НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛОВ

Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Киселев Ф.Б., Семенов Д.М., Клементьев П.Д.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

Исследование связано с применением асимптотического метода осреднения к материалам с искусственной структурой (метаматериалам). Метаматериалы могут иметь специфические свойства, такие как отрицательный коэффициент Пуассона [1,2], связанность растяжения–изгиба или растяжения–кручения [3,4]. Особенностью таких материалов является периодичность структуры. Количество ячеек в метаматериале может быть большим, теоретически – бесконечным.

Здесь важно сформулировать фундаментальный вопрос. Действительно ли метаматериал является материалом или структурным элементом? Этот вопрос следует формулировать относительно конкретного механического свойства. Если свойство остается верным для бесконечного числа ячеек, то мы рассматриваем такой метаматериал как материал. Напротив, если свойство справедливо только для конечного числа ячеек и исчезает, когда число ячеек приближается к бесконечности, то такой метаматериал должен рассматриваться как структурный элемент. Нужно подчеркнуть, что это определение носит теоретический характер. На практике все метаматериалы имеют конечное число ячеек.

Например, свойство метаматериала иметь отрицательный коэффициент Пуассона сохраняется для произвольного числа ячеек, включая их бесконечное число [1,2]. Таким образом, метаматериалы – это действительно материалы с отрицательным значением коэффициента Пуассона. С другой стороны, ниже мы покажем, что упомянутые выше свойства связанности сохраняются только для конечного числа ячеек для метаматериалов, рассмотренных в литературе [3,4]. Следовательно, эти метаматериалы должны рассматриваться как элемент структуры.

Асимптотический метод осреднения был предложен Н.С. Бахваловым [5] именно для сред с периодической структурой и, следовательно, является подходящим инструментом для изучения метаматериалов. Ниже мы рассмотрим связанность растяжения/сжатия с кручением.

Рассмотрим материал, периодический во всех направлениях, то есть обладающий трехмерной периодичностью. Рассмотрим асимптотическое разложение перемещений с точностью до второго приближения:

$$u_i = v_i(\boldsymbol{x}) + \varepsilon N^1_{ipq}(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon^2 N^2_{ipq_1q_2}(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q_1q_2}(\boldsymbol{x}) + O(\varepsilon^3).$$

Тогда напряжения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = P_{ijpq} v_{p,q} + \varepsilon P_{ijpq_1q_2} v_{p,q_1q_2}. \qquad (1)$$

В формуле (1) локальные функции P_{ijpq} и $P_{ijpq_1q_2}$ определяются как решения локальных задач с условием периодичности на границе ячейки периодичности. Используя (1), мы можем определить средние напряжения:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = A_{ijpq} \varepsilon_{pq} + \varepsilon B^{(1)}_{ijpq_1q_2} \bar{\kappa}_{pq_1q_2},$$

где ε_{pq} малые деформации, а обобщенные кривизны определены как $\bar{\kappa}_{pq_1q_2} = v_{p,q_1q_2}$, $A_{ijpq} = \langle P_{ijpq_1q_2} \rangle$, $B^{(1)}_{ijpq} = \langle P_{ijpq_1q_2} \rangle$.

Теперь перейдем к определению средних моментных напряжений. Моменты M_i вектора напряжений **S** относительно начала координат определяются как

$$M_i = \epsilon_{ist} x_s S_t.$$

Компоненты вектора напряжений S_t определяются стандартным образом, т.е. $S_t = \sigma_{tr} n_r$. Вектор **S** действует на площадке с внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n}$ в точке $\boldsymbol{x}$. Согласно идее двух масштабов, мы представим $\boldsymbol{x}$ в каждой ячейке как сумму $x_s = x_s^c + \varepsilon \xi_s$, где x_i^c координаты центра ячейки, а ξ_s – координаты на микроуровне точки внутри ячейки. Тогда осредненные компоненты момента **M** имеют вид:

$$\langle M_i \rangle = \epsilon_{ist} x_s^c \langle \sigma_{tr} \rangle n_r + \epsilon_{ist} \varepsilon \langle \xi_s \sigma_{tr} \rangle n_r,$$
$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{x} \times \langle \mathbf{S} \rangle + \langle \mathbf{m} \rangle \cdot \mathbf{n}. \qquad (2)$$

Первый член в (2) представляет собой момент осредненного вектора $\langle \mathbf{S} \rangle$, а $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{n}$. Этот член находится в соответствии с обычной линейной теорией упругости. Второй член представляет собой внутренний момент **m**, не описываемый классической теорией упругости. Этот тензор имеет компоненты $\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon \epsilon_{ist} \langle \xi_s \sigma_{tr} \rangle$. Подстановка σ_{ij} из (1) в (2) дает второе определяющее соотношение:

$$\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon B_{irpq}^{(2)} \varepsilon_{pq} + \varepsilon^2 D_{irpq_1q_2} \bar{\kappa}_{pq_1q_2},$$

где $B_{irpq}^{(2)} = \epsilon_{ist} \langle \xi_s P_{trpq} \rangle$, $D_{irpq_1q_2} = \epsilon_{ist} \langle \xi_s P_{trpq_1q_2} \rangle$.

Теперь связанные определяющие соотношения представляются в виде:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = A_{ijpq} \varepsilon_{pq} + \varepsilon B_{ijpq_1q_2}^{(1)} \bar{\kappa}_{pq_1q_2}, \qquad (3)$$
$$\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon B_{irpq}^{(2)} \varepsilon_{pq} + \varepsilon^2 D_{irpq_1q_2} \bar{\kappa}_{pq_1q_2}.$$

Неклассические теории упругости (например, теория Коссера [6]) могут рассматриваться как частный случай уравнений (3). Из формул (3) ясно, что в осредненном материале обеспечивается связанность напряжения с моментами только для $\varepsilon > 0$, т.е. для конечного числа ячеек периодичности. Если $\varepsilon \to 0$, тогда $\langle m_{ir} \rangle \to 0$. Это означает, что осредненный материал не проявляет связанности на макроуровне для бесконечного числа клеток. Следовательно, он не должен рассматриваться как материал со свойством связанности. Т.е. никакая неклассическая упругая среда не может быть получена осреднением, если компоненты композитной среды подчиняются классическим уравнениям линейной упругости, а ячейки состыкованы в декартовом стиле.

Теперь мы попытаемся получить связанность растяжения/сжатия с кручением, используя только анизотропию и обычный закон классической теории упругости. Рассмотрим асимптотическое разложение первого порядка:

$$u_i = v_i(\boldsymbol{x}) + \varepsilon N_{ipq}^1(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q}(\boldsymbol{x}) + O(\varepsilon^2).$$

Получаемое при этом осредненное определяющее соотношение для анизотропной среды имеет вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = A_{ijpq} \varepsilon_{pq}.$$

Нужно отметить, что вычисление A_{ijpq} с использованием локальных задач для одной ячейки периодичности является правильными только для декартовой системы координат. Необходимая связанность будет иметь место, если жесткости A_{1333} и A_{2333} не равны нулю. Как будет видно ниже, они оказываются равными нулю для любой ячейки, которая имеет форму, которая симметрична при повороте на 180^0. Пример такой ячейки показан на рис. 1, слева.

Однако связанность возможно получить, если рассматривать ячейки, состыкованные в стиле цилиндрической системы координат. А именно, растяжение/сжатие связано с кручением вдоль оси x_3, если эффективный модуль упругости $A_{\varphi zzz}$ не равен нулю, что следует из закона Гука:

$$\langle\sigma_{rr}\rangle = A_{rrrr}\varepsilon_{rr} + A_{rr\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{rrzz}\varepsilon_{zz},$$
$$\langle\sigma_{\varphi\varphi}\rangle = A_{\varphi\varphi rr}\varepsilon_{rr} + A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{\varphi\varphi zz}\varepsilon_{zz},$$
$$\langle\sigma_{zz}\rangle = A_{zzrr}\varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{zzzz}\varepsilon_{zz} + A_{zzz\varphi}\varepsilon_{z\varphi},$$

и

$$\langle\sigma_{r\varphi}\rangle = A_{r\varphi r\varphi}\varepsilon_{r\varphi},$$
$$\langle\sigma_{\varphi z}\rangle = A_{\varphi z\varphi z}\varepsilon_{\varphi z} + A_{\varphi zzz}\varepsilon_{zz},$$
$$\langle\sigma_{rz}\rangle = A_{rzrz}\varepsilon_{rz}.$$

Здесь следует отметить, что этот тип связанности определяется значением эффективного модуля $A_{\varphi zzz}$ и, следовательно, не зависит от числа ячеек периодичности. Таким образом, если модуль $A_{\varphi zzz}$ не равен нулю, тогда метаматериал является истинным материалом с связанностью растяжения/сжатия и кручения. Можно ввести меры связанности как

$$\beta_1 = (M_3/L)/F_3\,,\quad \beta_2 = F_3/(M_3/L),$$

где L – характерный размер в направлении, перпендикулярном оси вращения x_3, $F_3 = \int_A \sigma_{zz} dA$ – сила растяжения/сжатия и $M_3 = \int_A r\sigma_{z\varphi} dA$ – вращательный момент.

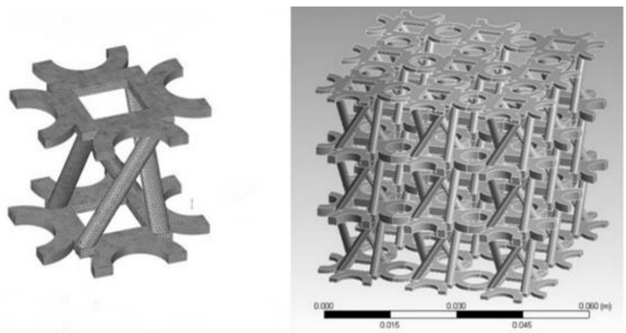

Рис. 1. Типичная ячейка и пакет ячеек, формирующих метаматериал.

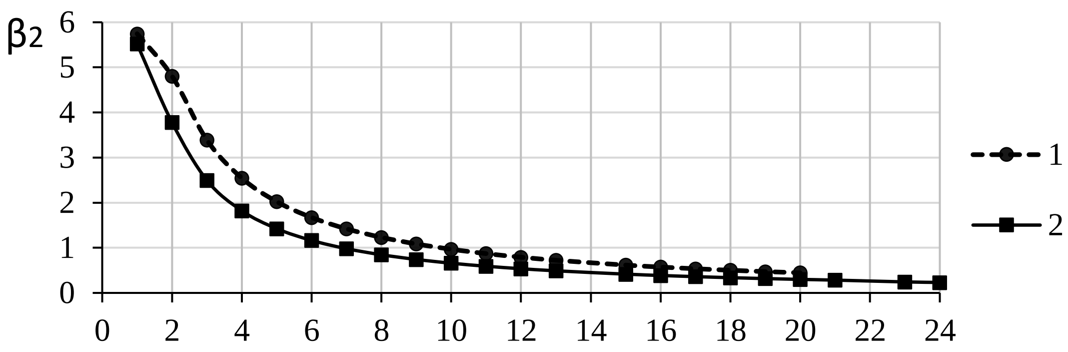

Рис. 2. Зависимость коэффициента связанности β_2 от числа ячеек N вдоль направления осей x_1 или x_2. (Расчеты выполнены с квадратичными (1) и линейными (2) конечными элементами.)

Для изучения связанности растяжения/сжатия и кручения мы смоделировали закручивание вследствие заданного поворота в коротком сегменте стержня (рис. 1, справа). Задача решалась методом конечных элементов в трехмерной постановке. Расчет проведен для структуры, состоящей из трех слоев ячеек по оси x_3 и N ячеек по осям x_1 и x_2 (N = 1, 2, ..., 24) (рис. 1, справа). Основание закреплено, а на верхней поверхности задавалось вращение вокруг оси x_3 на 10^0. Свойства материала стержня были приняты следующим образом: модуль Юнга составляет 200000 МПа, коэффициент Пуассона равен 0,3. Если число ячеек N увеличивается, то коэффициент связанности стремительно приближается к нулю, как следует из графика на рис. 2.

Иная картина наблюдается для ячеек, состыкованных в стиле цилиндрической системы координат. Соответствующий график показан на рис. 3. В этом случае задавалась осевое сжатие, а вычислялся крутящий момент.

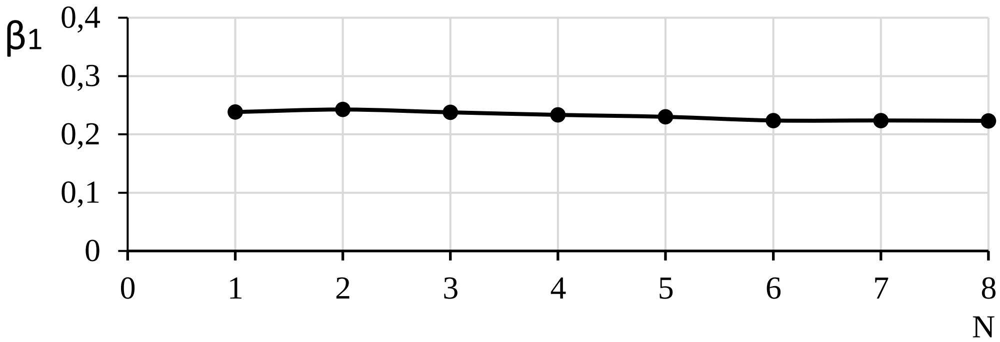

Рис. 3. Зависимость коэффициента связанности β_1 от числа ячеек вдоль радиуса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-51-53008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Minghui Fu, Fengming Liu, Lingling Hu. *A novel category of 3D chiral material with negative Poisson's ratio* // Composites Science and Technology. – 2018. – Vol.160. – Pp.111-118.
2. Ming-Hui Fu, Bin-Bin Zheng, Wei-Hua Li. *A novel chiral three-dimensional material with negative Poisson's ratio and the equivalent elastic parameters* // Composite Structures. – 2017. – Vol.176. – Pp.442-448.
3. Bin-Bin Zheng, Rong-Chang Zhong, Xuan Chen, Ming-Hui Fu, Ling-Ling Hu. *A novel metamaterial with tension-torsion coupling effect* // Materials and Design. – 2019. – Vol.171. – Pp.1-9.
4. Shengyu Duan, Weibin Wen, Daining Fang. *A predictive micropolar continuum model for a novel three-dimensional chiral lattice with size effect and tension-twist coupling behavior* // J. Mechanics and Physics of Solids. – 2018. – Vol.121. – Pp.23-46.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. – 352 с.
6. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. *Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist* // Science. – 2017. – Vol.358. – Pp.1072-1074.