

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-XXX-XXX

**МЕТОД ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ  
В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ\***

© 2019 г.

**Саурин В.В.**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Российская Федерация*

saurin@ipmnet.ru

*Поступила в редакцию 29.07.2019*

Обсуждаются вопросы, связанные с собственными колебаниями упругих балок переменного сечения. Отмечено, что одной из общих характерных черт, присущих краевым задачам математической физики, является некоторая неоднозначность в их формулировке. Сформулирована краевая задача нахождения собственных частот балки переменного сечения в перемещениях. Введением новых переменных, которые характеризуют поведение системы, краевая задача сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Новые переменные имеют ясный физический смысл. Одна функция является линейной плотностью импульса, а другая – изгибающим моментом в поперечном сечении балки. Такая формулировка задачи о свободных колебаниях балки переменного сечения позволяет свести систему дифференциальных уравнений к одному уравнению четвертого порядка, записанному в терминах функции импульсов. Это уравнение эквивалентно исходному уравнению, сформулированному в перемещениях, но имеет другую форму.

Описан метод интегродифференциальных соотношений, который является альтернативным к классическим численным подходам. Исследованы возможности построения различных двусторонних энергетических оценок точности приближенных решений, вытекающих из метода интегродифференциальных соотношений. Рассмотрен проекционный подход для решения спектральных задач линейной теории балок. На примере задачи о свободных колебаниях прямолинейной балки с квадратично меняющейся строительной высотой по ее длине показана эффективность метода интегродифференциальных соотношений. Предложены энергетические оценки точности приближенного решения, построенного с использованием полиномиальных аппроксимаций искомым функций. Показано, что применение стандартной техники метода Бубнова – Галеркина к задаче о свободных колебаниях приводит к появлению комплексных собственных частот. При этом отношение мнимой части к действительной части собственного числа является относительной погрешностью решения краевой задачи. Предложенный численный алгоритм позво-

---

\* Выполнено при поддержке РФФ (грант № 17-191-01247).

ляет однозначно оценить локальное и интегральное качества полученных численных решений.

*Ключевые слова:* проекционные подходы, метод интегродифференциальных соотношений, энергетические оценки точности, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

## **Введение**

Многие балки, применяемые в технике и строительстве, характеризуются переменными геометрическими и физическими параметрами. Например, коническая балка, балка при неравномерном распределении температуры, которая имеет переменные физические свойства. Наличие переменных параметров значительно затрудняет динамический анализ таких объектов.

Изучение динамики конструкций в настоящее время становится все более важным для инженеров-строителей, поскольку тенденция в строительстве к возведению многоэтажных сооружений, как правило, приводит к увеличению амплитуд колебаний зданий. Поэтому в некоторых случаях необходимо рассчитать динамические характеристики высотных конструкций уже на этапе проектирования. При анализе свободных колебаний консольных высотных зданий их можно моделировать в первом приближении балками с переменным поперечным сечением.

В течение последних нескольких десятилетий значительное количество публикаций, представляющих либо аналитические, либо численные решения, было посвящено поперечным колебаниям неоднородных балок и равномерно вращающихся балок. Характерная черта управляющих дифференциальных уравнений поперечных колебаний неоднородных балок состоит в том, что они представляют собой линейные уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Поперечные колебания неоднородных балок вследствие их значимости для промышленности изучались многими исследователями. Эти исследования представляют собой либо аналитические [1–4], либо приближенные решения [5].

Среди результатов, представленных в литературе, точные решения в замкнутой форме особенно интересны из-за того, что они служат критериями, по которым можно оценить точность различных приближенных решений, полученных с помощью методов Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, конечных разностей, конечных элементов, дифференциальных квадратур и др. [6]. Кроме того, они служат тестовой базой для разработки новых систем численного решения краевых задач.

Проводилось много исследований свободных колебаний неоднородных балок. Однако решения в замкнутой форме до сих пор получены лишь для малого количества задач. Показано, что аналитические решения можно найти для некоторых особых случаев, например, для структуры с экспоненциально изменяющимся поперечным сечением. Для построения решения применяют разные численные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей и т.д.

Большинство рассмотренных задач относится к исследованию поперечных колебаний сужающихся балок. Эти результаты можно систематизировать следующим образом: балки с круглым поперечным сечением либо усеченные [1], имеющие один острый конец, либо два острых конца [7]; балки с прямоугольным поперечным сечением и с постоянной шириной, с постоянной толщиной [4] или в виде пирамиды [1].

Интерес исследователей к задачам о колебаниях неоднородных одномерных структур в первую очередь связан с исследованием [8] конических стержней, пока-

зывают, что собственные частоты слабо зависят от конуса. Изучение конических стержней важно для изучения основ и динамики композитных структур, подверженных высокоскоростному удару. В этих случаях динамический отклик полуплоскости на поверхностную нагрузку можно точно определить с использованием конической модели. Более детальный обзор методов решения задач о колебаниях балок переменного сечения можно найти в [9, 11–20].

Несмотря на то, что задачи о свободных колебаниях стержней переменного сечения давно известны и довольно подробно исследованы, остается ряд проблем, которые являются актуальными и в настоящее время. К таким проблемам можно отнести и разработку более эффективных численных методов, и построение надежных процедур оценки качества приближенных решений. Ряду таких вопросов посвящено настоящее исследование.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую балку длиной  $L$ , которая описывается уравнениями в рамках гипотез Эйлера – Бернулли (рис. 1). На рисунке  $h_0$  – величина строительной высоты балки при  $x = 0$ . Считается, что балка совершает плоские поперечные гармонические колебания, которые в рамках рассматриваемой модели описываются линейным уравнением в частных производных

$$\rho(x)z_{tt} + (EJ(x)z_{xx})_{xx} = 0, \quad x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right). \quad (1)$$

Здесь  $z$  – поперечные перемещения точек центральной линии балки,  $\rho$  – линейная плотность материала балки,  $E$  – модуль Юнга,  $J(x)$  – момент инерции поперечного сечения. Считается, что внешняя распределенная нагрузка отсутствует.

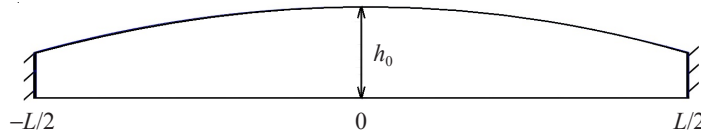


Рис. 1. Балка переменного сечения

Введем новые переменные  $\pi(x, t)$  и  $\mu(x, t)$ , которые характеризуют поведение системы и в то же время имеют ясный физический смысл. Функция  $\pi(x, t)$  является линейной плотностью импульса, а  $\mu(x, t)$  – изгибающим моментом в поперечном сечении балки.

Уравнения линейной теории, связывающие плотность импульса  $\pi(x, t)$  со скоростями точек системы  $z_t(x, t)$ , а также момент  $\mu(x, t)$  с кривизной балки  $z_{xx}(x, t)$ , вызванной изгибом, могут быть соответственно записаны в виде

$$\eta = 0, \quad \xi = 0, \quad (2)$$

где введены вспомогательные функции  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\eta = z_t - \frac{\pi}{\rho}, \quad \xi = z_{xx} - \frac{\mu}{EJ}. \quad (3)$$

Используя соотношения (2) и (3), уравнение движения упругой балки (1), записанное в перемещениях, можно выразить через функции момента  $\mu(x, t)$  и импульса  $\pi(x, t)$ :

$$\pi_t + \mu_{xx} = 0. \quad (4)$$

Поскольку выражение (4) связывает распределенные инерционные и упругие силы, то это соотношение будем называть уравнением динамического равновесия.

Для того чтобы сформулировать задачу нахождения собственных частот колебаний балки, представим все введенные функции, которые зависят от времени, в виде

$$\begin{aligned} z(x, t) = \tilde{z}(x) e^{i\omega t}, \quad \pi(x, t) = \tilde{\pi}(x) e^{i\omega t}, \quad \mu(x, t) = \tilde{\mu}(x) e^{i\omega t}, \\ \eta(x, t) = \tilde{\eta}(x) e^{i\omega t}, \quad \xi(x, t) = \tilde{\xi}(x) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя функции из (5) соответственно в выражения (2), (3) и (4) получим

$$i\omega \tilde{z} - \frac{\tilde{\pi}}{\rho} = 0, \quad \tilde{z}_{xx} - \frac{\tilde{\mu}}{EJ} = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{\eta} = i\omega \tilde{z} - \frac{\tilde{\pi}}{\rho}, \quad \tilde{\xi} = \tilde{z}_{xx} - \frac{\tilde{\mu}}{EJ}, \quad (7)$$

$$i\omega \tilde{\pi} + \tilde{\mu}_{xx} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем знак тильда опускаем.

Дважды дифференцируя первое уравнение из (6) по  $x$  и подставляя  $z_{xx}$  во второе уравнение из (6), можно получить в явном виде выражение для функции изгибающего момента  $\mu$  относительно импульса

$$\mu = \frac{EJ}{i\omega} \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами, выраженное через импульсы, для нахождения собственных частот колебаний балки

$$\left[ EJ(x) \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx} - \omega^2 \pi = 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что при таком выборе переменных соотношения (6) выполняются как тождества, в то время как уравнение (10) представляет собой модификацию соотношения (8) и, соответственно, не равно нулю на приближенном решении.

Ограничимся рассмотрением случая, когда концы стержня жестко защемлены, и имеют место граничные условия:

$$\begin{aligned} x = -\frac{L}{2}, \quad z = 0, \quad z_x = 0, \\ x = \frac{L}{2}, \quad z = 0, \quad z_x = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя первое соотношение из (6), граничные условия (11) можно записать в терминах импульсов:

$$\begin{aligned} x = -\frac{L}{2}, \quad \pi = 0, \quad \pi_x = 0, \\ x = \frac{L}{2}, \quad \pi = 0, \quad \pi_x = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Следует отметить, что уравнения (1) и (10) получаются путем тождественных преобразований уравнений (2), (4). Другими словами, они описывают одно и то же физическое явление, но при этом имеют различную форму. Соответствие таких представлений друг другу составляет основу дополнительного исследования. Эти вопросы выходят за рамки настоящего исследования.

## 2. Метод интегродифференциальных соотношений

В предлагаемом подходе вместо уравнений состояния балки (2) вводится в рассмотрение одно интегральное соотношение, связывающее функции импульса  $\pi$  и момента  $\mu$  с функцией перемещений  $z$ .

В монографии [11] дана следующая интегродифференциальная формулировка задачи о движении упругой балки (6)–(11): найти такие неизвестные поля плотности импульса  $\pi^*$ , момента  $\mu^*$  и перемещений  $z^*$ , которые удовлетворяют интегральному соотношению

$$\Phi = \int_{\Omega} \varphi(\pi, \mu, z) d\Omega = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\rho\eta^2 + \alpha^2 EJ\xi^2) \quad (13)$$

при строгом выполнении условий (8), (11). Здесь введена пространственно-временная область  $\Omega = (-L/2, L/2) \times (0, T)$  с границей  $\partial\Omega$  в пространстве координаты  $x$  и времени  $t$ . Интеграл (13) вычисляется по прямоугольной области  $\Omega$  ( $\partial\Omega = dxdt$ ). Параметр  $\alpha$  – некоторый весовой коэффициент.

Подынтегральная функция, определенная в (13) через функции  $\eta$  и  $\xi$  из (7), является неотрицательной по построению. Из этого свойства следует, что интеграл  $\Phi$  также неотрицателен для произвольных функций  $\pi$ ,  $\mu$  и  $z$ . Это обстоятельство позволяет свести интегродифференциальную задачу (6), (8), (11), (13) к следующей минимизационной: найти такие допустимые функции  $\pi^*$ ,  $\mu^*$  и  $z^*$ , при которых функционал  $\Phi$  принимает минимальное (нулевое) значение:

$$\Phi = \min_{\pi, \mu, z} \Phi(\pi, \mu, z) = 0 \quad (14)$$

при строгом выполнении ограничений (6), (8) и (11).

Функционал  $\Phi$  можно переписать в следующем виде:

$$\Phi = \Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_3, \quad \Psi_i = \int_{\Omega} \psi_i(\pi, \mu, z) d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(-\rho\omega^2 z^2 + \alpha^2 EJz_{xx}^2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(i\omega\pi z + \alpha^2 \mu z_{xx}), \quad \psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{\rho} + \frac{\alpha^2 \mu^2}{EJ}\right).$$

Подынтегральные выражения  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – это различные представления линейной плотности полной механической энергии упругой балки. Функция  $\psi_1$  зависит только от поперечных перемещений  $z$ , в то время как в выражение для  $\psi_3$ , квадратичное по  $\pi$  и  $\mu$ , перемещения не входят. Смешанная билинейная функция плотности энергии  $\psi_2$  не зависит явно от инерционных и упругих свойств балки.

Используя функционал  $\Phi$  и энергетические интегралы  $\Psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , введенные в (15) для произвольных допустимых полей импульсов  $\pi$ , моментов  $\mu$  и перемещений  $z$ , удовлетворяющих ограничениям (11), можно сформулировать ряд критериев, характеризующих совершенство приближенного решения. Например, интегральная погрешность в задании приближенных функций  $\pi$ ,  $\mu$ ,  $z$  достоверно оценивается в соответствии с величиной безразмерного соотношения

$$\Delta_1 = \sqrt{2 - \frac{4\Psi_2}{\Psi_1 + \Psi_3}}. \quad (16)$$

Точность распределения энергии для некоторого допустимого движения  $\pi(x, t)$ ,  $\mu(x, t)$ ,  $z(x, t)$  в области  $\Omega$  характеризует подынтегральная функция  $\varphi(\pi, \mu, z)$ , определенная в (13).

Как показано в [11], оценки качества приближенного решения (16) и (13) хорошо работают всегда, если функции  $\xi$  и  $\eta$  из (7) не равны одновременно нулю. Для краевой задачи (10) с граничными условиями (12), как это нетрудно заметить, реализуется именно такой случай. При этом вся ошибка приближенного решения сосредоточена в соотношении (10). Поэтому в настоящей статье предлагается следующая форма, выражающая относительную погрешность точности приближенного решения:

$$\Phi_\pi = \int_{\Omega} \varphi_\pi(\pi) d\Omega = 0, \quad \varphi_\pi = \left( \left[ EJ(x) \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx} - \omega^2 \pi \right)^2. \quad (17)$$

Тогда по аналогии с относительной ошибкой  $\Delta_1$ , введенной формулой (16), можно ввести относительную погрешность

$$\Delta_1^{(\pi)} = \sqrt{2 - \frac{4\Psi_2^{(\pi)}}{\Psi_1^{(\pi)} + \Psi_3^{(\pi)}}}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_\pi &= \Psi_1^{(\pi)} - 2\Psi_2^{(\pi)} + \Psi_3^{(\pi)}, \quad \Psi_i^{(\pi)} = \int_{\Omega} \psi_i^{(\pi)}(\pi) d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ \psi_1^{(\pi)} &= \left( \left[ EJ(x) \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx} \right)^2, \\ \psi_2^{(\pi)} &= \omega^2 \pi \left[ EJ(x) \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx}, \\ \psi_3^{(\pi)} &= (\omega^2 \pi)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом подынтегральная функция  $\varphi_\pi(\pi)$  из (17) характеризует распределение ошибки по длине балки в каждый момент времени.

### 3. Численный пример

Рассмотрим различные алюминиевые балки со следующими геометрическими характеристиками: все балки имеют одинаковые длину  $L = 1$  м и прямоугольное поперечное сечение с шириной  $b = 0,1$  м и высотой  $h = h(x)$ , которая меняется по длине балки согласно зависимости

$$h(x) = \left( \frac{6}{5} - 12h_0 \right) x^2 + h_0. \quad (20)$$

Здесь управляющий параметр  $h_0$ , который может изменяться в пределах  $0 \leq h_0 \leq 0,15$  м, представляет собой значение строительной высоты в средней точке балки

$x = 0$ . Из (20) следует, что все рассматриваемые балки имеют одинаковый объем конструкционного материала

$$V = 0,01 \text{ м}^3. \quad (21)$$

Отметим, что форма сечения балки не меняется по длине если  $h(x) = h_0 = 0,1$  м. Момент инерции сечения вычисляется по следующей формуле:

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h^2(x)S(x)}{12}, \quad S(x) = bh(x). \quad (22)$$

Здесь  $S(x)$  – площадь поперечного сечения.

Считается, что все балки, рассматриваемые в примере, выполнены из алюминия с модулем упругости  $E = 70$  ГПа и погонной плотностью  $\rho(x) = \rho_V bh(x)$ , где  $\rho_V = 2700$  кг/м<sup>3</sup> – объемная плотность алюминия. Граничные условия на концах балки определяются формулой (12).

Собственные частоты были найдены с использованием вариационных подходов, обсуждаемых в этой статье. Следует отметить, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, вытекающие из вариационных принципов для балок переменного сечения, имеют переменные коэффициенты. Это, как указано в [10], значительно ограничивает возможности построения аналитических решений и проведения полного анализа собственных движений балки.

Чтобы найти приближенное решение краевой задачи (10), (12) зададим аппроксимации неизвестных функций импульсов  $\pi$  в виде полиномов относительно переменной  $x$ :

$$\pi = \sum_{i=1}^{N_0} \pi_i x^i. \quad (23)$$

Здесь  $\pi_i$  – неизвестные константы, а  $N_0$  – степень полиномов.

Используя аппроксимации (23), можно точно удовлетворить граничным условиям (12). Эта операция позволяет исключить четыре константы  $\pi_i$ . Оставшиеся  $N_d = N_0 - 4$  коэффициентов  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, N_d$ , используются для нахождения минимума квадратичного функционала

$$\Phi_\pi = \min_{\pi_i} \Phi_{\pi_i} > 0, \quad \Phi_{\pi_i} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \left[ EJ(x) \left( \frac{\pi_i}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx} - \omega^2 \pi_i \right]^2 dx, \quad i=1, \dots, N_d. \quad (24)$$

Вариационная формулировка (24) полностью соответствует методу наименьших квадратов.

Стоит также отметить, что применение вариационной техники в такой задаче приводит к появлению комплексных собственных значений. Можно показать (см., например, [21]), что действительные собственные частоты приближенного спектра соответствуют точным значениям частот. На рис. 2 показана проекция трехмерной кривой в пространстве  $\{0, \text{Re } \omega_1, \text{Im } \omega_1, N_0\}$  на плоскость  $\{0, \text{Re } \omega_1, \text{Im } \omega_1\}$ . В расчетах параметр  $N_0$  менялся от 10 до 28. Увеличение этого параметра приводит к значительному уменьшению мнимой части. Видно, что линия, соответствующая приближенным собственным частотам, вертикально втыкается в вещественную ось. Поэтому угол наклона частотной линии и расстояние до действительной оси могут служить специальным видом оценки качества полученных частот.

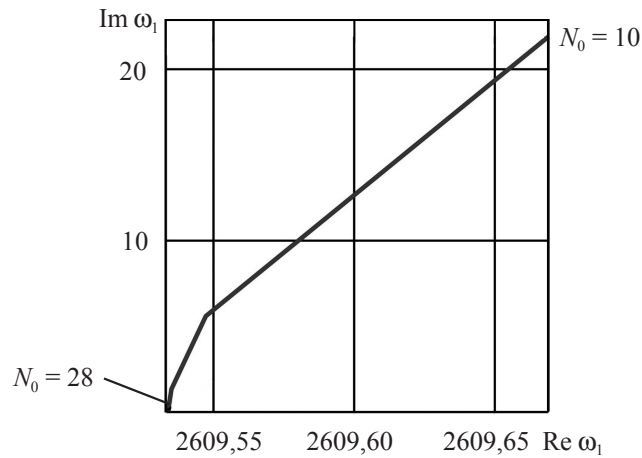


Рис. 2. Действительные и мнимые части первой собственной частоты балки для различных полиномиальных приближений

Функция  $\varphi(x)$ , введенная в уравнении (13), которая в данном случае имеет вид

$$\varphi(x) = \left[ EJ(x) \left( \frac{\pi}{\rho(x)} \right)_{xx} \right]_{xx} - \omega^2 \pi, \quad (25)$$

представлена на рис. 3 для первой моды колебаний при  $N_0 = 28$ . Можно отметить заметное биение функции, а также значительный ее рост в окрестностях концов балки.

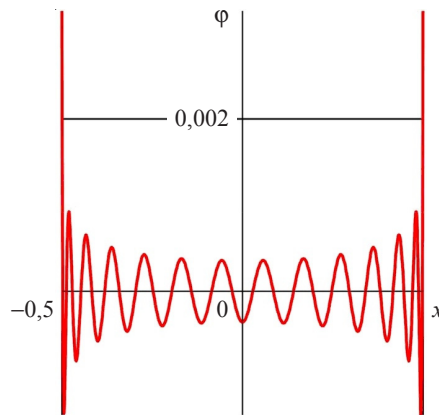


Рис. 3. Распределение локальной ошибки  $\varphi(x)$  по длине балки для первой формы собственных колебаний

На рис. 4 показана характерная сходимость пяти первых собственных частот (кривые отмечены соответствующими номерами) относительно числа степеней свободы. Значения параметра  $\Delta_1^{(\pi)}$  приведены в логарифмическом масштабе. Можно отметить довольно быструю сходимость (экспоненциальную). Все линии практически линейно убывают с ростом числа степеней свободы.



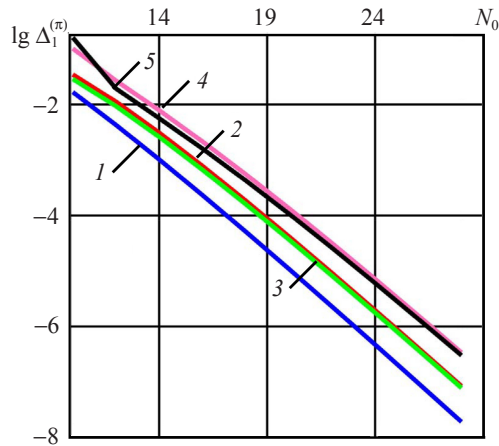


Рис. 4. Сходимость пяти первых собственных частот относительно числа степеней свободы

На рис. 5 представлены в логарифмическом масштабе зависимости интеграла  $\Delta_1^{(\pi)}$  введенного соотношением (16), от степени аппроксимации  $N_0$  для первого и пятого собственных чисел (сплошные линии). Для сравнения штриховыми линиями показано изменение в логарифмическом масштабе положительного параметра  $\text{Im } \omega_1 / \text{Re } \omega_1$  от степени аппроксимации  $N_0$  для первого и пятого собственных чисел. Из вида представленных зависимостей следует, что они качественно повторяют друг друга. Можно отметить некоторый сдвиг между соответствующими кривыми по вертикали. Сравнительный анализ значений отношения мнимой и действительных частей собственной частоты и относительной энергетической погрешности позволяет сделать предположение, что справедливо следующее соотношение:

$$\left| \frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega} \right| \approx \sqrt{\frac{\Psi_1(\omega) + \Psi_3(\omega)}{2\Psi_2(\omega)}} - 1. \quad (26)$$

Другими словами, отношение мнимой и действительной частей собственной частоты довольно точно соответствует относительной энергетической погрешности  $\Delta_1^{(\pi)}$ .

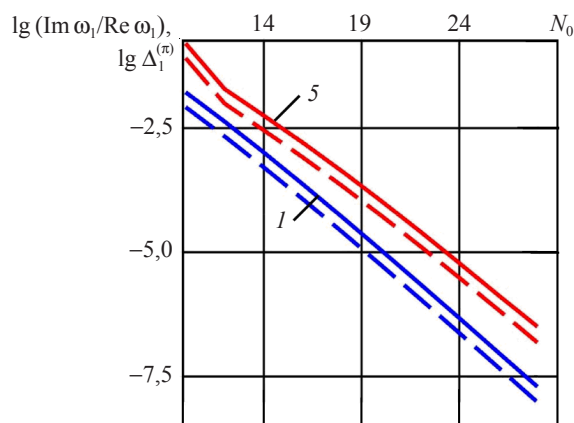


Рис. 5. Сходимость первой и пятой собственных частот относительно числа степеней свободы

На рис. 6а показана зависимость первой собственной частоты для балок переменного сечения, характеризующихся параметром  $h_0$ . Важно отметить что первая собственная частота как функция строительной высоты  $h_0$  является монотонно убывающей. При этом значение максимальной частоты ( $\omega_1 = 6221 \text{ с}^{-1}$  при  $h_0 = 0$ ) отличается от значения первой частоты балки постоянного сечения ( $\omega_1 = 3289 \text{ с}^{-1}$  при  $h_0 = 0,1$ ) почти в два раза. На рис. 6б представлены значения энергетической ошибки  $\lg(\text{Im } \omega_1 / \text{Re } \omega_1)$  для различных значений строительной высоты  $h_0$  в средней точке балки ( $x = 0$ ). Из представленной зависимости видно, что минимальная погрешность реализуется для балки постоянного сечения и для данной модели составляет менее  $10^{-26}$ . С уменьшением величины параметра  $h_0$  величина погрешности быстро нарастает. Так, при  $h_0 = 0,05$  энергетическая ошибка достигает значения 0,0196.

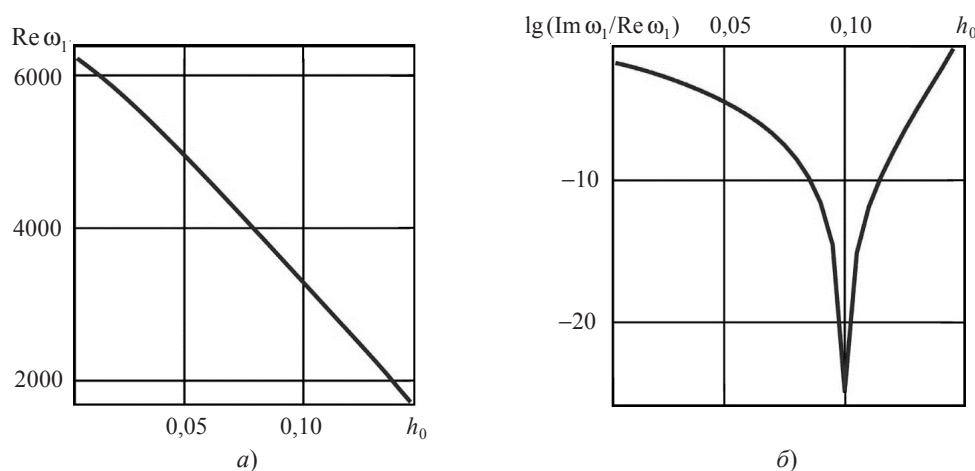


Рис. 6. Зависимости значения первой собственной частоты (а) и величины параметра точности решения (б)

### Заключение

Разработан регулярный вариационный подход нахождения собственных частот и форм колебаний неоднородных балок путем сведения краевой задачи по времени к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изучены и обсуждены свойства квадратичных соотношений и их значение для решения различных спектральных задач. В качестве примера представлены интегродифференциальные формулировки задачи о свободных колебаниях балки с квадратично меняющейся по ее длине строительной высотой. Показано, что предложенные двусторонние критерии качества приближенного решения позволяют получать высокоточные решения для математических моделей малой размерности.

### References

1. De Rosa M.A., Auciello N.M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends. *Computers & Structures*. 1996. Vol. 60. No 2. P. 197–202.
2. Cranch E.T., Adler A. Bending vibrations of variable section beams. *ASME*. 1956. Vol. 23. No 1. P. 103–108.
3. Caruntu D.I. On nonlinear vibration of nonuniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation. *Solid Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 73. P. 109–118.

4. Chaudhari T.D., Maiti S.K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack. *Engineering Fracture Mechanics*. 1999. Vol. 63. P. 425–445.
5. Auciello N.M. On the transverse vibrations of non-uniform beams with axial loads and elastically restrained ends. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2001. Vol. 43. P. 193–208.
6. Elishakoff I. *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions*. Boca Raton, FL. CRC Press. 2005. 147 p.
7. Jang S.K., Bert C.W. Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions. *Journal of Sound and Vibration*. 1989. Vol. 130. P. 342–346.
8. Eisenberger M. Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod. *Applied Acoustics*. 1991. Vol. 34. P. 123–130.
9. Gusev B.V., Saurin V.V. O kolebaniyakh neodnorodnykh balok [On vibrations of inhomogeneous beams]. *Inzhenernyy vestnik Dona. Elektronnyy nauchnyy zhurnal [Engineering Herald of the Don. Electronic scientific journal]*. 2017. No 3. P. 50. [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312) (In Russian).
- Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок. Инженерный вестник Дона. Электронный научный журнал. 2017. №3. С. 50. [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312).
10. Kostin G.V., Saurin V.V. *Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. Mathematical Physics 10*. Berlin. De Gruyter. 2012. 280 p.
11. Kostin, G.V., Saurin V.V. *Dynamics of Solid Structures. Method Using Integrodifferential Relations*. Berlin. De Gruyter. 2017. 305 p.
12. Liu S., Zhang Y., Du Z. et al. Prediction of the influence of temperature field on the Critical Speeds of a Rod-fastened Rotor. *Gas Turbine Technology*. 2011. Vol. 2. P. 20–23.
13. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. No 9. P. 2861–2878.
14. Calim F.F. Free and forced vibrations of non-uniform composite beams. *Composite Structures*. 2009. Vol. 88. No 3. P. 413–423.
15. Pakar M.B. Accurate analytical solution for nonlinear free vibration of beams. *Structural Engineering and Mechanics*. 2012. Vol. 43. No 3. P. 337–347.
16. Kang Y.A., Li X.F. Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2009. Vol. 44. No 6. P. 696–703.
17. Carrera E., Giunta G., Nali P., Petrolo M. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries. *Computers & Structures*. 2010. Vol. 88. No 5–6. P. 283–293.
18. Elishakoff, I. *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions*. Boca Raton, FL. CRC Press, 2005. 147 p.
19. Zhou D., Cheung Y.K. Vibrations of tapered Timoshenko beams in terms of static Timoshenko beam functions. *Journal of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 68. P. 596–602.
20. Ece M.C., Aydogdu M., Taskin V. Vibration of a variable cross-section beam. *Mechanics Research Communications*. 2007. Vol. 34. P. 78–84.
21. Saurin V.V. O primeneniі metoda Galerkina k analizu sobstvennykh kolebaniy uprugikh tel [On the application of Galerkin's method to analyzing eigen vibrations of elastic bodies]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 1. P. 19–29. (In Russian).
- Саурин В.В. О применении метода Галеркина к анализу собственных колебаний упругих тел. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т.81. №1. С. 19– 29.

## INTEGRAL-DIFFERENTIAL RELATIONS IN THE PROBLEM OF FREE BENDING VIBRATIONS OF VARIABLE CROSS-SECTION BEAMS

**Saurin V.V.**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

Issues related to eigen-vibrations of elastic beams of variable cross-section are discussed. It is noted that one of the common features characteristic of boundary-value problems of mathematical physics is certain ambiguity of their formulations. A boundary-value problem of determining eigen-frequencies of a variable cross-section beam in displacements is formulated. By introducing new variables characterizing the behavior of the system, the boundary-value problem is reduced to three ordinary differential equations with variable coefficients. The new variables have a distinct physical meaning. One of the functions is linear density of the pulse and the other is bending moment in the cross-section of the beam. Such a formulation of the problem of free vibrations of a variable cross-section beam makes it possible to reduce the system of differential equations to a single fourth-order equation written in terms of pulse functions. This equation is equivalent to the initial one, formulated in displacements, but has a different form. A method of integral-differential relations, alternative to classical numerical approaches, is described. The possibility of constructing various bilateral energy-based evaluations of the accuracy of approximate solutions resulting from the method of integral-differential relations is studied. The projection approach to analyzing spectral problems of nonlinear beam theory is considered. The efficiency of the method of integral-differential equations is demonstrated, using the problem of free vibrations of a rectangular beam with a constructional depth quadratically varying along its length. Energy-based evaluations of the accuracy of the approximate solutions constructed using polynomial approximations of the sought functions are presented. It is shown that applying standard Bubnov-Galerkin's method to the problem of free vibrations leads to the appearance of complex eigen-frequencies. At the same time, the ratio of the imaginary component to the real one of the eigen-value is a relative inaccuracy of the solution of the boundary-value problem. The introduced numerical algorithm makes it possible to evaluate unambiguously the local and integral quality of numerical solutions obtained.

*Keywords:* projection approaches, method of integral-differential relations, energy-based evaluation of accuracy, differential equations with variable coefficients.