

## ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА

На диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
Руховича Филиппа Дмитриевича

**Направление подготовки** 01.06.01. Математика и механика

**Направленность (профиль) подготовки** 01.01.09. Дискретная математика и математическая кибернетика

**Специальность, по которой подготовлен научный доклад** 01.01.09. Дискретная математика и математическая кибернетика

**Тема научного доклада** Внешние билиарды вне правильных многоугольников: множества полной меры, апериодические точки и множества периодов

**Оценка актуальности исследования.** Внешний билиард многоугольника – динамическая система, проблематика которой доступна даже школьникам. Внешние билиарды были введены Бернардом Нойманом в 1950-х годах и стали популярны в 1970-х благодаря Ю. Мозеру, как иллюстративные модели для задач небесной механики. Фундаментальным вопросом здесь является существование и «распространенность» апериодических траекторий. Интересным (в некотором смысле – основным) случаем является *правильный* многоугольник, к которому относятся и результаты рассматриваемой диссертации.

Несложно получается ответ для треугольника, квадрата и шестиугольника: все траектории – периодические. Что же дальше? Только в 1990-е годы появились работы Сергея Табачникова, в которых был рассмотрен случай пятиугольника. Оказалось, что в этом случае непериодические траектории существуют. Из работ Табачникова можно было получить их полное описание (что было сделано французскими математиками) и существование апериодических траекторий для десятиугольника. Рассмотрения Табачникова используют красивые «самоподобные структуры» областей плоскости, образованных многоугольниками с одинаковыми символическими траекториями. Именно это самоподобие оказывается ключом к построению апериодической траектории и к доказательству того, что почти всякая траектория – периодична.

Существенным продвижением в данной области стали результаты Р. Шварца (R. E. Schwartz, ученик W. P. Thurston'a), вошедшие, в частности, в его монографию, изданную American Mathematical Society в 2014 г. Помимо получения других важных результатов, Шварц существенно продвинулся в рассмотрении восьмиугольника. Он рассмотрел «модельный случай» динамической системы, связанной с восьмиугольником, и описал ее траектории. Шварц также сформулировал общую позицию исследователей по отношению к рассматриваемому кругу проблем. Он указал, что, после случаев  $n = 3, 4, 6$ , исследованного Табачниковым случая  $n = 5$  и вытекающего из этих исследований случая  $n = 10$ , следует ожидать решения при  $n = 8, 12$ , а в других случаях ситуация будет много сложнее.

Остановимся отдельно на важном для данной области использовании компьютера. Компьютерные вычисления использовались уже Табачниковым, а вот, что пишет на эту тему в своей монографии Шварц: «I discovered almost all the material in this monograph by computer experimentation, and then later on found rigorous proofs. Most of the proofs here are traditional, but they do rely on 12 computer calculations. These calculations are described in detail in the last part of the monograph.»

Основные результаты рассматриваемой работы – полное решение проблемы для  $n = 8, 12$ . Также автор впервые проводит доказательство для  $n = 10$  (результат, о котором предшественники диссертанта справедливо говорили, что он может быть получен методом Табачникова). Доказательство первоклассных результатов автором в актуальной области опирается на методы, развитые до него, прежде всего – Табачниковым. Однако и принципиальные и технические трудности последовательно значительно возрастали при переходе к  $n = 8$  и  $n = 12$ . Компьютер также был использован, во многом, аналогично Шварцу. При этом мне представляется, что чертежи, выполненные компьютером, являются необходимой частью доказательства. Отдельно обращаю внимание на их высокое эстетическое качество. Их стоит (вместе с формулировкой математической проблемы) популяризировать среди школьников и в более широком круге людей, которым интересно, чем заняты ученые. Хорошо, что диссертант не пожалел на них места, в его публикациях в Докладах детали трудно различимы.

**Оценка научной новизны исследования.** Все результаты являются новыми и получены диссертантом самостоятельно

**Достоверность результатов исследования.** Все результаты строго обоснованы в виде четких математических доказательств. Также работа неоднократно докладывалась на научных семинарах, всероссийских и международных конференциях.

**Теоретическая и практическая значимость полученных результатов** Результаты носят теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для теории динамических систем и комбинаторики слов, как уже было сказано выше, они имеют и значительный образовательный и просветительский потенциал.

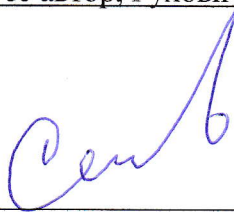
**Основные результаты и положительные стороны исследования.** Доказано существование апериодической точки и описаны периоды для внешних билиардов вокруг правильных  $n$ -угольников при  $n=10, 8, 12$ .

**Недостатки исследования.** Терминология в данной области еще не устоялась. Мне лично очень нравится дублирование «вне» в словосочетаниях типа «внешний билиард вне пятиугольника», кажется, хватило бы одного «вне»: «внешний билиард пятиугольника», или «билиард вне пятиугольника». Некоторое недоумение вызывает список литературы. В нем, в частности, приведены ссылки только на английские переводы статей автора, а не на оригинальные статьи. Следует это квалифицировать, как «низкопоклонство перед Западом», или,

чего похуже, небрежность. Впрочем, указанные недостатки недостаточно снижают ценность работы.

**Заключение** Диссертация представляет собой законченное научное исследование, в котором решены серьезные математические задачи; результаты должным образом своевременно опубликованы в ведущих математических изданиях и доложены на авторитетных семинарах и нескольких конференциях. Диссертация удовлетворяет основным требованиям к кандидатским диссертациям, а ее автор, Рухович Ф.Д., заслуживает присуждения ему искомой ученой степени.

Рецензент \_\_\_\_\_



(подпись)

А. Л. Семенов

Д.ф.-м.н., проф., академик РАН, зав. Кафедрой математической логики и теории алгоритмов МГУ  
«\_7\_»\_мая\_2019 г.