

Шварц Анна Юрьевна

**РОЛЬ ЧУВСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
В ОВЛАДЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ
ПОНЯТИЯМИ**

19.00.01 - Общая психология, психология личности,
история психологии

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата психологических наук

Москва - 2011

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Кричевец Анатолий Николаевич** –
доктор философских наук, профессор;
профессор кафедры методологии психологии
факультета психологии ФГБОУ ВПО
«МГУ имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Ушаков Дмитрий Викторович** –
доктор психологических наук, профессор;
заведующий лабораторией Психологией и
психофизиологией творчества Учреждения
РАН «Институт психологии РАН»

Гусев Алексей Николаевич –
доктор психологических наук, профессор;
профессор кафедры психологии личности
факультета психологии ФГБОУ ВПО
«МГУ имени М.В.Ломоносова»

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«**Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”**».

Защита состоится 23 декабря 2011 года в 13:00 часов на заседании
диссертационного совета Д 501.001.14 в ФГБОУ ВПО «Московский
государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 125009,
г. Москва, улица Моховая, дом 11, строение 9, аудитория 215.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени
М.В. Ломоносова

Автореферат разослан 23 ноября 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

М.Ш. Магомед-Эминов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Проблема соотношения чувственного и абстрактного в понятии, безусловно, является одной из классических для психологии (О. Кюльпе, Дж. Брунер, Ж. Пиаже, Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, В.В. Давыдов и др.). О ее сложности и неразрешенности в современной науке говорят противоречивые позиции классических и современных теорий. В отечественной науке доминирует представление о вербально-логическом мышлении как высшем и ведущем у взрослого человека. В когнитивной психологии так же широко распространены амодальные представления о понятийной структуре. Однако в настоящее время существует множество эмпирических данных об укорененности абстрактного знания в модальном и телесном опыте, в том числе, со стороны нейрофизиологии (например, работы Barsalou L., Nunez R., Boroditsky L., Borghi A., Ashby F.G.). Развиваются теории, непосредственно связывающие понятийную организацию знания с чувственным восприятием и действием (Л. Барсалоу, Дж. Лакофф, М. Джонсон). Проведенный анализ позволяет выйти за рамки представлений о понятии как родовидовой структуре, определяемой системой признаков. Мы, вслед за В.В. Давыдовым, рассматриваем понятие как способ действия, позволяющего выявить скрытые существенные отношения. Такой взгляд на понятие позволяет интегрировать чувственные представления в понятийную структуру значений, сохранив при этом специфику понятия, как обобщения высшего уровня, позволяющего строить математическое знание.

Данная работа восполняет существующий пробел в области изучения математического мышления в России: будучи пионерами в этой области (работы А.В. Крутецкого, В.В. Давыдова), в настоящее время российские психологи редко обращаются к этой теме. В зарубежной психологии последние 25 лет наблюдается всплеск интереса к вопросу о визуальных материалах и роли чувственного опыта в математическом мышлении и

образовании (N. Rresmeg, R. Nunez, L. Edwards, D.A. Sylianou, A. Arcavi, F. Rivera и др.), широко обсуждается природа и структура математических понятий (E. Dubinsky, A. Sierpinska, R. Nunez, G. Lakoff, A. Gagatsis, R. Duval, F. Hitt и др.). Зрительно-пространственные математические модели понимаются в основном в контексте семиотического подхода (R. Duval, N. Presmeg), в наиболее поздних работах начинает учитываться активность субъекта в прочтении знаковых систем и роль коммуникации и культурных средств для передачи значения (W.-M. Roth, L. Radford). Однако западные исследователи не стремятся интегрировать данные о математическом мышлении в общепсихологический контекст, а также можно отметить дефицит теоретических обобщений. Цель нашей работы – рассмотрение чувственных оснований математического знания именно в ключе психологического изучения понятийного знания в целом. В работе показывается эффективность деятельностного подхода в разрешении противоречий, стоящих перед западными коллегами.

Особенную актуальность работа приобретает в связи с распространением интегративного образования, в том числе, для людей с нарушениями зрительного анализатора. В диссертации раскрываются как преимущества наглядных материалов в обучении незрячих, так и ограничения. Ставится принципиальный вопрос, в каких случаях тактильные инструменты в обучении незрячих могут становиться наглядными.

Цель исследования. Построить рабочую модель математического понятия, отвечающую современным представлениям о понятийном мышлении и отражающую специфику математического знания. Выявить место чувственных представлений в структуре математического понятия у субъектов, в разной степени владеющих математическими понятиями.

Объектом исследования является система представлений математических понятий у студентов разного уровня математической подготовки и разной степени сохранности зрительного анализатора.

Предмет исследования: место и значение чувственных представлений в репрезентации математического понятия, роль зрительной чувственности в овладении математическим знанием.

Общие гипотезы исследования:

1. Математическое понятие в системе значений конкретного субъекта является сложным системным образованием, опирающимся на практические действия, предметом которых являются знаково-символические модели разных типов.

2. Овладение математическими понятиями не может протекать в обход зрительно-пространственных моделей. В ходе освоения математического материала у учащегося формируются чувственные представления, отражающие специфические понятийные способы работы с соответствующими моделями.

Задачи исследования:

1. Теоретический анализ подходов к проблеме соотношения чувственных представлений и понятийных структур в математике на различных уровнях методологии: философском, теоретико-психологическом, конкретно-психологическом, методическом. Анализ материалов, посвященных математическим знаниям людей с патологией зрения.

2. Разработка рабочей модели математического понятия, раскрывающей место чувственных представлений в структуре понятия.

3. Проведение качественного исследования понимания математики студентами для выявления способов представления математических понятий.

4. Создание и апробация опросниковой методики, позволяющей выявить индивидуальный профиль понимания математических понятий.

5. Проверка рабочей модели математического понятия путем анализа индивидуальных вариантов представления школьных математических понятий в группах с разным уровнем математической подготовки, среди зрячих студентов и студентов со зрительными патологиями, в зависимости от

развития зрительно-пространственных способностей. Анализ специфики чувственных представлений студентов разных групп.

6. Исследование деформации структуры математических понятий при полном отсутствии в обучении наглядных материалов (на материале студентов с патологией зрения).

Теоретико-методологические основы работы. Философскими основаниями данной работы явились понятие схемы, предложенное И. Кантом; пересмотр понятий абстрактного и конкретного в философии диалектического направления, в частности, в работах Э.В. Ильенкова; а также теория развивающегося понятия В.С. Библера. При выборе и построении метода качественной части исследования мы опирались на идеи феноменологического анализа Э. Гуссерля.

Общим теоретико-методологическим основанием работы является деятельностный подход в психологии (А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн). В основу рабочей модели математического понятия положены различные аспекты решений проблемы понятий Л.С. Выготским, С.Л. Рубинштейном, А.Н. Леонтьевым, В.И. Асниным, П.Я. Гальпериным, В.В. Давыдовым, Ж. Пиаже, L. Barsalou, М. Джонсоном, Дж. Лакоффом. Кроме того, в работе использованы представления о математическом знании как системе из многих разно-модальных регистров (R. Duval), о понимании в математике как обращении к телесно-воплощенному опыту (embodiment mind) (G. Lakoff, R. Nunez), подход конструкционизма (S. Papert), APOS (действие-операция-объект-схема) теория математического знания (E. Dubinsky). Вопрос о встраивании чувственных представлений в математическое знание решается с опорой на положения о значении активности субъекта (А.Н. Леонтьев, С.Д. Смирнов) и роли его перцептивных и познавательных действий (П.Я. Гальперин, А.В. Запорожец) в построении образа.

Эмпирическая часть работы проведена в качественно-количественной методологии. Используются методические приемы качественного анализа:

пре-трансцендентальный феноменологический анализ (A. Giorgi), приемы "укорененной" (grounded) теории.

Научная новизна исследования. Разработана теоретическая модель математического понятия как координации схем действий с знаково-символическими структурами разных типов. Данная модель, в отличие от других, позволяет рассматривать математическое понятие и как застывшее научное знание, и как инструмент и результат индивидуального мышления. В эмпирической части работы субъективный опыт овладения математическими понятиями проанализирован с помощью пре-трансцендентального феноменологического анализа, данные методы анализа ранее не применялись к подобным переживаниям в области математики. Разработан опросник, позволяющий анализировать индивидуальный профиль способов репрезентации математических понятий. Исследование зрительной патологии, являвшееся ранее средством изучения общепсихологических вопросов о функционировании восприятия и формировании образа мира, применено нами для изучения процессов мышления и репрезентации абстрактных знаний.

Теоретическое значение исследования. Работа направлена на интеграцию западных представлений о математическом мышлении и образовании и отечественных теорий развития понятийных структур. В работе критически обсуждается ключевая роль вербально-логического мышления при овладении научными понятиями в области математики (Л.С. Выготский, Н.Ф. Талызина), обосновывается необходимость выхода за рамки вербальных и формальных представлений для полноценного овладения математическими понятиями. Пересматриваются классические и современные амодальные модели понятий, распространенные в когнитивной психологии. Альтернативная модель строится на основе представлений о понятии как способе действия и как интеграции схем, характерных для работ В.В. Давыдова и Ж. Пиаже. Предложенная рабочая модель математического понятия позволяет интегрировать ряд важных аспектов различных

представлений о математических понятиях (G. Lakoff, R. Nunez, E. Dubinsky, R. Duval), а также учитывает активность и целенаправленность субъекта, овладевающего математическим понятием.

Деятельностный подход в понимании природы чувственных представлений (А.Н. Леонтьев, П.Я. Гальперин, А.В. Запорожец, С.Д. Смирнов) позволяет комплексно объяснить противоречивые данные о необходимости наглядных материалов в обучении и избегании чувственных репрезентаций математических понятий студентами различной компетентности.

Практическая значимость исследования. Результаты диссертационной работы могут быть использованы и уже используются при подготовке математических курсов для неспециалистов. Средства наглядности следует специальным образом включать в обучение: делать акцент не на формальном обучении, сопровождаемом иллюстративным материалом, а выстроить систему понятийных действий с различными знаково-символическими моделями. Особенно важно тщательно выстроить способы использования наглядных инструментов в математическом образовании незрячих. Рельефные копии наглядных пособий для зрячих могут не передавать существенных черт при тактильном восприятии. Для незрячих необходимо подбирать особые наглядные пособия, позволяющие ухватить существенные аспекты понятий.

В ходе исследований разработан опросник для анализа системы репрезентаций математических понятий. Эта методика может использоваться для дальнейшего исследования процесса овладения математическими понятиями, а также для фиксации результатов обучения математике.

Достоверность и обоснованность результатов. Качественные исследования проведены в соответствии с принципами, разработанными для проведения психологических исследований в качественной методологии. Достоверность количественных результатов обеспечивается адекватными

математическими методами обработки данных, достаточным объемом выборки. Всего в исследованиях приняло участие 194 человека.

Положения, выносимые на защиту:

1. Хорошо усвоенное математическое понятие для конкретного субъекта является системой схем или способов действий по преобразованию знаково-символических моделей разного рода. Каждая знаково-символическая модель может быть зафиксирована субъектом в виде представления.

2. Существует конвенциональное математическое знание, представленное в зрительно-пространственной форме и входящее в структуру математического понятия. Визуальные репрезентации хорошо усвоенных понятий лишены примесей индивидуального знания и не отражают индивидуальный путь усвоения понятия. Они представляют собой стандартные пространственные модели, которые сопряжены в сознании субъекта с определенными способами их восприятия и использования. В репрезентациях хуже усвоенных понятий наблюдаются субъективные представления, индивидуальные ассоциации, образы, оторванные от математических действий с ними.

3. Влияние чувственности на овладение понятием проявляется не только в деятельности со зрительно-пространственными моделями. Действия с алгебраическими моделями разворачиваются в пространстве и времени; предметом этих действий являются знаки, доступные непосредственному восприятию. Алгебраическая репрезентация является результатом свернутых предметных действий и имеет чувственный компонент.

4. Наглядные материалы являются только "поводом" для создания чувственно наполненной модели математического понятия. Сами по себе, как «изображения», они не могут репрезентировать понятия. Чувственные представления, будучи содержанием индивидуального сознания, существуют вместе со способами действий по их использованию и схемами, позволяющими правильно воспринимать соответствующие внешние знаковые модели.

5. Математические понятия не ограничиваются набором заранее выделенных признаков. Субъект представляет понятия как сочетание нескольких репрезентаций. Их система меняется в зависимости от степени владения данным понятием. Плохо усвоенное понятие представлено субъекту как набор ассоциаций в разной форме (образы, обозначения, конкретные примеры), никак не вскрывающих специфических способов действия, характерных для понятия. На следующем уровне владения материалом выявляются представления, включающие новые способы действий. Однако эти представления еще не оторваны от самих действий и потому имеют динамический характер. Хорошо усвоенные понятия включают выработанные схемы действий, которые сворачиваются и фиксируются как знаковые структуры разных типов: вербальные характеристики, алгебраические формулы, пространственные изображения.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования обсуждались на российских и международных конференциях: 35-ая международная конференция «Психология математического образования» (Турция, Анкара, 2011 г.); Международные конференции «Философия математики: актуальные проблемы» (Москва, 2007 г., 2009 г.); конференция «Когнитивная наука в Москве: новые исследования» (Москва, 2011 г.) и другие. Автором сделаны доклады на научных семинарах, посвященных психологической теории деятельности А.Н. Леонтьева, качественным методам в психологии. Результаты используются при подготовке курса «Введение в математические методы обработки психологических данных», в курсе «Философия математики» на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. Материалы диссертации представлены в 9 публикациях.

Структура диссертации

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и 8 приложений. Текст изложен на 202 страницах и сопровождается 23

таблицами и 8 рисунками. Библиографический список состоит из 189 наименований, из них 67 на иностранных языках.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обосновывается актуальность работы; указываются объект и предмет исследования; определяются цели; и конкретные задачи исследования. Раскрывается научная новизна работы, ее теоретическая и практическая значимость; формулируются положения, выносимые на защиту.

Глава 1 «Теоретический анализ проблемы» посвящена анализу вопроса на философском, общепсихологическом, конкретно-психологическом уровнях.

В **разделе 1.1 «Введение. Проблема чувственности в философии и истории математики»** проводится анализ философских представлений о роли чувственных интуиций в математическом знании. Разбираются три классические программы обоснования математического знания: логицизм (Г. Фреге, Б. Рассел), интуиционизм (Б. Брауэр), формализм (Д. Гильберт), обсуждается недостаточность каждого из этих представлений. Анализируются возможные источники интуиции (созерцания) в математике: априорный и эмпирический.

Г. Фреге и Б. Рассел попытались полностью свести математические доказательства к логическим конструкциям, удалить все чувственные интуиции, однако программа логицизма столкнулась с непреодолимыми логическими парадоксами. Представители противоположного направления, интуиционизма Б. Брауэра, стремились построить математику, все объекты которой представимы. Удалив из математики все объекты, существование которых обосновывалось лишь логическим выводом, не наполненным чувственным содержанием, интуиционисты были вынуждены выбросить целые области математического знания.

Другая попытка ограничить влияние чувственных интуиций на математическое знание была менее радикальна. Д. Гильберт считал, что интуиция может использоваться на стадии поиска решения, но готовое доказательство должно быть очищено от нее и, тем самым, обосновано. Однако формализм также потерпел неудачу: с доказательством теорем Геделя о неполноте формальных систем становится понятна нереализуемость этой идеи.

Таким образом, математика как наука необходимо основывается как на чувственных представлениях, так и на логическом выводе. Вариант такого взаимодействия представлен И. Кантом в "Критике чистого разума", разрабатывается Э. Гуссерлем в "Основаниях геометрии".

Вопрос об априорном источнике интуиции обсуждает В.Я. Перминов. Он полагает, что интуиция возникает из заранее предопределенных характеристик деятельности, таких как предметность и интенциональность.

Согласно другим точкам зрения (Р. Ньюез, Дж. Лакофф [теория воплощенного сознания] и Ф. Глазерфельд [радикальный конструктивизм]), интуиция берет начало в опыте конкретного индивида. Однако инварианты, выявляемые в опыте, оказываются очень близкими выделяемым В.Я. Перминовым характеристикам деятельности.

Таким образом, философский анализ показывает: *адекватным представлением математических понятий является сочетание как интуитивных, так и формальных компонентов.* Источник интуиции кроется в опыте взаимодействия с физическими предметами или моделями математических объектов. При этом важно, что интуиция формируется не в результате непосредственного воздействия внешнего объекта, а в ходе специфической математической деятельности. Роль чувственной составляющей математических понятий может быть понята лишь сквозь призму активного конструирования чувственного представления, его преобразования.

В разделе 1.2 «Чувственные представления в овладении математическим знанием и математическом познании» поставленные проблемы осмысляются на психологическом материале. Мы начинаем с исторического введения в проблему изучения чувственных составляющих мышления и абстрактного знания (раздел 1.2.1). Данная проблема была поставлена вскоре после рождения научной психологии как самостоятельной отрасли знания. Исследования давали противоречивые результаты. Это связывают с применением метода интроспекции и с недостаточной определенностью понятия образного явления.

Проведенный в следующей части (раздел 1.2.2) анализ конкретно-психологических данных позволяет убедиться, что в некоторой форме чувственные модели должны присутствовать в математическом образовании. Педагогический опыт, отраженный в нормах преподавания математики (NCTM, 2000) и других работах, как математиков, так и дефектологов и педагогов, говорит о том, что для достижения понимания математики необходимо использование пространственных моделей, причем, по возможности, моделей различного уровня абстрактности. Решению математических задач способствуют не все визуализации, а только достаточно схематичные и структурированные (Hegarty, Kozhevnikov, 1999): богатые вторичные образы, полные деталей и натурализма, хотя и позволяют лучше запомнить материал, не помогают решению задач. Именно схематические изображения рассматриваются как средства, опосредующие процессы абстракции (Боцманова, 1960).

Однако неоднократно отмечалось избегание даже лучшими студентами визуальных способов решения задач. Оказывается, что новички, в отличие от экспертов, не используют визуализации полноценно (Stylianou, Silver, 2004), выделяют иные аспекты в наглядных материалах как наиболее важные (Arcavi, 2003).

Дальнейшее рассмотрение эмпирических данных с позиций деятельностного подхода (раздел 1.2.3) позволяет, на наш взгляд, снять

противоречие между необходимостью использования визуальных материалов и их избеганием студентами. Общими положениями является представление об образе как свернутом действии (П.Я. Гальперин, А.В. Запорожец); а также представление о восприятии, как развивающемся в зависимости от стоящих перед субъектом задач (А.Н. Леонтьев, В.В. Давыдов). С.Д. Смирнов подчеркивает, что построение образа начинается с активности субъекта, с выдвижения перцептивной гипотезы, а не с воздействия внешнего стимула. Тогда образ, или чувственное представление, оказывается принципиально несовпадающим с предъявленной наглядной моделью. Мы полагаем, что следует различать визуальные репрезентации не только на внешние, существующие на материальных носителях, и внутренние, мысленные образы (Presmeg, 2006). Важно также учитывать, что репрезентация должна рассматриваться как внутренняя по отношению ко всей математической деятельности субъекта в целом. *Чувственное представление адекватно отражает, репрезентирует понятие, если оно не просто ассоциативно привязано к нему, а содержательно взаимосвязано: то есть, если работа с математическим понятием может протекать с содержательным использованием чувственной модели.*

Применение положений об образе, как свернутом способе действия, проясняет неоднозначность восприятия диаграмм и графиков различными студентами, объясняет избегание визуальных репрезентаций студентами, не умеющими включить их в адекватные действия. А схематические изображения принципиально важны тем, что позволяют вскрыть «путь», по которому должно строиться действие, лежащее в основе понятия.

На следующем шаге рассуждений мы обосновываем непрерывность перехода от моделей, являющихся, по сути дела, естественными объектами, к пространственным моделям, имеющим все большую схематичность и абстрактность, а затем к алгебраическим и другим формальным моделям (Грегори, 2003; Давыдов, 2000). Как показывают отчеты математиков, а также наблюдения за восприятием схем специалистами, в ходе длительной

работы с предметом возможно возникновение новой способности «видеть» в пространстве формальных объектов (Пуанкаре, 1989; Дьедонне, 1982). Если за непосредственным восприятием стоит автоматическое выполнение определенных перцептивных действий (П.Я. Гальперин, А.В.Запорожец), то легко предположить, что у специалиста за восприятием высоко-абстрактной символической модели также стоит автоматическая реализация определенных схем действия, только более высокого уровня.

Тогда чувственное представление математического понятия – это знаково-символическая модель, воспринятая субъектом определенным (математически-адекватным для данных моделей) образом. А значит, для построения такого представления субъект должен уметь осуществлять соответствующие действия.

В следующем **разделе 1.3** «Структура математического понятия» перед нами встает задача определить, какого рода структура может представлять математическое понятие в сознании субъекта. Мы принимаем позицию, что математические понятия являются постоянно развивающимися культурными образованиями, никогда не заданными окончательно и точно (С.В. Библер, И. Лакатос). Тогда очевидно, что субъект никогда не владеет понятием полностью, он лишь создает у себя некие представления о понятии, позволяющие более или менее полно отражать в системе его собственных значений математическое понятие как достояние всей человеческой культуры. По мере овладения понятием, субъект будет приближаться к наиболее полному представлению понятия в его существующем к настоящему времени в культуре виде. Исходя из этой позиции, научное понятие как систему знаний следует отличать от понятия как содержания сознания отдельного индивида. Предметом психологического изучения является именно второе, тогда как первое изучается в рамках философии.

В **разделах 1.3.1 и 1.3.2** мы обратились к зарубежным и отечественным теориям понятий с тем, что бы ответить на вопрос, позволяют ли существующие психологические теории понятий учесть, что понятия в

сознании субъекта - это не только система логических аксиом, зафиксированных на внешнем носителе, но и индивидуальное понимание понятий, позволяющее использовать их в математической или учебной деятельности. Также мы анализировали существующие модели с точки зрения возможности соотнести чувственные представления и понятия.

Анализ моделей понятийного знания в когнитивной психологии (**раздел 1.3.1**) показывает, что лишь немногие авторы этого направления выходят за рамки амодальных, признаковых моделей понятия и позволяют учитывать вклад модального опыта в понятийное знание. Наиболее разработанные в настоящее время подходы к понятию как основанному на правилах (классические теории), понятию как прототипической структуре (работы, берущие начало от исследований Э. Рош), понятию как системе конкретных примеров (основы заложены Л. Брукс) никак не раскрывают проблемы чувственных оснований понятий. G. Murphy (2002) указывает на проблему сопоставления понятий и образных явлений как на одну из открытых и наиболее актуальных для современной когнитивной психологии понятий.

Л. Барсалоу развивает модальный подход к понятию (Barsalou, 1999, 2003). С его точки зрения понятие представляет собой схему, объединяющую разномодальный опыт столкновения с объектами данного класса. В зависимости от целей употребления понятия будет активизироваться та или иная часть схемы. Однако такой подход не затрагивает важного для научных понятий момента, что субъект может осознавать и сознательно выстраивать принцип, по которому объекты объединяются в единый класс. Согласно Барсалоу, этот принцип остается за механизмами внимания, то есть никак не раскрывается и не регулируется субъектом.

Другая попытка включить чувственный опыт в понятийное знание делается представителями когнитивной лингвистики. Дж. Лакофф и М. Джонсон (1981) говорят о метафорическом переносе знаний о взаимодействии с физическими предметами на абстрактные понятия, происходящем на основе соответствующего словоупотребления.

Данная теория применяется к математическим понятиям (Nunez, Lakoff, 2000). Авторы полагают, что за каждым математическим понятием лежит опыт оперирования физическими предметами.

Раздел 1.3.2 посвящен отечественной линии изучения понятийного знания. Изучение научных понятий в отечественной психологии начинается с работ Л.С. Выготского. Как показывает проведенный нами анализ, его позиция является переходной от логического представления о понятии как наборе свойств, к психологическому пониманию понятия как системы индивидуальных значений. Выготский делает существеннейший вклад в понимание природы понятий, утверждая, что понятия (обобщения) развиваются в ходе онтогенеза, а также указывая на конкретную жизнедеятельность ребенка как источник житейских понятий. С другой стороны, в основе его рассуждений о строении научных понятий и протекании научного мышления лежит представление об идеальном понятии как логической структуре, обладающей объемом и содержанием, которое может быть зафиксировано через строгое определение. Это же представление о понятии как наборе признаков лежит в основе построения эксперимента, проведенного совместно с Л.С. Сахаровым по методике двойной стимуляции: именно это определило строение обобщения на высшем уровне.

В ранних работах А.Н. Леонтьева ключевая роль деятельности в образовании понятий распространяется с житейских понятий на научные. Однако остается не понятно, какого рода деятельность имеется в виду, А.Н. Леонтьев пишет о теоретической и дискурсивной деятельности, позволяющей выйти за рамки «непосредственного столкновения ребенка с действительностью» (Леонтьев, 2003а, с. 343)

Также на данном этапе А.Н. Леонтьев не отвечает на вопрос о структуре понятия. А.Н. Леонтьев уделяет много внимания пути образования понятий, процессуальной стороне психики, и констатирует, что сознание отстает от деятельности, что "процесс умнее", что "ключ к морфологии сознания лежит в морфологии деятельности" (Леонтьев, 2003в, с. 369). Далее его

исследования посвящены морфологи деятельности, из которой предполагается "восстановить" структуру сознания. В ранних задумках структура деятельности (деятельность-действие-операция-психофизиологические функции) ставится в соответствие плану сознания (или образа "в широчайшем смысле"): потребность-смысл-значение-"материя образа". Однако в дальнейшем эта схема не получает должного наполнения, и в более поздних работах три образующих сознания рассматриваются в отрыве от процессуальной стороны, их порождающей. Понятие фиксируется как "противоречивая" вещь, схватывающая отношение между образом и процессом, однако далее эта проблематика не раскрывается и не конкретизируется.

В работах П.Я. Гальперина практические действия продолжают оцениваться как необходимые для формирования понятийной структуры. Однако учитываются лишь достаточно специфические действия по проверке наличия у объекта признаков, характеризующих данное понятие. То есть, для научного понятия первично определение, фиксирующее его признаки. Остается не понятно, как такое обучение может способствовать не только усвоению знаний, но и развитию мышления, как оно может учить собственно математике, а не набору математических знаний.

Детальная критика формально-логического представления понятий представлена в работах В.В. Давыдова. Как А.Н. Леонтьев и П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов видит научные понятия усваивающимися в ходе деятельности. Более того, он видит само понятие как способ действия. В данном случае речь идет о социально-исторически значимом предметном действии, преобразующем реальность и вскрывающем существенные характеристики, недоступные непосредственному чувственному восприятию. Тем самым Давыдов выдвигает новую модель понятия, принципиально отличную от признаковой модели: модель понятия как способа действия преобразующего характера, позволяющего вскрыть скрытые ранее свойства.

С.Л. Рубинштейн затрагивает еще одну важную для нас проблему: для индивидуального сознания понятия отражают объект в его взаимодействии с познающим субъектом, сообразно той деятельности, которую он развертывает. Следовательно, сами понятийные структуры трансформируются сообразно задачам, стоящим перед субъектом.

Раздел 1.3.3 посвящен существующим в настоящее время узким моделям математических понятий. Одна из моделей уже была упомянута, она понимает математическое знание как метафорически перенесенный опыт телесного взаимодействия с физическими объектами (R. Nunez, G. Lakoff). Ее существенным недостатком, с нашей точки зрения, является ограничение источника базовых знаний о мире взаимодействием только с физическими объектами. Мы, соглашаясь с авторами в высочайшей значимости базовых «образных схем», проистекающих из телесно-вовлеченного взаимодействия с миром, полагаем, что собственно математическая деятельность создает свои модели и свои способы действия, а потому может создавать и свои схемы, которые не могут быть метафорически или метонимически сведены к уже существующим, до-математическим.

Другие целостные модели математического знания разработаны Р. Дувалом и Э. Дубински. Р. Дувал (Duval, 2002, 2006) говорит о математическом понятии как единстве нескольких регистров, каждый из которых представляет собой семиотическую систему и используется в контексте определенного аспекта математической активности (для доказательства, изобретения, коммуникации). Регистры могут быть как строго внутриматематическими, так и базироваться на нематематическом использовании. Во втором случае конкретный алгоритм пользования данным языком отсутствует. Для понимания математического высказывания необходима координация, как минимум, двух регистров, то есть выстраивание изоморфизма между ними. Как указывает Дувал, это не означает, что регистры полностью изоморфны: они дополняют друг друга.

Э. Дубински является последователем Ж. Пиаже. В основу его модели положена идея рефлексирующей абстракции, как способности выделять инвариант самих действий, в противовес обыкновенной абстракции, позволяющей обобщить на основе инварианта внешние объекты. На первом этапе овладения, с точки зрения Дубински, понятие возникает в форме развернутых действий с внешними объектами. Затем действие сворачивается в «процесс», который становится достоянием субъекта и протекает во внутреннем плане. При необходимости процесс может быть развернут обратно в действие. Однако принципиальным для формирования понятия является возможность представить процесс как нечто целостное, статичное, то есть «инкапсулировать» процесс в объект. Этот объект становится предметом дальнейшего анализа, отделяется от конкретных характеристик действия. Важно, что при необходимости объект может быть снова развернут в процесс или действие.

Анализируя данные модели, мы приходим к выводу, что для математических понятий принципиальны следующие две характеристики. Во-первых, *наличие нескольких репрезентаций*, в том числе участие самого базового, телесного уровня, репрезентаций связанных с непосредственным взаимодействием (или действием) с физическими или модельными объектами. Во-вторых, *возможность сворачивать динамический процесс в статичное образование* и делать его объектом дальнейшего анализа. При этом процесс и действие продолжают лежать в основе исследуемого объекта и могут быть развернуты по первому требованию.

Итогом всего теоретического анализа становится рабочая модель математического понятия, описание которой изложено в **разделе 1.4**. Мы предлагаем рассматривать *математическое понятие как систему различных схем действий, позволяющих выявить изначально скрытые свойства математической реальности*. Понятие схемы в данном случае заимствуется в первую очередь из работ И. Канта, где обозначает способ, которым эмпирический объект может быть соотнесен с понятием, что несколько

отличается от традиционного для когнитивной психологии употребления этого понятия. Схему в нашем понимании следует отличать от состояния организма (характерно для когнитивной психологии) и от схематического изображения, зафиксированного на внешнем носителе. С нашей точки зрения, *понятие схемы позволяет ухватить процессуальный аспект понятия, то есть отразить то действие, которое в культурно-исторической практике закрепилось как существенное и способствовало образованию соответствующего научного понятия.* Именно поэтому понятие схемы фактически совпадает с понятием «способа действия», использованным В.В. Давыдовым. К примерам схем, лежащих в основе школьных алгебраических понятий, относятся следующие: схема преобразования алгебраических формул, схема построения графиков и диаграмм, действие соответствующего словоупотребления в дискурсе с данным понятием. Каждая из схем кодирует действия, разворачивающиеся в предметной реальности. Предметом этих действий будут знаково-символические модели различного уровня: от физических предметов к изображениям пространственных или отвлеченных отношений и далее к алгебраическим, формальным и даже вербальным способам представления математических понятий. Важно, что символ, изображение, или же физический предмет приобретает моделирующую функцию именно в контексте того понятийного способа действия, который в отношении него осуществляется. В диссертации защищается положение об отсутствии принципиальной разницы между этими моделями: каждая из них, вне зависимости от уровня абстрактности, окажется для субъекта моделирующей математическое понятие только при правильном ее восприятии, то есть при применении к модели понятийной схемы. *Репрезентация математического понятия субъектом подразумевает отражение материальной модели, построенное с опорой на соответствующие способы действия, схемы.* Репрезентация будет чувственной, если будет проистекать из опыта

соответствующих действий с конкретными материальными носителями. В схематичном виде рабочая модель отражена на рисунке 1.

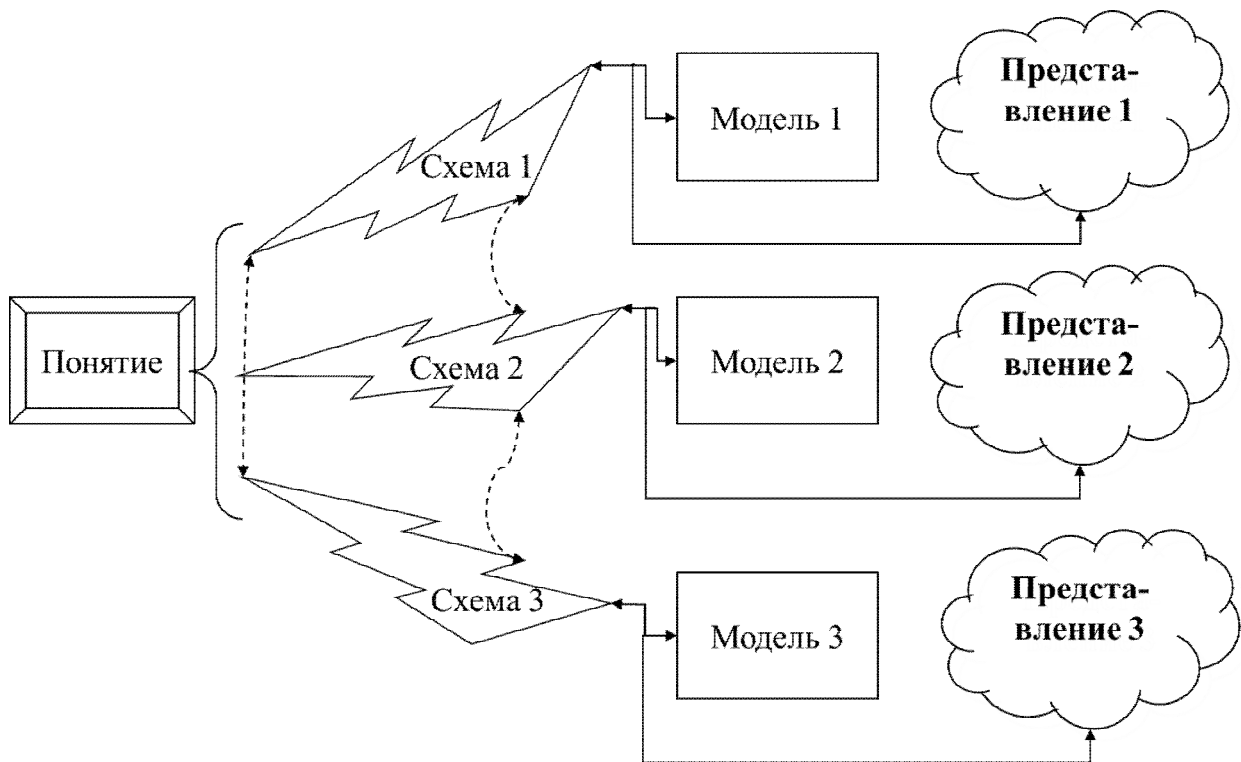


Рисунок 1. Рабочая модель математического понятия.

Глава 2 «Эмпирические исследования системы репрезентаций математического понятия» посвящена двум эмпирическим исследованиям, первое из которых соотносит внешнюю модель и чувственное представление математического понятия, а второе выявляет роль и специфику чувственных представлений и других репрезентаций математических понятий на разных уровнях овладения.

Первая наша задача - показать, что сами по себе зрительно-пространственные модели математических понятий не репрезентируют понятия, не проясняют их содержания. Эксперимент, описанный в **разделе 2.1**, заключался в обучении студентов основам теории бинарных отношений двумя способами: с использованием в лекции наглядных графовых диаграмм и без такого использования. Приводимые в лекции изображения являлись стандартными, общепринятыми для изложения данной темы. После прослушивания теории студенты решали задачи, требующие владения изученными понятиями. Всего в исследовании приняло участие 117 человек.

В первой серии группы студентов-психологов, обучавшиеся с использованием наглядных материалов и без них, в среднем решили задачи одинаково успешно. Значит, наглядные изображения не были эффективно встроены в систему представлений математических понятий. Далее, мы предположили, что более сильные учащиеся способны самостоятельно включать знаково-символические модели в необходимые способы работы с ними и потому для более сильных учащихся просто предъявления наглядных материалов окажется достаточно для их включения в систему знания и использования в решении задач.

Как показали *результаты*, школьники математического класса справились с решением задач значительно лучше, чем студенты-психологи ($t=3,240$; $p=0,002$, по тесту Стьюдента). Однако наглядные материалы не способствовали решению. Напротив, на уровне тенденции можно говорить о том, что изложение без наглядных материалов было эффективнее ($t=1,7694$; $p=0,1$). А для задач, оцениваемых нами как индикаторы понимания, различия между группами достигают высокого уровня значимости ($p<0,01$).

В третьей серии мы проверяли, не компенсируется ли положительное влияние наглядных материалов тем, что студентам, обучавшимся без использования изображений, давалось больше формальных разъяснений. В этой серии лекция читалась один раз; половина обучавшихся получили компьютерную презентацию лекционного материала с наглядными изображениями, а другая половина без таковых. Изображения стали окончательно статичными, были полностью исключены из деятельности: они не рисовались в процессе изложения, никак не пояснялись.

Результаты. Решение задач студентами, прослушавшими лекцию с использованием наглядных изображений, было по-прежнему не лучше, чем когда пространственные изображения отсутствовали. На уровне тенденции можно говорить, что наглядные изображения, наоборот, мешали решению тестовых задач ($t=1,911$; $p=0,069$).

Таким образом, *сами по себе пространственные изображения существенных для математических понятий отношений не способствуют усвоению материала*, что соответствует нашей теоретической модели.

Визуальные материалы к математическим понятиям являются не просто некими изображениями, поясняющими материал, но конвенциональными знаково-символическими моделями, существующими в пространственно артикулированной форме (Presmeg, 2006; Duval, 2006). Их прочтение требует владения соответствующим "языком" данной моделирующей системы: студент должен знать, какая часть диаграммы что изображает, а также уметь соотносить визуальные репрезентации с другими способами репрезентации математического знания. Иначе внешнее изображение не становится внутренней репрезентацией понятия у субъекта, и только мешает работе с понятиями в других репрезентациях (вербальных, формальных), которые были включены в соответствующие действия в ходе лекции.

Дальнейшее эмпирическое исследование (**разделы 2.2 и 2.3**) проведено с тем, чтобы показать, что математическое понятие имеет под собой несколько существенно разных схем действий, которые репрезентируются студентам как знаково-символические (в том числе предметные) модели, неразрывно связанные с определенными способами их восприятия и преобразования. Мы исследовали, какие репрезентации доминируют при разном уровне владения понятиями, предполагали, что очень хорошо усвоенные понятия будут представлять собой систему разных репрезентаций, в том числе чувственных. На первом этапе, с помощью качественного анализа полу-структурированных интервью (Giorgi A., Giorgi B., 2008), мы изучили, каким образом, с точки зрения студентов, удастся ухватывать значение математических понятий в ходе обучения. Всего выявлено 11 способов представлять математические понятия. На их основе разработан опросник репрезентаций математических понятий, ставший инструментом дальнейшего количественного анализа.

Качественные данные подтвердили сложную системную взаимосвязь между чувственными представлениями и математическими понятиями: одно зрительно-пространственное изображение может служить моделью нескольких понятий и, наоборот, одно математическое понятие может представляться через несколько моделей, развернутых в пространстве. Также респонденты указывают на необходимость выработки специальных способов для правильного восприятия наглядных моделей математических понятий.

В разделе 2.3 мы проанализировали различия в представлении понятий в зависимости от уровня владения математическим знанием. В исследовании приняли участие 19 студентов-психологов очень слабо подготовленных, 21 студент-психолог с хорошей математической подготовкой, 20 студентов математических вузов.

В исследовании использовалось 12 базовых математических понятий из курса школьной алгебры. Для каждого понятия испытуемые выбирали в опроснике все способы репрезентации, соответствующие их пониманию данного понятия, затем ранжировали выбранные репрезентации.

В разделе 2.3.1 приведен количественный анализ репрезентаций в группах разной силы. Все шкалы опросника были разбиты на 7 индексов: репрезентация понятия через визуальное статичное изображение; представление через динамический образ, процедуру; вербальное представление понятия; алгебраическое; репрезентация понятия как элемента, средства или результата решения задачи; репрезентация понятия с помощью конкретного математического или жизненного примера; представление через символ данного понятия. Рассмотрим роль использования репрезентаций каждого типа (Рис. 2.a,b,c) в группах разной силы. Группы сопоставлялись по непараметрическому критерию Краскал-Уоллиса с использованием статистического пакета SPSS 14.0.

Во всех группах около 20% репрезентаций составляют символические репрезентации, то есть студенты просто указывают, что данное понятие ассоциируется у них с соответствующим математическим обозначением.

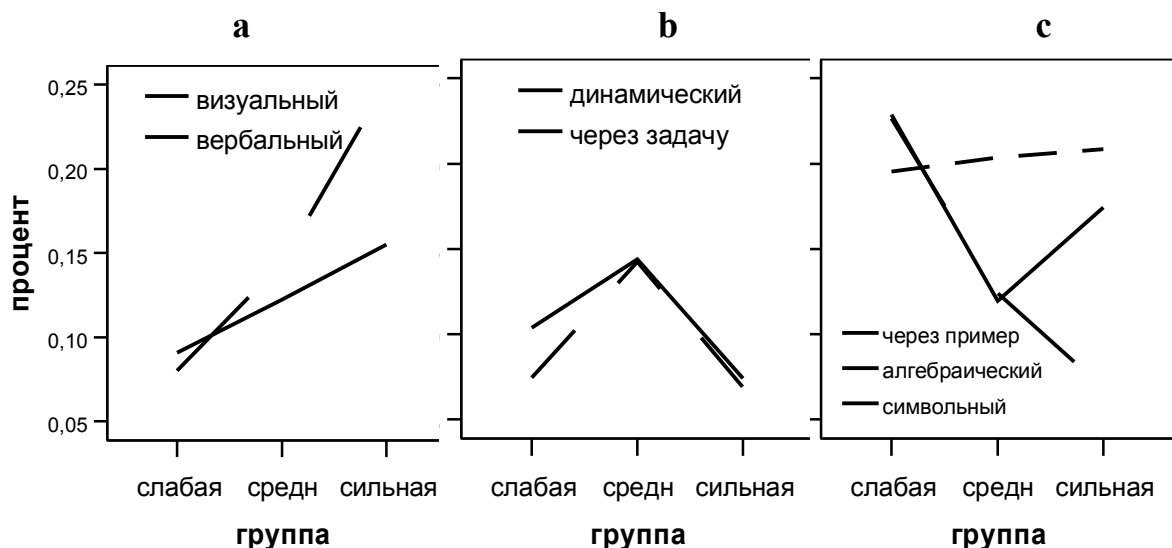


Рисунок 2. Репрезентации школьных алгебраических понятий в группах разной силы.

В слабой группе математические понятия ассоциируются с конкретными математическими примерами и примерами из жизни (индекс через пример, рис. 2с). Уже в группе среднего уровня эти репрезентации встречаются значительно реже, количество пониманий понятий через примеры в сильной группе фактически не наблюдается ($p < 0,001$). То есть этот тип репрезентации может рассматриваться как изначальный и при хорошем усвоении понятия в системе репрезентаций не сохраняется.

Также алгебраические репрезентации часто упоминались слабыми студентами (рис. 2с). Алгебраические репрезентации опять появляются у студентов сильной группы (три группы различаются с достоверностью $p = 0,004$). Это сопровождается изменением их содержания: от повтора символа к упоминанию сложных алгебраических формул.

Количество вербальных репрезентаций (см. рис. 2а) понятий увеличивается как от слабой группы к средней, так и от средней к сильной ($p = 0,001$). Именно в сильной группе вербальные способы репрезентации доминируют (упоминаются значимо чаще, чем визуальные, динамические репрезентации и репрезентации через задачу и через пример по тесту Вилкоксона). Это соответствует данным Elia et.al. (2009).

Наибольшее количество статичных визуальных репрезентаций (рис. 2с) представлено в сильной группе (различия на уровне значимости $p = 0,020$).

Таким образом, принципиально, что хорошо усвоенные математические понятия репрезентируются не только амодально. В репрезентациях понятий сильными студентами присутствуют как вербальные, так и визуальные и алгебраические репрезентации. Наши данные полностью согласуются с представлением о *математическом понятии как о системе различных репрезентаций*, разрабатываемом, например, в: Hitt, 1998; Gagatsis, Shiakalli, 2004; Duval, 2002, 2006; Elia et.al., 2009; а также с положениями нашей рабочей модели.

Наиболее интересной нам кажется динамика репрезентации понятий через задачу и динамической репрезентации, свидетельствующая о представлении понятия не в застывшем виде, а через включение его в деятельность (рис. 2b). Оказывается, что количество таких репрезентаций максимально в средней группе, а в слабой и сильной мало. Эти данные свидетельствуют о *первичной роли практического усвоения понятий, а не вербального выражения*. Студенты, не идеально усвоившие математические понятия, все же могут представить, как их использовать в задачах и как работать с их визуальными репрезентациями. Способность словесно выразить содержание понятия и включить его в систему других понятий появляется в наибольшей степени при глубоком усвоении материала.

После заполнения опросника испытуемые описывали все визуальные репрезентации, возникавшие у них. Качественный анализ (**раздел 2.3.2**) показал, что визуализации в группах различаются. Всего упомянуто 60 визуализаций в слабой группе, 156 в средней и 144 в сильной. Среди них мы выделили три группы специфических визуализаций:

- **уникальные**, которые встречаются только у одного человека;
- **неверные**, не соответствующие данному понятию или изображающие его неверно;
- **метафорические**, отсылающие к некоторой житейской ситуации, не отражающие стандартные модели математических понятий или их использование.

В Таблице 1 для каждого выделенного вида визуализаций указано, какой процент такие репрезентации составили от всех репрезентаций, описанных студентами соответствующей группы.

Таблица 1.

Количество специфических видов визуальных репрезентаций у студентов разной силы

	Слабая группа	Средняя группа	Сильная группа
Уникальные	29,5%	17,3%	8,3%
Метафорические	13,1%	14,7%	0%
Неверные	14,8%	3,2%	0,7%

Для каждого из типов визуализации в отдельности составлены таблицы сопряженности. В слабой группе визуализаций мало и существенная их часть метафорична и уникальна, встречается довольно большое количество неверных визуализаций. В средней группе существенно возрастает общее количество визуализаций, однако также пропорционально много метафорических и уникальных визуализаций, а количество неверных значимо меньше. В сильной группе визуализаций столько же, сколько в средней, однако метафорические визуализации уже не встречаются, существенно снижается уникальность репрезентаций. Уникальные репрезентации сильных студентов отражают выходящие за школьную программу аспекты данного понятия, тогда как для *более слабых групп уникальные репрезентации являются, как правило, индивидуальными ассоциациями*. То есть у хорошо владеющих математикой студентов роль визуализаций не снижается: их остается примерно такое же количество, однако они стандартизируются, очищаются от примеси индивидуального пути освоения понятий. *Визуализации студентов из сильной группы – это формы конвенционального математического знания, существующего как необходимый компонент понимания математики*. Они являются абстрактными схематическими изображениями, но они более детализированы и специфичны, чем описанные М. Джонсоном (Johnson, 1987) образные схемы. Это подтверждает идею Н. Пресмег (Presmeg, 2006) о континууме абстрактности образов.

Раздел 2.3.3 посвящен поиску взаимосвязей между зрительными и пространственными способностями и склонностью представлять математические понятия в визуальной или другой форме. Выявленные корреляционные связи не составляют ясной и четкой картины. Более того, система взаимосвязей различна в группах разной силы. По всей видимости, для представления школьных алгебраических понятий не требуется высокоразвитых пространственных способностей: все модели очень просты в смысле зрительно-пространственных отношений. При этом просто запоминания и легкости в оперировании образами не достаточно для эффективного представления математических понятий в визуальной форме. Это соответствует предположению о том, что образ как чисто *зрительно-пространственное образование, не включенное ни в какие специальные схемы действия, не является репрезентирующим математическое понятие.*

Глава 3 «Овладение математическими понятиями при патологии зрения» посвящена представлениям математических понятий, овладение которыми походило в условиях нарушенного зрения. Исследуются представления математических понятий студентов с патологией зрения (с ПЗ). В **разделе 3.1** проблема чувственных представлений рассматривается в контексте литературы, посвященной математическому творчеству и образованию незрячих. Необходимость подготовки и включения в школьное обучение слепых и слабовидящих специальных наглядных пособий широко обсуждается в литературе. Нарушения зрения накладывают жесткие ограничения на круг возможных наглядных инструментов. Исследователи приходят к выводу, что остаточное зрение, наличие цветочувствительности должно быть максимально задействовано в обучении, помимо этого, и тем более при полной слепоте, должны использоваться специальные инструменты. Дефектологи считают привлечение соответствующих средств наглядности центральным звеном при подготовке к уроку в тифлопедагогике. Их отсутствие ведет к формальным, оторванным от жизни и конкретного применения знаниям. Однако просто предъявления тактильного материала

недостаточно, необходимо специально учить тактильному прослеживанию формы для опознавания геометрических фигур, следует включать наглядные средства в специальную деятельность по опoznанию, классификации и др. (Островская, 1976; Плаксина, 1985; Денискина, 1979; Воронин, 1985).

В двух пилотажных исследованиях (**разделы 3.2 и 3.3**) изучались представления студентами с ПЗ математических понятий, овладение которыми походило в условиях наличия и, наоборот, отсутствия пространственных моделей. В исследованиях приняло участие 10 человек.

Мы анализировали представления понятий *модуль* и *аргумент* комплексного числа, овладение которыми происходило без использования зрительно-пространственных моделей (раздел 3.2). По нашим данным у студентов с ПЗ не возникает чувства понимания этих математических понятий. Вместо опоры на зрительно-пространственные модели, понятия представляются как элементы алгебраических формул.

Во второй части (**раздел 3.3**) мы анализировали представления школьных математических понятий. В ходе обучения в школах для незрячих и слабовидящих, учащимся предъявляются материалы в наглядной форме, являющиеся, как правило, рельефными копиями визуальных изображений. Для записи алгебраических выражений студенты пользовались прибором для письма рельефно-точечным шрифтом Брайля.

Использование визуальных репрезентаций студентами с ПЗ столь же распространено, что и при сохранности зрительного анализатора. Однако по характеру эти репрезентации более похожи на репрезентации слабой группы зрячих студентов: мы выявили много метафорических и ошибочных репрезентаций. Можно предположить, что конструирование тактильных моделей исходя из схем действия, заложенных в математических понятиях, а не на основе уже существующих зрительных моделей, способствовало бы лучшему их усвоению незрячими, погружению во внутреннюю структуру понятия и, как следствие, более точному запоминанию.

По нашим данным, если обучение ведется с опорой на пространственные модели, то алгебраические способы репрезентации понятий избегаются незрячими студентами (они встречаются реже, чем в аналогичных по силе группах зрячих). С нашей точки зрения, это свидетельствует о следующем принципиальном факте. Алгебраические репрезентации являются также *особого рода чувственными представлениями*, они могут быть сформированы только в ходе предметной деятельности с соответствующими моделями. Если же такая деятельность затруднена, репрезентация понятия строится в обход этих моделей.

В **Заключении** формулируются **выводы** из всего исследования в целом с опорой на эмпирические результаты:

1. Итогом нашей работы является комплексное подтверждение теоретически разработанной модели математического понятия. Мы полагаем, что математическое понятие, как система значений конкретного субъекта, является системой схем или способов действий, позволяющих выявить изначально скрытые свойства знаково-символических моделей разного рода. Каждая знаково-символическая модель может быть зафиксирована субъектом в виде представления. Если возникающее у субъекта представление помещено в контекст соответствующих понятийных способов действия, оно является репрезентацией математического понятия.

2. Предъявление в обучении знаково-символических моделей понятий, представленных в очень простой зрительно-пространственной форме, не способствует усвоению понятий, особенно если модели полностью вырваны из употребления и представляются как статичные иллюстрации. Мы полагаем, что модель становится способом представления понятия, только если у субъекта сформированы соответствующие способы ее преобразования.

3. Математические понятия не ограничиваются набором заранее выделенных признаков. Субъект представляет понятия как набор из нескольких репрезентаций разных типов. Набор репрезентаций меняется в зависимости от степени овладения понятием.

а. При совсем слабом усвоении понятий они представлены как ассоциации, никак не вскрывающие специфических способов действия.

б. При неполном усвоении понятий в репрезентациях присутствуют динамические представления, не оторванные от действий по их преобразованию и использованию.

с. Хорошо усвоение школьные алгебраические понятия репрезентируются через визуальные, алгебраические и вербальные представления.

4. По нашим данным, предпочтение визуальных способов репрезентации математических понятий не детерминируется степенью развития зрительно-пространственных способностей.

5. Анализ способов представления понятий при зрительной патологии показывает, что чувственность влияет как на формирование зрительно-пространственных представлений математических понятий, так и на возникновение у субъекта алгебраических представлений, формул. Знаковые модели усваиваются в ходе предметной деятельности и потому также требуют участия чувственного восприятия для полноценного усвоения.

6. Чувственные представления присутствуют в репрезентации как хорошо усвоенных понятий, так и понятий, усвоенных не в полной мере. Если понятие усвоено не до конца, то оно может репрезентироваться индивидуальным чувственным представлением, отражающим историю его возникновения у данного субъекта. Если понятие усвоено хорошо, то чувственные представления отражают конвенциональные пространственные модели математических понятий. Чувственные представления являются необходимой составляющей зрелого математического понятия субъекта.

7. Под чувственным представлением следует понимать не статичный образ, а сложное психологическое образование, представленное субъекту в виде пространственного образа или формальной записи и готовое для преобразования и использования сообразно соответствующим понятийным действиям. Представление понятия станет чувственно наполненным только в

ходе правильного овладения понятием, средствами которого являются знаково-символические модели, помещенные в понятийные схемы действия в ходе математической и учебной деятельности.

Основное содержание диссертационной работы отражено в 9 научных публикациях (общий объем – 3,5 п.л.; авторский вклад – 3,3 п.л.).

Публикации в рецензируемых журналах, утвержденных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Шварц, А.Ю. Наглядные материалы при изучении математики студентами со зрительными патологиями / А.Ю. Шварц // Психологическая наука и образование. – 2009. - № 5. – С. 97-103. (0,4 п.л)

2. Шварц, А.Ю. Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики. / А.Ю. Шварц // Психологические исследования: электрон. науч. журн. [Электронный ресурс]. - 2011. - №3(17). - Шифр Информрегистра: 0421100116/0024. - Режим доступа: <http://psystudy.ru/index.php/num/2011n3-17/496-shvarts17.html#r3> (1,2 п.л.)

Научные публикации в других изданиях:

3. Шварц, А.Ю. Рассудок и чувственность в математических представлениях незрячих. Взгляд психолога. / А.Ю. Шварц // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции, 15-16 июня 2007. - М.: МАКС Пресс, 2007. - С. 178-180. (0,2 п.л.)

4. Шварц, А.Ю. Математическое мышление как объект исследования различных дисциплин. / А.Ю. Шварц // Современная психология мышления: смысл в познании. Тезисы докладов всероссийской научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения выдающегося отечественного психолога О.К.Тихомирова. Москва, 17-18 октября 2008 г. / Отв. ред. Ю.П. Зинченко, А.Е. Войскунский, Т.В. Корнилова. - М., 2008. - С. 297-299 (0,2 п.л.)

5. Шварц, А.Ю. Вклад различных дисциплин в понимание феномена математического мышления / А.Ю. Шварц // Материалы VI Международной

конференции «Психолого–педагогические проблемы одаренности: теория и практика», 12-13 сентября 2009 года. - Иркутск, 2009. - С. 548–555. (0,4 п.л.)

6. Шварц, А.Ю. Роль пространственных представлений в обучении математике студентов: экспериментальное исследование / А.Ю.Шварц // Философия математики: актуальные проблемы, материалы Международной научной конференции 28-30 мая 2009 года. - М.: МАКС Пресс, 2009. - С. 353-356. (0,2 п.л.)

7. Шварц, А.Ю. Что скрывается за абстрактными понятиями? / А.Ю. Шварц // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2009. - ISBN 978-5-317-02774-2 – Режим доступа: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2009/19.pdf (0,2 п.л.)

8. Шварц, А.Ю. Репрезентации значений математических понятий в зависимости от уровня математической подготовки / А.Ю. Шварц // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. - ISBN 978 5-317-03634-8. - Режим доступа: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/index_2.htm/structure_22.htm (0,2 п.л.)

9. Shvarts, A. Representations in the development of mathematical concepts / A. Shvarts, D. Chumachenko // Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. - Vol. 4. - Ankara, Turkey: PME, 2011. – P. 169-176 (0,5 п.л./0,3 п.л.).