АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 6, с. 808–813

УДК 534.222

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕНСИВНЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ХОХЛОВА–ЗАБОЛОТСКОЙ

© 1998 г. **А. Г. Кудрявцев, О. А. Сапожников**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119899 Москва, Воробьевы горы
E-mail: olegs@na.phys.msu.su

Поступила в редакцию 11.06.97 г.

В рамках обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской (ХЗ) исследованы свойства мощных акустических пучков, вытекающие из симметрий указанного уравнения. Показано, что при произвольном виде нелинейности среды уравнение ХЗ может быть сведено к уравнению Лагранжа; найден соответствующий лагранжиан. По теореме Нетер на основе вычисленных в предыдущей работе симметрий [3] рассчитан целый ряд новых законов сохранения, с их помощью найдены неизвестные ранее соотношения моментов акустического поля. Кроме того, указанные симметрии использованы для редукции уравнения ХЗ и поиска его точных решений.

Мощные акустические пучки в нелинейных средах могут быть описаны обобщенным уравнением Хохлова–Заболотской (ХЗ). В безразмерных обозначениях оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+P(u)\frac{\partial u}{\partial\tau}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

где u – функция, описывающая профиль волны (колебательная скорость или акустическое давление), τ – "бегущее" время, z – координата вдоль оси пучка, x и y – поперечные координаты, $P(u)$ характеризует нелинейные свойства среды. Особенно активно уравнение используется в случае квадратично нелинейных сред, при этом обычно применяются различные численные подходы [1, 2]. В предшествующей работе авторов [3] наряду с уравнением (1) было рассмотрено связанное с ним уравнение

$$w_{01}+P(w_1)w_{11}-w_{22}-w_{33} = 0 \qquad (2)$$

для величины $w = \int_{\tau_*}^{\tau} u d\tau'$, где τ_* – некоторый начальный момент времени, $w_\mu \equiv \partial w/\partial x_\mu$, $w_{\mu\nu} \equiv \partial^2 w/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $x_0 = z$, $x_1 = \tau$, $x_2 = x$, $x_3 = y$. В указанной статье [3] были вычислены группы всех точечных симметрий уравнений (1) и (2) при произвольной гладкой функции $P(u)$. Поскольку эти результаты будут ниже использоваться, приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории симметрий дифференциальных уравнений [4]. Под точечной симметрией уравнения (2) понимается множество зависящих от непрерывного параметра λ обратимых преобразований переменных вида:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_\mu &= X_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda),\\ \tilde{w} &= W(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda),\end{aligned} \qquad (3)$$

которые переводят решение уравнения (2) опять в решение этого уравнения, т.е. новая функция $\tilde{w}$, рассматриваемая как функция новых переменных $\tilde{x}_\mu$, является решением уравнения (2). В первом порядке по λ имеем преобразования:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_\mu &= x_\mu + \lambda\varphi_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w),\\ \tilde{w} &= w + \lambda\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, w),\end{aligned} \qquad (4)$$

где комбинация функций φ_μ и ψ называется касательным вектором группы симметрий.

В статье [3] были найдены все возможные функции φ_μ и ψ, и по ним рассчитаны симметрии (3). Целью настоящей работы является применение полученных симметрий для нахождения точных решений и законов сохранения обобщенного уравнения ХЗ.

Удобно рассматривать уравнение ХЗ в форме (2), поскольку при этом оно является лагранжевым [5]. Физически это объясняется тем, что уравнение (2) описывает смещения w при механическом движении среды в отсутствие диссипации. Математически лагранжевость уравнения (2) следует из свойства симметричности оператора Фреше этого уравнения относительно операции сопряжения [4]. Уравнение Лагранжа представимо в обычной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial w_\mu}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial w} = 0, \qquad (5)$$

где удельный лагранжиан Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda = \frac{w_0 w_1}{2} - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2} + F(w_1). \tag{6}$$

Здесь $F(u)$ – дважды проинтегрированная функция $P(u)$, т.е. $d^2F/du^2 = P$. Возможность записать уравнение в лагранжевой форме, как известно [6], означает его эквивалентность принципу наименьшего действия $\delta L[w] = 0$, где функционал L (функция Лагранжа) имеет вид:

$$L[w] = \int_\Omega \Lambda dx_0 dx_1 dx_2 dx_3, \tag{7}$$

а Ω – некоторый произвольный объем в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3).

Аналогично описанному в работе [3] поиску точечных симметрий уравнения (2) можно интересоваться такими преобразованиями вида (3), которые не меняют функцию Лагранжа (7). Является естественным вопрос о связи этих преобразований с симметриями уравнения. Согласно общей теории вариационных задач, каждое преобразование, не меняющее функцию Лагранжа, является и симметрией уравнения Лагранжа. Соответствующие симметрии называются вариационными. Не все симметрии уравнения Лагранжа обязаны быть вариационными. Важным свойством вариационных симметрий является существование взаимно однозначного соответствия между ними и законами сохранения уравнения Лагранжа (теорема Нетер) [4, 7].

Пользуясь стандартной техникой [4], можно проверить, какие из найденных в работе [3] симметрий являются вариационными и найти соответствующие вариационным симметриям законы сохранения. Отметим, однако, что для нахождения только вариационных симметрий уравнения Лагранжа можно использовать и часто применяемый в физике относительно простой анализ инвариантных свойств функционала. Поясним схему такого расчета. Будем интересоваться функциями φ_μ и ψ (см. (4)), которые не меняют функцию Лагранжа (7). Указанная инвариантность $L[w]$ означает, что в линейном по λ приближении должно выполняться следующее условие:

$$\tilde{\Lambda}\frac{\partial(\tilde{x})}{\partial(x)} - \Lambda = \lambda D_\mu A_\mu, \tag{8}$$

где $\tilde{\Lambda}$ – лагранжиан, выраженный в новых переменных, $\partial(\tilde{x})/\partial(x)$ – якобиан перехода, A_μ – некоторая функция координат и, может быть, функции w и ее производных, $D_\mu A_\mu$ – полная дивергенция, т.е. D_μ – оператор полного дифференцирования по координате x_μ:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + w_\mu \frac{\partial}{\partial w} + w_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial w_\nu} + w_{\mu\nu\xi}\frac{\partial}{\partial w_{\nu\xi}} + \dots,$$

здесь величины x_μ, w, w_μ, $w_{\mu\nu}$ и т.д. считаются независимыми переменными, $w_{\mu\nu\xi} = \partial^3 w/\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\xi$ и т.д. Используя (4) и (6), нетрудно выразить левую часть (8) через x_μ и w. Получающееся выражение содержит различные смешанные произведения вида $w_\mu w_\nu$, $w_\mu w_\nu w_\xi$, а также слагаемые, зависящие от $P(w_1)$. Коэффициенты при этих слагаемых зависят от частных производных $\partial\varphi_\mu/\partial x_\mu$, $\partial\psi/\partial x_\mu$, $\partial\varphi_\mu/\partial w$, $\partial\psi/\partial w$. Приведение подобных членов позволяет свести уравнение (8) к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных для функций φ_μ и ψ, структура которой зависит от вида $P(w_1)$. Эту систему можно разрешить, т.е. найти явные выражения для функций φ_μ и ψ. Различные симметрии соответствуют входящим в эти выражения независимым константам или, в отдельных случаях, функциям. Найденные таким образом функции φ_μ и ψ задают касательные вектора групп всех возможных вариационных симметрий.

Нужно заметить, что такой упрощенный анализ инвариантных свойств функции Лагранжа позволяет найти все вариационные симметрии уравнения (2). Однако, как уже отмечалось, наряду с найденными симметриями функции Лагранжа возможны такие преобразования (3), которые переводят решение уравнения (2) в решение того же уравнения, но изменяют при этом функцию Лагранжа. Очевидным примером является домножение всех координат x_μ и функции w на одну и ту же константу. Как видно из (6) и (7), функция Лагранжа при этом домножается на четвертую степень указанной константы. Расчет с использованием стандартной техники [4] показал, что этим примером и ограничивается набор невариационных симметрий; в статье [3] соответствующей симметрии присвоен № 0. Таким образом, все остальные симметрии, приведенные в работе [3], являются вариационными.

Перейдем к рассмотрению следствий из найденных преобразований. Если иметь в виду чисто практическое применение симметрий дифференциальных уравнений, то в общем случае они позволяют осуществлять две важных процедуры [4, 8–10]: 1) генерацию семейства новых решений на основе известного (аналитически или численно) решения, 2) построение редуцированных уравнений, описывающих решения, зависящие от меньшего количества аргументов (автомодельные решения). Рассмотрим эти свойства подробнее.

Пусть известно какое-либо решение уравнения (2), которое запишем в виде $w = \Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Действие группы симметрий дает

$$\tilde{w} = \Phi(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3). \tag{9}$$

Подставляя сюда явный вид конечного преобразования (3), получаем зависящее от параметра λ

соотношение, связывающее w, x_0, x_1, x_2, x_3. Выразив из этого соотношения w, получим семейство новых решений, зависящее от параметра λ:

$$w = \Phi_\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{10}$$

Проиллюстрируем указанную процедуру примером. Пусть в среде с произвольной нелинейностью известно решение $w = \Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, описывающее пучок, распространяющийся вдоль оси Ox_0. Воспользовавшись симметрией № 5 из работы [3], запишем соотношения (9) и (10):

$$w = \Phi\left(x_0, x_1 + \frac{\lambda}{2}x_2 + \frac{\lambda^2}{4}x_0, x_2 + \lambda x_0, x_3\right) = $$
$$= \Phi_\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Видно, что граничное условие ($x_0 = 0$) для такого нового пучка отличается от граничного условия для исходного пучка наличием линейной по поперечной координате фазовой задержки: $w = \Phi(0, x_1 + \lambda x_2/2, x_2, x_3)$, т.е. волновой фронт новой волны повернут на угол λ относительно волнового фронта исходной волны. Таким образом, найдено решение для пучков, распространяющихся под произвольным (малым) углом к оси Ox_0. Заметим, что полученный результат может быть полезен при описании нелинейных режимов ультразвуковых сканеров. Аналогично могут быть применены и другие симметрии из статьи [3]. Пример получения новых решений путем применения симметрии № 17 описан в статье [11]. Симметрия № 20 может быть использована для описания эффекта нелинейной рефракции, соответствующее обсуждение в случае двумерных диссипативных пучков проведено в работе [12].

Поясним теперь метод построения редуцированных уравнений. На множестве всех возможных решений уравнения (2) рассмотрим так называемые инвариантные решения [8], т.е. такие, которые при применении к ним процедуры, описываемой уравнениями (9) и (10), не меняют своего вида, т.е. переходят сами в себя: $\Phi = \Phi_\lambda$. С целью нахождения таких решений запишем условие инвариантности решения в инфинитезимальной форме. Подставляя разложения (4) в соотношение (9), получим: $w + \lambda\psi = \Phi(x_0, x_1, x_2, x_3) + \lambda\varphi_\mu\partial\Phi/\partial x_\mu$. Отсюда следует, что требование независимости решения от параметра преобразования λ имеет вид дополнительного квазилинейного дифференциального уравнения 1-го порядка, которому должно удовлетворять искомое решение:

$$\varphi_\mu\frac{\partial w}{\partial x_\mu} = \psi. \tag{11}$$

С помощью соотношения (11) уравнение (2) сводится к новому уравнению для функции, зависящей от меньшего количества аргументов. Действительно, решение уравнения (11) может быть записано в виде произвольной функциональной связи четырех интегралов соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений $dx_0/\varphi_0 = dx_1/\varphi_1 = dx_2/\varphi_2 = dx_3/\varphi_3 = dw/\psi$. Отсюда следует, что функция w зависит не от четырех, а только от трех переменных. После подстановки решения в таком (автомодельном) виде в исходное уравнение (2) придем к редуцированному уравнению. Благодаря меньшему количеству независимых переменных это уравнение проще исходного, поэтому найти его частные аналитические решения, вообще говоря, легче.

Обратимся к рассмотренному выше примеру с симметрией № 5. Уравнение (11) имеет вид $x_2\partial w/\partial x_1 + 2x_0\partial w/\partial x_2 = 0$. Решая его в характеристиках, получим: $w = R(\xi_0, \xi_1, \xi_3)$, где $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_1 - x_2^2/4x_0$, $\xi_3 = x_3$, R – произвольная функция. Подставив найденный вид автомодельного решения в уравнение (2), получим редуцированное уравнение $R_{10} + P(R_1)R_{11} + R_1/2\xi_0 - R_{33} = 0$. Дальнейшего его упрощения можно добиться, рассмотрев не зависящие от ξ_3 решения. Редуцированное уравнение тогда принимает вид уравнения для одномерных цилиндрических расходящихся волн и имеет общее аналитическое решение:

$$u = \sqrt{\frac{a}{x_0}}U\left(x_1 - \frac{x_2^2}{4x_0} - \int_a^{x_0} P\left(u\sqrt{\frac{x_0}{\zeta}}\right)d\zeta\right),$$

где $u = w_1$, функция U описывает профиль волны на исходном расстоянии $x_0 = a$, а величины u и x_0 в аргументе подынтегральной функции считаются не зависящими от переменной интегрирования ζ. На основе полученного точного решения нетрудно выписать ряд других точных решений, если воспользоваться описанным выше алгоритмом размножения. При этом каждая симметрия, кроме, разумеется, симметрии № 5, задаст целое семейство новых решений.

Рассмотрим, наконец, приложение вариационных симметрий уравнения (2) для нахождения законов сохранения. Согласно теореме Нетер, каждой вариационной симметрии соответствует закон сохранения вида

$$D_\mu j_\mu = 0. \tag{12}$$

Компоненты тока j_μ выражаются через лагранжиан и функции A_μ, входящие в уравнение (8), следующим образом [4]:

$$j_\mu = \varphi_\mu\Lambda + (\psi - \varphi_\nu w_\nu)\frac{\partial\Lambda}{\partial w_\mu} - A_\mu. \tag{13}$$

Нулевая компонента функции тока для некоторых симметрий

N	j_0
1	$F(w_1) - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2}$
2	$-\frac{w_1^2}{2}$
3	$\frac{w_1 w_2}{2}$
4	$\frac{w_1 w_3}{2}$
5	$\frac{1}{4}x_2 w_1^2 - \frac{1}{2}x_0 w_1 w_2$
6	$-\frac{1}{4}x_3 w_1^2 - \frac{1}{2}x_0 w_1 w_3$
7	$\frac{1}{2}w_1(x_2 w_3 - x_3 w_2)$
17	$x_0^2\left[\frac{w_2^2 + w_3^2}{2} - F(w_1)\right] + \frac{1}{2}x_0 w_1(x_2 w_2 + x_3 w_3) + \frac{1}{8}(x_2^2 + x_3^2)w_1^2$
18	$x_0^2\left[\frac{w_2^2 + w_3^2}{2} - \frac{w_1^3}{6}\right] + \frac{1}{5}x_0 w_1[x_1 w_1 + 3x_2 w_2 + 3x_3 w_3] + \frac{3}{20}(x_2^2 + x_3^2)w_1^2 - \frac{1}{5}x_1^2 w_1$
19	$-\frac{1}{2}h(x_0)w_1^2 + \dot{h}x_1 w_1$
20	$-\frac{1}{2}q(x_0)w_1 w_2 - \frac{1}{4}\dot{q}x_2 w_1^2 + \frac{1}{2}\ddot{q}x_1 x_2 w_1$
21	$-\frac{1}{2}g(x_0)w_1 w_3 - \frac{1}{4}\dot{g}x_3 w_1^2 + \frac{1}{2}\ddot{g}x_1 x_3 w_1$
22	$(2 + 3\alpha)x_0\left[F(w_1) - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2}\right] - \frac{2-\alpha}{2}x_1 w_1^2 - \frac{2+\alpha}{2}w_1(x_2 w_2 + x_3 w_3)$

Для вариационных симметрий уравнения (2), как показал расчет, величины A_μ даются формулами:

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^w \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dw, \quad A_1 = a_1 + \frac{1}{2}\int_0^w \frac{\partial\psi}{\partial x_0}dw,$$
$$A_2 = -\int_0^w \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dw, \quad A_3 = -\int_0^w \frac{\partial\psi}{\partial x_3}dw, \tag{14}$$

где $a_1 = 0$ для всех симметрий, за исключением двух видов нелинейности в случае симметрии № 22: 1) $a_1 = -4w$ при $P(u) = u^{-1}$ и 2) $a_1 = 4x_1$ при $P(u) = u^{-2}$. Отметим, что в (14) дифференцирование функции ψ по координатам производится при фиксированной функции w. Введем обозначение:

$$I_n = \int j_0^{(n)} dx_1 dx_2 dx_3, \tag{15}$$

где $j_0^{(n)}$ – нулевая компонента функции тока, соответствующая n-й симметрии.

Согласно (12), $dI_n/dx_0 = 0$, т.е. величина I_n есть интеграл движения. Знание таких сохраняющихся величин может быть полезно как для контроля численного счета, так и для выявления некоторых общих свойств решений уравнения ХЗ. Поиск интегралов движения, вообще говоря, является непростой задачей. Для уравнения ХЗ ранее не использовалась возможность его сведения к лагранжевому виду, поэтому было известно лишь несколько простых интегралов движения. Описанный выше алгоритм позволяет существенно расширить их список.

В таблице приведены нулевые компоненты функции тока для некоторых симметрий. Физический смысл ряда соответствующих интегралов (15) достаточно нагляден. Так, величина I_1 пропорциональна гамильтониану [5], I_2 – полной энергии волны. Другие интегралы не так легко интерпретировать, однако из них можно получить некоторые простые соотношения. Следует [5], введем моменты акустического поля как средние, определенные с использованием функции распределения w_1^2: $\langle x_i\rangle \equiv \int x_1 w_1^2\, dx_1dx_2dx_3/\int w_1^2\, dx_1dx_2dx_3$, $i = 1, 2, 3$. Величина $\langle x_1\rangle$ характеризует средний по времени центр волны, $\langle x_{2,3}\rangle$ есть поперечные координаты центра поперечного сечения пучка. Рассмотрим также среднеквадратичный радиус поперечного сечения пучка, квадрат которого определим как $\langle r_\perp^2\rangle = \int (x_2^2 + x_3^2) w_1^2\, dx_1dx_2dx_3/\int w_1^2\, dx_1dx_2dx_3$. Нетрудно видеть из таблицы, что следствием существования интегралов I_2–I_6, задаваемых формулой (17), является соотношение:

$$\frac{d^2\langle x_j\rangle}{dx_0^2} = 0, \quad j = 2, 3, \tag{16}$$

т.е. независимо от вида нелинейности центр пучка движется вдоль прямой линии (которая, вообще говоря, не параллельна оси Ox_0). Интересными являются также следствия из интегралов движения I_{17}, I_{18} и I_{22}, имеющих место только для специальных видов нелинейности. Рассмотрим сначала случай квадратичной нелинейности. Комбинируя I_1, I_{18} и I_{22}, получим тождество:

$$\int\left[\frac{3}{20}(x_2^2 + x_3^2)w_1^2 - \frac{1}{5}x_1^2 w_1\right]dx_1dx_2dx_3 \equiv$$

$$\equiv I_{18} + \frac{2}{5}x_0 I_{22} - 3x_0^2 I_1.$$

Приведем левую часть к виду, соответствующему усреднению с весом w_1^2. Для этого продифференцируем по x_0 обе части этого тождества. С учетом (2) $\partial(x_1^2 w_1)/\partial x_0 = x_1 w_1^2 - \partial(x_1^2 w_1^2/2)/\partial x_1 + \partial(x_1^2 w_2)/\partial x_2 + \partial(x_1^2 w_3)/\partial x_3$. Поскольку дивергентные слагаемые не дают вклада в интеграл, приходим к соотношению:

$$\frac{d\langle r_\perp^2\rangle}{dx_0} - \frac{4}{3}\langle x_1\rangle = -\frac{4}{3}\frac{I_{22}}{I_2} + 20x_0\frac{I_1}{I_2}. \tag{17}$$

Таким образом, среднеквадратичный поперечный радиус пучка $\sqrt{\langle r_\perp^2\rangle}$ и положение временно́го центра акустического поля $\langle x_1\rangle$ однозначно связаны. В случае кубичной нелинейности поведение среднеквадратичного радиуса пучка еще проще. Из интегралов движения I_1, I_{17} и I_{22} вытекает соотношение:

$$\langle r_\perp^2\rangle = \frac{-4I_{17} - x_0 I_{22} + 4x_0^2 I_1}{I_2}, \tag{18}$$

которое было ранее получено в работе [5]. Поскольку нахождение точных решений уравнения ХЗ в общем случае невозможно, то выражения типа (16)–(18) могут представить большой интерес.

Таким образом, в настоящей работе получены новые важные свойства интенсивных пучков, описываемых обобщенным уравнением ХЗ. Показано, что уравнение (2) является лагранжевым. Это позволило применить теорему Нетер и найти с помощью вычисленных в работе [3] симметрий неизвестные ранее интегралы движения уравнения ХЗ. С их использованием получены соотношения, описывающие моменты акустического поля в случае квадратичной и кубичной нелинейностей. Симметрии, кроме того, использованы для поиска автомодельных подстановок и получения точных решений уравнения ХЗ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 98-02-17318) и CRDF (код проекта RB2-131). Авторы благодарны В.А. Хохловой за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cleveland R.O., Hamilton M.F., Blackstock D.T.* Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. № 6. P. 3312–3318.
2. *Averkiou M.A., Hamilton M.F.* Nonlinear distortion of short pulses radiated by plane and focused circular pistons // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. № 5. P. 2539–2548.
3. *Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А.* Симметрии обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 5. С. 628–633.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Маков Ю.Н., Сапожников О.А.* Усредненные характеристики (моменты) обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 1003–1005.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988.
7. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

11. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Волновые пучки в кубично-нелинейных средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. № 2(8). С. 395–413.

12. *Cates A.T., Crighton D.G.* Nonlinear deffraction and caustic formation // Proc. R. Soc. Lond. A. 1990. V. 430. P. 69–88.

Properties of Powerful Acoustic Beams Described by the Generalized Khokhlov–Zabolotskaya Equation

A. G. Kudryavtsev and O. A. Sapozhnikov

Properties of powerful acoustic beams are described in terms of the symmetries of the generalized Khokhlov–Zabolotskaya (KhZ) equation. It is demonstrated that, for any type of nonlinearity of the medium, the KhZ equation can be reduced to the Lagrange equation. The corresponding Lagrangian is determined. Several new conservation laws are derived by the Noether theorem on the basis of the symmetries calculated in the previous paper [3]. Some new relations between the acoustic field moments are determined with the help of these laws. The indicated symmetries are used for the reduction of the KhZ equation and the search for its exact solutions.