МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

Задачи консолидации предполагают изучение уплотнения грунта под нагрузкой при возможности оттока жидкости. Они, как правило, решаются в связанной постановке. Из-за сложной структуры грунта фильтрационные процессы в грунтовом массиве описываются дифференциальными уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами. Для исследования решений таких уравнений используется осреднение по представительной области, а целью исследования является получение осредненных дифференциальных уравнений с эффективными коэффициентами. Все уравнения модели связанной консолидации выведены из общих законов сохранения механики сплошной среды (уравнения равновесия, закона сохранения твердой и жидкой фаз грунта и закона фильтрации Дарси) с применением пространственного осреднения по представительной области. Для жидкости это теория смеси, для твердой фазы – осреднение пористой среды.

Были приняты следующие предположения: 1) фильтрующаяся жидкость заполняет поры целиком, 2) жидкость ньютоновская и однородная, 3) деформация жидкости при изменении порового давления p подчиняется закону баротропии, 4) материал скелета грунта несжимаем. Последнее не исключает объемные деформации осредненного каркаса за счет уменьшения порового пространства в результате перемещения частиц твердой фазы грунта. Задача консолидации решается на макроуровне. В осредненной модели вся область, занятая фильтрационным потоком, будто бы заполнена одновременно жидкостью и твердой фазой, частицы которых движутся со своими скоростями.

Дифференциальные уравнения консолидации имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} = 0 \\ n\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\right) = \vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_f\dfrac{dp}{dt} \\ \dfrac{dn}{dt} = (1-n)\,\vec{\nabla}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \tag{1}$$

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}\left(I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\right)\right),\ \ n = n\big(\vec{u}(\vec{x},t)\big),\ \ \mu = const,\ \ \beta_f = const,\ \ \underset{\sim}{\sigma}^{eff} = \underset{\sim}{\sigma} + \alpha p\underset{\sim}{I}.$$

Здесь $\underset{\sim}{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения в грунте, $\underset{\sim}{\sigma}$ – средние полные напряжения, α – параметр Био [1], $\rho = \langle\rho\rangle = (1-n)\langle\rho_s\rangle + n\langle\rho_f\rangle$ – средняя плотность грунта, n – пористость грунта, $\vec{f}$ – постоянная по времени массовая сила, $\underset{\sim}{k}$ – тензор коэффициентов проницаемости, $\vec{u}$ – средние перемещения в твердой фазе грунта, μ – динамическая вязкость жидкости, β_f – сжимаемость жидкости.

Следует отметить, что в системе (1) уравнение равновесия удобно решать, используя лагранжев подход, а уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости записаны в эйлеровом пространстве. Но удобно решать систему уравнений в одной системе координат. Поэтому далее переформулируем последние два уравнения системы (1) в движущейся системе координат, которая будет связана с лагранжевыми координатами твердого каркаса. Для этого будем применять для жидкости метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [2].

В методе ALE вводятся три области: пространственная текущая V и пространственная начальная $\overset{0}{V}$ области в декартовой системе координат и область V_ξ, соответствующая криволинейной системе координат $\vec{\xi}$ [2]. Далее рассматриваются взаимно-однозначные отображения этих областей (законы движения): $\vec{X} = \vec{X}(\vec{\xi}, t)$, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$, $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{X}, t)$, а также комбинация отображений: $\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{\xi}(\vec{X}, t), t)$.

В результате дифференцирования по времени соответствующих законов движения определяются скорость $\vec{v}$ частицы $\vec{X}$ и скорость $\vec{\hat{v}}$ точки $\vec{\xi}$ в текущей области V и скорость $\vec{w}$ движения материальной частицы $\vec{X}$ в области V_ξ:

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \partial\vec{x}(\vec{X}, t)/\partial t = d\vec{x}/dt\,; \;\; \vec{\hat{v}}(\vec{\xi}, t) = \partial\vec{x}(\vec{\xi}, t)/\partial t\,; \;\; \vec{w}(\vec{X}, t) = \partial\vec{\xi}(\vec{X}, t)/\partial t.$$

С помощью дифференцирования по времени композиции отображений $\vec{x}(\vec{X},\, t) = \vec{x}(\vec{\xi}(\vec{X},\, t),\, t)$ получаем отношение между скоростями $\vec{v}$, $\vec{\hat{v}}$ и $\vec{w}$:

$$\vec{v} = \vec{\hat{v}} + \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}} \cdot \vec{w}.$$

Отсюда можно определить скорость движения материальной частицы $\vec{X}$ относительно системы координат $\vec{\xi}$ (конвективную скорость):

$$\vec{c} = \vec{v} - \vec{\hat{v}} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}} \cdot \vec{w}.$$

Представляемый в работе подход состоит в том, что лагранжевы координаты твердой фазы выбираются как координаты $\vec{\xi}$ ALE метода. Тогда $\vec{c}$ – это скорость движения жидкости относительно каркаса. Таким образом, моделируется просачивание жидкости через подвижную Лагранжеву сетку для твердого каркаса. С учетом закона Дарси получаем:

$$\vec{c} = \vec{v} - \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\underset{\sim}{k}}{n\mu} \cdot \vec{\nabla} p. \tag{2}$$

В методе ALE материальная производная скалярной величины f (например, плотности ρ или давления жидкости p) выражается в терминах конвективной скорости $\vec{c}$ [2]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial\vec{x}} \cdot \vec{c}. \tag{3}$$

Теперь, используя формулы (2) и (3), запишем уравнение фильтрации и уравнение пористости в координатах $\vec{\xi}$ для твердой фазы. Учтем, что в этих координатах $d\vec{u}/dt = \partial\vec{u}/\partial t$.

В результате получаем дифференциальную постановку нелинейной связанной модели консолидации (с использованием подхода ALE):

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}\cdot \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} = 0 \\
n\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\right) = \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}} + n\beta_f\dot{p} - \beta_f\vec{\nabla}p\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}p \\
\dot{n} - \vec{\nabla}n\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p = (1-n)\left(\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}\right)
\end{cases}
\tag{4}
$$

Зададим типичные граничные условия:

$$
\begin{cases}
\vec{u} = 0; \quad \vec{\xi}\in\Sigma_u = \Sigma_1 \\
\underset{\sim}{\sigma}^{eff}\cdot\vec{n} = \vec{S}; \quad \vec{\xi}\in\Sigma_\sigma = \Sigma_2 \\
\dfrac{\partial p}{\partial\vec{n}} = 0; \quad \vec{\xi}\in\Sigma_w = \Sigma_1 \\
p = 0; \quad \vec{\xi}\in\Sigma_p = \Sigma_2
\end{cases}
\tag{5}
$$

$$
\Sigma_u\cup\Sigma_\sigma = \Sigma;\ \ \Sigma_w\cup\Sigma_p = \Sigma;\ \ \Sigma_u = \Sigma_w = \Sigma_1;\ \ \Sigma_\sigma = \Sigma_p = \Sigma_2
$$

Для решения краевой задачи (4) и (5) численными методами сначала была получена ее вариационная постановка.

Одним из способов решения геометрически нелинейных краевых задач является метод линеаризации по времени t (в квазистатических задачах – по параметру нагружения). Идея линеаризации состоит в дифференцировании вариационного уравнения по параметру t, в результате чего получается линейная задача относительно дифференциалов вектора перемещений $d\vec{u}$ и давления жидкости dp. Для удобства проведения линеаризации уравнение равновесия преобразовывалось к начальной области с использованием тензора Кирхгофа $\underset{\sim}{S}$ (второго тензора Пиолы-Кирхгофа), а затем линеаризованное уравнение равновесия преобразовывалось обратно к текущей области.

В результате была получена система связанных линеаризованных вариационных уравнений модели консолидации в геометрически нелинейной постановке в текущей конфигурации:

$$
\begin{cases}
\int\limits_V \left(\underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}(d\vec{u})\right)dV + \int\limits_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T\cdot\vec{\nabla}d\vec{u}\right]dV - \\
\quad -\int\limits_V \alpha\, dp\, div\vec{w}\, dV - \int\limits_V \alpha p\,(div\vec{w})(div\, d\vec{u})\, dV + \\
\quad +\int\limits_V \alpha p\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T : \vec{\nabla}d\vec{u}\, dV - \int\limits_V \rho d\vec{f}\cdot\vec{w}dV - \int\limits_{\Sigma_2} d\vec{S}\cdot\vec{w}d\Sigma = 0 \\
\int\limits_V q\beta_f\vec{\nabla}p\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}p\, dtdV - \int\limits_V \vec{\nabla}q\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{\mu}\cdot\vec{\nabla}p\, dtdV - \int\limits_V q\vec{\nabla}n\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\, dtdV = \\
\qquad = \int\limits_V q\vec{\nabla}\cdot d\vec{u}\, dV + \int\limits_V qn\beta^f dp\, dV \\
\int\limits_V h\, dn\, dV - \int\limits_V h\vec{\nabla}n\cdot\dfrac{\underset{\sim}{k}}{n\mu}\cdot\vec{\nabla}p\, dt\, dV = \int\limits_V h(1-n)\vec{\nabla}\cdot d\vec{u}\, dV
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
C^d_{ijkl} = J^{-1}F_{ip}F_{jq}F_{kr}F_{ls}C^E_{pqrs};\quad F_{ip} = \partial x_i/\partial X_p\,;\quad \underset{\sim}{C}^E = \partial\underset{\sim}{S}^{eff}/\partial\underset{\sim}{E}\,;
$$

$$\underset{\sim}{d}(\vec{w}) = 0{,}5\left[\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T + \vec{\nabla}\vec{w}\right]; \quad \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) = 0{,}5\left[\left(\vec{\nabla}d\vec{u}\right)^T + \vec{\nabla}d\vec{u}\right].$$

$\underset{\sim}{C}^E$ – касательный модуль; $\vec{w}, q, h$ – пробные функция; $\underset{\sim}{S}^{eff}$ – эффективный тензор Кирхгофа; $\underset{\sim}{E}$ – тензор деформаций Грина-Лагранжа; $\vec{\bar{S}}$ – поверхностная сила из граничных условий (5).

В определяющих соотношениях для скелета грунта $dS^{eff} = \underset{\sim}{C}^E : d\underset{\sim}{E}$ могут использоваться:

1) гиперупругий материал: $\underset{\sim}{C}^E = \partial^2 W / \partial \underset{\sim}{E}^2$, где W – упругий потенциал;

2) гипоупругий материал: $\underset{\sim}{C}^E = \underset{\sim}{C}^E\left(\underset{\sim}{E}\right)$. К этому случаю относится теория пластического течения.

Таким образом, в работе получена полностью физически и геометрически нелинейная формулировка задачи консолидации при использовании подхода Лагранжа с адаптацией для твердой фазы и метода ALE.

В методе решения связанной задачи использовалась линеаризация вариационных уравнений в сочетании с внутренними итерациями по методу Узавы [3] на каждом шаге по времени. Для пространственной дискретизации использовался метод конечных элементов: элементы трилинейного типа для аппроксимации собственно уравнения фильтрации и квадратичные элементы для аппроксимации уравнений равновесия. Для возможного учета сил инерции применялась неявная схема по времени. Внутренние итерации по методу Узавы применяются для связывания на каждом шаге по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation* // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol.12. – No.2. – Pp.155-164.
2. Donea J., Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 pp.
3. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационые методы решения седловых задач.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.