

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕТОННЫХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ EIGEN VIBRATIONS OF CONCRETE BEAMS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Гусев Борис Владимирович^{*}, Саурин Василий Васильевич^{**}
Gusev Boris Vladimirovich^{*}, Saurin Vasily Vasilevich^{**}

^{*}Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта (МИИТ)»

^{*}Federal State Institution of Higher Education «Russian University of Transport» (RUT - MIIT)".
127994, Moscow, 9b9 Obrazcova Street. (e-mail: info-rae@mail.ru)

^{**}Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

^{**}Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation. (e-mail: saurin@ipmnet.ru)

Аннотация. Обсуждается актуальность вопросов, связанных с изучением колебаний неоднородных балок. Сформулирована краевая задача нахождения собственных частот неоднородной балки. Исследованы возможности построения различных двусторонних энергетических оценок качества приближенных решений, вытекающих из метода интегродифференциальных соотношений. На примере свободных колебаний опертой бетонной балки исследованы численные аспекты построения приближенного решения.

Abstract. The relevance of issues related to the study of vibrations of inhomogeneous beams is discussed. The boundary value problem of finding the natural frequencies of an inhomogeneous is formulated. The possibilities of constructing various bilateral energy estimates of the approximate solution quality following from the method of integrodifferential relations are investigated. Using the example of free vibrations of a supported concrete beam, the numerical aspects of constructing an approximate solution.

Ключевые слова: динамика, балка переменного сечения, собственные колебания, численные методы, структурная неоднородность.

Key words: dynamics, a beam with a variable cross-section, eigenvibrations, numerical methods, structural inhomogeneity.

Многие балки, применяемые в технике и строительстве, характеризуются переменными геометрическими и физическими параметрами. Типичным случаем является коническая балка. Кроме того, например, балка при неравномерном распределении температуры имеет переменные физические свойства. Наличие переменных параметров значительно затрудняет динамический анализ таких объектов.

Изучение динамики конструкций в настоящее время становится все более важным для инженеров-строителей, поскольку многоэтажные сооружения становятся относительно более гибкими. Такая тенденция в строительстве, как правило, приводит к увеличению амплитуд колебаний зданий. Поэтому в некоторых случаях необходимо рассчитать динамические характеристики высотных конструкций уже на этапе проектирования. При анализе свободных колебаний консольных высотных зданий их можно моделировать, в первом приближении, балками с переменным поперечным сечением.

Поперечные колебания неоднородных балок изучались многочисленными исследователями вследствие их значимости для гражданского строительства. Эти исследования представляют из себя либо аналитические, либо приближенные решения. Более детальный обзор методов решения задач о колебаниях балок переменного сечения можно найти в [1].

Рассмотрим тонкую балку длины L , которая может быть описана уравнениями в рамках гипотез Эйлера-Бернулли. Плоские поперечные движения балки в рамках рассматриваемой модели описываются линейным уравнением в частных производных

$$\rho(x)y_{tt} + (EJ(x)y_{xx})_{xx} = q(x,t) \quad x \in (0, L). \quad (1)$$

Здесь y – поперечные перемещения точек центральной линии балки, ρ – линейная плотность материала балки, E – модуль Юнга, $q(x,t)$ – внешняя распределенная нагрузка, $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения.

Введем новые переменные $p(t, x)$ и $m(t, x)$, которые характеризуют поведение системы и, в то же самое время, имеют ясный физический смысл. Функция $p(t, x)$ является линейной плотностью импульса, а $m(t, x)$ — изгибающим моментом в поперечном сечении балки.

Уравнения линейной теории, связывающие плотность импульса $p(t, x)$ со скоростями точек системы $y_t(x, t)$, а также момент $m(t, x)$ с кривизной балки $y_{xx}(x, t)$, вызванной изгибом, могут быть соответственно записаны в виде

$$\eta = 0, \quad \xi = 0. \quad (2)$$

Здесь введены вспомогательные функции η и ξ

$$\eta = y_t - \frac{p}{\rho}, \quad \xi = y_{xx} - \frac{m}{EJ}. \quad (3)$$

Используя соотношения (2), уравнение движения упругой балки (1), записанное в перемещениях, можно выразить через функции момента $m(t, x)$ и импульса $p(t, x)$:

$$p_t + m_{xx} = 0 \quad (4)$$

Для того чтобы сформулировать задачу нахождения собственных частот колебаний балки представим все введенные функции, которые зависят от времени, в виде

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \tilde{y}(x)e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = \tilde{p}(x)e^{i\omega t}, \quad m(x, t) = \tilde{m}(x)e^{i\omega t}, \\ \eta(x, t) &= \tilde{\eta}(x)e^{i\omega t}, \quad \xi(x, t) = \tilde{\xi}(x)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя функции из (5) соответственно в выражения (2), (3) и (4) получим

$$i\omega\tilde{y} - \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0, \quad \tilde{y}_{xx} - \frac{\tilde{m}}{EJ} = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{\eta} = i\omega\tilde{y} - \frac{\tilde{p}}{\rho}, \quad \tilde{\xi} = \tilde{y}_{xx} - \frac{\tilde{m}}{EJ}, \quad (7)$$

$$i\omega\tilde{p} + \tilde{m}_{xx} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем знак тильды опускается.

Из первого уравнения (6) и соотношения (8) можно получить в явном виде выражение для функции перемещений y относительно изгибающего момента

$$y = \frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2}, \quad (9)$$

а из соотношения (8) получается выражение для функции импульсов относительно изгибающего момента

$$p = -\frac{m_{xx}}{i\omega}. \quad (10)$$

Подставляя (9) во второе уравнение из (6) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для нахождения собственных частот колебаний балки

$$\left(\frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2} \right)_{xx} - \frac{m}{EJ(x)} = 0 \quad (11)$$

Легко видеть, что при таком выборе переменных первое соотношение из (6) выполняется как тождество, в то время как уравнение (11) представляет из себя модификацию второго соотношения из (6) и, соответственно не равно нулю на приближенном решении.

В данной работе ограничимся рассмотрением случая простого опирания, когда отсутствуют перемещения и внешние моменты в торцевых сечениях стержня. Другими словами линейные граничные условия выражаются через краевые значения функций момента m в виде

$$\begin{aligned} x=0, \quad m=0, \quad m_{xx}=0, \\ x=1, \quad m=0, \quad m_{xx}=0. \end{aligned} \quad (12)$$

В предлагаемом подходе вместо уравнений состояния балки (2) вводится в рассмотрение одно интегральное соотношение, связывающее функции импульса P и момента m с функцией перемещений y .

В книге [3] дана следующая интегро-дифференциальная формулировка задачи о движении упругой балки (6) —: найти такие неизвестные поля плотности импульса P^* , момента m^* и перемещений y^* , которые удовлетворяют следующему интегральному соотношению

$$\Phi = \int_{\Omega} \varphi(p, m, y) d\Omega = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\rho\eta^2 + EJ\xi^2), \quad (13)$$

при строгом выполнении условий (8). Здесь введена область пространственно-временная область $\Omega = (0,1) \times (0,T)$ с границей $\partial\Omega$ в пространстве координаты x и времени t . Интеграл (13) вычисляется по прямоугольной области Ω ($\partial\Omega = dxdt$).

Подынтегральная функция, определенная в (13) через функции η и ξ из (7), является неотрицательной по построению. Из этого свойства следует, что интеграл Φ также неотрицателен для произвольных функций P , m и y . Это обстоятельство позволяет свести интегродифференциальную задачу (6), (8), (13) к следующей минимизационной. Найти такие допустимые функции P^* , m^* и y^* , которые доставляют минимальное (нулевое) значение функционалу Φ :

$$\Phi = \min_{p,m,y} \Phi(p, m, y) = 0 \quad (14)$$

при строгом выполнении ограничений (6), (8).

Функционал Φ можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi = \Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_3, \quad \Psi_i = \int_{\Omega} \psi_i(p, m, y) d\Omega, \quad i=1,2,3, \\ \psi_1 = \frac{1}{2}(-\rho\omega^2 y^2 + EJy_{xx}^2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(i\omega p y + m y_{xx}), \quad \psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\rho} + \frac{m^2}{EJ}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Подынтегральные выражения ψ_i , $i=1,2,3$ представляют собой различные представления линейной плотности полной механической энергии упругой балки. Интегральное качество приближенных функций P , m , y достоверно оценивается в соответствии с величиной безразмерного соотношения

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\Psi_1 + \Psi_3}{2\Psi_2} - 1}. \quad (16)$$

Точность распределения энергии для некоторого допустимого движения $p(x, t)$, $m(x, t)$, $y(x, t)$ в области Ω характеризует подынтегральная функция $\varphi(p, m, y)$, определенная в (13).

В качестве примера рассмотрим различные железобетонные балки со следующими геометрическими характеристиками. Все балки имеют одинаковые длину $L = 6 \text{ м}$ и прямоугольное поперечное сечение с шириной $b = 0.3 \text{ м} = \text{const}$ и высотой $h = h(x)$, которая меняется по длине балки

$$h(x) = \left(\frac{h_1}{6} - \frac{1}{10} \right) x^2 + \frac{9}{10} - \frac{h_1}{2}. \quad (17)$$

Здесь управляющий параметр h_1 , который может изменяться в следующих пределах $0 \leq h_1 \leq 0.6 \text{ м}$, представляет из себя значения строительной высоты на концах балки. Момент инерции сечения вычисляется по следующей формуле

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h^2(x)S(x)}{12}, \quad S(x) = bh(x). \quad (18)$$

Здесь $S(x)$ – площадь поперечного сечения.

Считается, что все балки выполнены из бетона тяжелого класса по прочности на сжатие B25 с модулем упругости $E = E_{25} = 3000 \text{ МПа}$ и погонной плотностью $\rho(x) = \rho_v bh(x)$, где $\rho_v = 2300 \text{ кг/м}^3$ – объемная плотность бетона. Все механические характеристики взяты из строительных норм и правил (СНиП 2.06.08-87).

Стоит отметить, что применение вариационной техники в такой задаче приводит к появлению комплексных собственных значений. Можно показать, что действительные собственные частоты приближенного спектра соответствуют точным значениям частот.

На Рис.1 показана характерная сходимость пяти первых собственных частот (кривые отмечены соответствующими номерами) относительно числа степеней свободы. Значения параметра Δ_1 приведены в логарифмическом масштабе. Можно отметить довольно быструю сходимость (экспоненциальную). Все линии линейно убывают с ростом числа степеней свободы.

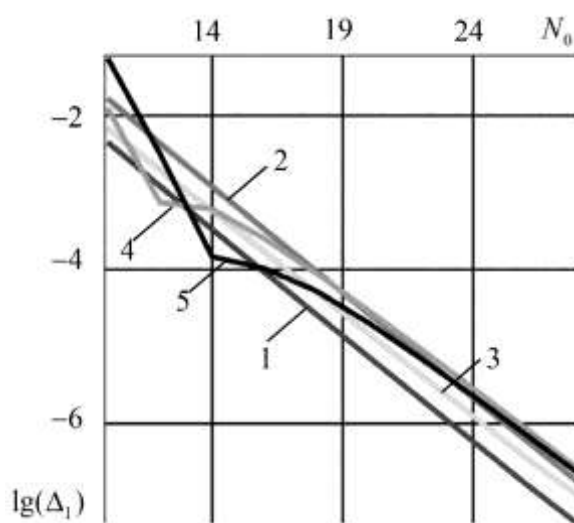


Рис. 1. Сходимость пяти первых собственных частот относительно числа степеней свободы

На Рис. 2 представлены в логарифмическом масштабе зависимости интеграла Δ_1 , введённого соотношением (16), от степени аппроксимации N_0 для первого и пятого собственных чисел (сплошные линии). Для сравнения пунктирными линиями показано изменение в логарифмическом масштабе положительного параметра $\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)$ от степени аппроксимации N_0 для первого и пятого собственных чисел. Сравнительный анализ значений комплексного и относительных погрешностей позволяет сделать предположение, что справедливо следующее соотношение

$$\left| \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \right| \approx \sqrt{\frac{\Psi_1(\omega) + \Psi_3(\omega)}{2\Psi_2(\omega)}} - 1. \quad (19)$$

Другими словами, отношение мнимой и действительной частей собственной частоты довольно точно соответствует относительной энергетической погрешности Δ_1 .

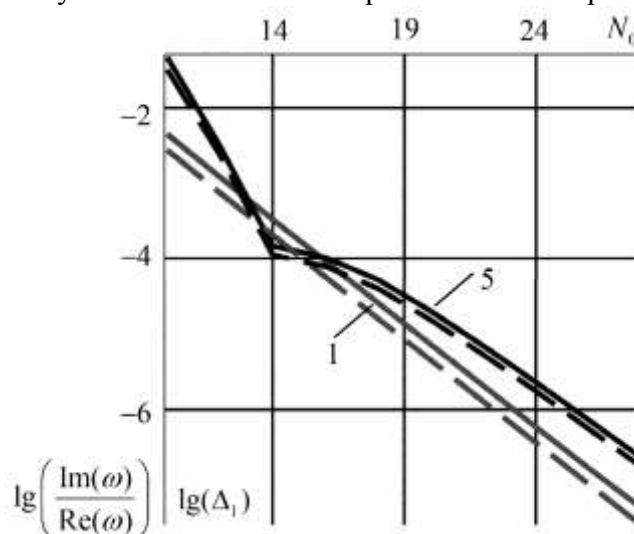


Рис. 2. Сходимость первой и пятой собственных частот относительно числа степеней свободы

Работа выполнена в рамках Госзадания № АААА-А17-117021310380-1 и при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-01-00812, 18-08-01346, 18-29-03228).

Список литературы

1. Гусев, Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок. // Инженерный вестник Дона. Электронный научный журнал. 2017. №3, 40 С. ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312.
2. Kostin, G.V. and Saurin, V. V. Integrodifferential relations in linear elasticity. De Gruyter, Berlin, 2012. 280 p.
3. Kostin, G.V. and Saurin, V. V. Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations. De Gruyter, Berlin, 2017. 305 p.