в раздутой системе (5.9) ПМП модельной задачи (5.1). Действительно, переобозначим главные скобки ниспадающей системы следующим образом:

$$\tilde{\psi}_r = \tilde{\mathcal{K}}_r^1, \quad \tilde{\phi}_r = -\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2, \quad \tilde{x}^r = B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{00r'}^3, \quad \tilde{y}^r = B^{rr'}\tilde{\mathcal{K}}_{000r'}^4, \quad (9.13)$$

где $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in U^*$ и $\tilde{x}, \tilde{y} \in U$. Тогда на $\mathcal{D}_0^H$ мы получим систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\tilde{\psi}_r = & -\tilde{\phi}_r & - & 4\Upsilon\tilde{\psi}_r; \\ \frac{d}{ds}\tilde{\phi}_r = & -B_{rr'}\tilde{x}^{r'} & - & 3\Upsilon\tilde{\phi}_r; \\ \frac{d}{ds}\tilde{x}^r = & \tilde{y}^r & - & 2\Upsilon\tilde{x}^r; \\ \frac{d}{ds}\tilde{y}^r = & u^r & - & \Upsilon\tilde{y}^r; \\ \frac{d}{ds}\tilde{w} = & \alpha(x_0) + \beta_r(x_0)u^r & - & \Upsilon\tilde{w}; \\ \psi_r u^r \rightarrow & \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (9.14)$$

Подставляя в (9.11) вместо неглавных скобок 0 получаем, что на $\mathcal{D}_0^H$ выполнено

$$\begin{aligned} 24\Upsilon|_{\mathcal{D}_0^H} = & -6(-B^{rr'}\tilde{\psi}_r\tilde{\psi}_{r'})^2(-B^{rr'}\tilde{\psi}_r\tilde{\phi}_{r'}) + 8(-B^{rr'}\tilde{\phi}_r\tilde{\phi}_{r'})^3(\tilde{\phi}_r\tilde{x}^r) + \\ & + 12(-B_{rr'}\tilde{x}^r\tilde{x}^{r'})^5(-B_{rr'}\tilde{x}^r\tilde{y}^{r'}) + 24(-B_{rr'}\tilde{y}^r\tilde{y}^{r'})^{11}(-B_{rr'}\tilde{y}^r u^{r'}). \end{aligned}$$

Таким образом, если отбросить переменную $\tilde{w}$, то система (9.14) на $\mathcal{D}_0^H$ исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H совпадает (после раздутия) с гамильтоновой системой (5.9) принципа максимума Понтрягина в модельной задаче (5.1), если задать на U скалярное произведение с помощью формы $-B_{rr'}$. Система ОДУ, получившаяся на $\mathcal{C}_0^H$, является, в некотором смысле, «нильпотентизацией» исходной гамильтоновой системы в окрестности странной точки x_0 .

Также отметим, что «правильность» треугольника Ω определяется формой $-B_{rr'}$. А именно: треугольник Ω является правильным если форма $B_{rr'}$ устроена как описано в теореме 9.1. Действительно, вершины треугольника Ω , заданные в (9.5), должны образовывать правильный треугольник относительно формы $-B_{rr'}$ с центром в начале координат. Следовательно, матрица Грамма вершин треугольника Ω должна быть пропорциональна матрице (9.3) с отрицательным коэффициентом, по модулю равным длине стороны треугольника Ω .

9.6 Нильпотентизация в окрестности странной точки

Ниже будет показано, что поведение исходной гамильтоновой системы моделируется ее поведением на нулевом сечении C_0^H цилиндра C . Доказательство будет основано на точном исследовании отображения последования Пуанкаре в системе (9.12) в окрестности точек странных множеств Ξ и $\mathcal{X}$ из теорем 9.2 и 9.1. Поэтому в качестве вспомогательной системы ОДУ в окрестности x_0 мы рассмотрим следующую систему, полученную из системы (9.12) «нильпотентизацией» по μ с помощью раздувающего отображения B_H .

Процедура «нильпотентизации» в окрестности странной точки с помощью раздувающего отображения устроена следующим образом. Правую часть системы (9.12), полученную с помощью раздувающего отображения B_H , необходимо преобразовать следующим образом: дифференциальные уравнения на $\tilde{\mathcal{K}}$ и $\tilde{w}$ переносятся на весь цилиндр C с нулевого сечения C_0^H без изменений, а правая часть дифференциального уравнения на μ линеаризуется по μ в окрестности нулевого сечения (то есть отбрасываются члены порядка $o(\mu)$). В результате получаем систему (все суммирования по совпадающему верхнему и нижнему индексу r' ведутся по $r' = 1, 2, 3$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{ds}\mu &= \mu \Upsilon(0, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u); \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}_r^1 &= \tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'r}^2 u^{r'} - 4\tilde{\mathcal{K}}_r^1 \Upsilon, \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}_{ir}^2 &= \tilde{\mathcal{K}}_{0ir}^3 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'ir}^3 u^{r'} - 3\tilde{\mathcal{K}}_{ir}^2 \Upsilon, \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}_{jir}^3 &= \tilde{\mathcal{K}}_{0jir}^4 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'jir}^4 u^{r'} - 2\tilde{\mathcal{K}}_{jir}^3 \Upsilon, \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 &= B_{rr'} u^{r'} - \tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 \Upsilon, \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}_{kji}^4 &= -\tilde{\mathcal{K}}_{kji}^4 \Upsilon, \quad \text{если } \mathcal{K}_{kji}^4 - \text{ не главная скобка} \\ \frac{d}{ds}\tilde{w} &= \alpha(x_0) + \beta_r(x_0)u^r - \Upsilon(0, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u)\tilde{w}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_r^1 u^r &\rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{array} \right. \quad (9.15)$$

Перепишем эту систему в исходных не раздутых координатах $\mathcal{K}$ и w . После применения обратного отображения B_H^{-1} и обратной замены параметров времени s и t получим (все суммирования по совпадающему верхнему и нижнему индексу r' ведутся по $r' = 1, 2, 3$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\mathcal{K}_r^1 &= \mathcal{K}_{0r}^2 + \mathcal{K}_{r'r}^2 u^{r'}, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{K}_{ir}^2 &= \mathcal{K}_{0ir}^3 + \mathcal{K}_{r'ir}^3 u^{r'}, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{K}_{jir}^3 &= \mathcal{K}_{0jir}^4 + \mathcal{K}_{r'jir}^4 u^{r'}, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{K}_{000r}^4 &= B_{rr'} u^{r'}, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{K}_{kji}^4 &= 0, \quad \text{если } \mathcal{K}_{kji}^4 - \text{ не главная скобка} \\ \frac{d}{dt}w &= \alpha(x_0) + \beta_r(x_0)u^r; \\ \mathcal{K}_r^1 u^r &\rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{array} \right. \quad (9.16)$$

Таким образом, «нильпотентизация» по μ в окрестности странной точки с помощью раздувающего отображения B_H приводит к системе (9.16), которая, фактически, получена из системы (9.7)

заменой функций α и β_r , а также скобок пятого порядка их значениями в точке x_0 .

Как было сказано выше, система (9.15) совпадет на нулевом сечении $\mathcal{C}_0^H$ с системой (9.10), дифференциальные уравнения на $\tilde{\mathcal{K}}$ и $\tilde{w}$ не зависят от μ , а правая часть дифференциального уравнения на μ получена из (9.10) линеаризацией по μ в окрестности $\mathcal{C}_0^H = \mathcal{C}^H \cap \{\mu = 0\}$.

Отметим три важных факта, касательно системы (9.15):

1. Правая часть дифференциальных уравнений на $\tilde{\mathcal{K}}$ не зависит от $\tilde{w}$ и μ . Поэтому после точного отыскания координат $\tilde{K}$ на траектории системы (9.15) $\ln \mu$ и $\tilde{w}$ могут быть найдены прямым интегрированием.
2. При постоянном управлении поведение неглавных скобок Пуассона никак не связано с поведением главных скобок Пуассона (поведение главных скобок влияет лишь на момент переключения управления).

Таким образом, на сечении $\mathcal{D}_0^H$ для исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H мы можем найти любую оптимальную траекторию в модельной задаче оптимального управления (5.1). Действительно, рассмотрим произвольную траекторию $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t))$ ПМП модельной задачи (5.1), лежащую на M_+ (см. следствие 3.2), то есть траекторию, входящую в начало координат. По теореме 3.1 эта траектория входит в начало координат при $t = T(x(0), y(0))$. Эта траектория задает с помощью (9.13) главные скобки Пуассона $\mathcal{K}$ как функции времени t при $t < T(x(0), y(0))$. Чтобы получить траекторию системы (9.16) необходимо еще определить не главные скобки Пуассона $\mathcal{K}$ и w как функции времени. Мы сделаем это следующим образом. Положим не главные скобки $\mathcal{K}$ тождественными 0 (как функции времени). Функцию $w(t)$ определим из последнего уравнения системы (9.16):

$$w(t) = w_0 + \alpha(x_0)(t - T(x(0), y(0))) + \beta_r(x_0)y^r(t).$$

Поскольку нас интересуют траектории, входящие в странную точку x_0 , положим $w_0 = w(0) = 0$. Получившаяся траектория по построению удовлетворяет ОДУ «нильпотентизованной» системы (9.16). Таким образом мы построили отображение Π_+ из $M_+ \subset \{(x, y, \phi, \psi)\}$ в пространство $\{(\mathcal{K}, w)\}$, задающееся формулами

$$\Pi_+ : \begin{cases} \mathcal{K}_r^1 = \psi_r, \mathcal{K}_{0r}^2 = -\phi_r, \mathcal{K}_{00r}^3 = B_{r'r}x^{r'}, \mathcal{K}_{000r}^4 = B_{r'r}y^{r'}; \\ \mathcal{K} = 0 \quad \text{для всех не главных скобок } \mathcal{K}; \\ w = \beta_r(x_0)y^r - \alpha(x_0)T(x(0), y(0)). \end{cases}$$

Лемма 9.2. Построенное отображение $\Pi_+ : M_+ \rightarrow \{(\mathcal{K}, w)\}$ является эквивариантной инъекцией, т.е. уважает действие группы $\mathbb{R}_+$:

$$\Pi_+ \circ g(\lambda) = g_H(x_0)(\lambda) \circ \Pi_+.$$

Более того, отображение Π_+ является непрерывным на M_+ и переводит траектории гамильтоновой системы (5.2) модельной задачи (5.1) на M_+ в траектории «нильпотентизованной» системы (9.16).

Если к тому же $dG(x_0) = 0$, то отображение Π_+ является локально липшицевым.

Доказательство. Отображение Π_+ является инъективным и эквивариантным по построению. Непрерывность Π_+ на $M_+ \setminus \{0\}$ следует из теоремы 3.1, в которой доказано, что функция $T(\cdot)$ непрерывна, и теоремы 3.2, в которой доказано что отображение E локально липшицево. Отображение Π_+ переводит траектории системы (5.2) в траектории системы (9.16) по построению.

Если $dG(x_0) = 0$, то $x(t) = x_0$ является траекторией исходного гамильтониана $\mathcal{H} = G + F_r u^r$ при $u = 0$. Поэтому $\mathcal{K}(t) = 0$, $w(t) = 0$ является траекторией системы (9.7) при $u = 0$. Поэтому необходимо $\alpha(x_0) = 0$ и отображение Π_+ не содержит слагаемого с $T(x(0), y(0))$ и потому является локально липшицевым по теореме 3.2. $\square$

Таким образом, мы можем отыскать любую траекторию системы (5.2) в «нильпотентизованной» системе (9.16). Однако в исходной системе (9.7) эти траектории, вообще говоря, отсутствуют. Однако траектории множеств $\mathcal{X}$ (из теоремы 8.2) и Ξ (из теоремы 5.1) все же удастся отыскать в исходной гамильтоновой системе. Для этого сначала необходимо спроектировать множества $\Pi_+(\mathcal{X})$ и $\Pi_+(\Xi)$ на $\mathcal{C}_0^H$, а потом поднять каждую траекторию с нулевого сечения $\mathcal{C}_0^H$ с помощью теоремы Адамара-Перрона.

Итак, в силу эквивариантности отображения Π_+ корректно определено отображение $\Pi_+/g : M_+/g \rightarrow \mathcal{C}_0^H$. Более того, образ M_+/g лежит в $\mathcal{D}_0^H$. Поскольку векторное поле $\mu_{\xi_H}(x_0)$ раздутой «нильпотентизованной» системы (9.15) и векторное поле μ_{ξ} раздутой модельной системы (5.9) так же сохраняются действием группы $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то любая траектория поля μ_{ξ} на M_+/g переходит в траекторию поля $\mu_{\xi_H}(x_0)$.

Теперь перенесем множества $\mathcal{X}$ и Ξ из модельной задачи оптимального управления на нулевое сечение $\mathcal{C}_0^H$. Определим

$$\mathcal{X}_H^0(x_0) = (\Pi_+/g)(\mathcal{X}/g) \subset \mathcal{D}_0^H; \quad \text{и} \quad \Xi_H^0(x_0) = (\Pi_+/g)(\Xi/g) \subset \mathcal{D}_0^H.$$

Отметим, что множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ корректно определено для гамильтоновой системы с гамильтонианом H , только если треугольник Ω является правильным относительно формы $B_{rr'}$. Или другими словами, если форма $B_{rr'}$ устроена как описано в условии теоремы 9.1.

9.7 Отображение последования Пуанкаре в гамильтоновой системе

В предыдущем параграфе мы построили множества $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и $\Xi_H^0(x_0)$ на $\mathcal{D}_0^H \subset \mathcal{C}_0^H$ в общей гамильтоновой системе с гамильтонианом H . Однако, при обратном отображении $\mathbf{B}_H^{-1}$ сечение $\mathcal{C}_0^H$ целиком перейдет в странную точку x_0 . Поэтому, для того чтобы отыскать траектории исходной гамильтоновой системы, мы применим теорему Адамара-Перрона к каждой траектории из

множеств $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ на $\mathcal{D}_0^H$. Мы покажем, что их устойчивые многообразия уже не лежат в нулевом сечении $\mathcal{C}_0^H$, и их объединение дает искомые множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ и $\Xi_H(x_0)$, а неустойчивые многообразия лежат в $\mathcal{C}_0^H$ и не дают никакого вклада в исходную гамильтонову систему.

Мы будем применять теорему Адамара-Перрона к отображению последования Пуанкаре в окрестности произвольной траектории γ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$. Любая траектория $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t))$ из множества Ξ или $\mathcal{X}$ (в модельной задаче (5.1)) пересекает поверхность переключения только трансверсально, и поэтому в окрестности любой ее точки на поверхности переключения определено гладкое отображение последования Пуанкаре. В этом параграфе мы перенесем структуру этого отображения из модельной задачи на траекторию γ сначала в «нильпотентизованную» систему (9.15), а потом и в исходную систему (9.12).

Нас будет интересовать дифференциал отображения последования Пуанкаре $\bar{\Phi}_H$ поверхности переключения $\mathcal{S}^H \cap \mathcal{C}^H$ на себя в «нильпотентизованной» системе (9.15) в окрестности произвольной траектории на $\mathcal{D}_0^H$ (отображение последования в исходной (не «нильпотентизованной») гамильтоновой системе мы будем обозначать через Φ_H без верхней черты).

Для построения отображения $\bar{\Phi}_H$ в окрестности точки $z_0 = \gamma(0)$ на траектории $\gamma(t)$ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$ мы воспользуемся следующими упрощающим соображением: поскольку $\gamma(t)$ пересекает поверхность переключения $\mathcal{S}^H$ трансверсально в последовательных точках z_0 и $z_1 = \bar{\Phi}_H(z_0) = \gamma(\tau)$, то на любой траектории в окрестности $\gamma(t)$ управление также постоянно между точками пересечения с $\mathcal{S}^H$ и совпадает с управлением на $\gamma(t)$. Поэтому мы будем считать, что управление в «нильпотентизованной» системе (9.15) постоянно и вычислим $d\bar{\Phi}_H$ как композицию линеаризации отображения вдоль системы (9.15) на фиксированное время τ и проекции на касательное пространство к $\mathcal{S}^H$ вдоль векторного поля системы (9.15). Обозначим первое отображение через $\Phi_H(\tau)$ и вычислим его.

Уравнение в вариациях для системы (9.15) в окрестности γ устроено следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\Phi_H(t) = M\Phi_H(t).$$

Поскольку траектория γ лежит в $\mathcal{D}_0^H$, то все не главные скобки обнуляются на γ . Так как функция Υ не зависит от μ и неглавных скобок $\tilde{\mathcal{K}}$, то матрица M имеет следующую блочную структуру (здесь и далее для краткости обозначено $\Upsilon(t) = \Upsilon(\gamma(t))$, а через I обозначена единичная матрица нужного размера):

	μ	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$				Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$			$\tilde{w}$
μ	$\Upsilon(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_r^1$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^2$	0	0	0	0	0	$-3\Upsilon(t)$	*	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^3$	0	0	0	0	0	0	$-2\Upsilon(t)$	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^4$	0	0	0	0	0	0	0	$-\Upsilon(t)$	0
$\tilde{w}$	0	*	*	*	*	0	0	0	$-\Upsilon(t)$

Матрица M является блочно диагональной с двумя блоками. Ее нижний блок в свою очередь является блочно ниже треугольной матрицей с двумя блоками на диагонали, причем верхний блок (отвечающий переменным $\tilde{\mathcal{K}}$) является блочно верхне треугольным. Поэтому матрица $\Phi_H(t)$ имеет ту же структуру:

	μ	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$		Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$		$\tilde{w}$
μ	λ	0		0		0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	0	*		*		0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	0	0		C		0
$\tilde{w}$	0	*		*		W

причем матрица W пропорциональна единичной, а матрица C является верхнетреугольной.

Выпишем явно дифференциальные уравнения на λ , W и C :

$$\frac{d}{dt}\lambda = \Upsilon(t)\lambda, \quad \lambda(0) = 1.$$

Обозначим $\lambda(\tau) = \rho$, где τ – время движения по γ от z_0 до z_1 . Тогда

$$\frac{d}{dt}W = -\Upsilon(t)W, \quad W(0) = I \quad \implies \quad W(\tau) = \rho^{-1}I.$$

Уравнение на матрицу C имеет вид:

$$\frac{d}{dt}C = \begin{pmatrix} -3\Upsilon(t) & * & * \\ 0 & -2\Upsilon(t) & * \\ 0 & 0 & -\Upsilon(t) \end{pmatrix} C, \quad C(0) = I.$$

Поэтому диагональные блоки C будут соответственно $\rho^{-3}I$, $\rho^{-2}I$ и $\rho^{-1}I$.

Вычислим теперь число ρ . Пусть траектория γ' – это поднятие γ с $C_0^H = \{\mu = 0\}$ на $\{\mu \neq 0\}$. Другими словами координаты $\tilde{\mathcal{K}}$ и $\tilde{w}$ на γ и γ' совпадают, но на γ' выполнено $\mu \neq 0$. Причем траектория γ' удовлетворяет системе (9.15). Через z'_0 и z'_1 обозначены соответствующие поднятия точек z_0 и z_1 .

Лемма 9.3. Обозначим $\mu_0 = \mu(z'_0)$ и $\mu_1 = \mu(z'_1)$. Тогда

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \rho.$$

Доказательство. Действительно, μ_1 есть функция начальной точки $z'_0 = (\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$, то есть $\mu_1 = \mu_1(\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$. Очевидно, что

$$\mu_1(\kappa\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0) = \kappa\mu_1(\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это равенство по κ при $\kappa = 1$ получаем

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0} = \frac{\mu_1}{\mu_0}.$$

Поскольку правая часть равенства не изменяется при умножении μ_0 на $\kappa \neq 0$, мы получаем, что производная $\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0}$ постоянна на всей вертикальной прямой $(\kappa\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Однако на γ (то есть при $\kappa = 0$) выполнено $\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0} = \lambda(\tau) = \rho$, что и требовалось. $\square$

Замечание 9.6. Если на траектории γ' отбросить координату $\tilde{w}$ и координаты неглавных скобок $\tilde{\mathcal{K}}$ (то есть применить отображение, обратное к Π_+/g), то получится оптимальная траектория модельной задачи (5.1). Поэтому к ней применима ключевая лемма 5.5, которая гарантирует экспоненциальную скорость стремления к 0 координаты $\mu(s)$ на ней при $s \rightarrow +\infty$.

Займемся теперь оператором проектирования касательного пространства $T_{z_1}C^H$ на гиперплоскость $T_{z_1}S^H$ вдоль векторного поля системы (9.15). Вообще говоря, векторное поле системы (9.15) разрывно в точке z_1 , но нас интересует тот вектор скорости, с которым траектория γ приходит в точку z_1 при $t \rightarrow \tau - 0$. Обозначим этот вектор через v . Тогда

$$v = \left(0 \mid * \mid 0 \mid * \right)^T.$$

Ковектор α , задающий гиперплоскость $T_{z_1}S^H$ имеет следующую вид:

$$\alpha = \left(0 \mid * \mid 0 \mid 0 \right).$$

Таким образом, оператор проектирования $1 - \frac{v \otimes \alpha}{\alpha(v)}$ на $T_{z_1}S^H$ вдоль v имеет структуру

$\mu \left \begin{array}{c} \mu \\ 1 \end{array} \right.$	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$	Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$	$\tilde{w} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$	*	0	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$	0	I	0
$\tilde{w} \left \begin{array}{c} 0 \end{array} \right.$	*	0	I

Итак, дифференциал отображения последования Пуанкаре $d\overline{\Phi}_H$ «нильпотентизованной» системы (9.15) в точке z_0 записывается как

$$d\overline{\Phi}_H|_{z_0} = \left(1 - \frac{v \otimes \alpha}{\alpha(v)}\right) \Phi_H(\tau)$$

и имеет следующую блочную структуру:

$$d\overline{\Phi}_H|_{z_0} = \left(\begin{array}{c|c|cc|c} \rho & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & & * & 0 \\ \hline & & \rho^{-3}I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-2}I & * & 0 \\ & & 0 & 0 & \rho^{-1}I & \\ \hline 0 & * & & * & & \rho^{-1}I \end{array} \right)$$

Замечание 9.7. Важно отметить, что матрица A получается сопряжением с помощью дифференциала отображения (9.13) из соответствующей матрицы в гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина (5.2) для модельной задачи (5.1). Это немедленно вытекает из сказанного в параграфе 9.5. Более того, поскольку все рассматриваемые траектории лежат в $\mathcal{D}_0^H$, то матрица сопряжения будет постоянной и не зависеть от выбора траектории γ на $\mathcal{D}_0^H$.

Опишем теперь матрицу дифференциала отображения последования Пуанкаре $d\Phi_H$ уже для исходной (не «нильпотентизованной») системы (9.12). Поскольку исходная система (9.12) и «нильпотентизованная» (9.15) совпадают на $\mathcal{C}_0^H$, то у матриц $d\Phi_H$ и $d\overline{\Phi}_H$ заведомо совпадают все элементы вне первого столбца и первой строки. Но первая строка тоже сохраняется, так как дифференциальные уравнения на μ в системах (9.12) и (9.15) отличаются на член порядка $O(\mu^2)$ в окрестности $\mathcal{C}_0^H$.

Таким образом, доказана

Лемма 9.4. Дифференциал $d\Phi_H$ отображения последования Пуанкаре системы (9.12) в точке $z_0 \in \mathcal{D}_0^H \cap \mathcal{S}^H$ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$ на поверхности $\mathcal{S}^H$ имеет следующий вид:

μ	$\frac{\mu}{\rho}$	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$				Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$			$\tilde{w}$
	ρ	0	0	0	0	0	0	0	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_r^1$	*					*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2$	*					*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3$	*			A		*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4$	*					*	*	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^2$	*	0	0	0	0	$\rho^{-3}I$	*	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^3$	*	0	0	0	0	0	$\rho^{-2}I$	*	0
Не главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^4$	*	0	0	0	0	0	0	$\rho^{-1}I$	0
$\tilde{w}$	*	*	*	*	*	*	*	*	$\rho^{-1}I$

где матрица A совпадает (с точностью до замены (9.13)) с соответствующей матрицей системы (5.2) принципа максимума Понтрягина для модельной задачи (5.1), а число ρ может быть вычислено по лемме 9.3.

9.8 Окончание доказательства хаотического поведения траекторий в общей гамильтоновой системе

Лемма 9.4 позволяет воспользоваться результатами о хаотичности оптимального синтеза, полученными в модельной задаче (5.1). Однако, как уже было сказано выше, множества $\Xi_H^0(x_0) \subset \mathcal{C}_0^H$ или $\mathcal{X}_H^0(x_0) \subset \mathcal{C}_0^H$ построены на нулевом сечении $\mathcal{C}_0^H$ и перейдут в странную точку x_0 при обращении раздувающего отображения $\mathbf{B}_H^{-1}$. Поэтому для того, чтобы не потерять картину хаотического синтеза мы для каждой оптимальной траектории из $\mathcal{X}$ или Ξ построим с помощью теоремы Адамара-Перрона (см. [15]) двумерные устойчивые листы, которые уже будут выходить за пределы нулевого сечения $\mathcal{C}_0^H$. Точнее теорему Адамара-Перрона мы будем применять к отображению последования Пуанкаре Φ_H вдоль этой траектории.

Итак, зафиксируем траекторию γ из множества $\Xi_H^0(x_0)$ или множества $\mathcal{X}_H^0(x_0)$. Траектория γ является образом некоторой траектории $\hat{\gamma}$ из Ξ/g или $\mathcal{X}/g$ при отображении Π_+/g . Обозначим точки последовательного пересечения поверхности переключения $\mathcal{S}^H$ траекторией γ через $\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$, а траектории $\hat{\gamma}$ – через $\dots, \hat{z}_{-1}, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots$. Матрицу A и число ρ из леммы 9.4, отвечающие k -ой точке z_k будем обозначать через $A(z_k) = A_k$ и $\rho(z_k) = \rho_k$ соответственно. По лемме 9.4 для гамильтоновой системы (5.2) имеем:

$$d\Phi(\widehat{z}_k) = \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее через Φ обозначено отображение последования поверхности $\mathcal{C}^H \cap \mathcal{S}^H$ на себя в раздутой модельной системе поля $\mu\xi$ (см. систему (5.9)).

Сначала докажем сжатие в вертикальном направлении в исходной гамильтоновой системе с гамильтонианом H . Вообще говоря, при однократном отображении последования Φ_H , в дифференциале $d\Phi_H(z_k)$ собственное значение ρ_k может быть больше 1. Однако, лемма 5.5 гарантирует, что найдется такое натуральное N , что Φ_H^N будет сжимать в вертикальном направлении. Действительно, любая оптимальная траектория в модельной задаче попадает в начало координат за конечное время, поэтому повторяя отображение последования Пуанкаре Φ_H достаточное число раз, мы получим сжатие в вертикальном направлении. Докажем это утверждение строго. Воспользуемся результатами, полученными для модельной задачи (5.1). Из леммы 5.5 следует, что на оптимальной траектории $\widehat{\gamma}$ на M_+ выполнены неравенства

$$c_1 e^{-c_2 s} \leq \frac{\mu(\widehat{\gamma}(s))}{\mu(\widehat{\gamma}(0))} \leq c_3 e^{-c_4 s}$$

причем положительные константы c_j , $j = 1, \dots, 4$ не зависят от выбора траектории на M_+ . Следовательно

$$\frac{\mu(s)}{\mu(0)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } s \geq \frac{1}{c_4} \ln(2c_3).$$

Оценим теперь время $\sigma(z)$ перехода между двумя последовательными пересечениями поверхности переключения $\mathcal{S}$ в точках $z \in \mathcal{S}$ и $\Phi(z) \in \mathcal{S}$ вдоль поля $\mu\xi$ по произвольной траектории из Ξ или $\mathcal{X}$. Функция σ непрерывна и не зависит от μ , а множества $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ компактны и не пересекаются с $\mathcal{S}_{123}$. Поэтому выполнена оценка

$$s_{\min} \leq \sigma(z) \leq s_{\max}$$

для некоторых неотрицательных констант $s_{\min}$ и $s_{\max}$. Поскольку непрерывная функция достигает своего минимума на компакте, то $s_{\max} \geq s_{\min} > 0$. Поэтому по лемме 9.3 получаем

$$\rho_k \rho_{k+1} \dots \rho_{k+N-1} < \frac{1}{2} \quad \forall k \quad \text{при } N > \frac{1}{s_{\min} c_4} \ln(2c_3).$$

Таким образом, зафиксировав произвольное достаточно большое число N и работая только с N -ой степенью отображений Φ и Φ_H вместо них самих, мы можем считать, что в вертикальном направлении идет сжатие. А именно, доказана

Лемма 9.5. Зафиксируем⁹ $N > \frac{1}{s_{\min} c_4} \ln(2c_3)$ и обозначим $\Theta = \Phi^{-N}$ и $\Theta_H = \Phi_H^{-N}$. Положим также $\varrho(z_{kN}) = \varrho_k = (\rho_{kN-1} \rho_{kN-2} \dots \rho_{(k-1)N})^{-1} > 2$ и $\mathcal{A}(z_{kN}) = \mathcal{A}_k = (A_{kN-1} A_{kN-2} \dots A_{(k-1)N})^{-1}$.

⁹Число N не зависит от выбора траектории и точки z_k , и может быть выбрано одинаковым для всех траекторий.

Тогда

$$d\Theta(\widehat{z}_{kN}) = \begin{pmatrix} \varrho_k & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_k \end{pmatrix},$$

а матрица $d\Theta_H(z_{kN})$ имеет структуру из леммы 9.4 с заменой ρ на ϱ_k и A на $\mathcal{A}_k$.

Следующим шагом, необходимым для применения теоремы Адамара-Перрона, является аккуратное изучение структуры матриц $\mathcal{A}_k$. А именно, мы докажем, что в некотором специальном разложении касательного пространства все матрицы $\mathcal{A}_k$ превращаются в блочно диагональные. Поэтому для удобства обозначим

$$d\Phi(\widehat{z}) = \begin{pmatrix} \rho(\widehat{z}) & 0 \\ 0 & A(\widehat{z}) \end{pmatrix}, \quad (9.17)$$

где линейный оператор $A(\widehat{z})$ действует из $T_{\widehat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S})$ в $T_{\Phi(\widehat{z})}\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}$.

Лемма 9.6. В точках $\widehat{z}$ каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ существует такое разложение касательного пространства¹⁰ $T_{\widehat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \widehat{U}(\widehat{z}) \oplus \widehat{V}(\widehat{z})$, $\dim \widehat{U}(\widehat{z}) = 1$ и $\dim \widehat{V}(\widehat{z}) = 5$, и метрика на них, что оператор $A(\widehat{z})$ принимает вид

$$A(\widehat{z}) = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}(\widehat{z}) & 0 \\ 0 & \widehat{\delta}(\widehat{z}) \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\alpha}(\widehat{z}) : \widehat{U}(\widehat{z}) \rightarrow \widehat{U}(\Phi(\widehat{z}))$ и $\widehat{\delta}(\widehat{z}) : \widehat{V}(\widehat{z}) \rightarrow \widehat{V}(\Phi(\widehat{z}))$. Причем $\widehat{\alpha}$ есть сжимающий оператор, а $\widehat{\delta}$ – растягивающий, т.е.

$$\|\widehat{\alpha}(\widehat{z})\| < 1, \quad \text{и} \quad \|\widehat{\delta}(\widehat{z})^{-1}\| < 1 \quad \forall \widehat{z}$$

Более того, и метрика и разложение $T_{\widehat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \widehat{U}(\widehat{z}) \oplus \widehat{V}(\widehat{z})$ непрерывно зависят от $\widehat{z}$.

Доказательство. Доказательство леммы состоит из двух частей. Сначала мы выберем «почти» правильное разложение касательного пространства в точках каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$, в которых матрица $A(\widehat{z})$ становится «почти» блочно диагональной, а потом трансформируем это разложение.

Итак, мы утверждаем, что в окрестности каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ существуют такие локальные координаты и риманова метрика, что

$$A^{-1}(\widehat{z}) = \begin{pmatrix} \alpha(\widehat{z}) & \beta(\widehat{z}) \\ \gamma(\widehat{z}) & \delta(\widehat{z}) \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

для каждой точки $\widehat{z}$ из этих окрестностей. Здесь $\alpha(\widehat{z})$ – число, $\beta(\widehat{z})$ и $\gamma(\widehat{z})$ – матрицы 1×5 и 5×1 , а $\delta(\widehat{z})$ – матрица 5×5 . Причем найдутся 4 таких положительных числа u_x, u_y, v_x и v_y , что

¹⁰Напомним $\dim \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S} = 6$.

$$\|\alpha(\widehat{z})^{-1}\| \leq u_x^{-1}, \quad \|\beta(\widehat{z})\| \leq u_y, \quad \|\gamma(\widehat{z})\| \leq v_x, \quad \|\delta(\widehat{z})\| \leq v_y.$$

Более того, диагональные элементы устроены гиперболически, а элементы на побочной диагонали малы по сравнению с ними. Точнее, числа u_x , u_y , v_x и v_y удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} u_x > 1 > v_y; \\ (u_x - 1)(1 - v_y) > u_y v_x. \end{cases} \quad (9.19)$$

Действительно, существование таких локальных координат в окрестности множества $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ следует из теоремы Гробмана–Хартмана (см. [15]) и трансверсальности гомоклинической точки (см. лемму 5.9) – множество $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ в теореме 5.1 можно уменьшить при необходимости так, что в произвольной фиксированной метрике норма элементов на побочной диагонали будет сколь угодно мала, а диагональные элементы будут растягивающими и сжимающими операторами тех размерностей, что и в шестизвенном цикле – то есть 5 и 1.

Для множества $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ этот факт следуют из явной формулы локальных координат. Приведем эти координат на поверхности переключения $\psi_1 = \psi_3$, с нормализацией $\phi_2 = 1$. Сначала проведем редукцию к шести переменным: $\pi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - y_3)$, $\pi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(y_1 - 2y_2 + y_3)$, $\pi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_3)$, $\pi_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3)$, $\pi_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1 - \phi_3)$, $\pi_6 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3)$. Теперь в каждой из 16 областей $AA.AA, AA.AC, \dots, CC.CC$ произведем линейную замену координат $\eta = M\pi$, где постоянные матрицы M для 16 областей имеют вид

$$M_{AA.AA} = \begin{pmatrix} -0.5913 & -1.0677 & 0.0683 & 0.2937 & -0.0114 & 0.0316 \\ 0.0848 & -1.3179 & -0.9326 & -0.6262 & -0.0104 & 0.0737 \\ -0.0023 & 0.6606 & 0.2677 & 0.7432 & 0.4258 & 0.2468 \\ -0.2024 & 0.8600 & -0.7595 & 0.9189 & -1.5610 & 0.7982 \\ 0.5347 & -0.1061 & 1.3964 & 0.6468 & 2.3193 & -2.1665 \\ -1.1822 & 0.5279 & -2.5279 & -0.2730 & -3.8024 & 2.6844 \end{pmatrix},$$

$$M_{AA.AC} = \begin{pmatrix} -0.3772 & -0.6812 & 0.0436 & 0.1874 & -0.0072 & 0.0201 \\ 0.0603 & -0.9371 & -0.6631 & -0.4452 & -0.0074 & 0.0524 \\ -0.0016 & 0.4697 & 0.1903 & 0.5285 & 0.3028 & 0.1755 \\ -0.1439 & 0.6115 & -0.5401 & 0.6534 & -1.1101 & 0.5675 \\ 0.3801 & -0.0754 & 0.9930 & 0.4599 & 1.6493 & -1.5406 \\ -0.8407 & 0.3754 & -1.7976 & -0.1940 & -2.7037 & 1.9088 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_{AA.CA} &= \begin{pmatrix} -0.3971 & -0.6704 & 0.1033 & 0.2038 & 0.0053 & -0.0444 \\ 0.1116 & -0.2444 & -0.2931 & -0.2188 & 0.0594 & 0.0028 \\ 0.0819 & 0.6562 & 0.5188 & 0.8690 & 1.3697 & 0.2361 \\ -0.0770 & 0.5547 & -0.3887 & 0.6313 & -0.8937 & 0.5253 \\ 0.2177 & -0.0065 & 0.6332 & -0.1496 & 1.2464 & 0.3705 \\ -0.1329 & 0.0749 & -0.4715 & -0.2392 & -0.9990 & 0.9895 \end{pmatrix}, \\
M_{AA.CC} &= \begin{pmatrix} -0.2941 & -0.4965 & 0.0765 & 0.1509 & 0.0039 & -0.0329 \\ 0.1180 & -0.2584 & -0.3099 & -0.2314 & 0.0629 & 0.0030 \\ 0.0865 & 0.6937 & 0.5485 & 0.9186 & 1.4479 & 0.2496 \\ -0.0815 & 0.5864 & -0.4109 & 0.6674 & -0.9447 & 0.5552 \\ 0.2302 & -0.0068 & 0.6694 & -0.1581 & 1.3176 & 0.3916 \\ -0.1405 & 0.0791 & -0.4985 & -0.2529 & -1.0561 & 1.0461 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.AA} &= \begin{pmatrix} -1.3472 & -1.2301 & 0.8883 & 0.9348 & -0.4362 & -0.0239 \\ 0.1653 & -1.7355 & -1.7124 & -0.5395 & 0.6959 & 0.2788 \\ 0.3610 & 0.1926 & 2.3424 & -0.1152 & 4.4150 & -0.4106 \\ -0.2216 & 1.5281 & -0.9719 & 1.9245 & -2.4828 & 1.4865 \\ 1.7063 & -1.3513 & 3.2009 & -1.9034 & 4.1924 & -0.2951 \\ -0.4124 & 0.3207 & -1.2318 & -0.1906 & -2.4337 & 2.6356 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.AC} &= \begin{pmatrix} -1.5370 & -1.4034 & 1.0134 & 1.0666 & -0.4977 & -0.0273 \\ 0.1456 & -1.5288 & -1.5084 & -0.4752 & 0.6131 & 0.2456 \\ 0.3180 & 0.1697 & 2.0633 & -0.1015 & 3.8890 & -0.3616 \\ -0.1951 & 1.3460 & -0.8561 & 1.6952 & -2.1869 & 1.3094 \\ 1.5029 & -1.1902 & 2.8195 & -1.6767 & 3.6929 & -0.2599 \\ -0.3632 & 0.2825 & -1.0851 & -0.1678 & -2.1437 & 2.3215 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.CA} &= \begin{pmatrix} -1.4918 & -1.2360 & 1.0849 & 0.9744 & -0.6000 & -0.1150 \\ -0.5929 & 0.5930 & 1.2489 & 0.5188 & -0.7829 & -0.2039 \\ 0.2087 & -2.0370 & 0.9934 & -2.4691 & 2.5841 & -1.8853 \\ 0.8390 & 1.3864 & 4.1958 & 1.8630 & 10.4128 & 0.9577 \\ 1.8997 & -0.1209 & 6.1266 & -1.0920 & 12.6540 & 3.2477 \\ -0.5410 & 0.3880 & -1.7381 & -0.6350 & -3.6204 & 3.9319 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.CC} &= \begin{pmatrix} -1.4492 & -1.2008 & 1.0539 & 0.9467 & -0.5829 & -0.1117 \\ -0.6064 & 0.6066 & 1.2774 & 0.5307 & -0.8008 & -0.2085 \\ 0.2134 & -2.0836 & 1.0162 & -2.5256 & 2.6432 & -1.9285 \\ 0.8583 & 1.4182 & 4.2918 & 1.9056 & 10.6511 & 0.9796 \\ 1.9431 & -0.1237 & 6.2668 & -1.1170 & 12.9436 & 3.3220 \\ -0.5534 & 0.3969 & -1.7778 & -0.6495 & -3.7032 & 4.0219 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{CA.AA} &= \begin{pmatrix} -0.8312 & -1.5009 & 0.0960 & 0.4129 & -0.0159 & 0.0445 \\ 0.1017 & -1.5797 & -1.1178 & -0.7505 & -0.0125 & 0.0883 \\ -0.0028 & 0.7918 & 0.3209 & 0.8908 & 0.5104 & 0.2957 \\ -0.2426 & 1.0308 & -0.9104 & 1.1014 & -1.8712 & 0.9568 \\ 0.6409 & -0.1272 & 1.6739 & 0.7752 & 2.7801 & -2.5969 \\ -1.4171 & 0.6327 & -3.0301 & -0.3272 & -4.5577 & 3.2177 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.AC} &= \begin{pmatrix} -0.5590 & -1.0094 & 0.0646 & 0.2777 & -0.0107 & 0.0300 \\ 0.0284 & -1.2522 & -1.0645 & -0.6260 & -0.2454 & 0.2924 \\ 0.0136 & 0.5899 & 0.2568 & 0.6980 & 0.4571 & 0.2243 \\ -0.1603 & 0.7743 & -0.6799 & 0.8766 & -1.3837 & 0.6740 \\ 0.4698 & 0.0295 & 1.3318 & 0.6845 & 2.0995 & -2.0201 \\ -1.1106 & 0.4685 & -2.3717 & -0.2692 & -3.5420 & 2.4780 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.CA} &= \begin{pmatrix} -0.6987 & -1.1795 & 0.1817 & 0.3586 & 0.0093 & -0.0782 \\ 0.2866 & -0.6276 & -0.7527 & -0.5620 & 0.1527 & 0.0072 \\ 0.2102 & 1.6846 & 1.3320 & 2.2311 & 3.5163 & 0.6063 \\ -0.1980 & 1.4241 & -0.9979 & 1.6208 & -2.2944 & 1.3485 \\ 0.5591 & -0.0166 & 1.6256 & -0.3841 & 3.1999 & 0.9511 \\ -0.3412 & 0.1922 & -1.2105 & -0.6143 & -2.5648 & 2.5404 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.CC} &= \begin{pmatrix} -0.5165 & -0.8721 & 0.1343 & 0.2651 & 0.0068 & -0.0579 \\ 0.2310 & -0.5057 & -0.6066 & -0.4529 & 0.1230 & 0.0059 \\ 0.1694 & 1.3576 & 1.0734 & 1.7980 & 2.8339 & 0.4887 \\ -0.1595 & 1.1476 & -0.8042 & 1.3062 & -1.8490 & 1.0867 \\ 0.4506 & -0.0134 & 1.3100 & -0.3096 & 2.5789 & 0.7664 \\ -0.2750 & 0.1549 & -0.9756 & -0.4950 & -2.0670 & 2.0473 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.AA} &= \begin{pmatrix} -1.7029 & -1.5549 & 1.1228 & 1.1818 & -0.5513 & -0.0303 \\ 0.2242 & -2.3541 & -2.3229 & -0.7318 & 0.9440 & 0.3782 \\ 0.4897 & 0.2613 & 3.1773 & -0.1562 & 5.9887 & -0.5568 \\ -0.3006 & 2.0727 & -1.3182 & 2.6104 & -3.3677 & 2.0164 \\ 2.3143 & -1.8329 & 4.3417 & -2.5818 & 5.6867 & -0.4003 \\ -0.5593 & 0.4349 & -1.6709 & -0.2585 & -3.3011 & 3.5749 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.AC} &= \begin{pmatrix} -2.1389 & -1.9529 & 1.4103 & 1.4843 & -0.6925 & -0.0380 \\ 0.2145 & -2.2524 & -2.2225 & -0.7003 & 0.9032 & 0.3618 \\ 0.4685 & 0.2499 & 3.0400 & -0.1494 & 5.7300 & -0.5328 \\ -0.2876 & 1.9832 & -1.2612 & 2.4976 & -3.2221 & 1.9292 \\ 2.2144 & -1.7536 & 4.1542 & -2.4703 & 5.4411 & -0.3829 \\ -0.5352 & 0.4161 & -1.5988 & -0.2473 & -3.1585 & 3.4205 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$M_{CC.CA} = \begin{pmatrix} -2.1848 & -1.8102 & 1.5888 & 1.4272 & -0.8787 & -0.1684 \\ -0.9631 & 0.3038 & 0.8826 & 0.2771 & -2.6832 & -1.3049 \\ 0.1995 & -2.1397 & 1.4883 & -2.6630 & 3.2584 & -1.9360 \\ 0.9908 & 1.4063 & 4.5037 & 1.9791 & 11.6620 & 0.8665 \\ 2.2134 & -0.2631 & 6.8269 & -1.3631 & 14.3844 & 3.5996 \\ -0.6009 & 0.2926 & -2.2588 & -0.8628 & -4.4148 & 4.3259 \end{pmatrix},$$

$$M_{CC.CC} = \begin{pmatrix} -1.8994 & -1.5738 & 1.3813 & 1.2407 & -0.7640 & -0.1464 \\ -0.6747 & 0.6749 & 1.4212 & 0.5903 & -0.8909 & -0.2319 \\ 0.2374 & -2.3179 & 1.1304 & -2.8096 & 2.9404 & -2.1454 \\ 0.9548 & 1.5775 & 4.7743 & 2.1199 & 11.8485 & 1.0898 \\ 2.1615 & -0.1375 & 6.9713 & -1.2427 & 14.3987 & 3.6954 \\ -0.6155 & 0.4415 & -1.9777 & -0.7225 & -4.1196 & 4.4740 \end{pmatrix}.$$

В этих координатах константы u_x , u_y и т.д. для отображения последования Пуанкаре на областях $AA.AA$, $AA.AC$, $\dots$, $CC.CC$ удовлетворяет неравенствам

$$|u_x| > 1.2641, \|u_y\| < 0.3894, \|v_x\| < 0.3894, \|v_y\| < 0.4000.$$

Далее рассуждения для множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ совпадают. Поэтому мы будем обозначать через X любое из этих двух множеств.

Таким образом, в каждой точке $\hat{z}$ из X определено разложение касательного пространства

$$T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = U(\hat{z}) \oplus V(\hat{z}),$$

непрерывно зависящее от $\hat{z} \in X$. Получаем, что $\alpha(\hat{z}) : U(\hat{z}) \rightarrow U(\Phi^{-1}(\hat{z}))$, $\beta(\hat{z}) : V(\hat{z}) \rightarrow U(\Phi^{-1}(\hat{z}))$, $\gamma(\hat{z}) : U(\hat{z}) \rightarrow V(\Phi^{-1}(\hat{z}))$ и $\delta(\hat{z}) : V(\hat{z}) \rightarrow V(\Phi^{-1}(\hat{z}))$ – линейные операторы. В нашем случае $\dim U(\hat{z}) = 1$, а $\dim V(\hat{z}) = 5$. Однако это не существенно для дальнейшего и мы будем производить рассуждения для произвольных размерностей $\dim U(\hat{z}) = m_1$ и $\dim V(\hat{z}) = m_2$ (соответственно, $\alpha(\hat{z})$ будем считать не числом, а обратимым растягивающим в u_x раз линейным отображением). Векторы пространств $U(\hat{z})$ и $V(\hat{z})$ будем обозначать буквами u и v .

Итак, мы ищем такую линейную замену координат $\tilde{v} = v + \mathcal{R}(\hat{z})u$ в каждом пространстве $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S})$, что нижний левый элемент в матрице $A^{-1}(\hat{z})$ обнулится. Найдем $\mathcal{R}(\hat{z})$. То есть, если

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R}(\hat{z}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1}(\hat{z}) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\hat{z}) & \beta(\hat{z}) \\ \gamma(\hat{z}) & \delta(\hat{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{R}(\hat{z}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

или по-другому

$$A^{-1}(\hat{z}) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(\hat{z}) & \tilde{\beta}(\hat{z}) \\ \tilde{\gamma}(\hat{z}) & \tilde{\delta}(\hat{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(\hat{z}) = \alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}) \\ \tilde{\beta}(\hat{z}) = \beta(\hat{z}) \\ \tilde{\gamma}(\hat{z}) = \gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\alpha(\hat{z}) - \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}) \\ \tilde{\delta}(\hat{z}) = \delta(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z}). \end{cases}$$

Поскольку нас интересует такая замена, что $\tilde{\gamma}(\hat{z}) = 0$ для всех $\hat{z}$ из X , то мы получаем, что

$$\mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) = -(\gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1} \quad (9.20)$$

Мы будем искать оператор $\mathcal{R}(\hat{z})$ ограниченной нормы (не зависимо от $\hat{z}$), то есть $\|\mathcal{R}(\hat{z})\| \leq \varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого $\hat{z} \in X$. Произведем точный выбор $\varepsilon > 0$. Для обратимости оператора $\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z})$ достаточно, чтобы

$$u_x - \varepsilon u_y > 0.$$

Для того, чтобы отображение в правой части равенства (9.20) давало оператор по норме не превосходящий ε достаточно, чтобы

$$\frac{v_x + \varepsilon v_y}{u_x - \varepsilon u_y} \leq \varepsilon.$$

Теперь наложим еще одно требование на ε , а именно: выберем его так, чтобы отображение в правой части равенства (9.20) было сжимающим. Дифференциал этого отображения имеет вид

$$(\delta(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z}))d\mathcal{R}(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1}.$$

Поэтому достаточным условием сжатия является

$$\frac{v_y + \varepsilon u_y}{u_x - \varepsilon u_y} < 1.$$

Ну и последнее, что необходимо потребовать от ε , это чтобы оператор $A^{-1}(\hat{z})$ сохранял гиперболическую структуру, а именно: $\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < 1$ и $\|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < 1$. Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{1}{u_x - \varepsilon u_y} < 1 \quad \text{и} \quad v_y + \varepsilon u_y < 1.$$

Собирая все полученные условия на $\varepsilon > 0$ воедино, получаем систему

$$\begin{cases} u_y \varepsilon < u_x; \\ u_y \varepsilon^2 - (u_x - v_y) \varepsilon + v_x \leq 0; \\ u_y \varepsilon < \frac{1}{2}(u_x - v_y); \\ u_y \varepsilon < u_x - 1; \\ u_y \varepsilon < 1 - v_y. \end{cases} \quad (9.21)$$

Докажем, что эта система совместна по ε . Если $u_y = 0$, то система имеет тривиальное решение $\varepsilon \geq \frac{v_x}{u_x - v_y}$. Разберем теперь случай $u_y > 0$. Первое условие системы (9.21) следует из четвертого; третье – из четвертого и пятого. Таким образом после замены $C = u_y \varepsilon$ получаем равносильную систему

$$\begin{cases} C^2 - (u_x - v_y)C + u_y v_x < 0; \\ C < u_x - 1; \\ C < 1 - v_y. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена в первом неравенстве положителен. Действительно из (9.19) следует, что

$$D = (u_x - v_y)^2 - 4u_y v_x = ((u_x - 1) + (1 - v_y))^2 - 4u_y v_x \geq 4(u_x - 1)(1 - v_y) - 4u_y v_x > 0.$$

Поэтому система совместна, если меньший корень квадратного трехчлена лежит левее обоих чисел $u_x - 1$ и $1 - v_y$. А именно:

$$\frac{u_x - v_y - \sqrt{D}}{2} < u_x - 1 \quad \text{и} \quad \frac{u_x - v_y - \sqrt{D}}{2} < 1 - v_y,$$

или по другому

$$\sqrt{D} > 2 - u_x - v_y \quad \text{и} \quad \sqrt{D} > u_x + v_y - 2.$$

Поэтому осталось показать

$$\sqrt{D} > |2 - u_x - v_y| \iff D > (2 - u_x - v_y)^2,$$

что немедленно следует из (9.19) после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Покажем теперь, что интересующее нас линейное отображение $\mathcal{R}(\hat{z}) : U(\hat{z}) \rightarrow V(\hat{z}), \|R(\hat{z})\| \leq \varepsilon$, действительно существует и непрерывно по $\hat{z}$. Рассмотрим пространство $\mathfrak{E}$ всех непрерывных отображений из $\hat{z} \in X$ в шар радиуса ε в пространстве $L(U(\hat{z}), V(\hat{z}))$ линейных отображений из $U(\hat{z})$ в $V(\hat{z})$. Пространство $\mathfrak{E}$ является полным метрическим пространством относительно стандартной метрики «супремум разности», так как множество X компактно, а $L(U(\hat{z}), V(\hat{z}))$ полно. На пространстве $\mathfrak{E}$ определено отображение $\mathfrak{F} : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ по формуле (9.20), а именно:

$$\mathfrak{P}\mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) = -(\gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1}.$$

Отображение $\mathfrak{P}$ определено корректно, потому что (i) образ непрерывного отображения $\mathcal{R}$ будет непрерывным, так как оператор $(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))$ отделен от множества необратимых за счет выбора ε ; и (ii) из $|\mathcal{R}(\hat{z})| < \varepsilon$ следует $|\mathfrak{P}\mathcal{R}(\hat{z})| < \varepsilon$, опять же за счет выбора ε . Более того, отображение $\mathfrak{P}$ является сжимающим по тем же причинам. Следовательно, отображение $\mathfrak{P}$ имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{R}_0 \in \mathfrak{C}$, т.е. $\mathcal{R}_0(\hat{z})$ – искомый линейный оператор, непрерывно зависящий от $\hat{z} \in X$.

Таким образом в точках множества X определено непрерывное семейство операторов $\mathcal{R}_0(\hat{z})$, таких, что $\tilde{\gamma}(\hat{z}) = 0$. Причем $\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < 1$ и $\|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < 1$. Заменяя подпространства $U(\hat{z}) = \{v = 0\}$ и $V(\hat{z}) = \{u = 0\}$ на $\tilde{U}(\hat{z}) = \{\tilde{v} = v + \mathcal{R}_0(\hat{z})u = 0\}$ и $\tilde{V}(\hat{z}) = V(\hat{z})$ получаем новое непрерывное разложение $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \tilde{U}(\hat{z}) \oplus \tilde{V}(\hat{z})$ в котором матрица $A^{-1}(\hat{z})$ принимает форму

$$A^{-1}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(\hat{z}) & \beta(\hat{z}) \\ 0 & \tilde{\delta}(\hat{z}) \end{pmatrix} \text{ для всех } \hat{z} \text{ из } X,$$

В силу компактности X найдутся такие положительные константы $\tilde{u}_x > 1$ и $\tilde{v}_y < 1$, что $\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < \tilde{u}_x^{-1}$ и $\|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < \tilde{v}_y$. Поскольку в новом разложении $\tilde{u}_y = u_y$, а $\tilde{v}_x = 0$, то условия (9.19) выполнены и в новом разложении. Применяя описанную выше процедуру, но уже к оператору $A(\hat{z})$ в новом разложении $\tilde{U}(\hat{z}) \oplus \tilde{V}(\hat{z})$, получаем искомое разложение $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \hat{U}(\hat{z}) \oplus \hat{V}(\hat{z})$ ¹¹. $\square$

Замечание 9.8. Дадим краткое пояснение, почему оператор $\mathcal{R}_0(\hat{z})$ вообще говоря не является гладким (скажем, по Уитни). Уравнение (9.20) является функциональным уравнением, и в наиболее простом виде можно его записать так:

$$y(x) = f(x, y(\phi(x))),$$

где x – координата, $f(x, y)$ и $\phi(x)$ – данные бесконечно гладкие функции, а $y(x)$ – искомая функция. Причем про f известно, что $\|f'_y\| < 1$. Можно даже считать, что x и y одномерны – это не меняет принципиальных эффектов, связанных с негладкостью решения.

Если бы функции ϕ не было (т.е. $\phi(x) = x$), то уравнение бы имело вид $y = f(x, y)$. В этом случае теорема о неявной функции гарантирует существование бесконечно гладкого решения. А именно, тот факт, что $y \in C^1$ можно доказать прямой оценкой, а из этого факта немедленно следует, что $y \in C^\infty$. Действительно,

$$y'(x) = \frac{f'_x(x, y(x))}{1 - f'_y(x, y(x))}$$

и, следовательно, $y' \in C^1$, а, значит, $y \in C^2$ и так далее.

¹¹На самом деле можно показать, что разложение $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \hat{U}(\hat{z}) \oplus \hat{V}(\hat{z})$ зависит от $\hat{z} \in X$ не только непрерывно но и гильбертово, однако это не существенно для дальнейшего.

Однако если $\phi(x)$ не есть тождественная функция, то, если ϕ есть отображение некоторого компакта в себя, по-прежнему можно доказать существование и единственность непрерывного решения на этом компакте (как это сделано в лемме 9.6). Однако, решение этого уравнения, вообще говоря, может быть не гладким. Например, если $x \in S^1 = [0; 2\pi]/\{0 \sim 2\pi\}$, то уравнение

$$y(x) = \frac{1}{2}y(2x) + \sin x$$

имеет и единственное непрерывное решение $\hat{y}(x)$. Однако, это решение не является гладким. Проще всего показать, что не существует $\hat{y}'(0)$. Действительно, если существует производная $\hat{y}'(0)$, то продифференцировав написанное выше уравнение при $x = 0$, получаем

$$y'(0) = y'(0) + \cos 0,$$

что невозможно.

Теперь, применяя поочередно к различным разложениям касательного пространства процедуру, описанную в лемме 9.6 приведем $-N$ степень матрицы дифференциала отображения последования Пуанкаре $d\Phi_H^{-N} = \Theta_H$ из леммы 9.4 к наиболее удобному для нас виду. Поскольку дальнейшие рассуждения почти идентичны для обоих множеств $\Xi_H^0(x_0)$ и $\mathcal{X}_H^0(x_0)$, будем обозначать через X^0 любое из двух множеств $\Xi_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ или $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$.

Для того, чтобы привести дифференциал $d\Theta_H(z)$ к блочно диагональному виду, сначала ограничимся нулевым сечением $\mathcal{C}_0^H$, и, более того, отбросим пока не нужную координату $\tilde{w}$. Обозначим подпространство $T_z\mathcal{C}_0^H$, отвечающее главным скобкам через $T_z^0\mathcal{C}_0^H$, а неглавным – через $T_z^1\mathcal{C}_0^H$. Разложим $T_z^0\mathcal{C}_0^H$, с помощью леммы 9.6 и замены (9.13), в сумму $T_z^0\mathcal{C}_0^H = \hat{U}(z) \oplus \hat{V}(z)$, $\dim \hat{U}(z) = 1$. Оператор $\mathcal{A}(z)$ станет блочно диагональным и будет растягивать на $\hat{U}(z)$ и сжимать на $\hat{V}(z)$. Теперь расширим $\hat{V}(z)$ присоединив к нему подпространство $T_z^1\mathcal{C}_0^H$. В получившемся разложении оператор $d\Theta_H|_{T_z^0\mathcal{C}_0^H \oplus T_z^1\mathcal{C}_0^H}$ имеет вид (9.18) с $\gamma(z) = 0$ и $\|\alpha(z)^{-1}\| < 1$. Поскольку $\varrho(z) > 2$, N в определении $\Theta = \Phi^{-N}$ можно увеличить так, чтобы норма $\|\delta(z)\|$ стала меньше 1 (число N можно выбрать независимо от z в силу компактности множества X^0). Поэтому к $d\Theta_H|_{T_z^0\mathcal{C}_0^H \oplus T_z^1\mathcal{C}_0^H}$ может быть применена процедура, описанная в лемме 9.6, после чего оператор $d\Theta_H|_{T_z^K\mathcal{C}_0^H \oplus \tilde{T}_z^K\mathcal{C}_0^H}$ примет блочно диагональный вид. Повторяя тот же трюк, мы можем поочередно присоединить к разложению, касательные подпространства, отвечающие координатам $\tilde{w}$ и μ . При этом размерность подпространства $\hat{U}(z)$ возрастет ровно на 1 на последнем шаге, при добавлении координаты μ .

Таким образом, мы получаем такое непрерывно зависящие от z разложение $T_z\mathcal{C}^H \cap \mathcal{S}^H = U(z) \oplus V(z)$ в точках z из X^0 , что $\dim U(z) = 2$, а подпространство $V(z)$ горизонтально, то есть $V(z) \subset T_z\mathcal{C}_0^H$. Причем

$$d\Theta_H(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & 0 \\ 0 & \beta(z) \end{pmatrix}$$

где $\alpha(z) : U(z) \rightarrow U(\Theta_H(z))$ и $\beta(z) : V(z) \rightarrow V(\Theta_H(z))$ непрерывно зависят от z , и $\|\alpha(z)^{-1}\| < 1$, а $\|\beta(z)\| < 1$. В силу компактности $\Xi_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ и $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ можно считать, что нормы этих операторов отделены от 1, то есть $\|\alpha(z)^{-1}\| < \kappa$ и $\|\beta(z)\| < \kappa$ для некоторого $\kappa < 1$.

Применим теперь теорему Адамара-Перрона. Для этого построим систему локальных координат в окрестности X^0 . Поскольку множество X^0 компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любой точки z_0 из X^0 разность $\Theta_H(z) - d\Theta_H(z_0)(z - z_0)$ меньше ε в метрике C^1 для z из δ окрестности z_0 . Покроем X^0 конечным числом $\delta/2$ окрестностей в $\mathcal{C}_0^H$ с центрами в точках $z_1^0, \dots, z_M^0 \in X^0$, и в δ -окрестности каждой точки z_m^0 введем свои локальные координаты, порожденные дифференциалом $d\Theta_H(z_m^0)$. Если точка $z \in X_0$ лежит в δ окрестности z_m^0 , то норма разности $d\Theta_H(z) - d\Theta_H(z_m^0)$ меньше ε . Поэтому, если ε достаточно мало, то к орбите $\Theta_H^k(z)$, $k \in \mathbb{Z}$ применима теорема Адамара-Перрона. Таким образом, для каждой точки $z_0 \in X^0$ в ее $\delta/2$ найдется хотя бы одна точка z_m^0 (если найдется несколько таких точек, выберем из них ту, у которой минимальный индекс). Используя локальные координаты из δ -окрестности точки z_m^0 , получаем, что в окрестности z_0 в $\mathcal{C}_0^H \cap \mathcal{S}^H$ радиуса не меньше $\delta/2$ определено двумерное бесконечно гладкое многообразие $W^+(z_0)$ точек z , экспоненциально стремящихся при итерациях отображения Θ_H^{-1} к образу z_0 при тех же итерациях. Поскольку $\Theta_H = \Phi_H^{-N}$, а множество X^0 компактно, то любая точка $z \in W^+(z_0)$ стремится к образу z_0 и при итерациях самого отображения Φ_H :

$$W^+(z_0) = \left\{ z \in \mathcal{C}^H \cap \mathcal{S}^H \text{ и } \|z - z_0\| < \frac{\delta}{2}, \text{ что } \|\Phi_H^k(z) - \Phi_H^k(z_0)\| < C\lambda^k, k \in \mathbb{N} \right\},$$

причем константы $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$ из теоремы Адамара-Перрона зависят лишь от выбора ε , то есть одинаковы для всех точек z . В силу компактности X^0 можно выбрать такие константы $C_1 > 0$ и $0 < \lambda_1 < 1$, что

$$\|\Phi_H^k(z) - \Phi_H^k(z_0)\| < C_1\lambda_1^k \text{ при } k \in \mathbb{N}.$$

Нам потребуются некоторые свойства построенных множеств $W^+(z_0)$.

- (а) Опишем теперь, как устроены траектории исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H , начинающиеся в точках множества $W_+(z_0)$, $z_0 \in X^0$. Для этого воспользуемся полем $\mu\xi_H(x_0)$ на $\mathcal{C}_H$ в окрестности $\mathcal{C}_H^0$, построенным в параграфе 9.4 (см. систему (9.10)). Пусть для определенности $\mu(z) > 0$. Траектория $\gamma(s)$, начинающаяся в точке $\gamma(0) = z \in W^+(z_0)$, пересекает при $s \rightarrow +\infty$ поверхность разрыва правой части гамильтониана $\mathcal{S}^H$ счетное число раз в точках $\Phi_H^k(z)$, $k \in \mathbb{N}$. При этом такая траектория существует и единственна, так как в окрестности X^0 векторное поле $\mu\xi_H(x_0)$ трансверсально $\mathcal{S}^H$. При этом время между переключениями ограничено снизу и сверху числами $\frac{1}{2}s_{\min}$ и $2s_{\max}$. Поэтому $\gamma(s)$ стремится при $s \rightarrow +\infty$ к $\mathcal{C}_0^H = \{\mu = 0\}$ с экспоненциальной скоростью, т.е.

$$c_1 e^{-c_2 s} < \mu(\gamma(s)) < c_3 e^{-c_4 s}$$

для некоторых положительных констант $c_i, i = 1, \dots, 4$. Поскольку $dt = \mu ds$, то мы получаем, что интеграл

$$T(z) = \int_0^{+\infty} \mu(\gamma(s)) ds < \infty$$

конечен, и значит прообраз траектории $\mathbf{B}_H^{-1}(\gamma(t))$ попадает в странную точку x_0 за конечное время $T(z)$. Другими словами, траектория $X(t, \tilde{z}), \tilde{z} \in \mathcal{M}$, исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H , начинающаяся в точке $X(0, \tilde{z}) = \tilde{z} \in \mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0))$, существует и единственна на промежутке $t \in [0; T(\mathbf{B}_H(\tilde{z}))]$ и попадает в x_0 в момент $T(\mathbf{B}_H(\tilde{z}))$. В дальнейшем для краткости мы будем опускать знак отображения $\mathbf{B}_H$ и будем писать $T(\tilde{z}) = T(\mathbf{B}_H(\tilde{z}))$.

Отметим, что главные скобки $\mathcal{K}^m(X(t, z))$ удовлетворяют неравенствам, заявленным в замечании 9.4.

- (b) Опишем теперь, как могут пересекаться множества $W^+(z_0)$ и $W^+(z_1)$, определенные в $\delta/2$ окрестностях z_0 и z_1 . Пусть U – это пересечение $\delta/2$ окрестностей точек z_0 и z_1 . Тогда $W^+(z_0)$ и $W^+(z_1)$ либо не пересекаются, либо совпадают в U . Докажем это. Ясно что, если их пересечение не пусто и содержит некоторую точку $z \in U$, то итерации z стремятся и к образу z_0 и к образу z_1 , поэтому итерации z_0 и z_1 сближаются с экспоненциальной скоростью. Как следствие, итерации любой точки $z \in W^+(z_0)$ сближаются с итерациями z_1 и наоборот. Поэтому множества $W^+(z_i), i = 1, 2$ совпадают на U .

Множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ устроены так: их пересечение с $\mathcal{S}^H$ есть в точности объединение всех слоев $\mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0))$ по всем z_0 :

$$\Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H = \bigcup_{z_0 \in \Xi_H^0(x_0)} \mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0));$$

$$\mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{X}_H^0(x_0)} \mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0));$$

а сами множества получаются, если из каждой точки на $\mathcal{S}^H$ выпустить траекторию гамильтоновой системы до следующего пересечения с $\mathcal{S}^H$. Таким образом свойства (I) и (II) обоих теорем 9.1 и 9.2 получаются автоматически из свойства (a) множеств $W^+(z_0)$.

Отображения Ψ_Γ^H и Ψ_{01}^H , а также топологические цепи Маркова Σ_Γ^+ и Σ_{01}^+ , заявленные в (III) получаются с помощью соответствующих отображений для модельной задачи (5.1). А именно, как композиции (i) проекции π_W , которая переводит $z \in \mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0))$ в точку $z_0 \in \mathcal{C}_0^H$, (ii) идентификации $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и $\Xi_H^0(x_0)$ с $\mathcal{X}^+/g$ и Ξ/g с помощью отображения Π_+/g из леммы 9.2, (iii) применения соответствующего фактор-отображения из модельной задачи (5.1) и (iv) отбрасывания некоторых начальных позиций в полученной топологической цепи Маркова. Точнее, для отображения Ψ_Γ^H в (ii) необходимо использовать отображение Ψ_Γ^+/g из теоремы 8.2, а для отображения Ψ_{01}^H – отображение Ψ_{01}/g из теоремы 5.1. Важно отметить, что сама проекция $z \mapsto z_0$

определена не однозначно, так как вообще говоря возможно, что $z \in \mathbf{B}_H^{-1}(W^+(z_0) \cap W^+(z_1))$. Однако в этом случае по свойству (b) итерации z_0 и z_1 сближаются с экспоненциальной скоростью, поэтому найдется такое число $K \in \mathbb{N}$, что в образах $(\Psi_\Gamma^+/g)((\Pi_+/g)^{-1}(z_i)) \in \Sigma_\Gamma^+$ или $(\Psi_{01}/g)((\Pi_+/g)^{-1}(z_i)) \in \Sigma_{01}$ отличия могут быть только на позициях с номерами меньше K , а на позициях с номерами больше K они должны совпадать. Поэтому мы отбросим все позиции левее K (обозначим это отображение¹² через $\mathfrak{d}$). После этого неоднозначность в отображении π_W пропадет. Итак,

$$\Psi_\Gamma^H = \mathfrak{d} \circ (\Psi_\Gamma^+/g) \circ (\Pi_+/g)^{-1} \circ \pi_W$$

$$\Psi_{01}^H = \mathfrak{d} \circ (\Psi_{01}/g) \circ (\Pi_+/g)^{-1} \circ \pi_W$$

Таким образом пункт (III) обоих теорем 9.1 и 9.2 доказан.

Пункт (IV) теоремы 9.2 получается заменой множества X_0 конечным множеством, состоящим из пересечений R_{ijk}/g или Q_i/g с $\mathcal{S}$ (точнее их образа при отображении Π_+/g). В первом случае X_0 – это трехточечное множество, а во втором – четырехточечное. В случае трехзвенного цикла все собственные значения оператора A^3 из (9.17) по модулю больше 1 (см. параграф 5.5). Поэтому в этом случае мы получаем, что многообразие W^+ одномерно. В случае четырехзвенного цикла оператор A^4 содержит ровно одно собственное значение, по модулю меньше 1 (см. параграф 5.5). Поэтому в этом случае многообразие W^+ двумерно.

Пункт (IV) теоремы 9.1 об оценке размерностей $\mathcal{X}_H(x_0)$ следует из соответствующего пункта теоремы 8.2. Действительно, во-первых, для некоторого достаточно маленького μ_0 отображение $\mathbf{B}_H^{-1}$ является диффеоморфизмом на $\mathcal{C}_0^H \times \{0 < \mu < \mu_0\}$ и, значит, не изменяет размерностей. Во-вторых, если $dG(x_0) = 0$, то размерности (и по Хаусдорфу и по Колмогорову) множеств $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и $\mathcal{X}/g$ совпадают, так как по лемме 9.2 в этом случае отображение Π_+ является локально липшицевым. Остается только сказать, что множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ и $\mathcal{X}^+$ получаются из соответственно $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ и $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S})/g$ с помощью одинаковой процедуры (строятся двумерные устойчивые листы и выпускаются траектории).

Пункт (V) теоремы 9.1 идентичен соответствующему пункту в теореме 8.2.

Пункты (VI) теоремы 9.1 и (V) теоремы 9.2 получаются рассмотрением липшицевой поверхности M_- вместо липшицевой поверхности M_+ оптимальных траекторий. Напомним, что M_- состоит из траекторий выходящих из начала координат гамильтоновой системы (5.2) принципа максимума Понтрягина модельной задачи (5.1). Доказательство теорем 9.1 и 9.2 закончено.

□

¹²В случае бесконечных вправо последовательностей Σ_Γ^+ мы отбрасываем ровно K первых членов, а в случае бесконечных в обе стороны последовательностей Σ_{01} мы отбрасываем весь бесконечный влево хвост, начиная с позиции K .

Докажем теперь утверждение, сформулированное в замечании 9.4. Оценка сверху уже получена в лемме 9.1. Оценка снизу эквивалентна тому, что на любой траектории $X(t)$ из множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ или $\Xi_H(x_0)$ выполнена оценка

$$\mu(X(t)) \geq c''(T - t)$$

где $c'' > 0$ некоторая константа, а T – момент выхода в странную точку x_0 .

Перенесем траекторию $X(t)$ на цилиндр $\mathcal{C}_H$ с помощью раздувающего отображения $\mathbf{B}_H$ и сделаем замену времени $ds = \frac{1}{\mu} dt$. Получим траекторию $\tilde{X}(s) = \mathbf{B}_H(X(t(s)))$ системы (9.12). Таким образом, необходимо доказать, что

$$\mu(\tilde{X}(s)) \geq T - t(s) = c'' \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}(\sigma)) d\sigma.$$

Обозначим через $\tilde{X}^0(s)$ траекторию на $\mathcal{C}_0^H$ из $\mathcal{X}_H(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$ к которой приближается $\tilde{X}(s)$ при $s \rightarrow +\infty$. Как уже неоднократно упоминалось, траектория $\tilde{X}^0(s)$ так же является траекторией системы (9.15), так как $\mu(\tilde{X}^0(s)) = 0$. Рассмотрим также траекторию $\tilde{X}^1(s)$ системы (9.15), которая отличается от $\tilde{X}^0(s)$ только тем, что $\mu(\tilde{X}^1(s)) > 0$, а именно:

$$\begin{cases} \tilde{K}(\tilde{X}^1(s)) = \tilde{K}(\tilde{X}^0(s)); \\ \tilde{w}(\tilde{X}^1(s)) = \tilde{w}(\tilde{X}^0(s)); \\ \frac{d}{ds}\mu(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}^0(s)); \\ \mu(\tilde{X}^1(0)) = \mu(\tilde{X}(0)). \end{cases}$$

Поскольку траектория $\tilde{X}^1(s)$ является образом оптимальной траектории в модельной задаче (5.1) при отображении $\mathbf{B}_H \circ \Pi_+$, то на ней по теоремам 3.1 и 3.2 выполнено

$$\mu(\tilde{X}^1(s)) \geq c_0 \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}^1(\sigma)) d\sigma.$$

для некоторой константы $c_0 > 0$.

Покажем теперь, что значения μ на обеих траекториях $\tilde{X}(s)$ и $\tilde{X}^1(s)$ отличаются «не слишком сильно». А именно,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mu(\tilde{X}(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}(s)); \\ \frac{d}{ds}\mu(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}^1(s)); \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{ds} \ln \frac{\mu(\tilde{X}(s))}{\mu(\tilde{X}^1(s))} = \Upsilon(\tilde{X}(s)) - \Upsilon(\tilde{X}^1(s));$$

Поскольку $\tilde{X}(s)$ и $\tilde{X}^1(s)$ с экспоненциальной скоростью приближаются к $\tilde{X}^0(s)$, то разность в правой части тоже стремится к 0 с экспоненциальной скоростью. Итак, для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$ выполнено

$$-c_1 e^{-c_2 s} \leq \frac{d}{ds} \ln \frac{\mu(\tilde{X}(s))}{\mu(\tilde{X}^1(s))} \leq c_1 e^{-c_2 s}$$

Учитывая, что $\ln \frac{\mu(\tilde{X}(0))}{\mu(\tilde{X}^1(0))} = 0$, немедленно приходим к выводу, что для $c_3 = e^{c_1/c_2}$ выполнено

$$\frac{1}{c_3} \mu(\tilde{X}^1(s)) \leq \mu(\tilde{X}(s)) \leq c_3 \mu(\tilde{X}^1(s))$$

Таким образом,

$$\mu(\tilde{X}(s)) \geq \frac{1}{c_3} \mu(\tilde{X}^1(s)) \geq \frac{c_0}{c_3} \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}^1(\sigma)) d\sigma \geq \frac{c_0}{c_3^2} \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}(\sigma)) d\sigma,$$

что и требовалось.

□

Замечание 9.9. Учитывая замечание 9.4 мы можем проконтролировать, как множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ входят в странную точку x_0 . Говоря геометрическим языком, множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ касаются (в смысле порядка по μ) конуса $B_H^{-1}(\mathcal{D}_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\})$.

Замечание 9.10. Странная точка согласно определению 9.1 может появиться только если количество степеней свободы системы не меньше 16. Действительно, в определении 9.1 требуется линейная независимость дифференциалов функций F_r , $(\text{ad } F_i)F_r$ и т.д. до четвертого порядка включительно. Минимальная размерность в которой такое возможно легко вычислить через размерность свободной нильпотентной градуированной алгебры Ли глубины 4 с 3 образующими (F_3 необходимо исключить, так как $F_3 \equiv -F_1 - F_2$). А именно, вектор роста такой алгебры легко вычислить через слова Холла: он есть (3,6,14,32). Поскольку на первой ступени мы не используем dF_0 , то минимально возможная размерность $\mathcal{M}$ – это 31. Но $\dim \mathcal{M}$ четно, поэтому

$$\dim \mathcal{M} \geq 32$$

и система имеет не меньше 16 степеней свободы. Число степеней свободы так велико, потому что условия в определении странных точек чрезмерно строги. На самом деле их можно существенно ослабить. Примером гамильтоновой системы малой размерности (с 4-мя степенями свободы), в которой наблюдается описанный в теореме 9.1 феномен может служить гамильтонова система (5.2) ПМП в модельной задаче (5.1).

Замечание 9.11 (М.И. Зеликин, Л.В. Локуцкий и Р. Хильдебранд). Появление странных точек в больших размерностях становится неизбежным и не уничтожается малым шевелением H_i , $i = 1, 2, 3$, если линейно независимыми являются дифференциалы коммутаторов в x_0 не до 4-ого порядка (как это требуется в определении 9.1) а до 5-ого порядка. В этом случае множество странных точек $\mathcal{ST}$ является гладким многообразием в окрестности x_0 и его коразмерность также вычисляется через размерность свободной нильпотентной градуированной алгебры Ли глубины 5 с 3 образующими. А именно, вектор роста такой алгебры есть (3,6,14,32,80). Коразмерность $\mathcal{ST}$

меньше 80 на 4 (3 за счет симметрической формы $B_{rr'}$ и еще за счет F_0 на первой ступени). Таким образом,

$$\text{codim } \mathcal{ST} = 76.$$

Заключение

В диссертации решены трудные задачи теории оптимального управления и теории гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Основные результаты заключаются в следующем.

1. Теоремы о том, что особые экстремали фиксированного (натурального) порядка в задачах с одномерным управлением формируют симплектическое многообразие, а их поток на нем является гамильтоновым (теорема 1.2).
2. Доказательство интегрируемости по Лиувиллю потока особых экстремалей в задаче быстрого действия для управления волчком Лагранжа под воздействием контролируемого магнитного поля (пример 1.6 и теорема 1.5).
3. Нахождение нового феномена оптимального управления в виде иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, проходимой (в положительном направлении) за конечное время (теорема 2.6 и пример 2.3).
4. Доказательство того, что в классе нильпотентно-выпуклых задач оптимальный синтез образует правосторонний поток, а оптимальное управление имеет не более чем счетное число точек разрыва (теоремы 3.1 и 3.2 и пример 3.1).
5. Теорема о структуре лагранжева многообразия в окрестности особой траектории первого порядка в задачах, аффинных и голономных по многомерному управлению из многогранника (теорема 4.3).
6. Теорема о наличии хаотических структур в оптимальном синтезе в модельной нильпотентно-выпуклой задаче с управлением из произвольного треугольника, близкого к правильному (теорема 5.1).
7. Теорема о точной хаотической структуре оптимального синтеза в модельной нильпотентно-выпуклой задаче оптимального управления с управлением из правильного треугольника (теорема 8.2).
8. Теорема о сопряженности липшицевой гиперболической динамической системы с соответствующей топологической цепью Маркова (теорема 7.1).
9. Теорема об оценках на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек с помощью липшицевых констант динамической системы (теорема 7.5).
10. Теоремы о наличии хаоса в интегральных воронках точек, лежащих на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части гамильтоновой системы (теоремы 9.1 и 9.2) и его общем положении (замечание 9.11).

Литература

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // *Матем. сб.* — 1960. — Т. 51(93), № 1. — С. 99–128.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Москва: Наука, 1985.
3. Poincaré Henri. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère et 2nde partie). — *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1881–82.
4. Шильников Л.П. Шильников А.Л. Тураев Д.В. Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. LaSalle J.P. The time optimal control problems // *Contributions to the theory of nonlinear oscillators*. — 1960. — Vol. V. — Pp. 1–24.
6. Contensou P. Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique // *Astronaut. Acta*. — 1962. — Vol. 8. — Pp. 134–150.
7. Kelley H.J. A second variation test for singular extremals // *AIAA J.* — 1964. — Vol. 2. — P. 1380–1382.
8. Robbins H.M. Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories // *AIAA J.* — 1965. — Vol. 3. — Pp. 1094–1098.
9. Kopp R.E., H.G. Moyer. Necessary conditions for singular extremals // *AIAA J.* — 3. — Vol. 1965. — Pp. 1439–1444.
10. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // *Оптимальное управление, Современная математика и её приложения*. — 2003. — Т. 11. — С. 3–161.
11. M. Morse G. A. Hedlund. Symbolic Dynamics // *American Journal of Mathematics*. — 1938. — Vol. 60. — Pp. 815–866.
12. Smale S. Differentiable dynamical systems // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1967. — Vol. 73. — Pp. 747–817.

13. *Birkhoff G.D.* Proof of the ergodic theorem // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. — 656–660. — Vol. 17. — P. 1931.
14. *Dorfman J.R.* An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics. — Cambridge: University Press, 1999.
15. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — Москва: изд. “Факториал”, 1999.
16. *Lokutsievskii L. V.* Fractal structure of Hyperbolic Lipschitzian Dynamical Systems // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2012. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 27–44.
17. *Montgomery R.* Abnormal minimizers // *SIAM J. Control Optim.* — 1994. — Vol. 32. — Pp. 1605–1620.
18. *Monti R.* The regularity problem for sub-Riemannian geodesics // *Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry*. — 2014. — Vol. 5. — Pp. 313–332.
19. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. — Mathematical Surveys and Monographs, 2002. — Vol. 91.
20. *Agrachev A.* Some open problems // *Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry*. — 2014. — Vol. 5. — Pp. 1–13.
21. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals // *Topics in Optimization, Academic Press, New York*. — 1967. — Pp. 63–101.
22. *Robbins H. M.* A Generalized Legendre–Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control // *IBM J. Res. Develop.* — 1967. — Vol. 11. — Pp. 361–372.
23. *Lewis R. M.* Defenitions of order and junction condition in singular control problems // *SIAM J. Control and Optimization*. — 1980. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 21–32.
24. *Локуцкий Л. В.* Гамильтоновость потока особых траекторий // *Матем. сб.* — 2014. — Т. 205, № 3. — С. 133–160.
25. *Борисов В.Ф.* Условие Келли и структура лагранжева многообразия в окрестности особой экстремали первого порядка // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2006. — Т. 19. — С. 5–44.
26. *Lev Lokutsievskiy Vincent Runge.* Optimal Control by Multipoles in the Hele-Shaw Problem // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. — 2015. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 261–277.
27. *Fuller A.T.* Study of an optimum non-linear system // *J. Electronics Control*. — 1963. — Vol. 15. — Pp. 63–71.

28. Kupka I. Fuller's phenomena // *Progr. Systems Control Theory*. Birkhauser, Boston. — 1990. — Pp. 129–142.
29. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез в задачах оптимального управления, содержащий траектории с учащающимися переключениями и особые траектории второго порядка // *Матем. заметки*. — 1990. — Т. 47, № 1. — С. 62–73.
30. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // *Труды МИАН СССР*. — 1991. — Vol. 197. — Pp. 85–166.
31. Локуцкий Л. В. Типичная структура лагранжевого многообразия в задачах с чаттерингом // *Матем. заметки*. — 2014. — Т. 95, № 6. — С. 842–853.
32. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. — Boston: Birkhauser, 1994.
33. Agrachev A.A., Barilari D., Boscain U. Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry. — Lecture Notes, Preprint SISSA, 2014.
34. A.A.Milyutin, N.P.Osmolovskii. Calculus of Variations and Optimal Control. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998. — Vol. 180.
35. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // *Матем. сб.* — 2011. — Vol. 11. — Pp. 31–54.
36. Trélat E. Non-subanalyticity of sub-Riemannian Martinet spheres // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*. — 2001. — Vol. 332. — Pp. 527–532.
37. Водопьянов С.К. Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // *Сиб. матем. журн.* — 2007. — Vol. 48, no. 2. — Pp. 251–271.
38. Gromov M. Carnot-Carathéodory spaces seen from within // *Sub-Riemannian Geometry, Progress in Mathematics*. — 144. — Vol. 1996. — Pp. 79–323.
39. Оптимальное управление в линейных системах / А. А. Милютин, А. Е. Илютович, Н. П. Осмоловский, С. В. Чуканов. — Москва: Наука, 1993.
40. Зеликин М. И., Локуцкий Л.В., Хильдебранд Р. Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением // *Тр. МИАН*. — 2012. — Т. 277. — С. 74–90.
41. Зеликин М. И., Киселев Д. Д., Локуцкий Л. В. Оптимальное управление и теория Галуа // *Матем. сб.* — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 83–98.

42. Локуцкий Л. В. Накопление переключений в задачах поиска // *Оптимальное Управление, Современная Математика Фундаментальные Направления*. — 2006. — Т. 19. — С. 70–77.
43. Локуцкий Л. В. Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движения в задачах поиска на n -мерных многообразиях // *Доклады Академии Наук*. — 2007. — Т. 417, № 3. — С. 316–318.
44. Zelikin M. I., Lokutsievskii L. V., Usachev R. A. Vortex singularities of optimal strategies at the beginning of motion in search problems on n -dimensional Riemannian manifolds // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2009. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 197–220.
45. Локуцкий Л. В. Оптимальный вероятностный поиск // *Матем. сб.* — 2011. — Т. 202, № 5. — С. 77–100.
46. Зеликин М.И. Нерегулярность оптимального управления в регулярных экстремальных задачах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1995. — Т. 1, № 2. — С. 399–408.
47. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // *вестник МГУ, Матем. и мех.* — 1959. — Т. 2. — С. 25–32.
48. Agrachev A. On regularity properties of extremal controls // *J. Dynamical and Control Systems*. — 1995. — Vol. 1. — Pp. 319–324.
49. Agrachev A., Sigalotti M. On the local structure of optimal trajectories in R^3 // *SIAM J. on Control and Optimization*. — 2003. — Vol. 42. — Pp. 513–531.
50. Ovseevich A.I. Limit Behavior of Attainable Sets of Linear Systems // *Computing*. — 2005. — Vol. 75, no. 1. — Pp. 99–107.
51. Goh B.S. The second variation for the singular Bolza problem // *SIAM J. Control and Optimization*. — 1966. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 127–168.
52. Goh B.S. Necessary Conditions for Singular Extremals Involving Multiple Control Variables // *SIAM J. Control and Optimization*. — 1966. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 716–731.
53. Krener A. J. The high order maximal principle and its application to singular extremals // *SIAM J. Control and Optimization*. — 1977. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 256–293.
54. Аграчев А. А., Гамкредидзе Р. В. Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстрогодействия // *Матем. сб.* — 1976. — Т. 100(142), № 4(8). — С. 610–643.
55. Аграчев А.А. Необходимое условие оптимальности второго порядка в общем нелинейном случае // *Матем. сб.* — 1977. — Т. 102(144), № 4. — С. 551–568.

56. А.А. Милютин. О квадратичных условиях экстремума в гладких задачах с конечномерным образом // В сборнике: «Методы теории экстремальных задач в экономике». — 1981. — С. 138–165.
57. Дмитрук А. В. Квадратичные условия понত্রягинского минимума в задаче оптимального управления линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 2. — С. 284–312.
58. Дмитрук А. В. Квадратичные условия понত্রягинского минимума в задаче оптимального управления линейной по управлению. II. Теоремы об ослаблении ограничений равенства // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1987. — Т. 51, № 4. — С. 812–832.
59. Осмоловский Н.П. Условия второго порядка слабого локального минимума в задаче оптимального управления (необходимость, достаточность) // Докл АН СССР. — 1975. — Т. 225, № 2. — С. 259–262.
60. Зеликина Л. Ф., Зеликин М. И., Хлюстов К. В. Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем // Дифф. Ур. — 2001. — Т. 37, № 9. — С. 1161–1167.
61. Локуцкий Л. В. Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника // Изв. РАН. Сер. матем. — 2014. — Т. 78, № 5. — С. 167–190.
62. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
63. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики. — Тбилиси: Академия Наук Грузии, Институт Кибернетики, 2003. — Т. 11 из Современная математика и ее приложения. Оптимальное управление.
64. Дмитрук А. В. Квадратичные достаточные условия минимальности аномальных субримановых геодезических // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — Т. Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). из Том 4. Оптимальное управление. — М.: ВИНТИ, 1999. — С. 5–89.
65. McDannel J. P., Powers W. F. Necessary conditions for joining optimal singular and non-singular subarcs // SIAM J. Control and Optimization. — 1971. — Vol. 9. — Pp. 161–173.
66. Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
67. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 2. — С. 46–56.

68. *Hildebrand R., Lokutsievskiy L. V., Zelikin M. I.* Generic Fractal Structure of Finite Parts of Trajectories of Piecewise Smooth Hamiltonian Systems // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2013. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 25–32.
69. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — Москва: Едиториал УРСС, 1989.
70. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Современные методы теории интегрируемых систем. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
71. *Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А.* Интегрируемые системы. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
72. *М. И. Зеликин Л. В. Локуцкий Р. Хильдебранд.* Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью // *Современная математика, фундаментальные направления*. — 2015. — Т. 56. — С. 5–128.
73. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. — Т. 1.
74. *Зеликин М. И., Локуцкий Л. В., Хильдебранд Р.* Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точки негладкости гамильтониана // *ДАН*. — 2013. — Т. 450, № 1. — С. 1–6.
75. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. Современные лекционные курсы. — МЦНМО, 2004.
76. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
77. *Schneider Rolf.* Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory. — Cambridge University Press, 1993.
78. *Zelikin M. I., Melnikov N. B., Hildebrand R.* Topological structure of a typical fibre of optimal synthesis for chattering problems // *P. Steklov Inst. Math.* — 2001. — Vol. 233. — Pp. 116–142.
79. *Falconer K.* Fractal Geometry. — second edition edition. — West Sussex: Mathematical Foundations and Applications, 2003.
80. *Yin Quinghe.* On Hausdorff dimension for attractors af iterated function systems // *J. Austral. Math. Soc.* — 1993. — no. 55. — Pp. 216–231.
81. *Ellis D. B., Branton M. G.* Non–self–similar attractors of hyperbolic iterated function systems // *Lecture Notes in Mathematics*. — 1988. — no. 1342. — Pp. 158–171.

82. *Pesin Yakov B.* Dimension theory in dynamical systems: contemporary views and applications. — Chicago: The university of Chicago Press, 1997.
83. *Hildebrand R., Lokutsievskiy L.V., M.I. Zelikin.* Generic fractal structure of the optimal synthesis in problems with affine multidimensional control // Control Conference (ECC), 2013 European, IEEE Conference Publications, Institute of Electrical and Electronics Engineers. — 2013. — Pp. 3197–3202.

Список рисунков

1	Топологическая структура окрестности особой экстремали первого порядка.	10
1.1	Фазовый портрет потока из примера 1.1	22
1.2	Диаграмма обнуления скобок $\{(\operatorname{ad} H)^m G, (\operatorname{ad} H)^l G\}$	27
1.3	Проекция множества $\mathcal{S}_2^0$ на плоскость (q_1, q_2)	42
1.4	Механическая система перевернутого маятника.	44
3.1	На рисунках изображен поток $-P^{-t}$	103
4.1	Структура поверхностей M_Γ^i	111
4.2	Оптимальная траектория $-\hat{q}(x)$	119
4.3	Оптимальный синтез в окрестности особой траектории.	121
5.1	Схематичное изображение периодических траекторий $Z^\pm$, Q^i и $R^\pm$ на сфере M_+/g	132
5.2	Схематичное изображение результатов леммы 5.9.	145
5.3	Схематичное изображение кривых σ_k	146
6.1	Схематичное изображение диска D_{ij} поверхности переключения $\pi(\mathcal{S})$	151
6.2	Известные области	154
6.3	Глобальная структура отображения Пуанкаре	155
6.4	Области I и Ib	157
6.5	Схематическое расположение областей	158
6.6	Области II, III, IV, V	159
6.7	Образы областей II, III, IV, V	160
6.8	Прообразы областей II, III, IV, V	161
6.9	Граф переходов	161
6.10	Динамика на области V	162
6.11	Динамика на области III	163
6.12	Динамика с участием отображения B	164
6.13	Динамика с участием отображения B	164
6.14	Динамика с участием отображения B	165
6.15	Образ области IIIb	166
6.16	Прообраз области IIIb	166
7.1	Схематичное изображения отображения $f : B_1 \rightarrow B_2$	169

7.2	Гомотопия нижнего основания C в точку по графику ψ .	173
7.3	Схематичное изображение образов отображений f_{il} , f_{jl} и f_{kl} .	174
8.1	Граф $\tilde{\Gamma}$	195
8.2	Граф $\hat{\Gamma}$. Буквы r и t не важны для графа $\hat{\Gamma}$, но участвуют в построении графа Γ в определении 8.1.	200
9.1	Взаимное расположение страт $\mathcal{S}_{ij}^H$, $\mathcal{S}_{123}^H$ и областей Ω_i	208

Список таблиц

8.1	Константы $\bar{u}_x, \underline{u}_x$ и т.д. для отображения F .	195
8.2	Константы $\bar{x}_u, \underline{x}_u$ и т.д. для отображения F^{-1} .	195
8.3	Константы c_i и d_i отображений F и F^{-1} для прямоугольников B_i .	195
8.4	Константы $\lambda_\sigma^-, \lambda_\sigma'^-$ и α^- для отображения F .	196
8.5	Константы $\lambda_\sigma^+, \lambda_\sigma'^+$ и α^+ для отображения F^{-1} .	196