

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-19-29

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К АНАЛИЗУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ*

© 2019 г.

Саурин В.В.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишпинского РАН,
Москва, Российская Федерация*

saurin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.08.2018

Обсуждена актуальность вопросов, связанных с изучением колебаний упругих тел и конструкций. Проведен анализ публикаций и полученных результатов в данной области. Отмечено, что одной из общих характерных черт, присущей всем приближенным методам решения краевых задач, является некоторая неоднозначность в формулировке конечномерных аппроксимаций решения. Сформулирована краевая задача нахождения собственных частот однородной мембраны. Основная идея рассмотренных в этой работе подходов состоит в том, что используемые в уравнениях математической физики переменные всегда можно разделить на две группы, одна из которых состоит из так называемых измеряемых переменных, таких как смещение, скорость, температура и т.д.; другая – из неизмеряемых величин: напряжение, импульс, тепловой поток и т.д. Исследованы вопросы, связанные с различными классическими формулировками спектральных задач, возникающих в теории упругости. Описан метод интегродифференциальных соотношений, который является альтернативным к классическим численным подходам. Исследованы возможности построения различных двусторонних энергетических оценок точности приближенных решений, вытекающих из метода интегродифференциальных соотношений. Введено однопараметрическое семейство квадратичных неотрицательных функционалов, условия стационарности которых совместно с интегродифференциальными ограничениями составляют полную систему уравнений, описывающую динамическое поведение упругих тел. Рассмотрен проекционный подход для решения спектральных задач линейной теории упругости. На примере задачи о свободных колебаниях круглой мембраны показана эффективность метода интегродифференциальных соотношений. Предложены разнообразные энергетические оценки точности приближенного решения, построенного с использованием полиномиальных аппроксимаций искомых функций. Показано, что применение стандартной техники метода Бубнова – Галеркина к задаче о свободных колебаниях приводит к возникновению комплексных собственных частот, причем действительная часть собственного числа является его приближенным значением, а мнимая часть служит оценкой точности решения. Предложенный численный алгоритм позво-

* Выполнено в рамках Госзадания № АААА-А17-117021310380-1 и при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 18-01-00812, 18-08-01346, 18-29-03228, 19-01-00173).

ляет однозначно оценить локальное и интегральное качество полученных численных решений.

Ключевые слова: проекционные подходы, метод интегродифференциальных соотношений, энергетические оценки точности, измеряемые и неизменяемые величины.

Введение

При анализе свободных колебаний упругих тел и конструкций часто используют вариационные подходы. Среди недостатков этих методов можно отметить, что не все задачи математической физики позволяют сформулировать вариационные принципы. При этом довольно трудно построить достоверные оценки точности решения.

Проекционные методы, такие как методы Галеркина [1, 2], Петрова – Галеркина [3–5], имеют ряд преимуществ по отношению к вариационным подходам. Во-первых, эти методы применимы для задач, для которых вариационные принципы еще не сформулированы. Во-вторых, проекционные методы являются более гибкими при составлении системы управляющих уравнений. Недавнее исследование и обзор, касающийся разрывных методов Галеркина, можно найти в [6, 7].

У проекционных подходов, безусловно, есть свои недостатки. В частности, выбор тестовых и пробных функций представляет собой процедуру, которая не всегда однозначна и проста. Иногда бывает трудно обеспечить устойчивость численных алгоритмов и их сходимости, особенно в нелинейных задачах. Так же, как и для вариационных подходов, зачастую довольно трудно построить надежные оценки точности приближенного решения. Математические аспекты проекционных подходов детально обсуждаются в работах [8–10].

Одной из общих характерных черт, присущей всем вышеупомянутым методам, является некоторая неоднозначность в формулировке конечномерных аппроксимаций решения. Не ясно, какие из соотношений нужно ослаблять, а какие должны быть выполнены точно. При составлении проекционной системы уравнений имеет большое значение соответствующий выбор пробных и тестовых функциональных пространств.

Следует отметить, что в научной литературе можно найти много результатов в области анализа колебаний мембран, как аналитических, так и численных (см., например, [11–15]).

В статье значительное внимание уделяется обсуждению техники решения спектральных задач на основе метода интегродифференциальных соотношений и проекционных подходов. Одной из первых работ в этой области была статья [16]. Детально обсуждаются приемы, позволяющие однозначно сформулировать краевую задачу нахождения собственных значений и форм, выбрать пространства тестовых и пробных функций, а также построить энергетические критерии точности приближенных решений.

1. Энергетические оценки точности приближенных решений

Основная идея рассмотренных в настоящей статье подходов состоит в том, что используемые в уравнениях математической физики переменные всегда можно разделить на две группы: первая группа состоит из так называемых измеряемых переменных, таких как смещение, скорость, температура и т.д.; вторая – из неизмеряе-

мых величин: напряжение, импульс, тепловой поток и т.д. В то же время разрешающие уравнения можно разделить на три группы:

- уравнения состояния, связывающие измеряемые и неизмеряемые неизвестные;
- начальные и граничные условия;
- законы баланса и непрерывности.

Уравнения из первой группы содержат информацию о внутренних свойствах исследуемого объекта. Второй тип уравнений отражает влияние среды на рассматриваемую систему. Третий – описывает фундаментальные физические явления. Отметим, что законы из второй и третьей групп не зависят от свойств среды. В вычислительной физике предполагается, что некоторые определяющие соотношения ослабляются. Например, в линейной теории упругости принцип минимальной потенциальной энергии [17] отражает равновесное состояние тела в интегральном смысле и относится к третьей группе уравнений. Суть метода интегродифференциальных соотношений [17, 18], состоит в том, что только уравнения первого типа рассматриваются в интегральной форме, тогда как другие уравнения должны быть точно выполнены. Начально-краевая задача, модифицированная в соответствии с этим подходом, может быть, например, сведена к минимизации неотрицательного функционала относительно всех допустимых переменных [19–21].

Как уже упоминалось, разрешающие уравнения можно разделить на три группы. Обсудим такое разделение на примере задачи линейной упругости, где уравнения состояния

$$\mathbf{p} - \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{0} \quad (1)$$

могут быть отнесены к первой группе. Здесь $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ – тензор деформаций, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{p}$ – вектор плотности импульсов, ρ – объемная плотность материала, $\mathbf{C}$ – тензор модулей упругости. Двоеточие означает двойное скалярное произведение. Вторая группа состоит из начальных условий

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t_0), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0}, \quad (2)$$

граничных условий

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1(x, t), \quad x \in \Gamma_1, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= q_2(x, t), \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (3)$$

а также специальных геометрических ограничений

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4)$$

где $\mathbf{u}_1(x, t)$ и $q_2(x, t)$ – заданные граничные функции, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к границе тела, t_0 – начальный момент времени.

Уравнение динамического равновесия (уравнение баланса)

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

представляет третью группу.

Возведя в квадрат левую часть первого соотношения из уравнений (1), получим:

$$T_d = \frac{1}{2\rho} \left(\mathbf{p} - \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\rho} - 2 \frac{\mathbf{p}}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \geq 0. \quad (6)$$

Величина T_d , равная нулю при точном решении системы (1)–(5), для приближенного решения отражает рассогласование плотностей кинетических энергий системы. Предполагается, что $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ являются переменными задачи. Можно выделить три энергетических члена, имеющих различную физическую трактовку:

- $T_p = \mathbf{p}^2/(2\rho)$ – плотность кинетической энергии, зависящая только от неизмеряемых переменных, а именно импульсов;
- $T_{pu} = (\mathbf{p}/2)(\partial \mathbf{u}/\partial t)$ – плотность энергии, выраженная через измеряемые (скорости точек тела) и неизмеряемые величины;
- $T_u = (\rho/2)(\partial \mathbf{u}/\partial t)^2$ – плотность энергии, зависящая только от геометрических (измеряемых) переменных.

Квадрат левой части второго уравнения в (1) отражает невязку в плотностях упругой энергии системы:

$$\Pi_d = \frac{\mathbf{C}^{-1} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) : (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0)}{2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2} - 2 \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^0}{2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^0 : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0}{2} \geq 0. \quad (7)$$

Здесь предполагается, что $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ являются переменными задачи. Как и в предыдущем случае, можно выделить три различных энергетических члена:

- $\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$ – плотность упругой энергии, зависящая только от неизмеряемых переменных, а именно от напряжений;
- $\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^2/2$ – плотность энергии, выраженная через измеряемые (деформации) и неизмеряемые величины;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^0 : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0/2$ – плотность энергии, зависящая от геометрических (измеряемых) переменных.

Представление невязок в квадратичном виде (6) и (7) обладает рядом преимуществ. Во-первых, при любых приближенных действительных полях перемещений напряжений и импульсов эти величины неотрицательны, как квадраты функций. Во-вторых, для точного решения задачи (1)–(5) значения невязок T_d и Π_d строго равны нулю. Другими словами, для довольно точных аппроксимаций искомых функций $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ величины T_d и Π_d имеют малые значения, то есть справедливы соотношения:

$$T_d \ll \frac{\mathbf{p}^2}{2\rho}, \quad T_d \ll \frac{\mathbf{p}}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad T_d \ll \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \quad (8)$$

для кинетической энергии и

$$\Pi_d \ll \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}, \quad \Pi_d \ll \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^0}{2}, \quad \Pi_d \ll \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^0 : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0}{2} \quad (9)$$

для потенциальной энергии. Неравенства (8) и (9) позволяют построить разнообразные оценки точности приближенного решения. Следует отметить, что в некоторые моменты времени значения потенциальной и кинетической энергии могут быть равны нулю. Однако это обстоятельство не снижает общности оценок (8) и (9).

2. Формулировка краевой задачи о собственных колебаниях мембраны

По аналогии с формулировкой начально-краевой задачи линейной теории упругости (1)–(5) можно описать свободные колебания мембран.

Рассмотрим упругую мембрану, занимающую область $\Omega(x_1, x_2)$ с границей Γ . Определяющее соотношение между физическими и геометрическими параметрами можно записать в виде

$$\sigma = \tau \varepsilon. \quad (10)$$

Здесь σ – вектор-функция напряжений с компонентами

$$\sigma_1 = \tau \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \sigma_2 = \tau \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (11)$$

τ – натяжение, ε – вектор-функция деформаций с компонентами

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\}^T, \quad (12)$$

w – компонента вектора перемещений $\mathbf{u}$ в направлении оси x_3 . Динамическое уравнение мембраны выражается через вектор напряжений:

$$\nabla \cdot \sigma - \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

где p – функция плотности импульса,

$$p = \rho \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (14)$$

Будем исследовать колебания круглой мембраны с постоянной толщиной и радиусом r при $\rho = \tau = r = 1$. Введение реальных значений параметров приведет к изменению результирующих численных значений, но не изменит качественную картину собственных колебаний мембраны и точность решения. Считается, что мембрана закреплена по контуру

$$w(x_1, x_2) \Big|_{x_1^2 + x_2^2 = 1} = 0. \quad (15)$$

Формулировка задачи о собственных колебаниях мембраны получается с помощью метода разделения переменных. Представим все неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} w(t, x_1, x_2) &= e^{i\omega t} \tilde{w}(x_1, x_2), \quad p(t, x_1, x_2) = e^{i\omega t} \tilde{p}(x_1, x_2), \\ \sigma_1(t, x_1, x_2) &= e^{i\omega t} \tilde{\sigma}_1(x_1, x_2), \quad \sigma_2(t, x_1, x_2) = e^{i\omega t} \tilde{\sigma}_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка (16) в соотношения (10)–(14) позволяет сформулировать краевую задачу о собственных колебаниях мембраны:

$$\sigma_1 = \tau \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \sigma_2 = \tau \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (17)$$

$$p - i\omega \rho w = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - i\omega p = 0 \quad (19)$$

с граничными условиями (15). Здесь и в дальнейшем знак тильда опущен.

3. Проекционная формулировка задачи о собственных колебаниях мембраны

Для построения проекционного алгоритма предполагается, что соотношения (17) и (18) выполнены точно. Тогда уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\eta = 0, \quad \eta = \omega^2 \rho w + \tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right). \quad (20)$$

Для решения задачи применяется конечномерная полиномиальная аппроксимация функции перемещений

$$w = (x_1^2 + x_2^2 - 1) \sum_{k+l=0}^{N_w} w^{(kl)} x_1^k x_2^l. \quad (21)$$

Здесь $w^{(kl)}$ – неизвестные коэффициенты, $N_w > 0$ – степень полиномиальной аппроксимации. Количество членов n_w в разложении (21) определяется формулой

$$n_w = \frac{(N_w + 1)(N_w + 2)}{2}. \quad (22)$$

Видно, что аппроксимация (21) точно удовлетворяет граничному условию (15). После подстановки (21) в (20) получается следующее соотношение:

$$\eta = \Phi_w(x_1, x_2, \lambda) = \sum_{i=0}^{n_w} a_i \phi_i(x_1, x_2, \lambda), \quad \lambda = \omega^2, \quad (23)$$

которое нужно приблизить к нулю соответствующим выбором коэффициентов a_i из вектора проектных параметров $\mathbf{a}$, составленного из всех параметров $w^{(kl)}$. В соответствии с основной идеей метода Галеркина в качестве базисных функций используются полиномы $\phi_i(x_1, x_2, \lambda)$ из (23). Система линейных уравнений для нахождения констант a_i получается в соответствии с формулой

$$\int_{\Omega} \Phi_w(x_1, x_2, \lambda) \phi_j(x_1, x_2, \lambda) dx_1 dx_2 = 0, \quad j = 1, \dots, n_w. \quad (24)$$

Отметим, что в классическом подходе, основанном на принципе Гамильтона, собственные числа λ линейно входят в разрешающие уравнения. В нашем случае параметр λ входит квадратично в уравнения (24). Собственные числа $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, 2N$, находятся из условия равенства нулю детерминанта этой системы.

Можно показать, что если вектор $\mathbf{a}$ является точным нетривиальным решением системы (24), то значение интеграла

$$I = \int_{\Omega} \eta^2 d\Omega \quad (25)$$

равно нулю.

Следующий естественный критерий

$$\Delta_M = I(\operatorname{Re} \tilde{a}^{(i)}, \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_i) < \mu_i, \quad (26)$$

где μ_i – положительная действительная величина, характеризующая точность решения. Однако при всей своей простоте эта оценка обладает существенным недостатком, так как собственный вектор $\mathbf{a}^{(i)}$, входящий в выражение (26), зависит от одной неопределенной константы. При этом мнимая часть собственного значения $\operatorname{Im} \lambda_i$ может служить неявной оценкой точности решения. Для построения оценок

точности приближенного решения в качестве собственного числа λ будем использовать его действительную часть $\tilde{\lambda} = \text{Re } \lambda$. В дальнейшем знак тильда опускается.

Возведем в квадрат левую часть уравнения состояния (18):

$$\xi^2 = \frac{(p - i\rho\omega w)^2}{2\rho}. \quad (27)$$

В соответствии с (6) выражение для ξ^2 является линейной комбинацией трех различных функций плотностей кинетической энергии T_p , T_{pw} , T_w .

Заметим, что задача (20) зависит только от перемещений. При этом импульсы p не входят явно в эту формулировку. Чтобы исключить функцию плотности импульса p из соотношения (27), рассмотрим соотношение (19). Подставим в него выражения для компонент напряжений (17) и выразим импульсы p из этого соотношения:

$$ip = \frac{\tau}{\omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]. \quad (28)$$

Принимая во внимание (28), выражение для энергетической невязки (27) запишем в виде

$$\xi^2 = -\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\tau}{\omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] + \rho w \right)^2 \leq 0. \quad (29)$$

Учитывая, что задача сформулирована только в перемещениях, выражения для кинетических энергий можно представить так:

$$T_p = \frac{\tau^2}{2\rho\omega^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]^2, \quad T_{pw} = -\frac{\tau w}{2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \quad T_w = \frac{\rho w^2 \omega^2}{2}. \quad (30)$$

Тогда выражения (29) с использованием (30) примут вид

$$\xi^2 = -[T_p - 2T_{pw} + T_w] \leq 0. \quad (31)$$

Используя формулы (29) и (30), можно определить относительные энергетические погрешности приближенного решения

$$\varsigma_p = -\frac{\xi^2}{2T_p} \geq 0, \quad \varsigma_{pw} = -\frac{\xi^2}{T_{pw}} \geq 0, \quad \varsigma_w = -\frac{\xi^2}{2T_w} \geq 0. \quad (32)$$

Заметим, что числа, определенные в (32), не зависят от неопределенной константы, которая входит в выражение для собственного вектора.

Для того чтобы использовать относительные погрешности (32) в критериях точности, нужно ввести малые положительные числа $\mu_p > 0$, $\mu_{pw} > 0$ и $\mu_w > 0$. Тогда удовлетворительным решением будем считать такое, для которого справедливо хотя бы одно из соотношений

$$\varsigma_p \leq \mu_p, \quad \varsigma_{pw} \leq \mu_{pw}, \quad \varsigma_w \leq \mu_w. \quad (33)$$

На рис. 1а представлены зависимости мнимых частей первых пяти собственных значений (отмечены соответствующими номерами) от значения степени полиномиальной аппроксимации перемещений N_w . Стоит отметить быстрое уменьшение мнимой части с ростом N_w , скорость ее стремления к нулю выше экспоненциальной (выпуклость вверх). Так, уже при $N_w = 16$ относительная погрешность вычисления пятого собственного значения ($\lambda = -40,706$) не превосходит $10^{-15}\%$.

Зависимости, показанные на рис. 1б, также характеризуют скорость сходимости приближенных собственных значений.

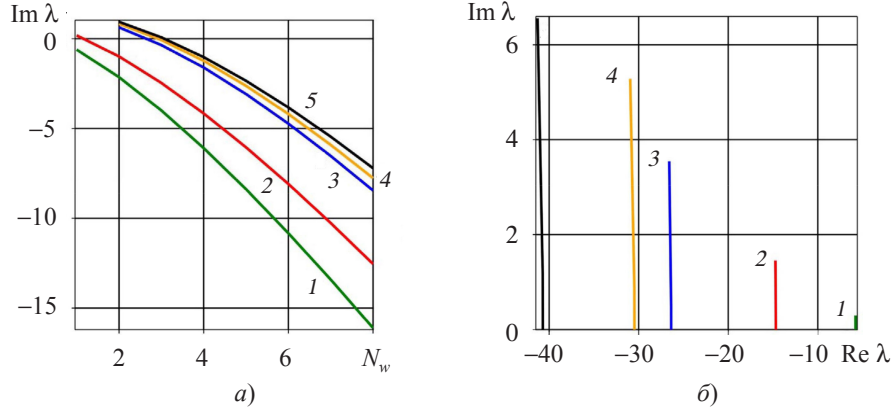


Рис. 1

На этом рисунке показаны линии, соединяющие на комплексной плоскости собственные значения, полученные последовательно для различных степеней полиномиальной аппроксимации $N_w = 1, 2, \dots, 8$. Видно, что линии «втыкаются» вертикально в действительную ось (наклон касательных к этим линиям близок к 90°).

На рис. 2а представлены в логарифмическом масштабе зависимости интеграла I , введенного соотношением (25), от степени аппроксимации N_w для различных собственных чисел. Из вида представленных зависимостей следует, что они качественно повторяют поведение комплексных частей собственных значений λ_i , показанных на рис. 1б. Количественно эти зависимости значительно различаются. Однако сравнительный анализ значений комплексных частей собственных чисел и величин относительных погрешностей I позволяет сделать предположение, что справедливо следующее соотношение:

$$\text{Im } \lambda \approx \sqrt{I}. \quad (34)$$

На рис. 2б показана разность $\sqrt{I} - \text{Im } \lambda_1$, вычисленная для первого собственного числа, для различных значений степени аппроксимации.

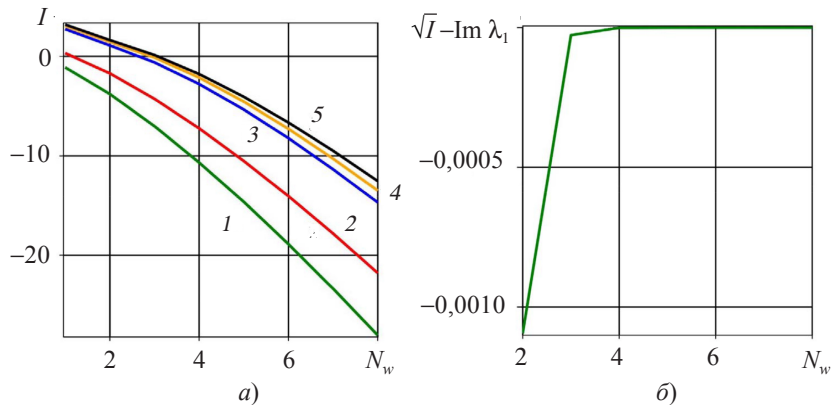


Рис. 2

Следует отметить, что собственный вектор вычисляется с точностью до одной свободной константы C_i , где i – номер собственного значения. Для того чтобы сохранить корректность выражения (34), этот параметр находится из условия

$$\int_{\Omega} (C_i w_i(x_1, x_2))^2 d\Omega = 1. \quad (35)$$

Здесь $w_i(x_1, x_2)$ – функция перемещений, соответствующая собственному значению с номером i . На рис. 2б видно, что с увеличением значения параметра N_w разница между квадратным корнем из величины относительной энергетической оценки и мнимой частью собственного числа быстро стремится к нулю. Это подтверждает справедливость соотношения (34) и тот факт, что мнимая часть собственного числа служит оценкой точности приближенного решения.

Заключение

Рассмотрена модификация проекционного подхода для решения спектральных задач. На примере задачи о свободных колебаниях круглой мембраны показана эффективность разработанной методики. Предложены и обоснованы разнообразные энергетические оценки точности приближенного решения, как интегральные (энергетические), так и локальные. Показано, что действительная часть собственного числа является его приближенным значением, а мнимая часть служит оценкой точности решения.

Разработанный подход решения краевых задач может применяться без существенной модификации и для других задач математической физики, в том числе и нелинейных.

Список литературы

1. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. М.: Мир, 1987. 542 с.
2. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. P. 229–256.
3. Atluri S.N., Zhu T. A new meshless local Petrov – Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*. 1999. P. 117–127.
4. Atluri S.N., Shen S. The meshless local Petrov – Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2002. Vol. 3. No 1. P. 11–51.
5. Heinz H.B., Matouskova E., Reich S. Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples. *Nonlinear Analysis*. 2004. No 56. P. 715–738.
6. Hesthaven J.S., Warburton T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Texts in Applied Mathematics. Vol. 54. New York: Springer, 2008. 502 p.
7. Bochev P.B., Gunzburger M.D. *Least-Squares Finite Element Methods*. Applied Mathematical Sciences. Vol. 166. New York: Springer, 2009. 660 p.
8. Adams R. A. *Sobolev Spaces*. Boston: Academic Press, 1975. 320 p.
9. Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике*. М.: Мир, 1985. 589 с.
10. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач*. М.: Мир, 1980. 512 с.
11. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*. Т. 1. М.–Л.: ГТТИ, 1933. 525 с.
12. Стрэтт Дж. В. (Лорд Релей) *Теория звука*. Т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1945. 500 с.
13. Kostin G.V., Saurin V.V. Analysis of triangle membrane vibration by FEM and Ritz method with smooth piecewise polynomial basis functions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2001. Vol. 81. No 4. P. 873–874.

14. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Собственные колебания однородной эллиптической мембраны. *Изв. РАН. МТТ*. 2000. № 1. С. 179–190.
15. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications*. Chapman & Hall CRC Press, 2004. 260 p.
16. Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальных соотношений для анализа собственных колебаний мембран. *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. №3. С. 459–473.
17. Kostin G.V., Saurin V.V. *Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. Mathematical Physics 10*. Berlin: De Gruyter, 2012. 280 p.
18. Kostin G.V., Saurin V.V. *Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations*. Berlin: De Gruyter, 2017. 305 p.
19. Aschemann H., Kostin G.V., Rauh A., Saurin V.V. Approaches to control design and optimization in heat transfer problems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2010. Vol. 49. No 3. P. 380–391.
20. Aschemann H., Kostin G.V., Saurin V.V. Multivariable trajectory tracking control for a heated rod based on an integro-differential approach to control-oriented modeling. *Proceedings of MMAR 2016. Miedzydroje. Poland. IEEE*. 2016. P. 680–685.
21. Deutscher J., Harkort C. Entwurf endlich-dimensionaler Regler für lineare verteilt-parametrische Systeme durch Ausgangsbeobachtung. *Automatisierungstechnik*. 2010. Vol. 58. No 8. P. 435–446 (In German).

References

1. Washizu K. *Variation Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford–New York: Pergamon Pr. 1982. 630 p.
2. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1994. Vol. 37. P. 229–256.
3. Atluri S.N., Zhu T. A new meshless local Petrov – Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput. Mech.* 1999. P. 117–127.
4. Atluri S.N., Shen S. The meshless local Petrov – Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *CMES*. 2002. Vol. 3. No 1. P. 11–51.
5. Heinz H.B., Matouskova E., Reich S. Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples. *Nonlinear Analysis*. 2004. No 56. P. 715–738.
6. Hesthaven J.S., Warburton T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Texts in Applied Mathematics*. Vol. 54. New York. Springer. 2008. 502 p.
7. Bochev P.B., Gunzburger M.D. *Least-Squares Finite Element Methods. Applied Mathematical Sciences*. Vol. 166. New York. Springer. 2009. 660 p.
8. Adams R. A. *Sobolev Spaces*. Boston. Academic Press. 1975. 320 p.
9. Rektorys K. *Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering*. Dordrecht–Boston. D. Reidel Publishing Co. 1975. 571 p.
10. Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland. 1978. 529 p.
11. Courant R., Gilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1. New York. Interscience publishers Inc. 1924. 556 p.
12. Strutt J.W. (Rayleigh). *The Theory of Sound*. Vol. 1. London. Macmillan and Co. 1877. 326 p.
13. Kostin G.V., Saurin V.V. Analysis of triangle membrane vibration by FEM and Ritz method with smooth piecewise polynomial basis functions. *J. Appl. Math. Mech.* 2001. Vol. 81. No 4. P. 873–874.
14. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Sobstvennye kolebaniya odnorodnoy ellipticheskoy membrany [Eigenvalue problems of a homogeneous elliptic membrane]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2000. No 1. P. 179–190 (In Russian).
15. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications*. Chapman & Hall CRC Press. 2004. 260 p.
16. Kostin G.V., Saurin V.V. The method of integrodifferential relations for analysing the natural oscillations of membranes. *J. Appl. Math. Mech.* 2009. Vol. 73. No 3. P. 326–355.

17. Kostin G.V., Saurin V.V. *Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. Mathematical Physics 10*. Berlin. De Gruyter. 2012. 280 p.
18. Kostin G.V., Saurin V.V. *Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations*. Berlin. De Gruyter, 2017. 305 p.
19. Aschemann H., Kostin G.V., Rauh A., Saurin V.V. Approaches to control design and optimization in heat transfer problems. *J. Comp. Sys. Sci. Int.* 2010. Vol. 49. No 3. P. 380–391.
20. Aschemann H., Kostin G.V., Saurin V.V. Multivariable trajectory tracking control for a heated rod based on an integro-differential approach to control-oriented modeling. *Proceedings of MMAR 2016. Miedzydroje. Poland. IEEE*. 2016. P. 680–685.
21. Deutscher J., Harkort C. Entwurf endlich-dimensionaler Regler für lineare verteilt-parametrische Systeme durch Ausgangsbeobachtung. *Automatisierungstechnik*. 2010. Vol. 58. No 8. P. 435–446.

ON THE APPLICATION OF GALERKIN'S METHOD TO ANALYZING EIGEN VIBRATIONS OF ELASTIC BODIES

Saurin V.V.

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

The topicality of the issues related to studying vibrations of elastic bodies and structures is discussed. The publications and results obtained in this field have been analyzed. It is noted that one of the common characteristics of all the approximate methods of analyzing boundary-value problems is certain ambiguity in formulating finite-dimensional approximations of the solution. A boundary-value problem of determining eigen-frequencies of a homogeneous membrane has been formulated. The basic idea of the approaches in question is that variables used in equations of mathematical physics can always be divided into two groups, one of which consists of the so-called measurable variables, such as displacement, velocity, temperature etc., and the other one includes non-measurable ones, such as stress, pulse, heat flow etc. Issues related to various classical formulations of spectral problems arising in the theory of elasticity have been investigated. The method of integral-differential relations is described, which is an alternative to classical numerical approaches. The possibility of constructing various bilateral energy-based evaluations of the accuracy of approximate solutions, following from the method of integral-differential relations has been studied. A one-parameter family of quadratic non-negative functionals has been introduced, the stationarity condition of which together with integral-differential constraints form a complete equation set describing dynamic behavior of elastic bodies. A projection approach to analyzing spectral problems of linear plasticity theory has been considered. Using the example of the problem of free vibrations of a circular membrane, the effectiveness of the method of integral-differential relations is demonstrated. Various energy-based evaluations of an approximate solution constructed using polynomial approximations of the sought functions are proposed. Application of the standard technique of Bubnov-Galerkin's method to the problem of free vibrations is shown to lead to the appearance of complex eigen-frequencies, the real part of the eigenvalue being its approximate value, whereas its imaginary part being able to serve as an evaluation of the accuracy of the solution. The proposed numerical algorithm makes it possible to uniquely evaluate the integral quality of the obtained numerical solutions.

Keywords: projection approaches, integral-differential relation method, energy-based evaluations of accuracy, measurable and non-measurable values.