ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XX

Выпуск 4 (72)

Тула
2019

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России» Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125, каб. 310
Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

MathSciNet, URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.
Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшей школы Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

[1]Полные сведения см. стр. 400, 404.

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен шестидесятилетию выдающегося советского и таджикского математика, академика Таджикской Академии наук, доктора физико-математических наук, профессора

Зарулло Хусейновича Рахмонова

З. Х. Рахмонов

Сборник открывается статьёй о жизни и научной деятельности

Зарулло Хусейновича Рахмонова

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 Выпуск 4

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-6-31

О жизни и научной деятельности академика Зарулло Хусеновича Рахмонова

В. Н. Чубариков (г. Москва)

В. Н. Чубариков —доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

Статья посвящена доктору физико-математических наук, академику Академии наук Республики Таджикистан, выдающемуся специалисту в области теории чисел Зарулло Хусеновичу Рахмонову в связи с его 60–летием. Приводится краткая биография, основные этапы его научной карьеры. Дан обзор результатов З. Х. Рахмонова по следующим проблемам теории чисел: о распределении чисел Гольдбаха и чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, по проблеме средних значений функции Чебышева и проблеме нулей дзета-функции Римана, лежащих в коротких прямоугольниках критической полосы, по оценкам коротких тригонометрических сумм с простыми числами и проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми, по проблеме Сельберга, касающейся нулей дзета-функции Римана, лежащих на коротких промежутках критической прямой.

В заключение представлен список основных научных публикаций З. Х. Рахмонова

Ключевые слова: Зарулло Хусенович Рахмонов, Институт математика им. А.Джураева, короткие арифметические суммы, дзета-функция Римана.

Библиография: 91 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. О жизни и научной деятельности академика Зарулло Хусеновича Рахмонова // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 6–31.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-6-31

About the life and activities of academician Zarullo Husenovich Rakhmonov

V. N. Chubarikov (Moscov)

V. N. Chubarikov —doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the doctor of physico-mathematical Sciences, academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, one of the foremost experts in the field of number theory, Zarullo Husenovich Rakhmonov in connection with his 60–year anniversary. Provides a brief biography, the main stages of development of his scientific career. We give the review of results of Z. H. Rakhmonov on following problems: on the distribution of the Goldbach's and Hardy–Littlewood's numbers in short arithmetical progressions, on the problem of mean values of the Chebyshev's function and the problem of the Riemann zeta-function zeros belonging to short rectangular in the critical strip, to estimations short trigonometric sums over primes and on the Goldbach's problem with almost equals summands, on the Selberg's problem concerning to the Riemann's zeta-function zeros lying on short intevals of the critical line. In conclusion, the author presents a list of main scientific publications Z. H. Rakhmonov

Keywords: Zarullo Husenovich Rakhmonov, Institute of mathematics im. A. Juraev, a short amount, dzeta-function of Riemann.

Bibliography: 91 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2019, "On several problems of the analytic number theory (to the sixtieth years of the birthday of the Academic AS RT of Zarullo Husenovich Rakhmonov) " , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 6–31.

1. Краткая биография

Талантливый математик и замечательный широко образованный человек, Зарулло Хусенович Рахмонов является ярким представителем таджикской школы теории чисел. Зарулло Хусенович Рахмонов — ученики выдающихся математиков в области теории чисел, профессоров А.А. Карацубы и В.Н. Чубарикова.

З.Х. Рахмонов родился 10 декабря 1958 года в Ганчинском районе Согдийской области Таджикской ССР. В 1976 году он закончил среднюю школу и поступил в Таджикский национальный университет, в 1979 году продолжил учебу на механико-математическом факультете Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова, став учеником В.Н. Чубарикова. Курсовые работы З.Х. Рахмонова были посвящены теореме Г.Ф. Вороного о числе целых точек под гиперболой (3-курс), вывод асимптотических формул среднего значения степеней функции $\tau_k(n)$ (число представлений натурального число n в виде произведений натуральных сомножителей) с помощью их производящих функций (4-курс), дипломная работа посвящена выводу асимптотической формулы для количества чисел, являющихся суммой двух квадратов простых чисел в интервалах малой длины.

В 1982 году после окончания университета по рекомендации Ученого совета механико-математического факультета МГУ З.Х. Рахмонов поступил в аспирантуру отделения математики механико-математического факультета Московском Государственном университета им. М.В. Ломоносова по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, и в 1986 году под руководством А.А. Карацубы и В.Н. Чубарикова защитил кандидатскую диссертацию на тему «Распределение значений характеров Дирихле» в Диссертационном Совете Д.053.05.05 при МГУ им. М.В. Ломоносова.

Возвратившись в Таджикистан, З.Х.Рахмонов в 1986 году начал трудовую деятельность как ассистент на кафедре алгебры и теории чисел Таджикского национального университета, а в 1987 году был избран старшим преподавателем и в 1991 году – доцентом этой кафедры.

С января 1992 года по декабрь 1994 года З.Х.Рахмонов проходил докторантуру и 4 октября 1996 году на Диссертационном Совете Д.053.05.05 при МГУ им. М.В. Ломоносова защитил докторскую диссертацию на тему «Простые числа и средние значения функции Чебышева», по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

В 1996 году Рахмонов З.Х. избран заведующим кафедрой алгебры и теории чисел Таджикского Национального университета. С 1999 года до настоящего времени является директором Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

В 2000 году он избран членом-корреспондентом Академии наук Республики Таджикистан. В 2012 году Рахмонову З.Х. присвоено ученое звание профессора по специальности ««Математическая логика, алгебра и теория чисел». В 2017 году Рахмонов З.Х. избран академиком Академии наук Республики Таджикистан. В 2011 году Правительством Республики Таджикистан ему была присуждена медаль «*20 лет независимости Республики Таджикистан*».

Женат, имеет трех детей. Жена – Саломова Мохира Бободжоновна, преподаватель кафедры медицинской подготовки Таджикского национального университета. Сыновья: Фируз, Парвиз, Фирдавс, выпускники механико-математического факультета Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Зарулло Хусенович Рахмонов является прекрасным человеком, и ему присуща отзывчивость к людским проблемам. Более 20 лет З.Х. Рахмонов занимает должность директора Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан. В труднейших условиях конца 90-их ему удалось сохранить научный потенциал Института и организовать подготовку молодых математиков через аспирантуру. Руководимый им Институт по всем наукометрическим показателям занимает ведущее место среди научно-исследовательских учреждений АН РТ. Двери его кабинета всегда открыты для любого сотрудника института, любого, кто нуждается в его совете и помощи. В коллективе любят, уважают своего руководителя и стараются ответить на доброжелательность и постоянную поддержку отличными результатами работы.

З.Х. Рахмонов является крупным специалистом в области аналитической теории чисел. Полученные им результаты являются выдающимися, и они обобщают многие результаты знаменитых учёных. Кроме того, З.Х.Рахмонов – прекрасный специалист по алгебре, математическому анализу и теории функции комплексного переменного. Он преподает студентам эти дисциплины, читает спецкурсы по аналитической и алгебраической теории чисел. Академик З.Х. Рахмонов является главой таджикской научной школы по аналитической теории чисел. Он продолжает и успешно развивает научные традиции, заложенные известными таджикскими математиками, специалистами по теории чисел Г. Бабаевым, Д. Исмоиловым и Н. Гафуровым. Под его руководством были подготовлены и успешно защищены 17 кандидатских диссертаций. Отметим, что его заслуга при подготовке кадров в Республике Таджикистан очень велика. Его ученики работают в разных ВУЗах республики. В институте математики им. А.Джураева АН РТ функционирует Диссертационный совет по двум специальностям, З.Х. Рахмонов является председателем этого Диссертационного Совета. З.Х. Рахмонов уделяет особое внимание расширению научных связей с ведущими научными центрами за рубежом.

2. Научные достижения академика З.Х. Рахмонова

Работы З.Х. Рахмонова представляют собой систематическое исследование по теории периодических арифметических функций, на основе тонких комбинаторных теоретико-числовых и теоретико-функциональных методов и идей, развитых в последние годы как самим З.Х. Рахмоновым, так и другими известными математиками.

Уже первые работы З.Х. Рахмонова явились существенным вкладом в решение проблемы Ю.В. Линника о наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии. В них он искусно применил известный метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова, что позволило обобщить теорему И.М. Виноградова о нетривиальной оценке сумм значений характеров

Дирихле по простому модулю от последовательности сдвинутых простых чисел на случай, когда модуль характера есть произвольное натуральное число, и существенно продвинуться в уточнении результатов известного финского математика М. Ютилы.

Профессор А.А. Карацуба охарактеризовал научные достижения академика З.Х. Рахмонова: *Рахмонов З.Х. является крупным специалистом в области аналитической теории чисел. Ему принадлежат выдающиеся результаты о распределении чисел Гольдбаха и чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в проблеме средних значений функции Чебышева и проблеме нулей дзета-функции Римана, лежащих в коротких прямоугольниках критической полосы, в оценках коротких тригонометрических сумм с простыми числами и проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми. В последние годы Рахмонов З.Х. получил рекордный результат в проблеме Сельберга, касающейся нулей дзета-функции Римана, лежащих на коротких промежутках критической прямой. Рахмонов З.Х. является также первоклассным специалистом в алгебре, анализе, топологии, теории функций комплексного переменного.*

Остановимся боле подробно на научных исследованиях академика З.Х.Рахмонова.

2.1. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их приложения

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1943 г. он [1, 3, 4] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \tag{1}$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* mod$q$ *вида $p-l$, $p \leqslant x$.*

Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечетных простых чисел. Задача о распределении таких чисел в "коротких" арифметических прогрессиях возникла при попытке решить бинарную проблему Гольдбаха. Первый результат условного характера здесь принадлежит Ю.В.Линнику [5]. В предположении расширенной гипотезы Римана он показал, что имеет место неравенство

$$G(D,l) \leq D\ln^6 D,$$

где $G(D,l)$ – наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии

$$Dk+l, \qquad k=0,1,2,\dots$$

Этот результат был уточнен К.Прахаром [6, 7] и Ю.Вангом [8]. Они при тех же предложениях доказали, что

$$G(D,l) \leq D(\ln D)^{3+\varepsilon}.$$

М.Ютила [9] в 1968 г. доказал безусловную теорему. Воспользовавшись оценкой (1), он показал, что если D – нечетное простое число, то

$$G(D,l) \ll D^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

В дальнейшем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi)$ при $x \geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$, где q — простое число [10, 11, 12]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi)$

можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi)$, можно получить нетривиальную оценку, но только при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник [13] в 1971 г. писал по этому поводу: *«Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0,75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что дает непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.»*

А.А. Карацуба в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени [14, 15, 16]. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующее утверждение [14, 17, 18]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}. \tag{2}$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества произведений простых и сдвинутых простых чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [19], (см. также [14, 20, 21, 22, 23, 24]).

З.Х. Рахмонов обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [25, 26, 27].

Теорема 1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T_1(\chi) \leqslant x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right)\tau(q).$$

Применяя эту оценку, он [25, 28] также доказал, что справедлива

Теорема 2. *Для достаточно большого нечетного натурального числа D имеет место оценка*

$$G(D,I) \ll D^{c+\varepsilon},$$

где ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A>2$,

$$\sum_{\chi \bmod D} N(\alpha,T,\chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)}(\ln DT)^A.$$

Из “плотностной” теоремы Хаксли[29] следует, что при $A=14$ в последней формуле $c \leqslant \frac{6}{5}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q [30]. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что для всех $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \tag{3}$$

В 2013 г. З.Х. Рахмонов [31, 32, 33] получил более сильный результат. Он доказал следующее:

Теорема 3. *Если q – достаточно большое натуральное число, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, $x\geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi_q)\ll x\exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по модулю D, D – простое число, были приложены в задачах о наименьшей гольдбаховых числах и о распределении произведений простых и сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров. З.Х. Рахмонов, рассматривая задачу о нетривиальной оценке суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по составному модулю D, доказал в 2017 году следующие теоремы.

Теорема 4. [34, 35]. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер по модулю q, порожденный характером χ, q – свободное от кубов, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x\geqslant D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ имеем*

$$T_1(\chi)\ll x\exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

Теорема 5. [36]. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x\geqslant D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n-l)\ll x\exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

2.2. Средние значения функций Чебышева и их приложения

Для характера Дирихле χ по модулю q, $q>1$ обычная функция Чебышева и функции Чебышева с линейным экспоненциальным весом определяются следующими равенствами:

$$\psi(y,\chi)=\sum_{n\leqslant y}\Lambda(n)\chi(n),\qquad \psi(y,\chi,\lambda)=\sum_{n\leqslant y}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Монгольдта. Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, имеют место оценки

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}|\psi(x,\chi)|\ll x+x^{1/2}q\mathscr{L}_q^2, \tag{4}$$

$$T(x;Q)=\sum_{q\leqslant Q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}|\psi(x,\chi)|\ll Qx^{1/2}\mathscr{L}^2, \tag{5}$$

где $\sideset{}{^*}\sum_{\chi}$ — означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам Дирихле по модулю q, $\mathscr{L}_q=\ln xq$, $\mathscr{L}_Q=\ln xQ$, $\varphi(q)$ — функция Эйлера. При решении ряда задач теории простых достаточно, чтобы для $t(x;q)$ и $T(x;Q)$ имелись оценки близкие к оценкам (4) и (5).

Г.Монтгомери [37], пользуясь своей плотностей теоремой, показал, что

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll (x + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}} q)\mathscr{L}_q^{16}, \\ T(x;Q) &\ll (xQ^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} Q^2)\mathscr{L}_Q^{11}. \end{aligned} \tag{6}$$

Этот результат уточнил Р.Вон [38]. Он с помощью специального представления логарифмической производной L-функции доказал, что

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll x\mathscr{L}_q^3 + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}_q^{\frac{7}{2}}, \\ T(x;Q) &\ll x\mathscr{L}_Q^3 + x^{\frac{3}{4}} Q^{\frac{5}{4}} \mathscr{L}_Q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} Q^2 \mathscr{L}_Q^{\frac{7}{2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

В 1989 году З.Х.Рахмонов[39] показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} q)x^{\delta}. \tag{8}$$

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [40] доказали, что

$$T(x;Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}} Q + x^{\frac{1}{2}} Q^2)\mathscr{L}_Q^4, \tag{9}$$

Последние две оценки сильнее (6) и слабее (7), но доказательство, в отличие от этих оценок, проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [19].

З.Х Рахмонов [16, 42, 43, 44], пользуясь новым аналитическим вариантом метода И.М. Виноградова — оценок тригонометрических сумм с простыми числами, методом работы Н.М. Тимофеева [45], в которой исследуется распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям, доказал, что справедлива

Теорема 6. *При $x \geqslant 2$, $q \geqslant 1$, $Q \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll x\mathscr{L}_q^3 + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}_q^{\frac{7}{2}}, \\ T(x;Q) &\ll x\mathscr{L}_Q^3 + x^{\frac{4}{5}} Q \mathscr{L}_Q^{34} + x^{\frac{1}{2}} Q^2 \mathscr{L}_Q^{c}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $c = 34$, если $Q \leq \sqrt[3]{x}(\ln x)^{-5/6}$, и $c = 3,5$ в противном случае.

Заметим, что оценки в (10) точнее, чем (7) соответственно при

$$x^{\frac{2}{5}} \ll q \ll x^{\frac{2}{3}}, \qquad x^{\frac{1}{5}} \ll Q \ll x^{\frac{1}{3}},$$

а для остальных q и Q совпадают с точностью до множителя, равного некоторой конечной степени $\mathscr{L}_q$ и $\mathscr{L}_Q$.

В 1937 г. И.М.Виноградов [1] своим элементарным методом оценок сумм с простыми числами доказал, что если

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1,$$

то для линей тригонометрической суммы имеет место оценка

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll \left(x q^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right) x^{\varepsilon}. \tag{11}$$

Впервые сумму $S(\alpha, x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [46]. Г.Монтгомери [37], пользуясь своей оценкой (6), доказал что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(x q^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right) \mathscr{L}_q^{17}. \tag{12}$$

Р.Вон [38], применяя свои оценки (7) для $t(x;q)$, уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, что

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q},x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^4, \\ S\left(\alpha,x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^4. \end{aligned} \tag{13}$$

Он также доказал, что если $1\leqslant\eta\leqslant x^{\frac{1}{3}}$, $\eta\leqslant q\leqslant x\eta^{-1}$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{\eta}{xq}$ и $(a,q)=1$, то

$$S\left(\alpha,x\right)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \tag{14}$$

Отметим, что оценки (12) и (13), полученные аналитическим методом, слабее оценки И. М. Виноградова (11). З. Х. Рахмонов из своей оценки (10) для $t(x;q)$, доказательство которой проводится аналитическим методом, для $S(\alpha,x)$ получил оценки И. М. Виноградова, причем множитель x^ε в (10), заменяется на некоторую степень логарифма от xq.

Теорема 7. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}$ *и* $(a,q)=1$, *тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q},x\right) &\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_q^{35}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_q^{35}, \\ S\left(\alpha,x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^{35}. \end{aligned}$$

Следующее следствие этой теоремы является уточнением оценки (14) для больших η.

Следствие 1. *Пусть* $1\leqslant\eta\leqslant x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\leqslant q\leqslant x\eta^{-1}$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{\eta}{xq}$ *и* $(a,q)=1$, *тогда справедлива оценка:*

$$S\left(\alpha,x\right)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}.$$

Харди и Литтлвуд [47] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n=p+m^k, \qquad k\geq 2.$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г. Бабаев [48] опроверг эту гипотезу, а именно, показал, что существует бесконечное число натуральных чисел, не являющихся числом Харди-Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1\leq l\leq q$, для которых выполняется неравенство

$$H_k(q,l)>q, \qquad k\geq 2,$$

где $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt+l$, $t=0,1,2,\ldots$; q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q,l)$ как можно лучше.

2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди - Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

З.Х. Рахмонов [39] в 1987 г., воспользовавшись оценкой (8), исследовал эти две задачи в случае $k=2$; была получена асимптотическая формула для числа решений сравнения

$$p+m^2\equiv l \pmod q,\qquad p\leqslant x,\qquad m\leqslant\sqrt{x},\qquad q \text{ — простое},$$

при $x\geqslant q^{\frac32+\varepsilon}$, откуда, в частности, следует, что

$$H_2(q,l)\ll q^{\frac32+\varepsilon}.$$

Далее в 1993 г. он [16, 42], воспользовавшись своей теоремой 6 о средних значениях функции Чебышева уточнил и обобщил его в случае $k\geqslant 2$.

Теорема 8. *Пусть $x\geqslant 2$, q — простое, $1\leqslant l<q$, $(l,q)=1$ и $\mathscr{L}=\ln x$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$H_k(x;q)=\sum_{\substack{n\le x,\, m^k\leqslant x\\ n+m^k\equiv l \pmod q}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(q)}\left(x^{1+\frac1k}+O\left(x\exp(-c\mathscr{L}^{\frac12})+xq^{\frac12}\mathscr{L}^4+x^{\frac45}q\mathscr{L}^{35}+x^{\frac12}q^{\frac32}\mathscr{L}^{35}\right)\right).$$

Эта формула становится нетривиальной, если $q\ll x^{\frac23}\mathscr{L}^{-\frac{70}{3}}$ при $k=2$; $q\ll x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}^{-35}$ при $k=3,4,5$ и $q\ll x^{\frac2k}\mathscr{L}^{-8}$ при $k\geqslant 6$ и для $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии с разностью q и начальным членом l, следует следующая оценка сверху:

Следствие 2. *Пусть q — простое и $(l,q)=1$, тогда*

$$H(q,l)\ll\begin{cases} q^{\frac32}(\ln q)^{35}, & \text{при } k=2;\\ q^{\frac{5k}{k+5}}(\ln q)^{\frac{175k}{k+5}}, & \text{при } k=3,4,5;\\ q^{k/2}(\ln q)^{4k}, & \text{при } k\geq 6.\end{cases}$$

2.3. Короткие тригонометрические суммы с простыми числами

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ,1-æ]$, $æ\tau=1$ представимо в виде

$$\alpha=\frac aq+\lambda,\quad (a,q)=1,\qquad 1\leqslant q\leqslant\tau,\qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q\leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [1, 2] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$ при $\tau=x^{\frac13}$ и $y>x^{\frac23+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}}b_ne(\alpha(mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leqslant \tau^c(m)$, $|b_n| \leqslant \tau^c(n)$, M, N, $U \geqslant N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же.

Затем Хейзелгроув С.Б. [49], Статулявычус В. [50], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [51], Тао Ж. [52] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [53], изучив сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$, получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ в малых дугах при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ и доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$$

Воспользовавшись, в частности, этой оценкой, они [54, 55] решили задачу Хуа о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5(mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leqslant H, \quad H \geqslant N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

В 1938 г. Хуа [56], рассматривая проблему Варинга – Гольдбаха для кубов, доказал, что все достаточно большие нечетные натуральные числа являются суммой девяти кубов простых чисел. Кумчев А.В. [57] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Яо Я. [58], воспользовавшись оценкой Кумчева, доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leqslant N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{51} + \varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонову и Ф.З. Рахмонову [59, 60] удалось получить нетривиальную оценку более коротких сумм $S_3(\alpha; x, y)$ на малых дугах.

Теорема 9. *При $\mathscr{L}^{32(B+20)} \leqslant q \leqslant y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+20)}$ и $y \geqslant x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+151}$, справедлива оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

где $\mathscr{L} = \ln xq$, B — абсолютная постоянная.

Примененный в [16, 42, 43, 44] подход в сочетании с работой М. Ютилы [61] о четвёртом моменте L - рядов Дирихле в коротких интервалах критической прямой позволил З.Х. Рахмонову также исследовать средние значения функции Чебышева с линейным экспоненциальным весом:

$$\psi(u, \chi, \lambda) = \sum_{n \leqslant u} \Lambda(n) \chi(n) e(\lambda n),$$

по всем характерам Дирихле данного модуля в коротких интервалах. Он доказал, что справедлива

Теорема 10. *Пусть $x \geqslant x_0$, $x^{\frac{1}{2}} \leqslant y \leqslant x$, $|\lambda| \leq xy^{-2}$, $1 \leqslant q \leqslant xy^{-1}$, $\varepsilon < 10^{-6}$ — любое фиксированное положительное число,*

$$t(x;q,y,\lambda) = \sum_{\chi \bmod q} |\psi(x,\chi,\lambda) - \psi(x-y,\chi,\lambda)|,$$

то справедлива оценка

$$t(x;q,y,\lambda) \ll (y + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}_q^{35} + (qx^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}|\lambda|^{\frac{1}{3}}q)x^{\varepsilon}.$$

Одним из приложений теоремы 10 является оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами, то есть сумм вида:

$$S_1(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau.$$

Следствие 3. *Пусть $x \geqslant x_0$, $x^{\frac{1}{2}} \leqslant y \leqslant x$, $|\lambda| \leqslant 1/q\tau \leqslant x/y^2$, $\varepsilon < 10^{-6}$ — любое фиксированное положительное число, тогда справедлива оценка:*

$$S_1(\alpha;x,y) \leqslant \left(yq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{35} + \left(q^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{6}}\right)x^{\varepsilon}.$$

Эта оценка становится нетривиальной при

$$(\ln x)^{70} < q < \tau, \qquad y \geqslant x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}.$$

В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ И.М. Виноградов [1], воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$. Он доказал, что если K — целое, $K \leqslant N$, α–вещественное,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N,$$

тогда имеет место оценка

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{p\leqslant N} e(\alpha kp)\right| \ll KN^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2}\right).$$

З.Х. Рахмонов, Ф.З.Рахмонов и С.Н. Исматов [62, 13] обобщили эту оценку И.М. Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм.

Теорема 11. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K \leqslant H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln Nq$, α–вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leqslant q \leqslant \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$V_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<n\leqslant N} \Lambda(n)e(\alpha kn)\right| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

2.4. Короткие суммы Г.Вейля и аддитивные задачи с почти равными слагаемыми

Р. Вон [64], изучая суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\leqslant x}e\left(\alpha m^n\right),\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\qquad q\leqslant\tau,\qquad (a,q)=1,\qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах методом Ван дер Корпута доказал следующее:

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac12}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть, при выполнении условия

$$|\lambda|\leq\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал, что

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right).$$

Этими оценками он воспользовался при выводе асимптотической формулы в проблеме Варинга для восьми кубов [65].

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана, основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова, является также поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(\alpha m^n),\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\qquad (a,q)=1,\qquad q\leq\tau,\qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},$$

на больших дугах и их оценка на малых дугах. З.Х. Рахмонов вместе с учениками [66, 67, 68, 69, 70] изучил короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида $T(\alpha;x,y)$ на длинных дугах при $n=2,3,4$. Затем этом результат был обобщен на случай произвольного фиксированного n [71, 72, 73].

Теорема 12. *Пусть $\tau\geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda\geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha;x,y)=\frac{S(a,q)}{q}T(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha;x,y)|\ll q^{1-\frac1n}\ln q+\min_{2\leqslant k\leqslant n}(yq^{-\frac1n},\lambda^{-\frac1k}x^{1-\frac nk}q^{-\frac1n}).$$

Следствие 4. *Пусть $\tau\geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda|\leqslant\frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha;x,y)=\frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),\qquad \gamma(\lambda;x,y)=\int_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}+yt\right)^n\right)dt.$$

Следствие 5. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 4 и 5 являются обобщением результатов Р.Вона [64] для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида $T(\alpha; x, y)$.

Эти результаты в сочетании с оценками суммы $T(\alpha; x, y)$ на малых дугах были использованы при выводе асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Эстермана [66] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{4}} \ln^2 N;$$
- в кубической проблеме Эстермана [68, 74] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^3 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^3 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{6}} \ln^3 N;$$
- в в проблеме Эстермана четвёртой степени [75, 76] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^4 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^4 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{12}} (\ln N)^{\frac{40}{3}};$$
- в проблеме Варинга для кубов [77] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде девяти кубов натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{9} \right)^{\frac{1}{3}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+\varepsilon};$$
- в проблеме Варинга для четвёртых степеней [78] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 17$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{17} \right)^{\frac{1}{4}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{108}+\varepsilon};$$
- в проблеме Варинга для пятых степеней [71, 79] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{33} \right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}.$$

В теореме 12 и следствии 4 при $n = 2$ множитель $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ в остаточном члене можно заменить на $q\sqrt{q}$ (см. [67, 73]). Отсюда и из теоремы Гурвица о приближении иррациональных чисел рациональными числами следует [80]:

Следствие 6. *Пусть α — иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$ таких, что $x - y < m \leq x$ при $y \geqslant \ln^3 x$, $y \to \infty$, является равномерно распределённой по модулю единицей.*

2.5. Специальные тригонометрические суммы и их приложения к теории нулей рядов Дирихле

В теории нулей рядов Дирихле работы Рахмонова З.Х. посвящены плотностным теоремам дзета-функция Римана в узких прямоугольниках критической полосы, нули дзета-функция Римана, дзета-фунции Харди и её производных, а также функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой.

Пусть $N(\alpha,T)$ — число нулей функции Римана $\zeta(s)$ в области $Res \geqslant \alpha \geq 0,5$ и $0 \leq Ims \leq T$, а $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих на промежутке $(0,T)$. Оценка вида

$$N(\alpha,T+H)-N(\alpha,T) \ll H^{a(1-\alpha)}\ln^c T, \tag{15}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы.

Впервые проблему распределения нулей дзета функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы и в коротких промежутках критической прямой исследовал А.Сельберг [81]. Он доказал, что если $H \geqslant T^{\theta}$, $\theta > 0,5$ и ;$0,5 < \alpha \leqslant 1$, то справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &N(\alpha,T+H)-N(\alpha,T)=O\left(\frac{H}{\alpha-0,5}\right),\\ &N_0(T+H)-N_0(T) \geqslant c_1 H\ln T. \end{aligned} \tag{16}$$

В этой работе А.Сельберг высказал гипотезы, что условие $\theta > 0,5$ в этих оценках может быть заменено условием $\theta >$ æ, æ $< 0,5$. А.А. Карацуба [82, 83] доказал эти гипотезы при æ $= 27/82+\varepsilon$. Хиз-Браун [84], с помощью своей теоремы о четвертом моменте дзета-функции Римана на критической прямой при $H \geq T^{\frac{7}{8}+\varepsilon}$ доказал (15) с $a=2,4$ и $c=244$. В 1992 г. Тао Ж. [85] доказал (15) с $a=8/3$ и $c=216$ при условии $H > T^{1/3+\varepsilon}$. З.Х. Рахмонов [86, 87], воспользовавшись методом экспоненциальных пар, доказал, что верна

Теорема 13. *Пусть (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$,*

$$\theta=\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad H > T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда (15) выполняется при $a=2,4$, $c=290$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$; и соответственно, $a=\frac{8}{3}$, $c=50$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Теорема 14. *Пусть (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$,*

$$\theta=\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad H > T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда существует положительная постоянная $c_1=c_1(\varepsilon)$ такая, что выполняется (16).

Показатель $\theta(\kappa;\lambda)$ также появляется в оценке остаточного члена в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М. Хаксли [88]. Он доказал, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \leqslant \frac{131}{416}=\frac{1}{3}-\frac{23}{3\cdot 416} \approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

З.Х. Рахмонов и Ш.А. Хайруллоев [89, 90] методом экспоненциальных пар длину промежутка критического прямой, в которой заведомо содержится нуль нечетного порядка дзета-функции Римана, выразили через константу Ранкина.

Теорема 15. *Пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара, отличная от* $(1/2,\, 1/2)$,

$$\theta(\kappa;\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\theta_1^{-1}(\kappa;\lambda)}\right), \qquad \theta_1(\kappa;\lambda) = \frac{\lambda}{0,5-\kappa},$$

тогда промежуток $(T, T+H)$, *при* $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant T^{\theta(\kappa;\lambda)}\ln^2 T$ *содержит нуль нечетного порядка дзета-функции Римана и для нижней грани величины* $\theta_1(\kappa;\lambda)$ *по* $\mathcal{P}$ *— множеству всех экспоненциальных пар* $(\kappa;\lambda)$, *отличных от* $(1/2, 1/2)$, *справедливо соотношение*

$$\inf_{(\kappa;\lambda)\in\mathcal{P}} \theta_1(\kappa;\lambda) = R+1,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ *– постоянная Ранкина.*

В 2018 г. З.Х. Рахмонов и А.С. Аминов [91] доказали теорему А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 16. *Пусть* $N_0(T)$ *– число нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна* $f(s)$ *на отрезке* $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$, ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$; c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Следствие 7. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

3. Заключение

Отмечая выдающееся результаты З.Х. Рахмонова в аналитический теории чисел, вносящие крупный вклад в теории чисел, следует сказать, что не менее весом его вклад в существенное развитие научной школы в различных направлениях математики. Свое шестидесятилетие З.Х. Рахмонов встретил в расцвете творческих и жизненных сил.

Дорогой Зарулло Хусенович, новых успехов в науке и дальнейшего развития теоретико-числовой школы в Республики Таджикистан.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Избранные труды — М: изд-во АН СССР. 1952.

2. Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.

3. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. № 45. С. 311 – 320.

4. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943.Т. 7, С. 17 – 34.

5. Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. № 6. С. 503 – 520.

6. Prachar K. Uber die Anwendung einer Methode von Linnik // Acta Arithmetica. 1976. V. 29. P. 367 – 376.

7. Prachar K. Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences] // Acta Arithmetica. 1984. V. 44. P. 175 – 180.

8. Wang Yuan On Linnik's method concerning the Goldbach number // Scientia Sinica.1977. V. 20. P. 16 – 30.

9. Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).

10. Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

11. Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1953. Т. 17. С. 285 – 290.

12. Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // Известия АН СССР. Серия математическая. 1966. Т. 30, С. 481 – 496.

13. Линник Ю.В. Новейшие работы И. М. Виноградова // Труды МИАН. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

14. Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Т. 63. В. 4(382). С. 43 — 92.

15. Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287 – 1289.

16. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

17. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

18. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

19. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

20. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35. № 3. С. 469 – 484.

21. Карацуба А.А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 155 – 159.

22. Карацуба А.А. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 341 – 349.

23. Карацуба А.А. О распределении значений неглавных характеров // Труды МИАН. 1976. Т. 142. С. 156 – 164.

24. Карацуба А.А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42. № 2. С. 315 – 324.

25. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41.№ 1. С. 201 – 202.

26. Рахмонов З.Х. Об оненке суммы характеров с простыми числами // Доклады Академии наук Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

27. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

28. Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

29. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematicae June 1971. V. 15. Is. 2.P. 164 – 170.

30. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

31. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.

32. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. В. 4(2). С. 113 – 117.

33. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. В. 2(50). С. 73 – 100.

34. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1 – 27.

35. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 9. С. 378 – 382.

36. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

37. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.

38. Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

39. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.

40. Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо Основы аналитической теории чисел — Пекин: 1991 (на китайском языке).

41. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

42. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331(3). С. 281 – 282.

43. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 58, № 3. С. 127 – 139.

44. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Т. 349, № 5. С. 606 – 607.

45. Тимофеев Н.М. Распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям // Известия АН СССР. Серия математическая. 1987. № 2. С. 341 – 362.

46. Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник. 1946. Т. 19. Вып. 1. С. 3 – 8..

47. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers — Oxford at the clarendon press. 1954.

48. Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13. В. 6(84). С. 63 – 64.

49. Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.

50. Статулявичус В О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Серия мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.

51. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.

52. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7. No 3. P. 135 – 170.

53. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte fur Mathematik. 1999. V. 127. Is. 1. P. 27 – 41.

54. Liu J, Zhan T. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct., 2000. V. 16, No 4. P. 669–690.

55. Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. V. 49, No 5. P. 611 – 619. DOI:10.1007/s11425-006-0611-x

56. Hua L. K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. 1938. V. 9, No 1. P. 68 — 80.

57. Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

58. Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9, Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

59. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Т. 59. № 7-8. С. 273 – 277.

60. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

61. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93 – 114.

62. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. // Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами //Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 12. С. 937 – 945.

63. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

64. Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

65. Vaughan R.C. On Waring’s problem for cubes // J. Reine Angew. Math. 1986. V 365. P. 122 – 170.

66. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

67. Рахмонов З.Х.,Шокамолова Дж.А. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.

68. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

69. Рахмонов З.Х.,Мирзоабдугафуров К.И. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. – Т. 51.№ 1. С. 5 – 15.

70. Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

71. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

72. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

73. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 4. С. 257 – 264.

74. Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 6. С. 433 – 440.

75. Рахмонов Ф.З., Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

76. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. № 9. С. 769 – 771.

77. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

78. Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

79. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

80. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А. // О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 4. С. 261 – 264.

81. Selberg A. On the zeros Riemann zeta function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo, 1942. V. 10. P. 1 – 59

82. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Известия АН СССР, серия математическая. 1984.Т. 48. № 3. С 569 – 584.

83. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. В. 5(245). С. 19 –70.

84. Heath Brown D.R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proceedings of the London Mathematical Society. 1979. V. s3-38. Is. 3. P. 385 – 422, https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.385

85. Zhan Tao. On the mean square of Dirichlet L-functions // Acta Mathematica Sinica June. 1992. V. 8. Is. 2.P. 204 – 224

86. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 161 – 162.

87. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

88. Huxley M.N. Sums and Lattice Points III // Proceedings of the London Mathematical Society. 2003. V. 87. Is. 3. P. 591 – 609.

89. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

90. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.

91. Рахмонов З.Х., Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2019. Т. 62.№ 3-4. С. 133 – 138.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 436 pp.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, "The method of trigonometric sums in number theory", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Vinogradov, I. M., 1938, "On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 3(45), no 2, pp. 311–319.

4. Vinogradov, I. M., 1943, "An improvement of the estimation of sums with primes", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 7, no 1, pp. 17–34.

5. Linnik, Ju. V. 1952, "Some conditional theorems concerning binary problems with prime numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 6, pp. 503–520.

6. Prachar, K. 1976, "Uber die Anwendung einer Methode von Linnik", *Acta Arithmetica*, vol. 29, pp. 367-376.

7. Prachar, K., 1984, "Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences]", *Acta Arithmetica*, vol. 44, pp. 175-180.

8. Wang Yuan, 1977, "On Linnik's method concerning the Goldbach number", *Scientia Sinica*, vol. 20, pp. 16-30.

9. Jutila, M., 1968, "On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference", *Ann. Univ. Turku; Ser. A,* I 118(5).

10. Vinogradov, I. M., 1952, "New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 3, pp. 197–210.

11. Vinogradov, I. M., 1953, "Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 17, Is. 4, pp. 285–290.

12. Vinogradov, I. M., 1966, "An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 30, Is. 3, pp. 481–496.

13. Linnik, Yu. V., 1975, "Recent works of I.M. Vinogradov", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 132, pp. 25–28.

14. Karatsuba, A. A., 2008, "Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters", *Russian Mathematical Surveys*, vol 63, Is. 4, pp. 641-690.

15. Karatsuba, A. A., 1968, "Sums of characters, and primitive roots, in finite fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 180, Is. 6. № 6, pp. 1287-1289.

16. Karatsuba, A. A., 1970, "Estimates of character sums", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 1, pp. 19–29.

17. Karatsuba, A. A., 1970, “Sums of characters over prime number”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 2, pp. 303–326.

18. Karatsuba, A. A., 1970, “Sums of characters with prime numbers”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 190, Is. 3, pp. 517–518.

19. Karatsuba, A. A., 1970, “The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, Is. 4, pp. 724–727.

20. Karatsuba, A. A., 1971, “Sums of characters with prime numbers in an arithmetic progression”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 5, Is. 3, pp. 485–501.

21. Karatsuba, A. A., 1975, “Sums of characters in sequences of shifted prime numbers, with applications”, *Math. Notes*, vol. 17, Is. 1, pp. 91–93.

22. Karatsuba, A. A., 1975, “Some problems of contemporary analytic number theorem”, *Math. Notes*, vol. 17, Is. 2, pp. 195–199.

23. Karatsuba, A. A., 1979, “Distribution of values of nonprincipal characters”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 142, pp. 165–174.

24. Karatsuba, A. A., 1978, “Sums of Legendre symbols of polynomials of second degree over prime numbers”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 12, Is. 2, pp. 299–308.

25. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, “On the distribution of values of Dirichlet characters”, *Russian Math. Surveys*, vol. 41, Is. 1, pp/ 237–238. doi:10.1070/RM1986v041n01ABEH0032

26. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, “Estimation of the sum of characters with primes”, *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, vol. 29, Is. 1, pp. 16–20„ (in Russian).

27. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.

28. Rakhmonov, Z. Kh., 1986 “The least Goldbach number in an arithmetic progression”, *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR. Otdel. Fiz.-Mat., Khim. i Geol. Nauk*, № 2(100), pp. 103-106, (in Russian).

29. Huxley, M. N., 1971, “On the difference between consecutive primes”, *Inventiones mathematicae*, vol. 15, Is. 2, pp. 164–170.

30. Fridlander, Dzh. B., & Gong, K., & Shparlinskii, I. E., 2010, “Character sums over shifted primes”, *Math. Notes*, vol. 88, Is. 3-4, pp. 585-598. doi:10.1134 S0001434610090312.

31. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, № 1, pp. 5-9, (in Russian).

32. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, Is. 4(2), pp. 113-117, (in Russian).

33. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “Sums of characters over prime numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, Is. 2, pp. 73-100, (in Russian).

34. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299, pp. 219–245.

35. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “On the estimation of the sum the values of Dirichlet character in a sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 60, no 9, pp. 378-382, (in Russian).

36. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

37. Montgomery, Hugh L., 1971, “Topics in Multiplicative Number Theory”, Vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. ix+178 pp.

38. Vaughan, R.O., 1975, “Mean value theorems in prime number theory”, *J.London Math. Soc.*, vol. s2-10, Is. 2, pp. 153-162, https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.2.153

39. Rakhmonov, Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy-Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213-228, http://dx.doi.org/10.1070/IM1990v034n01ABEH000621.

40. Pan Chengdong, & Pan Chengbiao, 1991,“Foundation to Analytic Number Theory”, *Science Press, Beijing, 1991*, (in Chinese).

41. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558

42. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Mean values of the Chebyshev function”, *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85-87. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/search/?an=Zbl 0818.11030

43. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “A mean-value theorem for Chebyshev functions”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 44, Is. 3, pp. 555–569. doi.org/10.1070/IM1995v044n03ABEH001613.

44. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, “The mean-value theorem in prime number theory”, *Doklady Mathematics*, vol. 54, Is. 1, pp. 597-598. https://zbmath.org/?q=an

45. Timofeev, N. M., 1988, “Distribution in the mean of arithmetic functions in short intervals in progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 30, Is. 2, pp. 315–335. doi.org/10.1070/IM1988v030n02ABEH001013.

46. Linnik, U. V., !946, “A new proof of the Goldbach–Vinogradow theorem”, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 19(61), Is. 1, pp. 3–8.

47. Hardy, G. H., & Wright, E. M., 1954, *An introduction to theory of numbers*, 3rd ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1954. xvi+419 pp.

48. Babaev, G., 1958, “Remark on a paper of Davenport and Heilbronn”, *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 13, Is. 6(84), pp. 63–64.

49. Haselgrove C. B., 1951, “Some theorems in the analitic theory of number”, *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.

50. Statulevicius, V., 1955, "On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers *Univ. Mokslo Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser*, vol. 3, pp. 5-23.

51. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, “On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)”, *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2. pp. 138-147.

52. Zhan, T., 1991, “On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes”, *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.

53. Liu, J., & Zhan, T., 1999, “Estimation of exponential sums over primes in short intervals I”, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 127, Is. 1, pp. 27-41.

54. Liu, J., & Zhan, T., 2000, “Hua’s Theorem on Prime Squares in Short Intervals”, *Acta Mathematica Sinica. English Series*, vol. 16, Is. 4. pp. 669-690.

55. Liu J., & Lu, G., Zhan, T., 2006, “Exponential sums over primes in short intervals”, *Science in China: Series A Mathematics*, vol. 49, Is. 5, pp. 611-619. doi:10.1007/s11425-006-0611-x

56. Hua, L. K., 1938, “Some results in the additive prime number theory”, *Quart. J. Math.*, vol. 9, Is. 1, pp. 68-80.

57. Kumchev, A. V., 2012, “On Weyl sums over primes in short intervals”, *“Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.

58. Yao, Y., 2014, “Sums of nine almost equal prime cubes”, *Frontiers of Mathematics in China*, vol. 9, Is. 5. pp. 1131-1140. doi:10.1007/s11464-014-0384-4.

59. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2016, “Estimation of short cubic exponential sums with prime numbers in minor arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 59, no 7-8, pp. 273-277, (in Russian).

60. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, “Short Cubic Exponential Sums over Primes”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233. doi.org/10.1134/S0081543817010175

61. Jutila, M., 1991, “Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions”, *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.

62. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Ismatov S. N., 2013, “Estimate of sums of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 12, pp. 937-945, (in Russian).

63. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, “Sum of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

64. Vaughan, R. C., 1981, “Some remarks in Weyl sums”, *Colloquia Math. Soc. J´anos Bolyai, 34 Topics in classical number theory*, Budapest, North Holland (1984), pp. 1585-1602.

65. Vaughan, R.C., 1986, “On Waring’s problem for cubes”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 365, pp. 122-170.

66. Rakhmonov, Z. Kh., 2003, “Estermann’s ternary problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542. doi.org/10.1023/A:1026199928464.

67. Rakhmonov, Z. Kh., & Shokamolova, J. A., 2009, “Short quadratic Weil’s exponential sums”, *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 2(135), pp. 7-18, (in Russian).

68. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “The Estermann cubic problem with almost equal summands“, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

69. Rakhmonov, Z. Kh., & Mirzoabdugafurov, K. I., 2008, “On estimates of G. Weil’s short cubic sums”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 1, pp. 5-15, (in Russian).

70. Rakhmonov, Z. Kh., & Azamov A.Z., Mirzoabdugafurov, K. I., 2010, “An estimate short exponential Weyl’s sums fourth degree”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 53, no 10, pp. 737-744, (in Russian).

71. Rakhmonov, Z. Kh., & Nazrubloev, N. N., Rakhimov, A.O., 2015, “Short Weyl sums and their applications”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247.

72. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Short Weyl sums”, *Uchenyye zapiski Orlovskogo universiteta. Seriya yestestvennyye, tekhnicheskiye i meditsinskiye nauki*, no. 6, part 2, pp. 194–203.

73. Rakhmonov, Z. Kh., & Ozodbekova, N. B., 2011, “An estimate short exponential Weyl’s sums”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 4, pp. 257-264, (in Russian).

74. Rakhmonov, Z. Kh., & Fozilova, D. M., 2012, “About the ternary problem with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 55, no 6, pp. 433-440, (in Russian).

75. Rakhmonov,F. Z., & Rakhimov, A. O., 2015, “On an additive problem with almost equal summands”, *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional’nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel’stvo: Saratovskiy natsional’nyy issledovatel’skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87–89.

76. Rakhimov, A. O., 2015, “Asymptotic formula in the fourth-degree Esterman problem with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, no 9, pp. 769-771, (in Russian).

77. Rakhmonov, Z. Kh., & Mirzoabdugafurov, K. I., 2008, “Waring’s problem for cubes with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

78. Rakhmonov, Z. Kh., & Azamov A.Z., 2011, “An asymptotic formula in Waring’s problem for fourth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

79. Rakhmonov, Z. Kh., & Nazrubloev, N. N., 2014, “Waring’s problem for fifth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no 11-12, pp. 823-830, (in Russian).

80. Rakhmonov, Z. Kh., & Ozodbekova, N. B., Shokamolova, J. A., 2013, “On the uniform distribution modulo a unit of the values of quadratic polynomial whose argument takes its values from the short interval”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 4, pp. 261-264, (in Russian).

81. Selberg, A., 1942, “On the zeros Riemann zeta function”, *Shr. Norske Vid. Akad. Oslo*, vol. 10, pp. 1-59.

82. Karatsuba, A. A., 1984, “On the zeros of the function $\zeta(s)$ On short intervals of the critical line”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, Is. 3, pp. 523-537, doi.org/10.1070/IM1985v024n03ABEH001246.

83. Karatsuba, A. A., 1985, A. A. Karatsuba, “The Riemann zeta function and its zeros”, *Russian Math. Surveys*, vol. 40, Is. 5, pp. 23–82, doi.org/10.1070/RM1985v040n05ABEH003682.

84. Heath Brown D.R., 1979, “The fourth power moment of the Riemann zeta function”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s3-38, Is. 3, pp. 385-422, doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.385.

85. Zhan Tao, 1992, “On the mean square of Dirichlet L-functions”, *Acta Mathematica Sinica*, vol. 8, Is. 2, pp. 204–224.

86. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, Is. 2, pp. 168–169, doi.org/10.1070/RM1994v049n02ABEH002225.

87. Rakhmonov, Z. Kh., 2006, “Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.

88. Huxley, M. N., 2003, “Sums and Lattice Points III”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 87, Is. 3, pp. 591-609, doi.org/10.1112/S0024611503014485.

89. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2006, “Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

90. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, “The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

91. Rakhmonov, Z. Kh. & Aminov, A. S., 2019, “On the zeros of an odd order of the Davenport – Heilbron function in short intervals of the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133-138.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.2 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-32-44

Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров (Узбекистан, г.Термез)

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского университета, Узбекистан.
e-mail: iallakov@mail.ru
Сафаров Абдивохид Шукурович — Термезский государственный университет, Узбекистан.
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Аннотация

Пуст X достаточно большое вещественное число и $k \geq 2$ натуральное число, M множества натуральных чисел не превосходящие X, которые непредставимы в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа, $E_k(X) = \mathrm{card} M$.

В настоящей работе доказана теорема

Теорема. Для достаточно больших X справедлива оценка $E_k(X) \ll X^{\gamma}$, где

$$\gamma < \begin{cases} 1-(17612,983k^2(\ln k+6,5452))^{-1}, & \text{при} \quad 2 \leq k \leq 205, \\ 1-(68k^3(2\ln k+\ln\ln k+2,8))^{-1}, & \text{при} \quad k > 205, \\ 1-(137k^3\ln k)^{-1}, & \text{при} \quad k > e^{628}. \end{cases}$$

В частности из этой теоремы следует, что оценка и $\gamma < 1-(137k^3\ln k)^{-1}$, полученная В. А. Плаксиным для достаточно больших k, остается справедливой при $\ln k > 628$.

Ключевые слова: Характер Дирихле, нули L-функции, гипотеза Римана, исключительное множество, исключительный нуль, оценка снизу, оценка сверху.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
И. Аллаков, А. Ш. Сафаров. Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 32–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.2 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-32-44

About one additive problem Hua Loo Keng's .

I. Allakov, A. Sh. Safarov (Uzbekistan, Termez sity)

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of Termez University, Uzbekistan.
e-mail: iallakov@mail.ru
Safarov Abdiwahid Shukurovich — Termez University, Uzbekistan.
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Abstract

Let X be enough big real number and $k \geq 2$ be a natural number, M be a set of natural numbers n not exceeding X, which cannot be written as a sum of prime and fixed degree a prime, $E_k(X) = cardM$. In present paper is proved theorem.

Theorem. For it is enough greater $X-$equitable estimation $E_k(X) \ll X^\gamma$, where

$$\gamma < \begin{cases} 1-(17612,983k^2(\ln k+6,5452))^{-1}, & \text{при} \quad 2 \leq k \leq 205, \\ 1-(68k^3(2\ln k+\ln\ln k+2,8))^{-1}, & \text{при} \quad k > 205, \\ 1-(137k^3\ln k)^{-1}, & \text{при} \quad k > e^{628}. \end{cases}$$

In particular from this theorems follows that estimation $\gamma < 1-(137k^3\ln k)^{-1}$, got by V. A. Plaksin for it is enough greater k, remains to be equitable under $\ln k > 628$.

Keywords: The Dirichlet charakter, Dirichlet L-function, exceptional set, representation numbers,exceptional zero, exceptional nature, main member, remaining member..

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. Allakov, A. Sh. Safarov, 2019, "About one additive problem Hua Loo Keng's ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 32–44.

1. Введение

I. Формулировка результатов. Пусть X-достаточно большое вещественное число, $k \geq 2$-натуральное число, M - множество натуральных чисел $n \leq X$, непредставимых в виде

$$n = p_1 + p_2^k, \tag{1}$$

и удовлетворяющие условию

$$(n-1, \prod_{\substack{p \\ \varphi(p)\backslash k}} p) = 1, \tag{2}$$

где p_1, p_2, p — простые числа, $\varphi(p)$ — функция Эйлера (см.[5-7]) .

В. А. Плаксин [8,9], рассмотрев $E_k(X) = cardM$, доказал, что $E_k(X) \ll X^\gamma$, где $0 < \gamma < 1$ всегда и $\gamma < 1-(137k^3\ln k)^{-1}$ при достаточно большом k.

В настоящей работе улучшен результат В. А. Плаксина [9]. А именно доказана

Теорема. Для достаточно больших X справедлива оценка $E_k(X) \ll X^\gamma$,

где

$$\gamma < \begin{cases} 1-(17612,983k^2(\ln k+6,5452))^{-1}, & \text{при} \quad 2 \leq k \leq 205, \\ 1-(68k^3(2\ln k+\ln\ln k+2,8))^{-1}, & \text{при} \quad k > 205, \\ 1-(137k^3\ln k)^{-1}, \text{при} & k > e^{628}. \end{cases}$$

В частности из этой теоремы следует, что оценка $\gamma < 1-(137k^3 lnk)^{-1}$, полученная В. А. Плаксиным [9] для достаточно больших k, остается справедливой при $\ln k > 628$. Доказательство теоремы основывается на идеи работ [1,9] и на результаты работ [2–4].

2. Обозначение и деление единичного интервала.

Пусть ε — произвольное малое положительное число, $X > X_{k,\varepsilon}, X_{k,\varepsilon}$ — достаточно большое положительное число, будем считать что

$$0 < \varepsilon < \frac{2}{7k4^k},\ X = P^k,\ Q = X^{17\varepsilon},\ \tau = XQ^{-1},\ \Delta = \tau^{-1},\ Z = Q^{0,3},\ L = \ln X,\ l = \ln\ln X,$$

$c_1, c_2, ...$ — эффективные вычислимые положительные постоянные, в худшем случае зависящие от $\varepsilon, k, X_{k,\varepsilon}$.

Далее, пусть

$$R(n) = k \sum_{\substack{n=p_1+p_2^k \\ \frac{X}{3}<p_1,p_2^k \le X}} \ln p_1 \ln p_2$$

и

$$S_k(a) = k \sum_{\frac{X}{3}<p^k \le X} \ln p \quad e(\alpha p^k).$$

Тогда

$$R(n) = \int_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

Теперь на интервале интегрирования выделим множестве M_1 больших и множество M_2 малых дуг обычным способом (см., напр. [10,15]) для подобных задач. В рассматриваемом случае большая дуга — это $M_1(a,q) = (\frac{a}{q} - \Delta, \ \frac{a}{q} + \Delta)$, где $1 \le q \le Q, 0 \le a \le q$ и $(a,q) = 1$.

Поэтому $M_1 = \cup_{a,q} M_1(a,q)$ и M_2-множество тех α, для которых $-\Delta < \alpha < 1-\Delta$ и $\alpha \notin M_1$.

Таким образом, мы будем иметь

$$R(n) = R_1(n) + R_2(n) \tag{3}$$

где

$$R_1(n) = \int_{M_1} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \quad R_2(n) = \int_{M_2} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \tag{4}$$

Ясно, что если $R(n) > 0$, то для n существует представление в виде (1) с условием (2) (см. [12,14]).

2. Основная часть.

3. Малые дуги. Покажем, что

$$\sum_{n \le X} R_2^2(n) < X P^{2-5\varepsilon}. \tag{5}$$

Согласно тождеству Персеваля имеем

$$\sum_{n \le X} R_2^2(n) = \int_{M_2} |S_1(\alpha) S_k(\alpha)|^2 d\alpha = \max_{M_2} |S_k(\alpha)|^2 \int_{M_2} |S_1(\alpha)^2 d\alpha \le m_1^2 m_2.$$

Здесь

$$m_2 = \int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \le \sum_{\frac{X}{3}<p \le X} \ln^2 p < 0,7XL. \tag{6}$$

Для $m_1 = \max\limits_{M_2} |S_k(\alpha)|$ используя теоремы 7.1 [16], при $\rho_0 = (17k^2(2lnk + lnlnk + 2,8))^{-1}$, $4\varepsilon \le \rho_0$, находим

$$m_1 \le c_1 P^{1-3\varepsilon}. \tag{7}$$

Согласно (6), (7) получим

$$\sum_{n \le X} R_2^2(n) < 0,7XLc_1^2 P^{2-6\varepsilon} < XP^{2-5\varepsilon.}$$

Из (5) следует, что при $k \geq 2$ количество $n \leq X$, для которого $R_2(n) \geq P^{1-2\varepsilon}$ не больше чем $E_k^{(1)}(X) < X^{1-\frac{\varepsilon}{k}}$. Таким образом

$$R_2(n) \leq P^{1-2\varepsilon} \tag{8}$$

для всех $n \leq X$, за исключением не более чем $E_k^{(1)} < (X)^{1-\frac{\varepsilon}{k}}$ значений n из них.

4. Большие дуги. Ясно, что в силу (4)

$$R_1(n) = \sum_{q\leq Q} \sum_{a=1}^{q} \int_{-\Delta}^{\Delta} S_1(\frac{a}{q}+\eta) S_k(\frac{a}{q}+\eta) e(-(\frac{a}{q}+\eta)n) d\eta. \tag{9}$$

где суммирование по всем a, с условием $1 \leq a \leq q, (a,q) = 1$.

Сначала несколько преобразуем $R_1(n)$. Для этого введем обозначения:

$$U_k(\chi,\eta) = k \sum_{\frac{X}{3}<p^k\leq X} \chi(p) \ln p e(p^k\eta), \tag{10}$$

$$T_k(\eta) = k \sum_{\frac{X}{3}<n^k\leq X} e(n^k\eta) \quad \text{и} \quad \tilde{T}_k(\eta) = -k \sum_{\frac{X}{3}<n^k\leq X} n^{\tilde{\beta}-1} e(n^k\eta).$$

Сумму $W_k(\chi,\eta)$ определим следующим образом

$$W_k(\chi_0,\eta) = U_k(\chi_o,\eta) - T_k(\eta), \quad W_k(\tilde{\chi}\chi_0,\eta) = U_k(\tilde{\chi}\chi_0,\eta) - \tilde{T}_k(\eta)$$

и

$$W_k(\chi,\eta) = U_k(\chi,\eta) \text{ если } \quad \chi \neq \chi_0, \quad \chi \neq \tilde{\chi}\chi_0. \tag{11}$$

Здесь χ — характер Дирихле по модулю q, χ_0 — главный характер по модулю $q, \tilde{\chi}$ — исключительный примитивный характер по модулю $\tilde{r}, \tilde{r}|q$ (см. [11]). Далее пусть

$$F_k(\chi) = F_k(q,\chi,a) = \sum_{v=1}^{q}{}' \chi(v) e(\frac{av^k}{q}).$$

Использую эти обозначения, находим

$$S_1(\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ F_1(\chi_0)T_1(\eta) + F_1(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta) + \sum_{\chi(modq)} F_1(\chi)W_1(\chi,\eta) \right\}. \tag{12}$$

Отметим, что здесь первые два члена являются главными членами, а третий - остаток. Если $E_{\tilde{\beta}} = 0$ или $r \nmid q$ то в правой части (12) следует опускать второй член. Так как для любого x, $|(\eta x^k)'| \leq k|\eta|P^{k-1} \leq kX^{17\varepsilon-\frac{1}{k}} < \frac{1}{2}$ при $X > X_{k,\varepsilon}$, $0 < x \leq P, 0 < \varepsilon < \frac{1}{34k}$. Как и в [8] (см.§3 работы [3]), при $P_1 = \sqrt[k]{\frac{X}{3}}$ имеем

$$T_k(\eta) = k \int_{P_1}^{P} e(t^k\eta)dt + O(1) = \sum_{\frac{X}{3}<m\leq X} \frac{e(m\eta)}{m^{1-\frac{1}{k}}} + O(1) = \Gamma_k(\eta) + O(1).$$

Аналогично

$$\tilde{T}_k(\eta) = -\sum_{\frac{X}{3}<m\leq X} \frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k} e(m\eta)}{m^{1-\frac{1}{k}}} + O(1) = \tilde{\Gamma_k}(\eta) + O(1).$$

Поэтому, для $S_k(\alpha)$ подобно (14) в главных дугах, имеет место представление

$$S_k(\alpha)=\frac{1}{\varphi(q)}\left\{F_k(\chi_o)\Gamma_k(\eta)+F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{\Gamma}_k(\eta)+\sum_{\chi(modq)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)+O(1)\right\}. \qquad (13)$$

Здесь использовали оценку (см. (6), [9])

$$|F_k(p,\chi,a)|\le k\sqrt{p}\ ,p\nmid a. \qquad (14)$$

В (15) также первые два члена - главные члены, третий член остаток.

Поскольку

$$O\left(\sum_{q\le Q}\sum_{a=1(a,q)=1}^{q}\int_{-\Delta}^{\Delta}\left|S_1(\frac{a}{q}+\eta)\right|d\eta\right)\ll \Delta XQ^2\ll X^{51\varepsilon},$$

то из (11) получим

$$R_1(n)=R_3(n)+R_4(n)+O(X^{51\varepsilon}), \qquad (15)$$

где главный член (произведение главных членов в (12) и (13))

$$R_3(n)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1,(a,q)=1}^{q}\int_{-\Delta}^{\Delta}\Big\{F_1(\chi_0)F_k(\chi_0)T_1(\eta)\Gamma_k(\eta)+F_1(\chi_0)F_k(\tilde{\chi}\chi_0)T_1(\eta)\tilde{\Gamma}_k(\eta)+$$

$$+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)F_k(\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\Gamma_k(\eta)+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\tilde{\Gamma}_k(\eta)\ \Big\}\times$$

$$\times e(-(\frac{a}{q}+\eta)n)d\eta=\sum_{i=1}^{4}R_3^{(i)}(n)$$

и остаток

$$R_4(n)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1,(a,q)=1}^{q}\int_{-\Delta}^{\Delta}\{\ F(\chi_0)T_1(\eta)\sum_{\chi(modq)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)+$$

$$+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\sum_{\chi(modq)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)+F_k(\chi_0)\Gamma_k(\eta)\sum_{\chi(modq)}F_1(\bar{\chi})W_1(\chi,\eta)+$$

$$+F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{\Gamma_k}(\eta)\sum_{\chi(modq)}F_1(\bar{\chi})W_1(\chi,\eta)+\sum_{\chi_1(modq)}F_1(\bar{\chi})W_1(\chi,\eta)\times$$

$$\times\sum_{\chi_2(modq)}F_k(\overline{\chi}_2)W_k(\chi_2,\eta)\ \}\,e(-(\frac{a}{q}+\eta))d\eta=\sum_{i=1}^{5}R_4^{(i)}(n).$$

4.1. Главный член. Согласно (15) главный член $R_3(n)$ является суммой четырех слагаемых, которые изучаются одинаково. Поэтому мы ограничимся с подробным рассмотрением одного из этих слагаемых. Например, $R_3^{(2)}(n)$ (в [9] подробно рассмотрен $R_3^{(3)}(n)$).

$$R_3^{(2)}(n)=\sum_{\substack{q\le Q\\ \tilde{r}/q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}F_1(\chi_0)F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\int_{-\Delta}^{\Delta}T_1(\eta)\tilde{\Gamma_k}(\eta)e(-n\eta)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\varphi^2(\tilde{r})}G(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi^*},n)A_{\tilde{r}}(n,\frac{Q}{\tilde{r}})I_3.$$

Здесь использовали мультипликативность $G(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*\chi_0,n)$.

Рассмотрим I_3. Так как в силу леммы 1[9]

$$\left|\int_{\Delta}^{1/2} T_1(\eta)\tilde{\Gamma_k}(\eta)e(-n\eta)d\eta\right| \ll \tau^{\frac{1}{k}},$$

то

$$I_3=\int_{-1/2}^{1/2} T_1(\eta)\tilde{\Gamma_k}(\eta)e(-n\eta)d\eta+O(\tau^{\frac{1}{k}})=-\sum_{\substack{m+n_1=n\\ \frac{X}{3}<m,n_1\le X}}\frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k}}{m^{1-1/k}}=J_3+O(\tau)^{\frac{1}{k}}.$$

Здесь $J_3\ll P$.Таким образом, согласно леммам 6, 7 [9] находим, что

$$R_3^{(2)}(n)=\frac{G(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi^*},n)}{\varphi^2(\tilde{r})\pi_{\tilde{r}}(n)}(A(n)+O(Q^{-0,1}))\left\{J_3+O(\tau^{\frac{1}{k}})\right\}=$$

$$=\frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi^*},n)}{\rho(\tilde{r},n)}\left(A(n)J_3+O\left(A(n)\tau^{\frac{1}{k}}J_3Q^{-0,1}+Q^{-0,1}\tau^{\frac{1}{k}}\right)\right).$$

Отсюда в силу лемму 8 [9] и

$$L^{-k}\ll\sigma(n)\ll L^k,\ \pi_r(n)A_r(n,Qr^{-1})\ll L^k,\ r\le Q, \tag{16}$$

(см. следствие леммы 5 работы [4]), получим

$$R_3^{(2)}(n)=\frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi^*},n)}{\rho(\tilde{r},n)}\left(A(n)J_3+O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\right)\right).$$

Обращаясь аналогичным образом с остальными слагаемыми из (15), находим

$$R_3^{(2)}(n)=A(n)\left(J_1+\frac{\rho(\tilde{r},\tilde{\chi^*},\chi_0,n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_2+\frac{\rho(\tilde{r},\tilde{\chi^*},\tilde{\chi^*},n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_4+\frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi^*},n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_3\right)+$$

$$+O(P^{1-3,4\varepsilon})+O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\frac{(n,\tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}}\right)=A(n)J+O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\right)+O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\frac{(n,\tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}}\right) \tag{17}$$

для всех $n\le X$ за исключением $E_k^{(2)}(X)\ll X^{1-3,4\varepsilon}$ значений n из них. Здесь

$$J_1=\sum_{n_1+m=n}\frac{1}{m^{1-1/k}},\ J_2=-\sum_{n_1+m=n}\frac{n_1^{\tilde{\beta}-1}}{m^{1-1/k}},$$

$$J_3=-\sum_{n_1+m=n}\frac{m^{\frac{\tilde{\beta}-1}{k}}}{m^{1-1/k}},\ J_4=\sum_{n_1+m=n}\frac{n_1^{\tilde{\beta}-1}m^{\frac{\tilde{\beta}-1}{k}}}{m^{1-1/k}}$$

и $\frac{X}{3}<n_1,\ m\le X,\ \frac{X}{2}<n\le X.$

Нетрудно показать, что

$$J_i\ll P\ i=1,2,3,4. \tag{18}$$

Например:

$$J_1=\sum_{\substack{n=n_1+m\\ \frac{X}{3}<n_1,m\le X}}m^{-1+\frac{1}{k}}=\sum_{\substack{m=n-n_1\\ \frac{X}{3}<m\le\frac{2X}{3}}}m^{-1+\frac{1}{k}}\le P.$$

Рассмотрим J. В доказательстве теоремы мы предполагаем, что $X/2 < n \le X$ и $k \ge 2$ поэтому справедливо неравенство $P/8 < J_1 \le P$. Следовательно, если $E_{\tilde{\beta}} = 1$, то используя лемму 6 [9] и (18) из (17), находим

$$J = J_1 + O\left(\frac{P}{\tilde{r}^{0,33}}(n, \tilde{r})\right).$$

Таким образом, если $(n, \tilde{r}) \le \tilde{r}^{1/4}$, то

$$J = J_1 + O\left(\frac{P}{\tilde{r}^{0,08}}\right) \ge P\left(\frac{1}{8} + O(\tilde{r}^{-2/25})\right).$$

В силу леммы 1 [2] $\tilde{r} \gg L^2 l^{-2}$. Поэтому при достаточно большом X отсюда получим

$$J \ge 0,12P.$$

Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n, \tilde{r}) > \tilde{r}^{1/4} \gg L^{1/4}$. Тогда используя рассуждения приведенные в §6 [3] будем имеет:
при $k-$ нечетном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r}, \tilde{\chi}^*, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} J_4 \ge J_1 - J_4 > J_1(1 - Z^{\tilde{\beta}-1}),$$

а при $k-$ четном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(n, \tilde{r})} J_3 \ge J_1 - J_3 > J_1(1 - Z^{\tilde{\beta}-1}).$$

Поэтому, применяя теорему о среднем и лемму 1.2, убедимся, что

$$J > J_1 \frac{Z - Z^{\tilde{\beta}}}{Z} = J_1 \frac{(1-\tilde{\beta}) Z^{\Theta} lnZ}{Z} \ge \frac{1}{8} P(1-\tilde{\beta}) Z^{\tilde{\beta}-1} lnZ =$$

$$= \frac{1}{8} P((1-\tilde{\beta}) lnZ) e^{(\tilde{\beta}-1) lnZ} \ge C_{11} P(1-\tilde{\beta}) lnZ,$$

где $C_{11} = 0,124$. обозначим

$$C_{12} = min\left(\frac{1}{8}; 0,12; 0,124\right) = 0,12. \tag{19}$$

Таким образом, из (17) находим

$$R_3(n) > \begin{cases} C_{12} A(n) P(1-\tilde{\beta}) lnZ + O\left(P^{1-3,5\varepsilon}\right), & \text{если} \quad E_{\tilde{\beta}} = 1 \quad \text{и} \quad (n, \tilde{r}) > \tilde{r}^{\frac{1}{4}}; \\ C_{12} A(n) P + O\left(P^{1-3,5\varepsilon}\right), & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{20}$$

Согласно лемме 8 [4] $A(n) > 0$ для всех $X/2 < n \le X$, за исключением $\ll X^{0,88}$ значений n. Следовательно , (20) справедливо для всех $n \le X$, за исключением $E_k^{(2)}(X) \ll X^{1-34\varepsilon}$ значений n из них .

4.2. Остаток. Теперь рассмотрим $R_4(n)$.Согласно (15) $R_4(n)$ является суммой пяти слагаемых. Нетрудно заметить, что $R_4^{(1)}(n))$ и $R_4^{(2)}(n)$, а также $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(4)}(n)$ дает одинаковый вклад в $R_4(n)$. Поэтому ограничимся рассмотрением $R_4^{(1)}(n)$, $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(5)}(n)$. Сначала рассмотрим $R_4^{(5)}(n)$, которое является более общим среди рассматриваемых $R_4^{(i)}(n)$.

Имеем

$$R_4^{(5)}(n) = \sum_{q \le Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_1, \chi_2 (mod q)} \sum_{a=1}^{q}{}' F_1(\overline{\chi}_1) F_k(\overline{\chi}_2) e\left(-\frac{a}{q} n\right) \int_{-\Delta}^{\Delta} W_1(\chi_1, \eta) W_k(\chi_2, \eta) e(-n\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{q \le Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_1,\chi_2 (mod q)} G(q, \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, n) I_5(\chi_1, \chi_2). \tag{21}$$

Пусть χ_s- характер по модулю q индуцированный примитивным характером ξ_s по $mod r_s,\ s = 1, 2;\ r = [r_1, r_2],\ g = qr^{-1}$. Тогда $I_5(\chi_1,\ \chi_2) = I_5(\xi_1,\ \xi_2)$.

Обозначим

$$W_k(\chi) = \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |W_k(\chi, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad W_k = \sum_{r \le Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (mod r)} W_k(\chi). \tag{22}$$

Используя пункты 3 и 4, $R_4^{(5)}(n)$ можем представить в виде

$$R_4^{(5)}(n) = \sum_{r \le Q} \sum_{[r_1,r_2]=r} \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1} \sideset{}{^*}\sum_{\xi_2} \frac{G(r, \overline{\xi}_1\chi_0, \overline{\xi}_2\chi_0, n)}{\varphi^2(r)} I_5(\xi_1, \xi_2) A_r(n, Qr^{-1}). \tag{23}$$

Правую часть этого представления разобьем на две суммы: в первую сумму включаем все r с условием $r \le Z$, а во вторую сумму все остальные r, т.е. $Z < r \le Q$. Таким образом,

$$R_4^{(5)}(n) = R_5(n) + R_6(n).$$

Оценим $R_6(n)$.

$$|R_6(n)| \le \sum_{Z<r\le Q} \sum_{[r_1,r_2]=r} \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1} \sideset{}{^*}\sum_{\xi_2} \frac{|G(r, \overline{\xi}_1\chi_0, \overline{\xi}_2\chi_0, n)|}{\varphi^2(r)\pi_r(n)} W_1(\xi_1)(W_k\xi_2)\pi_r(n)|A_r(n, Q/r)|.$$

Отсюда в силу оценки (21), используя лемму 6 [2] , получим

$$|R_6(n)| \le lL^k \sum_{Z<r\le Q} \frac{(n,r)}{r^{0,33}} \sum_{[r_1,r_2]=r} \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1} W_1(\xi_1) \sideset{}{^*}\sum_{\xi_2} W_k(\xi_2).$$

Обозначая правую часть этого соотношения через $Z(n)$, изучим среднее значение оценки $Z(n)$. Используя лемму 3 [2] и оценки

$$\sum_{n \le X} (n, r) < X\tau(r)$$

имеем

$$\sum_{n \le X} Z(n) \ll XW_1W_kZ^{-0,3} \ll \frac{X}{Z^{0,3}} X^{\frac{1}{2}} \frac{P}{X^{\frac{1}{2}}} \ll XPZ^{-0,3}.$$

Отметим, что здесь мы использовали лемму 4 [5] для оценки W_1 и W_k. Возможность применения этой леммы для оценки W_k будеть показано в конце этого пункта.

Из полученной оценки следует, что для всех $n \le X$, за исключением

$$E_k^{(3)}(X) \ll X^{1-1,53\varepsilon+1,7\frac{\varepsilon}{k}}$$

значений n, имеет место неравенство

$$Z(n) \le P^{1-1,7\varepsilon}; \quad R_6(n) \ll P^{1-1,7\varepsilon}.$$

К каждому слагаемому суммы $R_5(n)$, в силу условий $r \le Z$ и $Q^{0,7} \le Qr^{-1}$, применимы леммы 6 и 7 [9] . Поэтому, если из множества $n \le X$, исключить

$$E_k^{(4)}(X) \ll X^{1-1,7\varepsilon}$$

чисел, то для оставшихся n будет иметь место оценка

$$|R_5(n)| \le A(n)W_1W_k + O(PQ^{-0,1}).$$

Таким образом,

$$R_4^{(5)}(n) \le A(n)W_1W_k + O(PQ^{1-1,7\varepsilon}).$$

для всех $\frac{X}{2} < n \le X$, за исключением

$$E_k^{(3)}(X) + E_k^{(4)}(X) \ll E_k^{(3)}(X)$$

значений n.

Теперь рассмотрим $R_4^{(1)}(n)$. Имеем

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{q\le Q}\sum_{\chi(mod q)} \varphi^{-2}(q)G(q,\chi_0,\overline{\chi},n)I_1(\chi)$$

(ср. (21)). Поэтому в этом случае, вместо (23) получим

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{r\le Q}\sum_{\xi(mod r)} \varphi^{2}(r)G(q,\chi_0,\overline{\xi},n)I_1(\xi)A_r(n,Q/r).$$

Далее, оценивая так же, как в случае $R_4^{(5)}(n)$ и учитывая

$$|I_1(\chi)| \le W_k(X)\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T_1(\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \le 3W_k(\chi)X^{\frac{1}{2}},$$

находим

$$R_4^{(1)}(n) < 3A(n)W_k(X)^{\frac{1}{2}} + O(P^{1-1,7\varepsilon}).$$

Так как

$$|I_3(\chi)| \le W_1(\chi)\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{\Gamma}_k(\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} < 3P(X)^{\frac{-1}{2}}W_1(\chi),$$

то, поступая с $R_4^{(3)}(n)$, совершенно аналогично, получим

$$|R_4^{(3)}(n)| < 3A(n)PX^{-\frac{1}{2}}W_1 + O(P^{1-1,7\varepsilon}).$$

Таким образом, собирая полученные оценки для $R_1(n)$ из (15), находим

$$R_1(n) < A(n)\left(6W_kX^{\frac{1}{2}} + 6W_1X^{\frac{-1}{2}} + W_1W_k\right) + O\left(P^{1-1,7\varepsilon}\right). \qquad (24)$$

Суммы W_1, W_k– в правой части (24) оценим при помощи лемм 3 и 4 [5].

Для W_k в силу (22) и (11), (12) имеем

$$W_k = \sum_{r\le Q}\sum_{\chi(mod r)}{}^{*}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta}\left|k\sum_{\frac{X}{3}<p^k\le X}^{\sharp}\chi(p)lnpe(p^k\eta)\right|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим лемму 3 [3] при $\delta = \frac{1}{2\Delta}$ и $\Theta = \frac{1}{2}$, получим

$$W_k = \pi\sum_{r\le Q}\sum_{\chi(mod r)}{}^{*}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|2\Delta k\sum_{\substack{x<p^k\le x+\frac{1}{2}\Delta\\ \frac{X}{3}<p^k\le X}}^{\sharp}\chi(p)lnp\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (25).$$

Отсюда

$$W_1 = \pi \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(mod r)}^{*} \left(\int_{\frac{X}{3}}^{X+\frac{1}{2}\Delta} \left| \Delta \sum_{\substack{x<p\le x+h \\ \frac{X}{3}<p^k\le X}}^{\sharp} \chi(p) lnp \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$\le 2,5671\pi X^{\frac{1}{2}} \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(mod r)}^{*} \left(\max_{x\le\frac{3}{2}X} \max_{h\le\frac{X}{2}} \left(h + \frac{X}{Q} \right)^{-1} \left| \sum_{x}^{x+h\,\sharp} \chi(p) lnp \right| \right).$$

Применение леммы 4 [7] дает ($17\varepsilon < k$)

$$W_1 = X^{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{13} exp\left(-\frac{C_5}{17\varepsilon}\right), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 0; \\ \tilde C_{13} exp\left(-\frac{C_5}{17\varepsilon}\right)(1-\tilde\beta) lnZ, & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 1, \end{cases} \tag{26}$$

где $C_{13} = 5,1392,\ \tilde C_{13} = 2791,157$.
При $k > 1$ учитывая, что при $1 < \Theta_1 < 2$

$$\left(x + \frac{1}{2\Delta} \right)^{\frac{1}{k}} = x^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{\Theta_1}{2k\Delta x} \right) \le x^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k\Delta x} \right) = x^{\frac{1}{k}} + \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k\Delta x}$$

и обозначая $y = x^{\frac{1}{k}}$ и $h_1 = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k\Delta x}$, из (25) находим

$$W_k \le k\pi \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(mod r)}^{*} \left(\int_{X/3}^{X+\frac{1}{2\Delta}} |\Delta \sum_{x<p^k\le x+\frac{1}{2\Delta}}^{\sharp} \chi(p) lnp|^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le 2,5671 k X^{1/2} \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(mod r)}^{*} \max_{y\le\frac{3}{2}P} \max_{h_1\le\frac{1}{2}P} \left| \frac{P}{X h_1} \sum_{y}^{y+h_1\,\sharp} \chi(p) lnp \right|.$$

Теперь применяем лемму 4 [5], при $P = Q,\ X = P$, тогда

$$W_k = \frac{P}{X^{\frac{1}{2}}} \begin{cases} C'_{13} exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon}\right), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 0; \\ \tilde C'_{13} exp\left(-\frac{C_7}{17k\varepsilon}\right)(1-\tilde\beta) lnZ, & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 1, \end{cases} \tag{27}$$

где $C_{13} = C_{13}k,\ \tilde C_{13} = \tilde C_{13}k$ и $17\varepsilon k < \kappa$.
В силу (26) и (27) из (24) получим, если $E_{\tilde\beta} = 0$

$$R_4(n) < C_{14} A(n) P exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon} \right) + O\left(P^{1-1,7\varepsilon} \right), \tag{28}$$

где $C_{14} = 135,75318$ при $k = 2,\ C_{14} = 178,87091$ при $k = 3$ и $C_{14} = 48,91k + 25,0196$ при $k \ge 4$.
Если $E_{\tilde\beta} = 1$, то

$$R_1(n) < \tilde C_{14} A(n) P exp\left(-\frac{C_7}{17k\varepsilon} \right)(1-\tilde\beta) lnZ + O\left(P^{1-1,7\varepsilon} \right), \tag{29}$$

где

$$\tilde C_{14} = e^{9,726}(ke^{0,191} + 1) = e^{9,726}(1,2105k + 1),\ \ k \ge 2.$$

3. Заключение

Доказательство теоремы.

У нас $17\varepsilon < \kappa k^{-1} = \frac{1{,}01}{115k}$ или $\varepsilon \le \frac{1{,}01}{1955k}$. Если $E_{\tilde\beta} = 0$, то для почти всех $n \le X$ (за исключением $\ll E_k^1(X)$ значения) согласно (15), (20) и (28), имеем

$$R_1(n) > A(n)P\left\{\left(c_{12} - c_{14}exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon}\right)\right) + O\left(P^{-3{,}5\varepsilon}L^k + L^kP^{-1{,}7\varepsilon} + P^{51k\varepsilon-1}L^k\right)\right.$$

$$\left.\right\} \ge 0{,}01A(n)P > PL^{-k} > P^{1-\varepsilon}, \qquad (30)$$

где

$$\varepsilon \le \varepsilon_2 = \frac{c_5}{17kln\left(\frac{10c_{14}}{9c_{12}}\right)}. \qquad (31)$$

$$17\varepsilon_2 = (1045{,}5876k(lnk + 6{,}5452))^{-1}, \quad k \ge 2;$$

Если $E_{\tilde\beta} = 1$ и $(n,\tilde r) \le \tilde r^{0{,}3}$,то в силу (15), (20), (29) для почти всех $n \le X$, $\frac{X}{2} < n \le X$(за исключением $\ll E_k^{(1)}(X)$ значений n) снова имеем (30) с

$$\varepsilon \le \varepsilon_3 = \frac{C_7}{17kln\left(\frac{10c_{15}}{9c_{12}}\right)} \qquad (32)$$

если $C_{15} = C_1\tilde C_{14}$,;
$17\varepsilon_3 = (137{,}67088k(lnk + 6{,}75183))^{-1}$, при $k \ge 2$.
Пусть теперь $E_{\tilde\beta} = 1$ и $(n,\tilde r) > \tilde r^{0{,}3}$, тогда исключаем те n, для которых $\tilde r > P^{2\varepsilon}$. Количество исключаемых n, $\frac{X}{2} < n \le X$, в этом случае есть

$$E_k^{(4)}(X) \ll \sum_{n\le X}(n,\tilde r)\tilde r^{-0{,}3} < X\frac{\tau(n)\tau(\tilde r)}{(\tilde r^{0{,}3})} \le XP^{-0{,}5\varepsilon}.$$

Для оставшихся n, модуль $\tilde r$, будет малым, т.е.$\tilde r \le P^{2\varepsilon} < Z$.
Следовательно,

$$R_1(n) \ge 0{,}1C_{12}\frac{P}{A}(n)(1-\tilde\beta)lnZ + O\left(P^{1-1{,}7\varepsilon}\right),$$

для всех n, $\frac{X}{2} < n \le X$, (за исключением $E_k(X) \ll X^\gamma$ значаений n, $n \le X$,) где

$$\varepsilon \le \varepsilon_4 = C_7/17kln\left(\frac{10\tilde c_{14}}{9c_{12}}\right) \qquad (33)$$

$$17\varepsilon_4 = (137{,}67088k(lnk + 13{,}181599))^{-1}, \quad \text{при} \quad , \ k \ge 2.$$

В силу леммы 2 [5]

$$(1-\tilde\beta)lnZ > C_2(4\varepsilon P^\varepsilon ln^2P)^{-1}.$$

Поэтому

$$R_1(n) \ge C_{16}P^{1-\varepsilon}A(n)L^{-2} + O(P^{1-1{,}7\varepsilon}) > C_{17}P^{1-\varepsilon}L^{-k-2} + O(P^{1-1{,}7\varepsilon}) > C_{18}P^{1-1{,}5\varepsilon} > P^{1-1{,}6\varepsilon} \qquad (34)$$

для всех $n \le X$, за исключением $E_k(X) \ll X^{1-\varepsilon/k}$ значаений n, из них . Положим $\varepsilon = \min\left(\frac{\kappa}{17k}; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\right)$ тогда в силу (31), (32), (33) получим $\varepsilon = \varepsilon_2$. Теперь из (30), (34), (8) получим утверждение сформулированной теоремы. Отметим, что $\frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $k > 205$, а также $((137k^3lnk)^{-1} < \frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $lnk > 628$, то есть если $2 \le k \le 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\varepsilon_2}{k}$, если же $k > 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\rho_0}{4}$ и в частности если $k > e^{628}$, то можно пологать $\gamma = 1 - \frac{1}{137k^3lnk}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". - Казань, 2000. - № 8(459). -С.3-15.

2. Аллаков И. Сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш. Монография. -Т, "Таълим"2012, 200с.

3. Аллаков И. Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - 1991. - №7. - с.9

4. Аллаков И. О числах, представимых в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа // Алгебра и её приложения: Тезисы докладов международной конф.. 5-9 августа 2002. -Красноярск, 2002.- С.3-4.

5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об одной тернарной задаче с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. : Тез. докл. V международной конф. 19-20мая 2003. -Тула, 2003. -С.18-19.

6. Виноградов А. И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда // Acta arithm. - Варшава, 1985. - V.46.- P.33-56.

7. Жукова А. А. Проблема Харди-Литлвуда.// Изв.Вузов. Математика. 2000. 2(453), с.41-49.

8. Плаксин В. А. Исключительное множество суммы простого и фиксированной степени простого числа. - Петрозаводск: 1984, 33с. -. Деп. в ВИНИТИ, 23.10 84. № 7010- 84.

9. Плаксин В. А. Об одном вопросе Хуа- Ло -Кена // Мат. заметки.- 1990.- № 3(47). - с. 78-90.

10. Чубариков В. Н. Многомерные проблемы теории простых чисел. //Чебышевский сборник, том 12. Вып. 4(2011). С. 176-256.

11. Davenport. H. Multiplicative Number Theory, Third edition, Graduate Texts in Math.71,2000. New York: Sringer - Verlag. 178 p.

12. Jorg Brudern. Representations of natural numbers as the sum of a prime and a k-th power. //Tsukuba Journal of Mathematics. Vol. 32, No. 2 (December 2008), pp. 349-360

13. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach' s problem // Acta arithm. - 1975 v. 27. p. 353-370.

14. Montgomery H. L. and Vaughan R. C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006. 552p.

15. Vaughan R. C. The Hardi-Littlewood method. // Cambridge University Press, Nev York. 1997. 233 p.

16. Vinogradov A. I. The metod of trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Moskov: Nauka. 1980. 144 p.

REFERENCES

1. Allakov I. 2000, “On the representation of numbers by the sum of two primes from an arithmetic progression”, Izv. Vuzov. "Matematika". Kazan. № 8 (459) pp. 3-15.

2. Allakov I. 2012, “Calculation of additive problems of number theory in an analytical way.”, Ta’lim, Tashkent., 200p.

3. Allakov I. 1991, “On a binary additive problem with primes from an arithmetic progression”, Dokl. AN RUz №7 p. 9.

4. Allakov I. “On numbers representable as the sum of a prime and a fixed degree of a prime”„ Algebra and its applications:Abstracts of international conf. Krasnoyarsk, 2002, pp.3-4.

5. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. “On a ternary problem with primes”, Algebra and number theory: Modern problems in applications Thes. Doc. V international conference Tula, 2003, pp.18-19.

6. Vinogradov A. I. 1985, “Hardy-Littlewood binary problem”, Acta arithm. Warsaw 46 pp. 33-56.

7. Zhukova A. A. 2000, “Hardy Littlewood Problem”, Izvestiya VUZov. Matematika 2 (453) pp. 41-49.

8. Plaksin V. A. 1984, “An exceptional set of the sum of a prime and a fixed power of a prime”, Dep. at VINITI № 7010-84 Petrozavodsk pp. 33-34.

9. Plaksin V. A. 1990, “About one question of Hua-Lo-Ken”, Mathematical notes №3 (47) pp. 78-90.

10. Chubarikov V. N. 2011, “Multidimensional problems of the theory of primes”, Chebyshevskiy sbornik, tom 12, Vypusk 4 pp. 176-256.

11. Davenport H. 2000, “Multiplicative Number Theory”, Third edition, Graduate Texts in matr.74 New York: Sringer- Verlag. p.176.

12. Jorg Brudern 2008, “Representations of natural numbers as the sum of a prime and a k-th power”, Tsukuba Journal of Mathematics. Vol. 32, No. 2, pp. 349-360.

13. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975, “The exceptional set in Goldbach’ s problem” Acta arithm. v. 27 pp. 353-370.

14. Montgomery H. L. and Vaughan R. C.2006, “Multiplicative number theory”, I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. p.552.

15. Vaughan R. C. 1977, “The Hardi-Littlewood method”, Cambridge University Press, New York. p. 233.

16. Vinogradov A. I. 1980, “The metod of trigonometrical Sums in the Theory of Numbers”, Moskov: Nauka p. 144.

Получено 8.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-45-56

О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы[1]

Л. Г. Архипова (г. Москва), В. Н. Чубариков (г. Москва)

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков —Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет
e-mail: arhiludka@mail.ru, chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье продолжены исследования по теории кратных тригонометрических сумм, в основе которой лежит метод И.М.Виноградова. Здесь мы находим для $n = r = 2$ оценки снизу показателей сходимости особого ряда и особого интеграла асимптотической формулы при $P \to \infty$ для числа решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1,\dots,t_r \le n,$$

где $n \ge 2, r \ge 1, k$ — натуральные числа, причём каждая переменная $x_{i,j}$ может принимать все целые значения от 1 до $P \ge 1$.

Ключевые слова: показатель сходимости, особый интеграл, особый ряд.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 45–56.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-45-56

On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem

L. G. Arkhipova (Moscow), V. N. Chubarikov (Moscow)

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov —the Lomonosov Moscow State University, the faculty of Mechanics and Mathematics
e-mail: arhiludka@mail.ru, chubarik2009@live.ru

Abstract

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №16-01-00-071.

In the paper we continue studies on the theory of multivariate trigonometric sums, in the base of which lies of the I.M.Vinogradov's method. Here we obtain for $n = r = 2$ lower estimates of the convergence exponent of the singular series and the singular integral of the asymptotic formulas for $P \to \infty$ for the number of solutions of the following system of Diophantine equations

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\ldots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1,\ldots,t_r \le n,$$

where $n \ge 2, r \ge 1, k$ are natural numbers, moreover an each variable $x_{i,j}$ can take all integer values from 1 to $P \ge 1$.

Keywords: exponent of the convergence, singular integrals, singular series.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov 2019, "On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 45–56.

1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования по теории кратных тригонометрических сумм, сердцевиной которой является мощный метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова [1, 2]. Фундаментальные результаты в этой теории получены Г. И. Архиповым, А. А. Карацубой и вторым автором [5, 6, 7].

Ранее в статьях [12, 13] были найдены оценки снизу показателей сходимости особого ряда и особого интеграла асимптотической формулы при $P \to \infty$ для числа решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\ldots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1,\ldots,t_r \le n,$$

где $n \ge 2, r \ge 1, k$ — натуральные числа, причём каждая переменная $x_{i,j}$ может принимать все целые значения от 1 до $P \ge 1$.

Здесь мы уточняем эти оценки в случае $n = r = 2$. Далее мы рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = x_{k+1} + \ldots + x_{2k}, \\ y_1 + \ldots + y_k = y_{k+1} + \ldots + y_{2k}, \\ x_1^2 + \ldots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2k}^2, \\ x_1y_1 + \ldots + x_ky_k = x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_{2k}y_{2k}, \\ y_1^2 + \ldots + y_k^2 = y_{k+1}^2 + \ldots + y_{2k}^2, \end{cases} \tag{1}$$

в которой неизвестные $x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k}$ принимают значения натуральных чисел от 1 до P, где $P \ge 1$, $k \ge 2$.

Пусть $L(x, y) = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y$, $Q(x, y) = \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2$. Тогда особый интеграл θ представляется в виде

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i(Q(x,y)+L(x,y))}dxdy\right|^{2k} d\alpha_{20}d\alpha_{11}d\alpha_{02}d\alpha_{10}d\alpha_{01}. \tag{2}$$

Далее, пусть $q_{10}, q_{01}, q_{20}, q_{11}, q_{02}$ — натуральные числа, $(a_{kl}, q_{kl}) = 1$, $0 \le k, l \le 2$, $q = q_{10}q_{01}q_{20}q_{11}q_{02}$,

$$L_q(x,y) = \frac{a_{10}}{q_{10}}x + \frac{a_{01}}{q_{01}}y,\ Q_q(x,y) = \frac{a_{20}}{q_{20}}x^2 + \frac{a_{11}}{q_{11}}xy + \frac{a_{02}}{q_{02}}y^2, \tag{3}$$

$$F_q(x,y) = Q_q(x,y) + L_q(x,y). \tag{4}$$

Тогда особый ряд σ или среднее значение кратной полной рациональной тригонометрической суммы

$$S\left(q, F_q(x,y)\right) = \sum_{x=1}^{q}\sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i F_q(x,y)} \tag{5}$$

имеет вид

$$\sigma = \sum_{q_{20}=1}^{+\infty}\sum_{q_{11}=1}^{+\infty}\sum_{q_{02}=1}^{+\infty}\sum_{q_{10}=1}^{+\infty}\sum_{q_{01}=1}^{+\infty} \times$$
$$\times \sum_{\substack{a_{20}=0\\(a_{20},q_{20})=1}}^{q_{20}-1}\ \sum_{\substack{a_{11}=0\\(a_{11},q_{11})=1}}^{q_{11}-1}\ \sum_{\substack{a_{02}=0\\(a_{02},q_{02})=1}}^{q_{02}-1}\ \sum_{\substack{a_{10}=0\\(a_{10},q_{10})=1}}^{q_{10}-1}\ \sum_{\substack{a_{01}=0\\(a_{01},q_{01})=1}}^{q_{01}-1} \left|q^{-1}S\left(q, F_q(x,y)\right)\right|^{2k}. \tag{6}$$

При исследовании показателя сходимости особого интеграла и ряда по сравнению с одномерной аддитивной задачей возникают следующие трудности: возможное появление особых кривых, связанных с многочленом в экспоненте сумм и интегралов, а также вопросы относительно сходимости кратных несобственных интегралов. В частности, имеем (см., например,[15])

$$\lim_{P\to+\infty}\int_{-P}^{P}\int_{-P}^{P}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy = \pi,$$

в то же время при натуральных значениях n находим

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2\pi n}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy = 0.$$

2. Особый интеграл

Лемма 1. *Пусть $Q(x,y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2$ — квадратичная форма с вещественными коэффициентами, $a_{20}^2 + a_{11}^2 + a_{02}^2 \ne 0$. Тогда имеем*

$$J = \left|\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\int_{-B}^{B} e^{2\pi i Q(x,y)}dxdy\right| = \left(2\left|D\right|\right)^{-1/2},$$

где $D = a_{20}a_{02} - a_{11}^2$.

Доказательство. Сначала приведем квадратичную форму $Q(x,y)$ к диагональному виду. Пусть $a_{20}\neq 0$. Тогда имеем

$$Q(x,y)=a_{20}\left(x+\frac{a_{11}}{a_{20}}y\right)^2+\frac{D}{a_{20}}y^2=a_{20}x_1^2+\frac{D}{a_{20}}y_1^2=Q_1(x_1,y_1).$$

Следовательно,

$$J=\left|\lim_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{B}e^{2\pi i\frac{D}{a_{20}}y_1^2}dy_1\int\limits_{-B+\frac{a_{11}}{a_{20}}y_1}^{B+\frac{a_{11}}{a_{20}}y_1}e^{2\pi i a_{20}x_1^2}dx_1\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|D|}}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i x^2}dx\right|^2=\left(2\,|D|\right)^{-1/2}.$$

Случай $a_{20}=a_{02}=0$, $a_{11}\neq 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $n\geq 1$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — вещественные числа, и*

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x,\ \beta_r(x)=f^{(r)}(x)/r!,\ r=1,\ldots,n.$$

$$H=H\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)=\min_{a\leq x\leq b}\sum_{r=1}^{n}\left|\beta_r(x)\right|^{1/r}.$$

Тогда для интеграла

$$J=\int\limits_a^b e^{2\pi i f(x)}dx$$

справедлива оценка

$$|J|\leq\min\left(b-a,6en^3H^{-1}\right).$$

Доказательство [6], теорема 1.1, с.13.

Лемма 3. *Пусть $F(x,y)=Q(x,y)+L(x,y)$, где $Q(x,y)$ — квадратичная форма вида $Q(x,y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2$, $D=a_{20}a_{02}-a_{11}^2$ — её дискриминант и $L(x,y)=a_{10}x+a_{01}y$ —линейная форма, и пусть*

$$H=\min_{0\leq x,y\leq 1}\left\{\sqrt{|D|}+\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right\}.$$

Тогда для интеграла J вида

$$J=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{2\pi i F(x,y)}dxdy$$

справедлива оценка $|J|\leq\min\left(1,H^{-1}\right)$.

Доказательство. При $H\leq 1$ оценка $J\leq 1$ очевидна. Пусть $H>1$. Возможны несколько случаев: 1)$\sqrt{|D|}\geq\frac{H}{3}$, 2) $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\geq\frac{H}{3}$ на некотором множестве $\Delta_1\in K$, где K — квадрат $0\leq x,y\leq 1$, 3) $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\geq\frac{H}{3}$ на некотором множестве $\Delta_2\in K$ и 4)$\sqrt{|D|}<\frac{H}{3}$, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|<\frac{H}{3}$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|<\frac{H}{3}$ на множестве $K\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2)$.

Рассмотрим случай 1). Из леммы 1 следует, что $|J| \le \left(\sqrt{|D|}\right)^{-1} \le H^{-1}$.

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда

$$|J| \le \int_0^1 dy \left| \int_0^1 e^{2\pi i F_1(x,y)} dx \right|,$$

где $F(x,y) = F_1(x,y) + a_{02}y^2 + a_{01}y$.

Представим многочлен $F_1(x,y)$ как многочлен $F_1(x,y) = F_2(x) = a_{20}x^2 + (2a_{11}y + a_{01})\,x$ от переменной x. Имеем $\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_{01}$. Пользуясь леммой 2, получим

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i F_1(x,y)} dx \right| \le H^{-1}.$$

Отсюда находим $|J| \le H^{-1}$.

Случай 3) рассматривается аналогично.

Осталось рассмотреть случай 4). Этот случай не имеет места в силу определения величины H.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Особый интеграл θ расходится при $k \le 5$.*

Доказательство. Пусть $P > 1$ — натуральное число. Обозначим символом $K\,(P)$ количество многочленов $F(x,y)$, удовлетворяющих условиям

$$Q(x,y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2,\ L(x,y) = a_{10}x + a_{01}y,$$
$$x_r = 0,25 + r\,(2P)^{-1},\ y_s = 0,25 + s\,(2P)^{-1},\ 1 \le r, s \le P,$$
$$F(x,y,r,s) = Q(x,y) + L(x,y) + a_{00} =$$
$$= Q(x - x_r, y - y_s) + \beta_{10}(x - x_r) + \beta_{01}(y - y_s) = \Phi(x - x_r, y - y_s),$$

где $|\beta_{10}|, |\beta_{01}| \le c_1 P$, $c_1 =?$, $3P^2 < a_{20}, a_{02} \le 4P^2$, $P^2 < a_{11} \le 2P^2$.

Тогда для $\Phi = \Phi(x,y)$ имеем

$$J = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y,r,s)} dxdy = \int_{-x_r}^{1-x_r} dx \int_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i \Phi(x,y)} dy = \sum_{k=1}^5 J_k,$$

где при $\Delta = c/P$,

$$J_1 = \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi i \Phi} dy,\ J_2 = \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-y_s} e^{2\pi i \Phi} dy,\ J_3 = \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \int_{-y_s}^{-\Delta} e^{2\pi i \Phi} dy,$$
$$J_4 = \int_{\Delta}^{1-x_r} dx \int_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i \Phi} dy,\ J_5 = \int_{-x_r}^{1-\Delta} dx \int_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i \Phi} dy.$$

Сначала подготовим J_1 для оценки снизу. Имеем

$$J_1 = \int_{-\Delta}^{\Delta} dx \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi i Q(x,y)} dy + \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \Psi(x,y) e^{2\pi i Q(x,y)} dxdy,$$

где $\Psi(x,y)=e^{2\pi i(\beta_{10}x+\beta_{01}y)}-1$.

При $|x|,|y|\le\Delta$ находим

$$|\Psi(x,y)|=2\left|\sin\pi\left(\beta_{10}x++\beta_{01}y\right)\right|\le 2\pi\left(|\beta_{10}|+|\beta_{01}|\right)\Delta\le 4\pi c_1\Delta P=4\pi cc_1.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}\Psi(x,y)e^{2\pi iQ(x,y)}dxdy\right|\le 4\pi c^3c_1P^{-2}$$

Далее, используя лемму 1, получим

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{2\pi iQ(x,y)}dy=(2\,|D|)^{-1/2}+R,$$

где $R=R_1+R_2+R_3+R_4$, причём

$$R_1=\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\int_{\Delta}^{+\infty}e^{2\pi iQ(x,y)}dy,\ R_2=\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\int_{-\infty}^{\Delta}e^{2\pi iQ(x,y)}dy,$$

$$R_3=\int_{\Delta}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi iQ(x,y)}dy,\ R_4=\int_{-\infty}^{-\Delta}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi iQ(x,y)}dy.$$

Оценим $|R|$ сверху. Имеем

$$R_1=\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{2\pi ia_{20}x^2}dx\int_{\Delta}^{+\infty}e^{2\pi i(a_{02}y^2+2a_{11}xy)}dy=$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{2\pi i\left(a_{20}-\frac{a_{11}}{a_{02}}\right)x^2}dx\int_{\Delta+\frac{a_{11}}{a_{02}}x}^{+\infty}e^{2\pi ia_{02}y^2}dy.$$

Отсюда, используя вторую теорему о среднем (см., например, теорема 10, с.212), находим $|R_1|\le\left(\pi\sqrt{2}a_{02}\right)^{-1}$. Ананлогично получим, что $|R_2|\le\left(\pi\sqrt{2}a_{02}\right)^{-1}$.

$$R_3=\int_{\Delta}^{+\infty}e^{2\pi ia_{20}x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\left(a_{02}y^2+2a_{11}xy\right)}dy=$$

$$=\int_{\Delta}^{+\infty}e^{2\pi i\left(a_{20}-\frac{a_{11}^2}{a_{02}}\right)x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ia_{02}y^2}dy=e^{\pi i/4}(2a_{02})^{-1/2}\int_{\Delta}^{+\infty}e^{2\pi i\left(a_{20}-\frac{a_{11}^2}{a_{02}}\right)x^2}dx.$$

Следовательно, $|R_3|\le\Delta\left(2\pi^2a_{02}\right)^{-1/2}$. Аналогично $|R_4|\le\Delta\left(2\pi^2a_{02}\right)^{-1/2}$.

Таким образом, $|R|\le\left((\pi\sqrt{2}a_{02})^{-1}+\Delta\left(2\pi^2a_{02}\right)^{-1/2}\right)$.

Переходим к оценкам сверху интегралов J_k, $k=2,3,4,5$. Находим

$$|J_2|\le\int_{-\Delta}^{\Delta}\left|\int_{\Delta}^{1-y_s}e^{2\pi i(a_{02}y^2+2a_{11}xy+a_{01}y)}dy\right|dx,$$

$$|J_4|\le\int_{-y_s}^{1-y_s}\left|\int_{\Delta}^{1-x_r}e^{2\pi i(a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{10}x)}dx\right|dy.$$

Внутренний интеграл J_{41} в J_4 подобен внутреннему интегралу J_{21} в J_2, поэтому оценим только интеграл вида

$$J_{21} = \left| \int\limits_{\Delta}^{1-y_s} e^{2\pi i(a_{02}y^2+2a_{11}xy+a_{01}y)}dy \right| = \left| \int\limits_{\Delta+(a_{11}x+0,5a_{01})/a_{02}}^{1-y_s+(a_{11}x+0,5a_{01})/a_{02}} e^{2\pi i a_{02}y^2} \right|.$$

Далее, применяя вторую теорему о среднем к вещественной и мнимой частям интеграла J_{21}, получим

$$|J_{21}| \le \left(2a_{02}\left(a_{02}a_{11} - 0,5a_{01}\right)\right)^{-1/2} \le P^{-2}.$$

Подобно имеем $|J_{41}| \le P^{-2}$. Таким образом находим оценки $|J_2| \le \Delta P^{-2} \le P^{-3}$, $|J_4| \le P^{-2}$. Оценки интегралов J_3 и J_5 получаются аналогично. Имеем $|J_3| \le P^{-3}$, $|J_5| \le P^{-2}$. Следовательно, $|J| \ge 0,5\,(2\,|D|)^{-1/2}$.

Покажем теперь, что при $(r_1, s_1) \ne (r_2, s_2)$ многочлены $F(x, y, r_1, s_1)$ и $F(x, y, r_2, s_2)$ будут различны. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $F(x, y, r_1, s_1) \equiv F(x, y, r_2, s_2)$ как функции от x и y. Имеем

$$\begin{gathered} F(x, y, r, s) = Q(x - x_r, y - y_s) + \beta_{10}(x - x_r) + \beta_{01}(y - y_s) = \\ = Q(x, y) - x\left(2a_{02}x_r + 2a_{11}y_s - \beta_{10}\right) - y\left(2a_{20}y_s + 2a_{11}x_r - \beta_{01}\right) + \beta. \end{gathered}$$

В частности будут равны коэффициенты линейных форм, т.е.

$$\begin{cases} 2a_{20}x_{r_1} + 2a_{11}y_{s_1} - \beta_{10}^{'} = 2a_{20}x_{r_2} + 2a_{11}y_{s_2} - \beta_{10}^{''}, \\ 2a_{02}y_{r_1} + 2a_{11}x_{s_1} - \beta_{01}^{'} = 2a_{02}y_{r_2} + 2a_{11}x_{s_2} - \beta_{01}^{''}, \end{cases}$$

Подставляя $x_r = 0,25 + r\,(2P)^{-1}$, $y_s = 0,25 + s\,(2P)^{-1}$, $1 \le r, s \le P$ и полагая $r_1 - r_2 = u$, $s_1 - s_2 = v$, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} a_{20}u + a_{11}v = \theta^{'}, \\ a_{11}u + a_{02}v = \theta^{''}, \end{cases}$$

где переменные u, v могут принимать только целые значения,

$$\theta^{'} = P\left(\beta_{10}^{'} - \beta_{10}^{''}\right), \quad \theta^{''} = P\left(\beta_{01}^{'} - \beta_{01}^{''}\right).$$

Отсюда находим

$$u = \frac{\theta^{'} a_{02} - \theta^{''} a_{11}}{D},\ v = \frac{\theta^{''} a_{20} - \theta^{'} a_{11}}{D},\ D = a_{20}a_{02} - a_{11}^2.$$

Следовательно, $|u| < 1$, $|v| < 1$. Так как u и v — целые числа, то $u = v = 0$. Это противоречит тому, что многочлены $F(x, y, r_1, s_1)$ и $F(x, y, r_2, s_2)$ будут различны при $(r_1, s_1) \ne (r_2, s_2)$.

Таким образом, количество $K\,(P)$ многочленов F удовлетворяет неравенству $K\,(P) \le P^{10}$.

Наконец, при $P_m = c_0^m$ имеем

$$\theta \ge \sum_{m=1}^{\infty} K\left(P_m\right)\left|J\left(P_m\right)\right|^{2k} \ge \sum_{m=1}^{\infty} P_m^{10-2k}.$$

Последний ряд расходится при $k \le 5$.

Теорема доказана.

3. Особый ряд

Рассмотрим особый ряд σ, определяемый (3)-(6). Известно, что он сходится при $k>9$ и расходится при $k\le 5$. Здесь мы находим показатель сходимости σ.

Пусть каноническое разложение q имеет вид $q=\prod\limits_{p|q}p^{\alpha_p}$ и $q_p=q/p^{\alpha_p}$. Тогда имеем

$$S\left(q,F_q(x,y)\right)=\prod_{p|q}S\left(p^{\alpha_p},q_p^{-1}F_q(q_px,q_py)\right).$$

Отсюда следует, что $\sigma=\prod\limits_{p}\sigma_p$, причём произведение распространяется на все простые числа, и

$$\sigma_p=1+\sum_{s=1}^{\infty}A\left(p^s\right),\ A\left(p^s\right)=\sum_{a_{20}=0}^{p^s-1}\sum_{a_{11}=0}^{p^s-1}\sum_{\substack{a_{02}=0\\ p|(a_{20},\dots,a_{01})}}^{p^s-1}\sum_{a_{10}=0}^{p^s-1}\sum_{a_{01}=0}^{p^s-1}\left|p^{-2s}S\left(p^s,F_{p^s}(x,y)\right)\right|^{2k}. \qquad (7)$$

Лемма 4. *Пусть $p>2$ — простое число, $F(x,y)$ — многочлен второй степени*

$$F(x,y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y,$$

причём дискриминант его квадратичной формы $D=a_{20}a_{02}-a_{11}^2$ не сравним с нулём по модулю p.

Пусть далее

$$S=S\left(p,F(x,y)\right)=\sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}e^{2\pi i\left(\frac{a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y}{p^s}\right)}.$$

Тогда

$$\left|S\left(p,F(x,y)\right)\right|=p.$$

Доказательство. Пусть $a_{20}\not\equiv 0\pmod p$. Тогда имеем

$$F(x,y)=a_{20}\left(x+\frac{a_{11}}{a_{20}}y+\frac{a_{10}}{2}\right)^2+\frac{D}{a_{20}}y^2-a_{11}a_{10}y-\frac{a_{10}^2}{4}.$$

Воспользовавшись значением суммы Гаусса,отсюда находим

$$|S|=\sqrt{p}\left|\sum_{y=1}^{p}e^{2\pi i\frac{D}{a_{20}}y^2}\right|=p.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $p>2$ — простое число, $s\ge 1$ — натуральное число, $F(x,y)$ — многочлен второй степени*

$$F(x,y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y,$$

причём дискриминант его квадратичной формы $D=a_{20}a_{02}-a_{11}^2$ не сравним с нулём по модулю p.

Пусть далее

$$S=S\left(p^s,F(x,y)\right)=\sum_{x=1}^{p^s}\sum_{y=1}^{p^s}e^{2\pi i\left(\frac{a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y}{p^s}\right)}.$$

Тогда

$$\left|S\left(p^s,F(x,y)\right)\right|\le p^s.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $s > 2$. Имеем

$$S = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} S_{u,v},$$

где

$$S_{u,v} = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv u (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^s} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv v (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^s} e^{2\pi i \frac{F(x,y)}{p^s}}.$$

Производя замену переменных $x = x_1 + p^{s-1}z_1$, $y = y_1 + p^{s-1}t_1$, $1 \leq x_1, y_1 \leq p^{s-1}$, $0 \leq z_1, t_1 \leq p$, получим

$$S_{u,v} = \sum_{\substack{x_1=1 \\ x_1 \equiv u (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1 \\ y_1 \equiv v (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} \sum_{z_1=0}^{p-1} \sum_{t_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F(x_1+p^{s-1}z_1, y_1+p^{s-1}t_1)}{p^s}} =$$

$$= \sum_{\substack{x_1=1 \\ x_1 \equiv u (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1 \\ y_1 \equiv v (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} e^{2\pi i \frac{F(x_1,y_1)}{p^s}} \sum_{z_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F'_{x_1}(x_1,y_1)z_1}{p}} \sum_{t_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F'_{y_1}(x_1,y_1)t_1}{p}}.$$

Заметим, что для набора (u, v), не являющегося решением системы сравнений

$$\begin{cases} F'_x = 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_{10} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p), \\ F'_y = 2a_{11}x + 2a_{02}y + a_{01} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p), \end{cases}$$

имеет место равенство $S_{u,v} = 0$.

Поскольку $D \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$, последняя система сравнений имеет единственное решение по модулю p: $u = \mu$, $v = \nu$. Следовательно, справедливо соотношение

$$S = S_{\mu,\nu} = p^2 \sum_{\substack{x_1=1 \\ x_1 \equiv \mu (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1 \\ y_1 \equiv \nu (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-1}} e^{2\pi i \frac{F(x_1,y_1)}{p^s}}.$$

Далее находим

$$|S| = p^2 \left| \sum_{x_1=1}^{p^{s-2}} \sum_{y_1=1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i F_1(x_1,y_1)} \right|,$$

где $F_1(x, y) = p^{-2} \left(F(\mu + px, \nu + py) - F(\mu, \nu) \right)$.

Применяя последнее соотношение $l = [s/2]$ раз, получим

$$|S| \leq p^{2l} \left| \sum_{\substack{x_l=1 \\ x_l \equiv \mu_l (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-2l}} \sum_{\substack{y_l=1 \\ y_l \equiv \nu_l (\mathrm{mod}\ p)}}^{p^{s-2l}} e^{2\pi i \frac{F_l(x_l,y_l)}{p^{s-2l}}} \right|,$$

где $F_l(x, y) = p^{-2} \left(F_{l-1}(\mu_{l-1} + px, \nu_{l-1} + py) - F_{l-1}(\mu_{l-1}, \nu_{l-1}) \right)$.

Theorem 1. *Особый ряд σ расходится при $k \leq 6$.*

Доказательство. Имеем $\sigma \geq \sigma_0$,где

$$\sigma_0 = \sum_{p>2} \sum_{\substack{a_{20}=1\\(a_{20},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{11}=1\\(a_{11},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{02}=1\\(a_{02},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{10}=1\\(a_{10},p)=1}}^{p} \sum_{\substack{a_{01}=1\\(a_{01},p)=1}}^{p} \sum_{b=1}^{(p-1)/2} \sum_{c=0}^{(p-1)} \sum_{d=0}^{(p-1)} \left| p^{-4} \sum_{x=1}^{p^2} \sum_{y=1}^{p^2} e^{2\pi i \Phi(bx+c, by+d)} \right|^{2k},$$

где

$$\Phi(x,y) = \frac{a_{20}}{p^2}x^2 + \frac{a_{11}}{p^2}xy + \frac{a_{02}}{p^2}y^2 + \frac{a_{10}}{p}x + \frac{a_{01}}{p}y.$$

Подставляя

$$x = u + pz,\ y = v + pt\ (1 \leq u, v \leq p,\ 0 \leq z, t \leq p-1),$$

при $p > 2$ находим

$$\sum_{x=1}^{p^2} \sum_{y=1}^{p^2} e^{2\pi i \Phi(x,y)} = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} e^{2\pi i \Phi(x,y)} \sum_{z=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{2a_{20}uz + a_{11}(ut+vz) + 2a_{02}vt}{p}} = p^3$$

Следовательно,

$$\sigma_0 = \sum_{p>2} \sum_{\substack{a_{20}=1\\(a_{20},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{11}=1\\(a_{11},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{02}=1\\(a_{02},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{10}=1\\(a_{10},p)=1}}^{p} \sum_{\substack{a_{01}=1\\(a_{01},p)=1}}^{p} \sum_{b=1}^{(p-1)/2} \sum_{c=0}^{(p-1)} \sum_{d=0}^{(p-1)} p^{-2k} > 2^{-8} \sum_{p>n} p^{11-2k}.$$

Из расходимости ряда $\sum_p p^{11-2k}$ находим, что ряд σ_0, а значит и ряд σ расходятся при $11 - 2k \geq -1$, т.е. при $k \leq 6$.

Теорема доказана.

4. Заключение

В настоящей статье для $n = r = 2$ доказаны нижние оценки показателей сходимости особого интеграла и особого ряда в многомерной проблеме Терри. На самом деле эти оценки точны. В ближайшее время мы предполагаем представить доказательство верхних оценок. Случай $n \geq 3$ является более сложным, так как отсутствуют точные формулы типа формул для сумм Гаусса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. // М.: Наука 1980.

2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Изд. 10-е. // Спб.: Изд-во «Лань» 2004, 176 с.

3. Hua L.-K. Selected Papers. // New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp.888.

4. Хуа Л.-Г. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. // М.: Мир, 1964, pp.188.

5. Архипов Г. И.Избранные труды. // Орёл.: Изд-во Орловского ун-та. 2013.

6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. // М.: Наука 1987.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. // Berlin-New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39), 2004.

8. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. О многомерной системе сравнений Архипова–Карацубы.// Докл. РАН. 2017. **472,** № 6, С. 631-633.

9. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм.// Чебышёвский сб. 2019. **20,** № 1(69), С. 31-37.

10. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле.// Докл. АН СССР. 1976. **227,** № 6, С. 1308-1310.

11. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах.// Матем. заметки. 1976. **20,** № 1, С. 61-68.

12. Чубариков В. Н. О показателе сходимости особого интеграла одной многомерной аддитивной проблемы.// Докл. РАН. 2015. **46,** № 5, С. 530-532.

13. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм.// Чебышёвский сб. 2015. **16,** № 4(56), С. 303-318.

14. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы.// Вестн. Моск. ун-та. Сер 1, математика, механика. 2018. № 5, С. 68-71.

15. Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу. Изд. 19е., испр. // Спб.: Изд-во «Лань» 2017, 624 с.

16. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: Учебник для ВУЗов, изд. 4е., испр. // М.: Дрофа 2004, 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the number theory// Moscow: Nauka, pp. 144.

2. Vinogradov I. M. 2004. Elements of the number theory. Ed. 10th. // Sankt-Petersburg: Publ.House «Lan'» , pp. 176.

3. Hua L.-K. 1983. Selected Papers. // New York Inc.: Springer Verlag, pp.888.

4. Hua L.-K. 1964. The method of trigonometric sums and its applications in the number theory. // Moscow: Mir, pp.188.

5. Arkhipov G. I. 2013. Selected Works. // Orjol: Publ.House of Orjol University.

6. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 1987. The theory of multiple trigonometric sums. // Moscow: Nauka.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. // Berlin-New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39).

8. Saliba H. M., Chubarikov V. N. 2017. On the multivariate Arkhipov–Karatsuba system of congruences.// Dokl. RAS. **472,** № 6, p. 631-633.

9. Saliba H. M., Chubarikov V. N. 2019. The theorem on a mean value for non complete rational trigonometric sums.// Chebyshev Sbornik. **20,** № 1(69), p. 31-37.

10. Chubarikov V. N. 1976. On a multiple integral.// Dokl. AS USSR. **227,** № 6, p.1308-1310.

11. Chubarikov V. N. 1976. On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals.// Math. notes. **20,** № 1, p. 61-68.

12. Chubarikov V. N. 2015. On the convergence exponent of the singular integral of a multivariate additive problem.// Dokl. RAS. **46,** № 5, p. 530-532.

13. Chubarikov V. N. 2015. On the convergence exponent of the mean value of complete rational arithmetical sums.// Chebyshev Sbornik. **16,** № 4(56), p. 303-318.

14. Arkhipova L. G., Chubarikov V. N. 2018. On the convergence exponent of the singular series of a multivariate problem.// Vestn. Moscow University. Ser. 1, Mathematics, Mechanics. № 5, p. 68-71.

15. Demidovich B. P. 2017. The collection of problems on the mathematical analysis. Ed. 19th, correct. // Sankt-Petersburg: Publ.House «Lan'» , p. 624.

16. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lectures on the mathematical analysis: Text-book, Ed. 4th., correct. // Moscow: DROFA, p. 640.

Получено 28.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-57-67

Об оценке меры иррациональности $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ [1]

М. Г. Башмакова, В. Х. Салихов (г. Брянск)

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru

Башмакова Мария Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Аннотация

Оценка меры иррациональности различных трансцендентных чисел является одним из направлений теории диофантовых приближений. Начиная с работ Э. Бореля конца 19 века, разрабатывались как общие методы получения оценок для классов значений некоторых функций, так и специализированные подходы для оценки отдельных величин. Различные методы, в частности, применялись для исследования арифметических свойств значений функции $\operatorname{arctg} x$.

Для получения оценок показателя иррациональности значений $\operatorname{arctg} x$ многими авторами эта функция рассматривалась как частный случай гипергеометрической функции Гаусса. Одной из первых работ, в которой были получены такие оценки, стала работа М. Хуттнера 1987 г. [1], доказавшего общую теорему об оценках мер иррациональности значений гипергеометрической функции вида $F_2^1\left(1, \frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}|\varepsilon x^k\right), k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \varepsilon = \pm 1$. Большую роль в развитии темы сыграли работы А. Хеймонена, Т. Матала-Ахо и К. Ваананена [2], [3] в которых также был построен метод, позволявший получать оценки показателя иррациональности для значений $F_2^1\left(1, \frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}|z\right), k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, в том числе для $F_2^1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|-z^2\right) = \frac{1}{z}\operatorname{arctg} z$. Рассмотренный ими подход использовал приближение гипергеометрической функции полиномами Якоби и дал много конкретных результатов.

В последние десятилетия для построения оценок широкое распространение получили методы, использующие интегралы, симметричные относительно какой-либо замены параметров [4],[5],[6]. Впервые интеграл, принципиально использующий свойство симметричности, был применён в работе В.Х.Салихова [4] и позволил получить новую оценку показателя иррациональности для $\ln 3$. Чуть позже В. Х. Салихов [7], применив аналогичный симметризованный комплексный интеграл, получил новую оценку меры иррациональности числа π. В этой работе было использовано классическое равенство $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Таким же способом, то есть с помощью комплексного симметризованного интеграла, в работе Е. Б. Томашевской [8] были оценены значения вида $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 2$, и улучшены некоторые предыдущие результаты для таких величин. Позднее, Е. Б. Томашевской [9] был разработан аналогичный интеграл для оценки $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, который позволил доказать результат $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) \leq 11.7116...$, остававшийся лучшим до настоящего времени.

В 2014 г. К. Ву и Л. Ванг [10] немного улучшили результат В. Х. Салихова для $\ln 3$, рассмотрев другой тип интегральной конструкции, также использующей симметричность. В данной работе идея К. Ву и Л. Ванга применена для изменения интеграла Е. Б. Томашевской, что позволило улучшить его арифметические свойства и усилить предыдущий результат для меры иррациональности числа $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00296-а).

Ключевые слова: мера иррациональности, гипергеометрическая функция, симметризованный интеграл.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
М. Г. Башмакова, В. Х. Салихов. Об оценке меры иррациональности $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 57–67.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-57-67

On irrationality measure $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

M. G. Bashmakova, V. Kh. Salikhov (Bryansk)

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: svdh@rambler.ru
Bashmakova Mariya Gennadievna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Abstract

An evaluation of irrationality measure for various transcendental numbers is one of the field in diophantine approximation theory. Starting with the works of E. Borel at the end of 19th century, were developed both general methods of evaluation for classes of some functions values and specialized approaches for estimating peculiar numbers. Diverse methods particularly were practiced for the investigating of arithmetic properties of the function $\operatorname{arctg} x$ values .

For getting evaluation on irrationality measure of $\operatorname{arctg} x$ values many authors regarded them as particular case of Gauss hypergeometric function. One of the first such kind of papers was the article of M. Huttner 1987 [1], who proved a generalized theorem about estimation on irrationality measure of the Gauss hypergeometric function values $F_2^1\left(1, \frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}|\varepsilon x^k\right), k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \varepsilon = \pm 1$. A big role in progress of theme have been played by works of A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [2], [3], in which was also constructed a method for evaluation on irrationality measure of the Gauss hypergeometric function values of the form $F_2^1\left(1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}|z\right), k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, including $F_2^1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|-z^2\right) = \frac{1}{z}\operatorname{arctg} z$. The approach considered by them had used approximation of the Gauss hypergeometric function by Jacobi type polynomials and gave a lot of concrete results.

Last decades for evaluation of various numbers were broadly spreading methods, which used symmetric on some changes of variable integrals [4],[5],[6]. Originally, integral qualitatively using the property of symmetry was applied by V.Kh.Salikhov [4], who used it to got the new estimate for $\ln 3$. A little later V. Kh. Salikhov [7] had applied similar symmetrized complex integral for obtaining new evaluation of π. In that work he put to use classical equality $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. The same method, i.e. complex symmetrized integral was used by E. B. Tomashevskaya [8], who had estimated values of $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 2$ and some of previous results for such numbers were improved by her. Later on E. B. Tomashevskaya [9] had elaborated analogical integral for estimation of $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, which one had allowed to prove the best result until now $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) \leq 11.7116...$.

In 2014 K. Wu and L. Vang [10] improved the result of V. Kh. Salikhov for $\ln 3$, applying a new type integral construction, which also had used a property of symmetry. In present paper we took the idea of K. Wu and L. Vang and applied it to the integral of E. B. Tomashevskaya. It allowed us to improve arithmetic properties of integral and obtain better result for extent of irrationality arctg $\frac{1}{2}$.

Keywords: irrationality measure, hypergeometric function, symmetrized integral.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

M. G. Bashmakova, V. Kh. Salikhov, 2019, "On irrationality measure arctg $\frac{1}{2}$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 57–67.

1. Введение

При изучении свойств иррациональных и трансцендентных чисел одним из исследуемых вопросов является возможность их приближения рациональными дробями. Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$, поэтому его элементы находятся в сколь угодно малой окрестности любого вещественного числа γ, но вопрос становится содержательным, если говорить о приближении γ рациональными числами с ограниченными знаменателями. Одной из применяемых характеристик качества такого приближения служит мера иррациональности.

Мерой (показателем) иррациональности числа γ будем называть величину $\mu(\gamma)$, определяемую как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Получение оценок мер иррациональности связано с построением приближения рассматриваемого значения. Обычно для этого используются вещественные или комплексные интегралы, бесконечные суммы, аппроксимации Паде и др. Исследование получаемой линейной формы позволяет построить оценку, которая будет тем лучше, чем удачнее подобрано приближение. В этом смысле общие методы обычно уступают специализированным конструкциям, разработанным для конкретного числа. Так было, например, для $\ln 3$ [4],π [7], $\ln 2$ [11] и др.

Оценки показателя иррациональности значений функции $\operatorname{arctg} x$ были получены разными авторами [1], [2], [6], в основном общими методами. Для числа $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ наилучшая на данный момент оценка $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) \leq 11.7116...$ принадлежит Е.Б.Томашевской [9]. Этот результат был доказан с помощью специально разработанного интеграла

$$Y = \int\limits_{16-4i}^{16+4i} \frac{(x-18-4i)^{3n}(x-16+4i)^{3n}(x-18+4i)^{3n}(x-16-4i)^{3n}(x-17)^{4n}dx}{x^{5n+1}(34-x)^{5n+1}}, \qquad (1)$$

подынтегральная функция которого $S(x)$ такова что $S(34-x) = S(x)$, то есть обладает свойством симметричности относительно точки $x = 17$. Именно это свойство сыграло ключевую роль при построении оценки. С использованием этого типа симметричности были получены и другие результаты [5],[8]. Много новых оценок было также получено с применением симметричности других видов. Одним из недавних результатов применения симметризованного интеграла стало улучшение показателя иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ [12], [13], которое было достигнуто за счёт объединения интеграла Р.Марковеккио [11], получившего ранее новую оценку для $\ln 2$, и идеи симметричности.

Подынтегральная функция (1) заменой переменной $t = (x-17)^2$ приводится к виду $h(t)(f(t))^n$, где

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}(289-t)}, f(t) = \frac{(t^2+30t+289)^3t^2}{(289-t)^5}. \qquad (2)$$

Изменение данной интегральной конструкции путём введения дополнительных множителей, аналогичных рассматриваемым в [10], позволило улучшить её приближающие свойства и получить новую оценку для $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Основной результат данной работы заключается в следующем утверждении:

Теорема 1. *Справедлива следующая оценка меры иррациональности:*

$$\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) \leq 9.272044...$$

Доказательство данного утверждения будет основываться на исследовании интеграла вида

$$\hat{I} = \frac{1}{i}\int\limits_{16-4i}^{16+4i} \frac{(\prod\limits_{j=1}^{4}(x-x_j))^{\alpha_0 n}(x-17)^{2\alpha_1 n}(7x^2-238x+2040)^{\alpha_2 n}(39x^2-1326x+11560)^{\alpha_3 n}dx}{x^{n+1}(34-x)^{n+1}}, \tag{3}$$

где $x_1 = 16-4i, x_2 = 16+4i, x_3 = 18-4i, x_4 = 18+4i, \alpha_j n \in \mathbb{N}, j = 0,..,3$. Эта интегральная конструкция была построена на основе интеграла (1), при помощи добавления дополнительных множителей, улучшающих арифметические свойства. Будем в дальнейшем обозначать подынтегральную функцию (3) как $R(x)$.

Стандартная схема, применяемая для исследования показателя иррациональности, использует классический подход, принадлежащий М.Хата [14]:

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$ -иррационально, $l_n = g_n\gamma + p_n$, где $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|g_n| = \delta$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| \leq -\tau, \tau > 0$, тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\delta}{\tau}$.*

Заметим, что в работе [15] было доказано более общее утверждение. Применение леммы 1 к интегралу (3) позволит получить заявленный результат.

2. Доказательство основного утверждения

Рассмотрим интеграл (3). Подынтегральная функция обладает свойством симметричности, так что замена переменной $t = (x-d)^2$, где $d = 17$, позволяет привести интеграл к виду

$$I(t,\bar{\alpha}) = \frac{1}{i}\int\limits_{-15-8i}^{-15+8i} \frac{(t^2+30t+289)^{\alpha_0 n}t^{\alpha_1 n}(7t+17)^{\alpha_2 n}(39t+289)^{\alpha_3 n}dt}{2\sqrt{t}(289-t)^{n+1}}, \tag{4}$$

где $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Обозначим

$$g(t,\bar{\alpha}) = \frac{(t^2+30t+289)^{\alpha_0}t^{\alpha_1}(7t+17)^{\alpha_2}(39t+289)^{\alpha_3}}{(289-t)}, \tag{5}$$

тогда

$$I(t,\bar{\alpha}) = \frac{1}{i}\int\limits_{-15-8i}^{-15+8i} \frac{dt}{2\sqrt{t}(289-t)}(g(t,\bar{\alpha}))^n. \tag{6}$$

Дополнительные множители, отличающие функцию $g(t,\bar{\alpha})$ интеграла (5) от $f(t)$ из интеграла (2), улучшают арифметические свойства интеграла Е.Б.Томашевской, уменьшая значение подынтегральной функции и добавляя сокращение простых множителей.

Исследуем свойства многочленов, входящих в подынтегральную функцию (4). Введём необходимые обозначения. Пусть $A \in \mathbb{N}, B \in \mathbb{Z}^+, (A,B) = 1$ при $B \neq 0$.

Для $t=(x-d)^2$ будем рассматривать многочлены вида
$P(t)=At+B=Ax^2-2Adx+Ad^2+B\equiv A_2x^2+A_1x+A_0\equiv \tilde{P}(x)$ и
$P^*(t)=At^2+Bt+C=Ax^4-4dAx^3+(6d^2A+B)x^2-(4d^3A+2dB)x+(Ad^4+Bd^2+C)\equiv$
$\equiv \sum\limits_{j=0}^{4} A_j^*x^j\equiv \tilde{P}^*(x)$.
Для любой несократимой дроби $\frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, a\neq 0, b\in\mathbb{N}$ рассмотрим показатель $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right)=\nu_p$ для простого числа p такой, что $\frac{a}{b}=p^{\nu_p}\frac{a_1}{b_1},(a_1,b_1)=1,(a_1,p)=1,(b_1,p)=1$.
Для каждого многочлена $P(t)$ определим величину $\nu_p(P(t))$ при $p\in\{2,5,17\}$ как
$\nu_2(P)=\min(3,\nu_2(A_0)),\nu_5(P)=\min(1,\nu_5(A_0)),\nu_{17}(P)=\min(2,\nu_{17}(A_0))$.

Для каждого многочлена $P^*(t)$ определим $\nu_p(P^*(t))$ при $p\in\{2,5,17\}$ как
$\nu_2(P^*)=\min(6,\nu_2(A_0),\nu_2(A_1)+2,\nu_2(A_2)+4),\nu_5(P^*)=\min(2,\nu_5(A_0),\nu_5(A_1)+1)$,
$\nu_{17}(P^*)=\min(4,\nu_{17}(A_0),\nu_{17}(A_1)+1,\nu_{17}(A_2)+2)$.

Для любой функции $f(x)$, аналитической в точке $x=0$, обозначим $D_0(f(x))=f(0)$;
$D_N(f(x))=\frac{f^{(N)}(0)}{N!}, N\in\mathbb{N}$.

Лемма 2. *Пусть $m\in\mathbb{N}, N\in\mathbb{Z}^+, N\leq 2m$. Тогда выполняются следующие оценки:* $\nu_2(D_N(P^m))\geq m\nu_2(P)-2N, \nu_5(D_N(P^m))\geq m\nu_5(P)-N, \nu_{17}(D_N(P^m))\geq m\nu_{17}(P)-N$.

Доказательство. Имеем

$$\tilde{P}^m(x)=\sum_{|\bar{m}|=m}\gamma(m)A_0^{m_0}A_1^{m_1}A_2^{m_2}x^{m_1+2m_2},$$

$\bar{m}=(m_0,m_1,m_2)\in(\mathbb{Z}^+)^3$, $|\bar{m}|=m_0+m_1+m_2,\gamma(\bar{m})=\frac{m!}{m_0!m_1!m_2!}\in\mathbb{N}$.

Тогда $D_N(\tilde{P}^m(x))=\sum\limits_{\substack{|\bar{m}|=m\\ m_1+2m_2=N}}\gamma(\bar{m})A_0^{m_0}\bar{A}_3d^{m_1}2^{m_1}, \bar{A}_3=(-1)^{m_1}A^{m_1+m_2}$.

При $p=2:$
$\nu_2(D_N(\tilde{P}^m(x)))\geq m_0\nu_2(A_0)+m_1=(m_0\nu_2(A_0)+3m_1+3m_2)-2m_1-3m_2\geq$
$\geq \nu_2(P)(m_0+m_1+m_2)-(m_1+2m_2)-(m_1+m_2)\geq m\nu_2(P)-2N$.

При $p=5:\nu_5(D_N(\tilde{P}^m(x)))\geq m_0\nu_5(A_0)=(m_0\nu_5(A_0)+m_1+m_2)-m_1-m_2\geq$
$\geq\nu_5(P)(m_0+m_1+m_2)-(m_1+m_2)\geq m\nu_5(P)-N$.

При $p=17:\nu_{17}(D_N(\tilde{P}^m(x)))\geq m_0\nu_{17}(A_0)+m_1=(m_0\nu_{17}(A_0)+2m_1+2m_2)-m_1-2m_2\geq$
$\geq\nu_{17}(P)(m_0+m_1+m_2)-(m_1+2m_2)=m\nu_{17}(P)-N$. □

Лемма 3. *Пусть $m\in\mathbb{N}, N\in\mathbb{Z}^+, N\leq 4m$. Тогда выполняются следующие оценки:*
$\nu_2(D_N((P^*)^m))\geq m\nu_2(P^*)-2N, \nu_5(D_N((P^*)^m))\geq m\nu_5(P^*)-N$,
$\nu_{17}(D_N((P^*)^m))\geq m\nu_{17}(P^*)-N$.

Доказательство. Имеем $(\tilde{P}^*(x))^m=\sum\limits_{|\bar{m}|=m}\gamma^*(\bar{m})A_0^{*m_0}A_1^{*m_1}A_2^{*m_2}A_3^{*m_3}A_4^{*m_4}x^{4m_4+3m_3+2m_2+m_1}$,

где $\bar{m}=(m_0,...,m_4)\in(\mathbb{Z}^+)^5, |\bar{m}|=\sum\limits_{j=0}^{4}m_j,\gamma^*(\bar{m})=\frac{m!}{m_0!m_1!m_2!m_3!m_4!}\in\mathbb{N}$.

Тогда $D_N((\tilde{P}^*(x)^m))=\sum\limits_{\substack{|\bar{m}|=m\\ m_1+2m_2+3m_3+4m_4=N}}\gamma^*(\bar{m})\prod\limits_{j=0}^{4}(A_j^*)^{m_j}$.

При $p=2$ имеем $\nu_2(D_N(\tilde{P}^*(x)^m))\geq\sum\limits_{j=0}^{4}m_j\nu_2(A_j^*)=\sum\limits_{j-0}^{4}m_j(\nu_2(A_j^*)+2j)-2N\geq m\nu_2(P^*)-2N$,
так как неравенства $\nu_2(A_j^*)+2j\geq\nu_2(P^*)$ для $j\in\{0,1,2\}$ следуют из определения $\nu_2(P^*)$, а для $j\in\{3,4\}$ выполняются ввиду $\nu_2(P^*)\leq 6,\nu_2(A_j^*)\geq 0$.

При $p = 5 : \nu_5(D_N(\tilde{P}^*(x)^m)) \geq \sum\limits_{j=0}^{4} m_j \nu_5(A_j^*) = \sum\limits_{j=0}^{4} m_j(\nu_5(A_j^*) + j) - N \geq m\nu_5(P^*) - N$, так как неравенства $\nu_5(A_j^*) + j \geq \nu_5(P^*)$ при $j \in \{0, 1\}$ следуют из определения $\nu_5(P^*)$, а для $j \in \{2, 3, 4\}$ выполняются ввиду $\nu_5(P^*) \leq 2, \nu_5(A_j^*) \geq 0$.

При $p = 17$ аналогично:

$\nu_{17}(D_N(\tilde{P}^*(x)^m)) \geq \sum\limits_{j=0}^{4} m_j \nu_{17}(A_j^*) = \sum\limits_{j=0}^{4} m_j(\nu_{17}(A_j^*) + j) - N \geq m\nu_{17}(P^*) - N$. $\square$

В соответствии с определением интеграла (4) имеем многочлены:

$$\begin{aligned} &P_0^*(t) = t^2 + 30t + 289 = x^4 - 68x^3 + 1764x^2 - 20672x + 92480 = \tilde{P}_0^*(x), \\ &P_1(t) = t = x^2 - 34x + 289 = \tilde{P}_1(x), \\ &P_2(t) = 7t + 17 = 7x^2 - 238x + 2040 = \tilde{P}_2(x), \\ &P_3(t) = 39t + 289 = 39x^2 - 1326x + 11560 = \tilde{P}_3(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $\Pi_k = \prod\limits_{j=1}^{3} p_j^{\nu_{p_j}(P_k(t))}$ для $P_k(t)$, $\Pi_k^* = \prod\limits_{j=1}^{3} p_j^{\nu_{p_j}(P_k^*(t))}$ для $P_k^*(t)$ при $p_1 = 2$, $p_2 = 5, p_3 = 17$. Из определения $\nu_p(P^*(t)), \nu_p(P(t))$ для многочленов (7) получим:

$$\Pi_0^* = 2^6 5^1 17^2, \Pi_1 = 17^2, \Pi_2 = 2^3 5^1 17^1, \Pi_3 = 2^3 5^1 17^2. \tag{8}$$

В силу симметричности, для подынтегральной функции (3) справедливо представление:

$$R(x) = Q_m(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(34 - x)^j} \right), \tag{9}$$

где $m = 2n(2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 2n - 2, Q_m(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu$, все $b_\nu \in \mathbb{Z}[x]$.

Возьмём $\alpha_0 = 0.53819, \alpha_1 = 0.21230, \alpha_2 = 0.13580, \alpha_3 = 0.18161$ и n кратное 10^5. Рассмотрим коэффициенты a_j в разложении (9).

Лемма 4. *Для любого $j = 1, ..., n + 1$ справедливо представление:* $a_j = 2^{1.18137n+2j-3} 5^{-0.1444n+j-1} 17^{-2+j} A_j$, *где* $A_j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Найдём коэффициенты a_j.

Рассмотрим $\bar{m} = \{m_0, ..., m_4\}, \bar{m} \in (\mathbb{Z}^+)^5 |, \bar{m}| = \sum\limits_{j=0}^{4} m_j$.

Имеем

$a_j = D_{n+1-j}(x^{n+1} R(x)) = \sum\limits_{|\bar{m}|=n+1-j} D_{m_0}(\tilde{P}_0^*(x))^{\alpha_0 n} \prod\limits_{k=1}^{3} D_{m_k}(\tilde{P}_k(x))^{\alpha_k n} D_{m_4}(34 - x)^{-n-1}$.

Ясно что $D_{m_4}(34 - x)^{-n-1} = \binom{n + m_4}{m_4} 2^{-n-m_4-1} 17^{-n-m_4-1}$. Тогда в силу (8) и лемм 2,3

$\nu_2(a_j) \geq 6\alpha_0 n - 2m_0 + 3\alpha_2 n - 2m_2 + 3\alpha_3 n - 2m_3 - n - m_4 - 1 = n(6\alpha_0 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3) - (m_0 + m_2 + m_3 + m_4) - (m_0 + m_2 + m_3) - n - 1 \geq 4.18137n - 2(n + 1 - j) - n - 1 = 1.18137n + 2j - 3$;

$\nu_5(a_j) \geq \alpha_0 n - m_0 + \alpha_2 n - m_2 + \alpha_3 n - m_3 \geq n(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3) - n - 1 + j = -0.1444n - 1 + j$;

$\nu_{17}(a_j) = 2\alpha_0 n - m_0 + 2\alpha_1 n - m_1 + \alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 - n - m_4 - 1 \geq (2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)n - 2n - 2 + j = -2 + j$. $\square$

Пусть далее $\Delta = 1.18137n, K = \mathbb{Z}[i]-$ кольцо гауссовских чисел, многочлен $Q_m(x)$ определён в равенстве (9).

Лемма 5. *Пусть* $Q_m(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \theta^\nu$, *где* $\theta = x - 16 + 4i$, *все* $\beta_\nu \in K$. *Тогда для всех* $\nu = 0, 1, ..., \alpha_0 n - 1$ *справедливо:* $\beta_\nu = 2^{\Delta - 2\nu - 3} \beta_\nu^{'}, \beta_\nu^{'} \in K$.

Доказательство. Применим схему, впервые использованную в работе [5]. Из вида $R(x)$ в интеграле (3) имеем для θ таких что $|\theta| < |16 + 4i| = \sqrt{272}$

$$R(x) = \sum_{\nu=\alpha_0 n}^{\infty} \gamma_\nu \theta^\nu, \tag{10}$$

где все $\gamma_\nu \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$. Далее для $j = 1, ..., n+1$

$$\frac{1}{x^j} = \frac{1}{(16 - 4i + \theta)^j} = \frac{1}{(16-4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu d_{\nu_{ij}} \theta^\nu}{(16-4i)^\nu},$$

где $d_{\nu_{ij}} = \frac{j(j+1)...(j+\nu-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{1}{(34 - x)^j} = \frac{1}{(18 + 4i - \theta)^j} = \frac{1}{(18+4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu_{ij}} \theta^\nu}{(18+4i)^\nu}.$$

Из (9) и (10) получим

$$\sum_{\nu=\alpha_0 n}^{\infty} \gamma_\nu \theta^\nu = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{(16-4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^\nu d_{\nu_{ij}}}{(16-4i)^\nu} \right) \theta^\nu + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{(18+4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu_{ij}}}{(18+4i)^\nu} \theta^\nu + \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \theta^\nu.$$

Поэтому для $\nu = 0, 1, ..., \alpha_0 n - 1$

$$\beta_\nu = -\sum_{j=1}^{n+1} a_j d_{\nu_{ij}} \left(\frac{(-1)^\nu}{(16-4i)^{j+\nu}} + \frac{1}{(18+4i)^{j+\nu}} \right). \tag{11}$$

Из леммы 4 и равенства (11) получим представление:

$\beta_\nu = 2^{\Delta - 2\nu - 3} \frac{\tilde{\beta_\nu}}{(85)^{N_\nu}}$, где $\tilde{\beta_\nu} \in K, N_\nu \in \mathbb{N}$. Но $\beta_\nu \in K$, поэтому $\beta_\nu = 2^{\Delta - 2\nu - 3} \beta_\nu^{'}$, где $\beta_\nu^{'} \in K$, и лемма доказана. $\square$

Обозначим теперь $q_N = HOK(1, 2, ..., N)$.

Лемма 6. *Имеет место соотношение* $q_{m+1} \frac{1}{i} \int\limits_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx = 2^\lambda A$, *где* $A \in \mathbb{Z}$, $\lambda = \min(\Delta, 3\alpha_0 n)$.

Доказательство. Имеем

$$\Lambda = q_{m+1} \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx = q_{m+1} \left(\frac{1}{i} \left(\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\beta_\nu}{\nu+1} (x - 16 + 4i)^{\nu+1} \right) \Bigg|_{16-4i}^{16+4i} \right) =$$

$$= q_{m+1} \left(\sum_{\nu=0}^{\alpha_0 n - 1} \frac{\beta_\nu}{\nu+1} 8^{\nu+1} i^\nu + \sum_{\nu=\alpha_0 n}^{m} \frac{\beta_\nu}{\nu+1} 8^{\nu+1} i^\nu \right).$$

Очевидно, что $q_{m+1} \frac{1}{\nu+1} \in \mathbb{N}, \nu = 0, 1, ..., m$.

Для слагаемых первой суммы ввиду леммы 5 имеем: $\beta_\nu 8^{\nu+1} = 2^{\Delta - 2\nu - 3} 2^{3\nu+3} \beta_\nu^{'} = 2^\Delta \beta_\nu^{''}$, где все $\beta_\nu^{''} \in K$.

Для слагаемых второй суммы: $\beta_\nu \in K$, $8^{\nu+1} = 2^{3\alpha_0 n} 2^{3\nu+3-3\alpha_0 n}$, где $3\nu + 3 - 3\alpha_0 n \in \mathbb{N}$, поэтому $\Lambda = 2^\lambda A$, где $A \in K$.

Из (9) имеем

$$\Lambda \equiv q_{m+1} \frac{1}{i} \int\limits_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x)dx = q_{m+1} \frac{1}{i} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{b_\nu}{\nu+1}((16+4i)^{\nu+1} - (16-4i)^{\nu+1}) \in \mathbb{Z},$$

поскольку $b_\nu \in \mathbb{Z}$.

Следовательно $A \in \mathbb{Z}$, что и требовалось. □

Теперь, используя представление (9), получаем для интеграла (3)

$$\hat{I} = \frac{1}{i} \int\limits_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x)dx + \frac{1}{i} \int\limits_{16-4i}^{16+4i} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1}{34-x}\right) dx + \frac{1}{i} \int\limits_{16-4i}^{16+4i} \sum_{j=2}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(34-x)^j}\right) dx \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

По лемме 6 имеем $q_{1.21218n} I_1 = 2^{-1.18137n} A, A \in \mathbb{Z}$.

Для I_2 справедливо

$$I_2 = \frac{1}{i}\, a_1(\ln x - \ln(34-x))|_{16-4i}^{16+4i} = \frac{1}{i} a_1 \left(\ln \frac{16+4i}{16-4i} - \ln \frac{18-4i}{18+4i}\right) = 2a_1(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9}) =$$

$$= 2a_1 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Для I_3 получим

$$I_3 = \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(34-x)^{j-1}}\right)\Bigg|_{16-4i}^{16+4i} =$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{(4-i)^{j-1}}{2^{2j-2} 17^{j-1}} - \frac{(4+i)^{j-1}}{2^{2j-2} 17^{j-1}} - \frac{(9+2i)^{j-1}}{2^{j-1} 85^{j-1}} + \frac{(9-2i)^{j-1}}{2^{j-1} 85^{j-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{\mu_j}{2^{2j-2} 17^{j-1}} + \frac{\mu'_j}{2^{j-1} 5^{j-1} 17^{j-1}}\right), \mu_j, \mu'_j \in K, j = 2, ..., n+1.$$

В соответствии с представлением I_1, I_2, I_3 и леммой 4 заключаем, что выполнено равенство

$$2^{-1.18137n+1} \cdot 5^{0.1444n} \cdot 17 \cdot q_{1.21218n} I(t, \bar{\alpha}) = A_n \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + B_n, \tag{12}$$

где $A_n, B_n \in \mathbb{Z}, I(t, \bar{\alpha})$ определён равенством (6).

Применим к данной линейной форме лемму 1.

Для исследования асимптотики интеграла (6) используем метод перевала. Этот подход хорошо известен и постоянно применяется при исследовании подобных линейных форм, более подробное изложение можно найти, например, в [5], [6].

Рассмотрим подынтегральную функцию $g(t, \bar{\alpha})$. Уравнение $\frac{d}{dt} \ln g(t, \bar{\alpha}) = 0$ имеет пять корней, максимальное значение функции $\ln |g(t, \bar{\alpha})|$ достигается в точке $t_0 = -11.70909 - 2.58761i$, при этом $\ln |g(t_0, \bar{\alpha})| = -1.36036... \equiv \tau^*$.

Асимптотика коэффициента A_n также исследуется методом перевала. Точкой перевала в данном случае является $t_1 = 784.15031...$, и $\ln |g(t_1, \bar{\alpha})| = 5.45126... \equiv \delta^*$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln q_{Cn} = C$, из представления (12) и леммы 1 получаем заявленную оценку

$$\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) \leq 1 - \frac{\delta^* + 0.1444 \ln 5 - 1.18137 \ln 2 + 1.21218}{\tau^* + 0.1444 \ln 5 - 1.18137 \ln 2 + 1.21218} = 9.272044...$$

Сравнение подынтегральных функций интеграла Е.Б.Томашевской (1) и интеграла (3) позволяет оценить эффективность дополнительно введённых многочленов $P_2(t) = 7t + 17$ и $P_3(t) = 39t + 289$. Вносимые ими степени простых чисел $2, 5, 17$ помогают компенсировать эти множители в знаменателе коэффициентов линейной формы. Выбор оптимальных параметров α_j осуществлялся с помощью компьютерной программы.

3. Заключение

В последние десятилетия в области построения оценок мер иррациональности было получено много интересных результатов. С помощью интегральных конструкций такого типа как в данной работе, с дополнительными многочленами, в последнее время было улучшено несколько предыдущих оценок для различных величин. Хотя данная интегральная конструкция не может быть обобщена, рассмотренный метод позволяет построить аналогичные интегралы для других чисел. Учёт индивидуальных особенностей интеграла позволяет лучше приблизить исследуемое значение и получить новые результаты. Эта область исследований в настоящее время развивается и интерес к ней проявляется в научных школах разных стран.

Авторы выражают признательность Е.Б.Томашевской за глубокую проработку темы по оценке значений функции $\operatorname{arctg} x$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques // J. Number Theory. 1987. Vol. 26. P. 166-178.

2. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

3. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

4. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.

5. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов //Математические заметки. 2008. Т.83. №3. С. 428-438.

6. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, №6. С. 785-797.

7. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63, № 3. С. 163-164.

8. Томашевская Е. Б. О мере иррациональности числа $\ln 5+\pi/2$ и некоторых других чисел// Чебышевский сборник. 2007.Том 8. №2. С. 97-108.

9. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Брянский государственный технический университет. 2009. 99 с.

10. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$// Journal of number theory. 2014. №142. С. 264-273.

11. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Aritm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

12. Андросенко В. А., Салихов В. Х.Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений//Матем. заметки. 2015.Том 97, №4, С. 483 – 492.

13. Андросенко В. А. Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$// Изв. РАН. Серия математическая. 2015. Том 79, №1, С. 3 – 20.

14. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.

15. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers// Math. Of computation. 2002. Vol. 72, №242. P. 901-911.

REFERENCES

1. Huttner, M., 1987, “Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques “,*J. Number Theory*, vol. 26, pp. 166-178.

2. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K., 1993, “On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function “, 1993, *Manuscripta Math.*, vol. 81, pp. 183-202.

3. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K., 1994, “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures “, *Bull.Austral. Math. Soc.*, vol. 50, no 2, pp. 225-243.

4. Salikhov, V. Kh., 2007, “On the irrationality measures of $\ln 3$“,*Doklady Mathematics*, vol. 417, no 6, pp. 753-755.

5. Salnikova, E. S., 2008, “Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms“,*Mathematical Notes*, vol.83,no.3, pp. 428-438.

6. Bashmakova M. G.,2010,“ Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions“,*Mathematical Notes*, vol. 88, no. 6, pp. 785-797.

7. Salikhov, V. Kh., 2008,“ On the irrationality measures of π“,*Russian Mathematical Surveys* vol. 63, no. 3, pp. 163-164.

8. Tomashevskaya E. B., 2007, “On the irrationality measure of the number $\log 5 + \frac{\pi}{2}$ and some other numbers“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, no.2, pp. 97-108.

9. Tomashevskaya E. B., 2009, “Diophantine approximations of a values of some analytic functions“, Dissertation., Bryansk State technical University, 99 pp.

10. Wu, Q., Wang, L.,2014, “On the irrationality measure of $\log 3$“, *Journal of number theory.*, no. 142, pp. 264-273.

11. Marcovecchio, R., 2009, “The Rhin-Viola method for $\ln 2$ “,*Acta Aritm.*, vol. 139.2, pp. 147-184.

12. Androsenko, V. A., Salikhov, V. Kh.,2015, “Symmetrized version of the Markovecchio integral in the theory of Diophantine approximations“,*Mathematical Notes*, vol.97, no.4, pp. 483-492.

13. Androsenko, V. A.,2015.,“Irrationality measure of the number $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$“,*Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 3-20.

14. Hata, M., 1992, “Irrationality measures of the values of hypergeometric functions “, *Acta Arith.*, vol. LX, pp. 335-347.

15. Wu, Q.,2002, “On the linear independence measure of logarithms of rational numbers“,*Math. Of computation.*, vol. 72, no. 242, pp. 901-911.

ФГБОУ ВО Брянский государственный технический университет

Получено 21.06.2018 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК XXX DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-68-84

О равномерно рекуррентных словах, порождаемых перекладыванием отрезков, в том числе с изменением ориентации.

А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор, университет Бар-Илана (г. Рамат-Ган, Израиль), Колледж математики и статистики, Шэньчжэньский университет, Шэньчжэнь, 518061, Китай.
e-mail: Kanelster@gmail.com
Чернятьев Александр Леонидович — кандидат физико математических наук, МФТИ, ВШЭ, г. Москва
e-mail: chernyatiev@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена обзору некоторых задач символическиой динамики. Дается описание равномерно рекуррентных слов связанных с перекладыванием отрезков.

Ответ получен в терминах эволюции *размеченных графов Рози* слова W. k*-граф* Рози слова W – это ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. *Последователем* ориентированного k-графа G называется ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B. $(k+1)$-граф является подграфом последователя k-графа и получается из него удалением некоторых ребер. Вешины, из которых выходит (или в которые входят) более одного ребра, соответсвуют *специальным подсловам* (см. гл.2), вершины, в которые входят и выходят более одного ребра, соответствуют *биспециальным подсловам*. Последовательность k-графов Рози составляет *эволюцию* графов Рози слова W. Граф Рози называется *размеченным*, если его ребра помечены буквами l и r, а некоторые вершины (возможно, ни одна) помечены символом “$-''$.

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;
2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;
3. Если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком “–”.

В терминах размеченных графов Рози определяется *асимптотически правильная* эволюция графов Рози, то есть определяются правила перехода от k-графов к $(k+1)$-графам. Именно, эволюция называется *правильной*, если для всех $k \geq 1$ выполняются следующие условия при переходе от k-графа G_k к $(k+1)$-графу G_{k+1} :

1. Валентность любой вершины не более 2,то есть в нее входит и выходит не более 2-х ребер.

2. Если в графе нет вершин, соответсвующих биспециальным подсловам, то G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$;
3. Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком "–", то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl
4. Если вершина помечена знаком "–", то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.

Эволюция называется *асимптотически правильной*, если это условие выполняется для всех k начиная с какого-то $k = K$. *Ориентированная* эволюция графов подразумевает отсутствие вершин, помеченных знаком "–". Основная теорема данной работы заключается в описании сверхслов, связанных с перекладыванием отрезков:

Теорема. Равномерно-рекуррентное слово W

1. Порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.
2. Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.

Ключевые слова: комбинаторика слов, последовательность Штурма, перекладывание отрезков, морфическая последовательность, Граф Рози

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев. О равномерно рекуррентных словах, порождаемыех перекладыванием отрезков, в том числе с изменением ориентации // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4 с. 68 – 84.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC XXX DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-68-84

On uniformly recurrent words generated by shifting segments, including with a change in orientation

A. Ya. Belov, A. L. Chrnyatyev

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor, Bar-Ilan University (Ramat Gan, Israel), College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, 518061, China.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Chernyatyev Alexander Leonidovich — Candidate of Physics and Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, HSE, Moscow.
e-mail: chernyatiev@gmail.com

Abstract

The work is devoted to the review of some problems of symbolic dynamics. The description of uniformly recurrent words associated with the shifting of segments is given. Let W be an infinite word over finite alphabet A. We get combinatorial criteria of existence of interval exchange transformations that generate the word W.

In this paper we study words generated by general piecewise-continuous transformation of the interval. Further we prove equivalence set words generated by piecewise-continuous transformation and words generated by interval exchange transformation. This method get capability of descriptions of the words generated by arbitrary interval exchange transformation.

This work is targeted to the following

Inverse problem: *Which conditions should be imposed on a uniformly recurrent word W in order that it be generated by a dynamical system of the form $(I, T, U_1, \ldots, U_k)$, where I is the unit interval and T is the interval exchange transformation?*

The answer to this question is given in terms of the evolution of the *labeled Rauzy graphs* of the word W. The *Rauzy graph* of order k (the k-graph) of the word W is the directed graph whose vertices biuniquely correspond to the factors of length k of the word W and there exists an arc from vertex A to vertex B if and only if W has a factor of length $k+1$ such that its first k letters make the subword that corresponds to A and the last k symbols make the subword that corresponds to B. By the *follower* of the directed k-graph G we call the directed graph $\mathrm{Fol}(G)$ constructed as follows: the vertices of graph $\mathrm{Fol}(G)$ are in one-to-one correspondence with the arcs of graph G and there exists an arc from vertex A to vertex B if and only if the head of the arc A in the graph G is at the notch end of B. The $(k+1)$-graph is a subgraph of the follower of the k-graph; it results from the latter by removing some arcs. Vertices which are tails of (or heads of) at least two arcs correspond to *special factors* (see Section 2); vertices which are heads and tails of more than one arc correspond to *bispecial factors*. The sequence of the Rauzy k-graphs constitutes the *evolution* of the Rauzy graphs of the word W. The Rauzy graph is said to be *labeled* if its arcs are assigned letters l and r and some of its vertices (perhaps, none of them) are assigned symbol "-".

The *follower* of the labeled Rauzy graph is the directed graph which is the follower of the latter (considered a Rauzy graph with the labeling neglected) and whose arcs are labeled according to the following rule:

1. Arcs that enter a branching vertex should be labeled by the same symbols as the arcs that enter any left successor of this vertex;
2. Arcs that go out of a branching vertex should be labeled by the same symbols as the arcs that go out of any right successor of this vertex;
3. If a vertex is labeled by symbol "–", then all its right successors should also be labeled by symbol "–".

In terms of Rauzy labeled graphs we define the *asymptotically correct* evolution of Rauzy graphs, i.e., we introduce rules of passing from k-graphs to $(k+1)$-graphs. Namely, the evolution is said to be *correct* if, for all $k \geq 1$, the following conditions hold when passing from the k-graph G_k to the $(k+1)$-graph G_{k+1} :

1. The degree of any vertex is at most 2, i.e., it is incident to at most two incoming and outgoing arcs;
2. If the graph contains no vertices corresponding to bispecial factors, then G_{n+1} coincides with the follower $D(G_n)$;
3. If the vertex that corresponds to a bispecial factor is not labeled by symbol "–", then the arcs that correspond to forbidden words are chosen among the pairs lr and rl;
4. If the vertex is labeled by symbol "–", then the arcs to be deleted should be chosen among the pairs ll or rr.

The evolution is said to be *asymptotically correct* if this condition is valid for all k beginning with a certain $k = K$. The *oriented* evolution of the graphs means that there are no vertices labeled by symbol "–". The main result of this work consists in the description of infinite words generated by interval exchange transformations (and answers a Rouzy question [21]):

Main theorem. *A uniformly recurrent word W*

1. *is generated by an interval exchange transformation if and only if the word is provided with the asymptotically correct evolution of the labeled Rauzy graphs;*

2. *is generated by an orientation–preserving interval exchange transformation if and only if the word is provided with the asymptotically correct oriented evolution of the labeled Rauzy graphs.*

Keywords: combinatorics of words, Sturmian sequence, interval exchange transformation, morphic sequence, symbolical dynamics, Rauzy graph.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. Ya. Belov, A. L. Chrnyatyev "On uniformly recurrent words generated by shifting segments, including with a change in orientation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 68–84.

1. Введение.

Методы символической динамике играют существенную роль в изучении комбинаторных свойств слов, задачах теории чисел и теории динамических систем. Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка. По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, \ f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, \ f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0. Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова W_n. Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \ldots, U_n$.

Под *прямой задачей* символической динамики понимается изучение комбинаторных свойств слов, порожденных данной динамической системой, *обратная задача* символической динамики изучает свойства динамической системы, то есть свойства компакта M и преобразования f по комбинаторным свойствам слова W.

Обратные задачи символической динамики, связанные с унипотентным преобразованием тора, изучались в работе [2].

Задачи, прямые и обратные, связанные с преобразованием поворота окружности приводят к классу слов, называемых *словами Штурма*. Слова Штурма – это бесконечные слова над бинарным алфавитом, в которых количество различных подслов длины n ровно $n + 1$ для любого $n \geq 1$. Известна классическая

Теорема 1 (Теорема эквивалентности ([20],[19]).). *Пусть W – бесконечное рекуррентное слово над бинарным алфавитом $A = \{a, b\}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Слово W является словом Штурма, то есть количество различных подслов длины n слова W равно $T_n(W) = n + 1$ для любого $n \geq 1$..*

2. *Слово не периодично и является* сбалансированным*, то есть для любых двух подслов $u, v \subset W$ одинаковой длины выполняется неравенство $||v|_a - |u|_a| \leq 1$, где $|w|_a$ обозначает количество вхождений символа a в слово w.*

3. *Слово $W = (w_n)$ является механическим словом с иррациональным α, то есть существуют такое иррациональное α, $x_0 \in [0, 1]$ и интервал $U \subset \mathbb{S}^1$, $|U| = \alpha$ такие, что выполняется условие:*
$$w_n = \begin{cases} a, & {T_\alpha}^n(x_0) \in U \\ b, & {T_\alpha}^n(x_0) \notin U \end{cases}$$

Существует несколько различных путей для построения обобщений слов Штурма.

Во-первых, это рассмотрение *сбалансированных* слов над произвольным алфавитом. Сбалансированные непериодические слова над n-буквенным алфавитом изучены в работе [16], а позднее в [17]. В работах [3],[5] получена конструкция динамической системы, порождающей произвольное непериодическое сбалансированное слово.

Во-вторых, обобщение может быть получено посредстом изучения *функции сложности*. Функция сложности $T_W(n)$ – это количество различных подслов длины n слова W. Для слов Штурма выполняется соотошение $T_W(n+1)-T_W(n)=1$ для всех $n\geq 1$. Естественными обобщениями слов Штурма являются слова с минимальным ростом, то есть слова над конечным алфавитом для которых выполняется соотношение $T_W(n+1)-T_W(n)=1$ для всех $n\geq k$, где k – некоторое натуральное число. Описание таких слов в терминах поворота окружности было получено в работе [6]. Отметим также, что слова с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $\lim_{n\to\infty} T(n)/n=1$ изучены в работе [7].

Слова с функцией сложности $T_W(n)=2n+1$ изучены в работах P.Arnoux, G.Rauzy ([8, 21]), с функцией роста $T_W(n)=2n+1$ в работе G.Rote [22]. Рассмотрение общего случая слов с линейной функцией сложности приводит к изучению слов, порождаемых перекладыванием отрезков.

Известно, что если перекладывание k отрезков *регулярно*, то есть траектория любого из концов отрезка перекладывания не попадает на конец другого отрезка, то слово, порождаемое данным перекладыванием, имеет функцию сложности $T(n)=n(k-1)+1$.

Изучением свойств слов с линейным ростом числа подслов также производилось школой V. Berthé, S. Ferenczi и Luca Q. Zamboni ([14], [9]).

Целью данной работы является решение следующей *обратной задачи*: при каких условиях на равномерно-рекуррентное слово W существует порождающая его динамическая система вида $(I,T,U_1,\dots,U_k)$, где I – единичный отрезок и T – перекладывание отрезков?

Ответ получен в терминах эволюции *размеченных графов Рози* слова W. *k-граф* Рози слова W – это ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. *Последователем* ориентированного k-графа G называется ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B. $(k+1)$-граф является подграфом последователя k-графа и получается из него удалением некоторых ребер. Вешины, из которых выходит (или в которые входят) более одного ребра, соответсвуют *специальным подсловам* (см. гл.2), вершины, в которые входят и выходят более одного ребра, соответсвуют *биспециальным подсловам*. Последовательность k-графов Рози составляет *эволюцию* графов Рози слова W. Граф Рози называется *размеченным*, если его ребра помечены буквами l и r, а некоторые вершины (возможно, ни одна) помечены символом “$-''$.

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;

2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;

3. Если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком “–”.

В терминах размеченных графов Рози определяется *асимптотически правильная* эволюция графов Рози, то есть определяются правила перехода от k-графов к $(k+1)$-графам. Именно, эволюция называется *правильной*, если для всех $k \geq 1$ выполняются следующие условия при переходе от k-графа G_k к $(k+1)$-графу G_{k+1} :

1. Валентность любой вершины не более 2,то есть в нее входит и выходит не более 2-х ребер.
2. Если в графе нет вершин, соответсвующих биспециальным подсловам, то G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$;
3. Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком "–", то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl
4. Если вершина помечена знаком "–", то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.

Эволюция называется *асимптотически правильной*, если это условие выполняется для всех k начиная с какого-то $k = K$. *Ориентированная* эволюция графов подразумевает отсутствие вершин, помеченных знаком "–". Основная теорема данной работы заключается в описании сверхслов, связанных с перекладыванием отрезков:

Теорема. Равномерно-рекуррентное слово W

1. Порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.
2. Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.

Отметим, что в некоторых частных случаях рядом авторов были получены описания слов, порождаемых перекладываниями отрезков. В работе [15] были описаны слова, порождаемые перекладываниями 3-х отрезков, в работе [14] были описаны слова, порождаемые симметричными перекладываниями отрезков (такие перекладывания тесно связаны с многомерными цепными дробями).

План работы следующий: *во 2-й главе* формулируются основные определения и факты о р.р.словах, графах Рози, а также о словах, порожденных динамическими системами. В *3-ей главе* доказывается теорема о необходимых условиях на порождаемость слова перекладыванием отрезков. Следующие две главы посвящены доказательству достаточности этих условий. В *4-ой главе* мы доказываем достаточность этих условий для порождаемости слова кусочно-непрерывным преобразованием отрезка, а в *5-ой главе* доказывается эквивалентность множества р.р.слов, порожденных кусочно-непрерывными преобразованиями отрезков и преобразованием перекладывания отрезков.

Благодарности. Авторы признательны А.Л.Семенову, В.Н.Латышеву и А.А.Михалеву за полезное обсуждение. Данная работа была проведена с помощью Российского Научного Фонда Грант N 17-11-01377.

2. Основные конструкции и определения.

2.1. Функция сложности, специальные подслова, равномерно-рекуррентные слова.

В этой части мы определим основные понятия комбинаторики слов. В дальнейшем A будет обозначать конечный алфавит, то есть непустое множество элементов (символов). Через A^+

обозначим множество всех конечных последовательностей, символов, или *слов*.

Конечное слово всегда может быть единственным образом представлено в виде

$w = w_1 \cdots w_n$, где $w_i \in A, 1 \leq i \leq n$. Число n называется *длиной* слова w и обозначается $|w|$

Множество A^+ всех конечных слов над A образует простую полугруппу, где полугрупповая операция определяется как конкатенация (приписывание).

Если к множеству слов добавить элемент Λ (пустое слово), то получим свободный моноид A^* над A. Длина $|\Lambda| = 0$ по определению.

Слово u есть *подслово* (или *фактор*) слова w, если существуют слова $p, q \in A^+$ такие, что $w = puq$.

Через $F(W)$ обозначим множество всех подслов (конечных и бесконечных) слова W. Два бесконечных слова W и V над алфавитом A назовем *эквивалентными*, если $F(W) = F(V)$.

Назовем символ $a \in A$ *левым (соотв. правым) расширением* подслова v, если av (соотв. va) принадлежит $F(W)$. Подслово v называется *левым (соотв. правым) специальным подсловом*, если для него существуют два или более левых (правых) расширения. Подслово v называется *биспециальным*, если оно является и левым, и правым специальнм подсловом одновременно. Количество различных левых (правых) расширений подслова назовем левой (правой) *валентностью* этого подслова.

Слово W называется *рекуррентным*, если каждое его подслово встречается в нем бесконечно много раз (в случае двустороннего бесконечного слова, каждое подслово встречается бесконечно много раз в обоих направлениях). Слово W называется *равномерно-рекуррентным* или (*р.р словом*), если оно рекуррентно и для каждого подслова v существует натуральное $N(v)$, такое, что для любого подслова W u длины не менее, чем $N(v)$, v является подсловом u.

Далее мы сфомулируем несколько теорем о р.р. словах, которые нам понадобятся в дальнейшем. Доказательства этих теорем можно найти в монографии [1].

Теорема 2. *Следующие два свойства бесконечного слова W равносильны:*

а) для любого k можно найти $N(k)$ такое, что любой участок W длины k можно найти в любом участке W длины $N(k)$;

б) если все конечные куски слова V являются конечными кусками слова W, то и все конечные куски слова W являются конечными кусками слова V.

Теорема 3. *Пусть W — бесконечное слово. Тогда существует равномерно рекуррентное слово $\widehat{W}$, все подслова которого являются подсловами W.* □

На множестве сверхслов можно рассмотреть действие оператора сдвига τ. *Расстоянием Хемминга* между словами W_1 и W_2 мы назовем величину $d(W_1, W_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n 2^{-|n|}$, где $\lambda_n = 0$, если n-е позиции слов совпадают, и $\lambda_n = 1$, если они не совпадают.

Инвариантное подмножество — это подмножество множества всех сверхслов, которое инвариантно относительно действия τ. *Минимальное замкнутое инвариантное множество*, сокращенно м.з.и.м., — это замкнутое (относительно введенной выше метрики Хэмминга) инвариантное подмножество, которое не пусто, не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, кроме себя самого и пустого.

Теорема 4 (Свойства замкнутых инвариантных множеств). *Следующие свойства слова W равносильны:*

1. *W — равномерно рекуррентное*

2. *замкнутая орбита W минимальна и представляет собой м.з.и.м.*

Теорема 5. *Пусть W — равномерно-рекуррентное непериодическое сверхслово. Тогда*

1. *Все слова, эквивалентные W, являются р.р. словами, и множество таких слов несчетно.*

2. *Существуют такие различные р.р. слова $W_1 \neq W_2$, эквивалентные данному, что $W_1 = UV_1$, $W_2 = UV_2$, где U– бесконечное влево сверхслово и $U_1 \neq U_2$ – бесконечные вправо сверхслова.*

2.2. Графы Рози.

Удобным инструментом для описания слова W является *графы подслов*, или графы Рози (Rauzy's graphs), введенные Рози [21], которые строятся следующим образом: *k-граф* слова W – ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. таким образом, ребра k-графа биективно соответствуют $(k+1)$-подсловам слова W.

Ясно, в k-графе G слова W правым специальным словам соответствуют вершины, из которых выходит (соотв. в которые входит) больше одной стрелки. Такие вершины мы будем называть развилками. Граф G будем называть *сильно связным*, если из любой вершины в любую вершину можно перейти по стрелкам.

Последователем ориентированного графа G будем называть ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B.

Связность графов Рози и рекуррентность соответсвующего слова связаны естественным образом. Имеет место следующее

Предложение 1. *Пусть W – бесконечное (в одну сторону) слово. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Слово W – рекуррентно.*

2. *Для всех k соответствующий k-граф слова W является сильно связным.*

3. *Каждое подслово W встречается не меньше двух раз.*

4. *Любое подслово является продолжаемым слева.*

Мы вводим понятие *размеченного Графа Рози.* Граф Рози называется *размеченным*, если

1. Ребра каждой развилки помечены символами l ("left") и r ("right")

2. Некоторые вершины помечены символом "–".

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;

2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;

3. Если вершина помечена знаком "–", то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком "–".

2.3. Слова, порождаемые динамическими системами.

Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка.

По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0. Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова W_n.

Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \ldots, U_n$.

Заметим, что эволюция точки корректно определена только в случае, когда траектория точки не попадает на границу характеристических множеств $\partial U_1, \partial U_2, \ldots$.

Для того, чтобы рассматривать траекторию произвольной точки, мы введем понятие *существенной эволюции.*

Определение 1. *Конечное слово v^f называется существенной конечной эволюцией точки x^*, если в любой окрестности точки x^* существует открытое множество V, любая точка $x \in V$ из которого обладает эволюцией v^f. Бесконечное слово W называется существенной эволюцией точки x^*, если любое его начальное подслово – существенная конечная эволюция точки x^*.*

Под *эволюцией точки*, когда это не вызывет недоразумений, будем понимать, существенную эволюцию. Отметим, что точка может иметь несколько существенных эволюций.

Предложение 2. *Пусть V – конечное слово. Тогда множество точек с конечной существенной эволюцией V замкнуто. Аналогичное утверждение верно для бесконечного слова W.*

Доказательство. См. [2]

2.4. Соответствие между словами и разбиениями множества.

Теперь посмотрим соответствие между словами и подмножествами M. Из построения следует, что если начальная точка принадлежит множеству U_i, то ее эволюция начинается с символа a_i. Рассмотрим образы множеств U_i при отображениях $f^{(-1)}, f^{(-2)}, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что если точка принадлежит множеству

$$f^{(-n)}(U_{i_n}) \cap f^{-(n-1)}(U_{i_{n-1}}) \cap \ldots \cap f^{(-1)}(U_{i_1}) \cap U_{i_0},$$

то эволюция начинается со слова $a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$.

Соответственно, количество различных существенных эволюций длины $n+1$ равно количеству разбиений множества M на непустые подмножества границами подмножств ∂U_i и их образами при отображениях $f^{(-1)}, f^{(-2)}, \ldots, f^{(-n)}$.

Замечание. Количество конечных существенных эволюций напрямую связано с топологической размерностью множества M. Ясно, например, что если M гомеоморфно отрезку или окружности, то одна точка может являться граничной только для двух открытых подмножеств M и, соответственно, иметь только две существенные эволюции. Если M гомеоморфно части плоскости $\mathbb{R}^2$ – то существенных эволюций может быть сколь угодно много.

2.5. Перекладывания отрезков.

Перекладывание отрезков является естественным обобщением сдвига окружности – в случае разбиения окружности на дуги длины α и $1-\alpha$ и величины сдвига, равной α, это преобразование совпадает с перекладыванием двух отрезков.

Более того, перекладывание отрезков является очень важным преобразованием в эргодической теории, теории динамических систем и теории чисел.

Рассмотрим общий случай:

Пусть отрезок $[0,1]$ разбит на полуинтервалы длин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\sigma \in S_n$ – перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Интервалы разбиения могут быть представлены через длины отрезков следующим образом:

$$X_i = \left[\sum_{i<j} \lambda_j, \sum_{i\leq j} \lambda_j\right)$$

Перекладывание отрезков "переставляет" отрезки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ разбиения между собой, в результате получается новое разбиение

$$(X_\sigma(1), X_\sigma(2), \ldots, X_\sigma(n))$$

.

В сохраняющем ориентацию случае преобразование T ставит в соответствие каждой точке $x \in X_i$:

$$T(x) = x + a_i$$

где

$$a_i = \sum_{k<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma(k)} - \sum_{k<i} \lambda_k$$

Если же преобразование переворачивает некоторый отрезок, то все точки дополнительно симметрично отражаются относительно середины этого отрезка.

Определение 2. *Перекладывание отрезков T называется регулярным, если для любой точки a_i, где $X_i = [a_i, a_{i+1})$, $T^n(a_i) \neq a_j$*

Сформулируем следующую важную теорему (см. [15]):

Теорема 6. *Перекладывание отрезков является регулярным тогда и только тогда, когда траектория любой точки всюду плотна в* $[0,1]$

Изучение свойств слов, порождаемых перекладываниями отрезков осуществляется теми же методами, что и при сдвиге единичной окружности. Основным инструментом здесь является рассмотрение отрицательных орбит концов интервалов перекладывания:

$$0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1} = 1,$$

где

$X_i = [a_i, a_{i+1})$, $(i \in \{1, \ldots, k\})$.

Множество концов интервалов перекладывания $\{a_i | 1 \leq i \leq k+1\}$ обозначим X^1. Слово w длины n является подсловом эволюции точки x, то есть бесконечного слова $U(x)$, тогда только тогда, когда существует такой интервал $I_w \subset [0,1]$ и точка $y \in I_w$ такие, что слово w равно конкатенации следующих символов:

$$\mathcal{I}(x)\mathcal{I}(T(x))\cdots\mathcal{I}(T^{n-1}(x))=w,$$

где $\mathcal{I}(x)=a_i\in A$ тогда и только тогда, когда $x\in X_i$

Предложение 3. *Пусть T – регулярное перекладывание k отрезков. Тогда эволюция $U(x)$ произвольной точки x имеет функцию сложности $T_{U(x)}(n)=n(k-1)+1$, для любого $n\in\mathbb{N}$.*

3. Необходимые условия для порождаемости слова перекладыванием отрезков

На первом этапе мы сформулируем необходимые условия, для того чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков. Пусть слово W является эволюцией точки $x\in[0,1]$ при перекладывании k отрезков и характеристичеких множествах $U_1,U_2,\ldots,U_n$. Каждое характеристическое множество U_i является объединением нескольких непересекающихся интервалов или полуинтервалов.

Как было показано в части 2.4, подслова длины k взаимнооднозначно соответствуют k-разбиениям характеристических множеств. Поскольку точка границы одномерного множества может являться границей только для двух множеств, то k-подслово слова W может иметь максимум два продолжения. Мы получили первое необходимое условие для того, чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков:

Предложение 4. *Пусть слово W порождается перекладыванием отрезков. Тогда для некоторого N все специальные слова подслова длины, не меньше N должны иметь валентность, равную* 2.

Это условие аналогично тому, что начиная с какого-то N все k-графы слова W $(k\geq N)$ должны иметь входящие и исходящие развилки степени 2.

Следующие условия мы получим на языке графов Рози. Пусть рекуррентное слово W имеет функцию роста $F_W(n)=Kn+L$ для $n>N$ и порождается перекладыванием отрезка. Рассмотрим эволюцию k-графов Рози слова W, начиная с $k\geq N+1$. Как было показано выше, все входящие и выходящие развилки имеют степень 2, поэтому у всех k-графов есть ровно K входящих и K исходящих развилок.

В минимальном случае, описанном в предыдущей главе, когда $F_W(n)=n+L$, графы Рози имеют ровно одну входящую и одну исходящую развилку. Если входящая и выходящая развилка совпадают, то в этом случае выбор удаляемого ребра в последователе $D(G)$ определяется однозначно из условия сильной связанности графа.

Более интересным случаем являются графы слов, в которых есть более одной развилки. Рассмотрим его подробно. При переходе от графа G_n к G_{n+1} возможны следующие варианты:

1. В графе G_n нет сцепленных циклов (то есть, нет входящих развилок, являющихся одновременно исходящими). В этом случае граф G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$.

2. В графе G_n одна развилка является одновременно входящей и выходящей. Граф последователя $D(G_n)$ в этом случае имеет три развилки, так как одна развилка размножилась. Следовательно, граф G_{n+1} получается из последователя $D(G_n)$ путем удаления одного ребра, соответствующего минимальному невстречающемуся слову.

3. В графе есть две развилки или более развилок, являющихся одновременно входящими и выходящими. Граф G_{n+1} получается из $D(G_n)$ удаления двух или более ребер, соответствующих минимальным невстречающимся словам.

Поскольку слово W рекуррентно, то из предложения 1 следует, что при удалении ребер должна сохраняться сильная связность, то есть из любой вершины можно по стрелкам перейти в любую другую.

Рассмотрим подробнее второй случай. Пусть в G_k есть одна двойная развилка. Это означает, что в W есть ровно одно биспециальное подслово w длины k. Значит, существуют такие $a_i, a_j, a_k, a_l \in A$, что $a_i w, a_j w, w a_k, w a_l$ – подслова W. Тогда $(k+1)$-граф G_{k+1} получается из последователя путем удаления какого-то ребра, соответствующего одному из четырех слов: $a_i w a_k, a_i w a_l, a_j w a_k, a_j w a_l$. Рассмотрим интервал, являющийся характеристическим множеством для слова $I_w = [x_w, y_w]$.

Так как w – правое специальное слово, то $I_w \subset T^{-1}(I_{a_k} \cup I_{a_l})$, так как w – левое специальное, то $I_w \subset T(I_{a_i} \cup I_{a_j})$.

Пусть точка $A \in [0,1]$ делит I_w на два интервала, образы которых лежат в I_{a_k} и I_{a_l} соответственно, а точка $B \in [0,1]$ – делит на интервалы, прообразы которых лежат в I_{a_i} и I_{a_j} соответственно.

Выбор минимального невстречающегося слова, а , значит, удаляемого ребра, определяется взаиморасположением точек A и B, а также сохранением или сменой ориентации отображения на этих множествах. Итого, имеется 8 вариантов, которые разбиваются на четыре пары, соответствующие одинаковым наборам слов:

1. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
2. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
3. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
4. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
5. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
6. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
7. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
8. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$

Варианты 1 и 5 соответствуют запрещенному слову $a_i w a_k$.

Варианты 2 и 6 соответствуют запрещенному слову $a_i w a_l$.

Варианты 3 и 7 запрещенному слову соответствуют $a_j w a_k$.

Варианты 4 и 8 соответствуют запрещенному слову $a_j w a_l$.

Две пары вариантов соответсвуют одновременной смене или сохранению ориентации отображения на характеристических интервалах, а две пары – различным ориентациям.

В случае, когда перекладывание отрезков сохраняет ориентацию, у нас остается только два возможных варианта для удаляемого ребра.

В случае, когда мы разрешаем отобажению менять ориентацию отрезков при перекладывании, возможны все четыре варианта.

Замечание. Поясним теперь смысл размеченного графа Рози. Пусть ребра входящей развилки соответствуют a_i и a_j, символы l и r соответствуют левому и правому множеству в паре $(T(I_{a_i}), T(I_{a_j}))$. Если символы a_k и a_l соответствуют ребрам исходящей развилки, то символы l и r ставятся в соответствии с порядком “лево-право” в паре (I_{a_k}, I_{a_l}). Знак “–” ставится в вершине, если характеристическое множество, ей соответствующее, принадлежит интервалу перекладывания, на котором меняется ориентация.

Условие для перехода от графа G_n к G_{n+1}:

Предложение 5. *1. Если в графе нет двойных развилок, соответствующих биспециальным подсловам, то при переходе от G_n к G_{n+1} имеем $G_{n+1} = D(G_n)$;*

2. *Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком "–", то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl*

3. *Если вершина помечена знаком "–", то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.*

Назовем эволюцию размеченных графов Рози *правильной*, если **правила 1** и **2** выполняются для всей цепочки эволюции графов, начиная с G_1, назовем эволюцию *асимптотически правильной*, если **правила 1** и **2** выполняются, начиная с некоторого G_n. Будем говорить, что эволюция размеченных графов Рози *ориентированна*, если в k-графах нет вершин, помеченных знаком "–".

Определение асимптотически правильной эволюции графов Рози позволяет сформулировать условия порождаемости слова перекладыванием отрезков.

Предложение 6. *Равномерно-рекуррентное слово W*

1. *Порождается перекладыванием отрезков, тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

2. *Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

Основная теорема состоит в замене выражения "тогда"на "тогда и только тогда"в вышеизложенном предложении.

3.1. Построение динамической системы.

Покажем, что условия теоремы 6 являются достаточными для того, чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков. Сначала мы покажем, что слово W, удовлетворяющее условиям теоремы 6 может являться эволюцией некоторой точки при кусочно-непрерывном преобразовании отрезка $T : I \to I$ следующего вида:

1. $I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$.

2. $I = [y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \ldots \cup [y_{n-1}, y_n]$, $y_0 = 0$, $y_n = 1$.

3. $\sigma \in S_n$ – некоторая перестановка из n элементов.

4. T отображает (x_i, x_{i+1}) на $(y_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)+1})$ непрерывно и взаимнооднозначно.

Затем будет показано, как случай кусочно-непрерывного преобразования можно свести к перекладыванию отрезков.

Строить кусочно-непрерывное преобразование T мы будем поэтапно. При первой итерации мы разбиваем отрезок произвольным образом на отрезки, которые соответствуют соответствующим символам. Для построение отображения нам достаточно определить траекторию этих точек и затем из соображений рекуррентности продолжить по непрерывности на весь отрезок.

Замечание. Из непрерывности и биективности следует, что отображения на интервалах являются монотонными функциями. Мы рассмотрим два случая:

1. Все отображения интервалов являются одновременно возрастающими функциями. Назовем такое преобразование *сохраняющим ориентацию*.

2. Во втором случае встречаются как возрастающие, так и убывающие отображения интервалов. Этот случай назовем *не сохраняющим ориентацию.*

Разобьем отрезок $I = [0,1]$ на $n = \operatorname{Card} A$ интервалов произвольным образом, которые будут являться характеристическими множествами для символов алфавита A: $[0,1] = I_{a_1} \cup I_{a_2} \cup \ldots \cup I_{a_n}$. Соответствие интервалов символам алфавита будет определено в соответствии с предложением 8.

Будем считать, что отображение T непрерывно на каждом множестве I_{a_i}, то есть точками разрыва отображения T могут быть только конечные точки характеристических множеств. Интервалы характеристических множеств или их образы, имеющие общую граничную точку, будем называть *соседними.*

Замечание. Мы всегда можем расширить алфавит таким образом, чтобы в новом алфавите характеристические множества были устроены ровно так, как описано выше. Графы k-слов для старого алфавита будут соответствовать 1-графам нового алфавита, а эволюции графов, начиная с этого момента, будут совпадать.

Непосредственно проверяется следующее

Предложение 7. *Преобразования T, $T^{(-1)}$ переводит два соседних множества либо в соседние множества, либо их образы не могут целиком покрывать интервал.*

Предложение 8. *Интервалы разбиения могут быть поставлены в соответствие символам алфавита таким образом, что если w – специальное правое 1-слово и wa_i, wa_j – подслова, то I_{a_i} и I_{a_j} – соседние множества. Аналогично, если w – специальное левое 1-слово и $a_k w, a_l w$ – подслова, то I_{a_k} и I_{a_l} – также соседние множества.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную развилку в 1-графе. Пусть из нее стрелки ведут в вершины, соответствующие символам a_i и a_j. Тогда положим $I_{a_i} = [x_0, x_1]$, $I_{a_j} = [x_1, x_2]$,

Так как характеристические множества являются интервалами, то на них можно естественным образом ввести отношение порядка (то есть $I_{a_i} < I_{a_j}$, если $x_i < x_j$), точно также можно ввести отношение порядка и на их образах. Если при преобразовании T для какой-то пары характеристических множеств порядок меняется, будем говорить, что на этой паре преобразование меняет ориентацию.

Рассмотрим образы интервалов при отображении T^{-1}. Ясно, что если символ a_i не является правым специальным 1-словом и за ним однозначно следует символ a_j, то $I_{a_i} \subset T^{-1}(I_{a_j})$, а если не является левым специальным и ему всегда предшествует символ a_k, то $T^{-1}(I_{a_i}) \subset I_{a_k}$.

В случае, если символ a_i является правым специальным 1-словом и за ним могут идти символы a_j и a_k, то $I_{a_i} \subset T^{-1}(I_{a_j} \cup I_{a_k})$, а если левым специальным, то $T^{-1}(I_{a_i}) \subset I_{a_j} \cup I_{a_k}$.

Обозначим через I^n множество образов концов интервалов при отображении T^{-n}, I^0 – множество концов интервалов характеристических множеств, то есть $I^0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Как следует из рассуждений в части 2.4, множество, отвечающие слову $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ есть $I_w = I_{w_n} \cap T^{-1}(I_{w_{n-1}}) \cap \ldots \cap T^{(-n+1)}(I_{w_1})$, соответственно, множество граничных точек множеств, соответствующих словам длины n есть в точности $I^0 \cup I^1 \cup \ldots \cup I^{(n-1)}$.

Если правое специальное слово не является биспециальным (то есть не является одновременно и левым специальным), то положение точки, которая делит данное характеристическое множество, несущественно и его можно выбирать произвольно.

Для случая сохраняющего ориентацию преобразования удаления должно соответствовать сохраняющим ориентацию правилам.

В случае не сохраняющего ориентацию преобразования нам просто необходимо, чтобы внутри отображаемых отрезков при эволюции происходило конечное число “переломов”.

Таким образом мы можем определить образы точек на некотором подмножестве $N \subset I$. Из построения следует, что существуют такие интервалы $I_k = (x_k, x_{k+1})$, внутри которых наше преобразование монотонно. Мы всегда можем продолжить его по непрерывности до отображения отрезка в себя. Построенное кусочно-непрерывное преобразование и есть искомое. Обозначим его T. Отметим, что начальная точка, эволюцией которой является искомое слово $W = \{w_n\}$, получается как предельная последовательность множества вложенных отрезков, соответствующих префиксам $w_0, w_0w_1, w_0w_1w_2, \ldots$ и т.д.

Нами доказана

Теорема 7. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

В случае меняющего ориентацию преобразования получается

Теорема 8. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

4. Эквивалентность множества р.р слов, порождаемых кусочно-непрерывным преобразованием, множеству слов, порождаемых перекладыванием отрезков.

Покажем вначале, как можно перейти к динамике, в которой почти все точки (в смысле меры Лебега) имеют различные существенные эволюции. Рассмотрим существенные эволюции точек при преобразовании T.

Отметим, что если точки x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) имеют одинаковую существенную эволюцию при преобразовании T, то и все точки отрезка $[x_1, x_2]$ имеют такую же существенную эволюцию.

Рассмотрим кусочно-непрерыное преобразование отрезков. Из теоремы о существовании инвариантной меры (см. [4]) следует, что любое отображение компакта имеет инвариантную вероятностную меру. Значит, отображение T имеет инвариантную меру μ. Следовательно, на отрезке мы можем ввести новую полуметрику $d(x_1, x_2) = \mu((x_1, x_2))$. Отметим, что из того, что $\mu(x_1, x_2) > 0$ не следует, что точки имеют различную существенную эволюцию, поскольку построенное отображение может быть разрывным.

Предложение 9. *Пусть точки $x_1 < x_2$ имеют одинаковые эволюции и преобразование T непрерывно на интервале (x_1, x_2). Тогда любая точка интервала (x_1, x_2) имеет такую же существенную эволюцию.*

Доказательство. Из того, что x_1, x_2 имеют одинаковую эволюцию следует, что $T(x_1)$, $T(x_2)$ тоже имеют одинаковую эволюцию и образом интервала (x_1, x_2) является интервал $(T(x_1), T(x_2))$.□

Теорема 9. *Пусть слово W порождается кусочно-непрерывным преобразованием отрезка. Тогда существует слово W', эквивалентное данному, которое попрождается перекладыванием отрезков.*

Доказательство. Рассмотрим топологию в смысле построенной полуметрики. На индуцированной метрике (которая склеивает точки с нулевым расстоянием) построим соответствующую фактор-динамику. Соответсвующее фактор-пространство будет представлять собой конечный набор отрезков, а отображение будет сохранять длины, то есть мы пришли к перекладыванию отрезков.

Инвариантная мера μ, вообще говоря, может быть сингулярна. В этом случае целые отрезки нулевой меры окажутся склеенными. Однако таких отрезков не более, чем счетное множество. В то же время, если W – непериодическое равномерно-рекуррентное слово, то количество эквивалентных (то есть имеющих одинаковый набор конечных подслов) равномерно-рекуррентных слов имеет мощность континуума (см. [1]). Это означает, что существует несчетное множество точек вне этой системы отрезков и сингулярность меры на эволюцию этих точек влияние не оказывает. Таким образом, найдется эквивалентное слово $W' \sim W$, отвечающее перекладыванию отрезков. □

Таким образом, существует перекладывание, отвечающее некоторому эквивалентному слову W'.

Замечание. Мы не доказали, что весь интервал нулевой длины состоит из точек с одинаковой существенной эволюцией или разбивается на два интервала точек с одинаковой существенной эволюцией. Обходной маневр состоит в использовании континуума слов, эквивалентных данному р.р. слову.

По теореме 4 в этом перекладывании встретятся *все* слова , эквивалентные W', в том числе и слово W (в смысле существенной эволюции). Доказана

Теорема 10. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

В случае меняющего ориентацию преобразования доказана

Теорема 11. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35–214.

2. А.Я.Белов, Г.Кондаков, Обратные задачи символической динамики // Фундаментальная и прикладная математика, Т1, +1, 1995

3. А.Я. Белов, А.Л.Чернятьев, Описание слов Штурма над n-буквенным алфавитом.// Мат. метод. и прил. IV, МГСУ, 1999, стр. 122-128.

4. Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию // М.: ФАЗИС, 1996. 144 с.

5. А.Л. Чернятьев, Сбалансированные слова и динамические системы.//Фунд. и Прикл. Мат, принята в печать.

6. А.Л. Чернятьев, Слова с минимальной функцией роста.// Вестник МГУ, 2007 г., принята в печать.

7. A.Aberkane, Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31–46.

8. P. Arnoux and G. Rauzy [1991], Representation geometrique des suites the complexite $2n+1$ // Bull. Soc. Math. France 119, 199–215.

9. V. Berthé, S. Ferenczi, and Luca Q. Zamboni [2007], Interactions between Dynamics, Arithmetics and Combinatorics: the Good, the Bad, and the Ugly//

10. J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) // Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).

11. J.Berstel, Resent results on Sturmian words // Developments in language theory II, 13–24, World Scientific, 1996.

12. X.Droubay, J.Justin, G.Pirillo, Episturmian words and some construction of de Luca and Rauzy // Theoret. Comp. Sci.,2000, to appear.

13. H. Furstenberg. Poincaré reccurence and number theory // Bull. Amer. Math. Soc., 5: 211–234, 1981.

14. S. Ferenczi, Luca Q. Zamboni, Combinatorial structure of symmetric k-interval exchange transformations, in preparation.

15. S. Ferenczi, C. Holton and Luca Q. Zamboni, Structure of three-interval exchange transformations II: a combinatorial description of the trajectories. J. Analyse Math. 89 (2003), p. 239–276.

16. R. L. Graham, Covering the Positive Integers by disjoints sets of the form $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \ldots\}$ // J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.

17. P. Hubert, Well balanced sequences // Theoret. Comput. Sci. 242 (2000) 91–108.

18. A. de Luca, Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics // Theoret. Comp. Sci., 183, (1997), 45–82.

19. M. Lothaire, Combinatorics on Words // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.

20. M. Morse and G. A. Hedlund [1940], Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, // Amer. J. Math. 62, 1–42.

21. G. Rauzy, Mots infnis en arithmetique, in: Automata on Infnite Words // Ecole de Printemps d'Informatique Thfeorique, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, Lecture Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165–171, 1985

22. G.Rote, Sequences with subword complexity $2n$ // J. Number Theory 46 (1994) 196–213.

23. L. Vuillon, Balanced words // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 10 (2003), no. 5, 787–805

Получено 7.08.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-85-105

О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве

М. Г. Гадоев (г. Мирный), С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков (г. Душанбе)

Махмадрахим Гафурович Гадоев — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиал) Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова в г. Мирном.
e-mail: — gadoev@rambler.ru
Сулаймон Абунасрович Исхоков — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан.
e-mail: — sulaimon@mail.ru
Фаридун Сулаймонович Исхоков — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан.
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru

Аннотация

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0)$ – единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1,\, (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots,\, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)\,(j = \overline{1,n})$ – определенные в Ω положительные функции.
Положим $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\xi\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, связаны следующим условием: (A) Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П. И. Лизоркиным в 1980 году.

В работе исследуется разделимость дифференциального выражения

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{*}$$

где r – некоторое натуральное число, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ – длина мультииндекса k, в лебеговом пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$. Дифференциальное выражение (*) называется L_p-*разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что $u(x) \in L_p(\Omega)$, $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$ имеет место включение $a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе приведена формулировка основных результатов, во втором разделе строится правый регуляризатор для исследуемого класса дифференциальных выражений, а в разделах 3-5 приведены доказательства основных теорем работы.

Ключевые слова: разделимость, дифференциальный оператор с частными производными, нестепенное вырождение, правый регуляризатор, обратный оператор.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
М. Г. Гадоев, С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 85–105.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-85-105

On separation of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space

M. G. Gadoev (Mirnii), S. A. Iskhokov, F. S. Iskhokov (Dushanbe)

Makhmadrakhim Gafurovich Gadoev — doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of fundamental and applied mathematics at the Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov.
e-mail: — gadoev@rambler.ru
Sulaimon Abunasrovich Iskhokov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, deputy director of the Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan.
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru
Faridun Sulaimonovich Iskhokov — kandidat of physical and mathematical sciences, scientific worker at the department of function theory and functional analysis of the Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan.
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru

Abstract

Let Ω be an arbitrary open set in n-dimensional Euclidian space R_n and let $\Pi(0)$ be the unit cube centered at the origin. For each point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ and each vector $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ with positive components we define a parallelepiped $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ by the identity

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1,\ (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots,\ (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Let $g_j(x)\ (j = \overline{1,n})$ be positive functions defined in Ω. We let $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon\vec{g}(\xi)}(\xi)$, where $\varepsilon > 0$ and $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

It is assumed that the set Ω and functions $g_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, are related by condition: (A) There exists a number $\varepsilon_0 > 0$ such that for each $\xi \in \Omega$ and any $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ the parallelepiped $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ is contained in Ω. The condition (A) is an analogue of the immersion condition introduced by P.I. Lizorkin in 1980.

In the paper we investigate separation of a differential expression

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

where r – a natural number, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ is a multi-index, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ is length of the multi-index, in the Lebesgue space $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. We denote by $\mathcal{K}$ the set of all multi-indexes k such that $a_k(x) \not\equiv 0$. Let $O_{\mathcal{K}}$ be the set of all functions $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, that have Sobolev generalized derivatives $D_x^k u(x)$ for all $k \in \mathcal{K}$. The differential expression (*) is said to be L_p-*separated* if for all $u(x) \in O_{\mathcal{K}}$ such that $u(x) \in L_p(\Omega)$, $L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$ the inclusion $a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ holds for all multi-indexes $k \in \mathcal{K}$.

The work consists of five sections. The first section contains the statement of the main results, the right regularizer for the studied class of differential expressions is constructed in the second section, and sections 3-5 provide proofs of the main theorems of the paper.

Keywords: separation, partial differential operator, non-power degeneration, right-hand regularizing operator, inverse operator.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
M. G. Gadoev, S. A. Iskhokov, F. S. Iskhokov, 2019, "On separation of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 85–105.

1. Введение

Понятие разделимости дифференциального оператора впервые было введено в фундаментальной работе [1], в которой исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля в пространстве L_2. Идеи и результаты этой работы позже обобщались многими авторами (см. [2-6] и имеющуюся в них библиографию). Первый результат по раделимости дифференциальных операторов с частными производными получен в работе [7]. Большая часть работ по разделимости операторов с частными производными посвящена операторам второго порядка (см., например, [4, 8-12] и библиографию в них) или операторам порядка больше второго специального вида (см., например, [13, 14] и библиографию в них). Случай вырождающихся операторов с частными производными высшего порядка общего вида рассмотрен лишь в работах [7, 15-18]. В этих работах сначала задается область Ω, в которой рассматривается дифференциальный оператор, и затем в этой области определяются функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора. В отличие от этого, в настоящей работе область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом, и предполагается выполнение "условия погружения", введенное П. И. Лизоркиным в работе [19]. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется. Примеры областей и весовых функций, удовлетворяющих условию погружения, рассмотрены в работе [19].

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе приведена формулировка основных результатов, во втором разделе строится правый регуляризатор для исследуемого класса дифференциальных выражений, а в разделах 3-5 приведены доказательства основных теорем работы.

2. Формулировка основных результатов

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0)$ – единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \, (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots, \, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)\,(j = \overline{1,n})$ – определенные в Ω положительные функции.
Положим $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\xi\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, связаны следующим условием:

(A). Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного в работе П.И. Лизоркина [19]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x), j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть r – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{2}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ – длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i – мнимая единица. Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$.

Определение 1. Дифференциальное выражение (1) называется *L_p-разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что $u(x) \in L_p(\Omega)$, $L(x,\, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$ имеет место включение $a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Символом $B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где τ – положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega, s\in R_n} |L(x, s)| = \delta \neq 0$

(II) $|a_k(x)s^{k'}| \le \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \ldots g_n^{-k_n''}(x) |L(x, s)|$
для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \neq 0$, $|k| \le 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r} \left|(a_k(x) - a_k(y))\, s^k\right| \le \tau |L(x, s)|$
для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2 \ldots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Теорема 1. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda, \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon, \overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\le 2r} |a_k(x)s^k| \le \varkappa |L(x, s)| \tag{4}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \varkappa) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $\tau \in (0, \tau_0)$ и $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет непрерывный обратный.

Далее будем писать $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$,

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\,loc}(\Omega) \;\; (|l| \le |k| \le 2r), \tag{5}$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\, D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $\sum\limits_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\leq 2r}} \left| \left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x)\ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \leq \tau |L(x,\, s)|$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Далее вводим некоторые вспомогательные функциональные пространства, связанные с дифференциальным выражением (1). Обозначим через $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{|k|\leq 2r} \int_\Omega \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{6}$$

Обозначим через $W'_{p;\,L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, пространство функций $u(x) \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ с конечной нормой (5).

Как обычно, символом $\langle f,\, \varphi\rangle$, где $f \in D'(\Omega)$, обозначим значение обобщенной функции f на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция f отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, если $\langle f,\, \varphi\rangle = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

При выполнении условия гладкости (4) для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию $a_k(x) D_x^k u(x) \quad (|k| \leq 2r)$ по формуле

$$\left\langle a_k D^k u,\, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \int_\Omega u(x) D_x^k \left(a_k(x)\varphi(x)\right) dx \tag{7}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим пространство $W_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x) D_x^k u(x)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ для всех $|k| \leq 2r$ и конечна норма (5).

Для $u(x) \in L_p(\Omega)$ через $L(x,\, D_x)u(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $a_k(x) D_x^k u(x), \quad |k| \leq 2r$, определенных равенством (6) и вводим пространство $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L(x,\, D_x)u(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$ и конечна следующая норма

$$\|u;\, \mathcal{W}_{p;\,L}(\Omega)\| = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega |L(x,\, D_x)u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}. \tag{8}$$

Через $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p;\,L}(\Omega)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (7).

Заметим, что $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ являются полными пространствами.

Таким образом для дифференциального выражения (1) мы определили весовые пространства $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. При этом первые два пространства определены без всякого предположения о гладкости коэффициентов $a_k(x), \quad |k| \leq 2r$, а два последних пространства определены, когда выполняется условие гладкости (4).

Теорема 2. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1 и пусть τ_0 – такое же число как в этой теореме. Тогда если $\tau \in (0,\, \tau_0)$ и $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$ и для всех функций $u \in D\left(L_{(p)}\right)$ выполняются неравенства*

$$\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\| \leq M \left\|L(\cdot;\, D)u;\, L_p(\Omega)\right\| \leq M \left\|u;\, W_{p,\,L}(\Omega)\right\|, \tag{9}$$

где число $M > 0$ зависит только от r, n, p, δ, $\varkappa$.

Если же при этом выполняется условие гладкости (4), то

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega). \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p < +\infty$ и пусть выполняется условие (3). Тогда найдется число $t_0 = t_0(r,\, n,\, p,\, \varkappa) > 0$ такое, что если $L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau,\, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < t_0$, то дифференциальное выражение $L(x,\, D_x)$ L_p-разделимо. При этом*

$$\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega) \tag{11}$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

3. Построение правого регуляризатора

Применяя технику, использованную при доказательстве леммы 1 работы [20], доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть область Ω и положительные функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 1.*

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1, \psi_2, \ldots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такие, что:

1) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega)$;

2) *покрытие $\{\mathrm{supp}\ \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω имеет конечную кратность $\Lambda(n, \lambda)$, где λ — константа из условия (2);*

3) *для любого мультииндекса k существует конечное число $M_k > 0$ такое, что*

$$\left| D_x^k \psi_m(x) \right| \leq M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \ldots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega);$$

4) *для всех $x, y \in \mathrm{supp}\ \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, выполняется неравенство $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$;*

В каждом множестве $\mathrm{supp}\, \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, фиксируем точки $\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ и положим

$$L_m(s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \quad (s \in R_n). \tag{12}$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ вводим операторы

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m,\ F' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi'_m \psi_m,\ D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega), \tag{13}$$

где Φ_m, Φ'_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ – псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$, $\Phi'_m(s) = \overline{\Phi_m(s)}$, соответственно. Символами $F_{(p)}$, $F'_{(q)}$ обозначим замыкания операторов F, F' с областями определения $D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространствах $L_p(\Omega)$, $L_q(\Omega)$, соответственно.

Если коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$, дифференциального оператора $L = L(x, D_x)$, $(D(L) = C_0^\infty(\Omega))$ дифференцируемы достаточное число раз, то формально сопряженный дифференциальный оператор $L'(x, D_x)$ задается равенством

$$L'(x, D_x)u = \sum_{|k| \leq 2r} D_x^k(a_k(x)u(x)). \tag{14}$$

Однако в теореме 1 дифференцируемость коэффициентов $a_k(x), |k| \leq 2r$, не предполагается. Поэтому в рассматриваемом случае равенство (13) теряет смысл, и трудно исследовать оператор $(L_{(q)})^*$, сопряженный относительно оператора $L_{(q)}$. В связи с этим обстоятельством мы вводим другое дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, которое связано с выражением $L(x, D_x)$ и имеет некоторые близкие свойства.

Положим

$$G(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} \widetilde{a}_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{15}$$

где

$$\widetilde{a}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_k(x^{(m,k)}) \psi_m^2(x), \quad |k| \leq 2r. \tag{16}$$

Обозначим через $G'(x, D_x)$ дифференциальное выражение, сопряженное к $G(x, D_x)$.

Далее отметим некоторые соотношения между символами $L(x, s)$, $L_m(s)$. В силу условия (III) имеем

$$\left| (a_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) s^k \right| \leq \tau |L(x, s)|. \tag{17}$$

Далее, в силу этого неравенства получаем

$$|L(x, s) - L_m(s)| \leq \sum_{|k| \leq 2r} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) s^k| \leq \tau (2r)^n |L(x, s)|.$$

Отсюда при выполнении условия $0 < 2\tau < (1/2r)^n$ следует, что

$$|L(x, s) - L_m(s)| \leq \frac{1}{2} |L(x, s)| \ (x \in \operatorname{supp} \psi_m).$$

Следовательно,

$$|L(x, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x, s)| \tag{18}$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \operatorname{supp} \psi_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно лемме 1 семейство функций $\{\psi_m^2(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образует разбиение единицы области Ω конечной кратности $\Lambda(n, \lambda)$. Поэтому используя равенство (15) имеем

$$a_k(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_k(x) \psi_j^2(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_k(x) - a_k(x^{(k,j)})) \psi_j^2(x).$$

Далее в силу условия (III) имеем

$$\left| (a_k(x) - \widetilde{a}_k(x)) s^k \right| \leq \tau |L(x, s)|. \tag{19}$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 существует положительное число t_1 такое, что если $\tau \in (0, t_1)$, то существуют операторы $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ с $\| \cdot \|_p$-нормами, не превосходящими 1/2, такие, что на функциях $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняются равенства*

$$GFu = (E + \Gamma_1) u, \ G'F'u = (E + \Gamma_2) u. \tag{20}$$

Доказательство. Здесь в этой лемме и далее символом $\mathscr{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ являются ограниченными операторами.

Так как Φ_m – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m(s)$ (см. (11)) и $L_m = L_m(x; D_x)$, $D(L_m) = C_0^\infty(\Omega)$, – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2 = E.$$

Используя это равенство имеем

$$GFu = (\Gamma_1 + E)u, \;\; u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{21}$$

где

$$\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0, \quad \Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m] \Phi_m \psi_m, \quad \Gamma_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m. \tag{22}$$

Здесь и далее символ $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор, т.е. $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$.

Далее заметим, что

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) \sum_{\substack{k' + k^* = k, \\ k' \ne 0}} \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right),$$

где $\psi_m^{(k')} = D_x^{k'} \varphi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k^*)}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k^*} L_m^{-1}(s)$. На основе этого равенства, применяя лемму 2.2 из [16], получаем

$$\|\Gamma_*\|_p \le M_1 \sum_{|k| \le 2r} \sum_{\substack{k' + k^* = k, \\ k' \ne 0}} \mathbb{P}_k^{(k', k^*)}, \tag{23}$$

где

$$\mathbb{P}_k^{(k', k^*)} = \sup_{m = 1, 2, 3, \ldots} \left\| \psi_m^{(k')} \widetilde{a}_k \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right\|_p.$$

Применяя лемму 2.3 из [16] оценим норму псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k^*)}$. Имеем

$$\left\| \Phi_m^{(k^*)} \right\|_p \le M_2 \sup_{s \in R_n} \left| s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|.$$

Учитывая это и применяя п.3 леммы 1, получим

$$\mathbb{P}_k^{(k', k^*)} \le M \sup \left| g_1^{-k'_1}(x) g_2^{-k'_2}(x) \ldots g_n^{-k'_n}(x) \widetilde{a}_k(x) \cdot s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|, \tag{24}$$

где верхняя грань берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Из равенства (15) в силу условия (II) имеем

$$\left| \widetilde{a}_k(x) s^{k^*} \right| \le \tau \sum_{j=1}^{\infty} g_1^{-k'_1}(x^{(k,j)}) g_2^{-k'_2}(x^{(k,j)}) \ldots g_n^{-k'_n}(x^{(k,j)}) \cdot |L(x^{(k,j)}, s)| \psi_j^2(x).$$

Отсюда в силу условий (2) и (III) следует, что

$$|\widetilde{a}_k(x) s^{k*}| \le \tau \lambda^{|k'|} (1 + \tau) |L(x, s)| g_1^{-k'_1}(x) g_2^{-k'_2}(x) \ldots g_n^{-k'_n}(x)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k^*$, $k' \ne 0$.

Если $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, то в силу (17) из последнего неравенства следует, что

$$\left| \widetilde{a}_k(x) s^{k^*} \right| \le \tau M_0 \; g_1^{-k'_1}(x) g_2^{-k'_2}(x) \ldots g_n^{-k'_n}(x) |L_m(s)|.$$

Используя это неравенство из (23) имеем $\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le \tau \cdot M_2$ для всех $k = k' + k^*$, $|k| \le 2r$, $k' \ne 0$. Следовательно (см. (22)) существует число $M_3 > 0$ такое, что

$$\|\Gamma_*\|_p \le \tau M_3. \tag{25}$$

Теперь оценим норму оператора Γ_0. Из равенства (21) в силу леммы 2.2 из [16] имеем

$$\|\Gamma_0\|_p \le \Lambda(n,\nu) \cdot \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p\,. \tag{26}$$

Применяя лемму 2.3 из [16], получим

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \le \sup\left|(\widetilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)})s^k L_m^{-1}(s)\right|,$$

где верхняя грань берется по $s \in R_n$ и $x \in \operatorname{supp}\psi_m$. Отсюда в силу неравенств (16)-(18) следует, что

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \le \tau \cdot M_4 \tag{27}$$

для всех $m = 1, 2, \dots;$ M_4 – некоторое конечное положительное число.

Таким образом (см. (25), (26)) существует положительное число M_5 такое, что $\|\Gamma_0\|_p \le \tau M_5$. Теперь, учитывая равенство $\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0$ из (24), получим $\|\Gamma_1\|_p \le \tau(M_3 + M_5)$. Следовательно, существует число $t' > 0$, такое, что при $\tau \in (0, t')$ норма оператора Γ_1 не превосходит $1/2$.

Утверждение леммы 2 относительно оператора GF доказано. Оставшаяся часть утверждения этой леммы относительно оператора $G'F'$ доказывается аналогично.

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда найдется положительное число* t_2 *такое, что если* $\tau \in (0, t_2)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то оператор* $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$ $(G' = G'(\cdot, D),\ D(G') = C_0^\infty(\Omega))$ *в пространстве* $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(L_q(\Omega),$ $q = p/(p-1))$ *имеет замыкание* $G_{(p)}$ $\left(G'_{(q)}\right)$ *со следующими свойствами*

$$G_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{1,(p)}, \quad R(G_{(p)}) = L_p(\Omega) \tag{28}$$

$$\left(G'_{(q)}F'_{(q)} = E + \Gamma_{2,(q)}, \quad R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)\right).$$

Здесь $\Gamma_{1,(p)}$ $\left(\Gamma_{2,(q)}\right)$ – *замыкание в* $L_p(\Omega)$ $(L_q(\Omega))$ *оператора* Γ_1, $D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$, $(\Gamma_2,\ D(\Gamma_2) = C_0^\infty(\Omega))$, *из леммы 2.*

Доказательство. Так как $\Gamma_1 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma_1\|_p \le 1/2$, то $\|\Gamma_1 u; L_p(\Omega)\| \le 0,5\|u; L_p(\Omega)\|$ для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда в силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ следует, что оператор Γ_1, $D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{1,(p)}$, норма которого не превосходит $1/2$. Поэтому $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$.

Обозначим через $\underset{p}{\to}$ сходимость по норме пространства $L_p(\Omega)$.

Пусть v – произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. Существует последовательность функций $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\to} v$ при $j \longrightarrow \infty$. В силу определения оператора $\Gamma_{1,(p)}$ имеем $(E + \Gamma_1)v_j \underset{p}{\to} (E + \Gamma_{1,(p)})v$ при $j \longrightarrow \infty$. Из (19) следует, что $(E + \Gamma_1)v_j = GFv_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому

$$GFv_j \underset{p}{\to} (E + \Gamma_{1,(p)})v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{29}$$

Согласно лемме 2.3 из [16] псевдодифференциальный оператор Φ_m с символом $L_m^{-1}(s)$ имеет непрерывное продолжение в $L_p(R_n)$ и

$$\|\Phi_m\|_p \le M \sup_{s \in R_n} |L_m^{-1}(s)|. \tag{30}$$

Поэтому оператор (см. (12)) $F,\ D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $F_{(p)}$. Следовательно

$$Fv_j \underset{p}{\to} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{31}$$

Пусть $R(F_{(p)})$ – область значений оператора $F_{(p)}$, и пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R(F_{(p)})$. Существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)}v$. Пусть $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $v_j \underset{p}{\to} v$, $j \longrightarrow \infty$. Тогда из (30) следует, что $u_j \underset{p}{\to} u$, $j \longrightarrow \infty$, где $u_j = Fv_j$, $j = 1, 2, 3 \ldots$.

Так как $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для всех $j = 1, 2, 3 \ldots$ и $G_{(p)}$ – замыкание оператора $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$, то $Gu_j \underset{p}{\to} G_{(p)}u,\ j \longrightarrow \infty$. Отсюда в силу равенств $u_j = Fv_j$, $u = F_{(p)}v$ имеем $GFv_j \underset{p}{\to} G_{(p)}F_{(p)}v,\ j \longrightarrow \infty$. Далее применяя (28) имеем

$$G_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_{1,(p)})v \tag{32}$$

для всех $v \in L_p(\Omega) \cap D(F_{(p)})$. Так как $F_{(p)}$ – непрерывное продолжение оператора F, $D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, во всем пространстве, то равенство (31) имеет место для всех $v \in L_p(\Omega)$. Первое равенство в (27) доказано.

Так как $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$ и $\|\Gamma_{1,(p)}\|_p \le 1/2$, то согласно известной теореме из теории операторов (см., например, [21, стр. 230]), $(E + \Gamma_{1,(p)})$ – непрерывно обратимый оператор и $\|(E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}\|_p < 1/\left(1 - \|\Gamma_{1,(p)}\|_p\right)$. Следовательно

$$R\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) = D\left(\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}\right) = L_p(\Omega).$$

Отсюда и из первого равенства (27) следует, что $G_{(p)}F_{(p)}$ – обратимый оператор и

$$\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1} = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}. \tag{33}$$

Поэтому $R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) = D\left(\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1}\right) = L_p(\Omega)$. Так как $R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(G_{(p)}\right)$ и $R\left(G_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega)$, то отсюда следует, что $R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Второе равенство в (27) доказано.

Вторая часть утверждения леммы 3 относительно оператора $G' = G'(\cdot, D),\ D(G') = C_0^\infty(\Omega)$ доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть t_2 – постоянная из леммы 3. Тогда, если $\tau \in (0, t_2)$, $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(p-1)$, то*

$$G_{(p)} = (G'_{(q)})^*,\ G'_{(q)} = G^*_{(p)}. \tag{34}$$

Более того операторы $G_{(p)}$ и $G'_{(q)}$ имеют непрерывные обратные, и для них выполняются равенства

$$G_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1),\ (G'_{(q)})^{-1} = F'_{(q)}(E + \mathscr{S}_2), \tag{35}$$

где операторы $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ соответственно принадлежат пространствам $\mathscr{L}_p[\Omega]$, $\mathscr{L}_q[\Omega]$ и их норма меньше единицы.

Доказательство. Обычным интегрированием по частям доказывается равенство $(Gu, v) = (u, G'v)$ для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно $(G_{(p)}u, v) = (u, G'_{(q)}v) \quad (u, v \in C_0^\infty(\Omega))$.

С другой стороны, согласно определению сопряженного оператора, $\left(G_{(p)}u, v\right) = \left(u, (G_{(p)})^* v\right)$ для всех $u \in D\left(G_{(p)}\right)$, $v \in D\left(G^*_{(p)}\right)$. Таким образом $G^*_{(p)}v = G'_{(q)}v$ $(v \in C_0^\infty(\Omega))$.

Согласно известной теореме в теории операторов (см., например, [21, стр.231]), если A – непрерывный линейный оператор в некотором банаховом пространстве, то имеет место равенство $(\mathrm{ker}A)^{\perp} = R(A^*)$, где знак $\perp$ означает ортогональное дополнение. Поэтому из равенства (см. лемму 3) $R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$, следует, что

$$\ker\left(G'_{(q)}\right)^* = 0. \tag{36}$$

Так как (см. (27)) $R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$, то, применяя пункт (в) леммы 2.6 работы [16], из (35) получим $G_{(p)} = \left(G'_{(q)}\right)^*$. Первое равенство в (33) доказано. Аналогичным рассуждением доказывается и второе равенство в (33).

Из равенств (33) и (35) следует, что $\mathrm{ker}G_{(p)} = \ker\left(G'_{(q)}\right)^* = 0$. Следовательно, $G_{(p)}$ – обратимый оператор. Поэтому из равенства (32) имеем

$$F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}. \tag{37}$$

Вводим оператор $\mathscr{S}_1 = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} - E$. Используя (36) имеем

$$F_{(p)}\left(E + \mathscr{S}_1\right) = F_{(p)}\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} = F_{(p)}F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = G^{-1}_{(p)}.$$

Первое равенство в (34) доказано.

Применяя теорему 5 из [21, стр. 230], получаем

$$\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\Gamma_{1,(p)}\right)^j.$$

Отсюда следует, что $\|\mathscr{S}_1\|_p \le 1/\left(1 - \left\|\Gamma_{1,(p)}\right\|_p\right) < 1$.

Второе равенство в (34) и неравенство $\|\mathscr{S}_2\|_q < 1$ доказываются аналогично.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $1 < p < \infty$, выполнены все условия теоремы 1 и пусть t_2 – постоянная из леммы 3. Тогда если $\tau \in (0, t_2)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то имеют место следующие равенства*

$$R\left(F_{(p)}\right) = D\left(G_{(p)}\right), \quad \mathrm{ker}F_{(p)} = 0. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $u(x) = \left(F_{(p)}v\right)(x)$, $x \in \Omega$. Согласно нашим обозначениям $F_{(p)}$ – замыкание оператора F, определенного равенством (12), в пространстве $L_p(\Omega)$. Поэтому существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\to} v$, $\quad Fv_j \underset{p}{\to} F_{(p)}v$, $j \longrightarrow \infty$. Положим $u_j = Fv_j$. Тогда $u_j \underset{p}{\to} u$, $\quad j \longrightarrow \infty$.

Так как $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то согласно лемме 2 $GFv_j = (E + \Gamma_1)\,v_j$, $\quad j = 1, 2, 3, \ldots$.

В силу ограниченности оператора $E + \Gamma_1$ имеем $(E + \Gamma_1)\,v_j \underset{p}{\to} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)v$, $\quad j \longrightarrow \infty$. Поэтому $GFv_j \underset{p}{\to} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)v = G_{(p)}F_{(p)}v$, $\quad j \longrightarrow \infty$. Следовательно $u_j \underset{p}{\to} u$ и $Gu_j \underset{p}{\to} Gu$ при $j \longrightarrow \infty$, то есть $u \in D\left(G_{(p)}\right)$.

Таким образом,

$$R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(G_{(p)}\right). \tag{39}$$

Пусть $w \in D\left(G_{(p)}\right)$. Положим $v = G_{(p)}w$. Так как согласно лемме 4 существует обратный оператор $G^{-1}_{(p)}$, то $w = G^{-1}_{(p)}v$. Отсюда и из равенства (34) следует, что $w = F_{(p)}\left(E + \mathscr{S}_1\right)v$.

Следовательно, $w \in R\left(F_{(p)}\right)$ и доказано включение $D\left(G_{(p)}\right) \subset R\left(F_{(p)}\right)$. Отсюда и из (38) следует первое равенство в (37).

Пусть $F_{(p)}v = 0$. Тогда из (см. (27)) $G_{(p)}F_{(p)}v = (E+\Gamma_1)\,v$ следует, что $(E+\Gamma_1)\,v = 0$. Из обратимости оператора $(E+\Gamma_1)$ следует, что $\ker(E+\Gamma_1) = 0$. Поэтому $v = 0$. Второе равенство в (37) доказано, что завершает доказательство леммы 5.

4. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 6. *В условиях теоремы 1 существует, число $t_3 > 0$ такое, что если $\tau \in (0, t_3)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то существует оператор $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ с $\|\cdot\|_p$-нормой, не превосходящей $1/2$, такой, что*

$$LFu = (E+\Gamma)u \quad \left(u \in C_0^\infty(\Omega)\right). \tag{40}$$

Доказательство. Аналогично равенствам (20), (21), доказывается равенство (39), где

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma'', \quad \Gamma' = \sum_{m=1}^{+\infty}[L,\, \psi_m]\Phi_m\psi_m, \quad \Gamma'' = \sum_{m=1}^{+\infty}\psi_m\,(L - L_m)\,\Phi_m\psi_m.$$

Далее поступая также, как в доказательстве леммы 2, доказывается, что $\|\Gamma\|_p \le \tau\mathbb{M}_0$, где $\mathbb{M}_0$ – некоторая положительная постоянная. Следовательно, при $t_3 = 1/2\tau\mathbb{M}_0$ и $\tau \in (0, t_3)$ норма оператора Γ не превосходит $1/2$. Лемма 6 доказана.

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что оператор (см. (1)) $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Для этого нам достаточно показать, что если $Lu_j \underset{p}{\to} v$, $u_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$, где $v \in L_p(\Omega)$ и $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для $j = 1, 2, \ldots$, то $v = 0$.

Так как $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)})$ и согласно лемме 5 (см. (37)) $D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то $u_j \in R(F_{(p)})$ для $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существуют функции $v_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что $u_j = F_{(p)}v_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$LF_{(p)}v_j \underset{p}{\to} v \text{ и } F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Далее применяя лемму 6 (см. (39)) имеем

$$LF_{(p)}v_j = \left(E + \Gamma_{(p)}\right)v_j \underset{p}{\to} v,\ F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)$ следует, что

$$v_j \underset{p}{\to} \left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v,\ F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{41}$$

Так как $F_{(p)}$ – замкнутый непрерывный оператор, то из $v_j \underset{p}{\to} w$, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$ следует, что $F_{(p)}w = 0$. Поэтому из (40) получаем $F_{(p)}\left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0$. Отсюда в силу равенства (37) имеем $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0$, то есть $v = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что оператор $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, имеет в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, замыкание. Это замыкание обозначим через $L_{(p)}$.

Далее докажем равенство

$$\ker L_{(p)} = 0. \tag{42}$$

Пусть $L_{(p)}v = 0$. Существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$u_j \underset{p}{\rightarrow} v,\ Lu_j \underset{p}{\rightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{43}$$

Так как (см. (37)) $C_0^{\infty}(\Omega) \subset D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то функции $u_j,\ j = 1, 2, \ldots$, можно представить в виде $u_j = F_{(p)}v_j,\ j = 1, 2, \ldots$. Подставляя это в (42) имеем

$$F_{(p)}v_j \underset{p}{\rightarrow} v,\ LF_{(p)}v_j \underset{p}{\rightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу леммы 6 получим $\left(E + \Gamma_{(p)}\right) v_j \underset{p}{\rightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Поскольку $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор, то $v_j \underset{p}{\rightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Таким образом, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\rightarrow} v,\ v_j \underset{p}{\rightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Отсюда в силу замкнутости оператора $F_{(p)}$ находим $F_{(p)}v = 0$. Следовательно (см. лемму 5), $v = 0$. Равенство (41) доказано.

Далее, в силу равенства (39), поступая так же, как в доказательстве леммы 3, доказывается, что $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$. Так как $R\left(E + \Gamma_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$, то отсюда следует, что $R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Далее учитывая $R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(L_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega)$ получим

$$R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega). \tag{44}$$

Отсюда и из (41) следует существование обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$.

Так как $\left\|\Gamma_{(p)}\right\| \leq 1/2$, то $\left(E + \Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор и $\left\|\left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1}\right\| \leq 1$. Положим $\mathcal{J} = \left(E + \Gamma_{(p)}\right)^{-1} - E$. Используя равенство $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ имеем

$$L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathcal{J}), \tag{45}$$

где $\mathcal{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p < 1$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Сначала докажем неравенство

$$\left\|a_k D^k F\right\|_p \leq C_1 < +\infty,\ |k| \leq 2r, \tag{46}$$

где оператор F определен равенством (12).

Представим оператор $a_k D^k F$ в виде

$$a_k D^k F = F_*^{(k)} + F_{**}^{(k)}, \tag{47}$$

где

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k \Phi_m^{(k)} \psi_m,\ F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[a_k D^k,\, \psi_m\right] \Phi_m \psi_m, \tag{48}$$

$\Phi_m^{(k)}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Далее оценим норму оператора $F_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $F_*^{(k)}$ в виде

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k \left(x^{(m,k)}\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m.$$

Применяя лемму 2.2 из [16], получаем

$$\left\| F_*^{(k)} \right\|_p \le M_1 \left(\mathbb{C}_{1,\,k} + \mathbb{C}_{2,\,k} \right), \tag{49}$$

где

$$\mathbb{C}_{1,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p,\ \mathbb{C}_{2,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\ldots} \left\| \psi_m a_k \left(x^{(m,\,k)} \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p.$$

Поступая также, как при оценке нормы оператора Γ_0 в доказательстве леммы 3, получаем

$$\left\| \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) \Phi_m^{(k)} \psi_m \right\|_p \le M_{11} \sup \left| \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) s^k L_m^{-1}(s) \right| \le$$
$$\le M_{12} \sup \left| \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)} \right) \right) s^k L^{-1}(x,\,s) \right| \le \tau\, M_{13},$$

где верхняя грань берется по $x \in \operatorname{supp}\, \psi_m$, $s \in R_n$. Таким образом, $\mathbb{C}_{1,\,k} \le M_{13}\tau$, $|k| \le 2r$, где M_{13} – некоторая положительная постоянная.

Из (17) и условия (3) следует, что

$$\left| a_k \left(x^{(m,\,k)} \right) s^k L_m^{-1}(s) \right| \le M_{14}$$

для всех $s \in R_n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда в силу леммы 2.3 из [16] имеем

$$\mathbb{C}_{2,\,k} \le M_{15} \sup_{m=1,2,3,\ldots} \sup_{s \in R_n} \left| a_k \left(x^{(m,\,k)} \right) s^k L_m^{-1}(s) \right| \le M_{15} M_{14}.$$

Далее учитывая (48) имеем

$$\| F_*^{(k)} \|_p \le M_{16} < +\infty, \tag{50}$$

где M_{16} – положительная постоянная, зависящая от r, n, p, $\varkappa$, δ, λ.

Представим оператор $F_{**}^{(k)}$ в виде

$$F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \ne 0}} C(k',\,k'') a_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m,$$

где $C(k',\,k'')$ – постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$.

Применяя лемму 2.2 из [16], получим

$$\left\| F_{**}^{(k)} \right\|_p \le \Lambda^{1/p}(n,\,\lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \ne 0}} \mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)},$$

где

$$\mathbb{C}_{(k',\,k'')}^{(k)} = \sup_{1,\,2,\,\ldots} \left\| a_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m \right\|_p.$$

Из утверждения п. 3 леммы 1, неравенства (17) и условия (II) следует, что

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} \psi_m} \sup_{s \in R_n} \left| \psi_m^{(k')}(x) a_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right| \le$$
$$\le M_{21} \sup_{x \in \operatorname{supp} \psi_m} \sup_{s \in R_n} \left| a_k(x) g_1^{k_1'}(x) g_2^{k_2'}(x) \ldots g_n^{k_n'}(x) s^{k''} L_m^{-1}(s) \right| \le$$
$$\le M_{22} \sup_{x \in \operatorname{supp} \psi_m} \sup_{s \in R_n} \left| a_k(x) g_1^{k_1'}(x) g_2^{k_2'}(x) \ldots g_n^{k_n'}(x) s^{k''} L^{-1}(x,\,s) \right| \le \tau M_{22} < +\infty.$$

Далее учитывая неравенство

$$\left\|\Phi_m^{(k'')}\right\|_p \le M_{23} \sup_{s\in R_n} \left|s^{k''} L_m^{-1}(s)\right|,$$

имеем

$$\left\|a_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m\right\|_p \le M_{23} \sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \sup_{s\in R_n} \left|\psi_m^{(k')}(x)a_k(x)s^{k''}L_m^{-1}(s)\right| \le \tau M_{22}M_{23} < +\infty.$$

Таким образом

$$\left\|F_{**}^{(k)}\right\|_p \le M_{24} < +\infty, \tag{51}$$

где M_{24} – некоторая положительная постоянная, зависящая только от r, n, p, $\varkappa$, δ, λ.

В силу равенства (46) из (49) и (50) следует неравенство (45).

Далее докажем неравенство

$$\left\|a_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| \le C_2 \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \quad (1 < p < +\infty) \tag{52}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$; C_2 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Так как (см. лемму 5) $C_0^\infty(\Omega) \subset D\left(G_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right)$, то существует функция $v \in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)}v$. Учитывая это, в силу равенства $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ имеем $v = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} Lu$. Далее применяя неравенство (45) имеем

$$\left\|a_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| = \left\|a_k D^k F_{(p)}v;\, L_p(\Omega)\right\| \le C_1 \left\|v;\, L_p(\Omega)\right\| = \\ = C_1 \left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \le C_2 \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\|.$$

Неравенство (51) доказано.

Из (12) следует, что (см. (I), (29))

$$\left\|F_{(p)}\right\|_p \le \Lambda^{1/p}(n,\lambda) \sup_{m=1,2,\dots} \left\|\Phi_m\right\|_p \le M \sup_{s\in R_n} \left|L_m^{-1}(s)\right| \le M_*,$$

где постоянная $M_* > 0$ зависит только от r, n, p, $\varkappa$, δ. Отсюда и из (44) следует ограниченность оператора $L_{(p)}^{-1}$. Поэтому существует положительная постоянная C_0 такая, что

$$\left\|u;\, L_p(\Omega)\right\| \le C_0 \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\| \quad \left(u \in C_0^\infty(\Omega)\right). \tag{53}$$

Теперь применяя неравенства (51), (52) находим (см. (5))

$$\left\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\right\| \le \left\|u;\, L_p(\Omega)\right\| + \sum_{|k|\le 2r} \left\|a_k D^k u;\, L_p(\Omega)\right\| \le M_3 \left\|Lu;\, L_p(\Omega)\right\|.$$

Таким образом левое неравенство в (8) для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказано. Правое неравенство в (8) очевидно. Так как по определению $\overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (5) и $L_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, то из доказанного неравенства по непрерывности следует, что $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, и неравенство (8) имеет место для всех $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Далее докажем, что всякая функция $u(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{|k|\le 2r}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x)D_x^k u(x)\right|^p dx\right) < +\infty, \tag{54}$$

принадлежит области определения оператора $L_{(p)}$.

Пусть $G(x,\,D_x)$ – вспомогательное дифференциальное выражение, определенное равенствами (14), (15) и $G_{(p)}$ – замыкание оператора $G(x,\,D_x)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

Так как коэффициенты $\widetilde{a}_k(x)$ выражения $G(x,\,D_x)$ достаточно гладкие, то можно определить выражение $G'(x,\,D_x)$ сопряженное к $G(x,\,D_x)$. Через $G'_{(q)}$ обозначим замыкание оператора $G'(x,\,D_x),\ D(G') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$.

Из (14), (15) имеем

$$\|Gu;\,L_p(\Omega)\| \le \sum_{|k|\le 2r}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{\Omega}\left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x)D_x^k u(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда в силу условия (53) получим $Gu \in L_p(\Omega)$. Теперь в силу пункта (г) леммы 2.6 работы [16] из $u \in L_p(\Omega)$ и $Gu \in L_p(\Omega)$ следует, что $u \in D\left(\left(G'_{(q)}\right)^*\right)$ и в силу (33) $u \in D\left(G_{(p)}\right)$. Так как (см. (37)) $D\left(G_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right)$, то $u \in R\left(F_{(p)}\right)$. Отсюда в силу равенства

$$D\left(L_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right) \tag{55}$$

следует, что $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Докажем равенство (54). Пусть $v(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $w(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $v(x) = \left(F_{(p)}w\right)(x),\ x \in \Omega$. Существует последовательность функций $w_1(x), w_2(x), \ldots$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $w_j \underset{p}{\to} w$ и $Fw_j \underset{p}{\to} F_{(p)}w$, при $j \longrightarrow +\infty$. Обозначим $v_j = Fw_j$. Тогда имеем $w_j \underset{p}{\to} w$ и $v_j \underset{p}{\to} v$ при $j \longrightarrow +\infty$. Так как $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, то применяя лемму 6 имеем $LFw_j = (E+\Gamma)w_j,\ j = 1, 2, \ldots$. В силу ограниченности оператора $(E+\Gamma)$ из $w_j \underset{p}{\to} w,\ j \longrightarrow +\infty$, следует, что $(E+\Gamma)w_j \underset{p}{\to} (E+\Gamma)w$ при $j \longrightarrow +\infty$. Отсюда ввиду равенства $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ следует, что $LFw_j \underset{p}{\to} L_{(p)}F_{(p)}w$ при $j \longrightarrow +\infty$. Подставляя сюда $v_j = Fw_j$, $v = F_{(p)}w$ находим $v_j \underset{p}{\to} v$ и $Lv_j \underset{p}{\to} L_{(p)}v$ при $j \longrightarrow +\infty$. Следовательно, $v \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Таким образом, включение $R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(L_{(p)}\right)$ доказано. Обратное включение следует из равенства $L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathcal{J})$, где $\mathcal{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p < 1$. Равенство (54) доказано.

Далее докажем, что

$$W'_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right). \tag{56}$$

Пусть $u \in W'_{p;\,L}(\Omega)$. Тогда $u \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ и конечна норма (5). Выберем точки $x^{(m,\,k)} \in \operatorname{supp}\psi_m,\ |k| \le 2r,\ m = 1, 2, \ldots$, которые имеются в определении вспомогательного дифференциального выражения $G(x,\,D_x)$ (см. (14), (15)), таким образом, чтобы для почти всех $x \in \operatorname{supp}\psi_m$ выполнялось неравенство $\left|a_k(x)D_x^k u(x)\right| \le |a_k(x)|$. Тогда учитывая конечность покрытия $\{\operatorname{supp}\psi_m\}_{m=1}^\infty$ области Ω (см. пункт 2) леммы 1) имеем

$$\sum_{|k|\le 2r}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x)D_x^k u(x)\right|^p dx\right) \le$$

$$\le 2^p\Lambda(n,\,\lambda)\sum_{|k|\le 2r}\int_{\Omega}\left|a_k\left(x\right)D_x^k u(x)\right|^p dx \le 2^p\Lambda(n,\,\lambda)\left\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\right\| < +\infty.$$

Следовательно, условие (53) выполняется и $u \in D\left(L_{(p)}\right)$. Вложение (55) доказано.

Пусть выполнено условие гладкости (4). Тогда для любой функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ по формуле (6) можно определить обобщенную функцию $a_k(x)\, D_x^k u(x)$. Следовательно, можно определить и пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Заметим, что норма в пространствах $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$ определяется одним и тем же равенством (5). Поэтому с помощью рассуждений аналогичных доказательству вложения (55) можно показать, что для любой функции $u \in W_{p,\,L}(\Omega)$ выполняется условие (53), и следовательно $u \in D\left(L_{(p)}\right)$, то есть имеет место вложение $W_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right)$. Так как $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, то $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega)$. Равенство $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega) = D\left(L_{(p)}\right)$ непосредственно следует из определения оператора $L_{(p)}$ и пространства $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega)$. Равенство (9) доказано.

6. Доказательство теоремы 3

Непосредственными вычислениями доказывается следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть символ*

$$A(x,s) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x)s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

принадлежит классу $B(\tau_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau_1 \in (0,\,1)$, и пусть коэффициенты $b_k(x)$ символа

$$A_0(x,\,s) = \sum_{|k|\le 2r} b_k(x)s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\le 2r}} \left| b_k(x) s^{k'} g_1^{k''_1}(x) g_2^{k''_2}(x) \ldots g_n^{k''_n}(x)\right| \le \tau_2 |A(x,\,s)|, \tau_2 \in (0,\,1/2),$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R^n$.

Тогда символ $A_1(x,\,s) = A(x,\,s) + A_0(x,\,s)$ принадлежит классу $B(\tau_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$, где $\tau_3 \ge \ge \tau_1 + 6\tau_2$.

Обозначим через $L'(x,\,s)$ символ дифференциального выражения $L'(x,\,D_x)$, сопряженного к дифференциальному выражению $L(x,\,D_x)$.

Лемма 8. *Существует число $\mu \in (0,\,1/4)$, зависящее только от r и n, такое, что если $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau \in (0,\,\mu)$, то $L'(x,s) \in B\left(\frac{8\tau}{\mu}, \overrightarrow{g}, \Omega\right)$. Если при этом выполняется неравенство*

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a_k(x)s^k\right| \le \varkappa\,|L(x,\,s)| \quad (x \in \Omega,\, s \in R^n)\,,$$

то

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a'_k(x)s^k\right| \le \varkappa'\,|L'(x,\,s)| \quad (x \in \Omega,\, s \in R^n)\,,$$

где $\varkappa' = 4\varkappa + 3$ и $a'_k(x)$ – коэффициенты символа $L'(x,\,s)$.

Доказательство основано на применении леммы 7.

Далее докажем, что в условиях теоремы 3 имеет место равенство

$$\ker \left(L'_{(q)}\right)^* = 0. \tag{57}$$

Сначала рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVa). В этом случае $L(x, D_x)$ – симметричное дифференциальное выражение, то есть $L'(x, D_x) = L(x, D_x)$. Поэтому к оператору $L' = L'(x, D_x), \quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, можно применить теорему 1. Тогда (см. (41), (43)) $\ker\left(L'_{(q)}\right) = 0, \quad R\left(L'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$. Так как $R\left(L'_{(q)}\right) \oplus \ker\left(L'_{(q)}\right)^* = L_q(\Omega)$, то отсюда следует (56).

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVб). В этом случае подбираем число $t_0 = t_0(r, n, p, K) > 0$ следующим образом

$$t_0 = \frac{\mu}{8}\min\left\{t_3(r, n, p, \varkappa), \tau_0(r, n, p, \varkappa)\right\},$$

где число $\mu > 0$ – такое же как в лемме 8, $t_3 = t_3(r, n, p, \varkappa)$ – положительное число, определенное в лемме 6, $\tau_0(r, n, p, \varkappa)$ – положительное число, определенное в теореме 1. Тогда $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ при $\tau \in (0, t_0)$ и в силу леммы 8 имеем $L'(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. Следовательно к оператору $L' = L'(x, D_x), \quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_q(\Omega)$, можно применить теорему 1. Поэтому (см. (43)) $R\left(L'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$ и следовательно $\ker\left(L'_{(q)}\right)^* = 0$. Равенство (56) доказано в случае выполнения условия (IVб).

Так как $\tau < t_3(r, n, p, \varkappa)$, то к оператору $L = L(x, D_x), \quad D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_p(\Omega)$, можно применить теорему 1. Поэтому (см. (43)) $R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Отсюда и из (56) в силу пункта (в) леммы 2.6 из [16] следует равенство $\left(L'_{(q)}\right)^* = L_{(p)}$. Теперь из утверждения пункта (г) леммы 2.6 из [16] следует, что $u(x) \in D\left(\left(L'_{(q)}\right)^*\right) = D\left(L_{(p)}\right)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и обобщенная функция

$$\left(L(x, D_x)u\right)(x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k u(x)$$

принадлежит пространству $L_p(\Omega)$. Следовательно,

$$D\left(L_{(p)}\right) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{58}$$

Далее, применяя теорему 2, имеем

$$D\left(L_{(p)}\right) = W_{p,\,L}(\Omega) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{59}$$

Следовательно

$$D\left(L_{(p)}\right) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{60}$$

Равенство (10) теоремы 3 следует из (57), (58).

Далее покажем, что из (59) следует разделимость дифференциального выражения $L(x, D_x)$ (см. определение 1). Пусть функция $u(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Тогда из определения функционального пространства (см. (7)) $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ следует, что $u(x) \in \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Так как $W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$, то $u(x) \in W_{p,\,L}(\Omega)$, то есть $\|u; W_{p;\,L}(\Omega)\| < +\infty$. Отсюда в силу равенства (5) следует, что $a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$. Разделимость дифференциального выражения $L(x, D_x)$ доказана, что и завершает доказательство теоремы 3.

7. Заключение

В работе найдены некоторые достаточные условия разделимости эллиптических операторов высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области, коэффициенты которых имеют нестепенное вырождение на границе области. Попутно установлены соответствующие весовые интегральные неравенства, которые могут найти приложения в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Доказанные в работе теоремы об обратимости вспомогательных дифференциальных операторов позволяют в дальнейшем исследовать разрешимость некоторых граничных задач для эллиптических уравнений с вырождением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. 1971. Vol. 23(3). P. 301–324.

2. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A. Correct Solvability, Embedding Theorems and Separability for the Sturm-Liouville Equation // Jul 23 2013 math.CA arXiv:1307.5611v1.

3. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A. Weighted Estimates for Solutions of the General Sturm-Liouville Equation and the Everitt-Giertz Problem. I // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2). 2015. Vol. 58. P. 125–147.

4. Brown R.C., Hinton D.B. Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators // Mathem. Bohemica. 1999. Vol. 124(2-3). P. 273–292.

5. Brown R.C. Separation and disconjugacy // Journ. of Inequ. in Pure and Appl. Math. 2003. Vol. 4(3), Art. 56. P. 1–16.

6. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electr. J. of Quantat. Theory of Diff. Equat. 2012. No. 66. P. 1–12. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

7. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009–1011.

8. Бойматов К.Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Доклады Академии наук (Россия). 1997. Т. 356, № 1. С. 10–12.

9. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифферециальных операторов второго порядка // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110–112.

10. Zayed E.M.E., Omran S.A. Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existance and uniqueness theorem // Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2011. Vol. 6(8). P. 353–364.

11. Omran S.A., Gepreel K., Nofal E.T.A. Separation of the general differential wave equation in Hilbert space // Int. J. Nonlinear Science. 2011. Vol. 11(3). P. 358–365. http://www.nonlinearscience.org.uk/

12. Muratbekov M., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain // Eurasian mathematical journal. 2016. Vol. 7(1). P. 50–67.

13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with the existance and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337. P. 659–666.

14. Zayed E.M.E., Omran S.A. Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space // Int. J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13–23.

15. Бойматов К.Х. L_2-оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 521–524.

16. Бойматов К.Х.Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.

17. Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений // Доклады РАН. 1993. Т. 330, № 4. С. 409–414.

18. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.

19. Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.

20. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536–542.

21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-ое издание // М.: Наука, 1976. 576 с.

REFERENCES

1. Everitt W.N., Giertz M., 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 23(3), pp. 301–324.

2. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A., 2013, "Correct Solvability, Embedding Theorems and Separability for the Sturm-Liouville Equation", Jul 23 2013 math.CA arXiv:1307.5611v1.

3. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A., 2015, "Weighted Estimates for Solutions of the General Sturm-Liouville Equation and the Everitt-Giertz Problem. I", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, vol. 58, pp. 125–147.

4. Brown R.C., Hinton D.B., 1999, "Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators", *Mathem. Bohemica.*, vol. 124(2-3), pp. 273–292.

5. Brown R.C., 2003, "Separation and disconjugacy", *Journ. of Inequ. in Pure and Appl. Math.*, vol. 4(3), Art. 56, pp. 1–16.

6. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D., 2012, "Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation", *Electr. J. of Quantat. Theory of Diff. Equat.*, No. 66, pp. 1–12. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

7. Boimatov K.Kh., 1973, "Theorems on the separation property", *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 213, № 5, pp. 1009–1011.

8. Boimatov K.Kh., 1997, "On the Everitt and Giertz method for Banach spaces", *Dokl. Akad. Nauk,* vol. 356, № 1, pp. 10–12.

9. Boimatov K.Kh., 1989, "Coercive estimates and separability for second-order nonlinear differential operators", *Mat. Zametki*, vol. 46, № 6, pp. 110–112.

10. Zayed E.M.E., Omran S.A., 2011, "Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existance and uniqueness theorem", *Int. J. Contemp. Math. Sciences,* vol. 6(8), pp. 353–364.

11. Omran S.A., Gepreel K., Nofal E.T.A., 2011, ”Separation of the general differential wave equation in Hilbert space”, *Int. J. Nonlinear Science*, vol. 11(3), pp. 358–365. http://www.nonlinearscience.org.uk/

12. Muratbekov M., Otelbaev M., 2016, ”On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain”, *Eurasian mathematical journal*, vol. 7(1), pp. 50–67.

13. Zayed E.M.E., 2008, ”Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with the existance and uniqueness theorem”, *J. Math. Anal. Appl.,* vol. 337, pp. 659–666.

14. Zayed E.M.E., Omran S.A., 2010, ”Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space”, *Int. J. Math. Combin.*, vol. 4, pp. 13–23.

15. Boimatov K.Kh., 1975, ”L_2-estimates of the generalized solutions of elliptic differential equations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 223(3), pp. 521–524.

16. Boimatov K.Kh., 1987, ”Separability theorems, weighted spaces and their applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 170, pp. 39–81.

17. Boimatov K.Kh., 1993, ”Coercivity properties of strongly degenerate elliptic equations”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math,* vol. 47, № 3, pp. 489–497.

18. Otelbaev M., 1984, ”Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 161, pp. 213–239.

19. Lizorkin P.I., 1980, ”Estimate of mixed and intermediate derivatives in weighted L_p-norms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 156, pp. 141–153.

20. Iskhokov S.A., 2003, ”Smoothness of the generalized solution of an elliptic equation with nonpower degeneracy”, *Differential equations,* vol. 39, № 11, pp. 1618–1625. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000019354.37211.26.

21. Kolmogorov A.N., Fomin S.V., 1999, ”Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis”, Dover Publications, INC., 576 p.

Получено 14.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 519.6, 539.30 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-106-120

Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами[1]

В. И. Горбачёв (г. Москва)

Горбачев Владимир Иванович — Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики композитов механико- математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальное уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (исходные уравнения). Наряду с каждым исходным уравнением рассматривается точно такое же уравнение только с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение). Показано, что общее решение исходного уравнения представляется в интегральной форме через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение исходного уравнения. Фундаментальное решение находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость ряда. В качестве конкретного примера применения разработанной методики рассматривается уравнение Чебышева.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, уравнения с переменными коэффициентами, методы осреднения, интегральные формулы.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
В. И. Горбачев. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 106–120.

1. Введение

Многие процессы в неоднородных средах описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. В зависимости от коэффициентов они могут иметь аналитические решения. Решениями некоторых таких уравнений являются специальные функции. В частности, классические ортогональные многочлены являются решениями однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами [1, стр. 49]. В большинстве случаев, для нахождения решений уравнений с переменными коэффициентами, приходится прибегать либо к численным методам, либо к различным приближенным способам. В случае периодических коэффициентов хорошие результаты дает метод малого геометрического параметра Бахвалова-Победри

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.577.21.0271, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271). ФГБОУ ВПО "ТГПУ им. Л.Н.Толстого - получатель субсидии Министерства образования и науки.

[2, 3]. Очень часто прикладные задачи механики и физики сводятся к решению нелинейных уравнений. Одним из способов решения нелинейных задач является метод последовательных приближений, заключающийся в том, что на каждом шаге приходится решать линейные уравнения с переменными коэффициентами [4, 5, 6]. В предлагаемой работе рассматривается метод решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, основанный на интегральном представлении искомого решения через решение уравнения того же типа, но с постоянными коэффициентами. В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения с переменными коэффициентами, которое находится аналитически методом возмущений [5, 7].

2. Исходное и сопутствующее уравнения. Интегральная формула.

Рассмотрим исходное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами [8]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0\,, \quad x \in (a,b) \tag{1}$$

Если функция $f_2(x)$, при любом x, не обращается в нуль, то уравнение (1) можно свести к самосопряженной форме [9, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$\left[C(x)u'\right]' + q(x)u + X(x) = 0\,, \tag{2}$$

$$C = \exp\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\,, \quad q = \frac{f_0}{f_2}\exp\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\,, \quad X = \frac{f_0}{f_2}\exp\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Будем считать, что коэффициент $C(x) > 0$, причем $C_{min} \leqslant C(x) \leqslant C_{max}$, а коэффициент $q(x)$ ограничен и может быть как положителен, так и отрицателен в зависимости от переменной x, то есть $q_{min} \leqslant |q(x)| \leqslant q_{max}$

Пусть $G(x,\xi)$ — фундаментальное решение уравнения (2), то есть $G(x,\xi)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right] + q(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \quad x,\xi \in (a,b)\,, \tag{3}$$

где $\delta(x-\xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [10, стр. 194], [11]. Уравнение (3) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (2) при разрывных коэффициентах $C(x)$, $q(x)$ также является обобщенным [2, стр. 30-35].

Пусть $v(x)$ — решение так называемого сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами $C_o = const.$ и $q_o = const.$

$$C_o v''(x) + q_o v(x) + X(x) = 0\,, \quad x \in (a,b) \tag{4}$$

Во всех трех уравнениях область определения одна и та же — $[a,b]$. В исходном и сопутствующем уравнении одинаковые свободные члены.

2.1. Интегральная формула представления решения исходного уравнения через решение сопутствующего уравнения.

Воспользуемся результатами работы [12] и представим решение $u(x)$ исходного уравнения (2) с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения (4) и фундаментальное решение (3) следующим образом:

$$u(x) = v(x) + \int\limits_a^b \frac{dG(x,\xi)}{d\xi}\tilde{C}(\xi)\,v'(\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)v(\xi)d\xi\,, \tag{5}$$

где $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi)$.

Подстановкой выражения (5) в исходное уравнение (2) убеждаемся, что оно удовлетворяется. В самом деле, пусть

$$\mathcal{L}(\bullet) \equiv \left[C(x)(\bullet)'\right]' + q(x)(\bullet)\,, \qquad \mathcal{L}^o(\bullet) \equiv C_o(\bullet)'' + q_o(\bullet)$$

— исходный и сопутствующий операторы. Тогда

$$\mathcal{L}(u) + X(x) = \mathcal{L}(v) + \int_a^b \frac{d\mathcal{L}(G(x,\xi))}{d\xi}\tilde{C}(\xi)\,v'(\xi)d\xi - \int_a^b \mathcal{L}(G(x,\xi))\tilde{q}(\xi)v(\xi)d\xi + X(x) =$$

$$= \mathcal{L}(v) - \int_a^b \frac{d\delta(x-\xi)}{d\xi}\tilde{C}(\xi)\,v'(\xi)d\xi + \int_a^b \delta(x-\xi)\tilde{q}(\xi)v(\xi)d\xi + X(x) =$$

$$= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx}\left[\tilde{C}(\xi)\,v'(x)\right] + \tilde{q}(\xi)v(x) + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}^o(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) =$$
$$= \mathcal{L}^o(v) + X(x) = 0$$

2.2. Общее решение сопутствующего уравнения.

Общее решение сопутствующего уравнения (5) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda_o x} + K_2 e^{-i\lambda_o x} + \varphi(x)\,; \qquad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}\,, \tag{6}$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (5) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda_o C_o}\left[e^{i\lambda_o x}\int X(x)e^{-i\lambda_o x}dx - e^{-i\lambda_o x}\int X(x)e^{i\lambda_o x}dx\right] \tag{7}$$

В формулах (6) и (7) можно выделить действительное решение. В случае $q_o > 0$

$$v(x) = K_1\cos(\lambda_o x) + K_2\sin(\lambda_o x) + \varphi(x)\,; \qquad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}\,, \tag{8}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o}\left[\sin(\lambda_o x)\int X(x)\cos(\lambda_o x)dx - \cos(\lambda_o x)\int X(x)\sin(\lambda_o x)dx\right] \tag{9}$$

Если же $q_o < 0$, тогда

$$v(x) = K_1 e^{\lambda_o x} + K_2 e^{-\lambda_o x} + \varphi(x)\,; \qquad \lambda_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}}\,, \tag{10}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o}\left[e^{\lambda_o x}\int X(x)e^{-\lambda_o x}dx - e^{-\lambda_o x}\int X(x)e^{\lambda_o x}dx\right] \tag{11}$$

В формулах (7)-(11) K_1 и K_2 — произвольные действительные константы.

2.3. Общее решение исходного уравнения

Подставив (6) в интегральную формулу (5), получим общее решение исходного уравнения (2)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x)\,, \tag{12}$$

где

$$A(x) = e^{i\lambda_o x} + i\lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{i\lambda_o \xi} d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi =$$

$$= \begin{cases} \cos(\lambda_o x) - \lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\sin(\lambda_o\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\cos(\lambda_o\xi)d\xi\,, & q_o > 0 \\ e^{-\lambda_o x} - \lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{-\lambda_o\xi} d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi) e^{-\lambda_o\xi} d\xi\,, & q_o < 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$B(x) = e^{-i\lambda_o x} - i\lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{-i\lambda_o \xi} d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi =$$

$$= \begin{cases} \sin(\lambda_o x) - \lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\cos(\lambda_o\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\sin(\lambda_o\xi)d\xi\,, & q_o > 0 \\ e^{\lambda_o x} + \lambda_o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{\lambda_o\xi} d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi) e^{\lambda_o\xi} d\xi\,, & q_o < 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{15}$$

2.4. Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения

Постоянные коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения — это любые физически допустимые константы. Целесообразно увязать их со свойствами исходной задачи, например, положить их равными эффективным характеристикам [2, 3] так, что

$$C_o = \frac{1}{\langle 1/C \rangle}\,, \qquad q_o = \langle q \rangle\,, \qquad \langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{16}$$

В случае задачи Коши, среднее понимается как предельное значение при $b \to \infty$ [13, стр. 247-249].

3. Построение фундаментального решения исходного уравнения

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (12), (13) если известно фундаментальное решение уравнения (3) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (3) методом возмущений [5, 7]. Для этого перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right] + \varkappa q(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \tag{17}$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным 1. Будем искать решение уравнения (17) в виде ряда по степеням параметра $\varkappa$

$$G(x,\xi,\varkappa)=\sum_{n=0}^{\infty}\varkappa^n G_n(x,\xi) \tag{18}$$

Подставим ряд (18) в уравнение (17), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$\big[C(x)G_0'(x,\xi)\big]'+\delta(x-\xi)=0\,,\qquad \big[C(x)G_n'(x,\xi)\big]'+q(x)G_{n-1}(x,\xi)=0\,,\quad n>0 \tag{19}$$

Или

$$G_0(x,\xi)=-\int\limits_a^x\frac{h(z-\xi)}{C(z)}dz\,,\qquad G_n(x,\xi)=-\int\limits_a^x\frac{dx_1}{C(x_1)}\int\limits_a^{x_1}q(x_2)G_{n-1}(x_2,\xi)dx_2=$$

$$=(-1)^{n+1}\int\limits_a^x\frac{dx_1}{C(x_1)}\int\limits_a^{x_1}q(x_2)dx_2\ \cdots\int\limits_a^{x_{2n-2}}\frac{dx_{2n-1}}{C(x_{2n-1})}\int\limits_a^{x_{2n-1}}q(x_{2n})dx_{2n}\int\limits_a^{x_{2n}}\frac{h(z-\xi)dz}{C(z)}\,,\ n>0 \tag{20}$$

Здесь $h(x-\xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [11]. Константы интегрирования уравнений (19) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Преобразуем выражение (20) для функции $G_0(x,\xi)$

$$G_0(x,\xi)=-\int\limits_a^x\frac{h(z-\xi)}{C(z)}dz=-\begin{cases}0\,, & x<\xi\\ \int\limits_\xi^x\frac{dz}{C(z)}\,, & x\geqslant\xi\end{cases}=-h(x-\xi)\int\limits_\xi^x\frac{dz}{C(z)}\,, \tag{21}$$

Дифференцируя (21) по ξ, найдем обобщенную производную от $G_0(x,\xi)$ по ξ, которая нам понадобится в дальнейшем

$$\frac{\partial G_0}{\partial\xi}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[h(x-\xi)\int\limits_\xi^x\frac{dz}{C(z)}\right]=\frac{h(x-\xi)}{C(\xi)} \tag{22}$$

Используя формулы (21) и (22) перепишем выражения для коэффициентов $G_n(x,\xi)$ из (20) и их производных по переменным x и ξ при $n\geqslant 1$

$$G_n(x,\xi)=-(-1)^n h(x-\xi)\int\limits_\xi^x\psi(x_1,\xi)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}\,; \tag{23}$$

$$\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial x}=-(-1)^n\frac{h(x-\xi)}{C(x)}\int\limits_\xi^x q(x_1)dx_1\int\limits_\xi^{x_1}\psi(x_2,\xi)dx_2\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}\,;$$

$$\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\xi}=(-1)^n\frac{h(x-\xi)}{C(\xi)}\int\limits_\xi^x\psi(x_1,\xi)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\,,\quad x_0\equiv x\,.$$

Здесь для сокращения записи введено вспомогательное обозначение

$$\psi(x,\xi)=\frac{1}{C(x)}\int\limits_\xi^x q(y)dy\,,\qquad \psi_\xi'(x,\xi)=-\frac{q(\xi)}{C(x)}$$

Пользуясь этим обозначением, можно записать выражение (23) в виде рекуррентного соотношения

$$G_n(x,\xi) = -\int\limits_a^x \psi(y,\xi)G_{n-1}(y,\xi)dy\,,\ (n>0)\,;\quad G_0(x,\xi) = -h(x-\xi)\int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)} \tag{24}$$

Подставив далее выражения (23) для $G_n(x,\xi)$ в ряд (18) и положив в нём $\varkappa = 1$, получим фундаментальное решение исходного уравнения в виде бесконечного ряда. Причем, если $q(x) > 0$, то это знакочередующийся ряд. Если же $q(x) < 0$, то ряд будет знакопостоянным. Итак:

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}\,,\ x_0 = x \tag{25}$$

$$G'_x(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C(x)}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int\limits_\xi^x q(x_1)dx_1\int\limits_\xi^{x_1}\psi(x_2,\xi)dx_2\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}\right];$$

$$G'_\xi(x,\xi) = \frac{h(x-\xi)}{C(\xi)}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\right]$$

Пусть $G^{(n)}(x,\xi)$ — частичная сумма ряда (25), тогда

$$G^{(n+1)}(x,\xi) = G^{(n)}(x,\xi) - h(x-\xi)(-1)^n\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}\psi(x_n,\xi)dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}$$

Если $C = C_o = const.$, а $q = q(x)$ — переменная, тогда

$$\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1 = \frac{1}{C_o}\int\limits_\xi^x dx_1\int\limits_\xi^{x_1} q(y)dy = \frac{1}{C_o}\int\limits_\xi^x (x-x_1)q(x_1)dx_1\,,$$

следовательно

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\left[\frac{x-\xi}{C_0}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{C_0^{n+1}}\int\limits_\xi^x (x-x_1)q(x_1)dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_{n-1}}(x_{n-1}-x_n)(x_n-\xi)q(x_n)dx_n+\cdots\right]$$

Если же $q = q_o = const.$, а $C = C(x)$ — переменная, тогда

$$\psi(x,\xi) = q_o\,\frac{x-\xi}{C(x)}\,,$$

следовательно

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\left[\int\limits_\xi^x\frac{dz}{C(z)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q_o^n\int\limits_\xi^x\frac{x_1-\xi}{C(x_1)}dx_1\cdots\int\limits_\xi^{x_n}\frac{x_n-\xi}{C(x_n)}dx_n\int\limits_\xi^{x_n}\frac{dz}{C(z)}\right]$$

Пусть теперь $C = C_o = const.$ и $q = q_o = const.$, тогда из формулы (23), а также с учетом того, что

$$\int\limits_{\xi}^{x} (x-z)(z-\xi)^m dz = \frac{(x-\xi)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\,,$$

получаем

$$G_n(x,\xi) = (-1)^{n+1}\frac{h(x-\xi)q_o^n}{(2n+1)!\,C_o^{n+1}}\,(x-\xi)^{2n+1}\,,\ n \geqslant 0 \tag{26}$$

В этом случае ряд (25) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (5), которое понимается в обобщенном смысле и его можно найти, например, в книгах В. С. Владимирова [14, 15]

$$G(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C_o}\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n s_o}{(2n+1)!}\left(\frac{x-\xi}{s_o}\right)^{2n+1} = s_o\sin\frac{x-\xi}{s_o}\,, \quad s_o = \sqrt{\frac{C_o}{q_o}}\,, & q_o > 0\,,\\ x-\xi\,, & q_o = 0\,,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{s_o}{(2n+1)!}\left(\frac{x-\xi}{s_o}\right)^{2n+1} = s_o\,\mathrm{sh}\,\frac{x-\xi}{s_o}\,, \quad s_o = \sqrt{\frac{C_o}{-q_o}}\,, & q_o < 0\,. \end{cases}$$

В общем случае, когда коэффициенты C и q переменные, можно получить оценку абсолютной величины n-го члена ряда (25). Для этого воспользуемся выражением (26), в соответствии с которым при $x \geqslant \xi$ получаем:

$$\begin{gathered}\frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|^n_{\min}}{(2n+1)!\,C^{n+1}_{\max}} \leqslant |G_n(x,\xi)| \leqslant \frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|^n_{\max}}{(2n+1)!\,C^{n+1}_{\min}} \leqslant \frac{L^{2n+1}|q|^n_{\max}}{(2n+1)!\,C^{n+1}_{\min}} \leqslant \\ \leqslant \frac{L^{2n+1}|\langle q\rangle|^n\,\langle 1/C\rangle^{n+1}}{(2n+1)!}\end{gathered} \tag{27}$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|^n_{\max}}{(2n+1)!\,C^{n+1}_{\min}} = \frac{s^*}{C_{\min}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big(\frac{x-\xi}{s^*}\Big)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}}\sin\frac{x-\xi}{s^*}\,, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (25) сходится равномерно на всём промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

4. Примеры.

Рассмотрим некоторые известные уравнения [16, стр.254 № 1140]

$x^2u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0\,,$	$\big[xu'\big]' + \left(x - \dfrac{m^2}{x}\right)u = 0\,,$	**Ур. Бесселя**
$xu'' + (1-x)u' + mu = 0\,,$	$\big[xe^{-x}u'\big]' + me^{-x}u = 0\,,$	**Ур. Лагерра**
$u'' - 2xu' + 2mu = 0\,,$	$\big[e^{-x^2}u'\big]' + 2me^{-x^2}u = 0\,,$	**Ур. Эрмита**
$(1-x^2)u'' - xu' + m^2u = 0\,,$	$\big[\sqrt{1-x^2}\,u'\,\big]' + \dfrac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0\,,$	**Ур. Чебышева**
$(1-x^2)u'' - 2xu' + m(m+1)u = 0\,,$	$\big[(1-x^2)\,u'\big]' + m(m+1)u = 0\,,$	**Ур. Лежандра**

Более подробная информация о перечисленных и других подобных уравнениях содержится, например, в справочниках [17, глава 10], [18, глава 22], [19, глава 11].

4.1. Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$

Общее решение уравнения Чебышева имеет вид [16, стр.164 № 736]:

$$u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x)\,,$$

где

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x)\,, \qquad U_m(x) = \sin(m \arccos x) \tag{28}$$

полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода. Функции $T_m(x)$ и $U_m(x)$ можно представить в виде полиномов m-й степени от x, потому они и называются полиномами. Детальное исследование полиномов Чебышева дано в книгах [1, 19].

Рассмотрим более подробно самосопряженную форму уравнения Чебышева. В этом уравнении $C(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = m^2/\sqrt{1-x^2}$. По формулам (16) найдем коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения

$$\begin{aligned} C_o &= \frac{1}{\langle 1/C \rangle} = \left[\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]^{-1} = \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]^{-1} = \Big[\arcsin x\big|_0^1\Big]^{-1} = \frac{2}{\pi}\,, \\ q_o &= \langle q \rangle = \frac{m^2}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \arcsin x\big|_0^1 = \frac{m^2\pi}{2} \end{aligned} \tag{29}$$

Далее по формулам (8) найдем общее действительное решение сопутствующего уравнения

$$v(x) = K_1 \cos \lambda_o x + K_2 \sin \lambda_o x\,, \qquad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} = \frac{m\pi}{2}\,, \tag{30}$$

Здесь K_1 и K_2 — произвольные действительные константы. Вычислим далее функцию $\psi(x)$

$$\psi(x,\xi) = \frac{1}{C(x)}\int\limits_{\xi}^{x} q(y)dy = \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = m^2\,\frac{\arcsin x - \arcsin\xi}{\sqrt{1-x^2}} \tag{31}$$

Далее нам понадобится интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\xi}^{x}\frac{\big(\arcsin y - \arcsin\xi\big)^n}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int\limits_{\xi}^{x}\big(\arcsin y - \arcsin\xi\big)^n d\big(\arcsin y - \arcsin\xi\big) = \\ &= \frac{1}{n+1}\big(\arcsin y - \arcsin\xi\big)^{n+1}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{1}{n+1}\big(\arcsin x - \arcsin\xi\big)^{n+1} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1}\arccos^{n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2} + x\xi\right), & x > \xi \\ -\frac{1}{n+1}\arccos^{n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2} + x\xi\right), & x < \xi \end{cases},\ \text{[20, стр.63, №5]} \end{aligned}$$

Пользуясь этими результатами и формулами (21), (23) получаем, вместо ряда (25) из квадратур ряд из элементарных функций, который представляет собой разложение синуса в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big(\arcsin x - \arcsin\xi\Big)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m}\sin\big[m\cdot(\arcsin x - \arcsin\xi)\big] \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32) находим

$$G'_\xi(x,\xi) = \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n}}{(2n)!}\Big(\arcsin x - \arcsin\xi\Big)^{2n} = \\ = \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ \cos\Big[m\cdot(\arcsin x - \arcsin\xi)\Big] \tag{33}$$

В формуле (33) удержана только главная часть, не содержащая дельта-функцию Дирака. Далее найдем коэффициенты

$$\tilde C(\xi) = C_o - C(\xi) = \frac{2}{\pi} - \sqrt{1-\xi^2} = -\sqrt{1-\xi^2}\bigg(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\bigg),$$

$$\tilde q(\xi) = q_o - q(\xi) = m^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{m^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right),$$

воспользуемся общими формулами (13), (14) и найдём функции $A(x)$ и $B(x)$

$$A(x)\equiv A_m(x) = \cos\frac{m\pi x}{2} - \frac{m\pi}{2}\int_{-1}^{1}G'_\xi(x,\xi)\tilde C(\xi)\sin\frac{m\pi\xi}{2}\,d\xi - \int_{-1}^{1}G(x,\xi)\tilde q(\xi)\cos\frac{m\pi\xi}{2}\,d\xi = \\ = \cos\frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2}\int_{-1}^{x}\left\{\left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\left[\sin\frac{m\pi\xi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n}(x,\xi) + \right.\right. \\ \left.\left. + \cos\frac{m\pi\xi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}(x,\xi)\right]\right\}d\xi \tag{34}$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\varphi(x,\xi) = \arcsin x - \arcsin\xi\,,\qquad \varphi(x,x) = 0\,,\quad \varphi(x,-1) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Бесконечные ряды в формуле (34) представляют собой разложения в ряды Тейлора тригонометрических функций $\cos\varphi(x,\xi)$ и $\sin\varphi(x,\xi)$, поэтому эти ряды можно свернуть и получить точное решение уравнения Чебышева

$$A_m(x) = \cos\frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^{x}\left\{\left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\left[\sin\frac{m\pi\xi}{2}\cdot\cos\big(m\varphi\big) + \cos\frac{m\pi\xi}{2}\times\right.\right. \\ \left.\left. \times\sin\big(m\varphi\big)\right]\right\}d\xi = \cos\frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^{x}\left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\sin\left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x,\xi)\right]d\xi = \\ = \cos\frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^{x}\sin\left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x,\xi)\right]d_\xi\left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x,\xi)\right] = \\ = \cos\frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Big[(m\pi\xi)/2 + m\varphi(x,\xi)\Big]^{2n+1}}{(2n+1)!}d_\xi\left[\frac{m\pi\xi}{2} + m\varphi(x,\xi)\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos\frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left[(m\pi\xi)/2 + m\varphi(x,\xi)\right]^{2n+2}}{(2n+2)!}\Bigg|_{-1}^{x} = \\
&= \cos\frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \\
&= \cos\frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2n}}{(2n)!} = \qquad (35)\\
&= \cos\frac{m\pi x}{2} - \cos\frac{m\pi x}{2} + \cos\left(m\arcsin x\right) = \cos\left(m\arcsin x\right) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Проделав похожие преобразования в формуле (14), найдем

$$
\begin{aligned}
&B(x) \equiv B_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2}\int\limits_{-1}^{x}\left\{\left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\left[\cos\frac{m\pi\xi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n}(x,\xi) + \right.\right.\\
&\left.\left. + \sin\frac{m\pi\xi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}(x,\xi)\right]\right\}d\xi = \\
&= \sin\frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\left(m\arcsin x\right)^{2n+1} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n+1}\right] = \sin\left(m\arcsin x\right) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Функции $A_m(x)$ и $B_m(x)$ являются точными независимыми решениями уравнения Чебышева. Они представляют собой линейные комбинации функций Чебышева $T_m(x)$ и $U_m(x)$ (28). Для доказательства этого факта нужно всего лишь воспользоваться тождеством

$$
\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}
$$

В результате чего

$$
A_m(x) = \cos\frac{m\pi}{2}\,T_m(x) + \sin\frac{m\pi}{2}\,U_m(x)\,, \qquad B_m(x) = \sin\frac{m\pi}{2}\,T_m(x) - \cos\frac{m\pi}{2}\,U_m(x)
$$

Отсюда получаются формулы, приведенные в книге [21, стр. 59].

$$
\begin{aligned}
A_{2m} &= (-1)^m\,T_{2m}\,, & A_{2m+1} &= (-1)^m\,U_{2m+1}\,,\\
B_{2m} &= (-1)^{m+1}\,U_{2m}\,, & B_{2m+1} &= (-1)^m\,T_{2m+1}
\end{aligned}
$$

4.1.1. Приближенные формулы для решения уравнения Чебышева

Рассмотрим частичные суммы ряда (35) и затем сравним их с точным решением (36)

$$
\begin{aligned}
&A_{m(I)}(x) = \cos\frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{I}(-1)^n\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2n} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}\,,\\
&A_{m(I)} = A_{m(I-1)} + (-1)^I\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2I} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2I}}{(2I)!}\,, \qquad A_m^{(0)}(x) = \cos\frac{m\pi x}{2}
\end{aligned} \qquad (38)
$$

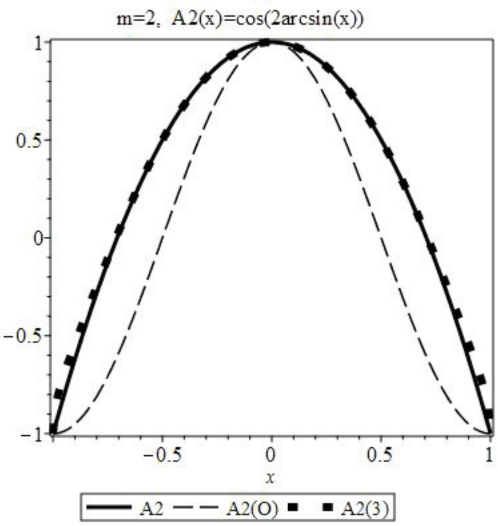
$$
\begin{aligned}
&B_{m(I)}(x) = \sin\frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{I}(-1)^n\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2n+1} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\\
&B_{m(I)} = B_{m(I-1)} + (-1)^I\frac{\left(m\arcsin x\right)^{2I+1} - \left(\frac{m\pi x}{2}\right)^{2I+1}}{(2I+1)!}\,, \qquad B_m^{(0)}(x) = \sin\frac{m\pi x}{2}
\end{aligned} \qquad (39)
$$

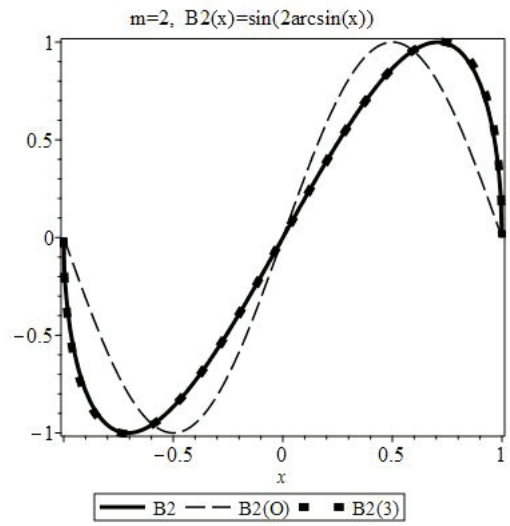
На представленных ниже рисунках изображены графики независимых точных

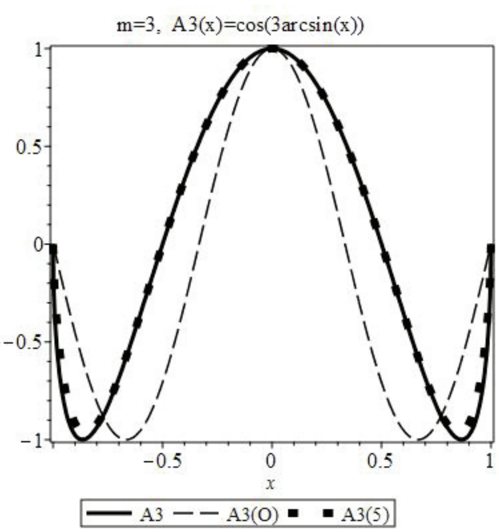
$$A_m(x) = \cos\left(m \arcsin x\right), \quad B_m(x) = \sin\left(m \arcsin x\right)$$

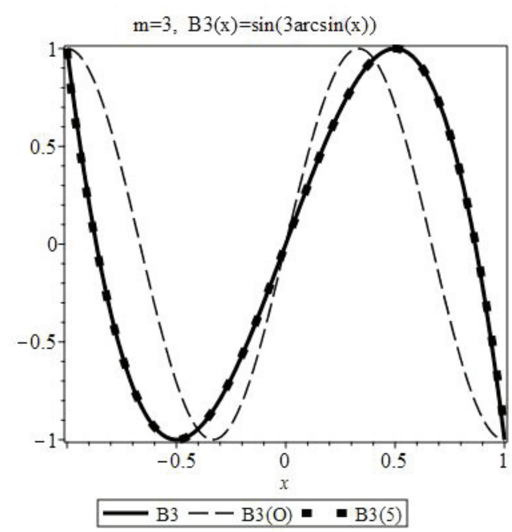
и приближенных $A_{m(I)}(x)$, $B_{m(I)}(x)$ решений уравнения Чебышева в виде частичных сумм (37), (39), полученных из общего интегрального представления (5). Число (I) в круглых скобках обозначает число членов в частичных суммах.

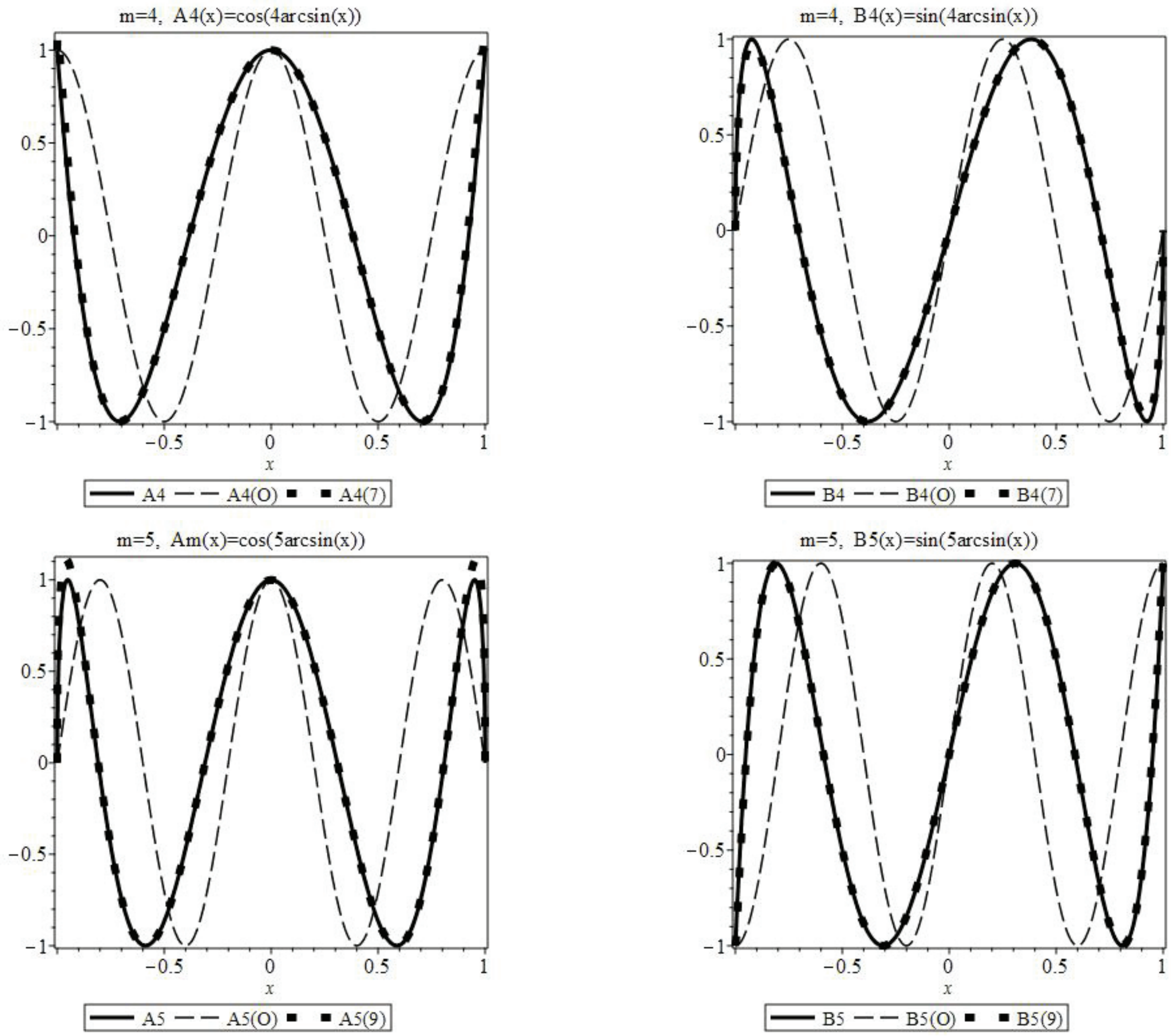
Сплошной линией обозначены точные решения при m=2,3,4,5. Штриховые линии обозначают точные решения $A_{m(O)}(x)$ и $B_{m(O)}(x)$) сопутствующего уравнения (32) с постоянными коэффициентами, которые находятся по общим формулам (16). Кривые обозначенные прямоугольными точками соответствуют приближенным решениям $A_{m(I)}(x)$ и $B_{m(I)}(x)$ в виде частичных сумм, найденным по формулам (37), (39).











Графики точных и приближенных решений уравнения Чебышева
при различных значениях параметра m

Как видно из рисунков лишь функция $A_{5(9)}(x)$ визуально отличается от точного решения вблизи граничных точек $x_1 = \pm 1$. Функция $A_{5(10)}(x)$, которая является суммой из десяти членов ряда (37), будет практически неотличима от точного решения.

Можно получить явные значения числа членов частичных сумм (37), (39), которые нужны для получения заранее заданного малого максимального отклонения ε приближенного решения от точного. Для этого воспользуемся оценкой (27) остаточного члена ряда для фундаментального решения в общем случае кусочно гладких коэффициентов исходного уравнения. В случае уравнения Чебышева, с учетом формул (29), эта оценка принимает вид:

$$\frac{(b-a)^{2I+1}\big|\langle q\rangle\big|^{I}\big\langle 1/C\big\rangle^{I+1}}{(2I+1)!} = \frac{2^{2I+2}m^{2I}}{(2I+1)!} \leqslant \varepsilon \tag{40}$$

	m								
eps	1	2	3	4	5	10	20	50	100
0.5	1	3	5	8	10	24	50	131	267
0.1	2	4	6	11	11	24	51	132	267
0.01	3	5	8	13	13	26	52	133	268
0.001	3	6	9	14	14	27	53	134	270

Таблица значений числа (I) членов частичных сумм, при которых
$\left|A_m(x) - A_{m(I)}(x)\right| \leqslant \varepsilon$ и $\left|B_m(x) - B_{m(I)}(x)\right| \leqslant \varepsilon$ для m=2,3,4,5,10,20,50,100

5. Заключение

Разработана методика приближенного решения исходного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Эта методика основана на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Предполагается, что у исходного и сопутствующего уравнений одинаковые области определения и одинаковые входные данные.

В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения, которое находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость этого ряда. Члены ряда, в общем случае, представляют собой многократные интегралы возрастающего порядка.

В результате общее решение исходного уравнения представлено через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение. Ограничивая число членов фундаментального ряда получаем приближенное аналитическое решение исходного уравнения. Получена оценка точности приближенного решения в зависимости от выбора сопутствующих коэффициентов и от числа удержанных членов фундаментального ряда.

Предложенная методика проверена на примере уравнения Чебышева, имеющего общее точное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука: главная редакция физико-математической литературы, 1979. 416 с.

2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

3. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

5. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.

6. Лионс Жак-Луи. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: Пер. с фр. Под ред. и с предисл. О.А. Олейник. Изд. 3-е. М.: Едиториал, 2010. 586 с.

7. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 468 с.

10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

11. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М: Мир, 1978. 518 с.

12. Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. С. 61–76.

13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.

14. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 512 с.

15. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

16. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962. 292 с.

17. Bateman H., Erdelyi A. Higer transcendental functions. Volume 1. (Перевод с английского Н.Я. Виленкина. Изд. второе, стереотипное: М., Наука, 1974) MC GRAV-HILL BOOK COMPANY, INC., New York Toronto London, 1953. 296 с.

18. Abramowitz M., Stegun I. editor. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. (Перевод: М., Наука, 1979) National bureau standards applied mathematics series.55, 1964. 830 с.

19. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука 1964. 344 с.

20. Градштейн И. С.,Рыжик И., М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука 1971. 1108 с.

21. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. (Перевод с французского Н.Я. Виленкина). М.: Наука 1963. 103 с.

REFERENCES

1. Suetin P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. M.: Nauka: glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1979. 416 s.

2. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennie processov v periodicheskih sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.

3. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.

4. Bogolyubov N. H., Mitropol'skij YU. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. M.: Nauka, 1974. 504 s.

5. Lomakin V. A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU, 1976. 367 s.

6. Lions ZHak-Lui. Nekotorye metody resheniya nelinejnyh kraevyh zadach: Per. s fr. Pod red. i s predisl. O.A. Olejnik. Izd. 3-e. M.: Editorial, 2010. 586 s.

7. Najfe A. H. Metody vozmushchenij. M.: Mir, 1976. 456 s.

8. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 s.

9. Stepanov V. V. Kurs differencial'nyh uravnenij. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 1958. 468 s.

10. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1972. 496 s.

11. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike. M: Mir, 1978. 518 s.

12. Gorbachev V. I. Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevyh zadach teorii uprugosti neodnorodnyh sred // Vychislitel'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. 1991. № 2. 61–76.

13. Sedov L. I. Mekhanika sploshnoj sredy. Tom 2. M.: Nauka, 1970. 568 s.

14. Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1971. 512 s.

15. Vladimirov V. S. Obobshchennye funkcii v matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1976. 280 s.

16. Matveev N. M. Sbornik zadach i uprazhnenij po obyknovennym differencial'nym uravneniyam. M.: Rosvuzizdat, 1962. 292 s.

17. Bateman H., Erdelyi A. Higer transcendental functions. Volume 1. (Perevod s anglijskogo N.YA. Vilenkina. Izd. vtoroe, stereotipnoe: M., Nauka, 1974) MC GRAV-HILL BOOK COMPANY, INC., New York Toronto London, 1953. 296 s.

18. Abramowitz M., Stegun I. editor. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. (Perevod: M., Nauka, 1979) National bureau standards applied mathematics series.55, 1964. 830 s.

19. YAnke E., Emde F., Lyosh F. Special'nye funkcii. M.: Nauka 1964. 344 s.

20. Gradshtejn I. S.,Ryzhik I., M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. M.: Nauka 1971. 1108 s.

21. Kampe de Fer'e ZH., Kempbell R., Pet'o G., Fogel' T. Funkcii matematicheskoj fiziki. Spravochnoe rukovodstvo. (Perevod s francuzskogo N.YA. Vilenkina). M.: Nauka 1963. 103 s.

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 519.[172-178] DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-121-133

О полурешётке состояний процессов Linux

Н. Н. Ефанов (Российская Федерация, г. Долгопрудный)

Ефанов Николай Николаевич — аспирант, Ассистент/Преподаватель Кафедры Информатики и Вычислительной Математики МФТИ(НИУ) Московский Физико-Технический Институт (Национальный Исследовательский Университет) (г. Москва).
e-mail: nefanov90@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается структура данных - множество состояний процессов Linux, которая используется в задаче восстановления дерева процессов в Unix-подобных операционных системах. Целью исследования является анализ зависимостей в такой структуре, введение естественного порядка по зависимостям, предложение и обоснование возможности его введения как верхней полной полурешётки. Следующие из технических свойств прикладной задачи иерархии атрибутов позводяют ввести дополнительные ограничения на минимальные верхние границы в полурешётке. Ограничения формально описываются в виде подходящих операторов предзамыкания и замыкания. Из ограничений следует необходимое условие корректности дерева процессов. На основании свойств точек, возвращаемых введёнными операторами и схемы выполнения системного вызова, приводится достаточное условие корректности: для каждого атрибута, возникающего в контексте процесса, должно существовать решёточно упорядоченное относительно наследуемого порядка множество, содержащее промежуточные состояния процессов, через которые и разрешаются зависимости. Введённые условия формируют критерий корректности дерева процессов, что может быть полезно в таких задачах как генерация тестов для систем сохранения и восстановления состояний Unix-подобных ОС, поиск аномалий, повышение портабельности и надёжности программных комплексов. Приводятся также схемы зависимостей между атрибутами, которые вводят частные ограничения на реконструирующее множество. Рассматриваются открытые вопросы и предлагаются дальнейшие шаги.

Ключевые слова: математическое моделирование, прикладная алгебра, полугруппы, деревья, Unix-подобные операционные системы, системные вызовы, дерево процессов, восстановление по контрольным точкам, замыкания.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Ефанов. О полурешётке состояний процессов Linux // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 121–133.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 519.[172-178] DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-121-133

On semilattice of Linux processes' states

N. N. Efanov (Russian Federation, Dolgoprudnyy)

Efanov Nikolay Nikolaevich — PhD Student Teaching assistant, Department of Informatics and Computational Mathematics, MIPT. Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).
e-mail: nefanov90@gmail.com

Abstract

The paper discusses a set of states of Linux processes as data structure, which is used in the task of process-tree reconstruction in Unix-like operating systems. The purpose of the study is to analyze dependencies in such structure, to introduce the natural order of dependencies, to propose the class of such reconstruction structure as upper complete semilattice. Following from the technical properties of the applied problem attributes' hierarchy allow to introduce additional restrictions on the minimum upper bounds in such semilattice.

Constraints are formally described as suitable pre-closure and closure operators. The constraints implies the necessary condition for the correctness of the process tree. Based on the properties of points returned by the proposed operators and system call execution scheme, a sufficient condition for correctness is given. The introduced conditions form the criterion for process-tree correctness, which can be useful in such tasks as generating tests for checkpoint-restore in Unix-like operating systems, anomalies detection, increasing portability and reliability of software. Dependency schemes between attributes that impose particular constraints on the reconstructing set are also shown. Opened questions are also highlighted and further steps are suggested.

Keywords: mathematical modeling, applied algebra, semi-groups, trees, Unix-like operating systems, system calls, process tree, checkpoint restore, closures.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
N. N. Efanov, 2019, "On semilattice of Linux processes' states", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 121–133.

1. Введение

Возможность сохранения и восстановления состояний процессов операционной системы (ОС) является важнейшей составляющей ряда системных, виртуализационных и прикладных программных технологий [1, 2, 3, 4, 5, 6], представляет основу многих технологий отложенной отладки программ, симуляции исполнения, обновления компонентов системы без перезагрузки, ускорения запуска программ, защиты от сбоев [2, 3]. В Unix-подобных ОС процессы объединяются в ориентированное дерево – дерево процессов [1, 4, 5, 6, 7]. Воспроизведение дерева процессов, соответствующего некоторому дереву, полученному при сохранении состояния, является важнейшей частью процедуры восстановления, а техника восстановления последовательностями системных вызовов следует из особенностей управления ресурсами системы из пользовательских программ. Такая техника применяется в случае восстановления состояний из пространства пользователя [2, 4, 5].

С целью построения гибкой процедуры реконструкции, разработаны различные математические модели, такие как анализ графа ресурсов системы [6], последовательная трансформация семантическими действиями входного дерева процессов как абстрактного синтаксического дерева в атрибутной грамматике [5], а также неявный атрибутный анализ результата LR - разбора строчной записи дерева, в которой иерархия кодируется правильными скобочными последовательностями [4]. В работах вышеперечисленных работах изучены свойства, получены полиномиальные алгоритмы восстановления некоторых типов деревьев процессов. Тем не менее, строгое исследование зависимостей между состояниями в деревьях, ровно как и разработка формальных методов проверки деревьев на корректность, являются открытыми вопросами. В работе представляются некоторые результаты исследования зависимостей между состояниями процессов, на основании изучения свойств графа восстановления - промежуточного представления, введённого в [5] (Рис. 1).

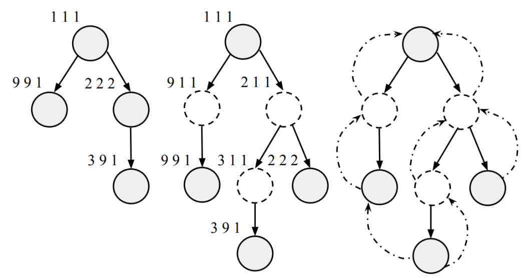


Рис. 1: Исходное и промежуточные представления (слева направо): дерево процессов T, некоторый его граф восстановления $G(T)$ и дополненный зависимостями (мульти)граф $G(T) \cup DEP(T)$. Числа при вершинах – атрибуты-идентификаторы процесса P, группы G и сессии S соответственно. Корневой процесс всегда имеет идентификаторы “1,1,1”.

2. Промежуточные представления и их анализ

Рассматриваются два орграфа - дерево процессов

$$T = (V, E) \tag{1}$$

и граф восстановления - промежуточное представление, на базе анализа которого производится восстановление дерева в работе [4]:

$$G(T) = (V^+, E^+) \tag{2}$$

где $V^+ = V \cup V^{int}$ - конечные вершины, дополненные промежуточными V^{int}, соответствуют состояниям процессов в ходе выполнения системных вызовов, описываемых E^+ как переходами между состояниями и иерархическими зависимостями [4, 5]. Вершины маркированы словарями атрибутов: $\forall v \in V^+ \exists v.attr : v.key = val(v.attr[key])|'None', \forall key \in K$, где K - список ключей как имён атрибутов процесса: системных идентификаторов, файловых дескрипторов, сигналов, отображений памяти и др, $val(v.attr[key]) : K \to val\_with\_type(key)$ - отображение ключей на типизированные значения атрибутов. Определяется также множество вершин с равным значением атрибута $u.attr_1$:$D(attr_1, u.attr_1) = \{v \in V^+ | v.attr_1 = u.attr_1\}$

Definition 1. *Определим зависимость между вершинами $u, v \in V^+$ как бинарное отношение (u, v) с семантикой "для реализации и требуется сначала реализовать v". Следовательно, зависимости определяют частичный порядок на V^+. Будем говорить, что зависимость происходит по атрибуту attr, если v либо создаёт атрибут attr, либо в его контексте происходит системный вызов, выставляющий данный атрибут в v.*

Используя данное определение, рассморим ещё одно промежуточное представление:

Definition 2. *Графом зависимостей $DEP(T)$ называется мультиорграф:*

$$DEP(T) = (V^+, E^{dep}) \tag{3}$$

где E^{dep} - множество зависимостей между вершинами.

Definition 3. *Будем говорить, что атрибут $attr_2$ доминирует над $attr_1$, если*

$$\forall u \in V^+ : \forall v \in D(attr_1, u.attr_1) \to val(u.attr_2) = const.$$

Definition 4. *Доминирующий над $attr_1$ атрибут $attr_2$ назовём минимально доминирующим,тогда и только тогда, когда $\forall u \in V^+ \exists \{v\} \in V^+ : v.attr_2 = u.attr_2, \forall V' = \{v\} \cup v'$, и $\forall v' \in V^+ \setminus \{v\} \to v'.attr_2 \neq const$.*

Такое определение задаёт минимальное по мощности множество, в которое включается и множество состояний с различными значениями атрибута $attr_1$, но с идентичными $attr_2$, и его замыкание.

Definition 5. *Глубиной изоляции атрибута $attr_1$ называется число доминирующих над $attr_1$ атрибутов: $depth(attr_1) = \sum_{i=2}^{|K|} attr_i : \forall u \in V^+ : \forall v \in D(attr_1, val(u.attr_1)) \to val(u.attr_i) = const$.*

$\forall attr_{key} \in K \to depth(attr_{key}) < \infty$, в противном случае, для реализации состояния с таким атрибутом пришлось бы выполнить бесконечное число системных вызовов, так как каждый новый атрибут создаётся через отдельный вызов.

Definition 6. *Максимальным по мощности доминирующим атрибутом называется $attr_x : \forall v \in V^+ \to depth(v.attr_x) = 0$.*

Для деревьев процессов такой $attr_x$ соответствует корневому PID-пространству имён [7], ввиду того, что построение дерева процессов начинается с корневого процесса v_{init}, который находится в корневом PID-пространстве, и первые вызовы, создающие вложенные пространства, происходят именно в нём.
Свойства объектов, введённых в определениях 5 и 6, следуют из технических особенностей прикладной задачи, поэтому принимаются без доказательства.
Структурные свойства V^+, связанные с частичной упорядоченностью, ранее формально не исследовались. Покажем, что введение V^+ как верхней полурешётки [8] соответствует семантике восстановления дерева процессов.

Утверждение 1. *V^+ с отношением зависимости образует конечную верхнюю полурешетку.*

Доказательство. Выберем произвольные состояния $x, y, z, \in V^+ : x \neq y$. Рассмотрим бинарную операцию минимальной верхней границы $\sqcup$ на $V^+ : x \sqcup x = x; x \sqcup y = y \iff (x, y) \in E^{dep}$. $\sqcup$ по определению идемпотентна. Докажем, что $\forall x, y \in V^+ \exists z \in V^+ : (x, z) \in E^{dep}, (y, z) \in E^{dep}$, доказывая параллельно коммутативность и ассоциативность $\sqcup$. Рассмотрим ситуации:

1. $(x, y) \in E^{dep}$ - тогда, очевидно, $c = y$. Случай (y, x) симметричен.
2. Покажем, что $\{(x, y), (y, x)\} \subset E^{dep} \iff x = y$.
   - Допустим, что $\exists x, y \in V^+ : \{(x, y), (y, x)\} \subset E^{dep}$, и $x \neq y$. о определению зависимости, для реализации x нужно реализовать сначала y, но для этого нужно реализовать состояние, идентичное x. То есть на данном шаге нужно выполнить минимум 2 системных вызова, и требуется снова воспроизвести x.
   - Пусть выполнено $k - 1$ итераций воспроизведения x,y, тогда нужно снова воспроизвести x, и выполнено $2(k - 1)$ системных вызовов.
   - После шага k требуется снова воспроизвести x, следовательно, число системных вызовов не ограничено снизу, что противоречит самой схеме восстановления.

В результате заключаем, что циклические зависимости запрещены, и допустимы лишь формально в случае $x = y$, откуда следует коммутативность: $y = x \sqcup y = y \sqcup x = x$.

3. Пусть $(x, y, attr_1), (y, x, attr_1) \notin E^{dep}$.
   - Рассмотрим минимальный доминирующий атрибут: $attr_2$. Если $y.attr_2 = x.attr_2$, и $\exists x'(attr_2) \in D(attr_2, x.attr_2)$ - создатель ресурса, описываемого атрибутом $attr_2$, доказательство завершено. Иначе, $y.attr_2 \neq x.attr_2$, и процедура повторяется.
   - Пусть выполнено $k - 1 = depth(attr_1)$ шагов процедуры выше, и $attr_k$ суть атрибут корневого PID-пространства имён.
   - корневое PID-пространство имён, по Определению 6, и, после $k < \infty$-шагов, $z = v_{init}$.

Следовательно, $(V^+, \sqcup)$ - конечная верхняя полурешетка, с задаваемым зависимостями естественным частичным порядком и максимальным элементом v_{init}.**Что и требовалось доказать.** □

3. Критерий корректности дерева процессов и другие результаты

Полурешеточная упорядоченность V^+ - крайне важный результат. В частности, для проверки корректности дерева процессов. Понятие корректности дерева процессов введено в работах [1, 4, 5] прагматично: дерево процессов $T = (V, E)$ является корректным, если $\exists G = (V^+, E^+)$ – граф реконструкции, такой, что E^+ содержат метки-системные вызовы, и после топологической сортировки G последовательное выполнение таких меток восстанавливает V из начального состояния v_{init}. Такое определение соответствует выразительному смыслу реконструкции: те деревья, которые заведомо невозможно восстановить, полагаются некорректными. Кроме того, все деревья, полученные из настоящих рабочих снимков [9] состояний операционных систем, полагаются корректными, так как получены именно последовательностями системных вызовов. Предыдущие работы [4, 5] рассматривали реальные, следовательно, корректные деревья процессов. С другой стороны, валидация произвольных деревьев на корректность может оказаться полезной, к примеру, в задачах генерации синтетических тестов [10] для систем сохранения и восстановления состояний ОС. Структурные свойства V^+ могут представлять интерес для построения критериев такой валидации деревьев. Для обоснования данного факта, введём и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $CL(v.attr_1) : V^+ \to V^+$ - оператор, $\forall v \in V^+$ определяющий $f \in V^+$ с минимальным доминирующим атрибутом для некоторого $attr_1$, такой, что $v \sqcup CL(v) = CL(v)$. Тогда CL монотонный и экстенсивный.*

Доказательство. Из свойств ресурсов ядра ОС, CL обладает:

1. Экстенсивностью: $v \leq CL(v.attr_1)$. Это свойство очевидно из факта, что атрибут не может появиться в дереве, пока соответствующий ресурс не создан.

2. Монотонностью: $\forall v, u \in V^+ : v \leq u \to CL(v.attr_1) \leq CL(u.attr_1)$. Предположим, что минимальный доминирующий атрибут $attr_1$ это $attr_2$, и $v \leq u$. Пусть $u.attr_2 \neq v.attr_2$. Тогда ресурс, описываемый $u.attr_2$ должен быть создан ранее, чем ресурс того же типа для v, либо они не сравнимы. Иначе они равны.

□

Definition 7. *Будем обозначать оператор предзамыкания[11] CL, если идемпотентность не обязана выполняться, как PCL.*

Лемма 2. *Пусть CL возвращает состояние, в котором минимальный доминирующий атрибут был создан. Тогда CL - оператор замыкания [12], со строго одной неподвижной точкой для каждого $f = CL(v.attr_1), \forall v \in V^+, \forall attr_1 \in attr$ в случае, если V^+ соответствует порождению корректного дерева процессов.*

Доказательство. Рассмотрим $CL(CL(v.attr_1).attr_1)$.
$CL(CL(v.attr_1).attr_1) = CL(v.attr_1) \Leftrightarrow CL(v.attr_1)$- создатель. Следовательно, CL идемпотентный.

Случай, если CL для вершины v с заданным атрибутом $v.attr_1$ будет иметь более одной неподвижной точки, будет означать создание более одного ресурса с одним и тем же идентификатором в одной области действия данного идентификатора, что означает конфликт идентификаторов. □

Приведём некоторые результаты, следующие из полурешеточной упорядоченности V^+ и приведённых выше лемм:

Теорема 1. *Если T - корректное дерево процессов, то множество его вершин V дополнимо до верхне полурешёточно упорядоченного по зависимостям V^+ : $\big(\forall x, y \in V^+ \; \exists k : \forall n > k, n \leq |K| : attr_k, attr_n \in K, depth(attr_n) < |K| - k\big) \;\&\; \big(x.attr_n = y.attr_n\big) \Rightarrow \big(x \sqcup y = PCL(x.attr_k) | PCL(y.attr_k) | CL(x.attr_k)\big) \;\&\; \big(CL(x.attr_k) = CL(y.attr_k)\big)$, где CL, PCL - введённые выше операторы замыкания и предзамыкания на V^+, и единственной неподвижной точкой CL является создатель минимально доминирующего атрибута для $attr_k$.*

Доказательство. (От противного).

Пусть либо V^+ не верхняя полурешётка, либо $\exists x, y \in V^+$

$$\forall k \exists n > k : \big(attr_k, attr_n \in K, depth(attr_n) < |K| - depth(attr_k)\big) \;\&\; \big(x.attr_n = y.attr_n\big),$$

для которых $x \sqcap y$ не равен ни $PCL(x.attr_k)$, ни $PCL(y.attr_k)$, ни $CL(x.attr_k)$, либо $\big(CL(x.attr_k) \neq CL(y.attr_k)\big)$.

Пусть $x \sqcap y$ не удовлетворяет состояниям, которые можно получить введением $PCL(x.attr_k)$ и $PCL(x.attr_k)$, то есть минимально доминирующие атрибуты не совпадают по значениям. Рассмотрим минимально доминирующий атрибут $attr_{k+1}$ для $attr_k$; так как глубина изоляции $depth(x.attr_{k+1}) < |K| - depth(attr_k)$ как доминирующего, следовательно, $x.attr_{k+1} = y.attr_{k+1}$. Противоречие. $x \sqcap y = CL(x.attr_k)$ соответствует случаю, когда x, y являются прямыми потомками создателя атрибута $x.attr_{k+1}$, и для него рассуждения аналогичны. Кроме того, получение CL соответствует конечному числу применений PCL, при котором в силу монотонности достигается создатель атрибута $x.attr_{k+1}$ и $y.attr_{k+1}$.

Пусть теперь $CL(x.attr_k) \neq CL(y.attr_k)$. Но $x.attr_{k+1} = y.attr_{k+1}$, значит, CL обязан вернуть единственную неподвижную точку - создателя $attr_{k+1}$. В противном случае имеет место конфликт по идентификаторам.

Пусть теперь V^+ - не полурешётка. Покажем, что полурешёточная упорядоченность V^+ восходит к процедуре его построения из V, если это вообще возможно. Возможны случаи:

1. Пусть $\exists x, y \in V^+ : x \sqcup y$ не определяется однозначно, то есть существует несколько верхних границ, из любых из которых можно удовлетворить зависимости по $attr_k$. В следствие выполнимости правой части коньюнкции из условия теоремы, все такие границы лежат в замыкании, задаваемом $CL(x.attr_k)$. Следовательно, V^+ следует урезать выбором любой из данных границ в качестве наименьшей, что производится удалением лишних зависимостей. Удаление всех избыточных зависимостей из $\big(V^+, E^{dep}\big)$ даст транзитивный остов [13] $\big(V^+, E^{excl(dep)}\big)$ как граф искомой полурешётки [14].

2. Пусть для некоторых $x, y \in V^+$ таких, что в условиях правой части коньюнкции не существует наименьшей верхней границы, и её не получить из процедуры выше. Но тогда $\forall k \exists n > k : \big(attr_k, attr_n \in K, depth(attr_n) < |K| - depth(attr_k)\big) \quad \& \quad \big(x.attr_n = y.attr_n\big)$, для которых $x \sqcap y$ не равен ни $PCL(x.attr_k)$, ни $PCL(y.attr_k)$, ни $CL(x.attr_k)$, что, как доказано ранее, противоречит предположению о корректности дерева процессов.

□

Доказанная теорема представляет необходимое условие корректности дерева процессов.

Какие промежуточные состояния дают операторы PCL? Ответ на этот вопрос формулирует достаточное условие корректности дерева процессов. В частности, из него следует способ проверки произвольного дерева на корректность.

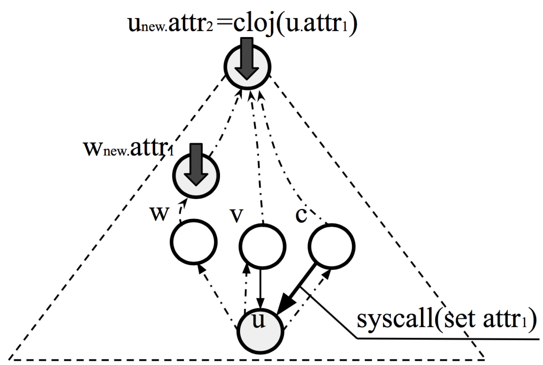


Рис. 2: Элементарный шаг восстановления состояния $u : u.attr_1 = w.attr_1$.

Рассмотрим некоторое состояние процесса, получаемое системным вызовом, производящимся успешно при выполнении следующих условий:

Предложение 1. *Для реконструкции состояния u : $u.attr_1 = w.attr_1$ с атрибутом $attr_1$, созданным в состоянии w_{new} и "хранимым"в состоянии w, из предшествующего состояния v : $u.pid = v.pid | (u.pid \neq v.pid \quad \& \quad syscall =' fork')$ системным вызовом, выполненным в контексте процесса с состоянием c, достаточно выполнения: $c.attr_2 = v.attr_2 = w_{new}.attr_2 = u.attr_2$, и оператор $CL(w.attr_1) = CL(c.attr_1) = CL(u.attr_1)$ возвращает состояние с минимальным доминирующим атрибутом $attr_2$ атрибута $attr_1$.*

Проверка данного утверждения технически производится покрытием введённой конструкцией всех рассматриваемых случаев установки атрибута процессу, что является следствием из свойств иерархии процессов Linux [15] и особенностей использования интерфейса системных вызовов [4, 16]. Классификация атрибутных зависимостей и некоторые частные случаи таких восстанавливающих конструкций рассматриваются в Разделе 4.

Лемма 3. *$u, v, w, w_{new}, c, CL(u.attr_1)$ формируют полную решетку с частичным порядком, наследованным из V^+.*

Доказательство. $c.attr_2 = v.attr_2 = w_{new}.attr_2 = u.attr_2$, и $CL(u.attr_1)$ единица решетки. v наименьший элемент, и нет зависимостей от v, но он зависит от c, w_{new},u,$CL(u.attr_1)$, атрибуты $attr_2$ которых равны между собой. То есть v - meet-элемент для любого подмножества из подмножеств $c, u, w_{new}, CL(u.attr_1)$ и $c, u, w, CL(u.attr_1)$, а для w, w_{new} - w является meet-элементом. следовательно, $u, v, w, w_{new}, c, CL(u.attr_1)$ - полная решетка с нулем v и единицей $CL(u.attr_1)$. □

Опишем данную решётку системой неравенств:

$$\begin{cases} w \le w_{new} \le CL(u.attr_1), \\ v \le CL(u.attr_1), \\ c \le CL(u.attr_1), \\ u \le v, \\ u \le w, \\ u \le c. \end{cases}$$

Definition 8. *Назовём v, c, w, w_{new} генерирующим множеством $Gen(u.attr_1)$.*

Существование генерирующего множества $Gen(u.attr_1) \forall u \in V^+ \setminus v_{init}, \forall attr_1 \in K$, подходящих для реконструкции - достаточное условие восстановления дерева процессов. Сформулируем критерий корректности.

Теорема 2. *Дерево процессов T корректно $\iff$ ($\forall u \in V^+ \setminus v_{init}$, V^+ такое, что выполнены условия теоремы о необходимости, и $\forall attr_i \in K \Rightarrow \exists Gen(u.attr_i) : Gen(u.attr_i) \subseteq V^+$).*

Доказательство. Необходимость следует из Теоремы 1. Обоснуем достаточность. Для этого проведём некоторую процедуру реконструкции по предвосстановленным состояниям из V^+, которая восстанавливает отношение зависимости на нём. Итак, $\forall u \in V^+$ восстановление разбивается на 3 (возможно, совпадающие в частных случаях) цепочки, состояния в которых можно получить через $PCL(u.attr)$ такой, что образ не меньше исходного состояния, причём все такие состояния лежат в замыкании, задаваемом $CL(u.attr)$:

1. Восстанавливается создатель или "хранитель"нужного $attr_k$. Создатель будет получен из хранителя в любом случае через конечное число применений PCL в силу монотонности. В виду восстановления в замыкании, сохраняется иерархия атрибутов: получая $\forall attr_k \in K$, что $CL(u.attr_k)$, является создателем минимально доминирующего атрибута, повторяя данную процедуру, за конечное число шагов достигается максимально доминирующий - корневое пространсово имён.

2. Восстанавливается порядок следования состояний процессов: через отношение PCL находится в замыкании состояние-предшественник. При этом большая часть атрибутов наследуется. В конечном счёте, многократное применение PCL приводит к CL за исключением, когда $attr_k$ - это PID-пространство имён. Тогда естественным образом такие применения должны приводить к состоянию, в котором процесс был порождён, то есть его PID не совпадает с PID предшественника, и данное состояния является верхне неразложимым элементом по зависимостям: практически все атрибуты наследуются от предшественника, кроме PID, а ненаследуемые выставляются локально, без внешних зависимостей, то есть $\exists! dep(PCL(PCL(...(u))), parent(u))$ - зависимость первого состояния процесса от его родителя. Таким образом, строится вся цепочка состояний целевого процесса.

3. Для каждой последовательной пары u, v состояний из пункта выше находится процесс, который будучи в состоянии c, выполняет системный вызов, порождающий u из v.

Восстановления выше выполняются $\forall u \in V^+ \setminus v_{init}, \forall attr \in K : u.attr \neq v.attr$, остальные атрибуты наследуются. Для всех найденных состояний $w, w_{new}, c, v \in V^+$ и процедура поиска также завершается успешно найденными промежуточными состояниями. Наконец, из 2-й и 3-й цепочек следует, что $\forall u \in V^+ \setminus v_{init}$ $\exists v$ и системный вызов, восстанавливающий отношение (u, v) в правильном порядке следования атрибутов, и такая конструкция ациклична, как подмножество решеточно упорядоченного V^+ относительно наследуемого порядка. Следовательно, она сортируема топологически, и требование корректности выполнено. $\square$

4. Типы атрибутных зависимостей на практике

В соответствии с введёнными в Разделах 1 и 2 определениями и свойствами процессов и системных вызовов ОС Linux [15], выделим условно 4 типа атрибутных зависимостей (Рис. 3):

1. Жестко наследуемые (Hardly Inherited, HI) - в G существует цепь от создателя атрибута к наследующему ребёнку по E^+. Создатель не может изменить значение атрибута после создания соответствующего ресурса. Пример: сессии, PID-пространства имён.

2. Устанавливаемые в подобласти (Subset Inherited, SI) – "хранитель"значения, выставляемого атрибуту, предшествующее состояние процесса и состояние, из контекста которого выполняется системный вызов, лежат в замыкании, определяемом оператором CL. Данный случай представляет наиболее общее описание генерирующего множества как антицепи w, c, v, возможны также частные случаи: выставление процессу атрибута носителем $c = w$, выставление атрибута самому себе: $c = v$ и др.

3. Мягко наследуемые (Mildly Inherited, MI): Создатель и наследник могут изменить значение атрибута сколь угодно раз, произведя соответствующий системный вызов. Усиление SI.

4. Свободно устанавливаемые в рамках текущего пространства имён. Согласно такой формулировке, это как наследуемые UID, GUID (Free Inherited, FI) , так и ненаследуемые (Free Non-inheritable, FN) — маски сигналов и др. На практике, большинство выставлений таких атрибутов происходит с частными условиями

$$u \leq v = c \leq CL(u.attr), w = w_{new} \leq CL(u.attr),$$

   а $CL(u.attr)$ является создателем пространства имён. Имеет место доупорядочивание генерирующего множества: $c = v \leq w \leq w_{new} \leq CL(u.attr)$

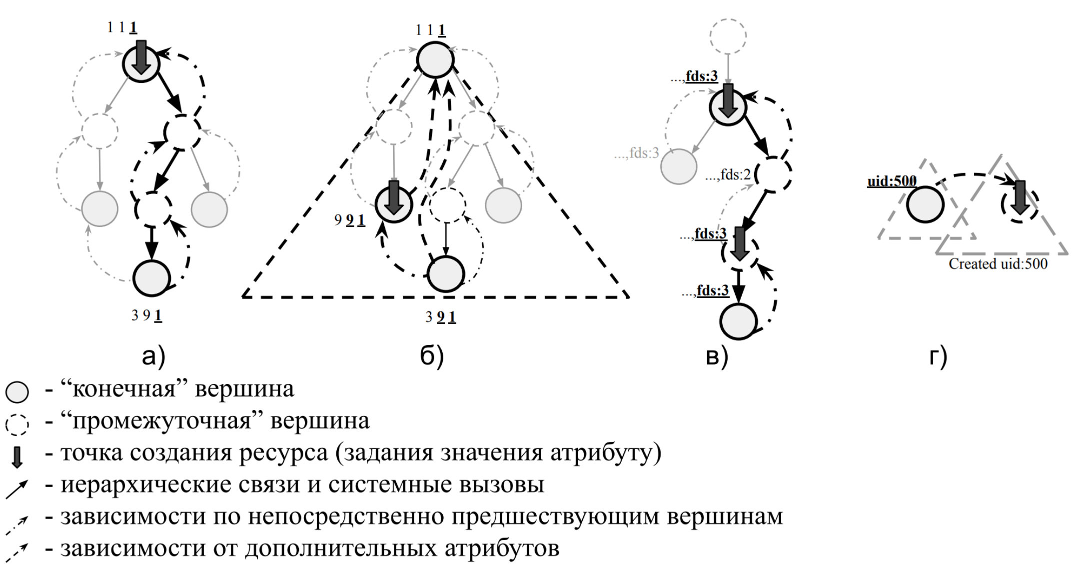


Рис. 3: Типы атрибутных зависимостей: а)строго наследуемые; б)выставляемые в подобласти; в)нестрого наследуемые; г)свободные.

Приведённая классификация атрибутных зависимостей и частные случаи во многом упрощают поиск подходящих генерирующих множеств за счёт частных случаев.

5. Заключение

В работе были исследованы свойства множества состояний процессов Linux, восстанавливающего дерево процессов, показано построение такого множества как полурешёточно упорядоченного по зависимостям. На основании свойств атрибутов процессов и полурешёточной упорядоченности был получен критерий корректности дерева процессов, то есть соответствия реальной конфигурации ОС и восстановимости. Тем не менее, представляет интерес построение формального алгоритма проверки по схеме из достаточного условия, исследования его временной и пространственной сложности. Получение и исследование частного случая критерия для деревьев процессов с набором атрибутов, урезанном до групп, сессий и процессов в едином пространстве имён, из работ [4, 5], будут исследованы и приведены в дальнейших работах автора. Одновременно с этим, представляет интерес получения частных случаев критерия для эвристических процедур из существующих систем сохранения и восстановления состояния, таких как CRIU [2], BLCR [17], DMTCP [18], а также других приложений, к примеру, восстановления fork-join-последовательностей для многопоточного программирования [19] и для различных представлений задачи восстановления дерева процессов, например, в матричной форме [20]. На основании такого исследования будет проверена гипотеза о повышении эффективности вышеперечисленных методов за счёт уменьшения мощности множеств для поиска нужных состояний, так как состояния с нужными значениями атрибутов предположительно будут также замыкаться в соответствующих областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефанов Н. Н. О некоторых комбинаторных свойствах деревьев процессов LINUX. Чебышевский сборник. 2018. 19(2). 151-162 сс.

2. Checkpoint-Restore In Userspace (CRIU) usage scenarios. 2019. `https://criu.org/Usage_scenarios` (Дата обращения: 24.05.2019)

3. Kraemer, S., Leupers, R., Petras, D.,Philipp, T., Hoffmann, A. Checkpointing SystemC-based virtual platforms // International Journal of Embedded and Real-Time Communication Systems, 2 (4), RWTH Aachen University, Germany. 2011. pp. 21-37.

4. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Constructing the formal grammar of system calls // In Proceedings of the 13th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'17). 2017. Article 12. 5 pages.

5. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Linux Process Tree Reconstruction Using The Attributed Grammar-Based Tree Transformation Model // In Proceedings of the 14th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR'18). 2018. ACM, NY, USA. Article 2. 7 pages.

6. Горбунов Е. «Алгоритм генерации команд восстановления дерева процессов ОС Linux на основе модели жизненного цикла ресурсов ОС». Магистерская диссертационная работа, Труды Кафедры Математических и Информационных технологий, СПбАУ РАН, 2017.

7. Linux namespaces. `https://en.wikipedia.org/wiki/Linux_namespaces` (Дата обращения: 24.05.2019)

8. Alfred V. Aho , Jeffrey D. Ullman , The theory of parsing, translation, and compiling, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1972. URL: `dl.acm.org/citation.cfm?id=578789` (Дата обращения: 24.05.2019).

9. Sukadev Bhattiprolu, Eric W. Biederman, Serge Hallyn, and Daniel Lezcano. Virtual servers and checkpoint/restart in mainstream Linux. SIGOPS Oper. Syst. Rev. 42, 5. July 2008, pp 104-113. doi:10.1145/1400097.1400109

10. Kalaee, A., Rafe, V. Model-based test suite generation for graph transformation system using model simulation and search-based techniques, Information and Software Technology, Elsevier, 108, 2019, pp. 1-29.

11. A.V. Arkhangelskii, L.S.Pontryagin, General Topology, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

12. Биркгоф, Г. Теория решеток. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 568 с.

13. Aho, A. V., Garey, M. R., Ullman, J. D., The transitive reduction of a directed graph // SIAM Journal on Computing, 1 (2), 1972, pp 131–137.

14. Freese R. Automated lattice drawing //International Conference on Formal Concept Analysis. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. – pp 112-127.

15. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. 4-е изд. — СПб.: Питер, 2015. — 1120 с.

16. Linux system calls. MANual pages(2). 2019. `http://man7.org/linux/man-pages/man2/syscalls.2.html` (Дата обращения: 24.05.2019)

17. Hargrove P. H., Duell J. C. Berkeley lab checkpoint/restart (BLCR) for linux clusters // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2006. – Т. 46. – №. 1. – p. 494.

18. Arya K., Cooperman G. DMTCP: Bringing Checkpoint-Restart to Python // Proceedings of the 12th Python in Science Conference. – 2013. 2-7 cc.

19. Zengin M., Vafeiadis V. A programming language approach to fault tolerance for fork-join parallelism // Proceedings of the 7th International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering (TASE 2013), Max Planck Institute for Software Systems (MPI-SWS), Saarsbruchen, Germany, 2013.

20. Marina Kudinova and Pavel Emelyanov. Building Mathematical Model for Restoring Processes Tree during Container Live Migration. // IVth International Conference on Engineering and Telecommunication (EnT), November 2017, Dolgoprudniy. doi: 10.1109/ICEnT.2017.41

REFERENCES

1. Efanov N.N. 2018. “On some combinatorial properties of LINUX process trees”. Chebyshevskii Sbornik, 19 (2), pp. 151-162.

2. Checkpoint-Restore In Userspace (CRIU) usage scenarios. 2019. `https://criu.org/Usage_scenarios`

3. Kraemer, S., Leupers, R., Petras, D.,Philipp, T., Hoffmann, A. .2011. Checkpointing SystemC-based virtual platforms. International Journal of Embedded and Real-Time Communication Systems, 2 (4), RWTH Aachen University, Germany. pp 21-37.

4. Efanov N. N., Emelyanov P. V. “Constructing the formal grammar of system calls”, In Proceedings of the 13th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR ’17), ACM, New York, NY, USA, Article 12, 5 pages. doi: 10.1145/3166094.3166106

5. Efanov N. N., “Emelyanov P. V. Linux Process Tree Reconstruction Using The Attributed Grammar-Based Tree Transformation Model”, In Proceedings of the 14th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR’18), ACM, New York, NY, USA, Article 2, 7 pages. doi: 10.1145/3290621.3290626

6. Gorbunov E. 2017. “Algoritm generatsii komand vosstanovleniya dereva processov OS Linux na osnove modeli zhiznennogo tsykla resursov”. Master’s thesis, MIT SPbAU.

7. Leonardo Passos, Jianmei Guo, Leopoldo Teixeira, Krzysztof Czarnecki, Andrzej Wąsowski, and Paulo Borba 2013, “Coevolution of variability models and related artifacts: a case study from the Linux kernel”, In Proceedings of the 17th International Software Product Line Conference (SPLC ’13), ACM, New York, NY, USA, 91-100. doi: 10.1145/2491627.2491628

8. Alfred V. Aho , Jeffrey D. Ullman 1972, The theory of parsing, translation, and compiling, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA. Available at: `dl.acm.org/citation.cfm?id=578789`

9. Sukadev Bhattiprolu, Eric W. Biederman, Serge Hallyn, and Daniel Lezcano, 2008, “Virtual servers and checkpoint/restart in mainstream Linux”, SIGOPS Operation Systems Rev. 42, no. 5, July 2008, pp. 104-113. doi:10.1145/1400097.1400109

10. Kalaee, A., Rafe, V. 2019, “Model-based test suite generation for graph transformation system using model simulation and search-based techniques Information and Software Technology, 108, Elsevier, pp. 1-29.

11. A.V. Arkhangelskii, L.S.Pontryagin, 1990, General Topology, Vol 1, Springer-Verlag, Berlin.

12. Birkhoff, G. 1973, Lattice Theory, 3rd ed., Providence, RI : American Mathematical Society.

13. Aho, A. V., Garey, M. R., Ullman, J. D., 1972, “The transitive reduction of a directed graph”, SIAM Journal on Computing, 1 (2), pp 131–137.

14. Freese, R., 2004, “Automated lattice drawing”. In International Conference on Formal Concept Analysis, pp. 112-127. Springer, Berlin, Heidelberg.

15. Tanenbaum, A. S., Bos, H. 2014. Modern Operating Systems. 4th. edition.

16. Linux system calls. MANual pages(2). 2019.
`http://man7.org/linux/man-pages/man2/syscalls.2.html`

17. Hargrove, P. H., & Duell, J. C. 2006. Berkeley lab checkpoint/restart (BLCR) for linux clusters. In Journal of Physics: Conference Series Vol. 46, No. 1, p. 494. IOP Publishing.

18. Arya, K., & Cooperman, G. 2013. DMTCP: Bringing Checkpoint-Restart to Python. In Proceedings of the 12th Python in Science Conference, pp. 2-7.

19. Zengin M, Vafeiadis V. 2013, “A programming language approach to fault tolerance for fork-join parallelism”, Proceedings of the 7th International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering (TASE 2013), Max Planck Institute for Software Systems (MPI-SWS), Saarsbruchen, Germany, 2013. Available at:
`http://plv.mpi-sws.org/ftpar/tase2013-ftpar.pdf`

20. Marina Kudinova and Pavel Emelyanov. 2017, “Building Mathematical Model for Restoring Processes Tree during Container Live Migration”, IVth International Conference on Engineering and Telecommunication (EnT), November 2017, Dolgoprudniy. doi: 10.1109/ICEnT.2017.41

Получено 30.05.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-134-154

Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора

А. А. Жукова, А. В. Шутов (г. Владимир)

А. А. Жукова «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», Владимирский филиал
e-mail: georg967@mail.ru
А. В. Шутов Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Для любого иррационального α можно рассмотреть разбиения отрезка $[0;1]$ точками вида $\{i\alpha\}$ с $0 \leq i < n$. Данные разбиения обладают целым рядом интересных свойств, наиболее известными из которых являются теоремы о трех длинах и о трех прыжках. В частности, эти разбиения содержат отрезки либо двух, либо трех различных длин. В случае двух длин соответствующие разбиения известны как обобщенные разбиения Фибоначчи. Они тесно связаны с комбинаторикой слов, одномерными квазипериодическими разбиениями, множествами ограниченного остатка, отображениями первого возвращения для иррациональных поворотов окружности и т.д.

Перенос общих теорем о трех длинах и о трех прыжках на двумерный случай, то есть на точки вида $(\{i\alpha_1\}, \{i\alpha_2\})$ является известной открытой проблемой. В настоящей работе рассматривается некоторый частный случай этой задачи связанный с двумерными обобщениями разбиений Фибоначчи. Эти разбиения получаются при помощи итераций геометрической версии знаменитой подстановки Рози. Они возникают в комбинаторике слов при изучении обобщений последовательностей Штурма, а также в теории чисел при изучении сдвигов тора. Рассматриваемые разбиения состоят из ромбов трех различных типов. Доказано, что во всех разбиениях существует ровно 9 типов наборов ромбов, соседних с заданным ромбом. Также дан способ позволяющий по ромбу разбиения однозначно установить его соседей. Полученные результаты можно рассматривать как первый шаг к многомерному обобщению теорем о трех длинах и трех прыжках.

Ключевые слова: теорема о трех длинах, теорема о трех прыжках, подстановка Рози, обобщенное перекладывающееся разбиение тора, множество ограниченного остатка.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 134–154.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-134-154

RAUZY SUBSTITUTION AND LOCAL STRUCTURE OF TORUS TILINGS

A. A. Zhukova, A. V. Shutov (Vladimir)

A. A. Zhukova "Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation"Vladimir branch
e-mail: georg967@mail.ru
A. V. Shutov Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

For any irrational α we can consider tilings of the segment $[0;1]$ by the points $\{i\alpha\}$ with $0 \le i < n$. These tilings have some interesting properties, including well-known three lengths and three gaps theorems. In particular, these tilings contain segments of either two, or three different lengths. In the case of two lengths, the corresponding tilings are known as generalized Fibonacci tilings. They are closely connected with the combinatorics of words, one-dimensional quasiperiodic tilings, bounded remainder sets, first return maps for irrational circle rotations, etc.

Transferring the general three lengths and three gaps theorems to two-dimensional case, i.e. to the points $(\{i\alpha_1\}, \{i\alpha_2\})$ is a well-known open problem. In the present work we consider a special case of this problem. associated with two-dimensional generalizations of Fibonacci tilings. These tilings are obtained using iterations of the geometric version of the famous Rauzy substitution. They arise in the words combinatorics in the study of generalizations of Sturmian sequences, as well as in number theory in the study of toric shifts. Considered tilings consist of rhombuses of three different types. It is proved that there are exactly 9 types of sets of rhombuses adjacent to a given rhombus. Also we obtain a method that allows explicitly determine all neighbours of the given rhombus. The results can be considered as a first step to a multidimensional generalization of the three lengths and three gaps theorems.

Keywords: three length theorem, three gaps theorem, Rauzy substitution, generalized exchanged toric tilings, bounded remainder sets.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2019, "Rauzy substitution and local structure of torus tilings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 134–154.

1. Введение

Пусть α – иррациональное число и T_n – разбиение отрезка $[0;1]$ точками вида $\{i\alpha\}$ с $0 \le i < n$. Разбиение T_n обладает двумя тесно связанными между собой фундаментальными свойствами, описывающими комбинаторику и геометрию последовательности $\{i\alpha\}$.

1) Разбиение T_n содержит отрезки либо двух, либо трех различных длин. Если таких длин три, то одна из них является суммой двух других.

2) Пусть $\{i_1\alpha\}$ и $\{i_2\alpha\}$ – концы некоторого отрезка разбиения T_n. Тогда величина $i_2 - i_1$ принимает на разбиении T_n либо два, либо три значения. Если таких значений три, то одно из них является суммой двух других.

Упомянутые значения могут быть явно вычислены в терминах разложения α в цепную дробь.

Данные утверждения известны как теорема о трех длинах и теорема о трех прыжках (гипотеза Штейнгауза). В настоящее время имеется несколько десятков работ, посвященных двум данным теоремам. В частности, многочисленные их доказательства можно найти в [7], [11], [15],[16], [17],[18], [19], [26] и т.д. Различные попытки обобщения связаны с переносом описанных результатов на случай других последовательностей от одной переменной [20], многомерных последовательностей вида $\sum\limits_{k=1}^{d} i_k\alpha_k$ [3], [6], [13], [9] римановых многообразий [2], квазипериодический разбиений [10], упорядоченных абелевых групп [8] и т.д.

Тем не менее, остается нерешенным крайне интересный вопрос о правильном обобщении данной теоремы на случай последовательностей вида $(\{i\alpha_1\}, \ldots, \{i\alpha_d\})$ распределенных на многомерном торе. Отдельные (далекие от окончательных) результаты в этом направлении можно найти в [5], [4], [21]. Трудность здесь связана с тем, что нет естественного понятия соседства точек на торе. Кроме того, не имеется универсального хорошего способа построения разбиения, связанного с конечным множеством точек (стандартные подходы, связанные с разбиениями Дирихле-Вороного и Делоне здесь не вполне удовлетворительны).

В. Г. Журавлев [23] для $\alpha = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ рассмотрел частный случай разбиений T_n, в котором интервалы разбиения имеют всего две различные длины. Данные разбиения были названы им разбиениями Фибоначчи. Их изучение оказалось связанным с числами Фибоначчи, отображениями первого возвращения для иррационального поворота окружности, множествами ограниченного остатка для последовательности дробных долей линейной функции и т.д.

Разбиения Фибоначчи обладают следующим фундаментальным свойством: действие сдвига $S : x \to x - \tau \pmod 1$ на них сводится к перекладыванию двух отрезков разбиения. Следовательно, за вычетом одного длинного и одного короткого отрезка, образ отрезка разбиения Фибоначчи под действием сдвига S вновь представляет собой отрезок этого разбиения. При этом в [23] был получен метод, позволяющий по номеру отрезка разбиения найти номера его соседей. Этот результат можно рассматривать как дальнейшее уточнение теоремы о трех прыжках.

Теория разбиений Фибоначчи была перенесена на случай произвольного иррационального α А. В. Шутовым (см., например, [26]).

Вопрос о переносе данной теории на многомерный случай до конца не решен. Тем не менее, в случае алгебраических чисел Пизо и связанных с ними сдвигов тора имеется как минимум два естественных кандидата на роль многомерных обобщений разбиений Фибоначчи. Эти кандидаты основаны на теории фракталов Рози [14], [12], [24] и на теории геометрических подстановок Арно-Ито [1], [12]. В [25] было рассмотрено простейшее семейство разбиений двумерного тора, возникающее в теории Арно-Ито, и связанное со знаменитой подстановкой Рози. Было показано, что данные разбиения, рассматриваемые вместе со сдвигом тора на вектор (ξ^{-1}, ξ^{-2}) (где ξ – действительный корень уравнения $\xi^3 - \xi^2 - \xi - 1 = 0$), обладают свойствами, аналогичными разбиениям Фибоначчи. В частности, данные разбиения состоят из ромбов трех различных типов, а действие сдвига тора на них сводится к перекладыванию трех ромбов разбиения. В связи с этим возникает вопрос о построении обобщения теоремы о трех прыжках на случай этого разбиения. Данный аналог требует описания 4 соседних ромбов для каждого ромба, входящего в разбиение. В настоящей работе приведено полное решение этой задачи. Показано, что в зависимости от типа исходного ромба существует пять, три или один тип четверки его соседей, а также указан способ явного определения этой четверки.

2. Вспомогательные результаты

Пусть L — двумерная решетка, v — иррациональный относительно решетки L вектор, т.е. вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S : x \to x + v \pmod{L}$$

переводит двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$ в себя.

Множество T будем называть *фундаментальной областью* решетки L, если:

1) для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует точка $x' \in T$ такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$;

2) любые две точки $x, x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует единственное взаимно-однозначное отображение ι: $\mathbb{T}^2 \to T$ между фундаментальной областью T и тором $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \tag{1}$$

двумерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2, \qquad \text{где} \qquad T_i = \iota(\mathbb{T}_i).$$

Разбиение (1) будем называть *перекладывающимся*, если существуют векторы v^0, v^1, v^2 такие, что отображение $S^* : x \to x + v^j$, если $x \to T_j$, переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^2 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\iota"] & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "\iota"] \\ T \arrow[r, "S^*"] & T \end{tikzcd} \tag{2}$$

коммутативна. Пример такого разбиения изображен на рис. 1.

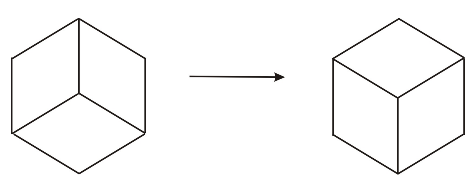


Рис. 1. Пример перекладывающегося разбиения.

Рассмотрим разбиение двумерного тора $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} \mathbb{R}_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} \mathbb{G}_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} \mathbb{B}_i \tag{3}$$

на непересекающиеся множества трех типов. Здесь $\sharp R$, $\sharp G$ и $\sharp B$ — количества множеств типов R, G и B соответственно.

Разбиение (3) порождает разбиение развертки

$$T = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} R_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} G_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} B_i,$$

в котором $R_i = \iota(\mathbb{R}_i)$, $G_i = \iota(\mathbb{G}_i)$, $B_i = \iota(\mathbb{B}_i)$.

Пусть теперь отображение S^* таково, что диаграмма (2) коммутативна. Разбиение (3) будем называть *обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига* S, если выполняются следующие три условия:

1) $S^*(R_i) = R_{i+1}$, $S^*(G_i) = G_{i+1}$, $S^*(B_i) = B_{i+1}$ для всех допустимых значений i;

2) справедливо равенство

$$R_0 \sqcup G_0 \sqcup B_0 = S^*\left(R_{\sharp R-1}\right) \sqcup S^*\left(G_{\sharp G-1}\right) \sqcup S^*\left(B_{\sharp B-1}\right)$$

и существуют векторы

$$w_R = \left(w_R^1, w_R^2\right), \qquad w_G = \left(w_G^1, w_G^2\right), \qquad w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right),$$

такие, что

$$S^*\left(R_{\sharp R-1}\right) - w_R = R_0, \quad S^*\left(G_{\sharp G-1}\right) - w_G = G_0, \quad S^*\left(B_{\sharp B-1}\right) - w_B = B_0;$$

3) определитель

$$\begin{vmatrix} \sharp R & \sharp G & \sharp B \\ w_R^1 & w_G^1 & w_B^1 \\ w_R^2 & w_G^2 & w_B^2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Перейдем к изложению теоретических сведений о подстановках Рози, необходимых для доказательства основного результата о видах и номерах квадратов, являющихся первым окружением базисных квадратов обобщенного перекладывающегося разбиения тора, в соответствии с книгой [12]. Подробные доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в работе [1].

Рассмотрим множество Λ, состоящего из квадратов

$$(x, i^*) = \{x + \lambda e_j + \mu e_k : 0 \leqslant \lambda, \mu < 1\},$$

где $i = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{Z}^3$, $e_1 = (1,0,0)^t$, $e_2 = (0,1,0)^t$, $e_3 = (0,0,1)^t$, называемых *базисными*. Точку x базисного квадрата (x, i^*) называют *отмеченной*.

Матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

назовем *матрицей подстановки Рози*, i-й вектор-столбец матрицы M^{-N} обозначим $f_i^{(N)}$.

Определим подстановку Рози Θ следующим образом:

$$\Theta: \begin{array}{l} (0,1^*) \to (0,3^*) \sqcup \left(f_2^{(1)}, 1^*\right) \sqcup \left(f_3^{(1)}, 2^*\right) \\ (0,2^*) \to (0,1^*) \\ (0,3^*) \to (0,2^*) \end{array} \qquad \Theta\left(x, i^*\right) = M^{-1}x + (0, i^*)$$

$$\Theta\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \lambda\right) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Theta(\lambda).$$

На рисунке 2 изображено действие подстановки Θ на базисных квадратах $(0, i^*)$.

Положим

$$D_N^{(i)} = \Theta^N\left(0, i^*\right), \qquad D_N = \coprod_{i=1}^{3} D_N^{(i)}.$$

Несколько первых множеств D_N изображены на рисунке 3.

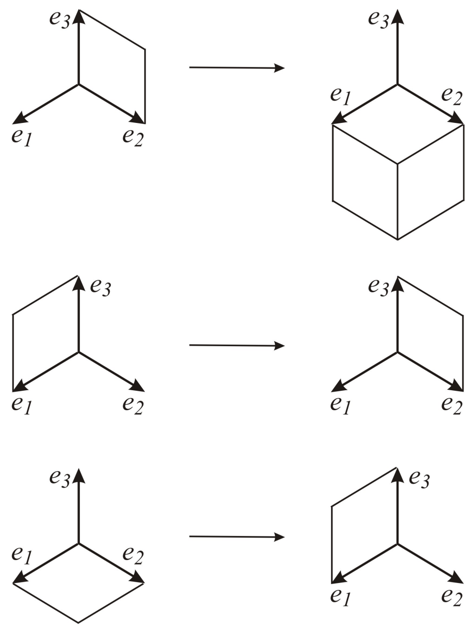


Рис. 1: Действие подстановки Θ на базисных квадратах.

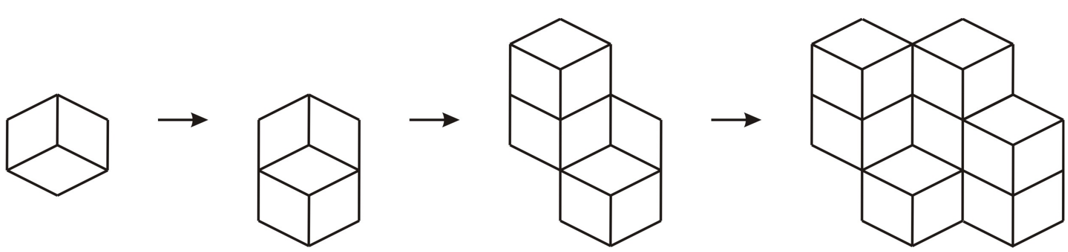


Рис. 2: Множества D_N для малых N.

Лемма 1. *Для любого $N > 0$ справедливо включение*

$$D_{N-1} \subset D_N.$$

Уравнение $x^3 + x^2 + x = 1$ имеет единственный действительный корень. Обозначим этот корень через ζ.

Пусть π – это проекция вдоль вектора $\left(1, \zeta, \zeta^2\right)^t$ из $\mathbb{R}^3$ на плоскость P, задаваемую уравнением $x_1 + \left(\zeta + \zeta^2\right) x_2 + \zeta x_3 = 0$.

Лемма 2. *Ограничение отображения π на множество D_N является взаимно-однозначным отображением при любом N.*

Положим $D_\infty = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} D_N$, тогда согласно лемме 1 множество D_∞ является объединением базисных квадратов.

Обозначим через Γ_∞ множество отмеченных точек всех базисных квадратов из D_∞.

Лемма 3. *Множество Γ_∞ и плоскость P инвариантны относительно действия отображения M^{-1}. Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\infty & \xrightarrow{M^{-1}} & \Gamma_\infty \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{M^{-1}} & P \end{array} \tag{5}$$

коммутативна.

Определим множества $T_N = \pi(D_N)$ и $T_N^{(i)} = \pi\left(D_N^i\right)$ опираясь на справедливость леммы 2.

На множестве T_N введем отображение S_N^* определяемое следующим образом:

$$S_N^*(x) = x + \pi\left(f_i^{(N)}\right), \qquad \text{если} \quad x \in T_N^{(i)}.$$

Лемма 4. *Отображение $S_N^*(x)$ является взаимно-однозначным отображением множества T_N в себя.*

Введем в расмотрение решетки:

$$L_0 = \{k_1(e_1 - e_2) + k_2(e_1 - e_3) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}, \qquad L_N = M^{-N}(L_0).$$

Теорема 1. *Множество T_N представляет собой фундаментальную область решетки $\pi\left(L_N\right)$. Кроме того, существует сдвиг*

$$S_N : x \to x + v_N \pmod{\pi\left(L_N\right)}$$

тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right)$, действие которого на $\mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right)$ изоморфно действию S_N^* на T_N. При этом в качестве вектора v_N можно взять любой из векторов $\pi\left(f_i^{(N)}\right)$. Если ι_N означает естественную проекцию $\mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right) \to T_N$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right) & \xrightarrow{S_N} & \mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right) \\ \Big\downarrow \iota_N & & \Big\downarrow \iota_N \\ T_N & \xrightarrow{S_N^*} & T_N \end{array}$$

коммутативна. Более того, все сдвиги S_N^* изоморфны сдвигу

$$x \to x + (\zeta, \zeta^2) \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Пусть множества R_i^N, G_i^N, B_i^N определены индуктивно следующим образом: если $N=0$, то $R_0^0=\pi(0,1^*)$, $G_0^0=\pi(0,2^*)$, $B_0^0=\pi(0,3^*)$.

Предположим, что множества R_i^N, G_i^N, B_i^N определены при $N=k$. Обозначим через $\sharp R_k$, $\sharp G_k$, $\sharp B_k$ количество множеств R_i^k, G_i^k, B_i^k соответственно. Положим $R_j^k=\pi(x,1^*)$ и

$$\Theta\left(x,1^*\right)=\left(M^{-1}x,3^*\right)\sqcup\left(M^{-1}x+f_2^{(1)},1^*\right)\sqcup\left(M^{-1}x+f_3^{(1)},2^*\right).$$

В таком случае при $N=k+1$ будем полагать

$$R^{k+1}_{\sharp G_k+j}=\pi\left(M^{-1}x+f_2^{(1)},1^*\right),$$

$$G^{k+1}_{\sharp B_k+j}=\pi\left(M^{-1}x+f_3^{(1)},2^*\right),$$

$$B_j^{k+1}=\pi\left(M^{-1}x,3^*\right),$$

что можно рассматривать как

$$R_j^k\to R^{k+1}_{\sharp G_k+j}\sqcup G^{k+1}_{\sharp B_k+j}\sqcup B_j^{k+1}.$$

Теперь для $G_j^k=\pi\left(x,2^*\right)$ и $\Theta\left(x,2^*\right)=\left(M^{-1}x,1^*\right)$ определим

$$R_j^{k+1}=\pi\left(M^{-1}x,1^*\right),$$

что равносильно

$$G_j^k\to R_j^{k+1}.$$

Таким же образом для $B_j^k=\pi\left(x,3^*\right)$ и $\Theta\left(x,3^*\right)=\left(M^{-1}x,2^*\right)$ положим

$$G_j^{k+1}=\pi\left(M^{-1}x,2^*\right),$$

иначе

$$B_j^k\to G_j^{k+1}.$$

Из вышесказанного следует, что под действием отображения π каждый базисный квадрат $(x,1^*)\in D_N$ переходит в одно из множеств R_j^N, где $0\leqslant j<\sharp R_N$; $(x,2^*)\in D_N$ – в G_j^N, где $0\leqslant j<\sharp G_N$; и $(x,3^*)\in D_N$ – в B_j^N, где $0\leqslant j<\sharp B_N$.

Пусть

$$\mathbb{R}_j^N=\iota_N^{-1}\left(R_j^N\right),\qquad \mathbb{G}_j^N=\iota_N^{-1}\left(G_j^N\right),\qquad \mathbb{B}_j^N=\iota_N^{-1}\left(B_j^N\right).$$

Приведенные ниже утверждения доказаны в статье [25].

Теорема 2. *Разбиение*

$$\mathbb{T}^2=\coprod_{i=0}^{\sharp R_N-1}\mathbb{R}_i^N\sqcup\coprod_{i=0}^{\sharp G_N-1}\mathbb{G}_i^N\sqcup\coprod_{i=0}^{\sharp B_N-1}\mathbb{B}_i^N$$

является обобщенным перекладывающимся разбиением тора $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right)$.

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{t_i\}$, называемую *последовательностью трибоначчи*, заданную рекуррентным соотношением

$$t_{i+3}=t_{i+2}+t_{i+1}+t_i,$$

и начальными условиями $t_0=t_1=1$, $t_2=2$.

Лемма 5. *При всех $N \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$\sharp R_N = t_{N+1}, \qquad \sharp G_N = t_N + t_{N-1}, \qquad \sharp B_N = t_N.$$

Лемма 6. *При всех $N \geqslant 4$ справедливо равенство*

$$M^N = \begin{pmatrix} t_N & t_{N-1}+t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_{N-2}+t_{N-3} & t_{N-2} \\ t_{N-2} & t_{N-3}+t_{N-4} & t_{N-3} \end{pmatrix},$$

при малых N матрица M^N принимает следующий вид

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 7. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_1\right) \equiv C_1 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)}, \tag{6}$$

где $v_1 = (0,1,0)^t$, является $C_1 = t_N + t_{N-1}$.

Доказательство. При всех $N \geqslant 4$ разрешимость сравнения (6) равносильна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} t_N & t_{N-1}+t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_{N-2}+t_{N-3} & t_{N-2} \\ t_{N-2} & t_{N-3}+t_{N-4} & t_{N-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы линейных уравнений

$$\begin{cases} t_{N-1}+t_{N-2} & = & C_1 + k_1 + k_2, \\ t_{N-2}+t_{N-3} & = & -k_1, \\ t_{N-3}+t_{N-4} & = & -k_2 \end{cases}$$

в целых числах k_1, k_2.

Сложив все три уравнения, получим, что $C_1 = t_{N-1} + t_{N-2} + t_{N-2} + t_{N-3} + t_{N-3} + t_{N-4}$ или $C_1 = t_N + t_{N-1}$.

Таким образом, решением последней системы являются целые числа

$$\begin{cases} C_1 & = & t_N + t_{N-1}, \\ k_1 & = & -t_{N-2} - t_{N-3}, \\ k_2 & = & -t_{N-3} - t_{N-4}. \end{cases}$$

В случае $N = 3$ разрешимость исходного сравнения (6) эквивалентна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы уравнений

$$\begin{cases} 3 & = & C_1 + k_1 + k_2, \\ 2 & = & -k_1, \\ 1 & = & -k_2 \end{cases}$$

в целых числах k_1 и k_2.

Данная система справедлива при $C_1 = 6$, $k_1 = -2$ и $k_2 = -1$.

Перепишем число C_1 как $4+2$ или $t_3 + t_2$.

Если $N = 2$, то разрешимость сравнения (6) равносильна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2 &= C_1 + k_1 + k_2, \\ 1 &= -k_1, \\ 0 &= -k_2 \end{cases}$$

в целых числах k_1 и k_2.

Решением последней системы являются $C_1 = 3$, $k_1 = -1$ и $k_2 = 0$. Представим C_1 как $2+1$ или $t_2 + t_1$.

При $N = 1$ разрешимость сравнения (6), записанного в условии леммы, эквивалентно разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

или системы уравнений

$$\begin{cases} 1 &= C_1 + k_1 + k_2, \\ 0 &= -k_1, \\ 1 &= -k_2 \end{cases}$$

в целых числах k_1 и k_2.

Решив последнюю систему, находим $C_1 = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Перепишем $C_1 = 2$ иначе какм $1+1$ или $t_1 + t_0$. Таким образом лемма 7 полностью доказана.

Доказательство лемм 8-19 проводится аналогично доказательству леммы 7.

Здесь и далее будем полагать, что $t_{-1} = 0$.

Лемма 8. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_2\right) \equiv C_2 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_2 = (-1,1,0)^t$, *является* $C_2 = -t_{N-2}$.

Лемма 9. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_3\right) \equiv C_3 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_3 = (0,0,-1)^t$, *является* $C_3 = -t_N$.

Лемма 10. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_4\right) \equiv C_4 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_4 = (0,0,0)^t$, *является* $C_4 = 0$.

Лемма 11. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_5\right) \equiv C_5 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_5 = (0,-1,0)^t$, *является* $C_5 = -t_N - t_{N-1}$.

Лемма 12. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_6\right) \equiv C_6 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_6 = (0,0,1)^t$, *является* $C_6 = t_N$.

Лемма 13. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_7\right) \equiv C_7 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_7 = (-1,0,1)^t$, *является* $C_7 = -t_{N-1} - t_{N-2}$.

Лемма 14. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_8\right) \equiv C_8 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_8 = (-1,0,0)^t$, *является* $C_8 = -t_{N+1}$.

Лемма 15. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_9\right) \equiv C_9 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_9 = (1,0,0)^t$, *является* $C_9 = t_{N+1}$.

Лемма 16. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{10}\right) \equiv C_{10} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_{10} = (1,-1,0)^t$, *является* $C_{10} = t_{N-2}$.

Лемма 17. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{11}\right) \equiv C_{11} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_{11} = (0,-1,1)^t$, *является* $C_{11} = -t_{N-1}$.

Лемма 18. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{12}\right) \equiv C_{12} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_{12} = (0,1,-1)^t$, *является* $C_{12} = t_{N-1}$.

Лемма 19. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{13}\right) \equiv C_{13} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

где $v_{13} = (1,0,-1)^t$, *является* $C_{13} = t_{N-1} + t_{N-2}$.

3. Основной результат

Теорема 3. *Соседями базисных ромбов обобщенного перекладывающегося разбиения тора являются:*

1. *для базисного ромба* $\mathbb{R}_i^N$*:*
   (a) $\mathbb{R}^N_{i+t_N+t_{N-1}}$, $\mathbb{B}^N_i$, $\mathbb{G}^N_i$, $\mathbb{R}^N_{i+t_N}$ *при* $0 \leqslant i < t_{N-2}$;
   (b) $\mathbb{G}^N_{i-t_{N-2}}$, $\mathbb{B}^N_i$, $\mathbb{G}^N_i$, $\mathbb{R}^N_{i+t_N}$ *при* $t_{N-2} \leqslant i < t_{N-2}+t_{N-1}$;
   (c) $\mathbb{G}^N_{i-t_{N-2}}$, $\mathbb{B}^N_i$, $\mathbb{G}^N_i$, $\mathbb{B}^N_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}$ *при* $t_{N-2}+t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
   (d) $\mathbb{G}^N_{i-t_{N-2}}$, $\mathbb{R}^N_{i-t_N}$, $\mathbb{G}^N_i$, $\mathbb{B}^N_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}$ *при* $t_N \leqslant i < t_N+t_{N-1}$;
   (e) $\mathbb{G}^N_{i-t_{N-2}}$, $\mathbb{R}^N_{i-t_N}$, $\mathbb{R}^N_{i-t_N-t_{N-1}}$, $\mathbb{B}^N_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}$ *при* $t_N+t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$;
2. *для базисного ромба* $\mathbb{G}_i^N$*:*
   (a) $\mathbb{R}^N_i$, $\mathbb{B}^N_i$, $\mathbb{R}^N_{i+t_{N-2}}$, $\mathbb{G}^N_{i+t_N}$ *при* $0 \leqslant i < t_{N-1}$;
   (b) $\mathbb{R}^N_i$, $\mathbb{B}^N_i$, $\mathbb{R}^N_{i+t_{N-2}}$, $\mathbb{B}^N_{i-t_{N-1}}$ *при* $t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
   (c) $\mathbb{R}^N_i$, $\mathbb{G}^N_{i-t_N}$, $\mathbb{R}^N_{i+t_{N-2}}$, $\mathbb{B}^N_{i-t_{N-1}}$ *при* $t_N \leqslant i < t_N+t_{N-1}$;
3. *для базисного ромба* $\mathbb{B}_i^N$*:* $\mathbb{R}^N_i$, $\mathbb{G}^N_i$, $\mathbb{G}^N_{i+t_{N-1}}$, $\mathbb{R}^N_{i+t_{N-1}+t_{N-2}}$ *при* $0 \leqslant i < t_N$.

Доказательство. Разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi\,(L_N)$, состоящее из ромбов трех видов $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$, согласно теореме 2, является перекладывающимся. Это означает, что существуют вектора v^0, v^1, v^2, переводящие тор $\mathbb{T}^2$ в себя. Очевидно, что при сдвиге на вектор v^j отмеченная точка одного из ромбов переходит в отмеченную точку какого-то другого ромба этого же разбиения тора $\mathbb{T}^2$.

После выполнения нескольких сдвигов на вектор v^j на торе $\mathbb{T}^2$ отмеченная точка базисного ромба перейдет в отмеченную точку ромба соседнего с ним.

В силу теоремы 2 существует сдвиг

$$S_N : x \to x + v_N \pmod{\pi\,(L_N)}$$

тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi\,(L_N)$, действие которого можно рассматривать как отображение S_N^* на T_N. При этом в качестве вектора v_N можно взять, например, вектор $\pi\left(f_1^{(N)}\right)$.

Таким образом, если на торе $\mathbb{T}^2$ вектор $\pi\,(v_j)$ переводит отмеченную точку ромба с номером i в отмеченную точку соседнего с ним ромбом с номером s, то найдется целое число C_j, такое что $s = i + C_j$, при котором справедливо сравнение

$$\pi\,(v_j) \equiv C_j \pi\left(f_1^{(N)}\right) \pmod{\pi\,(L_N)}.$$

Подействуем матрицей M^N на последнее сравнение

$$M^N \pi\,(v_j) \equiv C_j M^N \pi\left(f_1^{(N)}\right) \pmod{M^N \pi\,(L_N)}. \tag{7}$$

В силу коммутативности диаграммы (5) справедливы равенства: $M^N\pi\,(v_j) = \pi\left(M^N v_j\right)$, $M^N\pi\left(f_1^{(N)}\right) = \pi\left(M^N f_1^{(N)}\right)$, $M^N\pi\,(L_N) = \pi\left(M^N L_N\right)$.

Согласно определению $L_N = M^{-N}L_0$, поэтому $M^N L_N = M^N M^{-N} L_0 = L_0$. Кроме того, зная, что $f_1^{(N)}$ — первый столбец матрицы M^{-N}, приходим к равенству

$$M^N f_1^{(N)} = f_1^{(0)} = (1, 0, 0)^t.$$

Значит сравнение (7) равносильно сравнению

$$\pi\left(M^N v_j\right) \equiv C_j \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)}. \tag{8}$$

Решив это сравнение для заданного v_j, найдем константу C_j. Зная целое число C_j, определяем возможные значения номера ромба i, для которого ромб с номером $i+C_j$ будет соседним, из неравенства $0 \leqslant i+C_j < K$, где K равно либо $\sharp R_N$, либо $\sharp G_N$, либо $\sharp B_N$, в зависимости от типа ромба, являющегося соседним для данного базисного ромба.

Вначале определим типы и номера соседей ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Из геометрических соображений видно, что соседом справа ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, либо ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{B}_s^N$. Жирные вектора v_1 и v_2 на рисунке 4, переводят отмеченную точку базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ в отмеченную точку ромба $\mathbb{R}_s^N$ или $\mathbb{G}_s^N$. Координаты этих векторов $v_1 = (0,1,0)^t$ и $v_2 = (-1,1,0)^t$.

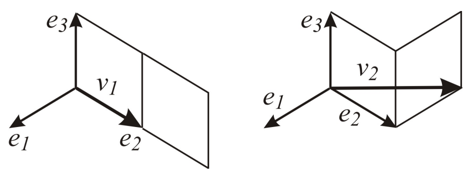


Рис. 4. Возможные соседи справа ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Воспользуемся леммами 7, 8 для решения сравнения (8), и получим $C_1 = t_N + t_{N-1}$, $C_2 = -t_{N-2}$.

Ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ всего может быть $\sharp R_N$, поэтому номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_1}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_1 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i + t_N + t_{N-1} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N-2}$, т.к. номер ромба $\mathbb{R}_s^N$ может быть только неотрицательным и $t_{N+1} - t_N - t_{N-1} = t_{N-2}$.

В свою очередь ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ ровно $\sharp G_N$. Значит номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_2}^N$ должен быть таким, что справедливо неравенство $0 \leqslant i + C_2 < \sharp G_N$, следовательно, $0 \leqslant i - t_{N-2} < t_N + t_{N-1}$ или $t_{N-2} \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. $t_N + t_{N-1} + t_{N-2} = t_{N+1}$.

Исходя из геометрических представлений, можно утверждать, что соседом снизу базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, либо $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 5). Выделенные жирным вектора $v_3 = (0,0,-1)^t$ и $v_4 = (0,0,0)^t$ переводят отмеченные точки ромба $\mathbb{R}_i^N$ в $\mathbb{R}_s^N$ и ромба $\mathbb{R}_i^N$ в $\mathbb{B}_s^N$, соответственно.

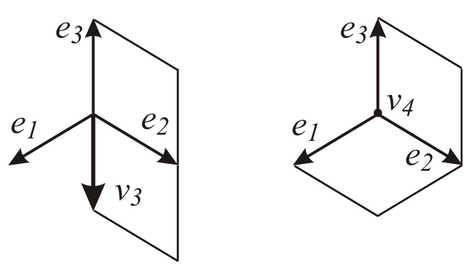


Рис. 5. Возможные соседи снизу ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Решением сравнения (8) для векторов v_3 и v_4 согласно леммам 9, 10 являются $C_3 = -t_N$ и $C_4 = 0$.

Количество ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ равно $\sharp R_N$. Значит номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_3}^N$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_3 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i - t_N < t_{N+1}$, или $t_N \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. номер ромба вида $\mathbb{R}_s^N$ должен быть меньше, чем t_{N+1}.

Ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ может быть только $\sharp B_N$. Это означает, что номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_4 < \sharp B_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N$.

Вновь применяя геометрические соображения, приходим к выводу, что соседом слева базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть ромб $\mathbb{R}_s^N$ или ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{B}_s^N$ (см. рис. 6). Отмеченные точки базисного ромба и соседнего с ним ромба образуют выделенные жирным вектора $v_5 = (0, -1, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$ для ромбов $\mathbb{R}_s^N$ и $\mathbb{G}_s^N$, соответственно.

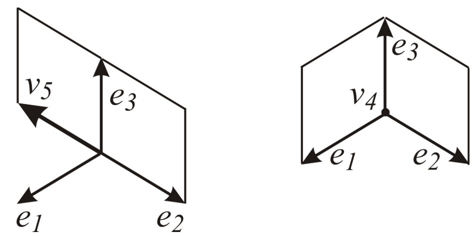


Рис. 6. Возможные соседи слева ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Согласно леммам 11 и 10 сравнение (8), в случае векторов v_5 и v_4, выполняется при $C_5 = -t_N - t_{N-1}$ и $C_4 = 0$.

Зная, что число ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ равно $\sharp R_N$, приходим к выводу: номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_5}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_5 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i - t_N - t_{N-1} < t_{N+1}$, или $t_N + t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. номера ромбов $\mathbb{R}_s^N$ всегда меньше t_{N+1}.

Соответственно, ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ всего $\sharp G_N$, следовательно, у ромба $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$ номер будет таким, что верно соотношение $0 \leqslant i + C_4 < \sharp G_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

И, наконец, пользуясь геометрическими представлениями, определяем, что соседом сверху базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо $\mathbb{R}_s^N$, либо $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 7). Отмеченные точки этих ромбов $\mathbb{R}_s^N$ и $\mathbb{B}_s^N$ отличаются от отмеченной точки базисного ромба на выделенные жирным вектора $v_6 = (0, 0, 1)^t$ и $v_7 = (-1, 0, 1)^t$, соответственно.

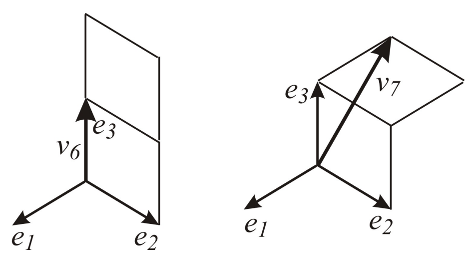


Рис. 7. Возможные соседи сверху ромба $\mathbb{R}_i^N$.

В случае векторов v_6 и v_7 сравнение (8), согласно леммам 12 и 13, имеет решение $C_6 = t_N$ и $C_7 = -t_{N-1} - t_{N-2}$.

Так как ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ имеется $\sharp R_N$, то номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_6}$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_6 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i + t_N < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N+1} - t_N$, или $0 \leqslant i < t_{N-1} + t_{N-2}$, в силу того, что номер ромба — это неотрицательное число и $t_{N+1} - t_N = t_{N-1} + t_{N-2}$.

Из того, что ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ всего $\sharp B_N$, делаем вывод о том, что для номера ромба $\mathbb{B}_{i+C_7}$ справедливо неравенство $0 \leqslant i + C_7 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N-1} - t_{N-2} < t_N$, или $t_{N-1} + t_{N-2} \leqslant i < t_{N+1}$, так как $t_{N+1} = t_N + t_{N-1} + t_{N-2}$.

Собирая полученные результаты вместе, получаем, что базисный ромб $\mathbb{R}_i^N$ будет иметь следующих соседей:

1. $\mathbb{R}_{i+C_1}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_6}^N$ при $0 \leqslant i < t_{N-2}$;

2. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_6}^N$ при $t_{N-2} \leqslant i < t_{N-2} + t_{N-1}$;

3. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_7}^N$ при $t_{N-2} + t_{N-1} \leqslant i < t_N$;

4. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_3}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_7}^N$ при $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$;

5. $\mathbb{G}^N_{i+C_2}$, $\mathbb{R}^N_{i+C_3}$, $\mathbb{R}^N_{i+C_5}$, $\mathbb{B}^N_{i+C_7}$ при $t_N + t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$.

Перейдем к определению типов и номеров соседей базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Принимая во внимание геометрические соображения, получаем, что соседом справа этого ромба будет либо ромб $\mathbb{G}^N_s$, либо $\mathbb{R}^N_s$, но не ромб $\mathbb{B}^N_s$ (см. рис. 8). Переход от отмеченной точки ромба $\mathbb{G}^N_i$ к отмеченной точке ромба $\mathbb{G}^N_s$ или ромба $\mathbb{R}^N_s$ осуществляется с помощью выделенных жирным векторов $v_8 = (-1, 0, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$, соответственно.

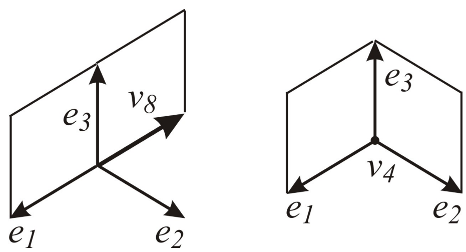


Рис. 8. Возможные соседи справа ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Решением сравнения (8) для векторов v_8, v_4 в силу лемм 14 и 10 будут числа $C_8 = -t_{N+1}$ и $C_4 = 0$.

Ромбов вида $\mathbb{G}^N_s$ при заданном N имеется $\sharp G_N$, поэтому ромб $\mathbb{G}^N_{i+C_8}$ должен быть таким, что его номер удовлетворяет соотношению $0 \leqslant i + C_8 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i - t_{N+1} < t_N + t_{N-1}$, или $t_{N+1} \leqslant i < t_{N+2}$, что противоречит условию $i < t_N + t_{N-1}$.

Известно, что ромбов $\mathbb{R}^N_s$ всего $\sharp R_N$. Значит ромб $\mathbb{R}_{i+C_4}$ будет соседом ромба $\mathbb{G}^N_i$, если $0 \leqslant i + C_4 < \sharp R_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_{N+1}$.

Пользуясь геометрическими представлениями, замечаем, что соседом снизу базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$ может быть $\mathbb{G}^N_s$ или $\mathbb{B}^N_s$, но не $\mathbb{R}^N_s$ (см. рис. 9). Вектора, переводящие отмеченную точку базисного ромба в отмеченную точку соседнего, – это выделенные жирным вектора $v_3 = (0, 0, -1)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$ для ромбов $\mathbb{G}^N_{i+C_3}$ и $\mathbb{R}^N_{i+C_4}$.

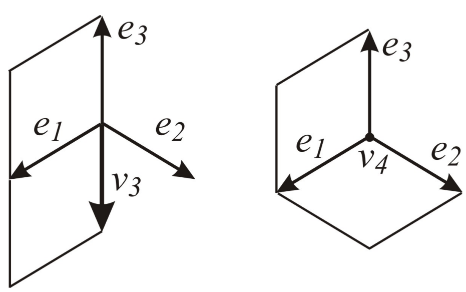


Рис. 9. Возможные соседи снизу ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Как было отмечено ранее, сравнение (8) в случае векторов v_3 и v_4, согласно леммам 9 и 10, справедливы при $C_3 = -t_N$ и $C_4 = 0$.

Зная, что ромбов вида $\mathbb{G}^N_s$ имеется ровно $\sharp G_N$, приходим к выводу о справедливости для ромба $\mathbb{G}^N_{i+C_3}$ неравенства $0 \leqslant i + C_3 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i - t_N < t_N + t_{N-1}$, или $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$, т.к. номер ромба вида $\mathbb{G}^N_s$ не может быть больше или равен $t_N + t_{N-1}$.

Кроме того, ромбов вида $\mathbb{B}^N_s$ может быть $\sharp B_N$. Таким образом, номер ромба $\mathbb{B}^N_{i+C_4}$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_4 < \sharp B_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N$.

Исходя из геометрических соображений, можно сказать, что соседом слева базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$ будут ромбы $\mathbb{G}^N_s$ или $\mathbb{R}^N_s$, но не ромб $\mathbb{B}^N_s$ (см. рис. 10). Вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и его соседей, – это изображенные жирным вектора $v_9 = (1, 0, 0)^t$ и $v_{10} = (1, -1, 0)^t$, соответственно.

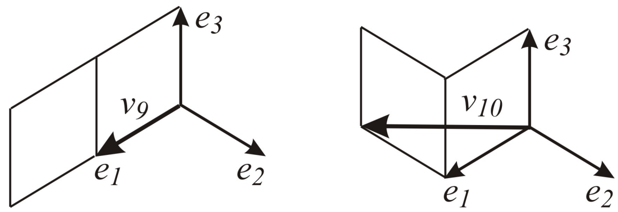


Рис. 10. Возможные соседи слева ромба $\mathbb{G}_i^N$.

В силу лемм 15 и 16 сравнение (8) для векторов v_9 и v_{10} верно, если $C_9 = t_{N+1}$ и $C_{10} = t_{N-2}$.

Так как количество ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ равно $\sharp G_N$, то номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_9}^N$ должен быть таким, что верно неравенство $0 \leqslant i+C_9 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i+t_{N+1} < t_N+t_{N-1}$, или $-t_{N+1} \leqslant i < -t_{N-2}$, что не имеет смысла, в силу того, что номер ромба может быть только неотрицательным.

При данном N имеется всего $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$. Значит ромб $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$ имеет номер, удовлетворяющий условию $0 \leqslant i+C_{10} < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i+t_{N-2} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N+1}-t_{N-2}$, или $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$, так как номер ромба всегда неотрицателен, а $t_{N+1} - t_{N-2} = t_N + t_{N-1}$.

Вновь воспользуемся геометрическими представлениями и получим, что сверху соседом базисного ромба $\mathbb{G}_i^N$ может быть ромб $\mathbb{G}_s^N$ или ромб $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 11). Вектора, связывающие отмеченные точки базисного ромба и отмеченные точки соседей, – это выделенные жирным вектора $v_6 = (0,0,1)^t$ и $v_{11} = (0,-1,1)^t$, соответственно.

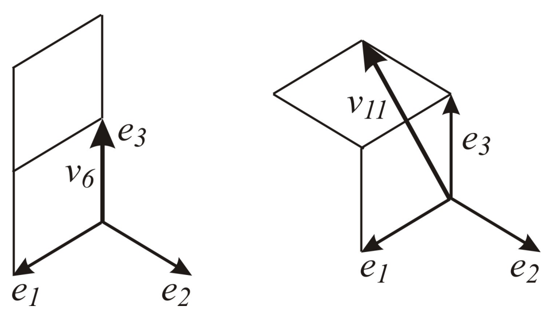


Рис. 11. Возможные соседи сверху ромба $\mathbb{G}_i^N$.

Леммы 12 и 17 позволяют найти решение сравнения (8) для векторов v_6 и v_{11}. Согласно указанным леммам $C_6 = t_N$ и $C_{11} = -t_{N-1}$ удовлетворяют сравнению (8).

Зная, что ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ в разбиении с номером N содержится $\sharp G_N$, приходим к выводу о справедливости для ромба $\mathbb{G}_{i+C_6}^N$ неравенства $0 \leqslant i + C_6 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i + t_N < t_N + t_{N-1}$, или $0 \leqslant i < t_{N-1}$, т.к. номер ромба неотрицателен.

В свою очередь, ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ всего $\sharp B_N$. Поэтому номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_{11} < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N-1} < t_N$, или $t_{N-1} \leqslant i < t_N$ в силу того, что номер ромба $\mathbb{B}_s^N$ не может быть больше или равен t_N.

Итак, соседями базисного ромба $\mathbb{G}_i^N$, в зависимости от номера i будут:

1. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_6}^N$ при $0 \leqslant i < t_{N-1}$;
2. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ при $t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
3. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_3}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ при $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

Рассмотрим базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$.

Принимая во внимание геометрические соображения, замечаем, что соседом ромба этого справа и сверху может быть либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 12). Вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и его соседей, – это изображенные жирными вектора $v_8 = (-1,0,0)^t$ и $v_4 = (0,0,0)^t$, соответственно.

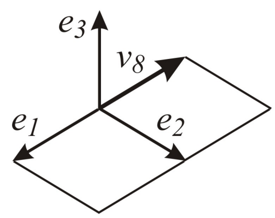


Рис. 12. Возможные соседи справа и сверху ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Как было отмечено ранее, решениями сравнения (8) для векторов v_8 и v_4, согласно леммам 14 и 10, являются $C_8 = -t_{N+1}$ и $C_4 = 0$.

Так как в разбиении с номером N существует $\sharp B_N$ ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$, то ромб $\mathbb{B}_{i+C_8}^N$ будет таким, что $0 \leqslant i + C_8 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N+1} < t_N$, $t_{N+1} \leqslant i < t_{N+1} + t_N$, что противоречит тому, что ромбов вида $\mathbb{B}_i^N$ всего $\sharp B_N = t_N$.

Известно, что имеется $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$. Поэтому номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_4 < \sharp R_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i < t_{N+1}$.

У базисного ромба $\mathbb{B}_i^N$, исходя из геометрических представлений, соседом справа и снизу будет либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 13). Вектора, переводящие отмеченные точки базисного ромба в отмеченные точки соседних, – это выделенные жирным вектора $v_1 = (0, 1, 0)^t$ и $v_{12} = (0, 1, -1)^t$, соответственно.

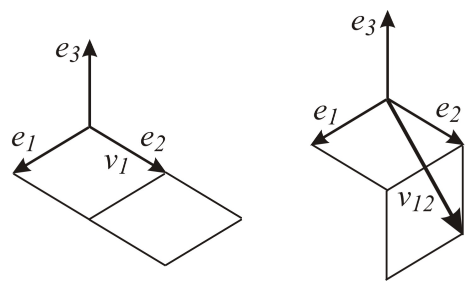


Рис. 13. Возможные соседи справа и снизу ромба $\mathbb{B}_i^N$.

В случае векторов v_1 и v_{12} сравнение (8), в силу лемм 7 и 18, имеет решение $C_1 = t_N + t_{N-1}$ и $C_{12} = t_{N-1}$.

Ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ существует ровно $\sharp B_N$. Значит ромб $\mathbb{B}_{i+C_1}^N$ должен быть таким, что справедливо соотношение $0 \leqslant i + C_1 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i + t_N + t_{N-1} < t_N$, или $-t_N - t_{N-1} \leqslant i < -t_{N-1}$. Данное неравенство не имеет смысла, т.к. номер ромба всегда неотрицателен. Поэтому ромб $\mathbb{B}_s^N$ не может иметь соседом справа и снизу ромб вида $\mathbb{B}_i^N$.

В свою очередь ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ имеется только $\sharp G_N$. Это означает, что номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_{12}}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_{12} < \sharp G_N$, иначе $0 \leqslant i + t_{N-1} < t_N + t_{N-1}$ или $0 \leqslant i < t_N$, т.к. номер ромба не может быть отрицательным.

Воспользуемся геометрическими соображениями и приходим к выводу, что слева и снизу базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$ может иметь соседом ромб $\mathbb{B}_s^N$ или $\mathbb{R}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 14). Отмеченные точки базисного ромба и указанных соседей соединяются изображенные жирным векторами $v_9 = (1, 0, 0)^t$ и $v_{13} = (1, 0, -1)^t$, соответственно.

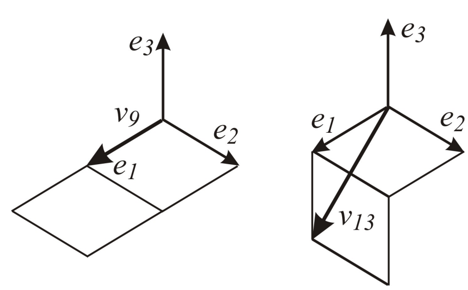


Рис. 14. Возможные соседи слева и снизу ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Если в сравнении (8) в качестве вектора v_j взять вектор v_9 или v_{13}, то согласно леммам 15 и 19, указанное сравнение имеет решение $C_9 = t_{N+1}$ и $C_{13} = t_{N-1} + t_{N-2}$.

Количество ромбов $\mathbb{B}_s^N$ будет равно $\sharp B_N$, значит ромб $\mathbb{B}_{i+C_9}$ должен быть таким, что верно неравенство $0 \leqslant i + C_9 < \sharp B_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i + t_{N+1} < t_N$ или $-t_{N-1} \leqslant i < -t_{N-1} - t_{N-2}$. Это неравенство не может выполняться, т.к. номер ромба больше или равен нулю.

В свою очередь имеется $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$, следовательно, ромб $\mathbb{R}_{i+C_{13}}^N$ таков, что верно неравенство $0 \leqslant i + C_{13} < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i + t_{N-1} + t_{N-2} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_N$, т.к. номер ромба всегда неотрицателен и $t_{N+1} - t_{N-1} - t_{N-2} = t_N$.

В очередной раз применяя геометрические представления, можно сказать, что слева и сверху базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$ может иметь соседом либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 15). Выделенные жирным вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и соседних с ним ромбов, имеют координаты $v_5 = (0, -1, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$, соответственно.

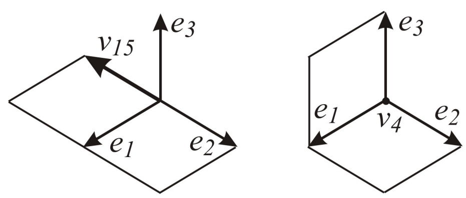


Рис. 15. Возможные соседи слева и сверху ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Согласно ранее изложенному, для векторов v_5 и v_4 сравнение (8), в силу лемм 11 и 10, верно при $C_5 = -t_N - t_{N-1}$ и $C_4 = 0$.

Число ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ равно $\sharp B_N$. В таком случае номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_5}^N$ должен удовлетворять соотношению $0 \leqslant i + C_5 < \sharp B_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i - t_N - t_{N-1} < t_N$, или $t_N + t_{N-1} \leqslant i < 2t_N + t_{N-1}$. Данное неравенство не может выполняться для номера ромба $\mathbb{B}_i^N$, т.к. номер ромба $\mathbb{B}_i^N$ меньше, чем t_N.

Зная, что существует $\sharp G_N$ ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$, делаем вывод о том, что ромб $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$ таков, что $0 \leqslant i + C_4 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

Итак, соседями базисного ромба $\mathbb{B}_i^N$ вне зависимости от номера i будут: $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_{12}}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{13}}^N$.

Таким образом, все возможные случаи взаимного соседства ромбов в разбиении тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\pi(L_N)$ разобраны и теорема 3 полностью доказана.

4. Заключение

В работе получено описание локальной структуры (множества соседей) семейства разбиений двумерного тора, полученного на основе геометрического варианта подстановки Рози. Данный результат можно рассматривать как первый шаг, связанный с обобщением известных теорем о трех длинах и трех прыжках на случай иррационального сдвига многомерного тора. Дальнейшие обобщения проведенного исследования могут проводиться в следующих направлениях.

1) Обобщение на случай произвольных геометрических подстановок, возникающих в теории Арно-Ито.

2) Перенос результата на случай разбиений тора на фракталы Рози.

3) Поиск других разбиений тора, которые могут рассматриватья как аналоги разбиений Фибоначчи (один возможный кандидат предложен в [22]).

4) Поиск разбиений тора, являющихся аналогом общих разбиений T_n.

5) Переход от описания соседних ромбов разбиения к описанию n-корон ромбов (n-короной фигуры разбиения называется множетсво фигур, находящихся от нее на расстоянии не более n в естественной метрике разбиения).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. Vol. 8, Issue 2. P. 181-207.
2. Biringer I., Schmidt B. The three-gap theorem and Riemann geometry // Geometriae Dedicata. 2008. Vol. 136, Issue 1. P. 175–190.
3. Bleher P., Homma Y., Ji L., Roeder R., Shen J. Nearest neighbor distances on a circle: multidimensional case // J. Stat. Phys. 2012. Vol. 146. P. 446–465.
4. Chevallier N. Geometrie des suites de Kronecker // Manuscripta Math. 1997. Vol. 94. P. 231–241.
5. Chevallier N. Cyclic groups and the three distance theorem // Canad. J. Math. 2007. Vol. 59. P. 503–552.
6. Chung F. R. K., Graham R. L. On the set of distances determined by union of arithmetic progression // Ars. Combinatoria. 1976. Vol. 1, №1. P. 57–76.
7. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi$ mod 1 // Coll. Math. Wroclaw. 1951. V. 2. P. 323-324.
8. Fried E., Sos V. T. A generalization of the three-distance theorem for groups // Algebra Universalis. 1992. Vol. 29, №1. P. 136–149.
9. Geelen A. S., Simpson R. J. A two dimensional Steinhaus theorem // Australas. J. Combin. 1993. Vol. 8. P. 136–197.
10. Haynes A., Koivusalo H., Walton J., Sadun L. Gaps problems and frequencies of patches in cut and project sets // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2016. Vol. 161. P. 65–85.
11. Marklof J. Strömbergsson The Three Gap Theorem and the Space of Lattices // he American Mathematical Monthly. 2017. Vol. 124, №8. P. 741-745.
12. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics // Springer. 2001.
13. Liang F. M. A short proof of the 3d distance theorem // Discrete Math. 1979. Vol. 28, №3. P. 325–326.
14. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147-178.
15. Ravenstein T. V. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 45. P. 360-370.
16. Slater N. Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1 // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. Vol. 63. P. 1115–1123.
17. Sós V. T. On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 1958. Vol. 1. P. 127-134.

18. Suranyi J. Uber die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1 // Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math. 1958. Vol. 1. P. 107–111.

19. Świerczkowski S. On successive settings of an arc on the circumference of a circle // Fund. Math. 1958. Vol. 46. P. 187-189.

20. Vâjâitu M., Zaharescu A. Distinct Gaps between Fractional Parts of Sequences // Proceedings of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 130, №12. P. 3447-3452.

21. Vijay S. Eleven Euclidean distances are enough // J. Number Theory. 2008. Vol. 128. P. 1655–1661.

22. Журавлев В. Г. Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций, 30. Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 99–122.

23. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, №2. С. 89–122.

24. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций, 26. Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95–145.

25. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 878-897.

26. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения и их приложения // Владимир. ВФ РУК. 2011.

REFERENCES

1. Arnoux, P. & Ito, S. 2001, "Pisot substitutions and Rauzy fractals", *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, vol. 8, issue 2, pp. 181-207.

2. Biringer, I. & Schmidt, B. 2008, "The three-gap theorem and Riemann geometry", *Geometriae Dedicata*, vol. 136, issue 1, pp. 175–190.

3. Bleher, P., Homma, Y., Ji, L., Roeder, R. & and Shen J. 2012, "Nearest neighbor distances on a circle: multidimensional case", *J. Stat. Phys.*, vol. 146, pp. 446–465.

4. Chevallier, N. 1997, "Geometrie des suites de Kronecker", *Manuscripta Math.*, vol. 94, pp. 231–241.

5. Chevallier, N. 2007, "Cyclic groups and the three distance theorem", *Canad. J. Math.*, vol. 59, pp. 503–552.

6. Chung, F. R. K. & Graham, R. L. 1976, "On the set of distances determined by union of arithmetic progression", *Ars. Combinatoria*, vol. 1, no. 1, pp. 57–76.

7. Floreik, K. 1951, "Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \bmod 1$", *Coll. Math. Wroclaw.*, vol. 2, pp. 323-324.

8. Fried, F. & and Sos, V. T. 1992, "A generalization of the three-distance theorem for groups", *Algebra Universalis*, vol. 29, no. 1, pp. 136–149.

9. Geelen, A. S. & Simpson, R. J. 1993, “A two dimensional Steinhaus theorem“, *Australas. J. Combin.* vol. 8, pp. 136–197.

10. Haynes, A., Koivusalo, H., Walton, J. & Sadun, L. 2016, “Gaps problems and frequencies of patches in cut and project sets“, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, vol. 161, pp. 65–85.

11. Marklof, J. 2017, “Strömbergsson The Three Gap Theorem and the Space of Lattices“, *American Math. Monthly*, vol. 124, no. 8, pp. 741-745.

12. Pytheas Fogg, N. 2001, “Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics“, *Springer.* doi: 10.1007/b13861.

13. Liang, F. M. 1979, “A short proof of the 3d distance theorem“, *Discrete Math.*, vol. 28, no. 3, pp. 325–326.

14. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France.*, vol. 110, pp. 147-178. doi: https://doi.org/10.24033/bsmf.1957.

15. Ravenstein, T. V. 1988, “The three gap theorem (Steinhaus conjecture)“, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 45, pp. 360-370.

16. Slater, N. 1967, “Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1“, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 63, pp. 1115–1123. doi: https://doi.org/10.1017/S0305004100042195.

17. Sós, V. T. 1958, “On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$“, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, vol. 1, pp. 127-134.

18. Suranyi, J. 1958, “Uber die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1“, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math.*, vol. 1, pp. 107–111.

19. Świerczkowski, S. 1958, “On successive settings of an arc on the circumference of a circle“, *Fund. Math.*, vol. 46, pp. 187-189.

20. Vâjâitu, M. & Zaharescu, A. 2002, “Distinct Gaps between Fractional Parts of Sequences“, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 130, no. 12, pp. 3447-3452.

21. Vijay, S. 2008, “Eleven Euclidean distances are enough“, *J. Number Theory*, vol. 128, pp. 1655–1661.

22. Zhuravlev, V. G. 2015, “Dividing Toric Tilings and Bounded Remainder Sets“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funkcij, 30. Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, vol. 440, pp. 99-122.

23. Zhuravlev, V. G. 2007, “One-dimensional Fibonacci tilings“, *Izv. RAN. Ser. matem.*, vol. 71, no. 2, pp. 89–122.

24. Zhuravlev, V. G. 2011, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funkcij, 26. Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, vol. 392, pp. 95–145.

25. Kuznetsova D. V. & Shutov A. V. 2015, “Exchanged toric tilings, Rauzy substitution, and bounded remainder sets“, *Matematicheskiye zametki*, vol. 98, no. 6, pp. 878-897.

26. Krasilshchikov, V. V. & Shutov, A.V. 2011, “One-dimensional quasi-periodic tilings and their applications“, *VF RUK, Vladimir.*

Получено 4.06.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-155-167

О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Основная трудность, с которой приходится иметь дело при исследовании арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, состоит в том, что общий наименьший знаменатель нескольких первых коэффициентов соответствующих степенных рядов растет слишком быстро с увеличением числа этих коэффициентов. Последнее обстоятельство делает невозможным использование известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля для проведения упомянутого исследования. Применение названного метода предполагает использование принципа Дирихле для построения функциональной линейной приближающей формы. Это построение является первым этапом длинного и сложного рассуждения, приводящего в конечном итоге к получению требуемого арифметического результата. Попытка применить принцип Дирихле в случае функций с иррациональными параметрами наталкивается на непреодолимые трудности из-за упомянутого выше слишком быстрого роста общего наименьшего знаменателя коэффициентов соответствующих рядов Тейлора. Вследствие этого в случае функций с иррациональными параметрами обычно применяют эффективное построение линейной приближающей формы (или совокупности таких форм при использовании совместных приближений). Коэффициенты построенной формы являются многочленами с алгебраическими коэффициентами. Для общего наименьшего знаменателя этих коэффициентов требуется затем получить приемлемую оценку сверху его абсолютной величины. Известные оценки такого рода нуждаются в некоторых случаях в уточнении. Это уточнение осуществляется с применением теории делимости в квадратичных полях; дополнительно используются сведения о распределении простых чисел в арифметической прогрессии.

В настоящей работе рассматривается один из вариантов эффективного построения совместных приближений для гипергеометрической функции общего вида и ее производных. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов, входящих в эти приближения, оценивается затем с помощью уточненного варианта соответствующей леммы. Все это позволяет получить новый результат об арифметической природе значений указанной функции в малой по абсолютной величине ненулевой точке мнимого квадратичного поля.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4, с. 155–167.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-155-167

On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The main difficulty one has to deal with while investigating arithmetic nature of the values of the generalized hypergeometric functions with irrational parameters consists in the fact that the least common denominator of several first coefficients of the corresponding power series increases too fast with the growth of their number. The last circumstance makes it impossible to apply known in the theory of transcendental numbers Siegel's method for carrying out the above mentioned investigation. The application of this method implies usage of pigeon-hole principle for the construction of a functional linear approximating form. This construction is the first step in a long and complicated reasoning that leads ultimately to the required arithmetic result. The attempts to apply pigeon-hole principle in case of functions with irrational parameters encounters insurmountable obstacles because of the aforementioned fast growth of the least common denominator of the coefficients of the corresponding Taylor series. Owing to this difficulty one usually applies effective construction of the linear approximating form (or a system of such forms in case of simultaneous approximations) for the functions with irrational parameters. The effectively constructed form contains polynomials with algebraic coefficients and it is necessary for further reasoning to obtain a satisfactory upper estimate of the modulus of the least common denominator of these coefficients. The known estimates of this type should be in some cases improved. This improvement is carried out by means of the theory of divisibility in quadratic fields. Some facts concerning the distribution of the prime numbers in arithmetic progression are also made use of.

In the present paper we consider one of the versions of effective construction of the simultaneous approximations for the hypergeometric function of the general type and its derivatives. The least common denominator of the coefficients of the polynomials included in these approximations is estimated subsequently by means of the improved variant of the corresponding lemma. All this makes it possible to obtain a new result concerning the arithmetic values of the aforesaid function at a nonzero point of small modulus from some imaginary quadratic field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2019, "On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no.4, pp. 155–167.

УДК 511.361

П.Л. Иванков (Москва)

On linear independence of functions differentiated with respect to parameter

P.L.Ivankov (Moscow)

Аннотация

Для исследования арифметической природы значений гипергеометрических функций и их производных (включая производные по параметру) часто используют метод Зигеля. Такое исследование, как правило, начинается с построения функциональной линейной приближающей формы. Если параметры гипергеометрической функции рациональны, то для построения этой формы можно применить принцип Дирихле. При этом важно, чтобы построенная форма не равнялась нулю тождественно, поэтому следует предварительно доказать линейную независимость над полем рациональных дробей рассматриваемых функций. Фактически приходится доказывать даже алгебраическую независимость, т.к. обычно приближающая форма строится для совокупности произведений степеней этих функций.

Применяя эффективный метод, функциональную линейную приближающую форму задают явными формулами, из которых во многих случаях непосредственно видно, что эта форма отлична от тождественного нуля. Однако в дальнейших рассуждениях часто все же приходится использовать линейную независимость рассматриваемых функций. Важным обстоятельством является и то, что эффективные конструкции приближающих форм для произведений степеней гипергеометрических функций, как правило, неизвестны, и поэтому здесь приобретают некоторый интерес результаты именно о линейной независимости гипергеометрических функций над полем рациональных дробей.

В данной статье с помощью метода, специально разработанного для этой цели, устанавливается линейная независимость некоторых гипергеометрических функций и их производных (в том числе и по параметру) над полем рациональных дробей. В дальнейшем этот результат можно использовать для изучения арифметической природы значений указанных функций. При этом предполагается использование именно эффективного метода, т.к. он позволит уточнить количественные результаты в случае рациональных параметров и установить линейную независимость значений соответствующих функций в случае, когда среди параметров имеются иррациональные числа.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, линейная независимость, дифференцирование по параметру.

Abstract

For the investigation of the arithmetic nature of the values of hypergeometric functions and their derivatives (including derivatives with respect to parameter) one often uses Siegel's method. Such investigation begins as a rule with the construction of functional linear approximating form. If parameters of the hypergeometric function are rational it is possible to use pigeonhole principle for the construction of this form. It is of importance for this form not to be equal to zero identically and consequently one should prove beforehand linear independence over the field of rational fractions of the functions under consideration. Actually one has to prove even the algebraic independence for the approximating form is constructed for the totality of the products of the powers of these functions.

In case of application of the effective method the functional linear approximating form is defined by explicit formulae from which in many situations it is obvious immediately that this form is not equal to zero identically. But in further reasonings one has often to make use of linear independence of the functions under consideration. Of importance is also the fact that effective constructions of approximating forms for the products of the powers of hypergeometric functions are as a rule not known and as a consequence the results precisely concerning the linear independence of hypergeometric functions over the field of rational fractions acquire some interest here.

In this paper, by means of the method especially developed for this purpose, a linear independence of some hypergeometric functions and their derivatives (including derivatives with respect to parameter) over the field of rational fractions has been established. Subsequently this result can be employed for the investigation of the arithmetic properties of the values of such functions. For that purpose the effective method is supposed to be applied for by means of this method the quantitative results in case of rational parameters can be made more accurate and linear independence of the values of the functions with irrational parameters can be established.

Keywords: hypergeometric functions, linear independence, differentiation with respect to parameter.

Введение

При изучении арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций (а также и их производных, в том числе и по параметру) обычно используют метод Зигеля или метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы (в дальнейшем – эффективный метод). В обоих случаях обычно требуется предварительно установить линейную (или алгебраическую) независимость соответствующих функций.

В случае применения метода Зигеля обычно предполагают, что параметры исследуемых функций рациональны, а значения вычисляются в ненулевой алгебраической точке. При этом обычно изучают вопрос об алгебраической независимости таких значений. Соответственно важным предварительным результатом здесь является доказательство алгебраической независимости рассматриваемых функций над полем рациональных дробей. Примеры исследований такого рода см. в [1, глава 7]; в замечаниях к указанной главе на с. 248-249 приведен краткий список работ по этой тематике. Отметим здесь работы [2]–[15]. Доказательство линейной независимости над полем рациональных дробей гипергеометрических функций общего вида (при отсутствии дифференцирований по параметрам) имеется в работах [16] и [17]. Используя доказанные в этих работах теоремы, можно установить условия линейной независимости функций (1). Примеры доказательства линейной независимости продифференцированных по параметру гипергеометрических функций имеются в работах [18] и [19]; результаты, полученные в последней из этих работ, использовались затем в [20] и [21].

1. Результат

Рассмотрим при $k = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, m+2$ гипергеометрические функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}. \tag{1}$$

В этом равенстве $a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r)$, $b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$, $0 \leqslant r \leqslant m+1$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $A, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — некоторые комплексные числа, причем

$$a(x)b(x)(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \neq 0 \tag{2}$$

при $x = 1, 2, \ldots$;

$$\chi_{kj}(\nu) = \prod_{u=1}^{j-1} (\nu + \beta_u),\ k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m+1,\ \chi_{k,m+2}(\nu) = \chi_{k,m+1}(\nu)(\nu + \lambda_k).$$

Рассмотрим также производные функций (1) по параметру λ_k, т.е. функции

$$F_{kl_kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\chi_{kj}(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\,, \tag{3}$$

$k=1,\ldots,t,\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\ j=1,\ldots,m+2\,;\ \tau_1,\ldots,\tau_t$ – произвольные натуральные числа.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2), и пусть*

$$\alpha_i-\beta_j,\ \alpha_i-\lambda_k,\ \alpha_i+\lambda_k-A,\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,t,$$

не являются целыми числами; предположим также, что целыми числами не являются

$$\lambda_k-\lambda_{k'},\ \lambda_k+\lambda_{k'}-A,\ k\neq k',\ 2\lambda_k-A,\ k,k'=1,\ldots,t.$$

Тогда функции (3) линейно независимы вместе с функцией, тождественно равной единице, над полем $\mathbb{C}(z)$.

2. Вычисление абстрактных определителей

Рассмотрим определитель

$$\Delta_1=\left|\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+t,\\ k=1,\ldots,t}}\,, \tag{4}$$

где $N_1\geqslant -1$ — произвольное целое число, λ_k и A — комплексные числа, для которых имеют смысл входящие в состав определителя дроби; строки определителя Δ_1 расположены в порядке возрастания ν, столбцы — в порядке возрастания k.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\Delta_1=(-1)^{t(t-1)/2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{x=1}^{N_1+t}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\prod_{k_1>k_2}(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-A), \tag{5}$$

где последнее произведение распространено на все значения $k_1,k_2\in\{1,\ldots,t\}$, удовлетворяющие условию $k_1>k_2$.

Доказательство. Умножим k-й столбец определителя Δ при $k=1,\ldots,t$ на

$$\prod_{x=1}^{N_1+t}(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k).$$

В результате получим определитель

$$\Delta_2=\Delta_2(t)=\left|\prod_{x=\nu+1}^{N_1+t}(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+t,\\ k=1,\ldots,t}}.$$

Поэтому для доказательства (5) достаточно установить справедливость равенства

$$\Delta_2(t)=(-1)^{t(t-1)/2}\prod_{k_1>k_2}(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-A)\,. \tag{6}$$

Это последнее равенство можно доказать, рассуждая по индукции. При $t = 1$ доказывать нечего. Пусть при некотором t равенство (6) справедливо; рассмотрим определитель $\Delta_2(t+1)$. Такой определитель является многочленом степени $2t$ от переменной λ_{t+1}, причем корни этого многочлена суть $\lambda_k, A-\lambda_k,\ k = 1,\dots,t$, а старший коэффициент равен $(-1)^t\Delta_2(t)$. Отсюда и из предположения индукции следует равенство, получающееся из (6) после замены t на $t+1$. Таким образом, справедливость равенства (6) установлена индукцией по t, и лемма доказана.

Рассмотрим определитель

$$\Delta_3 = \left| \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_{kl_k})(x+A-\lambda_{kl_k})} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T\\ k=1,\dots,t,\ l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,}},$$

где $T = \tau_1+\dots+\tau_t$; строки определителя расположены в порядке возрастания ν, а положение столбца определяется парой индексов (k, l_k), причем эти пары упорядочены лексикографически; по поводу такой упорядоченности см., например, [22, с. 261-262]. Из леммы 1 вытекает равенство

$$\Delta_3 = (-1)^{T(T-1)/2} \prod_{k=1}^{t} \prod_{l_k=0}^{\tau_k-1} \prod_{x=1}^{N_1+T} \frac{1}{(x+\lambda_{kl_k})(x+A-\lambda_{kl_k})} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{t} \prod_{l_k=1}^{\tau_k-1} \prod_{l'_k=0}^{l_k-1} (\lambda_{kl_k}-\lambda_{kl'_k}) \prod_{k>k'} (\lambda_{kl_k}-\lambda_{k'l_{k'}}) \prod_{(kl_k)\succ(k'l_{k'})} (\lambda_{kl_k}+\lambda_{k'l_{k'}}-A), \quad (7)$$

где два последних произведения распространены на все допустимые пары индексов, удовлетворяющие указанным соотношениям; символ $\succ$ означает лексикографическую упорядоченность.

Пусть D_{kl_k} — оператор вычисления частной производной $\partial^{l_k}/\partial\lambda_{kl_k}^{l_k}$ с последующей заменой λ_{kl_k} на λ_k. Применим к определителю Δ_3 произведение таких операторов вида

$$\prod_{k=1}^{t} \prod_{l_k=0}^{\tau_k-1} D_{kl_k}. \quad (8)$$

В результате получим определитель

$$\Delta_4 = \left| \frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T,\\ k=1,\dots,t,\ l_k=0,1,\dots,\tau_k-1}},$$

столбцы и строки которого расположены, как указано выше.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\Delta_4 = (-1)^{T(T-1)/2} \prod_{k=1}^{t} \prod_{x=1}^{N_1+T} \frac{1}{((x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k))^{\tau_k-1}} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{t} 1!2!\dots(\tau_k-1)! \prod_{k>k'} (\lambda_k-\lambda_{k'}) \prod_{k,k'} (\lambda_k+\lambda_{k'}-A), \quad (9)$$

где произведения $\prod_{k>k'}(\lambda_k-\lambda_{k'})\prod_{k,k'}(\lambda_k+\lambda_{k'}-A)$ получаются из последних двух произведений, входящих в (7), заменой в каждой скобке λ_{kl_k} и $\lambda_{k'l_{k'}}$ соответственно на λ_k и $\lambda_{k'}$.

Доказательство. Лемму можно доказать по индукции. Но можно также воспользоваться <готовым> рассуждением, с помощью которого в аналогичной ситуации доказывается лемма 15.7, [23, с. 125]. Приводим упомянутое рассуждение дословно (изменив лишь обозначения). Будем действовать оператором (8) на правую часть (7). Тогда перед дифференцированием по λ_{kl_k} преобразованная правая часть (7) будет содержать множитель $(\lambda_{kl_k}-\lambda_k)^{l_k}$, поэтому после дифференцирования и подстановки $\lambda_{kl_k}=\lambda_k$ отличным от нуля будет лишь слагаемое, содержащее l_k-ю производную этой скобки. Лемма доказана.

Рассмотрим определитель

$$\Delta_5=\left|\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k-\sigma)(x+A-N_2-\lambda_k+\sigma)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\dots,t,\, l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\, \sigma=0,1,\dots,N_2}},$$

где $N_2=(n+1)(m+2)-1$.

Лемма 3. *Определитель Δ_5 отличен от нуля при выполнении условий теоремы.*

Доказательство. Легко видеть, что определитель Δ_5 является частным случаем определителя Δ_4, и требуемое утверждение непосредственно вытекает из (9). Лемма доказана.

Преобразуем определитель Δ_5. Сначала напишем очевидное равенство

$$\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k-\sigma)(x+A-N_2-\lambda_k+\sigma)}=V_{k\sigma}(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)},$$

где

$$V_{k\sigma}(\nu)=\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{\nu+\lambda_k-x}{\lambda_k-x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{\nu+A-\lambda_k-x}{A-\lambda_k-x}. \qquad (10)$$

Из этого равенства следует, что

$$\Delta_5=\left|\sum_{\mu_k=0}^{l_k}\binom{l_k}{\mu_k}\frac{\partial^{l_k-\mu_k}V_{k\sigma}(\nu)}{\partial\lambda_k^{l_k-\mu_k}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\lambda_k^{\mu_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\dots,t,\, l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\dots,N_2}}.$$

При фиксированном k обозначим

$$\Delta_6=|V_{k\sigma}(z_\nu)|_{\nu,\sigma=0,1,\dots,N_2}$$

— определитель, строки которого расположены в порядке возрастания ν, а столбцы — в порядке возрастания σ; $z_0,z_1,\dots,z_{N_2}$ – произвольные числа.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\Delta_6=\prod_{\sigma=0}^{N_2}\Big(\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{1}{\lambda_k-x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{1}{A-\lambda_k-x}\Big)\times$$

$$\times\prod_{\mu_1=1}^{N_2}\prod_{\mu_2=0}^{N_2-\mu_1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu_2+\mu_1)\prod_{\mu_1>\mu_2}(z_{\mu_1}-z_{\mu_2}). \qquad (11)$$

Доказательство. Очевидно,

$$\Delta_6 = \prod_{\sigma=0}^{N_2}\Big(\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{1}{\lambda_k - x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{1}{A-\lambda_k-x}\Big)\Delta_7\,, \tag{12}$$

где

$$\Delta_7 = \left|\tilde{V}_{k\sigma}(z_\nu)\right|_{\nu,\sigma=0,1,\ldots,N_2}\,,$$

$$\tilde{V}_{k\sigma}(\nu) = \prod_{x=0}^{\sigma-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}(\nu+A-\lambda_k-x)$$

Преобразуем определитель Δ_7 следующим образом. При $\sigma = 0,1,\ldots,N_2-1$ из столбца с номером σ вычтем столбец с номером $\sigma+1$. После этого за знак определителя вынесем множитель $\prod_{\mu=0}^{N_2-1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu+1)$. Повторим эту процедуру для $\sigma = 0,1,\ldots,N_2-2$ и т.д. На последнем шаге из первого столбца вычтем второй и вынесем за знак определителя скобку $(A-2\lambda_k)$. В результате получим равенство

$$\Delta_7 = \prod_{\mu_1=1}^{N_2}\prod_{\mu_2=0}^{N_2-\mu_1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu_2+\mu_1)\left|\prod_{x=0}^{\sigma-1}(z_\nu+\lambda_k-x)\right|_{\nu,\sigma=0,1,\ldots,N_2}.$$

Нетрудно проверить, что последний определитель равен определителю Вандермонда от переменных $z_0, z_1, \ldots, z_{N_2}$ (см., например, задачу 334, [24, с. 35]). Отсюда и из (12) следует (11). Лемма доказана.

Продолжим теперь преобразование определителя Δ_5. Зафиксируем k; из леммы 4 следует, что многочлены $V_{k\sigma}(\nu)$, $\sigma = 0,1,\ldots,N_2$ образуют базис в пространстве многочленов от ν, степени которых не превосходят N_2. Пользуясь этим, вычтем из каждого столбца, отвечающего данному k, при $l_k \geqslant 1$ определителя Δ_5 такую линейную комбинацию столбцов, для которых $l_k = 0$, что во всех указанных выше столбцах не будет слагаемых, содержащих не продифференцированную по параметру λ_k дробь $\prod_{x=1}^{\nu} 1/((x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k))$. Аналогичным приемом можно из столбцов, для которых $\tau_k \geqslant 2$, удалить все слагаемые, содержащие первую производную упомянутой дроби и т. д. В результате получим равенство

$$\Delta_5 = \left|V_{k\sigma}(\nu)\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\,l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Из леммы 3 следует, что $\Delta_5 \neq 0$ при выполнении условий теоремы.

Определитель Δ_5 можно еще упростить. Для этого зафиксируем k, $1 \leqslant k \leqslant t$, и l_k, $0 \leqslant l_k \leqslant \tau_k - 1$, и с выделенной таким образом системой столбцов данного определителя проделаем преобразования, использованные при вычислении определителя Δ_7. В результате за знак определителя будет вынесен ненулевой множитель, а сам определитель (после того, как описанная процедура будет проделана при всех допустимых значениях k и l_k) приобретет вид

$$\Delta_8 = \left|\prod_{x=0}^{\sigma-1}(\nu+\lambda_k-x)\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\,l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Последний определитель легко приводится к виду

$$\Delta_9 = \left|\nu^\sigma\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\,l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Из всего сказанного следует, что последний определитель отличен от нуля.

3. Вычисление конкретных определителей

Пусть $1 \leqslant k \leqslant t$, и пусть

$$W_{kjs}(\nu) = \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x)(\nu + \lambda_k - x)(\nu + A - \lambda_k - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu - n + x),$$
$$j = 1, \ldots, m+2,\ s = 0, 1, \ldots, n. \quad (13)$$

Лемма 5. *При выполнении условий теоремы многочлены (13) линейно независимы.*

Доказательство. В лемме 1, [25, с. 193] доказано равенство

$$\left|\chi_j(z_\nu) \prod_{s=0}^{s-1} b(z_\nu - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(z_\nu - n + x)\right|_{\substack{\nu=1,\ldots,(n+1)m \\ s=0,1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}} =$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m} \prod_{s=0}^{n-1} (\alpha_i - \beta_j - s)^{n-s} \prod_{\nu_1 > \nu_2} (z_{\nu_1} - z_{\nu_2}). \quad (14)$$

Применяя это равенство к определителю

$$\Delta_{10} = |W_{kjs}(z_\nu)|_{\substack{\nu=0,1,\ldots,N_2 \\ j=1,\ldots,m+2,\ s=0,1,\ldots,n}},$$

получим, что этот определитель отличен от нуля (при выполнении условий теоремы), если числа z_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, N_2$ попарно различны. Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $N_1 + 1 \geqslant n$. Рассмотрим определитель

$$\Delta_{11} = \left|\chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{(x + \lambda_k)(x + A - \lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N+T(m+2)(n+1) \\ k=1,\ldots,t,\ j=1,\ldots,m+2, \\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\ s=0,1,\ldots,n}}.$$

Преобразуем этот определитель с помощью таких равенств

$$\chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)} = \chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu - n + x) \frac{\prod_{x=1}^{\nu-n} a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu} b(x)};$$

и

$$\frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{(x + \lambda_k)(x + A - \lambda_k)} = \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \Big(\prod_{x=0}^{s-1} (\nu + \lambda_k - x)(\nu + A - \lambda_k - x) \times$$
$$\times \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x + \lambda_k)(x + A - \lambda_k)} \Big) = \sum_{\mu=0}^{l_k} \binom{l_k}{\mu} \frac{\partial^{\mu}}{\partial \lambda_k^{\mu}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x + \lambda_k)(x + A - \lambda_k)} \times$$
$$\times \frac{\partial^{l_k - \mu}}{\partial \lambda_k^{l_k - \mu}} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu + \lambda_k)(\nu + A - \lambda_k).$$

Если теперь воспользоваться тем, что многочлены (13) линейно независимы, то, рассуждая как при преобразовании определителя Δ_5, получим, что определитель Δ_{11} с точностью до отличного от нуля множителя равен определителю

$$\Delta_{12} = \Bigg|\chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x)(\nu + \lambda_k - x)(\nu + A - \lambda_k - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu - n + x) \times$$
$$\times \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu + \lambda_k)(\nu + A - \lambda_k)}\Bigg|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N+T(m+2)(n+1), \\ k=1,\ldots,t,\ j=1,\ldots,m+2, \\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\ s=0,1,\ldots,n}}.$$

Лемма 6. *При выполнении условий теоремы определитель Δ_{11} отличен от нуля.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что отличен от нуля определитель $Delta_{12}$. Зафиксируем k и l_k в пределах допустимых значений этих индексов, применим к выделенной таким образом системе столбцов рассуждения из [25], доказывающие равенство (14), и вынесем за знак определителя соответствующий множитель. Проделаем это при $k = 1, \ldots, t$ и $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$. В результате получим, что с точностью до отличного от нуля множителя определитель Δ_{11} равен определителю

$$\Delta_{12} = \Bigg| \chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x)(\nu + \lambda_k - x)(\nu + A - \lambda_k - x) \times \\ \times \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu + \lambda_k)(\nu + A - \lambda_k)} \Bigg|_{\substack{\nu = N_1+1, \ldots, N+T(m+2)(n+1), \\ k=1,\ldots,t,\, j=1,\ldots,m+2, \\ l_k = 0,1,\ldots,\tau_k - 1,\, s=0,1,\ldots,n}}.$$

Легко видеть, что последний определитель равен отличному от нуля определителю Δ_9. Отсюда с учетом сказанного следует утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Пусть равенство

$$P_0(z) + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{j=1}^{m+2} P_{kl_kj}(z) F_{kl_kj}(z) = 0$$

выполняется тождественно по z при некоторых многочленах $P_0(z)$, $P_{kl_kj}(z)$ с комплексными коэффициентами, причем не все многочлены $P_{k\tau_kj}(z)$ равны нулю. Тогда при всех достаточно больших значениях N_1 равен нулю определитель

$$\Delta = \Bigg| \chi_{kj}(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu - s} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu - s} \frac{1}{(x + \lambda_k)(x + A - \lambda_k)} \Bigg|_{\substack{\nu = N_1, N_1+1 \ldots, N_1+N_2 \\ k=1,\ldots,t,\, l_k=0,1,\ldots,\tau_k - 1, \\ j=1,\ldots,m+2,\, s=0,1,\ldots,n}}. \tag{15}$$

Номер строки определителя Δ задается значением ν; столбцы определяются значениями индексов k, l_k, j, s, которые упорядочиваются лексикографически. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что при выполнении ее условий определитель Δ отличен от нуля при всех достаточно больших значениях N_1. Это следует из леммы 6. Теорема доказана.

Заключение

Доказанную теорему можно использовать для получения различных сведений об арифметических свойствах значений функций (3) в ненулевой алгебраической точке. Если параметры этих функций рациональны, то соответствующий результат (о линейной независимости значений функций (3)) можно получить методом Зигеля; применение эффективного метода позволит уточнить соответствующую количественную оценку, а также при некоторых дополнительных ограничениях даст возможность рассмотреть случай иррациональных параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

2. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых Е-функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1967. № 2. С. 55-62.

3. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений Е-функций одного класса // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 1. С. 16-35.

4. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697-700.

5. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42-45.

6. Шидловский А.Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18, № 4. С. 55-64.

7. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267-270.

8. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1978, № 5. С. 3-8.

9. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453-471.

10. Черепнев М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Математические заматки. 1995. **57**:6. С. 896-912.

11. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (четный случай) // Математические заматки. 1998. **64**:2. С. 273-284.

12. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заматки. 2013. **94**:1. С. 94-108.

13. Горелов В.А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Математические заматки. 2016. **99**:5. С. 658-672.

14. Mahler K. Applications of a theorem by A.B.Shidlovski // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 305. P. 149-173.

15. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A. math. 1975. V. 1. P. 93–109.

16. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207–215.

17. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2011. V. 1, iss. 2. P. 27–32.

18. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций над полем рациональных дробей // Математика и математическое моделирование. 2015, № 4. С. 1–12. DOI: 10.7463 / mathm. 0145.0817328.

19. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

20. Иванков П.Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. 2012, № 5. С. 141–154. DOI: 10.7463 / 0512.0398478.

21. Иванков П.Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. 2012, № 12. С. 135–142. DOI: 10.7463 / 1212.0500464.

22. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994. 320 с.

23. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

24. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.

25. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, вып. 1. С. 191–206.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A.B. 1987, "Transcendentnye chisla"[Transcendental numbers] *"Nauka"*, 448 pp. (Russian)

2. Belogrivov, I.I. 1967, "Transcendentality and algebraic independence of values of certain E-functions *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Math. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 55-62. (Russian)

3. Belogrivov, I.I. 1973, "The transcendence and algebraic independence of the values of a certain class of E-functions *Sibirsk. Math. Zh.*, vol. 14, no. 1, pp. 16-35. (Russian)

4. Shidlovskii, A.B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4. pp. 697-700. (Russian)

5. Shidlovskii, A.B. 1966, "Transcendence and algebraic independence of values of E-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 169, № 1. pp. 42-45. (Russian)

6. Shidlovskii, A.B. 1967, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55-64. (Russian)

7. Belogrivov I.I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2. pp. 267-270. (Russian)

8. Chirsky V.G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. 1. Mat. Meh. no. 5, pp. 3-8.

9. Salikhov V.Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E-functions *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453-471.

10. Cherepnev M.A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E-functions", *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896-912.

11. Salikhov V.Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E-functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273-284.

12. Gorelov V.A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94-108.

13. Gorelov V.A., 2016, "On algebraic properties of the solutions of nonhomogeneous hypergeometric equations" , *Mat. Zametki*, vol. 99, no. 5, pp. 658-672.

14. Mahler K., 1968, "Applications of a theorem by A. B. Shidlovski" *Proc. Roy. Soc.* Ser. A., V. 305, P. 149-173.

15. Väänänen K., 1975, "On the algebraic independence of the values of some E-functions *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, ser. A. math. V. 1. P. 93–109.

16. Galochkin A.I., 1988, "On effective bounds for certain linear forms" , *New Advances in Transcendence theory*, Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. P. 207–215.

17. Galochkin A.I., 2011, "Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions"*Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory.* V. 1, iss. 2. P. 27–32.

18. Ivankov, P.L. 2015, "On linear independence of certain functions over the field

    of rational fractions *Mathematics and mathematical Modelling*, no. 4, pp. 1-12. DOI: 10.7463 / mathm. 0145.0817328.

19. Ivankov, P.L. 2010, "On linear independence of certain functions", *Chebyshev. Sbornik*, v. 11, issue 1, pp. 145-151. (Russian)

20. Ivankov, P.L. 2012, "On differentiation with respect to parameter of certain functions *Science and Education of the Bauman MSTU*, no. 5, pp. 141-154. DOI: 10.7463/0512.0398478.

21. Ivankov, P.L. 2012, "On application of simultaneous approximations for the investigation of arithmetic nature of the values of hypergeometric functions *Science and Education of the Bauman MSTU*, no. 12, pp. 135-142.

    DOI: 10.7463/1212.0500464. (Russian)

22. Kostrikin, A.I., 1994, *Vvedenije v algebru* [Introduction to Algebra], Fizmatlit Publishing Company. (Russian)

23. Fel'dman N.I., 1982, *Sedmaya problema Hilberta* [Hilbert's seventh problem], Moscow, MSU Publ. (Russian).

24. Proskurjakov I.V., 1984, *Sbornik zadach po lineynoy algebre* [A collection of problems in linear algebra], Moscow, "Nauka"(Russian).

25. Ivankov, P.L. 1995, "On linear independence of the values of some functions"*Fundamentalnaya i Pricladnaya Matematica*, v. 1, issue 1, pp. 191-206. (Russian)

Получено 4.07.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-168-185

О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве

О. Х. Каримов (г. Душанбе)

О. Х. Каримов —кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий отделом теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан, Таджикистан.
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Abstract

Работа посвящена установлению коэрцитивных оценок и доказательств теорем разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. На основе полученных коэрцитивных оценок исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Проблемой разделимости дифференциальных операторов впервые занимались математики В.Н.Эвеpитт и М.Гирц. Они подробно изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Существуют лишь отдельные работы, в которых рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы, представляющие собой слабые нелинейные возмущения линейных операторов. Случай, когда исследуемый оператор строго нелинейный, т.е. его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные здесь результаты также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. Рассматриваемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, т.е. является строго нелинейным. На основе полученных коэрцитивных оценок и разделимости исследуется разрешимость нелинейного дифференциального уравнения в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, коэрцитивные оценки, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство, весовое пространство.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
О. Х. Каримов О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 168–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-168-185

On separability and coercive solvability of second-order nonlinear differential equations in the weight space

O. Kh. Karimov (Dushanbe)

O. Kh. Karimov —candidate of physical and mathematical Sciences, head of the Department of theory of functions and functional analysis, Institute of mathematics named after A. Djuraev, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Tajikistan.
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Abstract

The work focuses on obtaining coercive estimates and separability theorems of second-order nonlinear differential operators. Based on the obtained coercive estimates, the coercive solvability of the second-order nonlinear differential equations in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated. For the first time the problem of the differential operators separability was dealt with by the English mathematicians V.N.Everitt and M.Girz. They studied in details the separability of the Sturm-Liouville operator and its degrees. Further development of this theory belongs to K.H.Boimatov, M.Otelbayev and their students. The main part of the published works on this theory applies to linear operators. There are only individual works that consider nonlinear differential operators, which are a weak nonlinear perturbations of linear operators. The case where the operator under study is strictly nonlinear, that is, it cannot be represented as a weak perturbation of the linear operator, is considered only in some individual separate works. The results obtained in this work also refer to this insufficiently studied case. The paper examined the coercive properties of a second-order nonlinear differential operator in the Hilbert space $L_{2,\rho}(R^n)$

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

and on the basis of coercive estimates, its separability in this space has been proved. The operator under study is not a weak perturbation of the linear operator, i.e. is strictly nonlinear. Based on obtained coercive estimates and separability, solvability of nonlinear differential equation in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated.

Keywords: Differential operator, coercive estimates, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space,weight space.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
O. Kh. Karimov, 2019, "On separability and coercive solvability of second-order nonlinear differential equations in the weight space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 168–185.

1. Введение

В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного дифференциального оператора второго порядка вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$, и получены новые достаточные условия разделимости этого оператора в весовом пространстве. На основе полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается разрешимость дифференциального уравнения в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Основы теории разделимости дифференциальных операторов заложены в серии работ В.Н.Эверитта и М.Гирца, опубликованных в начале семидесятых годов прошлого столетия. В статьях [1]–[4] был получен ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[5]–[13] и имеющуюся там библиографию). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [12]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [13], а в статье [11] исследовалась коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах. В публикациях [?]-[16] и [21] изучаются разделимость и разрешимость бигармонического и трижды гармонического операторов, операторов Шредингера и Лапласа-Бельтрами. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [18]-[20],[22].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в статье К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работах [7], [11] и [17] . Данная работа обобщает результаты работ [7], [11] и [17] на нелинейный случай.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являются слабым возмущением линейного оператора, т.е. строго нелинейны.

2. Формулировка основного результата

Введем пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u;L_{2,\rho}(R^n)\|=\left\{\int_{R^n}\rho(x)|u(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x)\in C^1(R^n)$ - положительная функция.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u,v;L_{2,\rho}(R^n))=\int_{R^n}\rho(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+V(x,u)u(x)=f(x),\quad u(x)\in W_{2,loc}^2(R^n),\tag{1}$$

где $a_{ij}(x)\in C^2(R^n)$, $b_j(x)\in C^1(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Definition 9. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)$, если*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad V(x,u(x))u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z)\in C^1(R^n\times\mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta)=V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta)=V(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz.$$

Пусть для всех $x\in R^n,\ \omega=(\xi+i\eta)\in\mathbb{C}$, $\Omega=(\mu+i\nu)\in\mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\|a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2\le\sigma_1, \tag{2}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2\le\sigma_2, \tag{3}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2\leqslant\sigma_3, \tag{4}$$

$$\left\|\frac{1}{n}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)b_j(x)F^{-1}\right\|^2\leqslant\sigma_4, \tag{5}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right\|\le\delta_1\left|F^{\frac{1}{2}}\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{6}$$

Также предполагается, что для всех $x\in R^n,\ \ \omega=(\xi+i\eta)\in\mathbb{C}$, $\Omega=(\mu+i\nu)\in\mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2\leqslant\sigma_5, \tag{7}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right|\le\delta_2\left\|F\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{8}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(8) и пусть числа σ_j, $(j=\overline{1,5})$, δ_1,δ_2 такие, что*

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4<\frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}<1-\delta_1,\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}<1-\delta_2 \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех функций $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$ справедливы включения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad V(x,u(x))u(x)\in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_{2,\rho}(R^n), i=1,2,...,n; j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|+\|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \le M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \qquad (10)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$. Тогда функции*

$$V^{\frac{1}{2}}u(x), \quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n) \quad (j=1,2,\dots,n)$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x|<1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

после интегрирования по частям, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon u)=\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u + a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим

$$\langle f,\rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + J_1^\varepsilon(u)+J_2^\varepsilon(u)+J_3^\varepsilon(u)+J_4^\varepsilon(u)+\langle V(x,u)u,\rho\varphi_\varepsilon u\rangle, \quad (11)$$

где

$$J_1^\varepsilon(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$J_2^\varepsilon(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$J_3^\varepsilon(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$
$$J_4^\varepsilon(u)=\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle.$$

Преобразуем функционал $J_1^\varepsilon(u)$ к виду

$$ReJ_1^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \\ - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \rho\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}(x)u\rangle). \tag{12}$$

Так как функция φ_ε - вещественнозначная и

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}\right| \le M_0\varepsilon^2, \, \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|, \; M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_1^\varepsilon(u) = 0.$$

Далее поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $J_m^\varepsilon(u), \; m = 2, 3, 4$, применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имея в виду неравенства (2), (3) и (5), из равенства (11) получим следующие оценки:

$$|J_2^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{13}$$

$$|J_3^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{14}$$

$$|J_4^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2. \tag{15}$$

Имея ввиду эти оценки, из равенства (11), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\mathrm{Re}\,\langle f, u\rangle \ge (1 - \frac{3\alpha_1}{2})\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + (1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_1})\langle V(x,u)u, u\rangle,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2)–(6) и пусть функция $u(x)$ из класса*

$$L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$$

является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Тогда функции

$$F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x), \quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, ..., n,$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle +$$

$$+\langle \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, интегрируя по частям, учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u) = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u +$$
$$+\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)(\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{16}$$
$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + G_5^{(\varepsilon)}(u) + G_6^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle,$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$
$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\xi} + \operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial\eta})u\rangle,$$
$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle,$$
$$G_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$
$$G_6^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{Re}u(x), \operatorname{Im}u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $G_1^\varepsilon(u) \to 0$ при $\varepsilon \to 0:$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReG_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{17}$$

Относительно функционалов $G_m^\varepsilon(u),\ m=\overline{2,6}$ учитывая, что для любого $\alpha>0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2\le\frac{\alpha}{2}|y_1|^2+\frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

получаем следующие оценки:

$$|G_2^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\xi}\mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}u+\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle|\le\delta_1\sum_{i,j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|G_3^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^n\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{-\frac12}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_3}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,$$

$$|G_4^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Fu\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^n\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,$$

$$|G_5^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^n\langle a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F^{\frac12}u\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^n\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{-\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-\frac32}F^{\frac32}u\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,$$

$$|G_6^\varepsilon(u)|=|\langle\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle|=|\sum_{i,j=1}^n\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac1n b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)F^{-1}F^{\frac32}u\rangle|$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_4}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2.$$

Здесь β– произвольное положительное число; σ_1,σ_2, σ_3, σ_4 и δ_1 - константы из условий (2) – (6). На основе полученных оценок из равенства (16) имеем

$$|\langle f,\rho\varphi_\varepsilon Fu)\rangle|\ge\left(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}\right)\cdot\langle Vu,\varphi_\varepsilon Fu\rangle-|G_1^\varepsilon(u)|+$$
$$+(1-2\beta-\delta_1)\cdot\sum_{j=1}^n\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Fu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Fu)| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) + $$
$$+ (1 - 2\beta - \delta_1) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2. \quad (18)$$

Теперь подбираем положительное числа β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta} < 1, \quad 2\beta + \delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_{2,\rho}$, то из неравенства (18) следует, что функции

$$a_{ij}(x)^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, ..., n), \quad F^{\frac{3}{2}} u$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta) u \rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta) u \rangle +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta) u \rangle + \langle V(x,u) u(x), \varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta) u \rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho \varphi_\varepsilon(x) Q(x,u) u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon Q(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle + B_1^{(\varepsilon)}(u) + B_2^{(\varepsilon)}(u) + \quad (19)$$
$$+ B_3^{(\varepsilon)}(u) + B_4^{(\varepsilon)}(u) + B_5^{(\varepsilon)}(u) + B_6^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u) u, \rho \varphi_\varepsilon(x) Q(x,u) u \rangle,$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q(x,u) u \rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon (\operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi} + \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta}) u \rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle,$$
$$B_5^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$
$$B_6^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1,\ \dots,x_n,\ \operatorname{Re}u(x),\operatorname{Im}u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j=\overline{1,6}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m=\overline{2,6}$ получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial\xi}\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}u+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle|\le\delta_2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$\begin{aligned}|B_3^\varepsilon(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{-\frac12}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_5}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B_4^\varepsilon(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Qu\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B_5^\varepsilon(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V^{\frac12}u\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-1}Vu\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,\end{aligned}$$

$$|B_6^\varepsilon(u)|=|\langle\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{-\frac12}Vu\rangle|$$

$$\leq \frac{\beta_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2.$$

Здесь β_1– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_4, σ_5 и δ_2 – константы из условий (2), (3), (5), (7) и (8).

На основе полученных оценок из равенства (19) имеем

$$|\langle f,\varphi_\varepsilon Vu)\rangle| \geq \left(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right)\cdot\langle Vu,\varphi_\varepsilon Vu\rangle - |B_1^\varepsilon(u)|+$$
$$+\cdot(1-2\beta_1-\delta_2)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим неравенство

$$\|f;L_{2,\rho}(R^n)\|\|Vu;L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f,Vu)| \geq \left(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu,Vu)+$$
$$+(1-2\beta_1-\delta_2)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2. \tag{20}$$

Далее подбираем положительное число β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}<1, \quad 2\beta_1+\delta_2<1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (10). Из него следует разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Теорема 1 доказана.

5. Разрешимость

С помощью теоремы 1 докажем следующий результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения 1.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|^2\leq\theta_1, \tag{21}$$

где $0<\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4<\frac{1}{n^2}$. Тогда уравнение (1) для всех $f\in L_{2,\rho}(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu=0 \tag{22}$$

имеет нулевое решение $u(x)=0$ для всех $x\in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle=\langle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u\rangle=$$
$$=-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\rho\phi\psi u]\rangle-\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u\rangle=$$
$$=-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u\rangle. \tag{23}$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$Re\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle=-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle-$$
$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle-$$
$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle-Re\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u\rangle. \tag{24}$$

Имея в виду, что

$$2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{25}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle=$$
$$=Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\rangle\leq$$
$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\|, \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
&Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho\phi\psi u \rangle = \\
&\qquad = Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}) V^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\
&\qquad \leq \sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \|,
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi\psi u) \rangle = \\
&\qquad = Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\
&\qquad \leq \sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \|,
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&Re \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u) \rangle = \\
&\qquad = Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{n} b_j(x) a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\
&\qquad \leq \sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{n} b_j(x) a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}}] V^{\frac{1}{2}} u \|.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$
y_1 y_2 \leq \frac{\alpha}{2} |y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha} |y_2|^2,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&- Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \phi\psi u] \rangle \leq \\
&\leqslant \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \|^2 + \frac{n^2 \theta_1}{2\alpha_2} \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \|^2,
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
-Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u) \rangle &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} [a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i})] V^{\frac{1}{2}} u \| \leq \\
&\leq \frac{n\alpha_2}{2} \sum_{j=1}^{n} \| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \|^2 + \frac{n^2 \sigma_1}{2\alpha_2} \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \|^2,
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle=$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Q^{-\frac{1}{2}}]V^{\frac{1}{2}}u\|$$

$$\leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{32}$$

$$-Re\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u)\rangle=$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)Q^{-\frac{1}{2}}]Q^{\frac{1}{2}}u\|$$

$$\leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u\|^2. \tag{33}$$

Применяя далее для равенства (24) неравенства (30)-(33), получим

$$(1-\frac{n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\right]^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2+$$

$$+2\alpha_2\cdot\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2-\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2. \tag{34}$$

Пусть $\psi(x)\equiv 1$ для любых $x\in R^n$ и $\alpha_2=\frac{1}{2}$, тогда имеем

$$0<(1-(n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u;L_{2,\rho}(R^n\|^2\leq 0. \tag{35}$$

Следовательно, получим

$$0<(1-n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\int_{R^n}|\rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2dx\leq 0. \tag{36}$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv 0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (22).

Пусть далее $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W_{2,loc}^2(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu=f(x) \tag{37}$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$.

Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\dots f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора

$$\acute{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+V,$$

$D(\acute{A} = C_0^\infty(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция $\vartheta_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta_p}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_j} + V\vartheta_p = f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (10), находим, что

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| + \|V(\vartheta_p-\vartheta_k); L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \le M\|f_p-f_k; L_{2,\rho}(R^n)\|. \quad (38)$$

Переходя к пределу $p,\ k \to \infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, V\vartheta_1, V\vartheta_2, \ldots, a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},\ \ a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j}, \ldots,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_1)}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_1)}{\partial x_j}, -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_2)}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_2)}{\partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta \in W_{2,loc}^2(R^n)$, $\vartheta^{(1)} = V\vartheta$,

$$\vartheta^{(2)} = a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j},\ \vartheta^{(3)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (38) к пределу при $p,\ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, т.е. теорема полностью доказана.

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Изучена коэрцитивная разрешимость нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math.Soc. 1971. Vol. 23, P. 301 – 324.

2. Everitt W. N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math.Soc. 1972. Vol. 24, P. 149 – 170.

3. Everitt W. N.,Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math. Z. 1972. Vol. 126, P. 308 – 326.

4. Everitt W. N.,Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect A. 1977. Vol. 79, P. 149 – 170.

5. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009 – 1011.

6. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170, С. 37 – 76.

7. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033 – 1036.

8. Бойматов К. Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т. 326, № 3. С. 393 – 398.

9. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110 – 112.

10. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161, С. 195 – 217.

11. Гадоев М. Г., Конобулов С. И. Коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. VI, № 2(14). С. 27 – 30.

12. Муратбеков М. Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв. вузов. Матем. 1989. № 3. С. 44 – 48.

13. Муратбеков М. Б., Муратбеков М. М., Оспанов К. Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т. 435, № 3. С. 310 – 313.

14. Zayed E. M. E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337, P. 659 – 666.

15. Zayed E. M. E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13 – 23.

16. Zayed E. M. E., Mohamed A. S., Atia H. A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. P. 81 – 92.

17. Zayed E. M. E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamits of continuous, discrede and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis. 2015. № 22. P. 409 – 421.

18. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157). С. 42 – 50.

19. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 8. С. 665 – 673.

20. Каримов О. Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 1. С. 55 – 62.

21. Каримов О. Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2017, Т. 18, № 4. С. 245 – 254.

22. Каримов О. Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61, № 11 – 12. С. 829 – 836.

23. Karimov O. Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces // Journal of mathematical sciences. 2019. Vol. 241, № 5. P. 589 – 595.

REFERENCES

1. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.

2. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions", *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.

3. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, "Some inequallities associated with certain differential operators", *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.

4. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1977, "Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$", *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.

5. Boimatov, K. Kh. 1973, "Theorems of separability", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.

6. Boimatov, K. Kh. 1984, " Separability theorems, weighted spaces and their applications", *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.

7. Boimatov, K. Kh. 1988, "Coercive estimates and separability for second order elliptic differential equations", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 301, № 5, pp. 1033 – 1036.

8. Boimatov, K. Kh., & Saripov, A. 1992, "Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators", *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.

9. Boimatov, K. Kh. 1989, "Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order", *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.

10. Otelbaev, M. 1983, "Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n" *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.

11. Gadoev, M. G., & Konobulov, S. I. 2003, "Coercive solvability of elliptic operators in Banach spaces", *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, vol.VI, № 2(14), pp. 27 – 30.

12. Muratbekov, M. B., & Otelbaev, M. 1989, "Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger", *Proc.of the univer. of math.*, № 3, pp. 44 – 48.

13. Muratbekov, M. B., & Muratbekov, M. M., & Ospanov, K. N. 2010, "Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications", *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.

14. Salem, & Omram and Khaled A.Gepreel, 2012, "Separation of the Helmholtz Partial Differential Eduation in Hilbert Space", *Adv.Studies Theor. Phys.*, vol.6, № 9, pp. 399 – 410.

15. Zayed, E. M. E. 2008, "Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem", *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.

16. Zayed, E. M. E., & Salem, Omram. 2010, "Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert", *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.

17. Zayed, E. M. E., & Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2007, "Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces", *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.

18. Zayed, E. M. E., 2015, "Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem", *Dynamits of continuous, discrete and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis*, № 22, pp. 409 – 421.

19. Karimov, O. Kh. 2014, "On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients" *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 42 – 50, (in Russian).

20. Karimov, O. Kh. 2015, "On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, № 8, pp. 665 – 673, (in Russian).

21. Karimov. O. Kh. 2017, "Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential", *Ufa mathematical journal*, vol. 9, № 1, pp. 55 – 62.

22. Karimov, O. Kh. 2018, "On coercive solvability the schrodinger equation in a Hilbert space", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, № 11 - 12, pp. 829 – 836, (in Russian).

23. Karimov, O. Kh. 2019, "On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces", *Journal of mathematical sciences*, vol. 241, № 5, pp. 589 – 595.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-186-195

Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса

А. И. Козко (г. Москва), Л. М. Лужина (г. Москва), А. Ю. Попов (г. Москва), В. Г. Чирский (г. Москва)

А. И. Козко[1], **Л. М. Лужина**[2], **А. Ю. Попов**[3], **В. Г. Чирский**[4] — [1,2,3] МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС, [4] МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

Abstract

В статье исследуется полная полезность экономической деятельности на конечном отрезке времени в случае, когда функция полезности допускает с высокой точностью приближение линейной функцией. Приводится оценка наилучшего приближения функции полезности на отрезке с заданным отношением концов линейной функцией.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея-Касса-Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности, аналитическая аппроксимация.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 186–195.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-186-195

Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem

A. I. Kozko (Moscow), L. M. Luzhina (Moscow), A. Yu. Popov (Moscow), V. G. Chirskii (Moscow)

A. I. Kozko[1], **L. M. Luzhina**[2], **A. Yu. Popov**[3], **V. G. Chirskii**[4] — [1,2,3] Moscow State University, Ranepa, [4] Moscow State University, MPGU
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article investigates the full utility of economic activity in a finite period of time in the case when the utility function admits with high accuracy the approximation of a linear function. The estimation of the best approximation of the utility function on the segment with a given ratio of the ends of the linear function is given.

Keywords: mathematical model, Ramsey-Kass-Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility, analytical approximation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 186–195.

1. Введение

В данной работе продолжаются исследования, начатые в [1], [2].

Предполагается заданным начальный капитал $K(0) = K_0$. Требуется вложить в производство часть имеющегося капитала K_0 в период времени $0 \leqslant t \leqslant T$, в течение которого планируется экономическая деятельность, уменьшив капитал до заданного значения $K_1 = K_1(T)$ таким образом, чтобы полная полезность экономической деятельности, выражаемая интегралом

$$P = \int_0^T U\left(f(K(t)) - \dot{K}(t)\right) e^{-\rho t} dt \tag{1}$$

была максимальной.

В данном исследовании мы рассмотрим случай, когда функция полезности U на области значений, которые она может принимать в изучаемом процессе, «достаточно хорошо» аппроксимируется линейной функцией. Такая ситуация имеет место для степенных функций $U(x) = x^d$, когда показатель степени d лежит на интервале $(0, 1)$, а отрезок изменения переменной x имеет «не очень большое» отношение правого конца к левому (например, $a \leqslant x \leqslant 2a$ или $a \leqslant x \leqslant 3a$ и т.п.). Вопрос оценки погрешности приближения степенной функции линейной мы обсудим в §3. Сейчас лишь отметим, что относительная погрешность приближения функции $U(x) = x^d$ на отрезке вида $a \leqslant x \leqslant \lambda a, \quad \lambda > 1$, линейной функцией не превышает

$$\frac{(\lambda - 1)^2}{64} \tag{2}$$

независимо от значения $d \in (0, 1)$. В частности, относительная погрешность приближения x^d линейной функцией на отрезке $a \leqslant x \leqslant 2a$ оказывается заведомо меньше 1.6%, какой бы показатель степени $d \in (0, 1)$ мы ни взяли. Такой уровень погрешности обычно не выше даваемой самой моделью при использовании ее для описания реального процесса.

Отметим, что функция полезности чаще используется вида $U(x) = \frac{x^{1-\theta}-1}{1-\theta}$, $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ и при $\theta = 1$ вида $U(x) = \ln x$ см. [4], [11], [12], [13], также применяется $U(x) = \frac{(c/x^{\gamma})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, $\gamma \in [0; 1)$, $\sigma > 1$ см. [14], [15] или $U(x) = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}$, $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ см. [16]. Ограничимся в дальнейшем случаем $U(x) = x^d$.

2. Необходимый уровень начального капитала

Предположим, что с достаточно высокой точностью имеет место приближенное равенство

$$U(x) \approx Ax + B, \tag{3}$$

где A, B – некоторые постоянные. Тогда полная полезность (1) приближенно равна

$$P \approx \int_0^T \left(A\left(f(K(t)) - \dot{K}(t)\right) + B\right) e^{-\rho t} dt. \tag{4}$$

Заметим, что в силу возрастания функции U постоянная A в приближенном равенстве (3) положительна. Поэтому приближенное равенство (4) показывает, что требуется максимизировать интеграл

$$P_1 = \int_0^T \Big(f\left(K(t)\right) - \dot{K}(t) \Big) e^{-\rho t} dt \tag{5}$$

на классе непрерывных невозрастающих функций $K(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, имеющих на интервале $0 < t < T$ кусочно непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям

$$K(0) = K_0, \quad K_1(T) = K_1. \tag{6}$$

Преобразуем интеграл (5), проинтегрировав по частям входящее в него выражение

$$\int_0^T \dot{K}\left(t\right) e^{-\rho t} dt = \int_0^T e^{-\rho t} dK\left(t\right) = K\left(t\right) e^{-\rho t}\Big|_0^T - \int_0^T K\left(t\right) de^{-\rho t} =$$

$$K\left(T\right) e^{-\rho T} - K\left(0\right) + \rho \int_0^T K\left(t\right) e^{-\rho t} dt. \tag{7}$$

Из (5), (7), (6) находим

$$P_1 = K_0 - K_1 e^{-\rho T} + \int_0^T \left[f(K\left(t\right)) - \rho K(t)\right] e^{-\rho t}\, dt.$$

В результате мы пришли к задаче максимизации интеграла

$$P_2 = \int_0^T \left[f(K\left(t\right)) - \rho K(t)\right] e^{-\rho t}\, dt$$

на описанном выше классе функций $K\left(t\right)$.

Положим

$$f_\rho\left(K\right) = f\left(K\right) - \rho K.$$

Согласно введенным обозначениям

$$P_2 = \int_0^T f_\rho\left(K(t)\right) e^{-\rho t}\, dt. \tag{8}$$

Ясно, что чем $f_\rho\left(K(t)\right)$ больше, тем больше интеграл (8). В рассматриваемой задаче функция $K(t)$ является убывающей. Эти соображения подсказывают необходимость исследования монотонности функции $f_\rho\left(K\right)$. В рассматриваемых экономических моделях функцию f, выражающую зависимость производства продукта от капитала, обычно берут дифференцируемой, возрастающей и вогнутой см. [3]–[6]. Потребуем также, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{K \to +\infty} f'\left(K\right) = 0.$$

(Это верно, если, например, $f\left(K\right) = c \cdot K^p, \quad 0 < p < 1$, или $f\left(K\right) = c \cdot \ln(1 + K)$, $c > 0$ см. [4], [13].) Из сказанного видно, что, когда положительное число ρ «невелико» (меньше $f'_{\text{пр}}(0)$), имеет место следующая картина. Уравнение $f'\left(K\right) = \rho$ имеет единственный корень (обозначим его $\varkappa_\rho$), функция f_ρ возрастает на интервале $(0,\ \varkappa_\rho)$, в точке $\varkappa_\rho$ достигает своего максимума и убывает на луче $(\varkappa_\rho, +\infty)$. (Заметим, что производная f' является непрерывной в силу ее монотонности и теоремы Дарбу, согласно которой производная всюду дифференцируемой функции принимает все промежуточные значения; это показывает, что корень уравнения $f'\left(K\right) = \rho$ действительно существует, а единственен он также ввиду монотонности f'.) Следующий рисунок демонстрирует типичное поведение функции f_ρ.

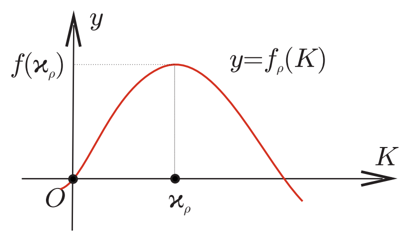


Рис. 1

Возможны два случая: либо $K_0 \leqslant \varkappa_\rho$, либо $K_0 > \varkappa_\rho$.

Рассмотрим первый из этих случаев, когда имеющийся в начальный момент времени в нашем распоряжении капитал относительно невелик – не превосходит «критического» значения $\varkappa_\rho$. Возрастание функции f_ρ на полуинтервале $0 < K \leqslant \varkappa_\rho$ показывает, что, как бы мы ни выбирали убывающую функцию $K(t)$, функция $f_\rho\left(K(t)\right)$ также окажется убывающей и интеграл P_2 будет меньше, чем если бы мы держали $K(t)$ на постоянном уровне. Другими словами, как бы мы ни вкладывали капитал в дело в данной ситуации, эффект не будет больше, чем если не расходовать ресурс K_0 вообще. Этот (на первый взгляд) парадоксальный вывод имеет простое объяснение. Для рассматриваемого вида экономических систем, определяемых (в математическом плане) функцией f и числом ρ, имеется минимальное критическое значение первоначального капитала, не обладая которым предпочтительнее устраниться от вложений в такую экономическую систему. Относительно небольшой (не превосходящий $\varkappa_\rho$) первоначальный капитал не позволит эффективно развить данный бизнес, и с таким уровнем начального экономического ресурса в данном деле разумнее вообще не участвовать.

Рассмотрим второй случай: $K_0 > \varkappa_\rho$. В этом случае вкладывать капитал в данное дело имеет смысл, но не рекомендуется его «спускать» ниже критического уровня $\varkappa_\rho$: то есть разумно сохранить неравенство $\varkappa_\rho < K_1$. Уменьшение $K(t)$ ниже $\varkappa_\rho$ уже не даст в данной системе экономического эффекта. Поэтому, если K_0 не слишком значительно превосходит $\varkappa_\rho$ (например, $K_0 = \frac{3}{2}\varkappa_\rho$ или $K_0 = 2\varkappa_\rho$), то можно порекомендовать использовать более сложную экономическую схему, где часть капитала дается в рост под проценты, а часть вкладывается в производство. Анализ таких схем см. в [3]–[6].

3. Оценка наилучшего приближения степенной функции линейной на отрезке с заданным отношением концов

Сначала сделаем общие замечания. Пусть U – действительнозначная вогнутая либо выпуклая функция на отрезке $[a,b]$. Через $\mathcal{L}_U$ обозначим линейную функцию, совпадающую с U на концах отрезка:

$$\mathcal{L}_U\left(x\right) = U\left(a\right) + \frac{U\left(b\right) - U\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right) \equiv U\left(b\right) + \frac{U\left(b\right) - U\left(a\right)}{b-a}(b-x). \tag{9}$$

Введем разность

$$\triangle\left(x\right) = U\left(x\right) - \mathcal{L}_U\left(x\right). \tag{10}$$

Если функция U вогнута, то $\triangle\left(x\right) > 0$ на (a,b), а если выпукла, то $\triangle\left(x\right) < 0$ на (a,b). Поскольку функция $\triangle\left(x\right)$ обращается в нуль на концах отрезка $[a,b]$ и знакопостоянна внутри отрезка, то наибольшее значение (в случае вогнутости U) и наименьшее значение (в случае выпуклости U) она принимает в некоторой точке интервала (a,b). Обозначим эту точку ξ. Предполагая функцию U дифференцируемой на интервале (a,b), получаем необходимое условие экстремума

$$\triangle'\left(\xi\right) = 0. \tag{11}$$

Из (9), (10) видно, что равенство (11) равносильно следующему:

$$U'(\xi) = \frac{U(b) - U(a)}{b - a}. \tag{12}$$

Тем самым, точка, в которой модуль разности (10) достигает максимума, является точкой, существование которой (для произвольной функции $U \in C[a,b] \cap D(a,b)$) утверждается в теореме Лагранжа о конечных приращениях. В случае строгой вогнутости (или выпуклости) функции U, то есть отсутствия у ее графика линейных участков, такая точка ξ единственна ввиду строгой монотонности производной U'. Поведение функций U и $\mathcal{L}_U$ изображено на следующем рисунке.

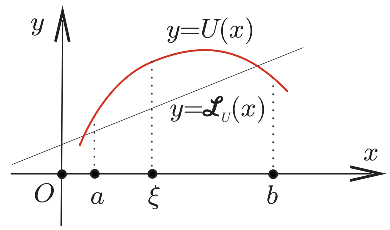


Рис. 2

Обозначим

$$\triangle = \begin{cases} \max_{a\leqslant x\leqslant b} \triangle(x) = \triangle(\xi), \text{если функция } U \text{ вогнута}, \\ \min_{a\leqslant x\leqslant b} \triangle(x) = \triangle(\xi), \text{если функция } U \text{ выпукла}, \end{cases} \tag{13}$$

и положим

$$\widetilde{\mathcal{L}_U}(x) = \mathcal{L}_U(x) + \frac{\triangle}{2}. \tag{14}$$

Поскольку разность

$$\widetilde{\triangle}(x) = U(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}(x) \tag{15}$$

отличается от $\triangle(x)$ на константу, то она также имеет на интервале (a,b) единственный экстремум, причем в той же самой точке ξ. Следовательно,

$$\max_{x\in[a,b]} \left|\widetilde{\triangle}(x)\right| = \max\left(\left|\widetilde{\triangle}(a)\right|, \left|\widetilde{\triangle}(\xi)\right|, \left|\widetilde{\triangle}(b)\right|\right).$$

Но, как видно из соотношений (13)–(15), все три числа $\widetilde{\triangle}(a)$, $\widetilde{\triangle}(\xi)$, $\widetilde{\triangle}(b)$ по абсолютной величине совпадают и их модуль равен $|\triangle|/2$. Заметим, наконец, что поскольку разность (15) трижды принимает одинаковые по модулю значения и при переходе от одного к другому меняет знак, то по теореме Чебышева об альтернансе (см. [8], [10]) $\widetilde{\mathcal{L}_U}$ приближает функцию U на отрезке $[a,b]$ лучше других линейных функций. Общая теория приближений функций многочленами изложена в [8], [9].

Итак, среди всех линейных функций выпуклую или вогнутую функцию U на отрезке $[a,b]$ в равномерной метрике лучше всего приближает $\widetilde{\mathcal{L}_U}$ и абсолютная погрешность приближения равна

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} \left|U(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}(x)\right| = \frac{\triangle}{2}. \tag{16}$$

Оценим сверху величину $|\triangle|$ при дополнительном предположении

$$U \in C^1(a,b), \quad \left|U'(\alpha) - U'(\beta)\right| \leqslant M\,|\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in (a,b), \tag{17}$$

где $M > 0$ – некоторая постоянная. В этом случае говорят, что производная U' удовлетворяет условию Липшица первого порядка с постоянной M. Как известно, данное условие выполняется при наличии на (a, b) второй производной U'' всюду, кроме, может быть, счетного множества точек, и оценки

$$\sup_{x\in(a,b)} \left|U''(x)\right| = M < +\infty. \tag{18}$$

Соответствующий материал изложен, например, в [8].

Поскольку $\triangle(a) = \triangle(b) = 0$, то

$$\triangle(\xi) = \int_a^\xi \triangle'(t)\,dt = -\int_\xi^b \triangle'(t)\,dt. \tag{19}$$

В силу (17) и (11) имеем

$$\left|\triangle'(t)\right| = \left|\triangle'(t) - \triangle'(\xi)\right| \leqslant M\,|t-\xi|\,.$$

Отсюда и из (19) находим

$$|\triangle(\xi)| \leqslant \min\left(\int_a^\xi M\,|t-\xi|\,dt,\ \int_\xi^b M\,|t-\xi|\,dt\right) = M\cdot\min\left(\frac{(\xi-a)^2}{2}\ ,\ \frac{(b-\xi)^2}{2}\right) \leqslant M\frac{(b-a)^2}{8}.$$

Эта оценка вместе с (16) приводит к неравенству

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}(x)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{16}. \tag{20}$$

Посмотрим, что дает оценка (20) для приближения линейной функцией степени $U(x) = x^d$ на отрезке $[a, b]$ в случае, когда показатель степени d лежит на интервале $(0, 1)$. В этом случае функция U является вогнутой,

$$U''(x) = d\,(d-1)\,x^{d-2} < 0,$$

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U''(x)\right| = \left|U''(a)\right| = d(1-d)a^{d-2}.$$

Следовательно, относительная погрешность приближения функции $U(x) = x^d$ линейной функцией $\widetilde{\mathcal{L}_U}(x)$ на отрезке $[a, b]$, равная по определению

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{U(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}(x)}{U(x)}\right|,$$

заведомо не превосходит

$$\frac{\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U''(x)\right|}{\min_{a\leqslant x\leqslant b} U(x)}\cdot\frac{(b-a)^2}{16} \leqslant \frac{d(1-d)a^{d-2}}{a^d}\cdot\frac{(b-a)^2}{16} = \frac{d(1-d)}{16}\cdot\left(\frac{b-a}{a}\right)^2.$$

Отсюда, учитывая, что $\max_{0\leqslant d\leqslant 1} d\,(1-d) = \frac{1}{4}$, $b = \lambda a$, выводим оценку сверху (2) относительной погрешности приближения степенной функции x^d линейной независимо от значения $d \in (0, 1)$.

4. Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать следующий вывод. В задаче Рамсея – Касса – Купманса, где рассматривается математическая модель, определяемая функцией полезности U, функцией f, выражающей зависимость производства продукта от капитала и ставкой временного предпочтения ρ имеется некоторый уровень начального экономического ресурса, которым заведомо необходимо обладать, приступая к экономической деятельности.

В предположении, что функция U на области значений, принимаемых в исследуемом процессе вложения капитала "достаточно хорошо"приближается линейной функцией, а функция f имеет монотонно стремящуюся на бесконечности к нулю производную, желательно, чтобы начальный экономический ресурс K_0 превосходил (предпочтельно в несколько раз) величину $K = \varkappa_\rho$, являющуюся корнем уравнения $f'(K) = \rho$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. (готовится к выходу в печать)

3. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf

4. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

5. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.

6. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

7. Зорич В. А. Математический анализ // Часть II. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – XIV. с. 794.

8. DeVore, Ronald A., Lorentz, George G. Constructive Approximation // Springer, Berlin, Germany. 1993. Vol. 303. P. 449.

9. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации // 2 изд., М., 1965.

10. Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials // Walter de Gruyter, 2008. P. 480.

11. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

12. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

13. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

14. Abel A. B. Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses // American Economic Review. 1990. Vol. 80, № 2. P. 38–42.

15. Carroll Ch. D., Overland J. R., Weil D. N. Saving and Growth with Habit Formation // American Economic Review. 2000. Vol. 90, № 3. P. 341-355.

16. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

REFERENCES

1. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

2. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, “On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* (preparing to go to press)

3. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, 2018, *http://ciep.itam.mx/˜rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

4. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

5. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

6. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/˜webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

7. Zorich, V. A. 2004, “Mathematical Analysis“, *Springer*, ISBN 3540403868, pp. 574.

8. DeVore, Ronald A., Lorentz, George G. 1993, “Constructive Approximation“, *Springer, Berlin, Germany*, vol. 303, pp. 449.

9. Achiezer, N. I. 1956, “Theory of approximation“, Translated by Charles J. Hyman. *New York: Frederick Ungar Publishing*, pp. 307.

10. Dzyadyk, V. K., Shevchuk I. A. 2008, “Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials“, *Walter de Gruyter*, pp. 480.

11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series No. 1701.* Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

12. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. “When Economic Growth is Less than Exponential“, 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.

13. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

14. Abel, A. B. 1990, “Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses“, *American Economic Review*, vol. 80, no. 2, pp. 38–42.

15. Carroll, Ch. D., Overland, J. R., Weil, D. N. 2000, “Saving and Growth with Habit Formation“, *American Economic Review*, vol. 90, no. 3, pp. 341-355.

16. Romer, D. “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.

Сведения об авторах.

1. Владимир Григорьевич Чирский (ответственный за переписку) д.ф.-м.н,

профессор кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Телефон: +7(903) 504 26 28 Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

2. Артем Иванович Козко к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

3. Любовь Михайловна Лужина к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: lluzhina@gmail.com Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

4. Антон Юрьевич Попов д.ф.-м.н, ведущий научный сотрудник кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

1. Vladimir Grirorevich Chirskii

professor of Moscow State University Phone: +7(903) 504 26 28

e-mail: vgchirskii@yandex.ru Address: Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

2. Artem Ivanovich Kozko

associate Professor of Moscow state University

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

3. Lyubov Mihailovna Luzhina

associate Professor of Moscow state University

e-mail: lluzhina@gmail.com Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

4. Anton Yurievich Popov

leading researcher of Moscow state University (professor) Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-196-207

Оптимальная экспонента в задаче Рамсея – Касса – Купманса с логарифмической функцией полезности

А. И. Козко (г. Москва), Л. М. Лужина (г. Москва), А. Ю. Попов (г. Москва), В. Г. Чирский (г. Москва)

А. И. Козко[1], **Л. М. Лужина**[2], **А. Ю. Попов**[3], **В. Г. Чирский**[4] — [1,2,3] МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС, [4] МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

Abstract

Исследуется полная полезность экономической деятельности в некоторой модели, когда вложение в производство экономического ресурса задано в виде экспоненты, а функция полезности — логарифм. Доказывается существование и единственность оптимального показателя экспоненты и находится интервал в котором содержится оптимальный показатель.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея-Касса-Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности, лог-полезность.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский Оптимальная экспонента в задаче Рамсея – Касса – Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 196–207.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-196-207

Optimal exponent in the Ramsey-Kass-Koopmans problem with logarithmic utility function

A. I. Kozko (Moscow), L. M. Luzhina (Moscow), A. Yu. Popov (Moscow), V. G. Chirskii (Moscow)

A. I. Kozko[1], **L. M. Luzhina**[2], **A. Yu. Popov**[3], **V. G. Chirskii**[4] — [1,2,3] Moscow State University, Ranepa, [4] Moscow State University, MPGU

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study the full utility of economic activity in a certain model, when the investment in the production of an economic resource is given as an exponent and the utility function — logarithm. We prove the existence and uniqueness of the optimal exponent and find the interval in which the optimal exponent is contained.

Keywords: mathematical model, Ramsey-Kass-Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility, log-utility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2019, "Optimal exponent in the Ramsey-Kass-Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 196–207.

1. Введение

Рассмотрим задачу Рамсея – Касса – Купманса [3] –[16], на бесконечном промежутке времени, состоящую в нахождении оптимального режима вложения в производство экономического ресурса $K(t)$ (капитала), зависящего от времени t и имеющего заданное начальное значение K_0. Требуется максимизировать интеграл

$$\int_0^{+\infty} U\left(f\left(K\left(t\right)\right) - \dot{K}(t)\right) e^{-\rho t} dt, \tag{1}$$

выражающий в изучаемых нами моделях полную полезность экономической деятельности. Максимум интеграла (1) ищется на классе невозрастающих функций $K(t)$, непрерывных на луче $[0;+\infty)$, дважды дифференцируемых на $(0;+\infty)$ (под $\dot{K}(t)$ понимается производная функции K по времени) и имеющих заданные начальное и предельное значения

$$K\left(0\right) = K_0, \qquad \lim_{t\to+\infty} K\left(t\right) = 0. \tag{2}$$

В (1) под функцией $f = f(K)$ понимается зависимость производства продукции от капитала K. Типичной функцией f, используемой в экономических моделях, где ставится данная экстремальная задача, является функция Кобба – Дугласа – вогнутая на положительной полуоси степенная функция

$$f\left(K\right) = aK^{\alpha}, \quad a > 0, \quad \alpha \in \left(0;1\right). \tag{3}$$

В моделях, имеющих практическую ценность, рассматриваются показатели $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Если производство продукта в зависимости от капитала K меньше по порядку $\sqrt{K}$, то такие модели считаются заведомо неэффективными [10]. Число ρ называется ставкой временного предпочтения. Обычно ρ – небольшая положительная постоянная, её значения в большинстве моделей выбираются из отрезка [0.01; 0.025]. Функция U есть функция полезности. Как правило, в работах по этой тематике рассматривают функции

$$U\left(C\right) = U_{\theta}\left(C\right) = \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \qquad C > 0, \qquad \theta > 0, \tag{4}$$

где θ – некоторый положительный параметр, значение которого выбирается в соответствии с определенными характеристиками данной экономической системы [1], [2], [6]. Изучают модели со значениями θ как большими, так и меньшими 1 см. [2]. В «исключительном» случае $\theta = 1$ имеем

$$U_1\left(C\right) = \lim_{\theta\to 1} U_{\theta}\left(C\right) = \lim_{\theta\to 1} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{C^{\gamma}-1}{\gamma} = \ln C. \tag{5}$$

Именно этот случай, когда функция полезности является логарифмической, мы и исследуем в нашей работе; ранее он рассматривался в работах [2], [16].

Исследования задачи (1), (2) на конечном временном отрезке $[0;T]$ в случае функции полезности, заданной для $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ рассматривался в работах авторов [11] –[13].

Нахождение оптимальной зависимости экономического ресурса $K\,(t)$ от времени, то есть «наилучшего» режима вложения капитала, доставляющего максимум интеграла (1), представляет собой весьма сложную математическую задачу. Тем не менее, она укладывается в общую теорию поиска экстремалей интеграла

$$\int_0^T F\left(t, K\,(t)\,, \dot{K}(t)\right) dt \tag{6}$$

при наличии граничных условий

$$K\,(0) = K_0, \qquad K\,(T) = K_1. \tag{7}$$

Известно, что экстремали интеграла (6), удовлетворяющие граничным условиям (7), являются решениями уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}}\right), \tag{8}$$

но решить такое уравнение в квадратурах удаётся только для немногих весьма функций трёх переменных F. Для имеющей место в задаче Рамсея – Касса – Купманса зависимости

$$F\left(t, K,\ \dot{K}\right) = U\left(f\,(K) - \dot{K}\right) e^{-\rho t} \tag{9}$$

мы выписали уравнение Эйлера (8) в [13]. В случае (5) уравнение Эйлера (8) для зависимости (9) принимает вид

$$L\,(K\,(t)) = 0, \tag{10}$$

где

$$L\,(K) = \ddot{K} - 2\dot{K} f'\,(K) + \rho \dot{K} - \rho f\,(K) + f(K) f'\,(K)\,. \tag{11}$$

Как видно из (11), L является весьма непросто устроенным нелинейным оператором, действующим в пространстве $C[0;+\infty) \cap D^2(0;+\infty)$, и уравнение (10) решения в квадратурах, вообще говоря, не допускает.

Возникает еще одна проблема. Если нас интересуют экстремали интеграла (1) на классе невозрастающих функций, то для учёта ограничения на монотонность K $(\dot{K}(t) \leqslant 0)$ уравнение Эйлера должно быть заменено менее явными уравнениями, получающимися на основе принципа максимума Понтрягина [15]. Это дополнительно осложняет поиск оптимального режима вложения капитала $K\,(t)$. Даже в самом лучшем случае, если нам «повезло» и оказалось, что решение уравнения Эйлера не возрастает и его хотя бы приближённо удалось найти, оно может оказаться функцией довольно сложной природы. В то же время, в практической деятельности достаточно найти режим вложения экономического ресурса пусть не оптимальный, но близкий к оптимальному, который был бы максимально простой функцией времени. Наиболее простыми убывающими функциями, удовлетворяющими условиям (6), являются экспоненты

$$K\,(t) = K_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \tag{12}$$

В этой работе мы исследуем, какой из показателей $\lambda > 0$ даёт максимальное значение интеграла полной полезности (1), когда в качестве $K\,(t)$ берутся только функции (12), а $U\,(C) \equiv \ln C$. Другими словами, ищется максимум на полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$ функции действительной переменной

$$P\,(\lambda) = \int_0^{+\infty} \ln\left[f\left(K_0 e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0 e^{-\lambda t}\right] e^{-\rho t} dt, \tag{13}$$

поскольку для функции (12) имеем $\dot{K}(t) = -\lambda K_0 e^{-\lambda t}$. Поставленная задача является корректной, поскольку интеграл (13) сходится при любом $\lambda > 0$ ввиду наличия быстро стремящегося к нулю множителя $e^{-\rho t}$. Более того, интеграл (13) сходится равномерно по λ на любом отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$; а так как подынтегральная функция непрерывна на декартовом произведении $(0 \leqslant \lambda < +\infty) \times (0 \leqslant t < +\infty)$ то P является непрерывной функцией на полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$. Следовательно, $P(\lambda)$ имеет максимум на любом отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, а нашей задачей является доказательство существования максимума этой функции на всей полуоси и его локализация.

2. Основные результаты

Наше исследование ведётся в естественном предположении, что начальный экономический ресурс является достаточно большим, а именно, величина

$$\varepsilon = aK_0^{-\beta}\rho^{-1}, \tag{14}$$

где $\beta = 1 - \alpha$ (напомним, что $\alpha \in (0;1)$, и, следовательно, $\beta > 0$) невелика; по крайней мере она должна быть заведомо меньше 1. Нами доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1. *Оптимальный в рассматриваемой задаче показатель λ существует и лежит в интегрвале $((1-\varepsilon)\rho; \rho/\alpha)$.*

Теорема 2. *В случае $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ при дополнительном предположении $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$ оптимальный показатель λ единственен и лежит в интервале $((1-\varepsilon)\rho; \rho)$.*

Доказательство. [*Доказательство теоремы 1.*] Подынтегральная функция в (13) дифференцируема по переменной λ при любых неотрицательных λ и t и эта частная производная равна

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-\rho t}\ln\left(f\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0 e^{-\lambda t}\right)\right) = e^{-\rho t}\frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0e^{-\lambda t}\right)}{f\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0e^{-\lambda t}} =$$
$$= e^{-\rho t}\frac{-K_0te^{-\lambda t}f'\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + K_0e^{-\lambda t} - \lambda tK_0e^{-\lambda t}}{f\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0e^{-\lambda t}} = \frac{1 - \lambda t - tf'\left(K_0e^{-\lambda t}\right)}{\lambda + \left(e^{\lambda t}/K_0\right)f\left(K_0e^{-\lambda t}\right)}e^{-\rho t}.$$

Воспользовавшись выражением (2) для функции f и обозначением (3), получим следующую формулу для частной производной:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{-\rho t}\ln\left(f\left(K_0e^{-\lambda t}\right) + \lambda K_0e^{-\lambda t}\right)\right) = \frac{1 - \lambda t - tf'\left(K_0e^{-\lambda t}\right)}{\lambda + \left(e^{\lambda t}/K_0\right)f\left(K_0e^{-\lambda t}\right)}e^{-\rho t} =$$
$$= \frac{1 - \lambda t - a\alpha K_0^{-\beta}te^{\lambda\beta t}}{\lambda + aK_0^{-\beta}e^{\lambda\beta t}}e^{-\rho t} = \frac{1 - \lambda t - \alpha\varepsilon\rho te^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}}e^{-\rho t}. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\left|\frac{1 - \lambda t - \alpha\varepsilon\rho te^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}}\right| \leqslant \alpha t + t + \frac{1}{\varepsilon\rho} \quad \forall\lambda \geqslant 0 \ \ \forall\, t \geqslant 0.$$

Поэтому частная производная (4) на декартовом произведении $(0 \leqslant \lambda < +\infty) \times (0 \leqslant t < +\infty)$ по абсолютной величине мажорируется функцией $\left(2t + (\varepsilon\rho)^{-1}\right)e^{-\rho t}$, интеграл от которой по лучу $[0, +\infty)$ сходится. Это влечет за собой не только сходимость интеграла от частной производной (4) по лучу $[0, +\infty)$, но и равномерную сходимость данного интеграла по параметру

$\lambda \in [0, +\infty)$. Согласно теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру [14], приходим к равенству

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \lambda t - \alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} e^{-\rho t} dt. \tag{16}$$

Для оценок производной $P'(\lambda)$ нам потребуется записать интеграл из (5) в несколько ином виде, воспользовавшись тождествами

$$\frac{\lambda t + \alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} = \frac{\lambda t + \varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} - \frac{\beta\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} = t - \frac{\beta\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} \tag{17}$$

и обозначением

$$v(\lambda, t) = \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}. \tag{18}$$

Из (16) – (18) находим

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \beta\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} - \int_0^{+\infty} t e^{-\rho t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \beta t v(\lambda, t)}{\lambda + v(\lambda, t)} e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2}. \tag{19}$$

Выведем двусторонние оценки отношения

$$R(\lambda, t) = \frac{1 + \beta t v(\lambda, t)}{\lambda + v(\lambda, t)}. \tag{20}$$

Справедливость оценки сверху

$$R(\lambda, t) < \frac{1}{\lambda} + \beta t, \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall\, t > 0, \tag{21}$$

элементарно проверяется. Оценка же снизу

$$R(\lambda, t) > R(\lambda, 0) = \frac{1}{\lambda + v(\lambda, 0)} = \frac{1}{\lambda + \varepsilon\rho}, \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall\, t > 0, \tag{22}$$

есть следствие возрастания $R(\lambda, t)$ по переменной t при любом $\lambda > 0$. Действительно, имеем (для краткости записи опускаем аргументы функций и обозначаем $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, $R_t = \frac{\partial R}{\partial t}$)

$$R_t = \frac{(\beta v + \beta t v_t)(\lambda + v) - v_t(1 + \beta t v)}{(\lambda + v)^2} = \frac{\beta v(\lambda + v) + \beta\lambda t v_t - v_t}{(\lambda + v)^2}.$$

А так как из (18) следует тождество $v_t = \lambda\beta v$, то приходим к представлению

$$R_t = \frac{\beta v^2 + (\beta\lambda)^2 t v}{(\lambda + v)^2}. \tag{23}$$

Из (23) немедленно следует положительность $R_t = \frac{\partial R(\lambda,t)}{\partial t}$, при всех $\lambda > 0$ и $t > 0$, а значит и возрастание функции $R(\lambda, t)$ по переменной t при любом $\lambda > 0$.

Таким образом, согласно обозначениям (18) и (20) представление (19) производной $P'(\lambda)$ можно переписать следующим образом:

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} R(\lambda, t) e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2}. \tag{24}$$

Полученная формула вместе с оценками (21) и (22) функции $R(\lambda, t)$ даёт неравенства

$$P'(\lambda) < \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + \beta t\right) e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\lambda\rho} + \frac{\beta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\lambda\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2},$$
$$P'(\lambda) > \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\rho t}}{\lambda + \varepsilon\rho} dt - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho(\lambda + \varepsilon\rho)} - \frac{1}{\rho^2}\ .$$

Отсюда видно, что $P'(\lambda) > 0$, как только $\lambda + \varepsilon\rho \leqslant \rho$, то есть $\lambda \leqslant \rho(1-\varepsilon)$, а при $\lambda \geqslant \rho/\alpha$, напротив, $P'(\lambda) < 0$.

На основании доказанного можно сделать вывод, что функция P возрастает на отрезке $[0;(1-\varepsilon)\rho]$ и убывает на луче $[\rho/\alpha\,;+\infty)$. Поэтому максимум функции P на отрезке $[(1-\varepsilon)\,\rho;\ \rho/\alpha]$ (он существует в силу её непрерывности) одновременно является максимумом этой функции на луче $[0;+\infty)$. Более того, из неравенств

$$P'\left((1-\varepsilon)\,\rho\right) > 0, \quad P'\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) < 0 \tag{25}$$

следует, что максимум P на отрезке $[(1-\varepsilon)\,\rho;\ \rho/\alpha]$ достигается в некоторой внутренней точке этого отрезка. Теорема доказана. $\square$

Доказательство. [*Доказательство теоремы 2.*] Из (24), (18), (20), учитывая, что $v_\lambda = \beta t v$, находим

$$P''(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial R\,(\lambda,t)}{\partial\lambda} e^{-\rho t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\beta t v_\lambda(\lambda+v) - (1+v_\lambda)\,(1+\beta t v)}{(\lambda+v)^2} e^{-\rho t} dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t\right) v\,(\lambda,t) - 1}{(\lambda + v\,(\lambda,t))^2} e^{-\rho t} dt. \tag{26}$$

(Обоснование корректности дифференцирования по параметру λ под знаком интеграла проводится стандартным образом: примерно так же, как и в доказательстве теоремы 1.)

Докажем отрицательность $P''(\lambda)$ при $(1-\varepsilon)\,\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho/\alpha$. Это повлечёт за собой убывание $P'(\lambda)$ на отрезке $[(1-\varepsilon)\,\rho;\ \rho/\alpha]$, что в связи с (25) даст существование и единственность нуля $P'(\lambda)$ на интервале $((1-\varepsilon)\,\rho;\ \rho/\alpha)$, а значит единственность точки максимума функции P. После этого мы установим справедливость неравенства

$$P'(\rho) < 0, \tag{27}$$

что ввиду убывания P' и (25) докажет наличие нуля производной, а значит и точки максимума функции P на интервале $((1-\varepsilon)\,\rho;\rho)$.

Займемся оценкой $P''(\lambda)$ сверху. Разобьём интеграл в (26) на два и в связи с неравенством

$$\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t > 0 \Longleftrightarrow \lambda\beta t > 2 \quad \textit{при } t > 0,$$

получим оценку

$$P''(\lambda) < \mathcal{I}_1(\lambda) - \mathcal{I}_2(\lambda), \tag{28}$$

где

$$\mathcal{I}_1(\lambda) = \int_{T_\lambda}^{+\infty} \frac{\left(\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t\right) v\,(\lambda,t)}{(\lambda + v\,(\lambda,t))^2} e^{-\rho t} dt, \qquad T_\lambda = \frac{2}{\beta\lambda}\ ,$$
$$\mathcal{I}_2(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\rho t} dt}{(\lambda + v\,(\lambda,t))^2}\ .$$

Интеграл $\mathcal{I}_1(\lambda)$ требуется оценить сверху, а $\mathcal{I}_2(\lambda)$ – снизу. Ввиду неравенства

$$\frac{v}{(\lambda+v)^2} \leqslant \frac{1}{4\lambda}$$

(равенство достигается, когда $v=\lambda$), справедливого при всех положительных значениях λ и v, и положительности множителя $\lambda(\beta t)^2-2\beta t$ на луче $(T_\lambda;+\infty)$, мы можем оценить сверху интеграл $\mathcal{I}_1(\lambda)$ через интеграл, который явно вычисляется:

$$\mathcal{I}_1(\lambda) \leqslant \frac{\widetilde{\mathcal{I}}_1(\lambda)}{4\lambda},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1(\lambda) = \int_{T_\lambda}^{+\infty}\left(\lambda(\beta t)^2-2\beta t\right)e^{-\rho t}dt.$$

Оценка снизу интеграла $\mathcal{I}_2(\lambda)$ осуществляется посредством оценки сверху знаменателя дроби в подынтегральном выражении функцией, которая приводит к вычисляемому явно интегралу. Ниже используется ограничение

$$(1-\varepsilon)\,\rho \leqslant \lambda \leqslant \frac{\rho}{\alpha},$$

следствием которого и условий теоремы $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$, $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ являются неравенства

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \leqslant 1.$$

Имеем

$$\frac{1}{(\lambda+v(\lambda,t))^2} = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon\rho}{\lambda}e^{\lambda\beta t}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)\beta t}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\lambda^2\left(1+\frac{1}{2}e^{\rho t}\right)^2}.$$

Тем самым получаем следующую оценку снизу интеграла $\mathcal{I}_2(\lambda)$:

$$\mathcal{I}_2(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\rho t}dt}{(1+0.5e^{\rho t})^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3\rho t}dt}{(e^{-\rho t}+0.5)^2} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2\rho}\int_0^1\frac{x^2dx}{(x+0.5)^2} = \frac{\frac{4}{3}-\ln 3}{\lambda^2\rho} > \frac{0.23}{\lambda^2\rho}. \quad (29)$$

С помощью несложно проверяемых равенств

$$\int_T^{+\infty} te^{-\rho t}dt = \frac{1+\rho T}{\rho^2}\exp(-\rho T)\ , \quad \int_T^{+\infty} t^2e^{-\rho t}dt = \frac{(\rho T)^2+2\rho T+2}{\rho^3}\exp(-\rho T)\,,$$

вычислим интеграл $\widetilde{\mathcal{I}}_1(\lambda)$:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1(\lambda) = \left(\lambda\beta^2\frac{(\rho T_\lambda)^2+2\rho T_\lambda+2}{\rho^3} - 2\beta\frac{\rho T_\lambda+1}{\rho^2}\right)\exp(-\rho T_\lambda) =$$

$$= \left(\frac{4\lambda\beta^2}{\rho\lambda^2\beta^2}+\frac{4\lambda\beta^2}{\beta\lambda\rho^2}+\frac{2\lambda\beta^2}{\rho^3}-\frac{2\beta}{\rho^2}-\frac{4\beta}{\rho\beta\lambda}\right)\exp\left(-\frac{2\rho}{\beta\lambda}\right) = \left(\frac{2\beta}{\rho^2}+\frac{2\lambda\beta^2}{\rho^3}\right)\ \exp\left(-\frac{2\rho}{\beta\lambda}\right).$$

Следовательно, верна оценка

$$\mathcal{I}_1(\lambda) \leqslant \frac{\beta}{2\lambda\rho^2}\left(1+\frac{\lambda\beta}{\rho}\right)\exp\left(-\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right)\ . \quad (30)$$

Из (28) – (30) видно, что для доказательства отрицательности $P''(\lambda)$ достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{\beta}{2\lambda\rho^2}\left(1+\frac{\lambda\beta}{\rho}\right)\exp\left(-\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right) < \frac{0.23}{\lambda^2\rho} \Longleftrightarrow \frac{\lambda\beta}{\rho}\left(1+\frac{\lambda\beta}{\rho}\right) < 0.46\,\exp\left(\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right).$$

Обозначим $u=\frac{\lambda\beta}{\rho}$. Поскольку $\lambda \leqslant \frac{\rho}{\alpha}$, то $u \leqslant \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}-1$. А так как по условию теоремы $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$, то $u \leqslant 1$. Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$u\,(1+u) < 0.46\exp\left(\frac{2}{u}\right), \quad 0 < u \leqslant 1.$$

Это неравенство верно, поскольку его левая часть не превосходит 2, а правая часть не меньше $0.46e^2 > 3$. Отрицательность $P''(\lambda)$ на отрезке $[(1-\varepsilon)\,\rho;\ \rho/\alpha]$ доказана.

Докажем неравенство (27). Согласно (16) имеем

$$P'(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty}\frac{1-\rho t-\alpha\varepsilon\rho t e^{\rho\beta t}}{1+\varepsilon e^{\rho\beta t}}e^{-\rho t}dt. \tag{31}$$

Поскольку верны равенства

$$\int_0^{+\infty}(1-\rho t)\,e^{-\rho t}dt = 0, \quad \frac{1}{1+\varepsilon e^{\rho\beta t}} = 1-\frac{\varepsilon e^{\rho\beta t}}{1+\varepsilon e^{\rho\beta t}},$$

то интеграл (31) преобразуется следующим образом:

$$\rho P'(\rho) = \int_0^{+\infty}\frac{(1-\rho t)(-\varepsilon e^{\rho\beta t})-\alpha\varepsilon\rho t e^{\rho\beta t}}{1+\varepsilon e^{\rho\beta t}}e^{-\rho t}dt.$$

Отсюда находим

$$\frac{\rho P'(\rho)}{\varepsilon} = \int_0^{+\infty}(\rho\beta t-1)e^{-\rho\beta t}w\,(t)\,dt\ , \tag{32}$$

где

$$w\,(t) = \frac{e^{(2\beta-1)\rho t}}{1+\varepsilon e^{\rho\beta t}}.$$

Ввиду условия $\alpha \geqslant 1/2$ верно неравенство $2\beta-1 \leqslant 0$, поэтому функция w убывает на луче $[0;+\infty)$ и, кроме этого, является положительной. Следовательно, каковы бы ни были число $t_0 > 0$ и функции

$$\varphi_1:\ (0;t_0)\to(0;+\infty)\,, \quad \varphi_2:\ (t_0;+\infty)\to(0;+\infty)$$

интегрируемые на $(0;t_0)$ и $(t_0;+\infty)$ соответственно, для интегралов верны оценки

$$\int_0^{t_0}\varphi_1(t)w(t)dt > w(t_0)\int_0^{t_0}\varphi_1(t)dt, \quad \int_{t_0}^{+\infty}\varphi_2(t)w(t)dt < w(t_0)\int_{t_0}^{+\infty}\varphi_2(t)dt\ .$$

Положив

$$t_0 = \frac{1}{\beta\rho}, \quad \varphi_1(t) = (1-\beta\rho t)e^{-\beta\rho t}, \quad \varphi_2\,(t) = (\beta\rho t-1)e^{-\beta\rho t},$$

получим неравенства

$$\int_0^{t_0}(1-\beta\rho t)\,e^{-\beta\rho t}w(t)dt > w(t_0)I_1, \quad \int_{t_0}^{+\infty}(\beta\rho t-1)\,e^{-\beta\rho t}w\,(t)\,dt < w(t_0)I_2, \tag{33}$$

где

$$I_1 = \int_0^{t_0} (1-\beta\rho t)\, e^{-\beta\rho t} dt, \quad I_2 = \int_{t_0}^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} dt. \tag{34}$$

Из (33) и (34) находим

$$\int_0^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} w\,(t)\, dt < w\,(t_0)\,(I_1 - I_2) = w(t_0) \int_0^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} dt = 0.$$

Отсюда и из (32) следует неравенство (27). Теорема 2 полностью доказана. □

3. Заключение

Основным итогом нашей работы является следующий вывод.

Если мы решаем задачу Рамсея – Касса – Купманса нахождения оптимального режима вложения капитала на бесконечном промежутке времени и берём логарифмическую функцию полезности, а функция Кобба – Дугласа (3) является степенной с показателем $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ (данное неравенство выполняется во всех реально рассматриваемых моделях), то среди экспоненциальных зависимостей капитала от времени вида $K\,(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ оптимальная имеет показатель λ чуть меньший ρ (ставки временного предпочтения). Например, взяв $K\,(t) = K_0 e^{-\rho t}$ мы получим хороший (хотя и не самый лучший) результат, но полную полезность можно повысить, рассматривая функции $K\,(t) = K_0 e^{(\delta-\rho)t}$ и постепенно увеличивая параметр δ до какого-то небольшого значения (увеличение начинается с нуля).

Более детальное уточнение вида близкой к оптимальной функции $K\,(t)$ и рассмотрение аналогичной задачи, когда в качестве функций полезности берутся функции U_θ – см. выше (4) – мы планируем осуществить в последующих работах. Пока же сделаем еще одно наблюдение. Близость функции $K\,(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ к оптимальной в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ (то есть $f\,(K) = a\sqrt{K}$) косвенно подтверждается тем, что нелинейный оператор L, определенный в (11), взятый на этой функции, принимает на ней весьма малое (в сравнении с самой функцией) значение, пока экономический ресурс $K\,(t)$ не станет слишком малым. Действительно, подставив в (11) $K\,(t) = K_0 e^{-\rho t}$, получим $L\left(K_0 e^{-\rho t}\right) \equiv a^2/2$, что является весьма малой величиной в сравнении с $K_0 e^{-\rho t}$ при небольших значениях t.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf

2. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

3. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

4. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

5. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

6. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

7. Abel A. B. Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses // American Economic Review. 1990. Vol. 80, № 2. P. 38–42.

8. Carroll Ch. D., Overland J. R., Weil D. N. Saving and Growth with Habit Formation // American Economic Review. 2000. Vol. 90, № 3. P. 341-355.

9. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

10. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.

11. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимости начального экономического ресурса // Чебышевский сборник, 2019. (готовится к выходу в печать)

12. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

13. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. (готовится к выходу в печать)

14. Зорич В. А. Математический анализ // Часть II. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – XIV. с. 794.

15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2-е изд. 2005.

16. Robert J. Barro, 1999. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.

REFERENCES

1. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, 2018, *http://ciep.itam.mx/˜rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

2. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

3. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/˜webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

4. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series No. 1701.* Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

5. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. “When Economic Growth is Less than Exponential“, 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.

6. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

7. Abel, A. B. 1990, “Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses“, *American Economic Review*, vol. 80, no. 2, pp. 38–42.

8. Carroll, Ch. D., Overland, J. R., Weil, D. N. 2000, “Saving and Growth with Habit Formation“, *American Economic Review*, vol. 90, no. 3, pp. 341-355.

9. Romer, D. “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.

10. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

11. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, Assessment of the need for an initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem // *Chebyshevskii sbornik. (preparing to go to press).*

12. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

13. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, “On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* (preparing to go to press).

14. Zorich, V. A. 2004, “Mathematical Analysis“, *Springer*, ISBN 3540403868, pp. 574.

15. Alekseev, V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. “Optimal Control“, *Springer, Boston, MA*, 1987. pp. 310.

16. Robert J. Barro, 1999. “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

Сведения об авторах.

1. Владимир Григорьевич Чирский (ответственный за переписку) д.ф.-м.н,

профессор кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Телефон: +7(903) 504 26 28 Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

2. Артем Иванович Козко к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

3. Любовь Михайловна Лужина к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: lluzhina@gmail.com Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

4. Антон Юрьевич Попов д.ф.-м.н, ведущий научный сотрудник кафедры математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова Адресс: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математического анализа МГУ имени М. В. Ломоносова

1. Vladimir Grirorevich Chirskii

professor of Moscow State University Phone: +7(903) 504 26 28

e-mail: vgchirskii@yandex.ru Address: Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

2. Artem Ivanovich Kozko

associate Professor of Moscow state University

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

3. Lyubov Mihailovna Luzhina

associate Professor of Moscow state University

e-mail: lluzhina@gmail.com Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

4. Anton Yurievich Popov

leading researcher of Moscow state University (professor) Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-208-225

Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве

М.Илолов (г. Душанбе, Таджикистан), Д.Н.Гулджонов (г. Душанбе, Таджикистан), Дж.Ш.Рахматов (г. Душанбе, Таджикистан)

М.Илолов доктор физико-математических наук, профессор, Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ (Душанбе, Таджикистан)
e-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com
Д.Н.Гулджонов Институт математики им. А. Джураева АН РТ (Душанбе, Таджикистан)
gdilovar@gmail.com
Дж.Ш.Рахматов Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ (Душанбе, Таджикистан)
jamesd007@rambler.ru

Abstract

За последние десятилетия значительное развитие получила теория функционально-дифференциалных включений, прежде всего, функционально-дифференциальное включение запаздывающего типа. Ученые разных стран ведут исследования в области теории начально-краевых задач для различных классов дифференциальных, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных включений в частных производных с целым и дробным порядками производных. Настоящая работа посвящена дробным функционально-диференциальным и интегродифференциальным включениям типа Хейла занимающие промежуточное место между функционально-дифференциальными включениями с запаздыванием и включениями нейтрального типа. Установлены достаточные условия существования слабых решений включений типа Хейла с дробным порядком производной. Методы дробного интегро-дифференциального исчисления и теории непод-вижных точек многозначных отображений лежат в основе настоящего исследования. Известно, что динамика экономических, социальных и экологических макросистем представляет собой многозначный динамический процесс и дифференциальные и интегро-дифференциальные включения дробного порядка являются естественными моделями динамики макросистем. Такие включения используются также для описания некоторых физических и механических систем с гистерезисом. В конце работы приводится пример иллюстрирующий абстрактные результаты.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, дробная производная Капуто, многозначное отображение, неподвижная точка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 208–225.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-208-225

Functional differential inclusions of Hale type with fractional order of derivative in a Banach space

M.Ilolov (Dushanbe, Tajikistan), D.N.Guljonov (Dushanbe, Tajikistan), J.Sh.Rahmatov (Dushanbe, Tajikistan)

M. Ilolov Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Center of Innovative Development of Science and New Technologies of AS RT (Dushanbe, Tajikistan)
e-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com
D.N.Guljonov Institute of Mathematics named after A. Dzhuraev of AS RT (Dushanbe, Tajikistan)
e-mail: gdilovar@gmail.com
J.Sh. Rahmatov Center of Innovative Development of Science and New Technologies of AS RT (Dushanbe, Tajikistan)
e-mail: jamesd007@rambler.ru

Abstract

Over the past decades, the theory of functional differential inclusions, primarily, the delayed functional differential inclusion, has received significant development. Scientists from different countries conduct research in the theory of initial-boundary value problems for various classes of differential, integro-differential and functional differential inclusions in partial derivatives with integer and fractional orders of derivatives.

The present work is devoted to fractional functional-differential and integro-differential inclusions of Hale type, which occupy an intermediate place between functional-differential inclusions with delay and inclusions of a neutral type. Sufficient conditions for the existence of weak solutions of inclusions of Hale type with fractional order of the derivative are established. The methods of fractional integro-differential calculus and the theory of fixed points of multivalued mappings are the basis of this study. It is known that the dynamics of economic, social, and ecological macrosystems is a multi-valued dynamic process, and fractional differential and integro-differential inclusions are natural models of macrosystem dynamics. Such inclusions are also used to describe some physical and mechanical systems with hysteresis. At the end of the paper, an example illustrates abstract results.

Keywords: functional differential inclusion, Caputo fractional derivative, multivalued mapping, fixed point.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
M.Ilolov, D.N.Guljonov, J.Sh.Rahmatov, 2019, "Functional differential inclusions of Hale type with fractional order of derivative in a Banach space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 208–225.

1. Введение

Исследование функционально-дифференциальных включений восходит к работам А.А. Толстоногова [1], R.P. Agarval и др. [2], M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii, P. Zecca [3], в которых найдены условия существования решений для различных классов начальных и граничных задач для включений запаздывающего типа целого и дробного порядков производных. Прежде всего, изучение дифференциальных и интегро-дифференциальных включений мотивировано развитием теории управления динамических систем, описываемые начальными задачами вида

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), h > 0, x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $u(t) \in U$ является функцией-параметром и которая "управляет"системой (1.1). Если ввести многозначное отображение

$$F(t, x, [x(t-h)) \stackrel{def}{=} \{f(t, x(t), x(t-h), u(t))\}_{u \in U},$$

где U - множество допустимых управлений, то решения дифференциального уравнения (1.1) будут решениями дифференциального включения с запаздыванием

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t-h)), x(0) = x_0,$$

в котором управление присутствует в неявном виде.

Отметим, что еще в 60-70 годах прошлого столетия в работах [4-6] рассматривались некоторые частные классы дифференциальных включений, а именно, включения вида

$$x'(t) \in -A(x(t)), x(0) = x_0,$$

где A представляет собой максимально монотонное (линейное или нелинейное) отображение действующее в гильбертовом пространстве. В общем случае банахова пространства в качестве отображения берутся аккретивные операторы. Более узким классом таких включений являются так называемые "градиентные"включения, которые являются обобщениями уравне-ний градиентного типа

$$x'(t) = -\nabla V(x(t)), x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

где V-дифференцируемый потенциал.

Как известно, в большинстве случаев, потенциальная функция не является дифференцируемой. Однако, когда функция V полунепрерывная снизу и выпуклая в (1.2), то градиент потенциала $\nabla\ V(x)$ можно заменить субдифференциалом $\partial V(x)$ (или "обощенным потенциалом"). Субдифференциал $\partial V(x)$ удовлетворяет градиентному включению вида

$$x'(t) \in -\partial\ V(x(t)), x(0) = x_0,$$

которое обладает следующим важным свойством:

Если состояние $\bar{x}$ минимизирует потенциал V, то траектории градиентного включения сходятся к этому минимуму.

Еще одним источником возникновения дифференциальных включений являются дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями в смысле А. Филиппова [7]. При этом вложение правой части $f(t, x)$ в многозначное отображение $F(t, x)$ позволяет легко доказать свойства регулярности траекторий исходного дифференциального уравнения.

За последние два десятилетия значительное развитие получила теория функционально-дифференциальных включений, прежде всего, функционально-дифференциальные включения запаздывающего типа. Вышли в свет монографии [1,3,8,9], которые полностью или частично посвящены указанной проблематике. Большой отряд ученых разных стран ведет исследования различных задач для дробных дифференциальных, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и их приложений (см.напр.[10-13]).

Настоящая работа посвящена дробным функционально-дифференциальным и интегро-дифференциальным включениям типа Хейла, занимающие промежуточное место между функционально-дифференциальными включениями с запаздыванием и включениями нейтрального типа. Соответствующим уравнениям в конечномерном случае посвящена монография американского математика Дж. Хейла [14]. Обобщение и развитие результатов из [14] на случай банаховых пространств дано в работах автора [15-18]. Некоторые классы дробных интегро-дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах были предметом изучения в статьях [19-21].

Переходим к формулировке основных результатов.

Пусть $h \geq 0$ - заданное вещественное число, $R = (-\infty, \infty)$, E - сепарабельное банаховое пространство с нормой $\|.\|, C([a,b], E)$-банаховое пространство непрерывных функций отображающих интервал $[a,b]$ в E с топологией равномерной сходимости. Если $[a,b] = [-h, 0]$, то положим $C = C([-h,0], E)$ вводя норму элемента φ в C формулой

$$\|\varphi\|_C = \max_{-h \leq \theta \leq \theta} \|\varphi(\theta)\|.$$

Если $\delta \in R, d \geq 0$ и $x \in C([\delta - h, \delta + d], E)$, то для любого $t \in [\delta, \delta + d]$ определим $x_t \in C$ с помощью равенства

$$x_\Theta = x(t + \Theta), -h \leq \Theta \leq 0.$$

Рассмотрим начальную задачу для дробного дифференциального включения типа Хейла

$$^cD_t^\alpha[x(t) - g(t, x_t)] \in Ax(t) + F(t, x_t), t \in [0,T], x_0 = \varphi \in C, x(0) = x \in E, \tag{1.3}$$

где ^cD_t - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, $F : [0,T] \times C \to 2^C$ - замкнутое выпуклое многозначное отображение, $g : [0,T] \times C \to E$ - заданная функция, A - генератор компактной и равномерно ограниченной полугруппы операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на E.

Условия существования слабых решений задачи (1.3) указаны в разделе 3. В разделе 4 исследуется вопрос существования слабых решений для интегро-дифференциальных включений типа Хейла

$$^cD_t^\alpha[x(t) - g(t, x_t)] \in Ax(t) + \int_0^t a(t,s) F(s, x_s ds, t \in J,$$

$$x_0 = \varphi, x(0) = x, \tag{1.4}$$

где A, F, g, φ такие же как в задаче (1.3) и

$$a : D \to R_+, D = \{(t,s) \in J \times J : t \leq S\}.$$

2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся необходимые в дальнейшем обозначения, определения и предварительные результаты из многозначного выпуклого анализа и дробного интегродифференциального исчисления.

Пусть $J = [0,T]$ и пусть $C(J,E)$ - банахово пространство непрерывных функций из J в E с нормой

$$\|x\|_{C(J)} = sup\{\|x(t)\| t \in J\}.$$

Через $B(E)$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов действующих из E в E.

Измеримая функция $x : J \to E$ интегрируема в смысле Бохнера, если и только если, $\|x\|$ интегрируема в смысле Лебега (см. напр. [22]).

Пусть $L^1(J, E)$ - банахово пространство непрерывных функций $x : J \to E$ интегрируемые в смысле Бохнера с нормой

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^t \|x(t)\| dt \text{ для всех } x \in L^1(\partial, E).$$

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ банахово пространство.

Многозначное отображение $G : X \to 2^X$ является выпуклым (замкнутым), если $G(\cdot)$ выпукло (замкнуто) для всех $x \in X$. Отображение G ограничено на ограниченных множествах, если $G(D) = \bigcup_{x \in D} G(x)$ ограничено в X для любого ограниченного множества D из X, т.е.

$$\sup_{x \in D}\{\sup\{\|y\| : y \in G(x)\}\} < \infty.$$

Отображение G называется полунепрерывным сверху на X, если для каждого $x_0 \in X$ множество $G(x_0)$ непустое замкнутое подмножество X и если для каждого открытого множества V из X содержащее $G(x_0)$ существует открытая окрестность A точки x_0 такая, что $G(A) \subset V$.

Отображение G называется вполне непрерывным, если $G(D)$ является относительно компактным для каждого ограниченного подмножества $D \subseteq X$. Если многозначное отображение G вполне непрерывно с непустыми компактными значениями, то G полунепрерывно сверху, если и только если G имеет замкнутый график, т.е. для $x_n \to x_*$, $y_n \to y_*$ при $y_n \in Gx_n$ будем иметь $y_* \in Gx_*$.

Отображение G имеет неподвижную точку если существует $x \in X$ такой, что $x \in Gx$.

Далее, через $BCC(X)$ обозначим множество всех непустых ограниченных замкнутых и выпуклых подмножеств X. Многозначное отображение $G : J \to BCC(X)$ называется измеримым, если для каждого $x \in X$ расстояние между x и $G(x)$ является измеримой функцией на J. Полунепрерывное сверху отображение $G : X \to 2^X$ называется уплотняющим, если для любого ограниченного подмножества $D \subseteq X$ с $\alpha(D) \neq 0$ имеем

$$\alpha(G(D)) < \alpha(D),$$

где через α обозначена мера некомпактности Куратовского. Свойства меры некомпактности Куратовского подробнейшим образом изложены в книге [23].

Отметим, что вполне непрерывные многозначные отображения являются простым примером уплотняющего отображения.

Следующее утверждение представляет собой нужную нам теорему о неподвижной точке.

Лемма 2.1.([24]). Пусть X банахово пространство и $N : X \to BCC(X)$ уплотняющее отображение. Если множество

$$\Omega = \{x \in X : \lambda x \in Nx \text{ для некоторого } \lambda \geq 1\}$$

ограничено, то N имеет неподвижную точку.

Далее приводим некоторые основные определения и утверждения из дробного интегродифференциального исчисления необходимые при изложении основных результатов.

Определение 2.2. Пусть $\alpha > 0$ и $f : R_+ \to X$ принадлежит $L^1(R_+, X)$. Тогда интеграл Римана - Лиувилля определяется в виде

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

где $\Gamma(.)$ *- гамма-функция Эйлера.*

Определение 2.3.([25]). Производная Капуто порядка α *от функции* $f : R_+ \to X$ *задается следующей формулой*

$$^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^n(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = I_t^{n-\alpha} f^n(t),$$

$$t > 0, n-1 < \alpha < n.$$

Если $0 < \alpha \leq 1$, то

$$^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^\alpha}.$$

Очевидно, что производная Капуто от постоянной функции равна нулю.

Установим еще одно предварительное утверждение которое понадобится нам при доказательстве основных теорем.

Пусть $S_{F,x}$ множество функций определенное с помощью равенства

$$S_{F,x} = \{v \in L^1(J,X) : v(t) \in F(t,x_t) \text{ п.в. для } t \in J\}.$$

Лемма 2.4. Пусть X *банахово пространство. Пусть* $F : [0,T] \times C \to BCC(X)$ *является* L^1 *- многозначным отображением Каратеодори из* $C(J,X)$ *в* $L^1(J,X)$*. Тогда многозначный оператор*

$$\Psi_0 S_F : C(J,X) \to BCC(C(J,X)),$$

$$x \to (\Psi_0 S_F)(x)\Psi(S_{F,x})$$

является замкнутым графиком оператора в $C(J,X) \times C(J,X)$*.*

Отметим, что лемма 2.4 является бесконечномерным аналогом известной теоремы Losota, Opial [26].

3. Функционально-дифференциальное включение типа Хейла

В этом разделе приводим теорему существования слабых решений функционально-дифференциального включения (1.3).

Сначала дадим определение слабого решения.

Определение 3.1. Функция $x : [-h,T] \to E$ *называется слабым решением задачи (1.3), если существует* $f(\cdot) \in L^1(J,E)$ *такая, что* $f(t) \in F(t,x_t)$ *для п. в.* $t \in J$ *и* x *удовлетворяет соотношению*

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [-h,0] \\ q(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(o,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds, \end{cases}$$

где

$$Q(t)=\int\limits_0^\infty \xi_\alpha(\sigma)T(t^\alpha\sigma),\ R(t)=\alpha\int\limits_0^\infty \sigma t^{\alpha-1}\xi_\alpha(\sigma)T(t^\alpha\sigma)d\sigma$$

и для $\sigma\in(0,\infty)$

$$\xi_\alpha(\sigma)=\frac{1}{\alpha}\sigma^{-1-\frac{1}{\alpha}}w_\sigma(\sigma^{-1/\alpha})\geq 0,$$

$$w_\sigma(\sigma)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\sigma^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}sin(n\pi\alpha).$$

Здесь ξ_α - функция плотности вероятности определенной на $(0,\infty)$, так что

$$\xi_\alpha\geq 0,\sigma\in(0,\infty)\text{ и }\int\limits_0^\infty\xi_\alpha(\sigma)d\sigma=1.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int\limits_0^\infty\alpha\xi_\alpha(\sigma)d\sigma=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Замечание 3.2. Семейство $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *является равномерно ограниченной полугруппой, т.е. существует постоянная* $M>0$, *такая что* $\|T(t)\|\leq M$ *для всех* $t\in J$.

Замечание 3.3. Легко установить, что

$$\|R(t)\|\leq c_{\varphi,M}t^{\alpha-1},t>0 \tag{3.2}$$

где $c_{\varphi,M}=\frac{\varphi.M}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Пусть выполняются следующие предположения:

(H1) $F:Y\times C\to BCC(E)$, отображение $(t,u)\to F(t,u)$ измеримое относительно t для каждого $u\in C$ полунепрерывная сверху функция относительно u для каждого $t\in[0,T]$ и для каждого фиксированного $u\in C$ множество

$$S_{f,n}=\{f\in L^1(J,E):f(t)\in F(t,u)\text{ для п.в. }t\in J\}$$

непустое.

(H2) Функция $g(t,x_t)$ липшиц-непрерывная, т.е. существует постоянная $q<1$ такая, $\|g(t_1,x_t)-g(t_2,x_{t_2})\|\leq q\|x_{t_1}-x_{t_2}\|$. Функция $g:[0,T]\times C\to E$ вполне непрерывная и для любого ограниченного множества K в $C([-h,T],E)$ множество функций $\{t\to g(t,x_t):x\in K\}$ равностепенно непрерывное в $C([0,T],E)$.

(H3) Существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$\|g(t,v)\|\leq c_1\|v\|_C+c_2,t\in J,v\in C.$$

(H4) $\|F(t,u)\|=\sup\{\|v\|:v\in F(t,u)\}\leq p(t)\Psi(\|u\|_C)$ для почти всех $t\in[0,T]$ и $v\in C$, где $p\in L^1([0,T],R_+)$ и $\Psi:R_+\to(0,\infty)$, является непрерывной возрастающей функцией удовлетворяющей оценке

$$\int\limits_0^t m(s)ds<\int\limits_c^\infty\frac{ds}{s+\Psi(s)},$$

где

$$c = M\|\varphi\|_c + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2]$$

$$m(t) = \max\{MC_1, MTp(t)\} \text{ и } \sup\{\|T(t)\|, t \in [0,t]\}.$$

Замечание 3.4. Если $dimE < \infty$, *то для каждого* $u \in C, S_{F,u} \neq \oslash$ *[26].*

$S_{F,u}$ *непустое тогда и только, когда функция определенной как*

$$Y(t) = \inf\{\|v\| : v \in F(t,u)\}$$

принадлежит $L^1([0,T],R)$ [27].

Будем ставить в соответствие задачи (1.3) следующее функционально - интегральное уравнение

$$x(t) = g(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds, \tag{3.3}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L^1(J,E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

Определение 3.5. Функция $x : (-h,T) \to E, T > 0$ *называется слабым решением задачи (1.3), если* $x(t) = f(t), t \in [-h,0]$ *и существует* $v \in L^1(J,E)$ *такая, что* $v(t) \in F(t,x_t)$ *п.в. на* $[0,T]$ *и удовлетворяет уравнение (3.3).*

Теперь можно сформулировать и доказать основной результат этого раздела.

Теорема 3.6. Пусть выполняются условия (H1)-(H4). Тогда задача (1.2) имеет слабое решение на $[-h,T]$.

Доказательство. Переходим от задачи (1.3) к задаче о неподвижной точке. Рассмотрим многозначный оператор

$N : C([-h,t],E) \to P(C)(P(C)$ - непустое подмножество в пространстве С) определенный равенством $N(h) = h$ в виде

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [-h,0] \\ g(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(o,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds, F, x. \end{cases}$$

Ясно, что неподвижные точки оператора N являются слабыми решениями задачи (1.3).

Докажем, что оператор N является вполне непрерывным, ограниченным, замкнутым и выпуклым множеством значений, и кроме того, N будет полунепрерывным сверху. Доказательство состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. Установим, что Nx выпуклое для каждого $x \in C$. В самом деле, если h_1 и h_2 принадлежат Nx, то существуют $f_1, f_2 \in S_{F,x}$ такие, что для каждого $t \in J$ и $i = 1,2$ получим

$$h_i(t) = g(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)f_i(s)ds.$$

Пусть $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда для каждого $t \in J$ имеем

$$(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) = q(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)[\lambda_1 f_1(s) + (1-\lambda)f_2(s)]ds.$$

Известно, что из выпуклости F следует выпуклость $S_{F,x}$. Тогда $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in Nx$.

Шаг 2. Здесь докажем, что N отображает ограниченные множества в ограниченные множества в C. Для этого достаточно показать, что существует положительная постоянная c такая, что для каждого $h \in Nx, x \in B_r = \{x \in C : \|x\| \leq r\}$ если только $\|h\|_c \leq c$. Пусть $h \in Nx$. Тогда существует $f \in S_{F,x}$ такая что для каждого $t \in J$ имеем

$$h(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int_0^t R(t-s)f(s)ds.$$

Из условий (H3) и (H4) получим для каждого $t \in J$,

$$\|h(t)\| \leq c_1\|x_t\|_C + c_2 + \|Q(t)\|\|\varphi(0) - g(0, \varphi)\|_C + \|\int_o^t R(t-s)f(s)ds\| \leq$$

$$\leq M\|\varphi\|_c + Mt[\|\varphi\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + Mt \sup_{x\in[0,c]} \Psi(x)(\int_0^t P(s)ds).$$

Тогда для каждого $h \in N(B_0)$ имеем

$$\|h\|_{C([-h,T]),E} \leq N\|\varphi\|_C + MT[\|x_0\| + c\|\varphi\|_C + 2c_2] +$$

$$+Mt \sup_{x\in[0,r]} \Psi(x)(\int_0^T P(s)ds) = C_3.$$

Шаг 3. На этом шаге покажем, что N отображает ограниченные множества в равностепенно непрерывные множества. Пусть $t_1, t_2 \in J, 0 < t_1 < t_2$ и пусть $Br = \{x \in C : \|x\|_{C(J.E)} \leq r\}$ ограниченные множества в $C(J.E)$. Для каждого $x \in Br$ и $h \in Nx$ найдется $f \in S_{F,x}$ такой, что для $t \in J$

$$h(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(o) - g(0, \varphi)] + \int_0^t R(t-s)f(s)ds.$$

Таким образом,

$$\|h(t_1) - h(t_2)\| \leq \|g(t_1, x_{t_1}) - g(t_2, x_{t_2})\| +$$

$$+\|Q(t_1) - Q(t_2)\|\|\varphi(0) - g(0, \varphi)\| +$$

$$\int_0^{t_2} \|R(t_2 - s) - R(t_1 - s)\|dt + \|\int_{t_1}^{t_2} R(t_1 - s)f(s)ds\| \leq$$

$$\leq q\|x_{t_1} - x_{t_2}\|_C + \|Q(t_1) - Q(t_2)\|[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + c_2] +$$

$$+\int_0^{t_2} \|R(t_2 - s) - R(t_1 - s)\|\|f(s)\|ds + \int_{t_1}^{t_2} \|R(t_1 - s)\|\|f(s)\|ds.$$

При $t_1 \to t_2$ правая часть неравенства стремится к нулю. Равностепенная непрерывность для случаев $t_1 < t_2 \leq 0$ и $t_1 \leq 0 \leq t_2$ очевидна.

Как следствие шагов 1 и 2, (H2) и (H1) вместе с теоремой Арцела-Асколи получим, что $N : C \to 2^C$ является компактным многозначным оператором, и следовательно, является уплотняющим отображением.

Шаг 4. N имеет замкнутый график. Пусть $y_n \to y_*, h_n \in Ny_n$ и $h_n \to h_*$. Мы должны доказать, что существует $f_n \in S(F, x_n)$ такая, что для $t \in J$

$$h_n(t) = g(t, (x_t)_n) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f_n(s) ds.$$

Докажем, что существует $f_* \in S_{F,x}$ такая, что для $t \in J$

$$h_*(t) = g(t, (x_t)_*) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f_*(s) ds.$$

Более конкретно, при $n \to \infty$ имеем

$$\|(h_n - Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)]) - (h_* - Q(t))[\varphi(0) - g(0, \varphi)]\| \to 0$$

Рассмотрим теперь линейный непрерывный оператор $\Gamma : L^1(J, E) \to C(J, E)$ определенный равенством

$$f \to \Gamma(f)(t) = \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds$$

Из леммы 2 следует, что $\Gamma \circ S_F$ является замкнутым графиком оператора. Более того

$$h_n(t) - Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + g(t, (x_t)_n) \in \Gamma(S_{F,x}).$$

Поскольку $y_n \to y_*$, то из леммы 2 следует, что

$$h_*(t) - Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] - g(t, (x_t)n) = \int\limits_0^t K(t-s) f_*(s) ds,$$

для некоторого $f_* \in S_{F,x}$. Следовательно, N является вполне непрерывное многозначное отображение полунепрерывное сверху с замкнутыми выпуклыми значениями.

Чтобы доказать, что N имеет неподвижную точку, нам понадобится еще один шаг.

Шаг 5. Множество

$$\Omega = \{x \in C : \lambda x \in Nx \text{ для некоторого } \lambda > 1\}$$

ограниченное. Пусть $x \in \Omega$. Тогда $\lambda x \in Nx$ для некоторого $\lambda \geq 1$. Таким образом существует $f \in S_{F,x}$ такая, что

$$x(t) = \lambda^{-1}[Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \lambda^{-1} g(t, x_t) + \lambda^{-1} \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds, t \in J].$$

Отсюда и из (H3)-(H4) следует, что для каждого $t \in J$ получаем

$$\|x(t)\| \leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT\int\limits_0^t p(s)\Psi(\|x_s\|)ds.$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \sup\{\|x(s)\| : -h \leq s \leq t\}, t \in J$$

Пусть $t^* \in [-h, t]$ такое, что $M(t) = \|x(t^*)\|$. Если $t^* \in J$ то из предыдущего неравенства следует

$$\mu(t) \leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT\int\limits_0^{t^*} p(s)\Psi(\|x_s\|)ds \leq$$

$$\leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT\int\limits_0^{t^*} p(s)\Psi(\|M(s)\|)ds.$$

Если $t^* \in [-h, 0]$, то $\mu(t) \leq \|\varphi\|$ и предыдущее неравенство выполнено очевидным образом.

Тогда имеем

$$c = v(0) = MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2]$$

$$\mu(t) \leq V(t), t \in J$$

$$v'(t) = Mc_1\mu(t) + MTp(t)\Psi(\mu t), t \in J.$$

Учитывая невозрастающий характер функции Ψ получим

$$v'(t) \leq Mc_1v(t) + MTp(t)\Psi(v(t)) \leq m(t)[v(t) + \Psi(v(t))], t \in J.$$

Отсюда следует, что для каждого $t \in J$

$$\int\limits_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{S + \Psi(s)} \leq \int\limits_0^T m(s)ds < \int\limits_{v(0)}^{\infty} \frac{ds}{S + \Psi(s)}\,.$$

Из этого неравенства следует, что существует постоянная L такая, что $v(t) \leq L, t \in J$ и следовательно, $\mu(t) \leq L, t \in J$. Поскольку, для каждого $t \in J$, $\|x_t\| < \mu(t)$, то имеем

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\| : -h \leq t \leq T\} \leq L,$$

где L, зависит только от T и функций p и φ. Это означает, что Ω ограничено.

Пусть $X := C$. Как следствие леммы 2.1 сделаем вывод о том, что N имеет неподвижную точку, которая, которая является слабым решением (1.3).

4. Интегро-дифференциальные включения типа Хейла

В этом разделе рассмотрим разрешимость задачи (1.4). Пусть выполняются следующие дополнительные предположения:

(H5) Для каждого $t \in O$, $a(t,s)$ измерима на $[0,t]$ и

$$a(t) = esssup\{|a(t,s)|, 0 \le s \le t\}$$

ограничено на J.

(H6) Отображение $t \to a_t$ непрерывное из J в $L^{\infty}(J,R)$, где $a_t(s) = a(t,s)$.

(H7) $\|F(t,u)\| = \sup\{|v| : v \in F(t,u)\} \le p(t)\Psi(\|u\|)$ для п.в. $t \in J$ и $u \in J$ и $u \in C$, где $p \in L^1(J,R_+)$ и $\Psi : R_+ \to (0,\infty)$ непрерывная и возрастающая функция с оценкой

$$\int\limits_0^T m(s)ds < \int\limits_c^{\infty} \frac{ds}{s+\Psi(s)},$$

где $c = M\|\varphi\|_C + MT\{\|x\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2\}$,

$$m(t) = \max\{Mc_1, MT^2 \sup_{t\in J} a(t)p(t)\} \text{ и } M = \sup\{\|Q(t)\|\}, t \in J.$$

Определим слабое решение задачи (1.4) с помошью функционально-интегрального уравнения

$$x(t) = g(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)] +$$

$$+ \int\limits_0^t R(t-s) \int\limits_0^s a(s,\tau)f(\tau)d\tau ds, t \in J, \tag{4.1}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L^1(J,E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

Определение 4.1. Функция $x : (-h,T) \to E, T > 0$ называется слабым решением задачи (1.4), если $x(t) = \varphi(t), t \in [-h,0]$ и существует $v \in L^1(J,E)$ такая, что $v(t) \in F(t,x_t)$ п.в. на J и удовлетворяет функционально-интегральному уравнению (4.1).

Теорема 4.2. Пусть выполняются предположения (H1)-(H4) и (H5)-(H7). Тогда система (1.4) имеет по крайней мере одно слабое решение на $[-h,T]$.

Доказательство. Пусть $C([-h,T],E)$ банаховое пространство непрерывных функций из $[-h,T]$ в E оснащенное нормой

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\| : t \in [-h,T]\}.$$

Преобразуем задачу (1.4) в задачу о неподвижной точке. Рассмотрим многозначное отображение $N_1 : C([-h,T],E) \to 2^{C([-h,T],E)}$ определенное через N_1x и множества функций $h \in C$ таких, что

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{если } t \in [-h,0] \\ q(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) + g(o,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) \int\limits_0^s a(s,\tau)f(\tau)d\tau ds, t \in J, \end{cases}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L(J,E), f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

Заметим, что неподвижные точки N_1 являются слабыми решениями (1.4).

Подобно тому как в теореме (3.1) мы можем показать, что N_1 является вполне непрерывным отображением имеющим ограниченную замкнутую выпуклую область значений и, кроме того, оно полунепрерывное сверху. Следовательно отображение N_1 является уплотняющим.

Мы повторим только шаг 5, т.е. покажем, что множество

$$N_1 = \{x \in C : \lambda x \in N_1 x \text{ для некоторых } \lambda > 1\}$$

является ограниченным.

Пусть $x \in N_1$. Тогда $\lambda x \in N_1 x$ для некоторого $\lambda > 1$. Таким образом, существует $f \in S_{f,x}$ такая, что

$$x(t) = \lambda^{-1} g(t,x_t) + \lambda^1 Q(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)] +$$

$$+\lambda^{-1}\int\limits_0^t R(t-s)\int\limits_0^s a(s,\tau)f(\tau)d\tau ds, t \in J.$$

Тогда из (H3)-(H4) вытекает, что для каждого $t \in J$ имеем

$$\|x(t)\| \leq M\|\varphi\| + MT[\|x(0)\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MT^2 \sup_{t\in J} a(t)\int\limits_0^t p(s)\Psi(\|x_s\|)ds.$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \sup\{\|x(s)\| : -h \leq S \leq T\}, t \in J.$$

Пусть $t^* \in [-h,t]$ такая точка, что $\mu(t) = \|x(t^*)\|$. Если $t^* \in J$, то из предыдущего неравенства имеем для $t \in J$,

$$\mu(t) \leq M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MT^2 \sup_{t\in J} a(t)\int\limits_0^t P(s)\Psi(\|x_s\|)ds \leq$$

$$\leq M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MC_1\int\limits_0^t \mu(s)ds + MT^2 \sup_{t\in J} a(t)\int\limits_0^t P(s)\Psi(\|x_s\|)ds.$$

Если $t \in [-h,0]$, то $\mu(t) \leq \|\varphi\|$ и предыдущее неравенство выполняется.

Обозначим правую часть предыдущего неравенства через $v(t)$. Тогда имеем

$$C = v(0) = M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2],$$

$$\mu(t) \leq v(t), t \in J,$$

$$v'(t) = M_1 C_1 \mu(t) + MT^2 \sup_{t \in J} a(t) p(t) \Psi(\mu(t)), t \in J.$$

Пользуясь тем, что φ является неубывающей функцией для $t > J$ получим

$$v'(t) \leq M_1 C_1 v(t) + MT^2 \sup_{t \in J} a(t) \mu(t) \Psi(v(t)) \leq$$

$$\leq m(t)[v(t) + \Psi(v(t))].$$

Отсюда для каждого $t \in J$ имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{s + \Psi(s)} \leq \int\limits_{0}^{T} m(s) ds < \int\limits_{v(0)}^{\infty} \frac{ds}{s + \Psi(s)}.$$

Из этого неравенства следует, что существует постоянная L такая, что $v(t) \leq L, t \in J$ и следовательно, $\mu(t) \leq L, t \in J$. Поскольку для каждого $t \in J, \|x_t\| \leq \mu(t)$ то имеем

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\|, -h < t \leq T\} < L,$$

где L зависит только от T и от функций p и Ψ. Это означает, что N_1 ограниченное отображение.

Пусть $X = C$. Тогда из леммы 2.4 следует, что N_1 имеет слабое решение.

5. Пример

Для иллюстрации полученных выше абстрактных результатов рассмотрим дробное функциональное интегродифференциальное включение в частных производных вида

$$\frac{\partial^\alpha [v(t,\zeta) - qv(t-h,\zeta)]}{\partial t^\alpha} \in \frac{\partial^2 v(t,\zeta)}{\partial \zeta^2} +$$

$$\int\limits_0^t (t-s) \int\limits_{-\infty}^{S} \eta(s, \tau - s, \zeta) G(\tau, v(t-h), \zeta) d\tau ds, t \in [0,T], \zeta \in [0,\pi] \tag{5.1}$$

$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0, t \in [0,T]$$

$$v(\theta,\zeta) = v_0(\theta,\zeta), \theta \in (\infty, 0], \zeta = [0,\pi],$$

где $0 < \alpha < 1, G : [0,T] \times E \times [0,\pi] \to P(R)$ - многозначное отображение с компактным и выпуклым множеством значений.

Пусть $E = L^2[0,\pi]$. Определим оператор A в виде

$$D(A) = \{u \in E : u'' \in E, u(0) = u(\pi) = 0\},$$

$$Au = u''.$$

Хорошо известно, что A является инфинитеземальным производящим оператором (генератором) аналитической полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ на E. В качестве фазового пространства берем $C_\gamma((-\infty,0],E)$ в виде

$$C_\gamma = \{\varphi \in C((-\infty,0]E) : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \text{ существует в } E\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{C_\gamma} = \sup\{e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\| : \theta \leq 0\}.$$

Для $t \in [0,T], \zeta \in [0,\pi]$ и $\varphi \in C_\gamma$ положим

$$x(t)(\zeta) = v(t,\zeta)$$

$$\varphi(\theta)(\zeta) = v_0(\theta,\zeta), \theta \in [-\infty,0],$$

$$a(t,s) = t - s$$

$$F(t,x_t)(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{0} \eta(t,\theta,\zeta)G(t,\varphi(0,\zeta))d\theta.$$

Тогда задача (5.1) может быть представлена в виде (4.1). Приложение теоремы 4.2 дает следующий результат.

Теорема 5.1. Пусть $0 < \alpha < 1, q < 1, \varphi \in C_\gamma$. *Тогда система (5.1) допускает слабое решение на* $(-\infty,T]$.

6. Заключение

Найдены достаточные условия существования слабых решений дробных дифференциальных и интегро-дифференциальных включений типа Хейла в банаховом пространстве. Приводится пример иллюстрирующий абстрактные результаты статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tolstonogov A., Differential Inclusions in a Banach Space // Springer, Netherlands, 2000.

2. Agarval R.P. et all, Viability theory and fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Functions, 151(3), pp. 563-580, 2005.

3. Kamenskii M.I. , Obukhovskii V.V. and Zecca P., Condencing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces // Walter de Grayter, Berlin, 2001.

4. Aubin J-P., Cellina A., Differential Inclusions-Set-valued Maps and Viability Theory// Springer, Berlin, 1984.

5. Auman R.J., Integrals of set-valued functions// An. Appl., 12, p. 1-12, 1965.

6. Aubin J.P., Clarke F.H., Monotone invariant solutions to differential inclusions. // J. London Math. Soc., 16, pp. 357-366, 1977.

7. Filippov A., Differential Equations with Discontinous Righthand Sides. // Control Systems, Springer, Netherlands, 1988.

8. Smirnov G.V., Introduction to the theory of Differential Inclusons. // Graduate Studies in Mathematics, v. 41, AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

9. Feckan M., Wang J.R., Pospishil M., Fractional-Order Equations and Inclusions. // De Grayter, Berlin, 2017.

10. Benchohra M., Henderson J., Ntougas S. and Quahab A., Existence results for fractional order functional differential equations with infinity delay // J. Math. Anal. Appl., v.338, pp. 1340-1350, 2008.

11. Aissani Kh., Benchohra M., Ezzinbi K., Fractional Integro-Differential Inclusions with state-dependent delay. // Differential Inclusions, Control and Optimization, v. 34, pp.153-167, 2014.

12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-G., On semilinear fractional order differential inclusions in Banach Spaces. // Fixed Point Theory, v. 18(1), pp. 269-292, 2017.

13. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-G., Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach Space. // Applicable Analys J., v. 96(4), pp. 571-591, 2017.

14. Hale J., Theory of Functional Differential Equations. // Springer, New York, 1977.

15. Илолов М., К теории абстракных эволюционных уравнений Хейла. // Докл. АН РТадж ССР, т. 33(7), сс. 430-433, 1990.

16. Илолов М., Функционально дифференциальные уранения Хейла с неограниченными операторами. // Вестник Тадж.Госуниверситета, №5: Математика, сс. 65-69, 1990.

17. Илолов М., Функционально-дифференциальные уравнения Хейла в банаховом пространстве. // Украинский математический журнал, т. 42(7), сс. 918-924, 1990.

18. Илолов М., Об уравнениях Хейла с неограниченными операторами в банаховом пространстве. // Докл. АН Тадж. ССР, т. 34(5), сс. 267-270, 1991.

19. Илолов М., Х.С. Кучакшоев, Д.Н. Гулджонов, О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространствах. // Доклады АН РТ, т. 61(2), сс. 113-120. 2018.

20. Илолов М., Гулджонов Д.Н., Рахматов Дж.Ш., Дробные интегро-дифференциальные включения типа Хейла в банаховом простраcтве. //Известия АН РТ, отделение физ.-мат., хим.геол. и тех. наук, №1(174), сс. 7-17, 2019.

21. Илолов М., Обобщенные дробные производные Лиувилля-Лизоркина и некоторые их свойства. // Материалы Межд. научной Конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. // Москва, МАКС-Пресс, сс. 64-66. 2019.

22. Иосида К., Функциональный анализ. // Изд. "Мир Москва, 1967.

23. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N., Measures of Noncompactness and Condencing Operators. // Springer, Berlin, 1992.

24. Martelli M., A Rothe's Type Theorem for Noncompact A cyclic valued Map. // Bull. Un. Math. Ital., v. 4, pp.70-76, 1975/

25. Kilbas A.A., Srivastava Hary M. and Trujillo Juan J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. // Elsevier Science BoV., Amsterdam, 2006.

26. Lasota A. and Opial Z., An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 13, pp. 781-786, 1965.

27. Hu S., Papageorgiou N.S., Handbook of Multivalued Analysis: Volume II. Applications. // Springer Science and Business Media, 2013.

REFERENCES

1. Tolstonogov, A. “Differential Inclusions in a Banach Space“ 2000, *Springer, Netherlands.*

2. Agarval, R. P., et all. 2005, “Viability theory and fuzzy differential equations“. *Fuzzy Sets and Functions*, vol.151, no.3, pp. 563-580.

3. Kamenskii, M. I., Obukhovskii, V. V., & Zecca, P. 2001, “ Condencing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces “ *Walter de Grayter, Berlin,*.

4. Aubin, J.-P. Cellina, A. 1984, “Differential Inclusions-Set-valued Maps and Viability Theory“, *Springer, Berlin.*

5. Auman, R. J., 1965, “Integrals of set-valued functions“// *An. Appl.*, 12, p. 1-12.

6. Aubin, J.-P. Clarke, F. H., 1977, “Monotone invariant solutions to differential inclusions.“, *J. London Math. Soc.*, 16, pp. 357-366.

7. Filippov, A. 1988, “Differential Equations with Discontinous Righthand Sides.“, *Control Systems, Springer*, Netherlands.

8. Smirnov, G. V., 2002, “Introduction to the theory of Differential Inclusons.“, *Graduate Studies in Mathematics*, v. 41, AMS, Providence, Rhode Island.

9. Feckan, M. Wang, J. R., Pospishil, M. 2017, “Fractional-Order Equations and Inclusions.“, *De Grayter, Berlin.*

10. Benchohra, M. Henderson, J. Ntougas, S. & Quahab, A. 2008, “Existence results for fractional order functional differential equations with infinity delay“, *J. Math. Anal. Appl.*, v.338, pp. 1340-1350.

11. Aissani, Kh. Benchohra, M. Ezzinbi, K. 2014, “Fractional Integro-Differential Inclusions with state-dependent delay.“, *Differential Inclusions, Control and Optimization*, v. 34, pp.153-167.

12. Kamenskii, M. Obukhovskii, V. Petrosyan, G. Yao, J.-G. 2017, “ On semilinear fractional order differential inclusions in Banach Spaces.“, *Fixed Point Theory*, v. 18(1), pp. 269-292.

13. Kamenskii, M. Obukhovskii, V. Petrosyan, G. Yao, J.-G. 2017, “Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach Space.“, *Applicable Analys J.*, v. 96(4), pp. 571-591.

14. Hale, J. 1977, “Theory of Functional Differential Equations.“, *Springer, New York.*

15. Ilolov, M. 1990, “On the theory of abstract evolutionary Hale equations.“, *Docl. AS Taj SSR*, т. 33(7), pp. 430-433.

16. Ilolov, M. 1990, “ Functional differential Hale equations with unbounded operators.“, *Bulletin of the Taj State University, Mathematics*, №5, pp. 65-69.

17. Ilolov, M. 1990, “ Functional differential Hale equations in a Banach space.“, *Ukrainian Mathematical Journal*, т. 42(7), pp. 918-924.

18. Ilolov, M. 1991, “ On Hale equations with unbounded operators in a Banach space.“, *Docl. AS Taj. SSR*, т. 34(5), pp. 267-270.

19. Ilolov, M. Kuchakshoev, Kh. S., Guljonov, D. N., 2018, “ On fractional linear Volterra equations in Banach spaces.“, *Reports of the Academy of Sciences of the RT*, т. 61(2), pp. 113-120.

20. Ilolov, M. Guljonov, D. N., Rahmatov, J. Sh., 2019, “ Hale type fractional integro-differential inclusions in Banach space.“, *News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Department of Physical, Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences*, №1(174), pp. 7-17, .

21. Ilolov, M. 2019, “ Generalized fractional Liouville-Lizorkin derivatives and some of their properties. // Materials Int. scientific conference dedicated to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichii. “, *Moscow, MAKS-Press*, pp. 64-66.

22. Yosida, K. 1967, “ Functional analysis “, *"Mir Moscow.*

23. Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., 1992, “ Measures of Noncompactness and Condencing Operators.“, *Springer, Berlin.*

24. Martelli, M. 1975, “A Rothe’s Type Theorem for Noncompact A cyclic valued Map.“, *Bull. Un. Math. Ital.*, v. 4, pp.70-76.

25. Kilbas, A. A., Srivastava, Hary M. & Trujillo, Juan J. 1975, “ Theory and Applications of Fractional Differential Equations.“, *Elsevier Science BoV., Amsterdam.*

26. Lasota, A. & Opial, Z. 1965, “An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations.“, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 13, pp. 781-786.

27. Hu, S. Papageorgiou, N. S., 2013, “Handbook of Multivalued Analysis: Volume II. Applications. “, *Springer Science and Business Media.*

Получено 14.08.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-226-235

Об оценках линейных форм от логарифмов некоторых рациональных чисел[1]

М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина (г. Брянск)

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru
Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
eszolotukhina@mail.ru
Лучин Михаил Юрьевич — Брянский государственный технический университет.
m.y.luchin@mail.ru

Abstract

В настоящее время одним из широко применяемых подходов при нахождении оценок показателя иррациональности является использование симметризованных интегралов. Они рассматривались и ранее (см., например, [1]), но наиболее динамичное развитие это направление приобрело в работах В. Х. Салихова и его учеников (см., например, [2]–[5]).

Отправной точкой стала статья В. Х. Салихова [6], в которой была усилена оценка меры иррациональности числа $\ln 3$: $\mu(\ln 3) \leq 5.125$. В 2014 г. К. Ву и Л. Ванг в [7] улучшили результат В. Х. Салихова, получив оценку $\mu(\ln 3) \leq 5.1163051$. В их работе применялись симметризованные многочлены первой степени. С помощью интегральной конструкции, основанной на симетризованных многочленах первой и второй степени, И. В. Бондарева, М. Ю. Лучин и В. Х. Салихов в [8], уточнили предыдущий результат К. Ву и Л. Ванга: $\mu(\ln 3) \leq 5.116201$.

Впервые квадратичные симметризованные многочлены были использованы в работе И. В. Бондаревой, М. Ю. Лучина и В. Х. Салихова [9]. Используя подобные многочлены, но рассматривая комплексный интеграл (модифицированный интеграл Е.Б.Томашевской) В. Х. Салихов и Е. С. Золотухина в [10] незначительно усилили оценку меры иррациональности числа $\ln\frac{5}{3}$: $\mu(\ln\frac{5}{3}) \leq 5.119417\ldots$. Предыдущие результаты принадлежали Е. Б. Томашевской [11], Е. С. Золотухиной [12], К. Ваананену, А. Хеймонену и Т. Матала-ахо [13].

Цель данной работы – получить новые оценки совместных приближений чисел $1, \ln 2, \ln 3, \ln 5$ и чисел $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \ln 5,\ \ln 7$, основываясь на интегральной конструкции, содержащей многочлены первой и второй степени.

Ключевые слова: мера иррациональности, совместные приближения, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина. Об оценках линейных форм от логарифмов некоторых рациональных чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 226–235.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-226-235

On astimate of irrationality measure of the logariphms of some rational numbers

M. Y. Luchinn, V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina (Bryansk)

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: svdh@rambler.ru
Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: eszolotukhina@mail.ru
Luchin Mikhail Yurevich — Bryansk State technical university.
e-mail: m.y.luchin@mail.ru

Abstract

At present the use of symmetrized integrals is one of the approaches to obtain estimates of irrationality measures. They were considered in the past (see [1]), but the most dynamic development of this direction acquired in the articles of V. H. Salikhov and his students (see [2]–[5]).

The beginning was V. H. Salikhov's article [6], in which the estimate of irrationality measure of the number $\ln 3$ was improved: $\mu(\ln 3) \leq 5.125$. In 2014 Q. Wu and L. Wang improved on this result and received the estimate $\mu(\ln 3) \leq 5.1163051$. In their work symmetrized polynomials of the first degree were used. With help of the integral construction based on symmetrized polynomials of first and second degree I. V. Bondareva, M. Y. Luchin and V. H. Salikhov in [8] improved the result of Q. Wu and L. Wang: $\mu(\ln 3) \leq 5.116201$.

For the first time quadratic symmetrized polynomials were used in [9]. Using similar polynomials in the complex integral (modified Tomashevskay integral) V. H. Salikhov and E. S. Zolotukhina improved the estimate of the irrationality measure of the number $\ln\frac{5}{3}$: $\mu(\ln\frac{5}{3}) \leq 5.119417\ldots$. Previous estimates were found by E. B. Tomashevskay [11], E. S. Zolotukhina [12], K. Väänänen, A. Heimonen, T. Matala-aho [13].

The aim of this article is to obtain a new estimate of join approximations by the numbers $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \ln 5$ and $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \ln 5,\ \ln 7$ using polynomial of first and second degree in the integral construction.

Keywords: irrationality measure, join approximations, symmetrized integrals.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
M. Y. Luchinn, V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, 2019, "On astimate of irrationality measure of the logariphms of some rational numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 226–235.

1. Введение

В 2002 г. в работе [15] были получены следующие оценки:

$$|p + q_1 \ln 2 + q_2 \ln 3 + q_3 \ln 5| > H^{-\gamma_1}, \tag{1}$$

где $p,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|q_1|, |q_2|, |q_3|)$, $H \geq H_0$, $\gamma_1 = 15.27049$,

$$|p + q_1 \ln 2 + q_2 \ln 3 + q_3 \ln 5 + q_4 \ln 7| > H^{-\gamma_2}, \tag{2}$$

где $p,\ q_1, \ldots,\ q_4 \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|q_1|, \ldots, |q_4|)$, $H \geq H_0$, $\gamma_2 = 256.865$.

В настоящей работе мы улучшим оценки (1) и (2).

Теорема 1. *Оценка (1) справедлива при значении показателя* $\gamma_1 = 14.5640221$.

Теорема 2. *Оценка (2) справедлива для* $\gamma_2 = 135.898431$.

Отметим, что для доказательства оценки (1) в работе [15] был использован интеграл вида

$$\int\limits_a^b \frac{(x-15)^{\alpha_1 n}(x-16)^{\alpha_2 n}(x-18)^{\alpha_3 n}(x-20)^{\alpha_4 n}\left(87x^2 - 3024x + 25920\right)^{\alpha_5 n}}{x^{n+1}} dx. \tag{3}$$

В нашей работе вместо интеграла (3) применяется интеграл вида

$$\int\limits_a^b \frac{(x-36)^{\beta_1 n}(x-40)^{\beta_2 n}(x-45)^{\beta_3 n}(x-48)^{\beta_4 n}\left(P_1(x)\right)^{\beta_5 n}\left(P_2(x)\right)^{\beta_6 n}\left(P_3(x)\right)^{\beta_7 n}}{x^{n+1}} dx, \tag{4}$$

где $P_1(x) = 2x - 75$, $P_2(x) = x^2 - 84x + 1740$, $P_3(x) = 3x^2 - 242x + 4860$, $\beta_1 = 0,430511$, $\beta_2 = 0.580022$, $\beta_3 = 0.379311$, $\beta_4 = 0.33961$, $\beta_5 = 0.020431$, $\beta_6 = 0.020157$, $\beta_7 = 0.000079$; $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$, n кратно 10^6, пределы интегрирования $a,\ b$ см. ниже.

Наконец, для получения оценки (2) в работе [15] применялся интеграл вида

$$\int\limits_{35}^w \frac{(x-35)^{\alpha_1 n}(x-36)^{\alpha_2 n}(x-40)^{\alpha_3 n}(x-42)^{\alpha_4 n}(x-45)^{\alpha_5 n}}{x^{n+1}} dx. \tag{5}$$

В настоящей работе для доказательства теоремы 2 вместо интеграла (5) применяется интеграл вида

$$\int\limits_{56}^w \frac{(x-56)^{\beta_1 n}(x-60)^{\beta_2 n}(x-63)^{\beta_3 n}(x-70)^{\beta_4 n}(x-72)^{\beta_5 n}(2x-135)^{\beta_6 n}}{x^{n+1}} dx. \tag{6}$$

где $\beta_1 = 0,244553$, $\beta_2 = 0.648682$, $\beta_3 = 0.432262$, $\beta_4 = 0.323185$, $\beta_5 = 0.215264$, $\beta_6 = 0.028133$; $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$, n кратно 10^6, $w \in \{60, 63, 70, 72\}$.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично выводу оценок (1) и (2) работы [15]. Мы для полноты изложения приведем доказательство теоремы 1 и краткую схему доказательства теоремы 2.

Начнем доказательство теоремы 1 со следующей леммы, доказанной К. Ву в работе [15] (лемма 1).

Лемма 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$; *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *существуют целые числа* $r_n, p_n^{(1)}, \ldots, p_n^{(m)}$ *такие, что* $\varepsilon_n^{(i)} = r_n\gamma_i - p_n^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |r_n| \leq \delta, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left|\varepsilon_n^{(i)}\right| = -\tau^{(i)}, \tag{7}$$

где $\delta,\ \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}$ *– положительные числа.*

Пусть также $\tau = \min\left(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}\right)$, $\tau^{(i)} \neq \tau^{(j)}$ для всех $i \neq j$. Тогда числа $1,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $H_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|p + q_1\gamma_1 + \ldots + q_m\gamma_m| \geq H^{-\frac{\delta}{\tau} - \varepsilon} \tag{8}$$

для любых целых чисел $p,\ q_1, \ldots, q_m$ и $H = \max_{1 \leq i \leq m} |q_i|,\ H \geq H_0(\varepsilon)$.

Лемма 1 обобщает лемму 2.1 работы [14], в которой был рассмотрен случай $m = 2$.

Определим для несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\nu_p = \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что $\frac{a}{b} = p^{\nu_p}\frac{a_1}{b_1}$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть, наконец, для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$ $D_0(f(x)) = f(0)$, $D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}$, $N \in \mathbb{N}$.

Определим для многочлена $P = Ax - B$, $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{N}$, $\nu_3(P) = \min(2, \nu_3(B))$, $\nu_5(P) = \min(1, \nu_5(B))$, а для многочлена $P^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где $A_0,\ A_1,\ A_0 \in \mathbb{Z}$, $A_2 \neq 0$, $(A_2, A_1, A_0) = 1$, $\nu_2(P^*) = \min(8, \nu_2(A_0), \nu_2(A_1) + 4)$, $\nu_3(P^*) = \min(4, \nu_3(A_0), \nu_3(A_1) + 2)$, $\nu_5(P^*) = \min(2, \nu_5(A_0), \nu_5(A_1) + 1)$.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки для* $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$\nu_3\left(D_N((P(x))^m\right) \geq m\nu_3(P) - 2N; \tag{9}$$

$$\nu_5\left(D_N((P(x))^m\right) \geq m\nu_5(P) - N; \tag{10}$$

$$\nu_2\left(D_N((P^*(x))^m\right) \geq m\nu_2(P^*) - 4N; \tag{11}$$

$$\nu_3\left(D_N((P^*(x))^m\right) \geq m\nu_3(P^*) - 2N; \tag{12}$$

$$\nu_3\left(D_N((P^*(x))^m\right) \geq m\nu_5(P^*) - N. \tag{13}$$

Доказательство. Имеем

$$(P(x))^m = (Ax - B)^m = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+,\, m_1 + m_2 = m} \binom{m}{m_1} (Ax)^{m_1}(-B)^{m_2} =$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+,\, m_1 + m_2 = m} \binom{m}{m_1} (-1)^{m_2} A^{m_1} B^{m_2} x^{m_1},$$

$$D_N\left((P(x))^m\right) = \binom{m}{N} (-1)^{m - N_1} A^N B^{m - N_1},$$

$$\nu_3\left(D_N\left(P(x)\right)^m\right) \geq N\nu_3(A) + (m - N)\nu_3(B) \geq m\nu_3(B) - N\nu_3(B) \geq m\nu_3(P) - 2N,$$

и неравенство (9) доказано.

Далее $\nu_5\left(D_N\left(P(x)\right)^m\right) \geq N\nu_5(A) + (m - N)\nu_5(B) \geq m\nu_5(B) - N\nu_5(B) \geq m\nu_5(P) - N$, и неравенство (10) доказано.

Пусть далее $\overline{m} = (m_0, m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^+)^3$, $|\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2$,

$$\gamma(\overline{m}) = \frac{|m|!}{m_0! m_1! m_2!},\ \gamma(\overline{m}) \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $P^*(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ имеем

$$(P^*(x))^m = \sum_{|\overline{m}| = m} \gamma(\overline{m}) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0} x^{m_1 + 2m_2},$$

$$D_N\left((P^*(x))\right)^m = \sum_{|\overline{m}| = m,\ m_1 + 2m_2 = N} \gamma\left(\overline{m}\right) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0},$$

$$\nu_2(D_N\left(P^*(x)\right)^m) \geq m_2\nu_2(A_2) + m_1\nu_2(A_1) + m_0\nu_2(A_0) \geq$$

$$\geq m_2\left(\nu_2\left(P^*\right) - 8\right) + m_1\left(\nu_2\left(P^*\right) - 4\right) + m_0\nu_2\left(P^*\right) = m\nu_2\left(P^*\right) - 4(2m_2 + m_1) = m\nu_2\left(P^*\right) - 4N,$$

и неравенство (11) доказано.

Аналогично,

$$\nu_3(D_N\,(P^*(x))^m) \ge m_2\nu_3(A_2) + m_1\nu_3(A_1) + m_0\nu_3(A_0) \ge$$
$$\ge m_2\,(\nu_3\,(P^*) - 4) + m_1\,(\nu_3\,(P^*) - 2) + m_0\nu_3\,(P^*) = m\nu_3\,(P^*) - 2(2m_2 + m_1) = m\nu_3\,(P^*) - 2N,$$

и неравенство (12) доказано.

Наконец,

$$\nu_5(D_N\,(P^*(x))^m) \ge m_2\nu_5(A_2) + m_1\nu_5(A_1) + m_0\nu_5(A_0) \ge$$
$$m_2\,(\nu_5\,(P^*) - 2) + m_1\,(\nu_5\,(P^*) - 1) + m_0\nu_5\,(P^*) = m\nu_5\,(P^*) - (2m_2 + m_1) = m\nu_5\,(P^*) - N,$$

и неравенство (13) доказано.

Это завершает доказательство леммы 2.

Отметим, что для параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_7$ интеграла (4) справедливы следующие соотношения:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + 2\beta_6 + 2\beta_7 = 1.790357; \tag{14}$$

$$2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_4 + 2\beta_6 + 2\beta_7 = 4; \tag{15}$$

$$2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7 = 2; \tag{16}$$

$$\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = 1. \tag{17}$$

Обозначим $\widetilde{P_n(x)}$ – многочлен, стоящий в числителе подынтегральной функции интеграла (4). Разложим $\frac{\widetilde{P_n(x)}}{x^{n+1}}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{\widetilde{P_n(x)}}{x^{n+1}} = P_{dn-1}(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{x^j}, \tag{18}$$

где все $a_j \in \mathbb{Q}$, $d = 0.790357$, $\deg P_{dn-1}(x) = dn - 1$ (см. (14),

$$P_{dn-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{dn-1} b_\nu x^\nu, \tag{19}$$

все $b_\nu \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения для* $j = 1, \ldots, n+1$

$$a_j = 2^{4j-4}3^{2j-2}5^{j-1}A_j,\ \ A_j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_7) \in (\mathbb{Z}^+)^7$, $m = m_1 + \ldots + m_7$.

Имеем стандартным образом

$$a_j = \sum_{\overline{m}\in(\mathbb{Z}^+)^7,\ m=n+1-j} D_{m_1}\left((x-36)^{\beta_1 n}\right) D_{m_2}\left((x-40)^{\beta_2 n}\right) D_{m_3}\left((x-45)^{\beta_3 n}\right) D_{m_4}\left((x-48)^{\beta_4 n}\right)$$
$$\times D_{m_5}\left((2x-75)^{\beta_5 n}\right) D_{m_6}\left((P_2(x))^{\beta_6 n}\right) D_{m_7}\left((P_3(x))^{\beta_7 n}\right), \tag{20}$$

где $m_i \le \beta_i n,\ i = 1, \ldots, 5,\ m_6 \le 2\beta_6 n,\ m_7 \le 2\beta_7 n$.

Из определений показателей $\nu_p(P)$ и $\nu_p(P^*)$ следует $\nu_3(2x - 75) = 1$, $\nu_5(2x - 75) = 1$, $\nu_2(P_2(x)) = 2$, $\nu_3(P_2(x)) = 1$, $\nu_5(P_2(x)) = 1$, $\nu_2(P_3(x)) = 2$, $\nu_3(P_3(x)) = 2$, $\nu_5(P_5(x)) = 1$.

По лемме 2 из равенства (20) получим

$$\begin{aligned}\nu_2(a_j) &\geq 2\beta_1 n - 4m_1 + 3\beta_2 n - 4m_2 + 4\beta_4 n - 4m_4 + 2\beta_6 n - 4m_6 + 2\beta_7 n - 4m_7 = (2\beta_1 + 3\beta_2 \\ &+ 4\beta_4 + 2\beta_6 + 2\beta_7)n - 4(m_1 + m_2 + m_4 + m_6 + m_7) \geq 4n - 4(n+1-j) \\ &= 4(j-1), \end{aligned} \tag{21}$$

и мы воспользовались равенством (15). Аналогично

$$\begin{aligned}\nu_3(a_j) &\geq 2\beta_1 n - 2m_1 + 2\beta_3 n - 2m_3 + \beta_4 n - 2m_4 + \beta_5 n - m_5 + \beta_6 n - 2m_6 + 2\beta_7 n - 2m_7 \\ &= (2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7)n - 2(m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7) \\ &\geq 2n - 2(n+1-j) = 2(j-1), \end{aligned} \tag{22}$$

и мы воспользовались равенством (16). Наконец, с помощью равенства (17),

$$\begin{aligned}\nu_5(a_j) &\geq \beta_2 n - m_2 + \beta_3 n - m_3 + \beta_5 n - m_5 + \beta_6 n - m_6 + \beta_7 n - m_7 \\ &= (\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7)n - (m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7) \\ &\geq n - (n+1-j) = j-1, \end{aligned} \tag{23}$$

Полученные выше неравенства (21)–(23) равносильны утверждению леммы.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 1.

Обозначим $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (36, 40, 45, 48)$; $q_n = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$;

$$\varepsilon_n^{(i)} = q_n \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\widetilde{P_n(x)}}{x^{n+1}} dx, \ i = 1, 2, 3; \tag{24}$$

$$\gamma_1 = \ln \frac{c_1}{c_0} = \ln \frac{10}{9}, \ \gamma_2 = \ln \frac{c_2}{c_1} = \ln \frac{9}{8}, \ \gamma_3 = \ln \frac{c_3}{c_2} = \ln \frac{16}{15}. \tag{25}$$

Покажем, что

$$\varepsilon_n^{(i)} = r_n \gamma_i - p_n^{(i)}, \ i = 1, 2, 3,$$

где $r_n, \ p_n^{(1)}, \ p_n^{(2)}, \ p_n^{(3)} \in \mathbb{Z}$.

Вычислим последовательно интегралы (24). Имеем из (18)

$$\varepsilon_n^{(1)} = q_n \int\limits_{36}^{40} P_{dn-1}(x) dx + a_1 q_n \ln x \Big|_{36}^{40} + q_n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{j-1} \frac{1}{x^{j-1}} \Big|_{36}^{40}.$$

Очевидно, $q_n \int\limits_{36}^{40} P_{dn-1}(x) dx \in \mathbb{Z}$; по лемме 3 $a_1 \in \mathbb{Z}$, $q_n \frac{1}{j-1} \in \mathbb{N}$, $j = 2, \ldots, n+1$, $\frac{a_j}{40^{j-1}} \in \mathbb{Z}$, $\frac{a_j}{36^{j-1}} \in \mathbb{Z}$, поэтому $\varepsilon_n^{(1)} = r_n \gamma_1 - p_n^{(1)}$, где $r_n = a_1 q_n \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$.

Аналогично

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{(2)} &= q_n \int\limits_{40}^{45} P_{dn-1}(x) dx + r_n \ln x \Big|_{40}^{45} - q_n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{j-1} \frac{1}{x^{j-1}} \Big|_{40}^{45}, \ \frac{a_j}{45^{j-1}} \in \mathbb{Z}; \\ \varepsilon_n^{(2)} &= r_n \gamma_2 - p_n^{(2)}, \ p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}; \\ \varepsilon_n^{(3)} &= r_n \gamma_2 - p_n^{(3)}, \ p_n^{(3)} \in \mathbb{Z} \text{ ввиду } \frac{a_j}{48^{j-1}} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Найдем асимптотику r_n и $\max_{i\in\{1,2,3\}}\left|\varepsilon_n^{(i)}\right|$ стандартным образом. Пусть (см. (4))

$$f(x)=\frac{(x-36)^{\beta_1}(x-40)^{\beta_2}(x-45)^{\beta_3}(x-48)^{\beta_4}\left(P_1(x)\right)^{\beta_5}\left(P_2(x)\right)^{\beta_6}\left(P_3(x)\right)^{\beta_7}}{x}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|r_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n+\ln|f(-52.415787)|=1+4.183111=5.183111;$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n+\ln|f(37.740884)|=1-1.356279=-0.356279;$$

аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(2)}\right|=1+\ln|f(42.861134)|=1-1.362953=-0.362953;$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(3)}\right|=1+\ln|f(46.661613)|=1-1.3562281=-0.3562281.$$

В обозначениях леммы 1 (см. (7)) получим $\delta=5.183111$, $\tau^{(1)}=0.356279$, $\tau^{(2)}=0.362953$, $\tau^{(3)}=0.356281$, $\tau=\min\left(\tau^{(1)},\tau^{(2)},\tau^{(3)}\right)=\tau^{(1)}$, все $\tau^{(1)},\tau^{(2)},\tau^{(3)}$ различны. По лемме 1 из (25) следует

$$|p+q_1\ln\frac{10}{9}+q_2\ln\frac{9}{8}+q_3\ln\frac{16}{15}|>H^{-\frac{\delta}{\tau}-\varepsilon}. \tag{26}$$

Но

$$q_1\ln\frac{10}{9}+q_2\ln\frac{9}{8}+q_3\ln\frac{16}{15}=(q_1-3q_2+4q_3)\ln 2+(-2q_1+2q_2-q_3)\ln 3+(q_1-q_3)\ln 5;$$
$$q_1'\ln 2+q_2'\ln 3+q_3'\ln 5=(2q_1'+3q_2'+5q_3')\ln\frac{10}{9}+(3q_1'+5q_2'+7q_3')\ln\frac{9}{8}+(2q_1'+3q_2'+4q_3')\ln\frac{16}{15}.$$

Но тогда из (26) следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично, поэтому ограничимся краткой схемой. Для параметров $\beta_1,\ldots,\beta_6$ интеграла (6) справедливы соотношения

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_6=1.892079; \tag{27}$$

$$\begin{gathered}3\beta_1+2\beta_2+\beta_4+3\beta_5=3;\\ \beta_2+2\beta_3+2\beta_5+2\beta_6=2;\\ \beta_2+\beta_4+\beta_6=1;\\ \beta_1+\beta_3+\beta_4=1.\end{gathered} \tag{28}$$

Аналогичное (18) соотношение для подынтегральной функции интеграла (6) выполняется при $d=0.892079$ (см. (27)).

Наконец вместо леммы 3 из равенств (28) получим соотношение вида

$$a_j=2^{3j-3}3^{2j-2}5^{j-1}7^{j-1}A_j,\ A_j\in\mathbb{Z},\ j=1,\ldots,n+1. \tag{29}$$

Обозначим $(c_0,c_1,c_2,c_3,c_4)=(56,60,63,70,72)$. Рассмотрим вместо интегралов (24) следующие интегралы

$$\varepsilon_n^{(i)}=q_n\int\limits_{c_{i-1}}^{c_i}\frac{\widetilde{P_n(x)}}{x^{n+1}}dx,\ i=1,2,3,4.$$

Пусть $\gamma_1 = \ln\frac{c_1}{c_0} = \ln\frac{15}{14}$, $\gamma_2 = \ln\frac{c_2}{c_1} = \ln\frac{21}{20}$, $\gamma_3 = \ln\frac{c_3}{c_2} = \ln\frac{70}{63} = \ln\frac{10}{9}$, $\gamma_4 = \ln\frac{c_4}{c_3} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}$.

Как в доказательстве теоремы 1 с помощью соотношений (29) получим, что

$$\varepsilon_n^{(i)} = r_n\gamma_i - p_n^{(i)},\ i = 1, 2, 3, 4,$$

где $r_n,\ p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(4)} \in \mathbb{Z}$.

Пусть (см. (6))

$$f(x) = \frac{(x-56)^{\beta_1}(x-60)^{\beta_2}(x-63)^{\beta_3}(x-70)^{\beta_4}(x-72)^{\beta_5}(2x-135)^{\beta_6}}{x}.$$

Тогда

$$\delta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|r_n| = 1 + \ln|f(-70.793856)| = 6.027489;$$
$$\tau = -(1 + \ln|f(71.386304)|) = 0.044353,$$

и с помощью леммы 1 получаем оценку теоремы 2.

3. Заключение

В работе усилены оценки совместных приближений чисел 1, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ и 1, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.

2. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63, № 3. С. 163-164.

3. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.

4. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С. 785-797.

5. Лучин М. Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{7}{4}$ // Чебышевский сб. 2013. Том 14, № 2. С. 123-131.

6. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.

7. Wu Q, L. Wang. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.

8. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ // Чебышевский сборник. 2018. Том 19. № 1. С. 15-25.

9. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 7$ // Математические заметки (в печати).

10. Салихов В. Х., Золотухина Е. С., Томашевская Е. Б. О показателе иррациональности $\ln\frac{5}{3}$ // Чебышевский сборник (в печати).

11. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Том 16. № 6. С. 157-166.

12. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Том 83. № 3. С. 428-438.

13. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

14. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.

15. Wu Q. 2002, ”On the linear independence measure of logarithms of rational numbers”, Math. Comput., vol. 72, № 242, pp. 901-911.

REFERENCES

1. Rhin G., 1987, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité”, Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.

2. Salikhov, V. H., 2008, “On the irrationality measures of π”, Russian Mathematical Surveys, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)

3. Salnikova, E., S. 2007, “On irrationality measures of some values of the Gauss function”, Chebyshevskii Sbornik, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)

4. Bashmakova M. G.,2010, “Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions”, Mathematical Notes, vol. 88, no. 6, pp. 785-797. (Russian)

5. Luchin M. Yu.,2013, “The estimate of the irrationality measures of number $\ln\frac{7}{4}$”, Chebyshevskii Sbornik, vol. 14, no. 2, pp. 123-131. (Russian)

6. Salikhov, V. H. 2007, “On the irrationality measures of $\ln 3$”, Doklady Mathematics, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)

7. Wu Q, L. Wang. 2014, “On the irrationality measure of $\log 3$”, Journal of Number Theory, vol. 142, pp. 264-273.

8. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H., 2018, “Symmetrized polynimials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$”, Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, № 1, pp. 15-25. (Russian)

9. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H., “On the irrationality measure of $\ln 7$”, Mathematical Notes (in print) (Russian)

10. Salikhov, V. H., Zolotukhina E.S., “On the irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$”, Chebyshevskii Sbornik (in print) (Russian)

11. Tomashevskaya E. B., 2012, “On Diophantine approximations to $\log x$”, J. Math. Sci., vol. 182, № 4, pp. 552-559.

12. Salnikova E., S. 2008, “Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms”, Mathematical Notes, vol. 83, № 3, pp. 428-438. (Russian)

13. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, “On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function”, Manuscripta Math., vol. 81, pp. 183-202.

14. Hata M. 1993, “Rational approximations to π and some other numbers”, Acta Arith., vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.

15. Wu Q. 2002, ”On the linear independence measure of logarithms of rational numbers”, Math. Comput., vol. 72, № 242, pp. 901-911.

Получено 25.06.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.84 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-246

О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы

У. М. Пачев (Нальчик), Т. А. Шакова (Нальчик)

Урусби Мухамедович Пачев — доктор физико-математических наук, профессор; Кабардино-Балкарский государственный университет.
e-mail: urusbi@rambler.ru
Шакова Татьяна Анатольевна — аспирант кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино—Балкарский государственный университет.
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

Abstract

В работе рассматриваются вопросы, связанные с группой единиц кватернионного порядка O_f, соответствующего неопределенной анизотропной тернарной квадратичной форме $f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2$, где $b,\ c > 0$ — целые числа, причем число c не является нормой из квадратичного расширения $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$.

Относительно указанной группы единиц нами доказано,что она содержит бесконечную некоммутативную 2-порожденную подгруппу, описываемую с помощью группы единиц Пелля. Первые исследования, относящие к группе единиц алгебры с делением были проведены в 1937 г. М. Эйхлером, установившим их конечную порожденность. Определенный интерес в связи с нашей работой представляют результаты, полученные Basilla J. M. и Bada H. в 2005 г. для уравнений вида $x^2 - dy^2 = \pm m$, которые могут быть применены в дальнейшем исследовании группы единиц.

Другой полученный нами результат относится к вопросу о числе попарно неассоциированных обобщенных кватернионов заданной нормы m из O_f. Этот вопрос тесно связан с единицами порядка O_f и с группами единиц Пелля.

Следует отметить, что в алгебрах матриц при изучении их арифметики получены простые точные формулы для числа примитивных неассоциированных справа (слева) целых матриц заданного определителя, которые имеют применения в так называемом дискретном эргодическом методе Ю. В. Линника при решении вопросов представимости целых чисел неопределенными изотропными тернарными квадратичными формами. Ряд результатов, относящихся к этому вопросу были получены первым из авторов.

Что же касается вопроса о числе неассоциированных обобщенных кватернионов заданной нормы m порядка O_f, то насколько нам известно результатов описанных видов до сих пор не встречалось и видимо это связано с тем, что рассматриваемый нами порядок кватернионов, наверное, имеет довольно сложное строение.

В настоящей работе вместо точных формул удалось получить только верхнюю и нижнюю оценки для числа попарно неассоциированных кватернионов нормы m из порядка O_f.

Ключевые слова: Тернарная квадратичная форма, алгебра обобщенных кватернионов, порядок кватернионов, норма кватерниона, группа кватернионных единиц, уравнение Пелля, бинарная квадратичная форма, ассоциированность кватернионов.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
У. М. Пачев, Т. А. Шакова О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 236–246.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.84 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-246

On units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form

U. M. Pachev (Nalchik), T. A. Shakova (Nalchik)

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of algebra and differential equations, Kabardino–Balkarian State University.
e-mail: urusbi@rambler.ru
Shakova Tatyana Anatolyevna — postgraduate student of the Department of algebra and differential equations, Kabardino–Balkarian State University.
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

Abstract

The paper considers issues related to the group of units on the quaternion order O_f corresponding to the indefinite anisotropic ternary quadratic form

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2,$$

where $b,\ c > 0$ are integers, an the number c is not the norm from quadratic field $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$.

With respect to the indicated group if units, we have proved that it contains an indefinite noncommutative 2–generated subgroup described by means of the group of Pell units. The first studies relating to the group of units of division algebra were carried out in 1937 M. Eichler, who established their final generation.

Of particular interest in connection with our work are the results obtained by Basilla J. M. and Bada H. in 2005 for equations of the form $x^2 - d\,y^2 = \pm m$, with can be applied in the further study of the group of units of the quaternion order under consideration.

Another result to the question of the number of pairwise unassociated generalized quaternions of a given norm m from order O_f. This question is closely related to units of order O_f and to groups of Pell units.

It should be noted that, in the study of their arithmetic matrix algebras obtained simple exact formulas for the number of primitive unassociated right (left) whole matrices of a given determinant that have applications in the so-called discrete ergodic method of Yu. V. Linnik for solving the representability of integers by indefinite isotropic ternary quadratic forms. A series of results related to this issue were obtained by the first on the authors.

As for the question of the number of unassociated generalized quaternions of a given norm and order O_f, as far as we know, the results of the presented species have not yet been met, and apparently this is due to the fact that the quaternion order under consideration, probably, it has a rather complicated structure. In the present paper, instead of exact formulas, it was possible to obtain upper and lower bounds for the number of pairwise unassociated quaternions of norm in from order O_f.

Keywords: ternary quadratic forms, algebra of generalized quaternions, quaternion order, quaternion norm, group of quaternion units, Pell equation, binary quadratic form, quaternion association.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
U. M. Pachev, T. A. Shakova, 2019, "On units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 236–246.

Мы будем рассматривать группу единиц кватернионного порядка неопределённой тернарной квадратичной формы

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2 \tag{1}$$

над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, где $b,\ c$ — целые числа; $b > 0,\ c > 0$, при этом число c не является нормой из квадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$; последнее требование означает, что форма f не представляет нуль нетривиального, т. е. она является анизотропной.

С тернарной квадратичной формой f мы сопоставляем алгебру U_f обобщённых кватернионов с базисной формой f над полем $\mathbb{Q}$, при этом, кватернионные базисные единицы $i_1,\ i_2,\ i_3$ задаются следующей таблицей умножения

$$\begin{aligned}
&1)\quad i_1^2 = -b\,c, \quad i_2^2 = c, \quad i_3^2 = b;\\
&2)\quad i_1\,i_2 = -c\,i_3, \quad i_2\,i_1 = c\,i_3;\\
&3)\quad i_1\,i_3 = b\,i_2, \quad i_3\,i_1 = -b\,i_2;\\
&4)\quad i_2\,i_3 = i_1, \quad i_3\,i_2 = -i_1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Сразу же может возникнуть вопрос: почему таблица умножения (2) базисных кватернионных единиц $i_1,\ i_2,\ i_3$ задаётся именно в таком виде. Для ответа на такой вопрос мы рассмотрим общее правило составления таблицы умножения базисных кватернионных единиц $i_1,\ i_2,\ i_3$ соответствующее произвольной тернарной квадратичной форме. Эта таблица получена из более общего правила составления таблицы умножения, принадлежащего А. В. Малышеву (см. [2], гл. IV) в случае тернарных квадратичных форм, только мы рассматриваем такую таблицу в случае неопределённой тернарной квадратичной формы

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \alpha_{i\,j}\,x_i\,x_j. \tag{3}$$

При этом рассматриваем ещё алгебраически взаимную форму $\overline{f}$ для формы f, т. е.

$$\overline{f} = \overline{f}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \overline{\alpha}_{i\,j}\,x_i\,x_j, \tag{4}$$

где $\overline{\alpha}_{i\,j}$ есть алгебраическое дополнение к элементу $\alpha_{i\,j}$.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad i_1^2 = \overline{\alpha}_{1\,1}, \quad i_2^2 = -\overline{\alpha}_{2\,2}, \quad i_3^2 = -\overline{\alpha}_{3\,3};\\
&2)\quad i_1\,i_2 = -\overline{\alpha}_{1\,2} + \alpha_{3\,1}\,i_1 + \alpha_{3\,2}\,i_2 + \alpha_{3\,3}\,i_3;\\
&3)\quad i_2\,i_3 = -\overline{\alpha}_{2\,3} + \alpha_{1\,1}\,i_1 + \alpha_{1\,2}\,i_2 + \alpha_{1\,3}\,i_3;\\
&4)\quad i_3\,i_1 = -\overline{\alpha}_{3\,1} + \alpha_{2\,1}\,i_1 + \alpha_{2\,2}\,i_2 + \alpha_{2\,3}\,i_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Теперь из (5) получаем соотношения (2).

Элементы алгебры U_f обобщённых кватернионов записываются в виде

$$X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3,$$

где $x_k \in \mathbb{Q}$.

Кватернион $\overline{X} = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3$ называется сопряжённым кватерниону X. Элемент $\mathrm{N}(X) = X\overline{X} = \overline{X}X = x_0^2 + \overline{f}(x_1, x_2, x_3)$ называется нормой кватерниона $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$, где $\overline{f}$ — форма, взаимная форме f при этом $\mathrm{N}(X) \in \mathbb{Q}$.

Скалярной частью $\mathrm{Sc}(X)$ кватерниона $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ называется число x_0 и значит, $2\,\mathrm{Sc}(X) = X + \overline{X}$, при этом кватернион $\mathrm{Ve}(X) = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ называется векторной частью кватерниона X.

В связи с приложениями кватернионной алгебры U_f к вопросам представления целых чисел тернарными квадратичными формами используется следующее представление

$$X = \mathrm{Sc}(X) + \mathrm{Ve}(X).$$

Норма кватерниона обладает свойством мультипликативности $\mathrm{N}(XY) = \mathrm{N}(X)\cdot\mathrm{N}(Y)$ для любых $X,\ Y \in U_f$.

Из определения нормы следует, что если $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$, то

$$\mathrm{N}(X) = x_0^2 + b\,c\,x_1^2 - c\,x_2^2 - b\,x_3^2$$

в алгебре U_f для $f = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2$.

Здесь мы ограничимся только необходимыми понятиями из алгебры обобщённых кватернионов (более полные сведения можно найти в [2, 3, 4]).

В алгебре неопределённых анизотропных кватернионов U_f выделяем множество O_f элементов, называемых целыми кватернионами, а именно

$$O_f = \{x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \mid x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что множество O_f обладает свойствами:

1) O_f является кольцом (некоммутативным);
2) $1,\ i_1,\ i_2,\ i_3 \in O_f$;
3) любой кватернион $X \in O_f$ удовлетворяет уравнению $X^2 - (2\,\mathrm{Sc}\,X)\,X + \mathrm{N}(X) = 0$ с целыми коэффициентами.

Множество O_f, удовлетворяющее условиям 1)–3) называется порядком целых обобщённых кватернионов. Ненулевой кватернион $\mathscr{E} \in O_f$ называется кватернионной единицей, если $\mathscr{E}^{-1} \in O_f$. Ясно, что базисные единицы $i_1,\ i_2,\ i_3 \in O_f$ не являются единицами порядка O_f. Кватернион $X \in O_f$ является единицей тогда и только тогда, когда $\mathrm{N}(X) = \pm 1$. Группе единиц алгебр с делением впервые были исследованы М. Эйхлером [5], установившим их конечную порождённость. Относительно группы единиц O_f^* порядка O_f нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Группа единиц O_f^* кватернионного порядка O_f, соответствующего неопределённой анизотропной тернарной квадратичной форме $f = x^2 - b\,y^2 - c\,z^2$ является бесконечной некоммутативной группой, содержащей бесконечную 2-порождённую подгруппу, изоморфную прямому произведению 2^x циклических подгрупп.*

Доказательство. Пусть $E = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \in O_f^*$. Тогда

$$x_0^2 + b\,c\,x_1^2 - c\,x_2^2 - b\,x_3^2 = 1. \tag{6}$$

Перепишем уравнение (6) в следующем виде

$$x_0^2 - c\,x_2^2 - b\left(x_3^2 - c\,x_1^2\right) = 1. \tag{7}$$

Если в уравнении (7) положим $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$, то получим уравнение Пелля $x_0^2 - c\,x_2^2 = 1$. Его решения дают бесконечную циклическую подгруппу, изоморфную группе единиц вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$. Полученную подгруппу группы O_f^* обозначим через E_c. Её единицы имеют вид $\mathscr{E} = x_0 + x_2\,i_2$ тогда $x_0^2 - c\,x_2^2 = 1$,

$$E_c = \langle x_0 + x_2\,i_2 \mid x_0 + \sqrt{c}\,x_2 \text{ — основная единица квадратичного поля } \mathbb{Q}\big(\sqrt{c}\big)\rangle.$$

Перепишем уравнение (6) ещё в следующем виде

$$x_0^2 - b\,x_3^2 - c\left(x_2^2 - b\,x_1^2\right) = 1.$$

Положив в этом уравнении $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$ опять получим уравнение Пелля $x_0^2 - b\,x_3^2 = 1$. Его решения тоже образуют бесконечную циклическую подгруппу в группе O_f^*. Обозначим её через E_b, т. е. $E_b = \langle x_0 + x_3\,i_3 \mid x_0 + \sqrt{b}\,x_3$ — основная единица квадратичного поля $\mathbb{Q}\Big(\sqrt{b}\Big)\rangle$.

Если теперь $\mathscr{E}_b \in E_b$ и $\mathscr{E}_c \in E_c$, то $\mathrm{N}\left(\mathscr{E}_b \cdot \mathscr{E}_c\right) = 1$, т. е. $\mathscr{E}_b \cdot \mathscr{E}_c$ также есть единицы порядка O_f, при этом вообще говоря $\mathscr{E}_b \cdot \mathscr{E}_c \neq \mathscr{E}_c \cdot \mathscr{E}_b$. Поэтому получаем 2-порождённую бесконечную некоммутативную подгруппу в группе единиц O_f^*.

Некоммутативность полученной группы следует из того, что в произведении

$$(x_0 + x_2\,i_2)\,(x_0 + x_3\,i_3)$$

имеем, что $i_2\,i_3 \neq i_3\,i_2$.

Обозначим, полученную 2-порождённую подгруппу через $H_{b,\,c}$. Тогда

$$H_{b,\,c} \cong H_b \times H_c; \quad H_{b,\,c} < O_f^*; \quad H_{b,\,c} \cong E_b \times E_c \quad \text{и} \quad E_b \cap E_c = \{1\}\,.$$

□

Перейдём теперь ко второй части нашей работы. С единицами тесно связан вопрос об ассоциированности элементов в кватернионном порядке O_f. Два кватерниона $\alpha,\ \beta \in O_f$ называются ассоциированными справа, если $\alpha = \beta\,\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — некоторая единица из O_f^* (аналогично определяется ассоциированность слева).

Обозначим через $\sigma\,(O_f,\ m)$ число попарно неассоциированных справа (слева) кватернионов нормы m из порядка O_f.

Ввиду того, что условия анизотропности и неопределённости базисной тернарной квадратичной формы f вносят некоторую сложность, мы можем получить только оценки для $\sigma\,(O_f,\ m)$. Доказательство верхней оценки для этой величины в точности проводится как в случае ассоциированности в алгебраических полях (см. [7]). При этом для нижней оценки $\sigma\,(O_f,\ m)$ используется понятие главного представления числа m неопределённой бинарной квадратичной формой (см. [8, 9]). В нашем случае это понятие используется по отношению к квадратичной форме $x^2 - d\,y^2$ при $d > 0$.

Представление $(x,\ y)$ целого числа m формой $x^2 - d\,y^2$ называется главным, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) $1 \leqslant \dfrac{x + \sqrt{d}\,y}{x - \sqrt{d}\,y} < \mathscr{E}^2$,

2) $x - \sqrt{d}\,y > 0$,

где $\mathscr{E}$ — основная единица вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}\Big(\sqrt{d}\Big)$, при этом $x^2 - d\,y^2 = m$.

Оказывается, что число главных представлений натурального числа m формой $x^2 - d\,y^2$ будет конечным, в то время, как число всех представлений числа m такой формой будет бесконечно.

Теперь сформулируем и докажем следующий основной результат о числе попарно неассоциированных кватернионов нормы m из порядка O_f.

Теорема 2. *Для величины $\sigma(O_f,\ m)$ справедливы оценки*

$$\max\{\mathrm{R}_b(m),\ \mathrm{R}_c(m)\} < \sigma(O_f,\ m) < m^4,$$

где $\mathrm{R}_b(m),\ \mathrm{R}_c(m)$ — количества главных представлений числа m соответственно формами $x^2 - b\,y^2$ и $x^2 - c\,y^2$; $f = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2$.

Доказательство. В случае верхней оценки для $\sigma(O_f,\ m)$ воспользуемся рассуждениями [7], относящимся к целым алгебраическим числам заданной нормы. Для этого в кватернионном порядке O_f с базисом $1,\ i_1,\ i_2,\ i_3$ рассматриваем сравнение по числовому модулю m, т. е. сравнение вида $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$, означающее, что $\alpha - \beta$ делится в порядке O_f на число m; $\alpha,\ \beta \in O_f$, иначе говоря, $\alpha - \beta = m\,\gamma$ при некотором $\gamma \in O_f$.

Так как всякий кватернион $\alpha \in O_f$ сравним по модулю m только с одним из кватернионов

$$x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3,$$

где $0 \leqslant x_j < m\ \ (0 \leqslant j \leqslant 3)$, то все кватернионы из O_f разбиваются на m^4 классов сравнимых между собой кватернионов по модулю m.

Далее, следуя рассуждениям [7] получаем, что если два кватерниона α и β нормы m из O_f принадлежат одному и тому же классу вычетов по модулю m, то имеем равенства

$$\alpha - \beta = m\,\gamma = \gamma\,m,$$

при некотором $\gamma \in O_f$.

Например, пусть $\alpha - \beta = \gamma\,m$. Тогда $\alpha\,\beta^{-1} = 1 + \gamma\,m\,\beta^{-1} = 1 + \gamma\,\overline{\beta} \in O_f$, где $\overline{\beta}$ — кватернион, сопряжённый с β. Теперь получаем $\alpha = \left(1 + \gamma\,\overline{\beta}\right)\,\beta$, т. е. $m = \mathrm{N}\left(1 + \gamma\,\overline{\beta}\right) m$, откуда $\mathrm{N}\left(1 + \gamma\,\overline{\beta}\right) = 1$ и, значит, $\varepsilon = 1 + \gamma\,\overline{\beta}$ есть единица порядка O_f. Но тогда $\alpha = \varepsilon\,\beta$, где ε — единица O_f, откуда следует, что α и β ассоциированы слева. Аналогично показывается, что α и β ассоциированы и справа, следовательно, кватернионы нормы m из одного и того же класса вычетов по модулю m ассоциированы между собой.

Отсюда сразу следует, что $\sigma(O_f,\ m) < m^4$, тем самым верхняя оценка доказана.

Перейдём теперь к нижней оценке для $\sigma(O_f,\ m)$. Чтобы получить интересующую нас нижнюю оценку, мы будем рассматривать не весь порядок O_f, а его подпорядок, состоящий из кватернионов вида $x_0 + x_2\,i_2$ с целыми коэффициентами $x_0,\ x_2$.

Обозначим такой подпорядок через $O_f^{(c)} = \left\{x_0 + x_2\,i_2 \mid x_0,\ x_2 \in \mathbb{Z},\ i_2^2 = c\right\}$.

Покажем, что никакие два различных кватерниона из $O_f^{(c)}$ не могут быть ассоциированными с помощью единицы $\mathscr{E} \in O_f$ такой, что $\mathscr{E} \notin O_f^{(c)}$.

Допустим, что кватернионы $x_0 + x_2\,i_2$ и $y_0 + y_2\,i_2$ ассоциированы в O_f, т. е.

$$(x_0 + x_2\,i_2)\mathscr{E} = y_0 + y_2\,i_2,$$

где $\mathrm{N}(\mathscr{E}) = 1$ и $\mathscr{E} = q_0 + q_1\,i_1 + q_2\,i_2 + q_3\,i_3 \in O_f$. Покажем, что тогда $q_1 = 0$ и $q_3 = 0$.

Действительно, имеем $(x_0 + x_2\,i_2)(q_0 + q_1\,i_1 + q_2\,i_2 + q_3\,i_3) = y_0 + y_2\,i_2$.

Тогда в силу однозначности разложения любого кватерниона из O_f по базисным единицам $1,\ i_1,\ i_2,\ i_3$ из этого равенства получаем систему

$$\begin{cases} y_0\,q_1 + y_2\,q_3 = 0,\\ c\,y_2\,q_1 + y_0\,q_3 = 0,\end{cases}$$

откуда $q_1 = 0$ и $q_3 = 0$.

Следовательно, $\mathscr{E} = q_0 + q_2\,i_2 \in O_f^{(c)}$.

Ввиду этого мы можем ограничиться рассмотрением неассоциированности кватернионов только в порядке $O_f^{(c)}$ (аналогично и в случае с порядком $O_f^{(b)}$).

Как и в доказательстве теоремы 1 имеем

$$x_0^2 - c\,x_2^2 - b\left(x_3^2 - c\,x_1^2\right) = m.$$

Положив в нём $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, получаем

$$x_0^2 - c\,x_2^2 = m. \tag{8}$$

Аналогично получаем

$$x_0^2 - b\,x_3^2 - c\left(x_2^2 - b\,x_1^2\right) = m$$

и как в предыдущем случае рассматриваем уравнение

$$x_0^2 - b\,x_3^2 = m. \tag{9}$$

Сначала мы будем рассматривать нижнюю оценку для числа попарно неассоциированных кватернионов вида $x_0 + x_2\,i_2$ нормы $m = x_0^2 - c\,x_2^2$ (такое число совпадает с числом классов ассоциированных кватернионов указанного вида).

Равенство (8), точнее любое его решение $(x_0,\ x_2)$ мы рассматриваем как представление числа m бинарной квадратичной формой $x^2 - c\,y^2$.

Если такая бинарная квадратичная форма имеет хоть одно представление числа m, то она имеет бесконечно много представлений числа m, получаемых с помощью автоморфизмов формы $x^2 - c\,y^2$, имеющих вид

$$\begin{cases} \alpha = t - u, & \beta = -c\,u, \\ \gamma = u, & \delta = t. \end{cases} \tag{10}$$

Эти автоморфизмы определяются решениями уравнения Пелля

$$t^2 - c\,u^2 = 1. \tag{11}$$

Все решения этого уравнения, как известно, определяются формулой

$$t + u\sqrt{c} = \pm\bigl(t_0 + u_0\sqrt{c}\bigr)^n, \tag{12}$$

где $t_0 + u_0\sqrt{c}$ есть основная единица вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$; n — целое число.

Автоморфизмы (10) формы $x^2 - c\,y^2$ действуют посредством равенств

$$\begin{cases} x - \sqrt{c}\,y = (t - u\sqrt{c})\,(x' - \sqrt{c}\,y'), \\ x + \sqrt{c}\,y = (t + u\sqrt{c})\,(x' + \sqrt{c}\,y'). \end{cases} \tag{13}$$

Если теперь $(x,\ y)$ и $(X,\ Y)$ — два представления одного и того же числа m, то из (13) имеем

$$\frac{x + \sqrt{c}\,y}{x - \sqrt{c}\,y} = \frac{t + u\sqrt{c}}{t - u\sqrt{c}} \cdot \frac{X + \sqrt{c}\,Y}{X - \sqrt{c}\,Y}. \tag{14}$$

Положив $\mathscr{E} = t_0 + u_0\sqrt{c} > 1$ получим

$$t + u\sqrt{c} = \pm\mathscr{E}^k, \quad t - u\sqrt{c} = \pm\mathscr{E}^{-k}, \tag{15}$$

для некоторого целого числа k.

Существует только одно значение k для данных X, Y, при котором

$$1 \leqslant \frac{x+\sqrt{c}\,y}{x-\sqrt{c}\,y} < \mathscr{E}^2 \tag{16}$$

и

$$x-\sqrt{c}\,y > 0. \tag{17}$$

Представление числа m формой $x^2 - c\,y^2$, удовлетворяющее условиям (16) и (18) как раз является главным.

Равенство (14) в силу (15) можно переписать в следующем виде

$$\frac{x+\sqrt{c}\,y}{x-\sqrt{c}\,y} = \mathscr{E}^{2\,k}\cdot\frac{X+\sqrt{c}\,Y}{X-\sqrt{c}\,Y}. \tag{18}$$

Кватерниону вида $x_0 + x_2\,i_2$, где $i_2^2 = c$ нормы $m = x_0^2 - c\,x_2^2$ мы будем сопоставлять главное представление $(x_0,\ x_2)$ числа m бинарной квадратичной формой $x^2 - c\,y^2$.

Множество кватернионов

$$\left\langle x_0 + x_2\,i_2 \mid x_0 + \sqrt{c}\,x_2 \text{ — основная единица квадратичного поля } \mathbb{Q}\big(\sqrt{c}\big)\right\rangle$$

образует бесконечную циклическую группу, при этом $i_2 \leftrightarrow \sqrt{c}$. Более того, оно образует даже поле изоморфное вещественному квадратичному полю $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$.

Перепишем (16) с учётом (18) в следующем виде

$$1 \leqslant \mathscr{E}^{2\,k}\cdot\frac{X+\sqrt{c}\,Y}{X-\sqrt{c}\,Y} < \mathscr{E}^2. \tag{19}$$

Считая теперь $(X_0,\ X_2)$ главным представлением числа m формой $x^2 - c\,y^2$ и логарифмируя обе части неравенства (19), будем иметь

$$0 \leqslant 2\,k\,\ln\mathscr{E} + \ln\frac{X_0+\sqrt{c}\,Y_2}{X_0-\sqrt{c}\,Y_2} < 2\,\ln\mathscr{E}. \tag{20}$$

Так как $(X_0,\ X_2)$ по условию есть главное представление числа m формой $x^2 - c\,y^2$, то получаем

$$0 < X_0 + \sqrt{c}\,X_2 < \sqrt{m}. \tag{21}$$

Из (20) имеем

$$0 \leqslant 2\,k\,\ln\mathscr{E} + \ln m - 2\,\ln\big(X_0 - \sqrt{c}\,Y_0\big) < 2\,\ln\mathscr{E}.$$

Тогда в силу (21) получаем

$$0 \leqslant 2\,k\,\ln\mathscr{E} + \ln m - 2\,\ln\sqrt{m} < 2\,\ln\mathscr{E},$$

т. е.

$$0 \leqslant 2\,k\,\ln\mathscr{E} < 2\,\ln\mathscr{E}, \quad \text{где } \mathscr{E} > 1,$$

откуда $0 \leqslant k < 1$, т. е. $k = 0$.

Тогда в силу (18) главные представления числа m формой $x^2 - c\,y^2$ попарно неассоциированны. Следовательно $\sigma\left(O_f^{(c)},\ m\right) > R_c(m)$ и значит, $\sigma\,(O_f,\ m) > R_c(m)$.

Аналогично получаем также, что $\sigma\,(O_f,\ m) > R_b(m)$.

Из этих двух неравенств следует, что

$$\sigma\,(O_f,\ m) > \max\{R_b(m),\ R_c(m)\}.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Заключение

Уравнению Пелля более общего вида, также используемому нами, посвящены статьи [10, 11]. Возможно, что имеются и другие единицы в O_f^*, кроме полученных нами, например, если разрешима система диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_0^2 - c\,x_2^2 = b\,n + 1, \\ x_3^2 - c\,x_1^2 = n \end{cases}$$

или разрешима аналогичная ей система

$$\begin{cases} x_0^2 - b\,x_2^2 = c\,n + 1, \\ x_3^2 - b\,x_1^2 = n, \end{cases}$$

где n — целое число.

Случай $n = 0$ соответствует полученному нами результату о единицах группы O_f^* и для реализации такого подхода могут быль использованы алгоритмы из [10], а также результаты из [11].

Представляет также интерес для дальнейшего исследования группы единиц порядка O_f подход, предложенный Касселсом (см. [12], глава 13) при построении автоморфизмов тернарной квадратичной формы $f_0(\overline{x}) = a\,x^2 - b\,y^2 - c\,z^2$ через автоморфизмы бинарной формы $a\,x^2 - b\,y^2$, где a, b, c — целые положительные числа.

Наконец, относительно той части нашей работы, связанной с вопросом о числе попарно неассоциированных кватернионов заданной нормы отметим, что ряд точных результатов получен первым из авторов в случае кольца целых матриц (см. [13]–[16]), причём в [14] даётся уже новый вывод формулы для указанной величины.

Пользуясь основным результатом теории бинарных квадратичных форм о числе главных представлений числа m полной системой неэквивалентных форм заданного определителя (см. [9], гл. IV, § 8) и нижнюю оценку в теореме 2 при нечётном m можно представить в виде $\sigma\,(O_f,\ m) \geqslant 2^{\nu(m)}$, где $\nu(m)$ — количество простых делителей числа m.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: «Мир». 1969. 483 с.

2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического ин-та АН СССР. Т. 65 (1962), 212 с.

3. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та. 1967. 208 с.

4. Пачев У. М., Шакова Т. А. Об алгебре обобщённых кватернионов // Сборник материалов Международной научно—практической конференции «Актуальные проблемы развития науки и современного образования». Белгород. 2017. С. 64–66.

5. Eichler M. Über die Einheiten der Dividionalgebren // Math. Ann. 1937. S. 635–364.

6. Пачев У. М., Шакова Т. А. О группе кватернионных единиц неопределенной анизотропной тернарной квадратичной формы // Материалы XVII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. "Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула, 23–28 сентября 2019 г. С. 123–126.

7. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Изд. 3-е., Москва, 1985. 503 с.

8. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М. : Наука, 1971.

9. Венков Б.А. Элементарная теория чисел. ОНТИ. 1937. 219 с.

10. Basilla J. M., Wada H. On solution of $x^2 - dy^2 = \pm m$ // Proc. Japan Acad., 81. Ser A (2005), pp. 137–140.

11. Евсеева Ю.Ю. О количестве представлений натуральных чисел циклическими бинарными квадратичными формами // Чебышевский сб. 2010. Т. 11, вып. 1(33). С. 116 – 125.

12. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы. М. : «Мир», 1982. 436 с.

13. Малышев А.В., Пачев У.М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 41–86.

14. Пачев У.М. О числе приведённых целочисленных неопределённых бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Чебышевский сб. 2003. Т. 4, вып. 3(7). С. 92–105.

15. Пачев У.М. Об арифметике кольца целых матриц n-го порядка // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10, вып. 1. С.75-78.

16. Пачев У.М. О числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n, делящихся на заданную матрицу // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17, вып.2. С.62-67.

REFERENCES

1. Cassels J.W.S., Frölich A. 1967, “Algebraic number theory”. – London e. a.; Academic Press.

2. Malyshev A.V. 1962, “On representation number by positive quadratic forms”, Tr. Math. Inst. Steklova, vol. 65, pp. 1–212.

3. Linnik Yu.V. 1967, “Ergodic properties of algebraic fields” / Leningrad university. 208 pp.

4. Pachev U.M., Shakova T.A. 2017, “On the algebra of generalized quaternions” / Collection of materials of the international scientific – practical conference ‘Actual problems of the development of science and modern education’. Belgorod . pp. 64–66.

5. Eichler M.1937, Über die Einheiten der Dividionalgebren // Math. ann. S. 635–654.

6. Pachev U.M., Shakova T.A. 2019, “On a group of quaternion units of an indefinite anisotropic ternary quadratics forms”/ Materials of the xvii international Conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern problems, Applications and Problems of History” dedicated to the 100th birthday of Professor N.I. Feldman and the 90th birthday of professors A.I. Vinogradov, A.V. Malyshev and B.F. Skubenko. Tula. pp. 123–126.

7. Borevich Z.I., Shafarevich I.R. 1985, “Theoriya chisel”, 3rd edition, Nauka, Moscow, 503 pp. (Russian).

8. Davenport H. 1971. “Multiplicative number theory”, Nauka, Moscow, 199 p.

9. Venkov B.A. 1937, “Elementary number theory”, 219 p.

10. Basilla J.M, Bada H. 2005, “On the solution of $x^2 - dy^2 = \pm m$” / Proc. Japan Acad., 81. Ser. A, pp. 137–140.

11. Evseeva Yu.Yu. 2010, “On the number of representations of natural numbers by cyclic binary quadratic forms” / Chebyshevskii Sb., vol. 11, no 1 (33), pp. 116–125. (Russian).

12. Cassels J.W.S. 1982, “Rationalnye kvadratichnye formy”, Mir, Moscow, 436 pp (Russian).

13. Malyshev A.V., Pachev U.M. 1982, “On the arithmetic of matrices of second order”, J. Soviet Math. Pp. 1096–1122.

14. Pachev U.M. 2003, “On the number of reduced integer indefinite binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients” / Chebyshevskii Sb., vol. 4, no 3(7), pp. 90–105. (Russian).

15. Pachev U.M. 2008, “On the arithmetic of the ring of n-order integer matrices”, Vladikavkaz. Mat. Zh. Vol. 10, no 1, pp. 75–78.

16. Pachev U.M. 2015, “About the number of primitive non-associated second order matrices of determinant n divisible”, Vladikavkaz. Mat. Zh. vol. 17. no 2, pp. 62–67.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-247-271

Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов (г. Душанбе)

З. Х. Рахмонов —доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Ф. З. Рахмонов —кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. А.Джураева (г. Душанбе).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

Работа посвящена получению нетривиальных оценок коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса вида

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\mu(n)e(\alpha n^3),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при $y\geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Ключевые слова: короткая двойная тригонометрическая сумма, функция Мёбиуса, метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, нетривиальная оценка, малые дуги.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 247–271.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-247-271

Short cubic exponential sums with Möbius function

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov (Dushanbe)

Z. Kh. Rakhmonov F. Z. Rakhmonov —Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
F. Z. Rakhmonov —Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

The work is dedicated to the conclusion of non-trivial estimates of short cubic exponential sums with Möbius function of the form

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\mu(n)e(\alpha n^3),$$

over minor arcs $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ for $y\geqslant x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+944}$ and $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Keywords: shorts double exponential sum, Möbius function, method for estimating exponential sums with prime numbers, nontrivial estimate, minor arcs.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, 2019, “Short cubic exponential sums with Möbius function” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 247–271.

1. Введение

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое число α из промежутка $[-æ,1-æ]$, $æ\tau=1$ представимо в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\qquad 1\leqslant q\leqslant\tau,\qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q\leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha,x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт. В 1937 году [1], воспользовавшись методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B>0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha,x)|\ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k\geqslant 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен [2]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k=1$ принадлежит Бейкеру и Харману [3]. Они в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha,x)|\ll x^{\frac34+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k\geqslant 2$, k – фиксированное целое число, обобщили Т. Жан и Дж. Лю [4].

Т. Жан [5], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ и $y \geqslant x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}. \tag{1}$$

Затем он получил эту оценку уже при $y \geqslant x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$ [6]. Первую безусловную нетривиальную оценку вида (1) при $k=2$ и $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю [7].

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана Г. С. Лу и Х. Х. Лао [8] доказали оценку вида (1) при $k=2$ и $y \geqslant x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Кумчев А.В. [9] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1-\frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности, для $S_3(\alpha;x,y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geqslant x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Все безусловные нетривиальные оценки коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha;x,y)$, как и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$f_k(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова, основу которого, наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $x>x_0$, y – вещественные числа.

Основным результатом этой работы является теорема 1 о нетривиальной оценке суммы $S_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$, $B \geqslant 11$ при

$$y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)},$$

и её доказательство проводится методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова по схеме работы [10], в котором была получена нетривиальная оценка для короткой кубической тригонометрической суммы с простыми числами $f_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах, в сочетании с методами работ [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Основными утверждениями, позволившими получить новую оценку $S_3(\alpha;x,y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ на малых дугах, соответственно имеющих “длинную” сплошную сумму (лемма 5) и имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму (лемма 6).

2. Известные леммы

Лемма 1. *Пусть H и y - произвольные целые числа, $H \geqslant 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\left(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}\right).$$

Доказательство см. [17].

Лемма 2. *При вещественном числе α, подчинённом условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

а) для суммы

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q' < q, \qquad U > 0,$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U + q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V = \sum_{0<z\leqslant 0,5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V \ll q\ln q.$$

Доказательство см. [17], стр. 61.

Лемма 3. *. При $x \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_r^k(n) \ll x\,(\ln x)^{r^k-1}, \qquad k=1,2.$$

Доказательство см. [18].

Лемма 4. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1 \leqslant x$, $r \geqslant 1$,*

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \qquad \lambda(n) = \sum_{d|n,\, d\leqslant u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)f(n) = (-1)^r \sum_{n_1>u_1}\lambda(n_1)\cdots\sum_{n_r>u_1}\lambda(n_r)\sum_{n_1\cdots n_r m\leqslant x}\mu(m)f(n_1\cdots n_r m) +$$
$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\leqslant u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{m_k\leqslant u_1}\mu(m_k)\sum_{\substack{n_1 \\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}\leqslant x}}\cdots\sum_{n_{k-1}} f(m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}).$$

Лемма 4 доказывается аналогично лемме 6 работы [16].

Обозначения: x, y – достаточно большие положительные вещественные числа; q натуральное число, $\mathscr{L} = \ln xq$; M_j и N_j – целые числа; $\mu(n)$ — функция Мёбиуса; $\tau_k(n)$ — число представлений числа n в виде произведений k сомножителей;

3. Короткая кубическая двойная тригонометрическая сумма с “длинным” сплошным суммированием

Лемма 5. *Пусть в сумме $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ выполняются условия $|a_m| \leqslant \tau_4(m)$, $b_n = 1$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$. Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+4102} < q < y^3\mathscr{L}^{-8A-4104}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+1026} < N \leqslant x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)|\ll\frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. Для удобства условия $xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2A+1026}<N\leqslant x\mathscr{L}^{-2A-8}$ в теореме, с учетом неравенства $MN\asymp x$, заменим на $\mathscr{L}^{2A+8}\ll M\ll y^{\frac14}\mathscr{L}^{-2A-1026}$, а сумму $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ обозначим через W. Возводя W в квадрат, найдем

$$|W|^2=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\leqslant 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\leqslant 2N\\ x-y<\mu u_1\leqslant x}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)).$$

Разбивая сумму на три части, для которых соответственно выполняются условия $mu<\mu u_1$, $mu=\mu u_1$ и $mu>\mu u_1$, и имея в виду, что

$$\sum_{M<m,\mu\leqslant 2M}a_ma_\mu\sum_{\substack{U<u,u_1\leqslant 2N\\ x-y<mu=\mu u_1\leqslant x}}1=\sum_{x-y<r\leqslant x}\left(\sum_{\substack{m|r,M<m\leqslant 2M\\ U<r/m\leqslant 2N}}a_m\right)^2\ll\sum_{x-y<r\leqslant x}\left(\sum_{m\backslash r}\tau_4(m)\right)^2\ll y\mathscr{L}^{24},$$

получим

$$\begin{aligned}|W|^2&=W_1+W_2+O\left(y\mathscr{L}^{24}\right), \qquad (2)\\ W_1&=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\le 2N\\ mn<\mu u_1\leqslant x}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)),\\ W_2&=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\le 2N\\ x-y<\mu u_1<mu}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)).\end{aligned}$$

Имея в виду, что $|W_1|=|W_2|$, оценим только W_1. В сумме по u_1, делая замену переменной, вместо u_1 вводим переменную $r=\mu u_1-mu$, для которой выполняются условия

$$mu+r\equiv 0(mod\mu),\quad U\mu<mu+r\leqslant 2N\mu,\quad 0<r\leqslant x-mu.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&(\mu u_1)^3-(mu)^3=(\mu u_1-mu)((mu)^2+mu\mu u_1+(\mu u_1)^2)=\\ &=r\left((mu)^2+mu\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu}+\left(\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu}\right)^2\right)=r(3(mu)^2+3mur+r^2),\end{aligned}$$

и сумма W_1 принимает вид

$$\begin{aligned}W_1&=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\leqslant 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U\mu<mu+r\leqslant 2N\mu\\ 0<r\leqslant x-mu\\ mu+r\equiv 0(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2))=\\ &=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{0<r<y}\sum_{\substack{F<u\le G\\ mu\equiv -r(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)),\end{aligned}$$

где

$$F=\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{m}\right),\qquad G=\min\left(2N,\frac{2N\mu-r}{m},\frac{x}{m}\right).$$

Разбивая сумму W_1 на слагаемые, с условием $(m,\mu)=d$, $d\leqslant 2M$, имеем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{M<\mu\le 2M\\(m,\mu)=d}}a_\mu\sum_{0<r<y}\sum_{\substack{F<u\le G\\ mu\equiv -r(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)).$$

Условие $(m,\mu)=d$ в сумме W равносильно условиям $m=\hat{m}d$, $\mu=\hat{\mu}d$, $(\hat{m},\hat{\mu})=1$. Следовательно, сравнение $mu\equiv -r(mod\,\mu)$ разрешимо только в случае, если r имеет вид $r=\hat{r}d$. Поэтому, заменив его на сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$, а переменные суммирования m, μ, r соответственно на $\hat{m}d$, $\hat{\mu}d$, $r=\hat{r}d$, найдем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat{m}d\le 2M}a_{\hat{m}d}\sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\le 2M\\(\hat{m},\hat{\mu})=1}}a_{\hat{\mu}d}\sum_{0<\hat{r}d<y}\sum_{\substack{F_{\hat{m}\hat{\mu}}<u\le G_{\hat{m}\hat{\mu}}\\ \hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\hat{\mu})}}e(\alpha\hat{r}d^3(3(\hat{m}u)^2+3\hat{m}u\hat{r}+\hat{r}^2)),$$

$$F_{\hat{m}\hat{\mu}}=\max\left(U,\frac{U\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}},\frac{x-y}{\hat{m}d}\right),\qquad G_{\hat{m}\hat{\mu}}=\min\left(2N,\frac{2N\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}},\frac{x}{\hat{m}d}\right).$$

Сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$ равносильно сравнению $u\equiv -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}(mod\,\hat{\mu})$, где $\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}$ определяется из сравнения $\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}\equiv 1(mod\,\hat{\mu})$. Поэтому, представляя u в виде $u=-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}+\hat{\mu}\hat{u}$, получим

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat{m}d\le 2M}a_{\hat{m}d}\sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\le 2M\\(\hat{m},\hat{\mu})=1}}a_{\hat{\mu}d}\sum_{0<\hat{r}d<y}\sum_{\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}}<\hat{u}\le\mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}}e(\alpha\hat{r}d^3(\hat{r}^2+g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu}))),$$

$$\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}}=\frac{F_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}}+\frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},\qquad \mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}=\frac{G_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}}+\frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},$$

$$3(\hat{m}u)^2+3\hat{m}u\hat{r}+\hat{r}^2=3(\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}))^2+3\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r}+\hat{r}^2=$$
$$=3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})^2+3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r}+\hat{r}^2=g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu})+\hat{r}^2.$$

В сумме W_1, ради удобства, обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{\mu}$, $\hat{r}$ и $\hat{u}$ через m, μ, r и u, получим

$$\begin{aligned}
&W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{0<rd<y}e(\alpha d^3r^3)W(r,d),\\
&W(r,d)=\sum_{M<md\le 2M}a_{md}\sum_{\substack{M<\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{\mu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}e(3\alpha rd^3g(u,m,\mu)),\\
&\mathcal{F}_{m\mu}=\frac{F_{m\mu}+rm_{\mu}^{-1}}{\mu},\qquad F_{m\mu}=\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{md}\right),\\
&\mathcal{G}_{m\mu}=\frac{G_{m\mu}+rm_{\mu}^{-1}}{\mu},\qquad G_{m\mu}=\min\left(2N,\frac{2N\mu-r}{m},\frac{x}{md}\right),\\
&g(u,m,\mu)=(m\mu u-rmm_{\mu}^{-1})^2+(m\mu u-rmm_{\mu}^{-1})r.
\end{aligned}\tag{3}$$

Разобьем в W_1 отрезок суммирования по d на не более чем $\mathscr{L}$ интервалов вида $D<d\leqslant 2D$, $D\leqslant M$. Получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W(D)$ вида

$$W(D)\leqslant\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}|W(r,d)|.\tag{4}$$

Имея в виду, что $D\leqslant M$ и $M\gg\mathscr{L}^{2A+8}$, рассмотрим два случая: $D>\mathscr{L}^{2A+8}$ и $D\leqslant\mathscr{L}^{2A+8}$.

2. ***Оценка*** $W(D)$**,** $D>\mathscr{L}^{2A+8}$. В сумме $W(r,d)$ оценим сверху длину интервала суммирования по u, воспользовавшись условием $M\leqslant y^{\frac14}$. Тогда имеем

$$\mathcal{G}_{m\mu}-\mathcal{F}_{m\mu}+1=\frac{G_{m\mu}-F_{m\mu}}{\mu}+1\leqslant\frac{y}{m\mu d}+1<\frac{yd}{M^2}+1\leqslant\frac{2yd}{M^2}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (4), воспользовавшись соотношением $|a_m| \leqslant \tau_5(m)$, затем леммой 3, последовательно получим

$$W(D) \ll \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{M<md\le 2M} \tau_4(md) \sum_{\substack{M<\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} \tau_4(\mu d)(\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1) \ll$$

$$\ll \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d)\,\frac{y}{d} \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} \tau_4(m\mu)\frac{yd}{M^2} \ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d) \left(\sum_{Md^{-1}<m\leqslant 2Md^{-1}} \tau_4(n) \right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{y^2\mathscr{L}^6}{D^2} \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d) \ll \frac{y^2\mathscr{L}^6}{D(\ln D)^{-15}} < \frac{y^2\mathscr{L}^6}{\mathscr{L}^{2A+8}((2A+8)\ln\mathscr{L})^{-15}} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A+1}}.$$

3. Далее всюду будем считать, что $D < d \leqslant 2D$ и $D \leqslant \mathscr{L}^{2A+8}$. Возводя неравенство (4) в квадрат и применяя неравенство Коши, получим

$$W^2(D) \leqslant y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} |W(r,d)|^2, \tag{5}$$

$$|W(r,d)|^2 = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n\nu} &= \frac{F_{n\nu}}{\nu} + \frac{rn_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad F_{n\nu} = \max\left(U, \frac{U\nu - r}{n}, \frac{x-y}{nd}\right), \\ \mathcal{G}_{n\nu} &= \frac{G_{n\nu} + rn_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad G_{n\nu} = \min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользовавшись явным видом $g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu)$ в $|W(r,d)|^2$, то есть соотношением

$$\begin{aligned} &g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu) = \\ &= (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1})^2 + (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1})r - (m\mu u - rmm_\mu^{-1})^2 - (m\mu u - rmm_\mu^{-1})r = \\ &= (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} - m\mu u + rmm_\mu^{-1})(n\nu u_1 + m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r), \end{aligned} \tag{7}$$

разбивая сумму $|W(r,d)|^2$ на три суммы W_{rd}, W'_{rd} и W''_{rd}, найдем

$$|W(r,d)|^2 = W_{rd} + W'_{rd} + W''_{rd}, \tag{8}$$

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu} \\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} > m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$W'_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu} \\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} < m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$W''_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu} \\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} = m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} 1.$$

4. Оценка W''_{rd}. Пользуясь определениями параметров $F_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $F_{n\nu}$ и $G_{n\nu}$, то есть соотношениями (3) и (6), легко показать, что условия $\mathcal{F}_{m\mu} < u \le \mathcal{G}_{m\mu}$ и $\mathcal{F}_{n\nu} < u_1 \le \mathcal{G}_{n\nu}$ соответственно равносильны условиям

$$\max\left(Um, U\mu - r, \frac{x-y}{d}\right) < m\mu u - rmm_\mu^{-1} \leqslant \min\left(2Nm, 2N\mu - r, \frac{x}{d}\right),$$

$$\max\left(Un, U\nu - r, \frac{x-y}{d}\right) < n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} \leqslant \min\left(2Nn, 2N\nu - r, \frac{x}{d}\right).$$

Поэтому, вводя обозначение $h = m\mu u - rmm_\mu^{-1} = n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1}$, найдем

$$W''_{rd} = \sum_{x-y<hd\leqslant x} \omega^2(h), \qquad \omega(h) = \sum_{\substack{h=m\mu u - rmm_\mu^{-1} \\ M<md,\mu d\leq 2M,\,(m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} a_{md}a_{\mu d}.$$

Из условий $h = m\mu u - rmm_\mu^{-1}$ и $mm_\mu^{-1} = 1 + \mu t$, t — целое, следует, что

$$h + r = m\mu u - r(mm_\mu^{-1} - 1) = \mu(mu - rt),$$

то есть μ является делителем числа $h + r$, следовательно,

$$\omega(h) \leqslant \sum_{\substack{m\backslash h \\ M<md\leq 2M}} |a_{md}| \sum_{\substack{\mu\backslash h+r \\ M<\mu d\leq 2M \ (m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<\frac{h}{m\mu}+\frac{rm_\mu^{-1}}{\mu}\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} |a_{\mu d}| \ll \sum_{m\backslash h} \tau_4(md) \sum_{\mu\backslash h+r} \tau_4(\mu d) \leqslant \tau_4^2(d)\tau_5(h)\tau_5(h+r).$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 3, найдем

$$|W''_{rd}| \ll \tau_4^4(d) \sum_{x-y<hd\leqslant x} \tau_5^2(h)\tau_5^2(h+r) \ll y\mathscr{L}^{5^4-1}\,\frac{\tau_4^4(d)}{d}.$$

Отсюда с учетом (8) и (5), имея в виду, что $|W_{rd}| = |W'_{rd}|$, получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} |W_{rd}| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \tag{9}$$

5. *Преобразуем W_{rd} так, чтобы сумма по u стала линейной.* Для этого, делая замену переменных, вместо u_1 вводим $\sigma = n\nu u_1 - m\mu u$, с областью изменения вида

$$\Omega = \left\{\sigma:\ m\mu u + \sigma \equiv 0 (mod\, n\nu),\ \mathcal{F}_{n\nu} < \frac{m\mu u + \sigma}{n\nu} \leqslant \mathcal{G}_{n\nu},\ \sigma > rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1}\right\}.$$

При этом, воспользовавшись соотношением (7), представим разность $g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu)$ как функцию σ, то есть

$$\begin{aligned} g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu) &= (n\nu u_1 - m\mu u + rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1})(n\nu u_1 + m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r) = \\ &= (\sigma + rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1})(\sigma + 2m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r) = g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu), \end{aligned}$$

и сумма W_{rd} принимает вид

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\sigma\in\Omega} e\left(3\alpha rd^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Воспользовавшись определениями области Ω и параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, найдём возможно допустимую верхнюю границу изменения переменной суммирования σ. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &\leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu} - m\mu u \leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu} - m\mu\mathcal{F}_{m\mu} = n\nu\frac{G_{n\nu} + rn_\nu^{-1}}{\nu} - m\mu\frac{F_{m\mu} + rm_\mu^{-1}}{\mu} = \\ &= nG_{n\nu} - mF_{m\mu} + rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} = n\min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right) - \\ &- m\max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x-y}{md}\right) + rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} \leqslant \frac{y}{d} - rmm_\mu^{-1} + rnn_\nu^{-1}. \end{aligned}$$

С учётом найденной границы в W_{rd}, сделав сумму по u внутренней, найдём

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right),$$

$$\Omega_1 = \left\{\sigma:\ 0<\sigma + rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} \leqslant \frac{y}{d}\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{u:\ m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\, n\nu),\ \frac{\mathcal{F}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu} < u \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\leq \mathcal{G}_{m\mu}\right\},$$

то есть в W_{rd} внутренняя сумма стала линейной, переменная суммирования u пробегает те значения из своего сплошного интервала изменения, которые являются решением линейного сравнения.

6. Разбивая сумму W_{rd} на слагаемые с условием $(m\mu, n\nu)=\delta$, $\delta\leqslant 4M^2d^{-2}$, имеем

$$W_{rd} = \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=\delta}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Условия $(m\mu,n\nu)=\delta$ с учётом условий $(m,\mu)=1$ и $(n,\nu)=1$ в сумме W_{rd} равносильны условиям

$$m\mu=\hat{m}\hat{\mu}\delta,\quad (\hat{m},\hat{\mu})=1,\quad n\nu=\hat{n}\hat{\nu}\delta,\quad (\hat{n},\hat{\nu})=1,\quad (\hat{m}\hat{\mu},\hat{n}\hat{\mu})=1,$$
$$m=\hat{m}\eta,\ \ \eta\backslash\delta,\ \ \mu=\hat{\mu}\delta/\eta,\ \ (\eta,\delta/\eta)=1,\ \ n=\hat{n}\lambda,\ \ \lambda\backslash\delta,\ \ \nu=\hat{\nu}\delta/\lambda,\ \ (\lambda,\delta/\lambda)=1.$$

Следовательно, в области $\mathcal{U}$ сравнение

$$m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\, n\nu)$$

разрешимо только в случае, если σ имеет вид $\sigma=\hat{\sigma}\delta$. Поэтому, заменяя переменные суммирования m, μ, n, ν, σ соответственно на $\hat{m}\eta$, $\hat{\mu}\delta/\eta$, $\hat{n}\lambda$, $\hat{\nu}\delta/\lambda$, $\hat{\sigma}\delta$, перепишем предыдущее сравнение в виде

$$\hat{m}\hat{\mu}u\equiv -\hat{\sigma}(mod\, \hat{n}\hat{\nu}),$$

при этом параметры $\mathcal{F}_{m\mu}$, $F_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$, $F_{n\nu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, $G_{n\nu}$ и функция $g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)$ соответственно превращаются в параметры $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, и функцию $g_1(u)=g_1(u,\hat{\sigma}\delta,\hat{m}\eta,\hat{\mu}\delta/\eta,\hat{n}\lambda,\hat{\nu}\delta/\lambda)$, которые имеют вид

$$\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} = \frac{F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta} + \frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta},\qquad F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\hat{\mu}\delta/\eta - r}{\hat{m}\eta}, \frac{x-y}{\hat{m}\eta d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} = \frac{G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta} + \frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta},\qquad G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\hat{\mu}\delta/\eta - r}{\hat{m}\eta}, \frac{x}{\hat{m}\eta d}\right),$$

$$\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda} = \frac{F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda} + \frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda},\qquad F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\hat{\nu}\delta/\lambda - r}{\hat{n}\lambda}, \frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda} = \frac{G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda} + \frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda},\qquad G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\hat{\nu}\delta/\lambda - r}{\hat{n}\lambda}, \frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right),$$

$$g_1(u,\hat{\sigma}\delta,\hat{m}\eta,\hat{\mu}\delta/\eta,\hat{n}\lambda,\hat{\nu}\delta/\lambda) = \left(\hat{\sigma}\delta + r\hat{m}\eta\,(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda\,(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}\right)\times$$
$$\times\left(\hat{\sigma}\delta + 2\hat{m}\hat{\mu}\delta u - r\hat{m}\eta\,(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda\,(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda} + r\right),$$

и сумма W_{rd} представится в виде

$$W_{rd} = \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} W_{rd}(\delta,\eta,\lambda), \tag{10}$$

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<d\hat{m}\eta,d\hat{\mu}\delta/\eta\leq 2M \\ (\hat{m},\hat{\mu})=1}} a_{d\hat{m}\eta}a_{d\hat{\mu}\delta/\eta} \sum_{\substack{M<d\hat{n}\lambda,d\hat{\nu}\delta/\lambda\leq 2M \\ (\hat{n},\hat{\nu})=1,\,(\hat{m}\hat{\mu},\hat{n}\hat{\nu})=1}} a_{d\hat{n}\lambda}a_{d\hat{\nu}\delta/\lambda} \sum_{\hat{\sigma}}\sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right),$$

где суммирование ведётся по тем $\hat{\sigma}$ и u, для которых соответственно выполняются условия

- $0<\hat{\sigma}\delta + r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda} \leqslant \dfrac{y}{d}$;
- $\hat{m}\hat{\mu}u+\hat{\sigma}\equiv 0(mod\,\hat{n}\hat{\nu})$, $\dfrac{\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}} < u+\dfrac{\hat{\sigma}}{\hat{m}\hat{\mu}} \leqslant \dfrac{\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}}$, $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} < u \leq \mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$.

Подставляя правую часть (10) в соотношение (9), получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}\sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \tag{11}$$

Разбивая отрезок суммирования по δ не более чем на $\mathscr{L}$ интервалов вида $B<\delta\leqslant 2B$, $B\leqslant 2M^2d^{-2}$, получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W_B^2(D)$ вида

$$W_B(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|. \tag{12}$$

В сумме $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$, ради удобства обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно через m, n, μ, ν и σ, также выражение $m\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - n\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}$ через κ, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M \\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}} a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda} \sum_{\sigma}\sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right),$$

$$\begin{aligned} g_1(u,\ldots) &= g_1(u,\sigma\delta,m\eta,\mu\delta/\eta,n\lambda,\nu\delta/\lambda) = \\ &= (\sigma\delta+r\kappa)\left(\sigma\delta+2m\mu\delta u - rm\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\right), \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по тем σ и u, для которых соответственно выполняются условия

$$\begin{aligned} &0<\sigma\delta+r\kappa\leqslant \frac{y}{d}, && m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\,n\nu), \\ &\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\nu\delta/\lambda}n\nu}{m\mu} < u+\frac{\sigma}{m\mu} \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}n\nu}{m\mu}, && \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} < u \leqslant \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} &= \frac{F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x-y}{m\eta d}\right), \\ \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} &= \frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x}{m\eta d}\right), \\ \mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} &= \frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right), \\ \mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} &= \frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Сравнение $m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\,n\nu)$ равносильно сравнению

$$u\equiv -\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}(mod\,n\nu),$$

где числа $m_{n\nu}^{-1}$ и $\mu_{n\nu}^{-1}$ соответственно определяются из сравнений

$$mm_{n\nu}^{-1}\equiv 1(mod\,n\nu),\qquad \mu\mu_{n\nu}^{-1}\equiv 1(mod\,n\nu).$$

Поэтому, представляя u в виде $u=n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}
&W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)=\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{\hat{u}}e\left(3\alpha rd^3g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)\right),\\
&\quad g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)=g_1(n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1},\sigma\delta,m\eta,\mu\delta/\eta,n\lambda,\nu\delta/\lambda)=\\
&\qquad=(\sigma\delta+r\kappa)\Big(\sigma\delta+2m\mu\delta\left(n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}\right)-rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}-rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}+r\Big)=\\
&\qquad=2m\mu n\nu\delta\hat{u}\,(\sigma\delta+r\kappa)+g_3,
\end{aligned}$$

где g_3 часть $g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)$, не зависящая от $\hat{u}$ и имеющая вид

$$g_3=(\sigma\delta+r\kappa)\Big(\sigma\delta-2\sigma\delta mm_{n\nu}^{-1}\mu\mu_{n\nu}^{-1}-rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}-rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}+r\Big),$$

при этом область суммирования по $\hat{u}$ определяется неравенствами, которые получаются из (13) и имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu},\\
\frac{\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}.
\end{gathered}\tag{15}$$

Переходя к оценкам, воспользовавшись условием $a_m\leqslant\tau_4(m)$ и известным неравенством $\tau_4(kl)\leqslant\tau_4(k)\tau_4(l)$, получим

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)&\leqslant\sum_{\substack{M<dm\eta,\,d\mu\delta/\eta\leqslant 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(dm\eta)\tau_4(d\mu\delta/\eta)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(dn\lambda)\tau_4(d\nu\delta/\lambda)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\\sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\hat{u}\right)\right|\leqslant\\
&\leqslant\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,\,d\mu\delta/\eta\leqslant 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\\sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\hat{u}\right)\right|=\\
&=\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{M^4<d^4\delta^2t\leqslant 16M^4}\tau_4(t)\xi(t)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\\sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3t\delta\sigma\hat{u}\right)\right|,\\
\xi(t)&=\sum_{\substack{t=m\mu n\nu,\,(m,\mu)=(n,\nu)=(m\mu,n\nu)=1\\M<dm\eta,d\mu\delta/\eta,dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M}}1\leqslant\tau_4(t).
\end{aligned}$$

Оценим сверху величину $\mathscr{U}$ – длину интервала суммирования по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$. Воспользовавшись определениями параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$ и $\mathcal{G}_{n\nu}$ из (14), затем неравенствами (15), имеем

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} &\leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}=\frac{1}{m\mu}\left(\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}+\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}\right)=\\
&=\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu\cdot\nu\delta/\lambda}=\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\left(\min\left(2N,\frac{2N\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x}{n\lambda d}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\max\left(U,\frac{U\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x-y}{n\lambda d}\right)\right)\leqslant\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\cdot\frac{y}{n\lambda d}\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4},\\
\mathscr{U} &\leqslant \frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu}=\frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu\cdot\mu\,\delta/\eta}\leqslant\frac{1}{\mu n\nu\,\delta/\eta}\cdot\frac{y}{m\eta d}\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4}.
\end{aligned}$$

Отсюда, а также из условия $M\leqslant y^{\frac14}$ следует, что количество слагаемых в сумме по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$ не превосходит величину

$$\mathscr{U}+1\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4}+1\ll\frac{y\delta d^3}{M^4}\ll\frac{yBD^3}{M^4}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по $\hat{u}$, найдем

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)\ll\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3t\delta\sigma\|}\right).\tag{16}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $B>\mathscr{L}^{4A+19}$ и $B\leqslant\mathscr{L}^{4A+19}$.

7. ***Оценка*** $W_B(D)$ при $B>\mathscr{L}^{4A+19}$. Пользуясь соотношениями $\delta\leqslant 4M^2d^{-2}$ и $M\leqslant y^{\frac14}$, оценим сверху число слагаемых в сумме по σ:

$$\frac{y}{\delta d}+1=\frac{y+\delta d}{\delta d}\leqslant\frac{y+4M^2d^{-1}}{\delta d}\ll\frac{y}{\delta d}\ll\frac{y}{BD}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, тривиально оценивая в (16) сумму по σ числом слагаемых и применяя к сумме по t лемму 3, найдем

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)\ll\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\cdot\frac{yBD^3}{M^4}\cdot\frac{y}{BD}\ll\frac{y^2}{B^2D^2}\mathscr{L}^{15}\,\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta).$$

Подставляя найденную оценку в (12), применяя лемму 3, а затем воспользовавшись условием $B\geqslant\mathscr{L}^{4A+19}$, получим

$$\begin{aligned}
W_B(D)&\ll\frac{y^3}{B^2D^2}\mathscr{L}^{15}\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau_4^4(d)\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^2(\delta)\sum_{\substack{\eta|\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda|\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}1\ll\\
&\ll\frac{y^4(\ln D)^{255}}{B^2D^2}\mathscr{L}^{15}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^2(\delta)\tau^2(\delta)\ll\frac{y^4}{B^2}\mathscr{L}^{15}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\frac{\tau_3^4(\delta)}{\delta^2}\ll\\
&\ll y^4\mathscr{L}^{15}\,\frac{(\ln B)^{80}}{B}=\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\,\frac{\mathscr{L}^{4A+18}}{B(\ln B)^{-80}}\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}.
\end{aligned}$$

8. ***Оценка*** $W_B(D)$ при $B\leqslant\mathscr{L}^{4A+19}$. Поставляя оценку (16) в (12), получим

$$\begin{aligned}
W_B(D)&\ll y\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau_4^4(d)\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^4(\delta)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\sum_{\sigma\leqslant\frac{y}{d}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3t\delta\sigma\|}\right)=\\
&=y\sum_{\frac{3M^4}{32BD}<h\leqslant\frac{384y^2M^4}{BD^3}}æ(h)\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right),\qquad æ(h)=\sum_{h=6rd^3t\delta\sigma}{}''\tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)\tau_4^2(t),
\end{aligned}$$

где символ $''$ — означает, что

$$D < d \leqslant 2D, \quad B < \delta \leqslant 2B, \quad r \leqslant \frac{y}{d}, \quad \frac{M^4}{64B^2D^4} < t \leqslant \frac{16M^4}{B^2D^4}, \quad \sigma \leqslant \frac{y}{d}.$$

Далее, пользуясь условиями $D < \mathscr{L}^{2A+8}$, $B < \mathscr{L}^{4A+19}$, $h/tr\sigma = d^3\delta \asymp D^3B$ и соотношением $\tau(r) \ll r^{\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned} æ(h) &= {\sum_{t|h}}'' \tau_4^2(t) \sum_{\frac{h}{t}=6d^3\delta r\sigma} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) = {\sum_{t|h}}'' \tau_4^2(t) \sum_{r|\frac{h}{t}} \sum_{\frac{h}{tr}=6d^3\delta\sigma} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) = \\ &= {\sum_{t|h}}'' \tau_4^2(t) \sum_{r|\frac{h}{t}} \sum_{\sigma|\frac{h}{tr}} \sum_{\frac{h}{tr\sigma}=6d^3\delta} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) \ll \sum_{t|h} \tau_4^2(t) \sum_{r|\frac{h}{t}} \sum_{\sigma|\frac{h}{tr}} \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t|h} \tau_4^2(t)\tau_3\left(\frac{h}{t}\right) \leqslant \mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\tau_4^3(h). \end{aligned}$$

Поэтому

$$W_B(D) \ll y\mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{h \leqslant \frac{y^2M^4}{BD^3}} \tau_4^3(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3, получим

$$\begin{aligned} W_B^2(D) &\ll y^2\mathscr{L} \cdot \frac{y^2M^4}{BD^3}\mathscr{L}^{4095} \cdot \frac{yBD^3}{M^4} \sum_{h \leqslant \frac{y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \\ &\ll y^5\mathscr{L}^{4096} \sum_{h \leqslant \frac{y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$ и $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \leqslant 0.5q$.

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$, разбивая интервал изменения h на $\ll \dfrac{y^2M^4}{qBD^3}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, а затем воспользовавшись условиями $BD^3 \geqslant 1$, $q \geqslant \mathscr{L}^{8A+4102}$ и $M \ll y^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{-2A-1026}$, найдем

$$\begin{aligned} W_B^2(D) &\ll y^5\mathscr{L}^{4096} \cdot \frac{y^2M^4}{qBD^3} \sum_{h=g}^{g+q'} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \frac{y^7M^4}{qBD^3}\left(\frac{yBD^3}{M^4} + q\ln q\right)\mathscr{L}^{4096} = \\ &= \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\left(\frac{\mathscr{L}^{8A+4102}}{q} + \frac{M^4\ln q}{y\mathscr{L}^{-8A-4102}BD^3}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}. \end{aligned}$$

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \leqslant 0.5q$, воспользовавшись утверждением б) леммы 2, а затем условием $q \leqslant$ $\leqslant y^3\mathscr{L}^{-8A-4104}$, получим

$$W_B^2(D) \ll y^5\mathscr{L}^{4096} \sum_{h \leqslant 0.5q} \frac{1}{\|\alpha h\|} \ll y^5q\mathscr{L}^{4097} = \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}} \cdot \frac{q}{y^3\mathscr{L}^{-8A-4103}} \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.$$

Подставляя полученные оценки для $W_B(D)$ в (11) при $D \leqslant \mathscr{L}^{2A+8}$, найдем

$$W^2(D) \ll \frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+2}} + y^3\mathscr{L}^{5^4-1} \ll \frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+2}}.$$

Отсюда, а также из оценки $W(D)$ при $D > \mathscr{L}^{2A+8}$, найденной в пункте 2, получим

$$W_1 \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A}}.$$

Из оценки W_1 и равенства $|W_1| = |W_2|$, с учетом соотношения (2) следует утверждение леммы.

4. Короткая кубическая двойная тригонометрическая сумма с “близкими” по порядку суммами

Лемма 6. *Пусть* $xy^{-1} \leqslant N \leqslant y$, $M \leqslant N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \leqslant \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \leqslant \tau_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, *тогда при*

$$\mathscr{L}^{32(A+13)} \leqslant q \leqslant \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \leqslant N \leqslant y\mathscr{L}^{-8(A+13)}, \tag{17}$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Доказательство. Далее для удобства сумму $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ обозначим через J_3, при этом, не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$ и $U = N \geqslant \sqrt{x}$. Возводя сумму J_3 в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 3, получим

$$|J_3|^2 \ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n_1,n_2\leq 2N\\ x-y<mn_1,mn_2\leq x}} \overline{b(n_1)}b(n_2)e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ x-y<mn\leq x}} |b_n|^2 \ll \sum_{x-y<t\leq x} \sum_{\substack{mn=t\\ M<m\leq 2M\\ N<n\leqslant 2N}} \tau_k^2(n) \leqslant \sum_{x-y<t\leq x} \tau_{k+1}^2(t) \ll y\mathscr{L}^{k(k+2)},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_3|^2 \ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{N<n_1\leq 2N} \tau_k(n_1) \sum_{0<n_2-n_1\leq 2N-n_1} \tau_k(n_2) \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)) \right| + yM\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}.$$

Положим $r = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда правая ча сть последнего неравенства принимает вид

$$|J_3|^2 \ll M(\mathscr{L}^{(5-k)^2-1}J_{31} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}) \ll \frac{x}{N}\left(\mathscr{L}^{(5-k)^2-1}J_{31} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}\right), \tag{18}$$

$$J_{31} = \sum_{N<n\leq 2N} \tau_k(n) \sum_{0<r\leq 2N-n} \tau_k(n+r) \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r m^3(3nr + 3n^2 + r^2)) \right|.$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m \leq \frac{x}{n+r}$ находим

$$r \leq \frac{x}{m} - n < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} < \frac{y}{M}.$$

Возводя J_{31} в квадрат, дважды применяя неравенство Коши и воспользовавшись леммой 3, имеем

$$|J_{31}|^2 \ll \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M} \sum_{N<n\leq 2N} \sum_{\substack{0<r\leq 2N-n \\ r<\frac{y}{M}}} \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r m^3(3nr+3n^2+r^2)\right|^2 =$$

$$= \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1,m_2\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+r}}} 1 = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{\substack{M<m\leq 2M,\ N<n\leq 2N-r \\ x-y<mn\leqslant x-mr}} 1 \leqslant \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{x-y<t\leqslant x} \tau(t) \ll \frac{y^2\mathscr{L}}{M},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1 < m_2$ и $m_1 > m_2$ равны, получим

$$|J_{31}|^2 \ll \frac{yN}{M}\left(|J_{32}| + \frac{y^2\mathscr{L}}{M}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2} \ll \left(\frac{yN^2}{x}|J_{32}| + \frac{y^3N^3\mathscr{L}}{x^2}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2}, \tag{19}$$

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1<m_2\leq 2M \\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $k = m_2 - m_1$ и $m_1 = m$, тогда J_{32} принимает вид

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m<m+k\leqslant 2M \\ \frac{x-y}{n}<m<m+k\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+k \leq \frac{x}{n+r}$ находим

$$k \leqslant \frac{x}{n+r} - m < \frac{x}{n+r} - \frac{x-y}{n} < \frac{x}{n} - \frac{x-y}{n} = \frac{y}{n} < \frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m\leq 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+r}-k}} e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя J_{32} в квадрат, трижды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{32}|^2 \leqslant \frac{y^2}{M} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\leq 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1,m_2\leq 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\leq \frac{x}{n+r}-k}} e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}-k}}1\leqslant\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{x-y<t\leqslant x}\tau(t)\ll\frac{y^3\mathscr{L}}{MN}\ll\frac{y^3\mathscr{L}}{x},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1 < m_2$ и $m_1 > m_2$ равны, получим

$$|J_{32}|^2\ll\frac{y^2}{M}\left(|J_{33}|+\frac{y^3\mathscr{L}}{x}\right)\ll\left(\frac{y^2N}{x}|J_{33}|+\frac{y^5N\mathscr{L}}{x^2}\right),\tag{20}$$

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\leqslant\frac{x}{n+r}-k}}e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $h = m_2 - m_1$ и $m_1 = m$, тогда J_{33} принимает вид

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m<m+h\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m<m+h\le\frac{x}{n+r}-k}}e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+h \le \frac{x}{n+r} - k$ находим

$$h\leqslant\frac{x}{n+r}-m-k<\frac{x}{n+r}-\frac{x-y}{n}-k<\frac{x}{n}-\frac{x-y}{n}-1=\frac{y}{n}-1<\frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя $|J_{33}|$ в квадрат, четырежды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{33}|^2\leqslant\frac{y^3}{N^2}\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n_1,n_2\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n_1,n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+h)(r+n_2+n_1)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}}1\leqslant\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{x-y<t\leqslant x}\tau(t)\ll\frac{y^4\mathscr{L}}{MN^2}\ll\frac{y^4\mathscr{L}}{xN}.$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_{33}|^2\ll\frac{y^3}{N^2}\left(|J_{34}|+\frac{y^4\mathscr{L}}{xN}\right)\ll\left(\frac{y^3}{N^2}|J_{34}|+\frac{y^7\mathscr{L}}{xN^3}\right),\tag{21}$$

$$J_{34}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n_1<n_2\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n_1<n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+h)(r+n_2+n_1)).$$

Положим $l = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда J_{34} принимает вид

$$J_{34} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n<n+l\leqslant 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n<n+l\leq \frac{x}{m+k+h}-r}} e(9\alpha klhr(2m+k+h)(2n+r+l)).$$

Из условия $\frac{x-y}{m} < n < n+l \leq \frac{x}{m+k+h} - r$ находим

$$l \leqslant \frac{x}{m+k+h} - n - r < \frac{x}{m+k+h} - \frac{x-y}{m} - r < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} - 1 = \frac{y}{m} - 1 < \frac{y}{M}.$$

Следовательно,

$$J_{34} = \sum_{l<\frac{y}{M}} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r-l \\ \frac{x-y}{m}<n\leqslant \frac{x}{m+k+h}-r-l}} e(9\alpha klhr(2m+k+h)(2n+r+l)).$$

Переходя к оценкам, найдём

$$|J_{34}| \leqslant \sum_{l<\frac{y}{M}} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M} \left| \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r-l \\ \frac{x-y}{m}<n\leqslant \frac{x}{m+k+h}-r-l}} e(18\alpha klhr(2m+k+h)n) \right|.$$

Оценим сверху длину интервала суммирования по n. Имеем

$$\frac{x}{m+k+h} - r - l - \frac{x-y}{m} \leqslant \frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по n, найдём

$$|J_{34}| \leqslant \sum_{l,r<\frac{y}{M}} \sum_{k,h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|18\alpha klhr(2m+k+h)\|}\right) \ll \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{MN^2}} \tau_5(t) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3 и соотношения $MN \asymp x$, получим

$$|J_{34}|^2 \ll \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{xN}} \tau_5^2(t) \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right)^2 \ll \frac{y^5 \mathscr{L}^{24}}{x^2} \sum_{t\ll \frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right). \tag{22}$$

Теперь, представляя соотношения (18), (19), (20) и (21) в виде

$$|J_3|^{32} \ll \left(\frac{x^{16}\mathscr{L}^{16(5-k)^2-16}}{N^{16}}|J_{31}|^{16} + \frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}}{N^{16}}\right),$$

$$|J_{31}|^{16} \ll \left(\frac{y^8N^{16}}{x^8}|J_{32}|^8 + \frac{y^{24}N^{24}\mathscr{L}^8}{x^{16}}\right)\mathscr{L}^{16k^2-16},$$

$$|J_{32}|^8 \ll \left(\frac{y^8N^4}{x^4}|J_{33}|^4 + \frac{y^{20}N^4\mathscr{L}^4}{x^8}\right),$$

$$|J_{33}|^4 \ll \left(\frac{y^6}{N^4}|J_{34}|^2 + \frac{y^{14}\mathscr{L}^2}{x^2N^6}\right),$$

и последовательно воспользовавшись ими, представим $|J_3|^{32}$ через $|J_{34}|^2$. Имеем

$$|J_3|^{32} \ll \left(\left(y^8x^8|J_{32}|^8 + y^{24}N^8\mathscr{L}^8\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-10k+23)} + \frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}}{N^{16}}\right) \ll$$

$$\ll y^{16}\left(\left(x^4N^4|J_{33}|^4 + y^{12}N^4\mathscr{L}^4 + y^8N^8\mathscr{L}^8\right) + \frac{x^{16}}{N^{16}}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$

$$\ll y^{32}\left(\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2 + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4} + \frac{N^8\mathscr{L}^8}{y^8}\right) + \frac{x^{16}}{y^{16}N^{16}}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}.$$

Из условия $xy^{-1} \leqslant N \leqslant y$ следует, что

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2 + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}. \tag{23}$$

Для оценки суммы $|J_{34}|^2$ в этом неравенстве воспользуемся формулой (22) и рассмотрим случаи $y^4/(xN) > 0,5q$ и $y^4/(xN) \leqslant 0,5q$.

Для оценки суммы $|J_{34}|^2$, которую мы представили в виде (22), рассмотрим случаи $y^4/(xN) > q/2$ и $y^4/(xN) \leqslant q/2$.

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $y^4/(xN) > 0,5q$. Разбивая интервал изменения t на $\ll y^4/(qxN)$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g + q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, найдем

$$|J_{34}|^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\cdot\frac{y^4}{qxN}\sum_{t=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right) \ll \frac{y^9\mathscr{L}^{24}}{qx^3N}\left(\frac{yN}{x} + q\ln q\right) \ll \left(\frac{y^{10}}{qx^4} + \frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24}.$$

Подставляя эту оценку в (23), затем воспользовавшись условиями (17), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\left(\frac{y^{10}}{qx^4} + \frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24} + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$

$$\ll y^{32}\left(\frac{1}{q} + \frac{x}{yN} + \frac{N^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+13)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}\mathscr{L}^{32k(k-4)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}. \tag{24}$$

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $y^4/(xN) \leqslant 0,5q$. Применяя утверждение б) леммы 2, имеем

$$|J_{34}|^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\sum_{t\leqslant 0,5q}\frac{1}{\|\alpha t\|} \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}q\ln q \ll \frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2}.$$

Подставляя найденную оценку в (23), затем воспользовавшись условиями (17), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\cdot\frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2} + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$

$$\ll y^{32}\left(\frac{x^2q}{y^5} + \frac{x}{yN} + \frac{N^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+13)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}\mathscr{L}^{32k(k-4)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}.$$

Из этой оценки и из (24) следует утверждение леммы.

5. Короткая кубическая тригонометрическая сумма с функцией Мёбиуса

Теорема 1. *Пусть $B \geqslant 11$ — абсолютная постоянная $x > x_0 > 0$ и*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x}\mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1.$$

Тогда при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ *и* $\mathscr{L}^{32(B+18)} \leqslant q \leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ *справедлива оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Доказательство теоремы. Для простоты сумму $S_3(\alpha; x, y)$ обозначим через $\S$. Имеем

$$\S = \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

В лемме 4 возьмём $r = 3$, $u_1 = x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n) = e(\alpha n^3)$. Имеем

$$\S = 3\S_1 - 3\S_2 + \S_3, \qquad \S_1 = \sum_{\substack{m_1\leqslant u_1\\ x-y<m_1\leqslant x}} \mu(m_1)e(\alpha m_1^3) = 0,$$

$$\S_2 = \sum_{m_1\leqslant u}\mu(m_1)\sum_{m_2\leqslant u}\mu(m_2)\sum_{x-y<m_1m_2n_1\leqslant x} e(\alpha(m_1m_2n_1)^3),$$

$$\S_3 = \sum_{m_1\leqslant u}\mu(m_1)\sum_{m_2\leqslant u}\mu(m_2)\sum_{m_3\leqslant u}\mu(m_3)\sum_{n_1}\sum_{x-y<m_1m_2m_3n_1n_2\leqslant x} e(\alpha(m_1m_2m_3n_1n_2)^3).$$

Разобьём в $\S_k$, $k = 2,3$ области изменения каждого $m_1, \cdots, m_k, n_1, \cdots, n_{k-1}$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \leqslant 2M_j$, $N_j < n_j \leqslant 2N_j$. Получим не более $\ll \mathscr{L}^{2k-1}$ сумм вида

$$\mathcal{S}_k(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\ldots\sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1}\ldots\sum_{\substack{N_{k-1}<n_{k-1}\leqslant N_{k-1}\\ x-y<m_1\ldots m_kn_1\ldots n_{k-1}\leqslant x}} e(\alpha(m_1\ldots m_kn_1\ldots n_{k-1})^3).$$

Переходя к оценкам, имеем

$$\mathcal{S} \ll \mathscr{L}^3\max|\mathcal{S}_2(\mathcal{M},\mathcal{N})| + \mathscr{L}^5\max|\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})|, \tag{25}$$

Суммы $\mathcal{S}_k(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $k = 2,3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и, не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия

$$y = x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}, \quad x^{\frac{1}{3}} > M_1 \geqslant M_2 \geqslant M_3, \quad N_1 \geqslant N_2, \quad 2^{-5}x \leqslant M_1M_2M_3N_1N_2 < x. \tag{26}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > x\mathscr{L}^{-2B-18}$;
2. $xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036} < N_1 \leqslant x\mathscr{L}^{-2B-18}$;
3. $xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \leqslant xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036}$;
4. $N_1 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1N_2 > xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$;
5. $N_1N_2 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$.

Для рассмотрения случаев 1, 2 и 3 сумму $\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})$ несколько преобразуем. Для этого, вводя обозначение

$$a_m = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2}\mu(m_2)\sum_{M_3<m_3\leqslant 2M_3}\mu(m_3)\sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ m_1m_2m_3n_2=m}} 1, \qquad |a_m| \leqslant \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1M_2M_3N_2 < m \leqslant 2^4M_1M_2M_3N_2$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, получим не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N_1<n\leqslant 2N_1\\ x-y<mn\leqslant x}} e(\alpha(mn)^3).$$

Случай 1. $N_1 > x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае сумма по n_1 очень длинная, и мы её оценим как короткую кубическую сумму Г. Вейля, представляя в виде

$$\begin{aligned} &J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(\alpha(mn)^3),\\ &x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{m}, N_1\right) \leqslant \frac{y}{m},\\ &M < m \leqslant \min\left(2M, \frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{N_1} \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}. \end{aligned} \tag{27}$$

Дважды применяя неравенство Коши и лемму 3, воспользовавшись методом Г. Вейля, затем суммируя по h, последовательно получим

$$\begin{aligned} |J_3(\alpha; x,y, M, N_1)|^4 &\ll M^3(\ln M)^{30} \sum_{M<m\leqslant 2M} \left| \sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(\alpha(mn)^3) \right|^4 \leqslant\\ . \leqslant M^3(\ln M)^{30} &\sum_{M<m\leqslant 2M} \left(16y_1 \sum_{0<k\leqslant y_1} \sum_{0<l\leq y_1-k} \left| \sum_{0<h\leqslant y_1-k-l} e(6\alpha mklh) \right| + 24y_1^3 + 2(y_1+1)^2 \right) \ll\\ \leqslant M^3(\ln M)^{30} &\sum_{M<m\leqslant 2M} \left(\frac{y}{M} \sum_{0<k\leqslant \frac{y}{M}} \sum_{0<l\leq \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|}\right) + \frac{y^3}{M^3} \right) \leqslant\\ \leqslant &\left(yM^2 \sum_{M<n\leqslant 12y^2M^{-1}} \tau_3(n) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^3M \right)(\ln M)^{30}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3 и имея в виду, что $(\ln M)^{60} \ll \mathscr{L}$, найдём

$$\begin{aligned} |J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 &\ll \left(y^2M^4 \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \tau_3^2(n) \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)^2 + y^6M^2 \right)(\ln M)^{60} \ll\\ &\ll y^5M^2\mathscr{L}^9 \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6M^2\mathscr{L}. \end{aligned}$$

Для оценки последней суммы по n, рассмотрим отдельно случаи:

i. $\mathscr{L}^{32(B+18)} < 0.5q \leqslant y^2M^{-1}$;

ii. $y^2M^{-1} < 0.5q \leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

i. Разбивая интервал изменения n на $\ll y^2(Mq)^{-1}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g + q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, затем воспользовавшись условием $M \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$
\begin{aligned}
|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)|^8 &\ll y^5M^2\mathscr{L}^9\cdot\frac{y^2}{qM}\sum_{t=g}^{g+q'}\min\left(\frac{y}{M},\frac{1}{\|\alpha n\|}\right)+y^6M^2\mathscr{L}\ll\\
&\ll\frac{y^7M\mathscr{L}^9}{q}\left(\frac{y}{M}+q\ln q\right)+y^6M^2\mathscr{L}\ll\frac{y^8\mathscr{L}^9}{q}+y^7\mathscr{L}^{2B+28}+y^6\mathscr{L}^{4B+37}=\\
&=\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}\left(\frac{\mathscr{L}^{8B+50}}{q}+\frac{\mathscr{L}^{10B+69}}{y}+\frac{\mathscr{L}^{12B+78}}{y^2}\right)\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}.
\end{aligned}
$$

ii. Применяя утверждение б) леммы 2, затем воспользовавшись условием $M \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$
\begin{aligned}
|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)|^8 &\ll y^5M^2\mathscr{L}^9\sum_{n\leqslant 0{,}5q}\frac{1}{\|\alpha n\|}+y^6M^2\mathscr{L}\ll y^5qM^2\mathscr{L}^{10}+y^6M^2\mathscr{L}\ll\\
&\ll\frac{y^{10}}{x^2\mathscr{L}^{20B+530}}+y^6\mathscr{L}^{4B+37}=\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}\left(\frac{y^2}{x^2\mathscr{L}^{12B+489}}+\frac{\mathscr{L}^{12B+78}}{y^2}\right)\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}.
\end{aligned}
$$

Случай 2. $xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2B+1036} < N_1 \leqslant x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ является короткой двойной кубической тригонометрической суммой с "длинной" сплошной суммой. Поэтому применяем лемму 5 для оценки $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, полагая $A=B+5$, и при $B\geqslant 149$ из выполнения условия этой леммы

$$
\mathscr{L}^{8B+4142}<q<y^3\mathscr{L}^{-8B-4144}
$$

следует условия доказываемой теоремы, то есть неравенство

$$
\mathscr{L}^{32(B+18)}\leqslant q\leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.
$$

Таким образом, все условия леммы 5 выполняются, поэтому

$$
|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)|\ll\frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.
$$

Случай 3. $xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \leqslant xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2B+1036}$**.** Применяя для оценки суммы $|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)$ лемму 6, полагая $A=B+5$, также воспользовавшись эквивалентностью следующих двух неравенств

$$
y\geqslant x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+944},\qquad xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2B+1036}\leqslant y\mathscr{L}^{-8(B+18)},
$$

имеем

$$
|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)|\ll\frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.
$$

Случай 4. $N_1\leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1N_2>xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$**.** Сумму $\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})$ преобразуем, вводя обозначения

$$
\begin{aligned}
a_m &= \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2}\mu(m_2)\sum_{\substack{M_3<m_3\leqslant 2M_3\\ m_1m_2m_3=m}}\mu(m_3),\quad |a_m|\leqslant\tau_3(h),\\
b_n &= \sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1}\ \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ n_1n_2=n}}1,\quad |b_n|\leqslant\tau(n);
\end{aligned}
$$

разбивая интервалы суммирования $M_1M_2M_3 < m \leqslant 8M_1M_2M_3$ и $N_1N_2 < n \leqslant 4N_1N_2$ соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим не более шести сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} b_n e(\alpha(mn)^3).$$

Из соотношения (26) и условия рассматриваемого случая найдём

$$xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1N_2 \leqslant N,$$

$$N \leqslant 4N_1N_2 \leqslant 4N_1^2 \leqslant 4\left(xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\right)^2 = y\mathscr{L}^{-8(B+18)} \cdot \frac{4x^2}{y^3}\mathscr{L}^{72(B+18)} \leqslant y\mathscr{L}^{-8(B+18)}.$$

Отсюда и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия леммы 6 выполняются. Поэтому, согласно утверждению этой леммы, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Случай 5. $N_1N_2 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$**.** В сумме $\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})$, вводя обозначение

$$a_m = \sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2} \mu(m_2) \sum_{M_3<m_3\leqslant 2M_3} \mu(m_3) \sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1} \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2 \\ m_2m_3n_1n_2=m}} 1, \qquad |a_m| \leqslant \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_2M_3N_1N_2 < m \leqslant 16M_2M_3N_1N_2$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, а также обозначая M_1 через N, получим на не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} \mu(n) e(\alpha(mn)^3).$$

Из соотношения (26) и условия рассматриваемого случая найдём

$$N = M_1 \geqslant (M_1M_2M_3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{M_1M_2M_3N_1N_2}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \left(\frac{2^{-5}x}{xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\left(\frac{2^{-\frac{5}{4}}y}{x^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac{4}{3}} \geqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}.$$

Отсюда с учётом соотношения $N = M_1 < x^{\frac{1}{3}} \leqslant y\mathscr{L}^{-8(B+18)}$ и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия леммы 6 выполняются, поэтому согласно утверждению этой леммы, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Тогда из всех оценок, полученных в предыдущих случаях, и неравенства (25) найдём

$$|\mathcal{S}_3(\mathcal{M},\mathcal{N})| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}, \qquad |\S| = |S_3(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

6. Заключение

Работа посвящена оценке коротких кубических двойных тригонометрических сумм и их приложению к нахождению нетривиальной оценки коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1937. Vol. 8, № 1. P. 313 – 320.
2. Hua L. K. Additive theory of prime numbers — American Mathematical Soc. 1965. 190 pp.
3. Baker R. C., Harman G. Exponential sums formed with the Mobius function // J. London Math. Soc. 1991. Vol. s2-43, Is. 2. P. 193 – 198.
4. Liu J. Y., Zhan T. Exponential sums involving the Mobius function // Indag. Math. (N.S.). 1996. Vol. 7, Is. 2, P. 271–278.
5. Zhan T. Davenport's theorem in short intervals // Chin. Ann. of Math. 1991. Vol. 12B, Is. 4. P. 421–431.
6. Zhan T. On the representation of large odd integer as a sum of three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. Vol. 7, Is. 3. P. 135 – 170..
7. Liu J. Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte für Mathematik. 1999. Vol. 127, Is. 1. P. 27-41, doi.org/10.1007/s006050050.
8. Lu G. S., Lao H. X. On exponential sums over primes in short intervals // Monatshefte fur Mathematik. 2007. Vol. 151, Is, 2. P. 153-164. doi.org/10.1007/s00605-007-0449-5.
9. Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals // "Arithmetic in Shangrila" — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. Vol. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.
10. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242. DOI: 10.1134/S0371968517010174.
11. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З, Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 217 – 231.
12. Рахмонов З. Х., Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4(157). С. 7 – 23.
13. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.
14. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 11. С. 853 – 860.
15. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.
16. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и её приложения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.
17. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука. 1976. 120 с.

18. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391 – 393.

REFERENCES

1. Davenport, H., 1937, "On some infinite series involving arithmetical functions (II)", *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1937, vol. 8, Is. 1, pp. 313-320.

2. Hua, L. K., 1965, *Additive theory of prime numbers*, American Mathematical Soc., 5. 190 pp.

3. Baker, R. C., & Harman, G., 1991, "Exponential sums formed with the Mobius function", *J. London Math. Soc.*, vol. s2-43, Is. 2, pp. 193-198.

4. Liu, J. Y., & Zhan, T., 1996, "Exponential sums involving the Mobius function", *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 7, Is. 2, pp. 271–278.

5. Zhan, T., 1991, "Davenport's theorem in short intervals", *Chin. Ann. of Math.*, vol. 12B, Is. 4, pp. 421–431.

6. Zhan, T., 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.

7. Liu, J. Y., & Zhan, T., 1999, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals I", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 127, Is. 1,pp. 27-41, doi.org/10.1007/s006050050.

8. Lu, G. S., & Lao, H. X., 2007,"On exponential sums over primes in short intervals", *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 151, Is, 2, pp. 153-164. doi.org/10.1007/s00605-007-0449-5.

9. Kumchev, A. V., 2012, "On Weyl sums over primes in short intervals", *"Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.

10. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211-233. doi:10.1134/s0081543817010175

11. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Zamonov, B.M., 2016, "Estimates of short cubic double exponential sums with a long continuous summation", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, Is. 1, pp. 217–231.

12. Rakhmonov, Z. Kh., & Zamonov, B. M., 2014, "Short cubic double exponential sums, with a long continuous summation", *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 7-23, (in Russian).

13. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

14. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2013, "The sum of short double trigonometric sums", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 11, pp. 853-860, (in Russian).

15. Rahmonov, F. Z., 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56–60.

16. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558.

17. Vinogradov, I. M., 1976, *Osobye varianty metoda trigonometricheskikh summ (Russian) [Special variants of the method of trigonometric sums]*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1976. 119 pp.

18. Mardjhanashvili, K. K., 1939, “An estimate for an arithmetic sum”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

Получено 15.11.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-272-294

Нули функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой

З. Х. Рахмонов, Ш. А. Хайруллоев, А. С. Аминов (г. Душанбе)

З. Х. Рахмонов —доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Ш. А. Хайруллоев —кандидат физико-математических наук, докторант кафедры алгебры и теории чисел, Таджикского национального университета (г. Душанбе).
e-mail: shamsullo@rambler.ru
А. С. Аминов —научный сотрудник Института математики им. А.Джураева (г. Душанбе).
e-mail: aminov.as@bk.ru

Abstract

Дэвенпорт и Хейльбронн ввели функцию $f(s)$ и показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа, однако для $f(s)$ гипотеза Римана не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная. С.М. Воронин доказал, что тем не менее, критическая прямая $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка $N_0(T) > cT \exp\left(0,05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right)$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$. А.А.Карацуба исследуя количество нулей функции $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой доказал: если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

В работе доказано, что для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ критической прямой последнее соотношение справедливо при $H \geqslant T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$. Этот результат в частности является приложением новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Ключевые слова: функция Дэвенпорта-Хейльбронна, экспоненциальная пара, гипотеза Римана, успокаивающие множители Сельберга.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, Ш. А. Хайруллоев, А. С. Аминов Нули функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 272–294.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-272-294

Zeros of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line

Z. Kh. Rakhmonov, Sh. A. Khayrulloev, A. S. Aminov (Dushanbe)

Z. Kh. Rakhmonov F. Z. Rakhmonov —Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Sh. A. Khayrulloev —candidate of physical and mathematical Sciences, doctoral candidate of the Department of algebra and number theory, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shamsullo@rambler.ru
A. S. Aminov —Researcher A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: aminov.as@bk.ru

Abstract

Davenport and Heilbronn introduced the function $f(s)$ and showed that $f(s)$ satisfies the Riemannian type functional equation, however, the Riemann hypothesis fails for $f(s)$, and moreover, the number of zeros of $f(s)$ in the region $Re\,s > 1$, $0 < Im\,s\ leT$ exceeds cT, where $c > 0$ is an absolute constant. S.M. Voronin proved that, nevertheless, the critical line $Re\,s = \frac{1}{2}$ is an exceptional set for the zeros of $f(s)$, i.e. for $N_0(T)$, where $N_0(T)$ is the number of zeros of $f(s)$ on the interval $Re\,s = \frac{1}{2}$, $0 < Im\,s \leqslant T$, we have the estimate $N_0(T) > cT\exp\left(0.05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right)$, where $c > 0$ is an absolute constant, $T \geqslant T_0 > 0$. While studying the number of zeros of the function $f(s)$ in short intervals of the critical line, A.A. Karatsuba, proved: if ε and ε_1 are arbitrarily small fixed positive numbers not exceeding 0.001; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ and $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, then we have

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

This paper demonstrates that for the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function $f(s)$ in short intervals of the form $[T, T+H]$ of the critical line the last relationship holds for $H \geqslant T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$. In particular, this result is an application of a new, in terms of exponential pairs, estimates of special exponential sums $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ which are uniform across parameters, where the problem of the non-triviality of estimates for these sums with respect to the parameter H is reduced to the problem of finding the exponential pairs..

Keywords: Davenport-Heilbronn function, exponential pair, Riemann hypothesis, Selberg soothing factors.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, Sh. A. Khayrulloev, A. S. Aminov, 2019, “Zeros of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 272–294.

1. Введение

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-i\text{æ}}{2}L(s,\chi) + \frac{1+i\text{æ}}{2}L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1] , (см. также [2] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \tag{1}$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \le T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С. М. Воронин [3] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство $N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) > c_2 T$, где $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. В 1980 г. С. М. Воронин [4] доказал, что, тем не менее, *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А. А. Карацуба. Он в 1989 году доказал [5, 6], что если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и $T \ge T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{2}$$

В 1993 г. А. А. Карацуба [7, 8] получил более точную оценку: множитель $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ в неравенстве (2) он заменил на $(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$, следствием чего явилось неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

В 2017 г. С. А. Гриценко [9] усилил последнюю оценку и получил неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Затем он [10] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство неравенства (2) для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, *c_4, c_5, c_g - абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7 (\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T_0 \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5 \cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}} c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geqslant 1.$$

Поэтому из теоремы 1 следует

Следствие 1. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* 0,001. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказывается методом работы [5] в соединение с идеями и методами работ [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Основным утверждением, позволившим доказать неравенства (2) для промежутков, имеющих более короткую длину является лемма 4 о новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Обозначения. Всюду ниже будем считать, что ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0,001; $T \leq t \leq T+H$, $T \geqslant T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$; $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; $\mathscr{L} = \ln P$; $X = T^{0,01\varepsilon_1}$; $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — абсолютные положительные постоянные;

$$r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).$$

2. Вспомогательные утверждения

Пусть вещественные числа $\alpha(\nu)$ при $Re\, s > 1$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{p \equiv \pm 1 (mod\, 5)} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k-1)\, p^{ks}}\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k-1)}, & \text{если } k \geqslant 1 \text{ и } p \equiv \pm 1 (mod\, 5). \\ 0, & \text{если } k \geqslant 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1 (mod\, 5), \end{cases}$$

где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$. Из определения чисел $\alpha(\nu)$ следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$. Отсюда и из соотношения $\chi(p^k) = (\pm 1)^k$, $p \equiv \pm 1 (mod\, 5)$ следует, что $\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu)$ и $|h(\nu)| \leqslant 1$. Пусть далее

$$\varphi(s) = \sum_{\nu < X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu < X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \leq \nu < X, \\ 0, & \nu \geq X, \end{cases} \tag{3}$$

Определение 1. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами*

$$F(t)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=e^{i\theta(t)}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

Лемма 1. *Пусть T такое, что $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi k$, k — целое число. Тогда при $T\le t\le T+H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t)=2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0,01}),$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$A(\lambda)=\sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}. \tag{4}$$

Доказательство см. [6], стр. 226.

Определение 2. *Суммами А. Сельберга вида $W(\theta)$ и вида $S(Y)$ называются соответственно суммы*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},\qquad S(Y)=\sum_{\lambda\le Y}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где $\beta(\nu)$ и $A(\lambda)$ — функции, определённые соответственно формулами (3) и (4), а λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.

Лемма 2. *Пусть $T^{0,1}\leqslant Y\le T$, $\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{2}$, тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y)=\frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)}Y^{1-2\theta}W(0)+\left(\frac{c_1}{1-2\theta}+c_2\right)W(1-2\theta)+O\left(Y^{-2\theta}X^2\ln^2X\right),$$

$$c_1=-\frac{7^{1-2\theta}+13^{1-2\theta}+æ^2(9^{1-2\theta}+11^{1-2\theta})}{5\cdot 2^{1-2\theta}},\qquad c_2=1+\frac{1}{4^{2\theta}}+\frac{æ^2}{2^{2\theta}}+\frac{æ^2}{3^{2\theta}}+$$

$$+10\theta\int_{0,5}^{\infty}\left(\frac{1}{(5u+1)^{2\theta+1}}+\frac{1}{(5u+4)^{2\theta+1}}+\frac{æ^2}{(5u+2)^{2\theta+1}}+\frac{æ^2}{(5u+3)^{2\theta+1}}\right)\rho(u)du.$$

Доказательство см. [6], стр. 227.

Лемма 3. *При $0\le\theta\le\frac{1}{2}$ для $W(\theta)$ справедлива оценка*

$$W(\theta)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство см. [6], стр. 229.

Определение 3. *Если $B\ge 1$, $0<h\le B$, $F(u)\in C^\infty(B,2B)$, $A\ge 1$,*

$$AB^{1-r}\ll|F^{(r)}(u)|\ll AB^{1-r},\ r=1,2,3,\dots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ зависят только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B\le n\le B+h}e(F(n))\ll A^kB^l,\quad 0\le k\le 0,5\quad 0,5\le l\le 1,$$

то пара (k,l) называется экспоненциальной парой.

3. Оценка тригонометрических сумм $W_j(T)$

При $j = 0, 1, 2$ определим три вида сумм $W_j(T)$. Для этого кроме уже введённых параметров в конце первого параграфе введём дополнительные параметры, от которых могут зависеть эти суммы: $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$. Пользуясь определением чисел $A(\lambda)$ в (4) и обозначениями функций

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta} - 1}{\ln \varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)} = \left(\frac{\psi^{-i\eta} - 1}{\ln \psi}\right)^k,$$

суммы $W_j = W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0 = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2} < \lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Карацуба [5] при $H \geqslant T^{\frac{27}{82} + \varepsilon_1}$ для этих сумм получил оценки вида

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, 2; \quad W_1(T) \ll \left(\varepsilon_2^{-2k} (\ln T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k} \eta^k (\ln T)^{-k}\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

В лемме 4 в сочетании методов работ [11, 12, 13, 14, 15, 16] и метода экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_j(T)$ подобные оценки получены для параметра H с меньшим порядком роста.

Лемма 4. *Пусть ε_1 и ε_2 - произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$, k — натуральное число, $0 < \eta < 1$, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad æ(\kappa, \lambda) = \frac{52 + \kappa - \lambda}{50\kappa + 50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa + 1) \ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda) + æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1 + \sigma(\kappa)}$ справедливы оценки

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, \ j = 2; \qquad W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}}\right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L}\right) T^{-0,5(\lambda - \kappa)\varepsilon_2} \cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

Показатель $\theta(\kappa; \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2(\kappa + 1)}$ также появляется в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leqslant R$ в форме

$$K(R) = \#\left\{(x, y): \ x^2 + y^2 \leqslant R, \ x, y \in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda) + \varepsilon}\right),$$

и в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leqslant N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa; \lambda)$ принадлежит М. Хаксли [17]. Он доказал, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leqslant \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3 \cdot 416} \approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар. Отсюда из леммы 4 получаем следующее.

Следствие 2. *Пусть ε_1 и ε_2 - произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, k — *натуральное число,* $0<\eta<1$. *Тогда при* $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T)\ll T^{-\varepsilon_1},\quad j=0,\ j=2;\qquad\qquad W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Доказательство леммы 4 для удобства разобьём на этапы.

1. Оценка части суммы $W_j(T)$, $j=0,1,2$ с условием $\lambda_2>\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. Если в суммах $W_j(T)$, $j=0,1,2$ выполняется условие $\lambda_2>\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$, то воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+x)>0,5x$, $0<x\leqslant 0,5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)<\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\right)^2\right)<\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right).$$

Обозначая соответствующие части сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2,$ для которых выполняется условие $\lambda_2-\lambda_1>\mathscr{L}H^{-1}$, через $W_j'(T)$, $j=0,1,2,$ и воспользовавшись при $j=1$ соотношением

$$\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|=\frac{\left|\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta}-1\right|^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k}=\frac{\left|2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right|^k}{(\ln P-\ln\lambda)^k}\leqslant\frac{2^k}{(\ln P-\ln P^{1-\varepsilon_2})^k}=\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^k,\tag{5}$$

имеем

$$|W_j'(T)|<\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2;\qquad j=0,2;$$

$$|W_1'(T)|<\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее из определения суммы $A(\lambda)$ и соотношений $|r(m)|\leqslant 1$ и $|h(\nu)|\leqslant 1$ имеем

$$\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\leqslant\sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)||r(n)|}{\nu_2}=\sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\ll P^{\frac12}X\ln X.$$

Следовательно,

$$W_j'(T)\ll\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)PX^2\ln^2X,\qquad j=0,2;$$

$$W_1'(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2X.$$

Осталось рассмотреть слагаемые с условием $\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. Промежутки $0<\lambda_1<P$ в $W_0(T)$, $0<\lambda_1<P^{1-\varepsilon_2}$ в $W_1(T)$, и $P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<P$ в $W_2(T)$, разобьём целыми числами $\Lambda=\Lambda(j)$ на $\ll\mathscr{L}$ промежутков вида $\Lambda<\lambda_1\leqslant\Lambda_1\leq 2\Lambda$. Следовательно для чисел Λ выполняется соотношение

$$2\Lambda=2\Lambda(j)<E_jP,\quad\text{где}\quad E_j=\begin{cases}P^{-\varepsilon_2}, & \text{если } j=1;\\ 1, & \text{если } j=0 \text{ или } j=2.\end{cases}\tag{6}$$

Обозначая через $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ максимальную из получившихся таким образом сумм, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} W_j(T) &\ll \mathscr{L}|W_j(\Lambda)| + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;\\ W_1(T) &\ll \mathscr{L}|W_1(\Lambda)| + \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Оценка $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda \leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$. Если $\Lambda \leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, то в силу того, что рациональные числа λ_1 и λ_2 имеют вид

$$\lambda_1<\lambda_2, \qquad \lambda_1=\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \qquad \lambda_2=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}, \qquad \nu_i<X, \qquad i=1,2,3,4.$$

находим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}\geqslant 1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\Lambda}>1+\frac{1}{2\Lambda}\cdot\frac{n_2\nu_3\nu_2-n_1\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_4}>1+\frac{1}{2\nu_2\nu_4\Lambda}\geqslant 1+\frac{\mathscr{L}}{2H},$$

поэтому

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)<\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)\right)^2\right)<\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right).$$

Оценивая суммы $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ при $\Lambda\leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, аналогично суммам W_j', $j=0,1,2$, находим, что

$$\begin{aligned} W_j(\Lambda) &\ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right)PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;\\ W_1(\Lambda) &\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right)P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Выражение $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda > HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$ через $C(u,h)$ и $F_j(h,\nu)$. Не ограничивая общности можно считать, что $\Lambda > HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, $B_0\left(\frac{P}{\lambda}\right)=B_2\left(\frac{P}{\lambda}\right)=1$ и $B_1\left(\frac{P}{\lambda}\right)=B\left(\frac{P}{\lambda}\right)$. Тогда

$$W_j(\Lambda)=\sum_{\Lambda<\lambda_1\leqslant\Lambda_1}\ \sum_{\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}B_j\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где $\delta=0$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}<\Lambda<\Lambda_1\leq 2\Lambda<P^{1-\varepsilon_2}$ при $j=1$, а $\delta=1$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}<$ $<\Lambda<\Lambda_1\leq 2\Lambda<P$ при $j=0,2$.

Воспользовавшись определением $A(\lambda)$, и обозначением $\dfrac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}=\dfrac{a}{b}$, $(a,b)=1$, представим сумму $W(\Lambda)$ в виде

$$W_j(\Lambda)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}W_j(\Lambda,\nu); \quad j=0,1.2; \quad \nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4); \tag{9}$$

$$W_j(\Lambda,\nu)=\sum_{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}<n_1\leqslant\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}}\ \sum_{\frac{n_1a}{b}<n_2\leqslant\frac{n_1a}{b}(1+\mathscr{L}H^{-1})}r(n_1)r(n_2)\Phi_j(n_1,n_2,\nu)\left(\frac{n_1a}{n_2b}\right)^{iT},$$

$$\Phi_j(n_1,n_2,\nu)=\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{n_1a}{n_2b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1n_2}}B_j\left(\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P\nu_4}{n_2\nu_3}\right)}.$$

Записав n_1 и n_2 в виде членов арифметических прогрессий соответственно с разностями $5a$, и $5b$, то есть

$$n_1=5bm+b_1,\qquad 0\leqslant b_1<5b,\qquad \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}<m\leqslant\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},$$
$$n_2=5am_1+a_1,\quad 0\leqslant a_1<5a,\qquad m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<m_1\leqslant m+\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}+\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

вводя обозначение

$$N=\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\quad N_1=\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b},\quad \alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a},\quad \omega(m)=\left(m+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

делая суммирование по b_1 и a_1 внешним, а также имея в виду, что $r(5bm+b_1)=r(b_1)$ и $r(5am_1+a_1)=r(a_1)$, приходим к следующему соотношению:

$$W_j(\Lambda,\nu)=\sum_{0\leqslant b_1<5b}r(b_1)\sum_{0\leqslant a_1<5a}r(a_1)W_j(\Lambda,\nu,m,m_1),\tag{10}$$

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{N<m\leqslant N_1}\ \sum_{m+\alpha<m_1\leqslant m+\alpha+\omega(m)}\Phi_j(5bm+b_1,5am_1+a_1,\nu)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m_1+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Переменная суммирования m_1 принимает все значения целых чисел из полуинтервала $m+\alpha<m_1\leqslant m+\alpha+\omega(m)$, поэтому заменяя m_1 на $m+h$, то есть полагая $m_1=m+h$, где h принимает значения из полуинтервала $\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(m)$, представим сумму W_4 в виде

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{N<m\leqslant N_1}\ \sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(m)}\Phi_j(5bm+b_1,5a(m+h)+a_1,\nu)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{(m+h)+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

Заметим, что $h\geqslant 0$, и это следует из соотношения

$$-1<-1+\frac{1}{5a}\leqslant\alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}\leqslant 1-\frac{1}{5b}<1.$$

Меняя порядки суммирования по h и m, имея в виду, что условия $h\leqslant\alpha+\omega(m)$ и $m\geqslant(h-\alpha)\frac{H}{\mathscr{L}}-\frac{b_1}{5b}$ равносильны, и вводя обозначения $N_2=\max\left(N,\dfrac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\dfrac{b_1}{5b}\right)$, найдем

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)}\ \sum_{N_2<m\leqslant N_1}\Phi_j(5bm+b_1,5a(m+h)+a_1,\nu)\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

К сумме по m применяя преобразования Абеля, получаем

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1)=\sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)}\left(-\int_{N_2}^{N_1}C(u,h)f_j'(u,h)du+C(N_1,h)f_j(N_1,h)\right),$$

$$f_j(u,h)=\Phi_j(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu),\qquad C(u,h)=\sum_{N_2<m\leqslant u}\left(\frac{m+\frac{b_1}{5b}}{m+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Подставляя правую часть полученной формулы в (10), а затем в (9), и переходя к оценкам, найдём

$$W_j(\Lambda) \leqslant \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \sum_{0\leqslant b_1<5b}\sum_{0\leqslant a_1<5a}\sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)} F_j(h,\nu) \max_{N_2<u\leqslant N_1} |C(u,h)|, \qquad (11)$$

$$F_j(h,\nu) = \int_{N_2}^{N_1} |f_j'(u,h)|du + |f_j(N_1,h)|.$$

Далее оценим $F_j(h,\nu)$, $j=0,1,2$, а затем $|C(u,h)|$. Заметим, что $F_0(h,\nu)$ и $F_2(h,\nu)$ тождественно равны так как $f_2(u,h)=f_0(u,h)$, поэтому достаточно оценить $F_0(h,\nu)$ и $F_1(h,\nu)$.

4. Оценка $F_0(h,\nu)$**.** Имея в виду, что $f_0(u,h)=\Phi_0(5bu+b_1, 5a(u+h)+a_1,\nu)$, находим

$$f_0'(u,h) = \left(\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)}}\right)' = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u+\frac{b_1}{5b}}{u+h+\frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}}\times$$

$$\times\frac{2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2u-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}}{2\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)^{\frac32}\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{\frac32}}.$$

Знак $f_0'(u,h)$ совпадает со знаком числителя последней дроби, для определения которой, пользуясь последовательно границами изменения переменных $N_2 < m \leqslant N_1$ и $\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)$, то есть соотношениями

$$N_2 = \max\left(N, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right) = \max\left(\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}-b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-\frac{b_1}{5b}\right),$$

$$\alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}, \qquad \omega(N_1)=\left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH},$$

имеем

$$2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2u-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a} <$$

$$< 2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}}{\frac{\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}}\right)\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}-\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b} =$$

$$= \frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}\left(\left(1+\frac{\delta}{H}\right)\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\mathscr{L}-1\right) < \left(\frac{2\mathscr{L}^2}{H}-1\right)\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b} < 0.$$

Следовательно, $f_0'(u,h)<0$, поэтому с учётом условия $f_0(u,h)>0$ найдём

$$F_0(h,\nu) = -\int_{N_2}^{N_1} f_0'(u,h)du + f_0(N_1,h) \leqslant f_0(N_2,h).$$

Для оценки сверху $f_0(u,h)$, возвращаясь к переменным n_1 и n_2, затем к λ_1 и λ_2, далее пользуясь соотношением $\Lambda<\lambda_1<\lambda_2$, имеем

$$F_0(h,\nu) = f_0(u,N_2) = \sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \leqslant \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}. \qquad (12)$$

5. Оценка $F_1(h,\nu)$. Для оценки $F_1(h,\nu)$ нам нужны оценки $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$—её производная по u. Воспользовавшись обозначениями

$$\varphi=\varphi(u)=\frac{P\nu_2}{(5bu+b_1)\nu_1},\qquad \psi=\psi(u)=\frac{P\nu_4}{(5a(u+h)+a_1)\nu_3},$$

и соотношением $f_1(u,h)=\Phi_1(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu)$, получим

$$\begin{aligned}
&f_1(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right),\\
&f_1'(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'+f_0'(u,h)B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))},\\
&\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'=kB(\varphi)\overline{B(\psi)}\left(\frac{1-i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\ln\varphi}+\frac{1+i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)\ln\psi}\right).
\end{aligned}$$

Пользуясь оценкой (5), найдем

$$\begin{aligned}
\left|\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'\right|&\leqslant\frac{2k}{u\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)}\left(\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2+\eta\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{2k-1}{k}}\right)\leqslant\\
&\leqslant\frac{2k}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}+\eta\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k-1}\right)=\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}+\eta\right)\frac{k}{u}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные формулы для $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$ в соотношение (11), переходя к оценкам и воспользовавшись оценкой (5) и последней оценкой, затем соотношениями $f_0'(u,h)<0$ и $f_0(u,h)>0$, а в конце соотношением (12), последовательно находим

$$\begin{aligned}
F_1(h,\nu)&\leqslant\int_{N_2}^{N_1}\left|f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'\right|du+\int_{N_2}^{N_1}\left|f_0'(u,h)\right|\left|B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right|du+\\
&\quad+|f_0(N_1,h)|\left|B(\varphi(N_1))\overline{B(\psi(N_1))}\right|\leqslant\\
&\leqslant\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\left(\frac{2k}{\varepsilon_2\mathscr{L}}+k\eta\right)\int_{N_2}^{N_1}\frac{f_0(u,h)}{u}du-\int_{N_2}^{N_1}f_0'(u,h)du+f_0(N_1,h)\right)\leqslant\\
&\leqslant\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2k}{\varepsilon_2}+k\eta\mathscr{L}+1\right)f_0(N_2,h)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}.
\end{aligned}$$

Объединяя эту оценку с оценкой (12), имеем

$$\begin{aligned}
&F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\ll\frac{D_j}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}},\\
&D_j=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\dfrac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right), & \text{если } j=1;\\ 1, & \text{если } j=0 \text{ или } j=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в формулу (11), получим

$$W_j(\Lambda)\ll\frac{D_j}{\Lambda}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{1}{\nu_2\nu_4}\sum_{0\leqslant b_1<5b}\ \sum_{0\leqslant a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)}\max_{N_2<u\leqslant N_1}|C(u,h)|,\tag{13}$$

6. Оценка $|C(u,h)|$. Для оценки суммы

$$C(u,h)=\sum_{N_2<m\leqslant u} e\left(\frac{T}{2\pi}\ln\frac{m+h+\frac{a_1}{5a}}{m+\frac{b_1}{5b}}\right),$$

$$N_2=\max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b},\frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right),\qquad u\leqslant\frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b},$$

воспользуемся методом экспоненциальных пар. Положим,

$$f(y)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{y+h+\frac{a_1}{5a}}{y+\frac{b_1}{5b}},\qquad A=\frac{T|h-\alpha|}{N_2^2}\ll\frac{T|h-\alpha|b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2},$$

$$B=u-N_2\leqslant N_1-N_2=\frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b}-\max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1}-\frac{b_1}{5b},\frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha)-\frac{b_1}{5b}\right)\ll\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}.$$

Для нахождения производной порядка s, $s=1,2,\ldots$ функции $f(u)$, представляя её производную первого порядка в виде

$$f'(y)=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\cdot f_1(y)f_2(y),\quad f_1(y)=\frac{1}{y+h+\frac{a_1}{5a}},\qquad f_2(y)=\frac{1}{y+\frac{b_1}{5b}},\quad \alpha=\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a},$$

и имея в виду, что

$$f_1^{(s-1-j)}(y)=\frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}},\qquad f_2^{(j)}(y)=\frac{(-1)^j j!}{(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}},$$

воспользуемся формулой Лейбница для $s-1$ — ой производной произведения двух функций:

$$f^{(s)}(y)=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\left(f_1(y)f_2(y)\right)^{(s-1)}=-\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}C_{s-1}^j f_1^{(s-1-j)}(y)f_2^{(j)}(y)=$$

$$=\frac{(-1)^s\,s!\,T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}.$$

Поэтому

$$AB^{1-s}\ll f^{(s)}(y)\ll AB^{1-s},\qquad s=1,2,\ldots.$$

Следовательно, для экспоненциальной пары (κ,λ) имеем

$$|C(u,h|\ll\left(\frac{T(h-\alpha)b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2}\right)^{\kappa}\left(\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}\right)^{\lambda}=\frac{T^{\kappa}b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^{\kappa}.$$

7. Оценка $W_j(T)$, $j=0,1,2$. Подставляя оценку для $|C(u,h|$ в (13), имеем

$$W_j(\Lambda)\ll\frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}b^{2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}\sum_{0\leqslant b_1<5b}\ \sum_{0\leqslant a_1<5a}\ \sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)}(h-\alpha)^{\kappa}\ll$$

$$\ll\frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}ab^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}(\omega(N_1))^{\kappa+1}.$$

Отсюда имея в виду, что

$$\omega(N_1)=\left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H}=\frac{\Lambda_1\nu_2\mathscr{L}}{5Hb\nu_1},\qquad a=\frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},\qquad b=\frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},$$

получим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} \ll D_j\,\frac{T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.$$

Отсюда пользуясь условиями $\lambda-\kappa\geqslant 0$ и $2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_jP$, где E_j определяется формулой (6), а также $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, найдём

$$W_j(\Lambda) \ll D_j E_j^{\lambda-\kappa}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{T^{\theta(\kappa,\lambda)+\text{æ}(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}}{H}\right)^{\kappa+1},$$

где

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\qquad \text{æ}(\kappa,\lambda)=\frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50},\qquad \sigma(\kappa)=\frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Следовательно, при $H\geqslant T^{\theta(\kappa,\lambda)+\text{æ}(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ получим оценку

$$W_j(\Lambda)\ll D_jE_j^{\lambda-\kappa}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}.$$

Пользуясь определениями параметров D_j и E_j, эту оценку напишем в виде

$$\begin{aligned} &W_j(\Lambda)\ll T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}, \qquad j=0,\quad j=2;\\ &W_1(\Lambda)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку и оценку (8) в (7), получим утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы 1.

Кроме уже введённых параметров в конце первого параграфе введём дополнительные параметры: a — произвольное фиксированное число с условием $0<a<1$; $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi r$, r — целое число; $\eta=c_1\mathscr{L}^{-\frac12}$; $k=[c\ln\mathscr{L}]$; c и $c_1>1$ — постоянные, значения которых определим позднее; всюду ниже краткости функцию $F(t+u_1+\ldots+u_k)$ обозначим через $F(t,u,k)$.

1. Сведение к оценкам интегралов $I_2(T,T+H)$**,** $I_1(T,T+H)$ **и** $J(T,H)$. Из определения 1 функции $F(t)$ и функционального уравнения (1) для функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями нечётного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой. Обозначим буквой E подмножество интервала $(T,T+H)$, состоящее из чисел t таких, что

$$\int_0^{\eta}\ldots\int_0^{\eta}|F(t,u,k)|\,du_1\ldots du_k > \left|\int_0^{\eta}\ldots\int_0^{\eta}F(t,u,k)du_1\ldots du_k\right|. \tag{14}$$

Возводя обе части неравенства в степень a и пользуясь определением E, получаем

$$\begin{aligned}&\int_E dt\left(\int_0^{\eta}\ldots\int_0^{\eta}|F(t,u,k)|\,du_1\ldots du_k\right)^a\geqslant\\ &\geqslant\int_E dt\left(\left(\int_0^{\eta}\ldots\int_0^{\eta}|F(t,u,k)|\,du_1\ldots du_k\right)^a-\left|\int_0^{\eta}\ldots\int_0^{\eta}F(t,u,k)du_1\ldots du_k\right|^a.\right)\end{aligned}$$

При замене области интегрирования E на интервал $(T, T+H)$ значение интеграла в правой части последнего неравенства не меняется, так как при $t \in (T, T+H) \setminus E$ неравенство (14) превращается в равенство. Поэтому воспользовавшись обозначениями

$$\begin{aligned} I(E) &= \int_E \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt, \\ I_1(T, T+H) &= \int_T^{T+H} \left| \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k \right|^a dt; \\ I_2(T, T+H) &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^a dt, \end{aligned}$$

представим последнее неравенство в виде

$$I(E) \geq I_2(T, T+H) - I_1(T, T+H). \tag{15}$$

Пользуясь неравенством Гёльдера вида

$$\left(\int_E g(t) dt \right)^{\frac{2}{a}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_E g^{\frac{2}{a}}(t) dt,$$

получаем

$$(I(E))^{\frac{2}{a}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k \right)^2 dt.$$

Функция $F(t,u,k)$ непрерывна на отрезке $[0, \eta]$ по каждому из аргументов $u_1, \ldots, u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значение интеграла, найдутся точки $u_1^*, \ldots, u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k = \eta^k \left| F(t + u_1^* + \ldots + u_k^*) \right|.$$

Отсюда с учётом следующего соотношения

$$0 \leqslant u_1^* + \ldots + u_k^* \leqslant \eta k = \frac{c_1 [c \ln \mathscr{L}]}{\sqrt{\mathscr{L}}} \leqslant 1,$$

имеем

$$I(E) \leqslant \left((\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \eta^{2k} \int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*} |F(t)|^2 dt \right)^{\frac{a}{2}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \left(\eta^{2k} J(T,H) \right)^{\frac{a}{2}},$$

$$J(T,H) = \int_T^{T+H+1} |F(t)|^2 \, dt.$$

Отсюда и из (15), найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geqslant \frac{I_2(T, T+H) - I_1(T, T+H)}{(\eta^{2k} J(T,H))^{\frac{a}{2}}}. \tag{16}$$

Таким образом, для оценки снизу функции $\mu(E)$ достаточно оценить интеграл $I_2(T, T+H)$ снизу, а интегралы $I_1(T, T+H)$ и $J(T,H)$ сверху.

2. Оценка снизу интеграла $I_2(T, T+H)$. Применяя k – раз неравенство Гёльдера вида

$$\left(\int_0^\eta f(u) du \right)^{\frac{1}{a}} \leqslant \eta^{\frac{1}{a}-1} \int_0^\eta f^{\frac{1}{a}}(u) du,$$

затем возводя обе части получившегося неравенства в степени a, найдём

$$\left(\int_0^\eta \dots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \dots du_k\right)^a \geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \dots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a\, du_1 \dots du_k$$

Отсюда и из определения интеграла $I_2(T, T+H)$, получим

$$\begin{aligned} I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \dots \int_0^\eta \int_{T+u_1+\ldots+u_k}^{T+H+u_1+\ldots+u_k} |F(t)|^a\, dt du_1 \dots du_k \geqslant \\ \geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \dots \int_0^\eta \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a\, dt du_1 \dots du_k = \eta^{ka} \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a\, dt. \end{aligned}$$

Далее пользуясь определением $F(t)$, это неравенство представим в виде

$$I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{ka} \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right)\right|^a dt. \qquad (17)$$

Для оценки снизу интеграла в правой части (17) воспользуемся теоремой Гэбриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным ([6], стр. 366). В этой лемме, полагая $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{a}$, $\beta = 2$, $\mu = \frac{1}{2-a}$, $\sigma = 2 - \frac{3a}{4}$, $T_1 = H - k\eta$, $p = \frac{a}{2}$, $\quad q = \frac{2-a}{2}$, и имея в виду, что

$$\begin{aligned} J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right) &= \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2 - \frac{3a}{4} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2\left(2 - \frac{3a}{4} + i(t+T+k\eta)\right)\right| dt, \\ J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right) &= \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right)\right|^a dt\right)^{\frac{1}{a}}, \\ J\left(2, \frac{1}{2-a}\right) &= \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2 + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2\left(2 + i(t+T+k\eta)\right)\right|^{2-a} dt\right)^{\frac{1}{2-a}}, \end{aligned}$$

с учетом соотношения $p\lambda + q\mu = 1$, найдем

$$J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right) \leqslant c_g J^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right) J^{\frac{2-a}{2}}\left(2, \frac{1}{2-a}\right),$$

где c_g — абсолютная постоянная. Из соотношения (17), определения $J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right)$ и последнего неравенства, получим

$$I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{ka} J^a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right) \geqslant c_g^{-2} \eta^{ka} J^2\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right) J^{-(2-a)}\left(2, \frac{1}{2-a}\right). \qquad (18)$$

Таким образом, для оценки снизу интеграла $I_2(T, T+H)$ достаточно оценить интеграл $J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right)$ снизу, а интеграл $J\left(2, \frac{1}{2-a}\right)$ сверху.

Для оценки снизу интеграла $J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right)$, пользуясь определениями функций $f(s)$ и $\varphi(s)$ при $s = 2 - \frac{3a}{4} + i(t+T+k\eta)$, имея в виду, что $2 - \frac{3a}{4} > 1$, найдём

$$f(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \sum_{\nu_1 < X} \frac{h(\nu_1)}{\nu_1^s} \sum_{\nu_2 < X} \frac{h(\nu_2)}{\nu_2^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m^s}, \quad r_1(m) = \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} r(n) h(\nu_1) h(\nu_2).$$

Воспользовавшись соотношениями $|r(m)| \leqslant 1$ и $|h(\nu)| \leqslant 1$, имеем

$$|r_1(m)| \leqslant \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} |r(m)||\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \leqslant \sum_{\substack{m = n\nu_1\nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < X}} 1 \leqslant \tau_3(n).$$

Следовательно,

$$\left|f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}} \ll 1.$$

Отсюда, из определения $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ и в виду, что $k\eta<1$, имеем

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)=\int_0^{H-k\eta}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}m^{-i(t+T+k\eta)}\right|dt \geqslant \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}\int_0^{H-k\eta}m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right| \geqslant$$

$$\geqslant H-k\eta-\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right| \geqslant H+O(1). \qquad (19)$$

Для оценки сверху интеграла $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$, поступая аналогично как при оценке $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ при $Re\, s>1$, имеем

$$|f(2+i(t+T+k\eta)\varphi^2(2+i(t+T+k\eta)|=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2+i(t+T+k\eta)}}\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(n)}{m^2}=\zeta^3(2)=\frac{\pi^6}{216}.$$

Следовательно,

$$J\left(2,\frac{1}{2-a}\right) \leqslant \left(\int_0^H\left(\frac{\pi^6}{216}\right)^{2-a}dt\right)^{\frac{1}{2-a}}=\frac{\pi^6}{216}H^{\frac{1}{2-a}}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (19) в (18), получим

$$I_2(T,T+H) \geqslant \left(\frac{216}{\pi^6}\right)^{2-a}c_g^{-2}\left(1+O(H^{-1})\right)H\eta^{ka} \geqslant \left(\frac{200}{10^3}\right)^{2-a}c_g^{-2}H\eta^{ka}=\frac{1}{5^{2-a}c_g^2}\,H\eta^{ka}. \quad (20)$$

3. Оценка сверху интеграла $J(T,H)$**.** Имея в виду, что $T\le t\le T+H$ и $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi r$, r — целое число, то согласно приближенному функциональному уравнению для функции $F(t)$ (лемма 1), имеем

$$J(T,H)=\int_T^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt=\int_T^{T+H+1}\left|2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0,01})\right|^2 dt.$$

Дважды воспользовавшись неравенством $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$J(T,H)\ll\int_0^{H+1}\left|\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{i(T+t)}\right|^2 dt+HT^{-0,02}.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$J(T,H)\ll H\sum_{\lambda_1,\lambda_2\leqslant P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)+HT^{-0,02}.$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$J(T,H) \ll H\left(|\Sigma_0(T)|+|W_0(T)|\right)+HT^{-0,02}, \qquad \Sigma_0(T)=\sum_{\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda}, \tag{21}$$

$$W_0(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_0(T)$. Полагая $\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathscr{L}}$ и ввиду $X^{-1}\leqslant\lambda\leqslant P$, имеем

$$\Sigma_0(T)=\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right)\leqslant\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(\frac{\ln X}{\mathscr{L}}\right)\leqslant e\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.$$

Применяя к последней сумме лемму 2 при $Y=P$ и $\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathscr{L}}$, получим

$$\Sigma_0(T)\leqslant\frac{2e(1+æ^2)\mathscr{L}}{5}W(0)+(c_1\mathscr{L}+c_2)\,W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)+O\left(P^{-1}X^2\ln^2X\right).$$

Далее пользуясь леммой 3, оценивая суммы $W(0)$ и $W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)$, а также учитывая, что $P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}}$ и $X=T^{0,01\varepsilon_1}$, последовательно имеем

$$W(0)\ll\frac{1}{\sqrt{\ln X}}, \qquad W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\ll\frac{X^{2(\mathscr{L})^{-1}}}{\sqrt{\ln X}}=\frac{1}{\sqrt{\ln X}}\exp\left(\frac{2\ln T^{0,01\varepsilon_1}}{\ln\sqrt{5T/(2\pi)}}\right)\ll\frac{1}{\sqrt{\ln X}},$$

$$\Sigma_0(T)\ll W(0)\mathscr{L}+W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\mathscr{L}+\frac{X^2\ln^2X}{P}\ll\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+\frac{X^2\ln^2X}{P}\ll\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}. \tag{22}$$

Оценим $W_0(T)$. Согласно следствие 2 леммы 4 при $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_0(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)=O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\Sigma_0(T)$ в (21), затем и воспользовавшись соотношением

$$\ln X=0,01\varepsilon_1\ln T=0,01\varepsilon_1\ln\frac{2\pi P^2}{5}=0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L}+\ln2\pi-\ln5)>0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

имеем

$$J(T,H)\ll H\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}}+T^{-\varepsilon_1}\right)+HT^{-0,02}\ll\frac{H\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Постоянная под знаком $\ll$ в этой оценке является абсолютной. Обозначая эту постоянную символом c_4 и не ограничивая общности считая, что $c_4>1$ имеем

$$J(T,H)\leqslant\frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\sqrt{\mathscr{L}}. \tag{23}$$

4. Оценка сверху интеграла $I_1(T,T+H)$. Применяя неравенство Гёльдера будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}}\le H^{\frac{2}{a}-1}\int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2dt.$$

Пусть $0 < \varepsilon_2 < 0,01$, точное значение которого определим позднее. Применяя к подинтегральной функции $F(t)$ лемму 4, находим

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + O\left(T^{-0,01}\right), \qquad T - \frac{\pi}{4} = 4\pi r, \quad r \text{ — целое число},$$
$$F_1(t) = 2\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}, \qquad F_2(t) = 2\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda},$$

Следовательно будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H) + I_{12}(T,T+H) + H\eta^{2k}T^{-0,02}), \tag{24}$$
$$I_{11}(T,T+H) = \int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F_1(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt,$$
$$I_{12}(T,T+H) = \int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F_2(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt.$$

Сначала оценим $I_{11}(T,T+H)$. Проинтегрировав $F_1(t+u_1+\ldots+u_k)$ по $u_1,u_2,\ldots,u_k$, найдем

$$I_{11}(T,T+H) \ll \int_0^H \left|\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)} B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2 dt.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$I_{11}(T,T+H) \ll H \sum_{\lambda_1,\lambda_2\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{11}(T,T+H) \ll H\left(|\Sigma_1(T)| + |W_1(T)|\right), \qquad \Sigma_1(T) = \sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda}\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2, \tag{25}$$
$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Воспользовавшись соотношением $\ln\frac{P}{\lambda} \geqslant \varepsilon_2\mathscr{L}$ сведем оценку $\Sigma_1(T)$ к оценке $\Sigma_0(T)$, которого уже рассматривали при оценке $J(N,H)$ и получили оценку вида (22):

$$\Sigma_1(T) = \sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)\left(2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}}{\lambda\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}} \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda} <$$
$$< \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda} = \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\Sigma_0 \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}.$$

Оценим $W_1(T)$. Согласно следствия 2 леммы 4 при $k = [c\ln\mathscr{L}]$ и $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_1(T)$ и $W_1(T)$ в (25), затем воспользовавшись последовательно соотношением $\varepsilon_2 = \varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$ ($\varepsilon_3 > 0$, более точно оно будет определено позднее), неравенствами

$$T = \frac{2\pi P^2}{5} > P^2, \quad \ln X = 0,01\varepsilon_1 \ln\frac{2\pi P^2}{5} = 0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L} + \ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

и значениями параметров $k = [c\ln\mathscr{L}]$ и $\eta = c_1\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$\begin{aligned} I_{11}(T,T+H) &\ll H\left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + \frac{k}{\varepsilon_2}T^{-\varepsilon_1} + k\eta\mathscr{L}T^{-\varepsilon_1}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \leqslant \\ &= H\eta^{2k}\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + \frac{c(\varepsilon_3^{-1}+c_1)\sqrt{\mathscr{L}}\ln\mathscr{L}}{P^{2\varepsilon_1}}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} \leqslant \frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} H\eta^{2k}. \end{aligned} \tag{26}$$

Теперь оценим интеграл $I_{12}(T,T+H)$. Функция $F_2(t+u_1+\ldots+u_k)$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$ по каждому из аргументов $u_1,\ldots,u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значении интеграла, найдутся точки $u_1^*,\ldots,u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta |F_2(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k = \eta^k\,|F_2(t+u_1^*+\ldots+u_k^*)|\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{12}(T,T+H) &= \eta^{2k}\int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*}|F_2(t)|^2\,dt \leqslant \int_T^{T+H+1}|F_2(t)|^2\,dt = \\ &= \eta^{2k}\int_0^{H+1}\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)} + \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(T+t)}\right|^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством $|a+b|^2 \leqslant 2|a|^2 + 2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$I_{12}(T,T+H) \ll \eta^{2k}\int_0^{H+1}\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}\right|^2 dt.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1,\lambda_2\leqslant P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(|\Sigma_2(T)| + |W_2(T)|\right), \qquad \Sigma_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leq P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda}, \tag{27}$$

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_2(T)$. Полагая $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathscr{L}}$, имеем

$$\Sigma_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} \exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right) \leqslant e\left(\sum_{\lambda\leqslant P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} - \sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\right).$$

Применяя к последней сумме лемму 2, а затем, имея в виду, что $1-e^{-\varepsilon_2} \ll \varepsilon_2$ и пользуясь леммой 3 для оценки суммы $W(0)$, последовательно получим

$$\Sigma_2(T) \leqslant \frac{2e^2(1+æ^2)(1-e^{-\varepsilon_2})\mathscr{L}}{5} W(0) + O\left(P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X\right) \ll$$
$$\ll \varepsilon_2 W(0)\mathscr{L} + P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X \ll \varepsilon_2\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2 X \ll \frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Оценим $W_2(T)$. Согласно следствию 2 леммы 4 при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_2(T) = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) = O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_2(T)$ и $W_2(T)$ в (27), а затем воспользовавшись соотношением $\varepsilon_2 = \varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$, получим

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}} + T^{-\varepsilon_1}\right) \ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1\mathscr{L}}} + T^{-\varepsilon_1}\right) \leqslant \frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k}.$$

Далее подставляя эту оценку и оценку (26) в формулу (24), найдём

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}}\eta^{2k}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} + \frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}} + T^{-0,02}\right).$$

При $c_1 = 2e\varepsilon_3^{-1}$ и $k = [c\ln\mathscr{L}]$, воспользовавшись последовательно соотношением $c \geqslant \frac{1}{4} + \frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}}$ (параметр c более точно будет определен позднее), найдем

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_3 c_1}\right)^{2k} = e^{-2[c\ln\mathscr{L}]-2} \leqslant e^{-2c\ln\mathscr{L}} = \mathscr{L}^{-2c} \leqslant \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{\ln\varepsilon_3^{-1}}{\ln\mathscr{L}}} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}$$

Следовательно,

$$I_1(T,T+H) \leqslant \left(\frac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}} H\eta^{ka}, \tag{28}$$

где постоянная c_5 является абсолютной.

5. Оценка снизу $N_0(T+H)-N_0(T)$. Подставляя в (16) из формул (20)), (28) и (23) соответственно оценку снизу для интеграла $I_2(T,T+H)$ и оценки сверху интегралов $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$, найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geqslant \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}H\eta^{ka} - \left(\frac{30\varepsilon_3 c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}} H\eta^{ka}}{\left(\eta^{2k}\frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\sqrt{\mathscr{L}}\right)^{\frac{a}{2}}} = \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}} - (30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}}}{c_4^{\frac{a}{2}}} H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}.$$

В этой формуле, выбирая в качестве ε_3 наибольшее положительное число с условием

$$(30\varepsilon_3 c_5)^{\frac{a}{2}} \leqslant 0,5\cdot 5^{-(2-a)} c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}} \qquad \text{то есть} \qquad \varepsilon_3 = \frac{5^{-\frac{2(2-a)}{a}} c_g^{-\frac{4}{a}} 2^{-\frac{2}{a}}}{30c_5}\sqrt{\varepsilon_1}.$$

получим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geqslant c_6 H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}, \qquad c_6 = \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}}}{2c_4^{\frac{a}{2}}}.$$

Так как $k\eta = c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, то для количества нулей функции $F(t)$ на промежутке $(T, T+H)$ справедлива

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant \frac{\mu(E)}{k\eta} \geqslant \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}\, H\mathscr{L}^{-\frac{a}{4-2a}}}{c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}}{c_1 c} H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{a}{4-2a}}\ln\mathscr{L}.$$

В последней формуле, полагая $a=\varepsilon$, параметр c выберем так, чтобы выполнялось условие

$$c \geqslant \frac{1}{4} + \frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}} = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5} + \varepsilon\ln(81\cdot 10^{-10}) + \ln(10^8c_g^4)}{2\varepsilon^2\ln\mathscr{L}}.$$

Не ограничивая общности будем считать, что при $T \geqslant T_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5} + \varepsilon\ln(81\cdot 10^{-10}) + \ln(10^8c_g^4)}{\varepsilon^2} < \frac{1}{6}\ln\mathscr{L}.$$

Поэтому выбирая $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, имеем

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant 3c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}} c_1^{-1} H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}\ln\mathscr{L}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}} > \frac{7}{10}(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}, \qquad\qquad \ln\mathscr{L} > \frac{20}{21}\ln\ln T,$$

имеем

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T, \qquad c_7 = 2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}.$$

В заключение для наглядности коэффициент c_7 представим в виде

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181 -– 185 and 307 -– 312.

2. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана — М.: Изд. Иност. лит. (И*Л), 1953. 409 с.

3. Воронин С. М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1984. Т. 163. С. 74 – 77.

4. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1. С. 63 – 91.

5. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2. С. 303 – 315.

6. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана – М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.

7. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.

8. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207, С. 180 – 196.

9. Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Труды МИАН. 2017. Т. 296. С. 72 - 94.

10. Гриценко С. А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4, С. 168 – 187.

11. Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49, вып. 1. С. 161 – 162.

12. Рахмонов З. Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы // Вестник Хорогского университета. 2002. Серия 1. № 5. С. 1 – 25.

13. Рахмонов З. Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

14. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

15. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.

16. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2019. Т. 62. № 3-4. С. 133 – 138.

17. Huxley M. N. Sums and Lattice Points III // Proceedings of the London Mathematical Society. 2003. V. 87. Is. 3. P. 591 – 609.

REFERENCES

1. Davenport, H., & Heilbronn, H. 1936, “On the zeros of certain Dirichlet series“, *J. Lond. Math.* vol. 11, pp. 181 -– 185 and 307 -– 312.

2. Titchmarsh, E. C., 1953, “The theory of the Zeta function of Riemann“, *Oxford.*

3. Voronin, S. M. 1984, “Distribution of zeros of certain Dirichlet series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 163, pp. 89–92.

4. Voronin, S. M. 1981, “On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line”, *Math. USSR-Izv.*, vol, 16, Is. 1, pp. 55–82.

5. Karatsuba, A. A., 1990, “On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, Is. 2, pp. 311–324.

6. Voronin, S. M., & Karatsuba, A. A., 1994, *The Riemann zeta function*, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 376 pp. ISBN: 5-02-014120-8

7. Karatsuba, A. A., 1994, “On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, vol. 43, Is. 2, pp. 193–203, doi.org/10.1070/IM1994v043n02ABEH001561.

8. Karatsuba, A. A., 1995, “A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 163–177,

9. Gritsenko, S. A., 2017, “On the zeros of the Davenport–Heilbronn function”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296, pp. 65–87, doi.org/10.1134/S0081543817010060.

10. Gritsenko, S. A., 2017, “On fractional moments of the mollified Dirichlet L-functions”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, Is. 4, pp. 168–187, doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-167-186

11. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, Is. 2, pp. 168–169, doi.org/10.1070/RM1994v049n02ABEH002225.

12. Rakhmonov, Z. Kh., 2002, “Density zeros of the Riemann zeta function in short rectangles of a critical strip”, *Vestnik Khorogskogo universiteta*, Seriya 1, Is. 5, pp. 1 – 25.

13. Rakhmonov, Z. Kh., 2006, “Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.

14. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2006, “Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

15. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, “The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

16. Rakhmonov, Z. Kh. & Aminov, A. S., 2019, “On the zeros of an odd order of the Davenport – Heilbron function in short intervals of the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133-138.

17. Huxley, M. N., 2003, “Sums and Lattice Points III”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 87, Is. 3, pp. 591-609, doi.org/10.1112/S0024611503014485.

Получено 15.11.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-295-303

О показателе иррациональности $\ln\frac{5}{3}$[1]

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина, Е. Б. Томашевская (г. Брянск)

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru
Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
eszolotukhina@mail.ru
Томашевская Елена Брониславовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
tomele@mail.ru

Abstract

В данной работе уточнена оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{5}{3}$.

К настоящему времени установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функций, в частности, логарифмов рациональных чисел.

Диофантовы приближения логарифмов рациональных чисел рассматривались в работах К. Ваананена, А. Хеймонена и Т. Матала-Ахо [1], Д. Рина [2], Е. А. Рухадзе [3], М. Хата [4]-[6] и др. В трудах этих авторов использовались интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от рассматриваемых чисел, имеющие "хорошие"оценки знаменателей коэффициентов. Асимптотика интегралов и коэффициентов линейных форм вычислялась с помощью теоремы Лапласа, метода перевала. Обзор некоторых конструкций из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел был представлен в статье В. В. Зудилина [7]. Отметим, что в 2009 г. Р. Марковеккио в [8] с помощью двукратного комплексного интеграла получил лучшую на данный момент оценку меры иррациональности числа $\ln 2$.

В последнее время широко применяются симметрии функций, участвующих в интегральных конструкциях.

Использование симметризованных интегралов позволило Е. С. Золотухиной в [9] и Е. Б. Томашевской в [10] получить новые оценки показателей иррациональности некоторых логарифмов рациональных чисел. Впервые подобный интеграл был рассмотрен В. Х. Салиховым при получении оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ в [11], а затем числа π в [12].

В 2014 г. в [13] К. Ву и Л. Ванг получили оценку меры иррациональности числа $\ln 3$, улучшающую результат В. Х. Салихова. В их работе впервые были применены общие симметризованные многочлены первой степени вида $At - B$, где $t = (x-d)^2$.

В 2017 г. В. Х. Салихов, М. Ю. Лучин и И. В. Бондарева в [14] улучшили результат К. Ву (см. [15]) о мере иррациональности $\ln 7$. Здесь впервые были рассмотрены квадратичные симметризованные многочлены.

В настоящей работе также используются квадратичные симметризованные многочлены, но будет рассмотрен комплексный интеграл.

Ключевые слова: показатель иррациональности, симметризованные интегралы, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

Для цитирования:
В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина, Е. Б. Томашевская. О показателе иррациональности $\ln\frac{5}{3}$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 295–303.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-295-303

On irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$

V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, E. B. Tomashevskay (Bryansk)

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: svdh@rambler.ru
Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: eszolotukhina@mail.ru
Tomashevskaya Elena Bronislavovna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: tomele@mail.ru

Abstract

In this paper the estimation of irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$ is refined.

To date, a lot of estimates of irrationality measures for the values of analytic functions have been established, in particular, logarithms of rational numbers.

Diophantine approximations of logarithms of rational numbers were considered in the papers of K. Vaananen, A. Heimonen, T. Matala-aho [1], G. Rhin [2], E. A. Rukhadze [3], M. Hata [4]-[6] and other. These authors used integral constructions that give small linear forms from the numbers and have good estimates of the denominators of the coefficients. Asymptotics of integrals and the coefficients of the linear forms computed by using theorem of Laplace and the method of the pass. An overview of some constructions from the theory of Diophantine approximations of logarithms of rational numbers was presented in the article by V. V. Zudilin. Note that in 2009 R. Marcovecchio with the help of the double complex integral has received the best estimate of the irrationality measure of $\ln 2$.

Recently, the symmetries of functions involved in integral constructions are often used. The use of symmetrized integrals allowed E. Zolotukhina in [9] and E. Tomashevskay in [10] to obtain new estimates of irrationality measures of some logarithms of rational numbers. For the first time such an integral was considered by V. H. Salikhov in obtaining an estimate of the irrationality measure of $\ln 3$ in [11] and π in [12].

In 2014, Q. Wu and L. Wang in [13] received an estimate of the irrationality measure of $\ln 3$, which improved V. H. Salikhov's result. For the first time in their work, general symmetrized polynomials of the first degree of the form $At-B$, $t=(x-d)^2$, were applied.

In 2017, V. H. Salikhov, I. Bondareva and M. Luchin in [14] improved Q. Wu's result on the irrationality measure of $\ln 7$ (see [15]). Here was first considered the quadratic symmetrized polinomials.

In this paper, quadratic symmetrized polynomials are also used, but a complex integral will be considered.

Keywords: Irrationality measure, symmetrized integrals, symmetrized polinomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, E. B. Tomashevskay, 2019, "On irrationality measure of $\ln \frac{5}{3}$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 295–303.

1. Введение

Напомним, что показатель иррациональности или мера иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ определяется как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

В 1993 г. К. Ваананен, А. Хеймонен и Т. Матала-Ахо в [1], используя аппроксимации Паде для гипергеометрической функции Гаусса, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В частности, была приведена оценка $\mu\left(\ln \frac{5}{3}\right) \leq 9.7571\ldots$.

Позднее Е. С. Золотухина в [9] получила результат $\mu\left(\ln \frac{5}{3}\right) \leq 5.6514\ldots$, который затем был улучшен Е. Б. Томашевской и составил $\mu\left(\ln \frac{5}{3}\right) \leq 5.5120\ldots$.

В настоящей работе эта оценка будет уточнена. Улучшение связано с использованием модифицированного комплексного интеграла Е. Б. Томашевской.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\mu\left(\ln \frac{5}{3}\right) \leq 5.5119417\ldots.$$

2. Основные конструкции

Пусть везде далее $d = 31$, $t = (x-31)^2$, $A,\ B,\ C \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(t) &= At^2 - Bt + C = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0, \\ \text{где } A_4 = A, A_3 &= -4dA, A_2 = 6d^2A - B, A_1 = -2d\left(2d^2A - B\right), A_0 = Ad^4 - Bd^2 + C. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим для несократимой дроби a/b, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\nu_p = \nu_p(a/b) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что $a/b = p^{\nu_p} a_1/b_1$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{15}i\right]$. Также для $a \in K$ определим

$$\nu^*(a) = \max\left\{\nu | a = \left(\sqrt{15}i\right)^{\nu} a_1,\ a_1 \in K\right\}.$$

Пусть для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$

$$D_0(f(x)) = f(0),\ D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!},\ N \in \mathbb{N}.$$

Определим для многочлена P из (1)

$$\begin{aligned} \nu_{31}(P) &= \min\left(4, \nu_{31}\left(A_0\right), \nu_{31}\left(A_1\right) + 1, \nu_{31}\left(A_2\right) + 2\right), \\ \nu_2(P) &= \min\left(6, \nu_2\left(A_0\right), \nu_2\left(A_1\right) + 2, \nu_2\left(A_2\right) + 4\right), \\ \nu^*(P) &= \min\left(2, \nu^*\left(A_0\right), \nu^*\left(A_1\right) + 1\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \le 4m$. Тогда выполняются следующие оценки*

$$\begin{array}{rcl} \nu_{31}\left(D_N\left(P^m\right)\right) & \ge & m\nu_{31}(P) - N, \\ \nu_2\left(D_N\left(P^m\right)\right) & \ge & m\nu_2(P) - 2N, \\ \nu^*\left(D_N\left(P^m\right)\right) & \ge & m\nu^*(P) - N. \end{array}$$

Доказательство. Пусть далее $\overline{m} = (m_0, m_1, ..., m_4) \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^5$, $|\overline{m}| = m_0 + m_1 + ... + m_4$,

$$\gamma\left(\overline{m}\right) = \frac{|\overline{m}|!}{m_0! m_1! \cdots m_4!}.$$

Тогда из (1) имеем

$$P^m = \sum_{|\overline{m}|=m} \gamma\left(\overline{m}\right) \prod_{i=0}^{4} \left(A_i x^i\right)^{m_i},$$

$$D_N\left(P^m\right) = \sum_{\substack{|\overline{m}|=m, \\ \sum_{i=1}^4 i m_i = N}} \gamma\left(\overline{m}\right) \prod_{i=0}^{4} A_i^{m_i}.$$

Рассмотрим ряд случаев:

1) $\nu_{31}\left(D_N\left(P^m\right)\right) \ge \sum_{i=1}^4 m_i \nu_{31}\left(A_i\right) \ge m\nu_{31}(P) - \sum_{i=1}^4 i m_i = m\nu_{31}(P) - N$, так как $\nu_{31}\left(A_i\right) + i \ge \nu_{31}(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$; для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения $\nu_{31}(P)$ в (2), при $i = 3$ $\nu_{31}\left(A_3\right) + 3 \ge 4 \ge \nu_{31}(P)$, при $i = 4$ $\nu_{31}\left(A_4\right) + 4 \ge 4 \ge \nu_{31}(P)$;

2) $\nu_2\left(D_N\left(P^m\right)\right) \ge \sum_{i=1}^4 m_i \nu_2\left(A_i\right) \ge m\nu_2(P) - 2\sum_{i=1}^4 i m_i = m\nu_2(P) - 2N$, так как $\nu_2\left(A_i\right) + 2i \ge \nu_2(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$; для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения $\nu_2(P)$ в (2), при $i = 3$ $\nu_2\left(A_3\right) + 6 \ge 6 \ge \nu_2(P)$, при $i = 4$ $\nu_2\left(A_4\right) + 8 > \nu_2(P)$;

3) $\nu^*\left(D_N\left(P^m\right)\right) \ge \sum_{i=1}^4 m_i \nu^*\left(A_i\right) \ge m\nu^*(P) - \sum_{i=1}^4 i m_i = m\nu^*(P) - N$, так как $\nu^*\left(A_i\right) + i \ge \nu^*(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$; для $i \in \{0; 1\}$ это следует из определения $\nu^*(P)$ в (2), при $i \in \{2; 3; 4\}$ $\nu^*\left(A_i\right) + i \ge 2 \ge \nu^*(P)$, так как $A_i \in \mathbb{Z}$, $\nu^*\left(A_i\right) \ge 0$.

Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим многочлены

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & x^4 - 124x^3 + 5764x^2 - 119040x + 922560 = t^2 - 2t + 961, \\ P_2 & = & 3x^4 - 372x^3 + 17294x^2 - 357244x + 2767680 = 3t^2 - 4t + 961. \end{array}$$

Положим $\Pi_k = 31^{\nu_{31}(P_k)} 2^{\nu_2(P_k)} \left(\sqrt{15}i\right)^{\nu^*(P_k)}$. Тогда из (2) для P_1 и P_2 имеем

$$\Pi_1 = 31^2 2^6 \left(\sqrt{15}i\right)^2, \tag{3}$$

$$\Pi_2 = 31^2 2^4 \left(\sqrt{15}i\right)^1. \tag{4}$$

Пусть $\alpha_1 = 0.9998784$, $\alpha_2 = 0.4998784$, $\alpha_3 = 0.0001824$, $\alpha_4 = 0.0000304$.

Рассмотрим рациональную функцию

$$R(x) = \frac{(x-31)^{\alpha_1 n} \left(P_1(x)\right)^{\alpha_2 n} \left(P_2(x)\right)^{\alpha_3 n} 15^{\alpha_4 n}}{x^{n+1}(62-x)^{n+1}}, \tag{5}$$

где $n \in \mathbb{N}$, n кратно 10^7.

Определим интеграл

$$\omega = 124 \int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} R(x)dx, \tag{6}$$

Подынтегральная функция (5) обладает свойством симметрии $R(x) = R(62-x)$, ввиду которого справедливо следующее разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей

$$R(x) = Q_{\alpha n-2}(x) + \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(62-x)^j}\right), \tag{7}$$

где $\alpha = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2 = 1.0001216$, $Q_{\alpha n-2}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha n-2} b_k x^k$, $b_k \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Q}$ $(j = \overline{1, n+1})$.

3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим коэффициенты a_j разложения (7).

Лемма 2. *Для всех $j = 1, ..., n+1$ имеет место представление*

$$62a_j = 31^{j-1}2^{2j-2}\left(\sqrt{15}i\right)^{j-1} A_j,\ \ A_j \in K. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $m_i \in \mathbb{Z}^+$, $|\overline{m}| = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Тогда из (5) и (7) получим

$$\begin{aligned} a_j &= D_{n+1-j}\left(R_n(x)x^{n+1}\right) = \sum_{|\overline{m}|=n+1-j} D_{m_1}\left((x-31)^{\alpha_1 n}\right) D_{m_2}\left(P_1(x)^{\alpha_2 n}\right) \\ &\times D_{m_3}\left(P_2(x)^{\alpha_3 n}\right) D_{m_4}\left((62-x)^{-n-1}\right) 15^{\alpha_4 n}. \end{aligned}$$

Имеем

$$D_{m_1}\left((x-31)^{\alpha_1 n}\right) = \frac{\alpha_1 n \cdots (\alpha_1 n - m_1 + 1)}{m_1!} 31^{\alpha_1 n - m_1};$$
$$D_{m_4}\left((62-x)^{-n-1}\right) = \frac{(n+1)\cdots(n+m_4)}{m_4!} 31^{-n-1-m_4} 2^{-n-1-m_4}.$$

Оценим снизу показатели $\nu(a_j)$. Применим лемму 1 и равенства (3) и (4). Имеем

$$\begin{aligned} \nu_{31}(a_j) &\geq \alpha_1 n - m_1 + 2\alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 - n - 1 - m_4 = \\ &= n - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 1 = n - (n+1-j) - 1 = j - 2, \\ \nu_2(a_j) &\geq 6\alpha_2 n - 2m_2 + 4\alpha_3 n - 2m_3 - n - 1 - m_4 = \\ &= 2n - (2m_2 + 2m_3 + m_4) - 1 \geq 2n - 2(n+1-j) - 1 = 2j - 3, \\ \nu^*(a_j) &\geq 2\alpha_2 n - m_2 + \alpha_3 n - m_3 + 2\alpha_4 n = n - (m_2 + m_3) \\ &\geq n - (n+1-j) = j - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется (8). Лемма доказана.

Обозначим $d_n = \text{НОК}(1, 2, ..., n)$.

Лемма 3. *Справедливо представление вида*

$$\Omega \equiv d_{\alpha n}\omega = B\left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3} + i\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right) + B_0,$$

где $B = 124 d_{\alpha n} a_1$, $B_0 \in K$.

Доказательство. Вычислим инетеграл (6) и применим лемму 2:

$$
\begin{aligned}
d_{\alpha n}\omega &= d_{\alpha n}124\left(a_1 \ln \frac{x}{62-x}\Bigg|_{31}^{35+i\sqrt{15}} + \sum_{j=2}^{n+1}\frac{a_j}{j-1}\left(\frac{1}{(27-i\sqrt{15})^{j-1}} - \frac{1}{(35+i\sqrt{15})^{j-1}}\right)\right.\\
&+ \left.\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} Q_{\alpha n-2}dx\right) = d_{\alpha n}124\left(a_1 \ln\frac{35+i\sqrt{15}}{27-i\sqrt{15}} + \right.\\
&+ \sum_{j=2}^{n+1}\frac{a_j}{j-1}\left(\frac{1}{\left(\left(4+i\sqrt{15}\right)\left(3-i\sqrt{15}\right)\right)^{j-1}} - \frac{1}{\left(\left(4+i\sqrt{15}\right)\left(5-i\sqrt{15}\right)\right)^{j-1}}\right)\\
&+ \left.\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} Q_{\alpha n-2}dx\right) = d_{\alpha n}2\left(A_1 \ln\frac{5-i\sqrt{15}}{3-i\sqrt{15}} + \right.\\
&+ \sum_{j=2}^{n+1}\frac{A_j}{j-1}\left(\frac{31}{4+i\sqrt{15}}\right)^{j-1}\left(\left(\frac{4\sqrt{15}i}{\left(3-i\sqrt{15}\right)}\right)^{j-1} - \left(\frac{4\sqrt{15}i}{\left(5-i\sqrt{15}\right)}\right)^{j-1}\right)\\
&= d_{\alpha n}2\left(A_1\left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3} + i\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\right.\\
&+ \sum_{j=2}^{n+1}\frac{A_j\left(4-i\sqrt{15}\right)^{j-1}}{j-1}\left(\left(\frac{-5+i\sqrt{15}}{2}\right)^{j-1} - \left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}\right)^{j-1}\right)\\
&+ \left. 62\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} Q_{\alpha n-2}dx\right).
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $d_{\alpha n}\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} Q_{\alpha n-2}dx \in K$.

Также легко по индукции показать, что $2\left(\frac{-5+i\sqrt{15}}{2}\right)^k \in K$, $2\left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}\right)^k \in K$, где $k \in \mathbb{N}$.

И лемма доказана.

Ключевое значение в дальнейших рассуждениях играет лемма доказанная в статье М. Хата [[6], замечание 2.1].

Лемма 4. *Пусть γ – вещественное иррациональное число, $\varepsilon_n = q_n\gamma - p_n$, где $p_n,\ q_n \in \mathbb{Z}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \sigma,\ \lim\sup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|\varepsilon_n| \le -\tau, \tau > 0.$$

Тогда справедлива оценка $\mu(\gamma) \le 1 + \frac{\sigma}{\tau}$.

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 сводится к применению леммы 4 для линейной формы

$$\varepsilon_n = \mathrm{Re}\Omega = q_n \ln\frac{5}{3} - p_n,$$

где $q_n = 62 d_{\alpha n} a_1 \in \mathbb{Z}$, $p_n = -\mathrm{Re}B_0 \in \mathbb{Z}$ (см. леммы 2 и 3).

Асимптотику линейной формы ε_n, асимптотику $|q_n|$ вычислим с помощью метода перевала. Учитывая стандартность данной процедуры (см., например, работы [6], [11], [15]), ограничимся лишь некоторыми комментариями.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}(x)=\frac{(x-31)^{\alpha_1}\,(P_1(x))^{\alpha_2}\,(P_2(x))^{\alpha_3}\,15^{\alpha_4}}{x(62-x)}.$$

С помощью замены $t=(x-31)^2$ функция $\widetilde{f}(x)$ может быть приведена к виду

$$f(t)=\frac{t^{\frac{\alpha_1}{2}}\left(t^2-2t+961\right)^{\alpha_2}\left(3t^2-4t+961\right)^{\alpha_3}15^{\alpha_4}}{961-t}.$$

Найдем корни уравнения $\frac{d}{dt}\ln f(t)=0$:

$$t_{1,2}=0.5517696\ldots\pm i17.7275714\ldots,\ t_{3,4}=0.5595199\ldots\pm i18.0536875\ldots,\ t_5=2881.8773105.$$

Имеем

$$\begin{aligned}-\tau &= 1.0001216+ln|f(t_{3,4})|=-1.1944653\ldots;\\ \sigma &= 1.0001216+ln|f(t_5)|=5.3893579\ldots,\end{aligned}$$

и мы использовали очевидное неравенство $|\varepsilon_n|\le|\Omega|$.

Из леммы 4 следует

$$\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right)\le 1+\frac{\sigma}{\tau}=5.5119417\ldots,$$

и теорема 1 доказана.

5. Заключение

Улучшение оценки меры иррациональности числа $\ln\frac{5}{3}$ по сравнению с результатом Е. Б. Томашевской стало возможным за счет введения нового квадратичного симметризованного многочлена. Дальнейшее усовершенствование конструкции интеграла может привести к лучшему результату.

Замечание. Применяя лемму 4 для линейной формы $\overline{\varepsilon_n}=\frac{i}{\sqrt{15}}\mathrm{Im}\Omega=\overline{q_n}\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}-\overline{p_n}$, где $\overline{q_n}\in\mathbb{Z}$, $\overline{p_n}\in\mathbb{Z}$, получим оценку

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\le 5.5119417\ldots.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

2. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.

3. Рухадзе Е. А. Оценка снизу приближения ln 2 рациональными числами // Вестник Московского университета. Сер.1, Математика, механика. 1987. № 6. С. 25-29.

4. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.

5. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407. № 1. P. 99-125.

6. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.

7. Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // Чебышевский сборник. 2004. Том 5. № 2. С. 49-65.

8. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Aritm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

9. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Том 83. № 3. С. 428-438.

10. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Том 16. № 6. С. 157-166.

11. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417. № 6. С. 753-755.

12. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63. № 3. С. 163-164.

13. Wu Q, L. Wang. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.

14. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 7$ // Математические заметки (в печати).

15. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Comput. 2002. Vol. 72. № 242. P. 901-911.

REFERENCES

1. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", Manuscripta Math., vol. 81, pp. 183-202.

2. Rhin, G. 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.

3. Rukhadze E. 1987, "A lower bound for the approximation of $\ln 2$ by rational numbers", Вестник Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., № 6. C. 25-29. (Russian)

4. Hata, M. 1992, "Irrationality measures of the values of hypergeometric functions", Acta Arith., vol. LX, pp 335-347.

5. Hata, M. 1990, "Legendre type polynomials and irrationality measures", J. Reine Angew. Math., vol. 407, № 1, pp. 99-125.

6. Hata M. 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", Acta Arith., vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.

7. Zudilin W. 2004, "An essay on irrationality measures of π and other logarithms", Chebyshevskii Sbornik, vol. 5, № 2. pp. 49-65. (Russian)

8. Marcovecchio, R. 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$", Acta Aritm., vol. 139.2, pp. 147-184.

9. Salnikova E. 2008, ”Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms”, Mathematical Notes, vol. 83, № 3, pp. 428-438. (Russian)

10. Tomashevskaya E. 2010, ”On Diophantine approximations to $\log x$”, Journal of Mathematical Sciences, vol. 16, № 6, pp. 157-166. (Russian)

11. Salikhov, V. H. 2007, ”On the irrationality measures of $\ln 3$”, Doklady Mathematics, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)

12. Salikhov, V. H. 2008, ”On the irrationality measures of π”, Russian Mathematical Surveys, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)

13. Wu Q, L. Wang. 2014, ”On the irrationality measure of $\log 3$”, Journal of Number Theory, vol. 142, pp. 264-273.

14. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H. ”On the irrationality measure of $\ln 7$”, Mathematical Notes (in print) (Russian)

15. Wu Q. 2002, ”On the linear independence measure of logarithms of rational numbers”, Math. Comput., vol. 72, № 242, pp. 901-911.

Получено 25.06.2018 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-304-321

Приближение $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ числами из поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ [1]

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина (г. Брянск)

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru

Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Брянский государственный технический университет.
eszolotukhina@mail.ru

Abstract

В данной работе продолжено исследование интегральной конструкции, впервые рассмотренной В. Х. Салиховым и В. А. Андросенко в 2015 г. в работе [1]. Эта конструкция является модификацией интеграла, введенного Р. Марковеккио в 2009 г. в [2] для нахождения новой оценки меры иррациональности числа $\ln 2$.

С помощью нее В. А. Андросенко в [1] была усилена оценка меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Отметим, что прежние результаты принадлежали Л. В. Данилову [3], К. Алади и М. Л. Робинсон [4], Г. В. Чудновскому [5], А. К. Дубицкасу [6], М. Хата [7], [8], Дж. Рину [9].

Другое направление исследования этой интегральной конструкции – получение оценок приближения некоторых констант числами из квадратичных полей. В 2016 г. М. Ю. Лучин и В. Х. Салихов в [10] улучшили оценку приближения числа $\ln 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Прежние оценки были найдены в работах Ф. Аморозо и К. Виолы [11] и Е. С. Золотухиной [12].

Цель работы – получить новую оценку приближения логарифма "золотого сечения" числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Предыдущая оценка принадлежит В. Х. Салихову и Е. С. Золотухиной [13].

Ключевые слова: показатель иррациональности, квадратичные иррациональности, симметризованные интегралы.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина. Приближение $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ числами из поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 304–321.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-304-321

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

Approximation of $\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ by numbers of the field $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ [2]

V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina (Bryansk)

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: svdh@rambler.ru
Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university.
e-mail: eszolotukhina@mail.ru

Abstract

The article continues the study of the integral construction, which was first considered by V. H. Salikhov and V. A. Androsenko in 2015 [1]. This construction is a modification of the integral that was introduced by R.Marcovecchio in 2009 to find the irrationality measure of $\ln 2$.

With the help it V. A. Androsenko improved the estimate of irrationality measure of $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ in [1]. The previous results belonged to the L.V.Danilov [3], K. Aladi and M Robinson [4], G. V. Chudnovsky [5], A. K. Dubickas[6], M. Hata [7], [8], G. Rhin [9].

Another direction of the study of this integral construction is to obtain estimates of the approximation of some constants by numbers from quadratic fields. In 2016 M.Y.Luchin and V. H. Salikhov improved the estimate of the approximation of $\ln 2$ by the numbers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Previous estimates were found by F. Amoroso F. and C. Viola [11] and E. S. Zolotukhina [12].

The aim of this article is to obtain a new estimate of the approximation of logarithm of "Golden section"by the number of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Previous estimates were found by V. H. Salikhov and E. S. Zolotukhina [13].

Keywords: Irrationality measure, quadratic irrationalities, symmetrized integrals.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, 2019, "Approximation of $\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ by numbers of the field $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 304–321.

1. Введение

В работе будет получена следующая оценка.

Теорема 1. *Пусть $\mu > 9.627339\ldots$, числа p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbb{Z}$, $(p_3, p_4) \neq (0,0)$, $P = \max_{1\le i\le 4}|p_i|$, $P > P_0(\mu)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{p_1\sqrt{5}+p_2}{p_3\sqrt{5}+p_4}\right| > P^{-\mu}.$$

Предыдущий результат $\mu > 10.0204\ldots$ был найден В. Х. Салиховым и Е. С. Золотухиной в [13].

При $p_1 = 0$, $p_3 = 0$ теорема 1 дает оценку для показателя иррациональности логарифма "золотого сечения":

$$\mu\left(\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \le 9.627339\ldots.$$

[2]The work was carried out with the financial support of the RFBR, grant № 18-01-00296 A

Наиболее близкий результат $\mu\left(\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \leq 3.71331\ldots$ найден М. Г. Башмаковой в [14]. Предыдущие аналогичные оценки принадлежат А. К. Дубицкасу [15], М. Хата [16], К. Ваананену, А. Хеймонену и Т. Матала-ахо [17], Е. С. Золотухиной [18].

Ключевое значение при доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма, доказанная в работе М. Ю. Лучина и В. Х. Салихова [10], где была получена новая оценка приближения числа $\ln 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Лемма 1. *Пусть $n,\ d\in\mathbb{N}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{N}$,*

$$L_n = \left(\Lambda_1(n)\sqrt{d}+\Lambda_2(n)\right)\theta + \Lambda_3(n)\sqrt{d}+\Lambda_4(n),$$

где все $\Lambda_i\in\mathbb{Z}$; $\Lambda(n)=\max_{1\leq i\leq 4}|\Lambda_i(n)|$. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left|\Lambda_1(n)\sqrt{d}+\Lambda_2(n)\right|\right)=\gamma_1,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|\Lambda(n)|\leq\gamma_2;$$

для некоторой константы $\gamma_3>\gamma_2$ и любых $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0$ существует такое $N=N(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, что для любого $n\geq N$ и хотя бы одного из значений $m\in\{n,n+1\}$ выполняются неравенства

$$e^{-(\gamma_3+\varepsilon_1)m}\leq|L_m|\leq e^{-(\gamma_3-\varepsilon_2)m}.$$

Пусть далее $\gamma_1+\gamma_2>0$, $\mu>2(\gamma_1+\gamma_3)/(\gamma_3-\gamma_2)$; $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\in\mathbb{Z}$, $(p_3,p_4)\neq(0,0)$, $P=\max_{1\leq i\leq 4}|p_i|$, $P>P_0(\mu)$. Тогда

$$\left|\theta-\frac{p_1\sqrt{d}+p_2}{p_3\sqrt{d}+p_4}\right|>P^{-\mu}.$$

Дальнейшие рассуждения в целом подобны доказательству результата работы [10], поэтому рассмотрим подробно лишь некоторые моменты.

2. Интегральная конструкция. Арифметическая часть

Будем работать с интегралом, впервые рассмотренным в работе [1], и отличающимся от интеграла, введенного Р. Марковеккио в работе [2] лишь множителем $\sqrt{s/(s-1)}$ в знаменателе подынтегральной функции.

Пусть $h,\ j,\ k,\ l,\ m,\ q\in\mathbb{Z}^+$, $h+j+q=k+l+m$, $h+j-k\geq 0$, $k+l-j\geq 0$, $k+m-h\geq 0$; $x\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}x>0$, $x\neq 1$. Рассмотрим интеграл

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{-\infty}ds\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{s^h t^j\,dt}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)^{k+l-j+1}(s-t)^{h+j-k+1}(t-x)^{k+m-h+1}}. \tag{1}$$

Результат теоремы 1 получается при

$$x=\frac{\sqrt{5}+2}{4}, \tag{2}$$

$$h=7n,\ j=38n,\ k=25n,\ l=32n,\ m=38n,\ q=50n,\ n\in\mathbb{N},\ n\to\infty. \tag{3}$$

Приведем краткую схему некоторых преобразований этого интеграла (см. [1, с.484, 485]). Подынтегральную функцию интеграла (1) обозначим через $G(s,t)$. Тогда

$$J=-\int\limits_0^{-\infty}\mathrm{res}_{t=x}G(s,t)ds. \tag{4}$$

$$\mathrm{res}_{t=x}G(s,t)ds\equiv R(z)dz,\ s=\frac{z^2}{z^2-1}, \tag{5}$$

где

$$R(z)=2(-1)^{j-k}\sum_{l_1=\max(0,q-l)}^{k+m-h}(-1)^{l_1}\binom{j}{k+m-h-l_1}\frac{x^{l-q+l_1}}{(x-1)^{h+j-k+l_1+1}}$$
$$\times\binom{h+j-k+l_1}{l_1}R_{l_1}(z), \tag{6}$$

$$R_{l_1}(z)=\frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_1}}{(x/(x-1)-z^2)^{h+j-k+l_1+1}}=\frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_1}}{((\sqrt{5}+2)^2-z^2)^{h+j-k+l_1+1}}. \tag{7}$$

Выбирая для $s\in[0,-\infty)$ значение $z\in[0,1)$, получаем из (4) и (5)

$$J=-\int\limits_0^1 R(z)dz. \tag{8}$$

Обозначим

$$w(l_1)=\binom{h+j-k+l_1}{l_1}\int\limits_0^1 R_{l_1}(z)dz, \tag{9}$$

K – кольцо чисел вида $a+b\sqrt{5}$, где $a,\ b\in\mathbb{Z}$; для натуральных чисел $M\in\mathbb{N}$ будем писать $q_M=\text{НОК}(1,2,\ldots,M)$, $q_0=1$.

Лемма 2. *Пусть $M_0=\max(2k+2l-2j,h+j-k,k+m-h)$, $m\geq q$. Тогда для всех $l_1\leq k+m-h$ справедливо представление*

$$2q_{M_0}w(l_1)=2^{-2(m-q)-2}\left(a(l_1)\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b(l_1)\right), \tag{10}$$

где все $a(l_1),\ b(l_1)\in K$.

Доказательство. Обозначим для $N\in\mathbb{Z}^+$

$$D_N(f(z))=\frac{1}{N!}f^{(N)}(2+\sqrt{5})$$

Для подынтегральной функции (7) интеграла в (9) ввиду ее четности имеем следующее разложение в сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned}R_{l_1}(z)&=\frac{(-1)^{q-m-1}z^{2h}(z^2-1)^{l+l_1}}{(z^2-(2+\sqrt{5})^2)^{h+j-k+l_1+1}}\\&=P(z)+\sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_1+1}\left(\frac{(-1)^{\nu}k_{\nu}}{(z-2-\sqrt{5})^{\nu}}+\frac{k_{\nu}}{(z+2+\sqrt{5})^{\nu}}\right),\end{aligned} \tag{11}$$

где $P(z) \in \mathbb{K}[z]$, $\deg P(z) = 2k + 2l - 2j - 2$, а кроме того,

$$(-1)^{\nu} k_\nu = D_{h+j-k+l_1+1-\nu}(R_{l_1}(z)(z-2-\sqrt{5})^{h+j-k+l_1+1}).$$

По формуле Лейбница имеем из (11)

$$\begin{aligned} 2k_\nu &= (-1)^{q-m+\nu-1} D_{h+j-k+l_1+1-\nu}\left(\frac{z^{2h}(z-1)^{l+l_1}(z+1)^{l+l_1}}{(z+2+\sqrt{5})^{h+j-k+l_1+1}}\right) = (-1)^{q-m+\nu-1} \\ &\times \sum_{\overline{m}\in M_\nu} D_{m_1}\left(z^{2h}\right) D_{m_2}\left((z-1)^{l+l_1}\right) D_{m_3}\left((z+1)\right)^{l+l_1} D_{m_4}\left((z+2+\sqrt{5}\right)^{-(h+j-k+l_1+1)}), \end{aligned}$$

где

$$M_\nu = \left\{ \overline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^4 \,\middle|\, \begin{matrix} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = h + j - k + l_1 + 1 - \nu, \\ m_1 \le 2h;\ m_2, m_3 \le l + l_1 \end{matrix} \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2k_\nu = 2(-1)^{q-m+\nu-1} \sum_{\overline{m}\in M_\nu} \binom{2h}{m_1}\binom{l+l_1}{m_2}\binom{l+l_1}{m_3}\binom{h+j-k+l_1+m_4}{m_4}(-1)^{m_4}(\sqrt{5}+2)^{2h-m_1} \\ \times(\sqrt{5}+1)^{l+l_1-m_2}(3+\sqrt{5})^{l+l_1-m_3}(2(\sqrt{5}+2))^{-(h+j-k+l_1+1+m_4)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – корень уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. По индукции легко показать, что $\varepsilon_1^m = A_m\varepsilon_1 + B_m,\ A_m,\ B_m \in \mathbb{Z}$. Значит, $2\varepsilon_1^m \in \mathbb{K}$ $(m \ge 2,\ m \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\begin{aligned} 2k_\nu = 2(-1)^{q-m+\nu-1} & \sum_{\overline{m}\in M_\nu} \binom{2h}{m_1}\binom{l+l_1}{m_2}\binom{l+l_1}{m_3}\binom{h+j-k+l_1+m_4}{m_4}(-1)^{m_4}(\sqrt{5}+2)^{2h-m_1} \\ & \times(2\varepsilon_1)^{l+l_1-m_2}(2(\varepsilon_1+1))^{l+l_1-m_3}(2(\sqrt{5}+2))^{-(h+j-k+l_1+1+m_4)} \\ & = \sum_{\overline{m}\in M_\nu} k_\nu(\overline{m})2^{2l+l_1-h-j+k-1-m_2-m_3-m_4}, \text{где все } k_\nu(\overline{m})\in\mathbb{K}. \end{aligned}$$

Так как $2l+l_1-h-j+k-1-m_2-m_3-m_4 \ge 2l+l_1-h-j+k-1-(h+j-k+l_1+1-\nu) = 2(q-m)-2+\nu$, то

$$2k_\nu = 2^{-2(m-q)+\nu-2}k'_\nu,\ \text{где}\ k'_\nu \in \mathbb{K},\ \nu = 1, \dots, h+j-k+l_1+1. \qquad (12)$$

Имеем из (11)

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_{l_1}(z)dz = \int_0^1 P(z)dz + \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_1+1} -\frac{k_\nu}{\nu-1}\left(\frac{1}{(3+\sqrt{5})^{\nu-1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{\nu-1}}\right) \\ + k_1 \ln \frac{\sqrt{5}+2+z}{\sqrt{5}+2-z}\Bigg|_0^1. \qquad (13) \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тогда $2\varepsilon_2^m \in \mathbb{K}$ $(m \ge 2,\ m \in \mathbb{N})$. Очевидно,

$$\frac{1}{(3+\sqrt{5})^{\nu-1}} = 2^{-\nu+1}(1-\varepsilon_2),\ \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{\nu-1}} = 2^{-\nu+1}\varepsilon_2^{\nu-1},$$

$$\ln \frac{\sqrt{5}+2+z}{\sqrt{5}+2-z}\Bigg|_0^1 = \ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Из определения M_0 следует, что $q_{M_0}\int\limits_0^1 P(z)dz \equiv A_1 \in \mathbb{K}$, а также несложно проверить, что

$$q_{M_0}\binom{h+j-k+l_1}{l_1}\frac{1}{\nu-1} \equiv A_\nu \in \mathbb{N}$$

для всех $\nu = 2, \ldots, h+j-k+l_1+1$. Но тогда из (12) и (13) следует

$$\begin{aligned} 2q_{M_0}w(l_1) &= 2q_{M_0}\binom{h+j-k+l_1}{l_1}\int\limits_0^1 R_{l_1}(z)dz = 2\binom{h+j-k+l_1}{l_1}A_1 \\ &+ 2^{-2(m-q)-2}\sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_1+1}\left(A_\nu k'_\nu 2\left(\varepsilon_2^{\nu-1}-(1-\varepsilon_2)^{\nu-1}\right)\right) + 2^{-2(m-q)-1}k'_1\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \end{aligned}$$

откуда ввиду $m \geq q$ следует (10).

Следствие 1. *Для интеграла (1) при $m \geq q$ справедливо следующее представление*

$$2^{-2q+1}q_{M_0}J = a\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2} + b,\ a,\ b \in \mathbb{K}. \tag{14}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{x^{l-q+l_1}}{(x-1)^{h+j-k+l_1+1}} = \left(\sqrt{5}+2\right)^{l-q+l_1}\left(\sqrt{5}+2\right)^{h+j-k+l_1+1}2^{2(h+j-k-l+q+1)} = 2^{2(m+1)}C(l_1),$$

где $C(l_1) \in \mathbb{K}$. Применяя лемму 2, из (6) и (8) получаем

$$\begin{aligned} 2^{-2q+1}q_{M_0}J &= -2(-1)^{j-k}\sum_{l_1=\max(0,q-l)}^{k+m-h}(-1)^{l_1}\binom{j}{k+m-h-l_1}2^{2(m+1)-2q}C(l_1)2^{-2(m-q)-2} \\ &\times \left(a(l_1)\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2} + b(l_1)\right) = a\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2} + b, \end{aligned}$$

где $a\ b \in \mathbb{K}$, и следствие 1 доказано.

Наряду с набором параметров (3) нам будет полезна и более общая ситуация, когда

$$(h,j,k,l,m,q) = n(h',j',k',l',m',q'), \tag{15}$$

где $h',\ j',\ k',\ l',\ m',\ q' \in \mathbb{Z}^+$. Интеграл (1) для параметров, имеющих вид (15), и для x, имеющего вид (2), будет удобно обозначать в виде

$$J \equiv J_n \equiv J_n(h',j',k',l',m',q'). \tag{16}$$

Обозначим для набора параметров (15)

$$M_n = \max\{2(k+l-j), 2h, 2k, h+j-k, k+m-h, l, m, j, q\}. \tag{17}$$

Пусть p – простое число, $p > \sqrt{Mn}$, $w = \{n/p\}$ – дробная доля числа n/p. Рассмотрим неравенства

$$\begin{gathered} [2k'w] + [(l'+k'-j')w] + [m'w] + [l'w] - [k'w] - [2(l'+k'-j')w] \\ -[(h'+j'-k')w] - [(k'+m'-h')w] > 0, \\ [2h'w] + [(l'+k'-j')w] + [j'w] + [q'w] - [h'w] - [2(l'+k'-j')w] \end{gathered}$$

$$-[(h'+j'-k')w]-[(k'+m'-h')w]>0, \tag{18}$$
$$[j'w]+[m'w]-[(h'+j'-k')w]-[(k'+m'-h')w]>0,$$
$$[2k'w]+[(l'+k'-j')w]+[q'w]-[k'w]-[2(l'+k'-j')w]-[(k'+m'-h')w]>0,$$
$$[2h'w]+[(l'+k'-j')w]+[l'w]-[h'w]-[2(l'+k'-j')w]-[(h'+j'-k')w]>0.$$

Обозначим через Δ_n произведение всех простых чисел $p>\sqrt{Mn}$ таких, что $w=\{n/p\}$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств (18). Следующая лемма уточняет результат, полученный в следствии 1.

Лемма 3. *При $m\geq q$ для интеграла (16) справедливо представление*

$$\frac{q_{Mn}}{\Delta_n}2^{-2q+1}J_n=A_n\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+B_n, \tag{19}$$

где $A_n,\ B_n\in\mathbb{K},\ n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Представление (19) следует из (14) с помощью стандартной процедуры уточнения знаменателя. Впервые для интеграла (1) неравенства (18) были получены в работе [1, с. 491, неравенства (11)]. Неравенства (18) несколько отличаются от рассмотренных с той же целью Р. Марковеккио в работе [2, равенства (31)].

В следующей лемме мы приведем окончательную версию линейной формы вида (19), с помощью которой и будет доказана теорема 1.

Лемма 4. *Справедливо представление (см. (16))*

$$\begin{aligned} L_n &\equiv \left(\sqrt{5}-2\right)^{140n}2^{-100n+1}\frac{q_{56n}}{\Delta_n}J_n(7,38,25,32,38,50)\\ &\equiv \left(\Lambda_1(n)\sqrt{5}+\Lambda_2(n)\right)\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\Lambda_3(n)\sqrt{5}+\Lambda_4(n)\right), \end{aligned} \tag{20}$$

где все $\Lambda_i(n)\in\mathbb{Z}$, Δ_n определено неравенствами (18) для набора параметров (3).

Доказательство. В работе [1, равенство (9)] доказано, что (см. (16))

$$J_n(h',j',k',l',m',q')=x^{l-q}J_n(k',m',h',q',j',l'),$$

т.е.

$$J_n(7,38,25,32,38,50)=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^{-18n}}{4^{-18n}}J_n(25,38,7,50,38,32).$$

Имеем для набора параметров (3) из (17)

$$M_n=n\max\{38,14,50,20,56,32,38,38,50\}=56n.$$

Но тогда

$$L_n=\left(\sqrt{5}-2\right)^{158n}2^{-64n+1}\frac{q_{56n}}{\Delta_n}J_n(25,38,7,50,38,32).$$

По лемме 3

$$2^{-64n+1}\frac{q_{56n}}{\Delta_n}J_n(25,38,7,50,38,32)=A_n\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+B_n,$$

где $A_n,\ B_n\in\mathbb{K}$, откуда следует (20), и лемма доказана.

3. Асимптотики

Для доказательства теоремы 1 мы применим лемму 1 к линейной форме (20). В этом разделе мы вычислим константы γ_1 и γ_3, а в следующем – константу γ_2. Для вычисления обеих констант γ_1 и γ_3 применим метод перевала. Имеем (см. (16) и (20))

$$J_n \equiv J_n(7,38,25,32,38,50) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{-\infty} ds \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} G(s,t)dt,$$

где

$$G(s,t) = \varphi(s,t)(f(s,t))^n,$$

$$f(s,t) = \frac{s^7t^{38}}{(1-s)^{19}(s-t)^{20}(t-x)^{56}}, \tag{21}$$

$$\varphi(s,t) = \frac{1}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)(s-t)(t-x)}.$$

Точками перевала являются решения системы $f'_s(s,t)=0$, $f'_t(s,t)=0$, отличные от нулей функции $f(s,t)$. Для выписанной выше функции $f(s,t)$ имеем три точки перевала:

$$(s_1,t_1) = (1.011603\ldots, 1.023871\ldots), \tag{22}$$

$$(s_2,t_2) = (-0.016548\ldots + i0.337977\ldots, -0.679454\ldots + i0.293303\ldots), \tag{23}$$

$(s_3,t_3) = (\overline{s_2},\overline{t_2})$ комплексно-сопряжена точке (s_2,t_2). Обозначим $\xi=(s,t)\in\mathbb{C}^2$.

Лемма 5. *Пусть ξ^0 – невырожденная точка перевала функции $S(\xi)$, γ – двумерное гладкое комплексное многообразие с краем, ξ^0 – внутренняя точка γ, функции $\varphi(\xi)$ и $S(\xi)$ голоморфны в точке ξ^0, пусть также $\max_{\xi\in\gamma} ReS(\xi)$ достигается в точке ξ^0,*

$$F(\lambda) = \int\limits_\gamma \varphi(\xi)\exp(\lambda S(\xi))d\xi,$$

$S''_{\xi\xi}(\xi_0) = \begin{pmatrix} S''_{ss}(\xi^0) & S''_{st}(\xi^0) \\ S''_{st}(\xi^0) & S''_{tt}(\xi^0)\end{pmatrix}$ – матрица Гессе, $\det S''_{\xi\xi}(\xi^0)\neq 0$. *Тогда при $\lambda\to+\infty$*

$$F(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}\exp(\lambda S(\xi^0))(\det S''_{\xi\xi}(\xi^0))^{-1/2}\left(\varphi(\xi^0)+O(\lambda^{-1})\right). \tag{24}$$

Доказательство. Это утверждение доказано в монографии М. В. Федорюка [19, с. 259, предложение 1.1].

Лемма 6. *Для линейной формы (20) имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left|\Lambda_1(n)\sqrt{5}+\Lambda_2(n)\right|\right)\\ &= 140\ln(\sqrt{5}-2) - 100\ln 2 + 56 - \Delta + \ln|f(s_1,t_1)|, \\ \gamma_1 &= 112.169784\ldots,\ \text{где } \Delta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Delta_n = 33.573984\ldots.\end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(\delta,\tau)\equiv f\left(\frac{1}{\delta},\frac{1}{\tau}\right)=-\frac{x^{-56}\delta^{32}\tau^{38}}{(1-\delta)^{19}(\delta-\tau)^{20}(\tau-1/x)^{56}}.$$

Пусть L_1 – окружность $|\tau-1/x|=1/t_1-1/x$, L_2 – окружность $|\delta-1/x|=1/s_1-1/x$. Заметим, что из (2) и (22) следует, что $1/x<1/t_1<1/s_1<1$. Очевидно, $\max_{(\delta,\tau)\in(L_2\times L_1)}\ln|g(\delta,\tau)|$ достигается только в точке $(1/s_1,1/\tau_1)$. Обозначим L_1^* – образ окружности L_1 при отображении $t=1/\tau$, L_2^* – образ окружности L_2 при отображении $s=1/\delta$. Но тогда из определения функции $g(\delta,\tau)$ следует, что $\max_{(s,t)\in(L_2^*\times L_1^*)}\ln|f(s,t)|$ достигается только в точке (s_1,t_1). Для интеграла J_n из (21) имеем

$$J_n=A_n\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+B_n, \tag{26}$$

где $A_n,\ B_n\in\mathbb{Q}\cdot\sqrt{5}\oplus\mathbb{Q}$ (см. следствие 1).

Покажем, что

$$A_n=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_2^*}ds\int\limits_{L_1^*}G(s,t)dt, \tag{27}$$

где окружности L_1^* и L_2^* проходятся в положительном направлении.

В доказательстве леммы 2 для интеграла в (9) имеем из (11) и (13)

$$\int\limits_0^1 R_{l_1}(z)dz=A(l_1)\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}+B(l_1),$$

где $A(l_1),\ B(l_1)\in\mathbb{Q}\cdot\sqrt{5}\oplus\mathbb{Q}$, $A(l_1)=k_1=-\mathrm{res}_{z=z_0}R_{l_1}(z)$, $z_0=\sqrt{5}+2$, а тогда из (6), (8) и (26) следует, что $A_n=\mathrm{res}_{z=z_0}R(z)$. Применяя (5), получаем

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l R(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2^*}\mathrm{res}_{t=x}G(s,t)ds=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_2^*}ds\int\limits_{L_1^*}G(s,t)dt,$$

где l – контур, обходящий точку z_0 в положительном направлении и переходящий при отображении $s=z^2/(z^2-1)$ в окружность L_2^*. Итак, формула (27) доказана.

Пусть γ_1 – малая дуга окружности L_1^* с центром в точке t_1, γ_2 – малая дуга окружности L_2^* с центром в точке s_1, $\gamma=\gamma_2\times\gamma_1$, $\Gamma=(L_2^*\times L_1^*)\backslash\gamma$; $\xi^0=(s_1,t_1)$, $\max_{\xi\in\Gamma}|f(\xi)|=$ $=F<|f(\xi^0)|$. На множестве γ можно определить некоторую голоморфную в точке ξ^0 ветвь $\ln f(\xi)=\ln|f(\xi)|+ih(\xi)$.

Из (21) и (22) следует, что $f(\xi^0)=-|f(\xi^0)|$, поэтому можно выбрать $h(\xi^0)=\pi$. Далее функция $\varphi(\xi)$ голоморфна в точке ξ^0 ввиду $\mathrm{Re}s>1$, $s\in\gamma_2$. Очевидно, что $\varphi(\xi^0)\neq 0$. Имеем из (27)

$$A_n=\frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_\gamma\varphi(\xi)\exp(n(\ln|f(\xi)|+ih(\xi)))d\xi+\int\limits_\Gamma\varphi(\xi)(f(\xi))^n d\xi\right). \tag{28}$$

Применим к первому интегралу в (28) лемму 5 при $\lambda=n$, $S(\xi)=\ln f(\xi)$. Все условия леммы 5 выполнены, так как оставшееся условие невырожденности точки перевала ξ^0 легко проверяется: $\det S''_{\xi\xi}(\xi^0)=10^{10}\cdot 3.116663\ldots\neq 0$. Тогда из (24) получим

$$\int\limits_\gamma\varphi(\xi)\exp(n(\ln|f(\xi)|+ih(\xi)))d\xi=\frac{2\pi}{n}(-1)^n\exp(n\ln|f(\xi^0)|)(\det S''_{\xi\xi}(\xi^0))^{-1/2}\left(\varphi(\xi^0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Второй интеграл в (28) оценим тривиально

$$\left|\int\limits_{\Gamma}(\varphi(\xi)(f(\xi))^n d\xi)\right| < CF^n$$

для некоторой положительной константы C. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|A_n| = \ln|f(s_1,t_1)|$.

Для завершения доказательства леммы осталось вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_{56n}}{\Delta_n}\right)$.

Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(q_{56n}) = 56$, а

$$\Delta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Delta_n = 33.573984\ldots \qquad (29)$$

был вычислен в работе [10, см. с. 118–119].

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть для линейной формы (20)*

$$\gamma_3 = 140\ln(2+\sqrt{5}) + 100\ln 2 - 56 + \Delta - \ln|f(s_2,t_2)| = 299.316009\ldots, \qquad (30)$$

где функция $f(s,t)$ определена в (21), точка (s_2,t_2) имеет вид (23), $\Delta = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Delta_n$ вычислен в (29).

Пусть далее $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$. Тогда существует такое $N\in\mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, что при всех $n\ge N$ хотя бы для одного из значений $m\in\{n,n+1\}$ выполняются неравенства

$$e^{-(\gamma_3+\varepsilon_1)m} < |L_m| < e^{-(\gamma_3-\varepsilon_2)m}.$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 7 работы [10].

4. Вычисление константы γ_2. Завершение доказательства теоремы 1

Для интеграла (1) рассмотрим функцию

$$g(x,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{a(\alpha)} ds\int\limits_{l_t}\frac{s^k t^{h-k}dt}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)^{k+l-j+1}(s-t)(t-x)}, \qquad (31)$$

где $a(\alpha) = \alpha/(\alpha-1)$, $\alpha\in(0,1)$, l_t – окружность, в комплексной плоскости t диаметром которой является отрезок вещественной оси $[x/2,2x]$; интегрирование по l_t проходит в отрицательном направлении.

Пусть далее

$$D_N(f(x,\alpha)) = \frac{1}{N!}\frac{\partial^N f(x,\alpha)}{\partial x^N},\ D_N(f(x)) = \frac{1}{N!}f^(N)(x),\ N\in\mathbb{Z}^+.$$

Приведем леммы 8–13, доказанные в работе [10] и необходимые для дальнейших рассуждений.

Лемма 8. *Для интеграла (1) и функции (31) выполняется соотношение*

$$J = \lim_{\alpha\to 1-0} T(g(x,\alpha)),$$

где оператор $T = D_{k+m-h}x^j D_{h+j-k}$.

Лемма 9. *Для функции (31) выполняется соотношение*

$$g(x,\alpha)=\frac{2(-1)^{k+l-j}x^{h-k}}{x-1}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{z^{2k}(z^2-1)^{l-j}dz}{z^2-x/(x-1)}.$$

Лемма 10. *Пусть $l\le j$. Тогда для интеграла (1) имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} J &= 2(-1)^{k+l-j}T\Bigg(\sum_{\nu=0}^{k+l-j-1}\frac{1}{2k+2l-2j-2\nu-1}\frac{x^{m-q+\nu}}{(x-1)^{\nu+1}} \\ &- \frac{x^{h-1/2}}{(x-1)^{k+l-j+1/2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{32}$$

Лемма 11. *Пусть $M\in\mathbb{N}$, a, $b\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$D_M\left(\frac{x^a}{(x-1)^b}\right)=(-1)^M\sum_{r=0}^{M}\binom{a}{r}\binom{b-a+M-1}{M-r}\frac{x^{a-r}}{(x-1)^{b+M}}. \tag{33}$$

Лемма 12. *Для любого $N\in\mathbb{N}$ и произвольных аналитических функций $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеет место равенство*

$$D_N(uv)=vD_N(u)+\sum_{\lambda=0}^{N-1}\frac{\lambda!(N-1-\lambda)!}{N!}D_{N-1-\lambda}\left(D_\lambda(u)v'\right).$$

Введем при $x\in\mathbb{R}$ функцию

$$x^*=\begin{cases} x\ln x, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ x\ln(-x), & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Лемма 13. *Пусть $N\in\mathbb{N}$, $n\to+\infty$, $b=b_0n+O(1)$, b_0, $r_0\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Z}^+$, $\binom{b}{r}\ne 0$. Тогда верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\binom{b}{r}\right|=b_0^*-r_0^*-(b_0-r_0)^*.$$

Полученные результаты применим к линейной форме (20). Вычислим сначала интеграл J_n из (21) по формуле (32):

$$\begin{aligned} J_n &= 2(-1)^nT\Bigg(\sum_{\nu=0}^{19n-1}\frac{1}{38n-2\nu-1}\frac{x^{-12n+\nu}}{(x-1)^{\nu+1}} \\ &- \frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{34}$$

где оператор $T=D_{56n}x^{38n}D_{20n}$.

Обозначим $A=(\sqrt{5}+2)^{-140n}2^{-100n}$,

$$\sum\nolimits_{1,\nu}=AT\left(\frac{1}{x^{12n-\nu}}(x-1)^{\nu+1}\right),\ \nu=0,1,\dots,12n-1, \tag{35}$$

$$\sum\nolimits_{2,\nu} = AT\left(\frac{x^{\nu}}{(x-1)^{12n+\nu+1}}\right),\ \nu = 0,1,\ldots,7n-1, \tag{36}$$

$$\sum\nolimits_{3} = AT\left(\frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\right). \tag{37}$$

Тогда из (20), (34)–(37) получим

$$L_n = \frac{q_{56n}}{\Delta_n}2(-1)^n * \left(\sum_{\nu=0}^{12n-1}\frac{1}{38n-2\nu-1}\sum\nolimits_{1,\nu} + \sum\nolimits_{\nu=0}^{7n-1}\frac{1}{14n-2\nu-1}\sum\nolimits_{2,\nu} - \sum\nolimits_{3}\right). \tag{38}$$

Будем комбинировать вычисление операторов D_M по формуле Лейбница и по формуле (33). В последнем случае оператор D_M обозначим D'_M.

Начнем с вычисления $\sum_{1,\nu}$. Имеем, как и в [10],

$$D_{20n}\left(\frac{1}{x^{12n-\nu}(x-1)^{\nu+1}}\right) = \sum_{r_1=0}^{20n}\binom{12n-\nu+r_1-1}{r_1}\binom{20n-r_1+\nu}{20n-r_1}\frac{1}{x^{12n-\nu+r_1}(x-1)^{\nu+20n-r_1+1}}.$$

По лемме 11

$$\begin{aligned}D'_{56n}\left(x^{38n}\frac{1}{x^{12n-\nu+r_1}(x-1)^{\nu+20n-r_1+1}}\right) &= D'_{56n}\left(\frac{x^{26n+\nu-r_1}}{(x-1)^{20n+\nu-r_1+1}}\right)\\ &= \sum_{r_2=0}^{56n}\binom{26n+\nu-r_1}{r_2}\binom{50n}{56n-r_2}\frac{x^{26n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{76n+\nu-r_1+1}}.\end{aligned}$$

Ненулевые слагаемые в последней сумме получаются лишь при $r_2 \in [6n, 26n+\nu-r_1]$. Далее из (2) имеем

$$\begin{aligned}\frac{x^{26n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{76n+\nu-r_1+1}} &= \left(\frac{\sqrt{5}+2}{4}\right)^{26n+\nu-r_1-r_2}((\sqrt{5}+2)4)^{76n+\nu-r_1+1}\\ &= (\sqrt{5}+2)^{102n+2\nu-2r_1-r_2+1}4^{50n+r_2+1}\\ &= A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{38n-2\nu+2r_1+r_2-1}4^{r_2+1}.\end{aligned}$$

Поэтому из (35) имеем для $\nu = 0,1,\ldots,12n-1$

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{1,\nu} &= \sum_{r_1=0}^{20n}\sum_{r_2=6n}^{26n+\nu-r_1}\binom{12n-\nu+r_1-1}{r_1}\binom{20n-r_1+\nu}{20n-r_1}\binom{26n+\nu-r_1}{r_2}\binom{50n}{56n-r_2}\\ &\times\ (\sqrt{5}-2)^{38n-2\nu+2r_1-r_2+1}4^{r_2+1}.\end{aligned} \tag{39}$$

Теперь вычислим $\sum_{2,\nu}$, $\nu = 0,1,\ldots,7n-1$. Заменим

$$D_{20n} = \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!}D'_{20n-\lambda}D_{\Lambda},$$

где $\Lambda = \Lambda_0 n + O(1)$, $\Lambda \in \mathbb{Z}^+$, выберем позднее с целью оптимизации оценки γ_2.

Имеем, как и в [10],

$$D_{\Lambda}\left(\frac{x^{\nu}}{(x-1)^{12n+\nu+1}}\right) = \sum_{r_1=0}^{\min(\Lambda,\nu)}(-1)^{\Lambda-r_1}\binom{\nu}{r_1}\binom{12n+\nu+\Lambda-r_1}{\Lambda-r_1}\frac{x^{\nu-r_1}}{(x-1)^{12n+\nu+\Lambda-r_1+1}},$$

$$D'_{20n-\Lambda}\left(\frac{x^{\nu-r_1}}{(x-1)^{12n+\nu+\Lambda-r_1+1}}\right)=(-1)^{\Lambda}\sum_{r_2=0}^{\nu-r_1}\binom{\nu-r_1}{r_2}\binom{32n}{20n-\Lambda-r_2}\frac{x^{\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{32n+\nu-r_1+1}},$$

$$D'_{56n}\left(\frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{32n+\nu-r_1+1}}\right)=\sum_{\rho=0}^{38n+\nu-r_1-r_2}\binom{38n+\nu-r_1-r_2}{\rho}\binom{50n+r_2}{56n-\rho}\frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2-\rho}}{(x-1)^{88n+\nu-r_1+1}}.$$

Как при вычислении $\sum_{1,\nu}$, имеем

$$\frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2-\rho}}{(x-1)^{88n+\nu-r_1+1}}=A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{14n-2\nu+2r_1+r_2+\rho-1}4^{r_2+\rho+1}.$$

Поэтому из (36) получим

$$\begin{aligned}\sum{}_{2,\nu} &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!}\sum_{r_1=0}^{\min(\Lambda,\nu)}\sum_{r_2=0}^{\nu-r_1}\sum_{\rho=\max(0,6n-r_2)}^{38n+\nu-r_1-r_2}(-1)^{r_1}\binom{\nu}{r_1}\binom{12n+\nu+\Lambda-r_1}{\Lambda-r_1}\\ &\times \binom{\nu-r_1}{r_2}\binom{32n}{20n-\Lambda-r_2}\binom{38n+\nu-r_1-r_2}{\rho}\binom{50n+r_2}{56n-\rho}\\ &\times (\sqrt{5}-2)^{14n-2\nu+2r_1+r_2+\rho-1}4^{r_2+\rho+1}.\end{aligned}\tag{40}$$

Теперь вычислим значение $\sum_3$ с помощью леммы 11. Положим, как и в [10],

$$u=\frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}},\ v=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}),\ v'=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}.$$

Тогда

$$D_{20n}(uv)=vD_{20n}(u)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{20n-1}\frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!}D_{20n-1-\lambda}\left(D_{\lambda}(u)\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right).$$

Аналогично

$$\begin{aligned}T(uv) &= vT(u)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=0}^{56n-1}\frac{\lambda_1!(56n-1-\lambda_1)!}{(56n)!}D_{56n-1-\lambda_1}\left(D_{\lambda_1}(x^{38n}D_{20n}(u))\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{20n-1}\frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!}D_{56n}\left(x^{38n}D_{20n-1-\lambda}\left(D_{\lambda}(u)\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\sum{}_3=AT(uv)\equiv AT(u)v+\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=0}^{56n-1}S_3(\lambda_1)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{20n-1}S_3^*(\lambda).\tag{41}$$

Первое слагаемое суммы (41) вычисляется аналогично $\sum_{2,\nu}$, где $\nu=7n-1/2$. Полуцелое значение ν позволяет расширить пределы изменения $r_1,\ r_2,\ \rho$. Вместо (40) получим

$$\sum{}_3=AT(uv)\equiv AT(u)v+\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=0}^{56n-1}S_3(\lambda_1)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{20n-1}S_3^*(\lambda).$$

$$\begin{aligned} AvT(u) &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!}\sum_{r_1=0}^{\Lambda}\sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda}\sum_{\rho=\max(0,6n-r_2)^{56n}}(-1)^{r_1+1}\binom{7n-1/2}{r_1} \\ &+ \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1}\binom{7n-r_1-1/2}{r_2}\binom{32n}{20n-\Lambda-r2}\binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho} \\ &\times \binom{50n+r_2}{56n-\rho}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho}4^{r_2+\rho+1}\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Вычислим теперь слагаемые $S_3(\lambda_1)$ суммы в (41). Как и выше, пусть

$$D_{20n} = \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!}D'_{20n-\Lambda}D_\Lambda.$$

Последовательно получаем

$$D_\Lambda(u) = \sum_{r_1=0}^{\Lambda}\binom{7n-1/2}{r_1}\binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1}(-1)^{\Lambda-r_1}\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}},$$

$$D'_{20n-\Lambda}\left(\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}}\right) = (-1)^\Lambda\sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda}\binom{7n-r_1-1/2}{r_2}\binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \times\frac{x^{7n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{39n-r_1+1/2}},$$

$$D'_{\lambda_1}\left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{39n-r_1+1/2}}\right) = (-1)^{\lambda_1}\sum_{\rho_1=0}^{\lambda_1}\binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho_1}\binom{-6n+r_2+\lambda_1}{\lambda_1-\rho_1} \times\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}}{(x-1)^{39n+\lambda_1-r_1+1/2}},$$

$$D'_{56n-\lambda_1-1}\left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-1}}{(x-1)^{39n+\lambda_1-r_1+1}}\right) = (-1)^{\lambda_1+1}\sum_{\rho_2=0}^{56n-\lambda_1-1}\binom{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}{\rho_2} \times\binom{50n+r_2+\rho_1}{56n-\lambda_1-\rho_2-1}\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-\rho_2-1}}{(x-1)^{95n-r_1}},$$

$$\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-\rho_2-1}}{(x-1)^{95n-r_1}} = A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho_1+\rho_2+1}4^{r_2+\rho_1+\rho_2+1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_3(\lambda_1) &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!}\frac{\lambda_1!(56n-1-\lambda_1)!}{(56n)!}\sum_{r_1=0}^{\Lambda}\sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda}\sum_{\rho_1=0}^{\lambda_1}\sum_{\rho_2=0}^{56n-\lambda_1-1}(-1)^{r_1+1} \\ &\times \binom{7n-1/2}{r_1}\binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1}\binom{7n-r_1-1/2}{r_2}\binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \\ &\times \binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho_1}\binom{-6n+r_2+\lambda_1}{\lambda_1-\rho_1}\binom{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}{\rho_2} \\ &\times \binom{50n+r_2+\rho_1}{56n-\lambda_1-\rho_2-1}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho_1+\rho_2+1}4^{r_2+\rho_1+\rho_2+1} \end{aligned} \tag{43}$$

Осталось вычислить $S_3^*(\lambda)$. Пусть

$$D_\lambda = \frac{(\lambda-\Lambda)!\Lambda!}{\lambda!}D'_{\lambda-\Lambda}D_\Lambda.$$

Имеем, как и в [10],

$$D_\Lambda\left(\frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}}\right)=\sum_{r_1=0}^{\Lambda}(-1)^{\Lambda-r_1}\binom{7n-1/2}{r_1}\binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1}\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}},$$

$$D'_{\lambda-\Lambda}\left(\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}}\right)=\sum_{r_2=0}^{\lambda-\Lambda}(-1)^{\lambda-\Lambda}\binom{7n-r_1-1/2}{r_2}\binom{12n+\lambda}{\lambda-\Lambda-r_2}\frac{x^{7n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{19n+\lambda-r_1+1/2}},$$

$$D'_{20n-1-\lambda}\left(\frac{x^{7n-r_1-r_2-1}}{(x-1)^{19n+\lambda-r_1+1}}\right)=(-1)^{\lambda+1}\sum_{r_3=0}^{20n-1-\lambda}\binom{7n-r_1-r_2-1}{r_3}\binom{32n+r_2}{20n-1-\lambda-r_3}\times\frac{x^{7n-r_1-r_2-r_3-1}}{(x-1)^{39n-r_1}},$$

$$D'_{56n}\left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-1}}{(x-1)^{39n-r_1}}\right)=\sum_{\rho=\max(0,6n-r_2-r_3)}^{45n-r_1-r_2-r_3-1}\binom{45n-r_1-r_2-r_3-1}{\rho}\binom{50n+r_2+r_3}{56n-\rho}\times\frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-\rho-1}}{(x-1)^{95n-r_1}},$$

$$\frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-\rho-1}}{(x-1)^{95n-r_1}}=A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+r_3+\rho+1}4^{r_2+r_3+\rho+1}.$$

Таким образом, во втором случае имеем

$$\begin{aligned}S_3(\lambda)&=\frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!}\frac{(\lambda-\Lambda)!\Lambda!}{\lambda!}\sum_{r_1=0}^{\Lambda}\sum_{r_2=0}^{\lambda-\Lambda}\sum_{r_3=0}^{20n-1-\lambda}\sum_{\rho=\max(0,6n-r_2-r_3)}^{45n-r_1-r_2-r_3-1}(-1)^{r_1+1}\\&\times\binom{7n-1/2}{r_1}\binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1}\binom{7n-r_1-1/2}{r_2}\binom{12n+\lambda}{\lambda-\Lambda-r_2}\\&\times\binom{7n-r_1-r_2-1}{r_3}\binom{32n+r_2}{20n-1-\lambda-r_3}\binom{45n-r_1-r_2-r_3-1}{\rho}\\&\times\binom{50n+r_2+r_3}{56n-\rho}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+r_3+\rho+1}4^{r_2+r_3+\rho+1}.\end{aligned}\tag{44}$$

Слагаемые в (38), вычисленные по формулам (39), (40), (43), (44), имеют вид $(\sqrt{5}-2)^N R$ или $(\sqrt{5}-2)^N\sqrt{5}R$, а в формуле (42) – вид $(\sqrt{5}-2)^N R\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $(\sqrt{5}-2)^N R\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где $R\in\mathbb{Q}$, $N\in\mathbb{Z}^+$. Заметим, что для $N\in\mathbb{N}$ $(\sqrt{5}+2)^N=A_N+B_N\sqrt{5}$, $(\sqrt{5}-2)^N=A_N-B_N\sqrt{5}$, где $A_N,\ B_N\in\mathbb{N}$. Соответственно, $\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)^N=-5B_N+A_N\sqrt{5}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln A_n=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln B_n=\sqrt{5}+2$.

Общее количество слагаемых в L_n оценивается как $O(n^5)$. Таким образом, имеем для γ_2 оценку $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Lambda\ \le\ 56-\Delta+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|S|$, где S – максимальное по модулю слагаемое из всех вышеуказанных сумм после замены $\sqrt{5}-2$ на $\sqrt{5}+2$. Асимптотика биномиальных коэффициентов вычисляется с помощью леммы 13.

Вычисления на компьютере показывают, что соответствующее максимальное слагаемое достигается в сумме (43) при следующих значениях параметров: $\Lambda=\Lambda'n+O(1)$, $r_1=r_1'n+O(1)$, $r_2=r_2'n+O(1)$, $\rho_1=\rho_1'n+O(1)$, $\rho_2=\rho_2'+O(1)$, $\lambda_1=\lambda_1'+O(1)$ где

$$(\Lambda';r_1';r_2';\rho_1';\rho_2';\lambda_1')=(0;0;4.849092\ldots;0.575453\ldots;35.744108\ldots;0.575453\ldots).$$

Следовательно, из (42) по лемме 13 получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda \le 56 - \Delta + \lambda_1'^{*} + (56-\lambda_1)'^{*} - 56^{*} + (7-r_1)'^{*} - r_2'^{*} - (7-r_1-r_2)'^{*} + 32^{*}$$

$$-(20-r_2)'^{*} - (12+r_2)'^{*} + (45-r_2)'^{*} - \rho_1'^{*} - (45-r_2-\rho_1)'^{*} + (45-r_2-\rho_1)'^{*} - \rho_2'^{*}$$
$$-(45-r_2-\rho_1-\rho_2)'^{*} + (50+r_2+\rho_1)'^{*} - (56-\lambda_1-\rho_2)'^{*} - (r_2+\rho_1+\lambda_1+\rho_2-6)'^{*}$$
$$+(2r_1+r_2+\rho_1+\rho_2)\ln(\sqrt{5}+2) + (r_2+\rho_1+\rho_2)\ln 4 = 213.833247\ldots \equiv \gamma_2. \qquad (45)$$

Таким образом, по лемме 1 из (25), (30) и (45) имеем

$$\mu > \frac{2(\gamma_1+\gamma_3)}{\gamma_3-\gamma_2} = 9.627339\ldots.$$

И теорема 1 доказана.

5. Заключение

“Золотое сечение” хорошо известно в теории диофантовых приближений, как число “плохо приближаемое” рациональными дробями. Выясняется, что и логарифм “золотого сечения” достаточно плохо приближается рациональными числами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андросенко В. А., Салихов В. Х. Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 4. С. 483-492.

2. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Aritm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

3. Данилов Л. В. Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках // Математические заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 449-458.

4. Aladi K. Robinson M. Legendre polynomials and irrationality // J.Reine Angew. Math. 1980. Vol. 318. P. 137-155.

5. Chudnovsky G. V. Recurrences Pade approximations and thei applications // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92.

6. Дубицкас А. К. Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. Т. 6. С. 73-76.

7. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407, № 1. P. 99-125.

8. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.

9. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.

10. Лучин М. Ю., Салихов В. Х. Приближение $\ln 2$ числами из поля $Q(\sqrt{2})$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82, № 3. С. 108-135.

11. Amoroso F., Viola C. Approximation measures for logarithms of algebraic numbers // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 2001. Vol. 30, № 1. P. 225-249.

12. Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Том 16. № 6. С. 139-155.

13. Салихов В. Х., Сальникова Е. С. Диофантовы приближения логарифма "золотого сечения" // Вестник Брянского государственного технического университета. 2007. № 1. С. 111-119.

14. Башмакова М. Г. Оценка мер иррациональности логарифма "золотого сечения" // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, № 1. С. 47-53.

15. Дубицкас А. К. Приближения логарифмов некоторых чисел // Диофантовы приближения. Ч.2. М.:Изд-во Московского университета. 1986. С. 23-34.

16. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.

17. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

18. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.

19. Федорюк М. В. Метод перевала // Наука, М. 1997. С. 368.

REFERENCES

1. Androsenko, V. A. 2015., "Symmetrized version of the Marcovecchio integral in the theory of diophantine approximations", Math. Notes, vol. 97, № 4, pp. 483-492. (Russian)

2. Marcovecchio R., 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$", Acta Aritm., vol. 139.2, pp. 147-184.

3. Danilov l. V., 1978, "Rational aproximations of some funcrions in rational points", Math. Notes, vol. 24, № 4 pp. 449-458. (Russian)

4. Aladi K., Robinson M., 1980, "Legendre polynomials and irrationality", J.Reine Angew. Math., vol. 318, pp. 137-155.

5. Chudnovsky G. V., "Recurrences Pade approximations and thei applications", Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 92.

6. Dubickas, A. K. 1987, "Approximation of $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ by rational fractions", Publishing Moscow University Bulletin, Math., Mech., vol. 6, pp. 73-76. (Russian)

7. Hata M., 1990, "Legendre type polynomials and irrationality measures", J. Reine Angew. Math., vol. 407, № 1, pp. 99-125.

8. Hata M., 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", Acta Arith., vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.

9. Rhin G., 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.

10. Luchin M. Y., 2018, "Aproximating $\ln 2$ by numbers in the field $Q(\sqrt{2})$", Izv. Math., vol. 82, № 3, pp. 108-135. (Russian)

11. Amoroso F., Viola C., 2001, “Approximation measures for logarithms of algebraic numbers”, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. 30, № 1, pp. 225-249.

12. Salnikova E., S. 2010, “Approximations of some logarithms by numbers from the fields $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}\sqrt{d}$”, Journal of Mathematical Sciences, vol. 16, № 6, pp. 139-155. (Russian)

13. Salikhov, V. H., Salnikova E., S., 2007, “Diophantine aproximations of logarithm of “Golden section”, The Bryansk State University Herald, № 1, pp. 111-119. (Russian)

14. Bashmakova M. G.,2010, “The estimate of the irrationality measures of logarithm of “Golden section””, Chebyshevskii Sbornik, vol. 11, no. 1, pp. 47-53. (Russian)

15. Dubickas, A. K. 1986, “Approximation of logarithms of some numbers”, Publishing Moscow State University Diophantine approximations, 2, pp. 23-34.

16. Hata M., 1992, “Irrationality measures of the values of hypergeometric functions”, Acta Arith., vol. LX., pp. 335-347.

17. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K., “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures”, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 50, № 2, pp. 225-243.

18. Salnikova, E. 2007, “On irrationality measures of some values of the Gauss function”, Chebyshevskii Sbornik, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)

19. Fedoryuk M. V., 1997, “Pass method”, Moscow: Science, pp. 368. (Russian)

Получено 25.06.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-322-335

Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел [1]

Г. В. Федоров (г. Москва)

Г. В. Федоров — Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (МГУ имени М. В. Ломоносова).
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

Проблема периодичности функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля тесно связана с проблемой поиска и построения фундаментальных S-единиц гиперэллиптического поля и проблемой кручения в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой. Для эллиптических кривых над полем рациональных чисел проблема кручения была решена Б. Мазуром в 1978 году. Для гиперэллиптических кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел приведенные три проблемы остаются открытыми. Теория функциональных непрерывных дробей стала мощным арифметическим инструментом для исследования этих проблем. Кроме этого, возникающие в теория функциональных непрерывных дробей задачи имеют собственный интерес. Иногда эти задачи имеют аналоги в числовом случае, но особенно интересны задачи, которые значительно отличаются от числового случая. Одной из таких задач является задача об оценке сверху длин периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел. В данной статье мы находим оценки сверху на длины периодов для ключевых элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел. В случае, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом нечетной степени, длина периода рассматриваемых элементов либо бесконечна, либо не превосходит удвоенной степени фундаментальной S-единицы. Более интересный и сложный случай, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом четной степени. В 2019 году В.П. Платоновым и Г.В. Федоровым для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические. Используя этот результат в данной статье найдены точные оценки сверху на длины периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел, зависящие только от рода гиперэллиптического поля и порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой.

Ключевые слова: непрерывные дроби, длина периода, фундаментальные единицы, S-единицы, кручение в якобианах, гиперэллиптические поля, дивизоры, группа классов дивизоров.

Библиография: 27 – названий.

Для цитирования:

Г. В. Федоров. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 322–335.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант №19-71-00029).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-322-335

On boundedness of period lengths of continued fractions of key elements hyperelliptic fields over the field of rational numbers [2]

G. V. Fedorov (Moscow)

G. V. Fedorov — Moscow State University (MSU).
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

The problem of the periodicity of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field is closely related to the problem of finding and constructing fundamental S-units of a hyperelliptic field and the torsion problem in the Jacobian of the corresponding hyperelliptic curve. For elliptic curves over a field of rational numbers, the torsion problem was solved by B. Mazur in 1978. For hyperelliptic curves of genus 2 and higher over the field of rational numbers, the above three problems remain open. The theory of functional continued fractions has become a powerful arithmetic tool for studying these problems. In addition, tasks arising in the theory of functional continued fractions have their own interest. Sometimes these tasks have analogues in the numerical case, but tasks that are significantly different from the numerical case are especially interesting. One such problem is the problem of estimating from above the lengths of periods of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers. In this article, we find upper bounds on the period lengths for key elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers. In the case when the hyperelliptic field is defined by an odd degree polynomial, the period length of the elements under consideration is either infinite or does not exceed twice the degree of the fundamental S-unit. A more interesting and complicated case is when a hyperelliptic field is defined by a polynomial of even degree. In 2019, V.P. Platonov and G.V. Fedorov for hyperelliptic fields $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, found the exact interval values $s \in \mathbb{Z}$ such that continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ are periodic. Using this result in this article, we find exact upper bounds on the period lengths of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers, depending only on the genus of the hyperelliptic field and the order of the torsion group of the Jacobian of the corresponding hyperelliptic curve.

Keywords: continued fractions, period length, fundamental units, S-units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic fields, divisors, divisor class group.

Bibliography: 27 – titles.

For citation:
G. V. Fedorov, 2019, "On boundedness of period lengths of continued fractions of key elements hyperelliptic fields over the field of rational numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 322–335.

1. Введение

Пусть $F(X) \in K[X]$ — свободный от квадратов многочлен над полем K характеристики отличной от 2. В классическом случае рассматривается гиперэллиптическое поле

[2]The work was supported by RSF (grant №19-71-00029).

$\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где у многочлена F степени $2g+2$, $g \geqslant 1$, старший коэффициент является полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K. Вопрос о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$, построенной в поле $K((X^{-1}))$, связан с многими математическими проблемами. Одной из первых таких проблем стала проблема интегрируемости в элеметарных функциях псевдоэллиптических интегралов, рассмотренная в работах Абеля [1] и Чебышева [2]. Современные результаты о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$ и эквивалентных условиях изложены в [3], [4]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{F}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $Y^2 = F(X)$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из K^*. Для непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В эллиптическом случае $\deg F = 4$ над полем констант $K = \mathbb{Q}$ в [5]-[6] был поставлен вопрос о возможной длине периода непрерывной дроби $\sqrt{F}$. Согласно теореме Мазура [7] для эллиптических кривых, если класс дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ имеет конечный порядок m в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, то $2 \leqslant m \leqslant 10$ или $m = 12$. Используя этот результат и параметризацию Куберта [8], в [9], [10], [11] показано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{F}$ принимает одно из значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 18, 22\}$, причем для каждого n из этого множества существует бесконечная серия соответствующих примеров неизоморфных эллиптических кривых. Для квадратичного поля констант K и $\deg F = 4$ в [12] доказано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{F}$ может принимать одно из значений $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 26, 30, 34\}$.

Для гиперэллиптических полей общего вида $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 2g+2$, $g \geqslant 1$, в статье [13] дана оценка сверху на длину квазипериода N непрерывной дроби элемента специального вида $\beta = (B + \sqrt{F})/A \in \mathcal{L}$, где $A, B \in K[X]$, $A \mid F - B^2$, согласно которой $N \leqslant m - p + 1$, где m — порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, p — порядок полюса элемента β в ∞^+.

Пусть теперь $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен произвольной степени. Пусть $h \in K[x]$ и нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два продолжения v_h^- и v_h^+ на гиперэллиптическое поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. В статье [14] показано, что в случае $\deg h = 1$ теория функциональных непрерывных дробей, связанных с нормированиями v_h^- и v_h^+, находит эффективное применение в поле L. Поэтому далее мы считаем, что $\deg h = 1$, многочлен f задан в кольце $K[h]$ и $L = K(h)(\sqrt{f})$. В этом случае элемент $\alpha \in L$ разлагается в поле формальных степенных рядов $K((h))$ в степенной ряд вида $\alpha = \sum\limits_{j=s}^{\infty} u_j h^j$, где $u_j \in K$. Если $\alpha \in L \setminus K(h)$, то α можно представить в виде формального степенного ряда в $K((h))$ двумя способами, которые соответствуют нормированиям v_h^- и v_h^+. Чтобы каждый элемент поля L имел однозначное разложение в $K((h))$, мы без ограничения общности фиксируем одно из вложений поля L в $K((h))$, соответствующее нормированию v_h^-. Для $\alpha \in L \setminus K(x)$ обозначим $\overline{\alpha}$ — сопряженный элемент к α.

Из теоремы 2 статьи [15] следует оценка снизу на длины квазипериодов непрерывных дробей некоторых специальных элементов гиперэллиптического поля. В статье [16] получены оценки сверху и снизу на длину квазипериода непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$ в случае, когда $\deg f = 2g+1$. В статье [17] получены оценки, уточняющие результаты статьи [16], зависимости от четности степени фундаментальной S-единицы m, а также приведены примеры непрерывных дробей, на которых указанные оценки становятся точными.

В частности, длина квазипериода $N \leqslant m-2g+1$ для нечетной степени фундаментальной S-единицы m, и оценка $N \leqslant m-2g$ для четной степени фундаментальной S-единицы m.

В статьях [16]-[25] отмечалось, что элементы вида $\sqrt{f}/h^s$ для различных $s \in \mathbb{Z}$ играют особую роль для поиска фундаментальных S_h-единиц и изучения их свойств в гиперэллиптическом поле $L = K(h)(\sqrt{f})$. В статье [24] показано, что из квазипериодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^s$ следует квазипериодичность непрерывной дроби $\sqrt{f}/h^{k-s}$, где $k = \deg f$.

В теореме 2 [18] при данном некотором $s \in \mathbb{Z}$ найдены достаточные условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot h^s \in L \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g+1$ достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g+2$ найденные достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 в статье [18]. Одним из наглядных эффектов случая, когда для элементов α и $\alpha \cdot h^s$ достаточные условия не являются необходимыми, является значительное отличие длин квазипериодов и периодов непрерывных дробей элементов α и $\alpha \cdot h^s$. Так, в примере 4 статьи [18] найден свободный от квадратов многочлен f степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot h^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $L = K(x)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной S_h-единицей степени 4, где $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$.

В статье [26] дано уточнение теоремы 2 статьи [18]. А именно, в теореме 2 [26] для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g+2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические.

В данной статье, опираясь на результаты статьи [26], мы даем оценки сверху на возможные длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов поля L над полем рациональных чисел. В теореме 5 доказано, что, если длина периода непрерывной дроби элемента вида $\sqrt{f}/h^s$ конечна, то она не превосходит $12m-4g$, где m есть степень фундаментальной S_h-единицы поля L. При более сильных условиях найдены более точные оценки на возможную длину периода. Приведены новые примеры элементов рассматриваемого вида с периодами, достигающими некоторые из приведенных оценок.

Мы высказываем предположение, что длины периодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем алгебраических чисел K ограничены сверху постоянной, зависящей только от рода гиперэллиптического поля, порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой и степени расширения $[K : \mathbb{Q}]$.

Символом $\operatorname{tc}(R)$ обозначим свободный член многочлена R.

2. О периодичности ключевых элементов

В 2018 году в статье [17] доказано, что для делителя d многочлена f квазипериодическая непрерывная дробь элемента вида $\sqrt{f}/(dh^s)$, $s \in \mathbb{Z}$, является периодической. Приведем альтернативное доказательство этого факта, которое нам будет полезно в дальнейших рассуждениях.

Из теоремы 1 [18] известно, что наличие хотя бы одного квазипериодического элемента в поле $L = K(h)(\sqrt{f})$ влечет ряд эквивалентных условий, среди которых мы выделяем разрешимость норменного уравнения вида

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 f = bh^m, \quad \max\bigl(2\deg\mu_1,\ 2\deg\mu_2 + \deg f\bigr) = m. \tag{1}$$

По предложению 2 [18] норменное уравнение (1) можно свести к уравнению вида

$$f_2\mu_4^2 - f_1\mu_3^2 = h^{m_1}, \quad m_1 = \deg(f_2\mu_4^2) \geqslant \deg(f_1\mu_3^2), \quad \deg f_2 > 0, \quad f = b_0^2 f_1 f_2. \tag{2}$$

Как и в доказательстве теоремы 1 [18] запишем, как будет выглядеть уравнение (2) в поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где $X = h^{-1}$, $F(X) = f \cdot h^{-2g-2}$. Для этого обозначим

$$\Omega_4 = \mu_4 \cdot h^{-\deg \mu_4}, \quad F_2 = f_2 \cdot h^{-\deg f_2}, \quad F_1 = F/F_2, \quad \Omega_3 = \mu_3 \cdot h^{g+1-\deg f_2 - \deg \mu_4},$$

тогда $F_1, F_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[X]$ и

$$F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2 = 1, \quad F_1 \cdot F_2 = F, \quad v_X(F_2) = v_X(\Omega_4) = 0. \tag{3}$$

В статье [27] определено отношение $\approx$ для элементов $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(X)$, а именно $\alpha \approx \beta$, если найдутся $T, R, U, V \in K[X]$ такие, что

$$\alpha = \frac{T + R\beta}{U + V\beta}, \quad TV - RU \in K^*.$$

В теореме 1 [27] доказано, что $\alpha \approx \beta$ для $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_m = c\alpha_n$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$, $c \in K^*$. Отсюда следует, что непрерывные дроби элементов $\alpha \approx \beta$ одновременно квазипериодические (периодические) или не квазипериодические (не периодические).

Лемма 1. *Пусть многочлены $F_1, F_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[X]$ удовлетворяют* (3). *Тогда для любого $s \in \mathbb{Z}$ такого, что $-v_X(\Omega_3) \leqslant s \leqslant v_X(F_1\Omega_3)$, имеем*

$$\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s} \approx \frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}.$$

Доказательство. Сперва рассмотрим $T = X^{-s}F_1\Omega_3$, $R = \Omega_4$, $U = F_2\Omega_4$, $V = X^s\Omega_3$, тогда из (3) имеем

$$TV - RU = -(F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2) \in K^*, \quad T, R, U, V \in K[X],$$

$$\frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{T + R\sqrt{F}/X^s}{U + V\sqrt{F}/X^s} = \frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}.$$

Теперь положим $T = F_2\Omega_4$, $R = X^s\Omega_3$, $U = X^{-s}F_1\Omega_3$, $V = \Omega_4$, тогда из (3) получаем

$$TV - RU = F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2 \in K^*, \quad T, R, U, V \in K[X],$$

$$\frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{T + R\sqrt{F}/X^s}{U + V\sqrt{F}/X^s} = \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}.$$

Лемма 1 доказана. □

Теорема 1. *Пусть для некоторого $s_0 \in \mathbb{Z}$ непрерывная дробь элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^{s_0}$ квазипериодическая.*

Тогда непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^{s_0}$, $h^{\deg f_2 - s_0}\sqrt{f}/f_2$ и $h^{s_0 - \deg f_2}\sqrt{f}/f_1$ периодические, где многочлены f_1, f_2 определены из (2) *согласно предложению 2 [18].*

Доказательство. Поскольку непрерывная дробь $\alpha = \sqrt{f}/h^{s_0}$ квазипериодическая, то в силу теоремы 1 [18] и предложения 2 [18] справедливо уравнение (2), а, следовательно, и (3), причем за счет условий (2) имеем $\deg_X F_2 > 0$. По предложению 3 [18] для $r = \max(2s_0, \deg f)$ получаем неравенство $v_X(\Omega_3) + g + 1 \geqslant r - s_0$.

Непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^{s_0}$ и $\sqrt{F}/X^{g+1-s_0}$, построенные соответственно в полях $K((h))$ и $K((X^{-1}))$, совпадают. В лемме 1 можно взять $s = g + 1 - s_0$, поскольку

$|g+1-s_0| = r - s_0 - (g+1) + v_X(F_1) \leqslant v_X(F_1\Omega_3)$. Следовательно, непрерывные дроби $\sqrt{F}/X^s$, $\sqrt{F}/(F_2X^s)$ и $X^s\sqrt{F}/F_1$ квазипериодические. В силу $\deg_X F_2 > 0$ имеем

$$\max\left(-v_\infty\left(\sqrt{F}/X^s\right), -v_\infty\left(\sqrt{F}/(F_2X^s)\right), -v_\infty\left(X^s\sqrt{F}/F_1\right)\right) > 0,$$

значит, по теореме 3 [27] и лемме 1 получаем периодичность непрерывных дробей $\sqrt{F}/X^s$, $\sqrt{F}/(F_2X^s)$ и $X^s\sqrt{F}/F_1$. Отсюда следует периодичность непрерывных дробей

$$\sqrt{f}/h^{s_0}, \quad h^{\deg f_2 - s_0}\sqrt{f}/f_2 \ \text{ и } \ \sqrt{f}/(f_1h^{\deg f_2 - s_0}).$$

Теорема 1 доказана. □

В частности, в случае s_0 по теореме 1 получаем, что квазипериодичность непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}$ влечет ее периодичность. Данный факт для многочленов f нечетной степени впервые был доказан в 2017 году в статье [22].

3. Оценки на длину периода

Пусть элемент $\beta \in \mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$ является корнем уравнения

$$\Lambda_2\beta^2 + 2\Lambda_1\beta + \Lambda_0 = 0, \tag{4}$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[X]$ взаимно простые многочлены. Обозначим $D = \Lambda_1^2 - \Lambda_0\Lambda_2$. Тогда по теореме 2 [27] квазипериодичность непрерывной дроби $\beta = [a_0; a_1, \ldots]$ в $K((1/X))$ эквивалентна наличию решения $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения

$$\Omega_1^2 - D\Omega_2^2 = a \in K^*. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть существует решение $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения* (5). *Тогда длина квазипериода непрерывной дроби элемента β не превосходит*

$$\deg\Omega_2 + \max\left(\deg\Lambda_1, \ \frac{1}{2}(\deg\Lambda_0 + \deg\Lambda_2)\right).$$

Доказательство. Обозначим длину квазипериода непрерывной дроби элемента β через N. Так как $\Omega_1^2 = D\Omega_2^2 + a$ — полный квадрат в $K[X]$, то уравнение $R^2 + 2\Omega_2\Lambda_1R + \Lambda_0\Lambda_2\Omega_2^2 - a = 0$ имеет решение $R \in K[X]$:

$$R = -\Omega_2\Lambda_1 + \Omega_1.$$

Определим

$$T = \Omega_2\Lambda_2, \quad U = R + 2\Omega_2\Lambda_1, \quad S = -\Omega_2\Lambda_0,$$

тогда $RU - ST = a$ и $T \neq 0$. С введенными обозначениями уравнение (4) равносильно соотношению

$$\beta = \frac{R\beta + S}{T\beta + U}. \tag{6}$$

Подставим тождество

$$\beta = \frac{P_{n-1}\beta_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}\beta_n + Q_{n-2}}$$

в соотношение (6), тогда

$$\beta = \frac{A\beta_n + B}{C\beta_n + D},$$

$$A = RP_{n-1} - \Omega_2\Lambda_0Q_{n-1}, \qquad B = RP_{n-2} - \Omega_2\Lambda_0Q_{n-2},$$
$$C = RQ_{n-1} + \Omega_2\Lambda_2P_{n-1}, \qquad D = RQ_{n-2} + \Omega_2\Lambda_2P_{n-1},$$

причем $AD - BC \in K^*$. С некоторого номера справедливо $v_\infty^-(\beta_n) \geqslant 1$, поэтому по лемме 1 [27] найдется номер $t \geqslant n$ такой, что для некоторого $b \in K^*$

$$\beta_{t+1} = b\beta_n, \quad \frac{A}{C} = \frac{P_t}{Q_t}, \quad \frac{B}{D} = \frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}}. \tag{7}$$

Тогда для длины квазипериода верна оценка $N \leqslant t + 1 - n$ и справедливы неравенства

$$\deg A \geqslant \deg P_t = \sum_{j=0}^{t} \deg a_j \geqslant \deg P_{n-1} + t + 1 - n \geqslant \deg P_{n-1} + N. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} N \leqslant \deg A - \deg P_{n-1} \leqslant \max\bigl(\deg R,\ \deg \Omega_2 + \deg \Lambda_0 - \deg a_0\bigr) \leqslant \\ \leqslant \max\left(\deg \Omega_2 + \deg \Lambda_1,\ \deg \Omega_1,\ \deg \Omega_2 + \frac{1}{2}\left(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2\right)\right) \leqslant \\ \leqslant \deg \Omega_2 + \max\left(\deg \Lambda_1,\ \frac{1}{2}\left(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2\right)\right). \end{gathered}$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть элемент $\beta = \sqrt{F}/X^s \in \mathcal{L}$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь. Тогда для некоторого $F_1 \mid F$, $\deg F_1 < \deg F$, длина квазипериода не превосходит $\deg \Omega_1 - \delta$, где*

$$\delta = \max\bigl(0, \deg F_1 - g - s - 2\bigr) + \max\bigl(0, g - s\bigr) + \max\bigl(0, g + s - \deg F_1\bigr).$$

В частности, если многочлен F неприводим и $s \geqslant -g$, то длина квазипериода не превосходит $\deg \Omega_1 - 2g$.

Доказательство. По теореме 1 для некоторого представления $F = F_1 \cdot F_2$, $F_1, F_2 \in K[X]$, $\deg F_2 > 0$, непрерывные дроби элементов

$$\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}, \qquad \frac{\sqrt{F}}{X^s}, \qquad \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}$$

периодичны, причем по лемме 1 их периоды совпадают с точностью до сдвига и домножения на некоторую постоянную. Следовательно, в каждом из трех квазипериодов найдутся неполные частные каждой положительной степени из следующих значений

$$-v_\infty^-\left(\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}\right), \qquad -v_\infty^-\left(\frac{\sqrt{F}}{X^s}\right), \qquad -v_\infty^-\left(\frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}\right).$$

Значит, в оценке степеней неполных частных (8) степени некоторых трех неполных частных можно оценить более точно значениями

$$\max\bigl(1, g + 1 - s - \deg F_2\bigr), \qquad \max\bigl(1, g + 1 - s\bigr), \qquad \max\bigl(1, g + 1 + s - \deg F_1\bigr).$$

Обозначим

$$\delta = \max\bigl(0, g - s - \deg F_2\bigr) + \max\bigl(0, g - s\bigr) + \max\bigl(0, g + s - \deg F_1\bigr),$$

тогда

$$\deg A \geqslant \deg P_t = \sum_{j=0}^{t} \deg a_j \geqslant \deg P_{n-1} + N + \delta. \tag{9}$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 2, для элемента $\beta = \sqrt{F}/X^s$ получаем

$$N+\delta \leqslant \deg A - \deg P_{n-1} \leqslant \max\bigl(\deg R,\ \deg\Omega_2 + \deg\Lambda_0 - \deg a_0\bigr) \leqslant \\ \leqslant \max\left(\deg\Omega_1,\ \deg\Omega_2 + \frac{1}{2}\left(\deg\Lambda_0 + \deg\Lambda_2\right)\right) = \deg\Omega_1.$$

Теорема 3 доказана. □

В следующей теореме рассматривается базовое поле констант $K = \mathbb{Q}$. Это ограничение существенно для использования теоремы 2 [26].

Теорема 4. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$ содержит фундаментальную S_∞-единицу степени m, где $S_\infty = \{v_\infty^-, v_\infty^+\}$. Если длина квазипериода непрерывной дроби $\sqrt{F}/X^s$ конечна, то она не превосходит $6m - 2g$, а длина периода не превосходит $12m - 4g$.*

Доказательство. По теореме 2 [27] квазипериодичность непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^s$ эквивалентна наличию решения $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения (5), где $D = FX^{2s}$, $K = \mathbb{Q}$. Пусть непрерывной дробь элемента $\sqrt{F}/X^s$ квазипериодическая, тогда найдутся $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$ минимальной степени такие, что $\Omega_2 \neq 0$ и справедливо (5). Наличие квазипериодических элементов в поле $\mathcal{L}$ влечет периодичность элемента $\sqrt{F}$, поэтому существуют $\mu_1, \mu_2 \in K[X]$ такие, что $\mu_1^2 - F\mu_2^2 \in K^*$ и $\mu_1 + \mu_2\sqrt{F}$ есть фундаментальная S_∞-единица степени m. Обозначим

$$\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{F} = (\mu_1 + \mu_2\sqrt{F})^n.$$

Тогда для квазипериодичности непрерывной дробь элемента $\sqrt{F}/X^s$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $n \in \mathbb{N}$ было выполнено $X^s \mid \mu_2^{(n)}$, или, равносильно, $X^s\Omega_2 = c\mu_2^{(n)}$ для некоторой постоянной $c \in K^*$. Из теоремы 2 [26] следует, что, если $X^s \nmid \mu_2$, то справедливо одно из соотношений $X^s \mid \mu_1^{(2)}$ или $X^s \mid \mu_1^{(3)}$ или $X^s \mid \mu_2^{(3)}$, причем, если $X^s \mid \mu_1^{(2)}$, то $X^s \mid \mu_2^{(4)}$, а если $X^s \mid \mu_1^{(3)}$, то $X^s \mid \mu_2^{(6)}$. Итак, $X^s\Omega_2 = c\mu_2^{(n)}$ для некоторого $n \leqslant 6$, следовательно, $\deg\Omega_1 \leqslant 6m$. По теореме 3 заключаем, что длина квазипериода непрерывной дроби $\sqrt{F}/X^s$ не превосходит $6m - 2g$.

Теорема 4 доказана. □

В статье [26] приведен пример эллиптического поля $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 4$, в котором есть фундаментальная S_∞-единица степени 4, квазипериод непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X$ совпадает с периодом и равен 20, квазипериод непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^2$ равен 19, а период — 38. Таким образом, для многочленов F четной степени длины периодов непрерывных дробей вида $\sqrt{F}/X^s$ могут значительно превышать степень фундаментальной S_∞-единицы.

В следующей теореме найдены оценки длин периодов непрерывных дробей элементов поля L, связанных с конечными линейными нормированиями.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ — свободный от квадратов многочлен, и $h \in \mathbb{Q}[x]$ — линейный многочлен. Пусть $u_h = h^{-m}(\mu_1 + \mu_2\sqrt{f})$ — фундаментальная S_h-единица в поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$.*

Для $\deg f = 2g+1$ непрерывная дробь $\sqrt{f}/h^{s_0}$ квазипериодическая тогда и только тогда, когда $s_0 \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенству $|s_0 - g - 1/2| \leqslant \deg\mu_1 - \deg\mu_2 - g$, причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь $\sqrt{f}/h^{s_0}$ является периодической, длина квазипериода не превосходит $m - 2g$, длина периода не превосходит $2m - 4g$.

Для $\deg f = 2g+2$ положим

$$u_h^n = h^{-nm}(\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{f}), \quad r_n = \left|\deg\mu_1^{(n)} - \deg\mu_2^{(n)} - g - 1\right|.$$

1. *Если $r_1 \neq 0$, то элементы вида $\sqrt{f}/h^{s_0}$ имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g+1-r_1 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_1$, причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь $\sqrt{f}/h^{s_0}$ является периодической, длина квазипериода не превосходит $m-2g$, длина периода не превосходит $2m-4g$.*

2. *Если $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$, то элементы вида $\sqrt{f}/h^{s_0}$ имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g+1-r_2 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_2$, причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь $\sqrt{f}/h^{s_0}$ является периодической, длина квазипериода не превосходит $4m-2g$, длина периода не превосходит $8m-4g$.*

3. *Если $r_1 = r_2 = 0$, то элементы вида $\sqrt{f}/h^{s_0}$ имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g+1-r_3 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_3$, причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь $\sqrt{f}/h^{s_0}$ является периодической, длина квазипериода не превосходит $6m-2g$. длина периода не превосходит $12m-4g$.*

Доказательство. Следует из предложения 4 [18], теоремы 2 [26] и теорем 3, 4. $\square$

4. Заключение

Отметим, что теорема 5 уточняет оценку длины квазипериода в статье [13] для элементов вида $\sqrt{F}-M$, $\deg M \leqslant g+1$, $\deg(F-M^2) \leqslant g+1$, $g \geqslant 2$, для непрерывных дробей в $K((1/X))$ или для элементов вида $(\sqrt{f}-V)/h^{g+1}$, где $h^{g+1} \mid f-V^2$, $\deg V \leqslant g+1$, $g \geqslant 2$, для непрерывных дробей в $K((h))$.

Приведем несколько примеров, показывающих эффективность и неулучшаемость найденных в теоремах 3 и 5 оценок.

Пример 1. *Рассмортим $F = X^4 + 20X^3 + 124X^2 + 144X - 432$. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Bigl[X^2+10X+12;\ \overline{-\frac{X}{48}-\frac{1}{12},\ 4X+16,}$$
$$\overline{-\frac{X^2}{96}-\frac{5X}{48}-\frac{1}{8},\ 4X+16,\ -\frac{X}{48}-\frac{1}{12},\ 2X^2+20X+24}\Bigr].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-1/96$, длина периода равна 6. В поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица степени 4, порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ равен 4. Заметим, что $\operatorname{tc}(p_3) \neq 0$, $\operatorname{tc}(q_3) \neq 0$, поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем $r_1 = 0$, но $\operatorname{tc}(p_3)^2 + 3\operatorname{tc}(F)\operatorname{tc}(q_3)^2 = 0$, поэтому $\operatorname{tc}\left(\mu_1^{(3)}\right) = 0$, следовательно, непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X$ периодическая

$$\sqrt{F}/X = \Bigl[X+10;\ \overline{\frac{X}{12}+\frac{1}{3},\ \frac{X^2}{4}+X-3,\ -\frac{X}{6}-\frac{5}{3},\ -\frac{X}{2}-1,}$$
$$\overline{\frac{X}{2}+4,\ \frac{X}{6}-\frac{1}{3},\ -\frac{X}{2}-5,\ -\frac{X}{12}-\frac{1}{12},\ 4X+28,}$$
$$\overline{\frac{X^3}{384}+\frac{5X^2}{192}+\frac{X}{32}-\frac{1}{8},\ 4X+28,\ -\frac{X}{12}-\frac{1}{12},\ -\frac{X}{2}-5,\ \frac{X}{6}-\frac{1}{3},}$$
$$\overline{\frac{X}{2}+4,\ -\frac{X}{2}-1,\ -\frac{X}{6}-\frac{5}{3},\ \frac{X^2}{4}+X-3,\ \frac{X}{12}+\frac{1}{3},\ 2X+20}\Bigr].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $20 < 6m-2g$, как в теореме 3 для неприводимого многочлена F.

Пример 2. *Рассмортим* $F = X^4 + 36X^3 + 420X^2 + 1472X - 256$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Bigg[X^2 + 18X + 48;\ \overline{-\frac{X}{128} - \frac{1}{16},\ 4X + 32,}$$
$$\overline{-\frac{X^2}{256} - \frac{9X}{128} - \frac{3}{16},\ 4X + 32,\ -\frac{X}{128} - \frac{1}{16},\ 2X^2 + 36X + 96}\Bigg].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-1/256$, *длина периода равна 6. В поле* $\mathcal{L}$ *существует фундаментальная единица степени* 4, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 4. *Заметим, что* $\operatorname{tc}(p_3) \neq 0$, $\operatorname{tc}(q_3) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем* $r_1 = 0$, *но* $\operatorname{tc}(p_3)^2 + \operatorname{tc}(F)\operatorname{tc}(q_3)^2 = 0$, *поэтому* $\operatorname{tc}\left(\mu_1^{(2)}\right) = 0$, *следовательно, непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}/X$ *периодическая*

$$\sqrt{F}/X = \Bigg[X + 18;\ \overline{\frac{X}{48} + \frac{1}{18},\ -\frac{27X}{8} - \frac{153}{4},\ \frac{2X}{81} + \frac{4}{81},\ \frac{81X}{64} + \frac{729}{32},}$$
$$\overline{\frac{4X}{81} + \frac{16}{81},\ -\frac{81X}{64} - \frac{243}{16},\ -\frac{X^3}{648} - \frac{X^2}{36} - \frac{2X}{27} + \frac{16}{81},\ -\frac{81X}{64} - \frac{243}{16},}$$
$$\overline{\frac{4X}{81} + \frac{16}{81},\ \frac{81X}{64} + \frac{729}{32},\ \frac{2X}{81} + \frac{4}{81},\ -\frac{27X}{8} - \frac{153}{4},\ \frac{X}{48} + \frac{1}{18},\ 2X + 36}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $14 = 4m - 2g$, *как в теореме 3 для неприводимого многочлена* F.

Пример 3. *Рассмортим* $F = (X + 6)\left(X^3 - 2X^2 + 32X - 32\right)$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Bigg[X^2 + 2X + 8;\ \overline{\frac{X}{64} + \frac{1}{16},\ 4X - 16,\ \frac{X}{64} + \frac{1}{16},\ 2X^2 + 4X + 16}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 4. В поле $\mathcal{L}$ *существует фундаментальная единица степени* 5, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 5. *Заметим, что* $\operatorname{tc}(p_3) \neq 0$, $\operatorname{tc}(q_3) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем* $r_1 = 0$, *но* $3\operatorname{tc}(p_3)^2 + \operatorname{tc}(F)\operatorname{tc}(q_3)^2 = 0$, *поэтому* $\operatorname{tc}\left(\mu_2^{(3)}\right) = 0$, *следовательно, непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}/X$ *периодическая*

$$\sqrt{F}/X = \Bigg[X + 2;\ \overline{\frac{X}{8} - 1,\ \frac{X}{12} + \frac{8}{9},\ -\frac{27X}{8} - \frac{45}{4},\ -\frac{2X}{81} + \frac{4}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X}{32} - \frac{81}{16},\ \frac{4X}{81} + \frac{16}{81},\ -\frac{81X^2}{256} + \frac{81X}{64} - \frac{81}{8},\ \frac{4X}{81} + \frac{16}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X}{32} - \frac{81}{16},\ -\frac{2X}{81} + \frac{4}{81},\ -\frac{27X}{8} - \frac{45}{4},\ \frac{X}{12} + \frac{8}{9},\ \frac{X}{8} - 1,\ 2X + 4}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 14, как в теореме 3.

Пример 4. *Рассмортим* $F = (X + 6)\left(X^3 + 30X^2 + 224X - 32\right)$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Bigg[X^2 + 18X + 40;\ \overline{-\frac{X}{64} - \frac{1}{16},}$$
$$\overline{4X + 48,\ -\frac{X}{64} - \frac{1}{16},\ 2X^2 + 36X + 80}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 4. В поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица степени 5, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 5. *Заметим, что* $\mathrm{tc}\,(p_4) \neq 0$, $\mathrm{tc}\,(q_4) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем* $r_1 = 0$, *но* $3\,\mathrm{tc}\,(p_4)^2 + \mathrm{tc}\,(F)\,\mathrm{tc}\,(q_4)^2 = 0$, *поэтому* $\mathrm{tc}\left(\mu_2^{(3)}\right) = 0$, *следовательно, непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}/X$ *периодическая*

$$\sqrt{F}/X = \Bigg[X+18; \overline{\frac{X}{40}+\frac{1}{25}, -\frac{125X}{12}-\frac{850}{9}, \frac{27X}{10000}+\frac{9}{400},}$$
$$\overline{-\frac{10000X}{81}-\frac{10000}{81}, -\frac{81X}{320000}-\frac{729}{160000}, -\frac{40000X}{81}-\frac{160000}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X^2}{2560000}-\frac{243X}{640000}+\frac{81}{80000}, -\frac{40000X}{81}-\frac{160000}{81}, -\frac{81X}{320000}-\frac{729}{160000},}$$
$$\overline{-\frac{10000X}{81}-\frac{10000}{81}, \frac{27X}{10000}+\frac{9}{400}, -\frac{125X}{12}-\frac{850}{9}, \frac{X}{40}+\frac{1}{25}, 2X+36}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 14, *как в теореме 3. Этот пример показывает, что при сравнительно небольших коэффициентах многочлена F коэффициенты неполных частных периодической непрерывной дроби могут быть достаточно велики.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H. Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\ \mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 185-221.

2. Chebychev P. L. Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$ // J. Math. Pures Appl. 1864. Vol. 2, №9. P. 225-246.

3. Adams W. W., Razar M. J. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41, №3. P. 481-498.

4. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.

5. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // Acta Arith. 1960/1961. Vol. 6. P. 393-413.

6. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II // Acta Arith. 1961/1962. Vol. 7. P. 287-298.

7. Mazur B. Rational isogenies of prime degree // Ivent. Math. 1978. Vol. 44, №2. P. 129-162.

8. Kubert D. S. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. (3). 1976. Vol. 33, №2. P. 193-237.

9. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. Periodic continued fractions in elliptic function fields // International Algorithmic Number Theory Symposium. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. P. 390-404.

10. Pappalardi F., Van der Poorten A. J. Pseudo-elliptic integrals, units, and torsion // Journal of the Australian Mathematical Society. 2004. Vol. 79, №3. P. 69-78.

11. Scherr Z. L. Rational polynomial pell equations // A dissertation submitted in partial fullment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics) in The University of Michigan. 2013.

12. Sadek M. Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields // Journal of Symbolic Computation. 2016. Vol. 76. P. 200-218.

13. Berry T. G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields Arch. Math. 1990. Vol. 55. P. 259-266.

14. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200, №1. С. 15-44.

15. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, №6. С. 640-644.

16. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, №5. С. 537-541.

17. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354-376.

18. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.

19. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №3. С. 279-294.

20. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №5. С. 540-544.

21. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, №2. С. 133-136.

22. Петрунин М. М., О периодичности квадратных корней в гиперэллиптических полях, ДАН. 2017. Т. 474, №2. С. 155-158.

23. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, №5. С. 181-182.

24. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470, №3. С. 260-265.

25. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №4. С. 208-220.

26. Платонов В. П., Федоров Г. В., Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №1. С. 246-258.

27. Schmidt W. M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Arch. Math. 2000. Vol. 95, №2. P. 139-166.

REFERENCES

1. Abel N. H. 1826, “Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\,\mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind”, *J. Reine Angew. Math.*, no. 1, pp. 185-221.

2. Chebychev P. L. 1864, “Sur l’integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$”, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, no. 9, pp. 225-246.

3. Adams W. W., Razar M. J. 1980, “Multiples of points on elliptic curves and continued fractions”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 3, pp. 481-498.

4. Platonov, V. P. 2014, “Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field”, *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1-34.

5. Schinzel A. 1960/1961, “On some problems of the arithmetical theory of continued fractions”, *Acta Arith.*, vol. 6, pp. 393-413.

6. Schinzel A. 1961/1962, “On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II”, *Acta Arith.*, vol. 7, pp. 287-298.

7. Mazur B. 1978, “Rational isogenies of prime degree”, *Ivent. Math.*, vol. 44, no. 2, pp. 129-162.

8. Kubert, D. S. 1976, “Universal bounds on the torsion of elliptic curves” *Proc. London Math.Soc. (3)*, vol. 33, no. 2, pp. 193-237.

9. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. 2002, “Periodic continued fractions in elliptic function fields”, *International Algorithmic Number Theory Symposium.* – Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 390-404.

10. Pappalardi F., Van der Poorten A. J. 2004, “Pseudo-elliptic integrals, units, and torsion”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 79, no.3, pp. 69-78.

11. Scherr Z. L. 2013, “Rational polynomial pell equations”, *A dissertation submitted in partial fullment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics) in The University of Michigan.*

12. Sadek M. 2016, “Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields”, *Journal of Symbolic Computation*, vol. 76, pp. 200-218.

13. Berry, T. G. 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259-266.

14. Benyash-Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587-1615.

15. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V. 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692-696.

16. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2015, “S-Units and Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields”, *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752-756.

17. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2018, “Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 302, pp. 336-357.

18. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2018, “On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519-559.

19. Fedorov, G. V. 2018, “Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3. (In Russ.)

20. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 254-258.

21. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in elliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 96, no. 1, pp. 332-335.

22. Petrunin, M. M. 2017, “S-units and periodicity of square root in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 222-225.

23. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-Units and periodicity in quadratic function fields”, *Russian Math. Surveys*, vol. 71, no. 5, pp. 973-975.

24. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 532-537.

25. Zhgoon V. S. 2017, “On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208-220. (In Russ.)

26. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2019, “The criterion of the periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 246-258. (In Russ.)

27. Schmidt W. M. 2000, “On continued fractions and diophantine approximation in power series fields”, *Arch. Math.*, vol. 95, no. 2, pp. 139-166.

Получено 20.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-336-349

Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2

М. Ш. Шабозов (г. Душанбе)

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра функционального анализа и дифференциальных уравнений, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: shabozov@mail.ru

Abstract

Статья состоит из двух частей. В первой части излагается обзор результатов о наилучшего приближения периодических дифференцируемый функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Приведены точные неравенства между величиною наилучшем приближении функции и усредненными с заданным весом значениями модулей непрерывности m-го порядка r-той производной функции, а также их аналоги для некоторых модификаций модуля непрерывности m-го порядка.

Во второй части статьи приведены некоторые новые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для характеристики гладкости, введенной К. В. Руновским [2] и более подробно изученной С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной [14]. Получен точный результат об одновременном приближении функции и ее последовательных производных для некоторых классов функций, задаваемых указанной характеристикой гладкости.

Ключевые слова: аппроксимации функций, тригонометрический полином, модуль непрерывности, обобщенный модуль непрерывности, неравенства Джексона-Стечкина, одновременное приближение функции и ее производных.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
М. Ш. Шабозов. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 336–349.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-336-349

Some problems of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2

M. Sh. Shabozov (Dushanbe)

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of functional analysis and differential equations, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru

Abstract

The paper is consists from two parts. In first part summarizes the review of findings on best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in Hilbert space $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. The sharp inequalities between the best approximation and averaged with given weights modulus of continuity of mth order values rth derivatives of functions and analogues for some modified modulus of continuity presented.

In second part, some new sharp Jackson-Stechkin type inequalities for characteristics of smoothness studied by K. V. Runovski and more detail by S. B. Vakarchuk and V. I. Zabutnaya are proposed. The sharp result on joint approximation of function and successive derivatives for some classes of functions defined by modulus of smoothness obtained.

Keywords: approximation of function, the trigonometric polynomial, moduli of continuity, the averaged moduli of continuity, Jackson-Stechkin type inequality, join approximation of function and derivatives.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
M. Sh. Shabozov, 2019, "Some problems of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 336–349.

Посвящается 60-летию академика АН Республики Таджикистан З. Х. Рахмонова

1. Введение

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время, наряду с классическим определением характеристики гладкости модуля непрерывности, часто используют различные её модификации (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6] и приведенную там литературу). Введение таких модификаций модуля непрерывности позволяет сформулировать естественные аналоги задач теории аппроксимации и получить результаты, раскрывающие их содержательную сущность. Так, например, для определения эффективных характеристик гладкости и выявления структурных свойств функций в работах К. В. Руновского [2], Н. П. Пустовойтова [7], В. А. Абилова [8] и других рассматривались различные способы осреднения нормы конечных разностей m-го порядка и получены конструктивные характеристики исследуемых классов функций в терминах введённых обобщённых модулей непрерывности.

В случае аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами, например в ряде работ [8, 9, 10, 11, 12], вместо оператора сдвига $T_h(f) := f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$ была использована функция Стеклова $S_h(f)$, простейшие свойства которой приведены в монографии [13, с.98-101].

В этой статье мы продолжим указанную тематику. Статья организована следующим образом. В разделе 1 приведём необходимые определения, постановки задач и краткий обзор результатов в виде точных неравенств между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими модули непрерывности m-го порядка с заданным весом в пространстве L_2.

Указывается на их обобщений для некоторых модификаций модулей непрерывности высших порядков.

В разделе 2 приводятся новые точные неравенства, связывающие величины наилучших приближений самой функции и её последовательных производных с интегралами, содержащими усреднённые с весом характеристики гладкости функции $f \in L_2$ введённой, К. В. Руновским [2] и более подробно изученной С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной [14].

2. Определения, постановки задач, смежные результаты

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси; $\mathbb{R}$–множество вещественных чисел. Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических вещественных функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathcal{P}_{2n-1}$ — подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),$$

величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{P}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f)+b_k^2(f)$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус — коэффициенты Фурье.

Модуль непрерывности и некоторые его модификации. Модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ как обычно определим равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\| : |h| \le t\}, \tag{2}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x + kh)$$

— разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Под $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)} = L_2)$ понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций из L_2, наряду с (1), используют усреднённую характеристику гладкости следующего вида (см., например, [1, 2])

$$\Omega_m(f, t) := \left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, h_2, \cdots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$.

Усреднённая характеристики гладкости вида (3) использовалась при изучении некоторых конструктивных свойств функции $f \in L_p(0 < p < 1)$ К. В. Руновским [2] и Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым, П. Освальдом [15].

Выше отметили, что в работах [8, 9, 10, 11, 12] при аппроксимации функции $f \in L_2$ вместо обычного оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h), x, h \in \mathbb{R}$ была использована функция (оператор) Стеклова $S_h(f)$. Опишем более подробно эту схему.

Для произвольной функции $f \in L_2$ вводим в рассмотрение функцию Стеклова

$$S_h(f;x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$$

и рекуррентно полагаем $S_{h,k}(f) := S_h(S_{h,k-1}(f))$, $k \in \mathbb{N}$, $S_{h,0}(f) \equiv f$. Определим конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, равенствами

$$\tilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\tilde{\Delta}_h^m(f,x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f,\cdot),x) = (S_h - \mathbb{I})^m(f,x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_{h,k}(f,x), \quad k = 2,3,\cdots,$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в L_2. Равенством

$$\tilde{\Omega}_m(f,t) := \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^m(f,\cdot)\| : 0 < h \le t\} \tag{4}$$

определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Об оптимизации неравенств типа Джексона-Стечкина. Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из наиболее важных является задача вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона—Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{X} n^{-r} U_m(f^{(r)}, \tau/n); \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tau > 0, \tag{5}$$

где U_m — некоторая характеристика гладкости функции $f \in L_2^{(r)}(L_2^{(0)} = L_2)$, например, ω_m, Ω_m или $\tilde{\Omega}_m$; $\mathcal{X}$ — некоторая константа. При решении задач теории аппроксимации в L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа (5), рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных $\mathcal{X}$. Условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, неэквивалентную нулю на этом же отрезке. При вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} = L_2$) в соотношениях общего характера имеется ввиду, что $f \ne const$. Для компактного изложения полученных ранее результатов введём следующее обозначение

$$\mathcal{X}_{n,r,p}(U_m;q,h) = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h U_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}} : f \in L_2^{(r)}\right\}, \tag{6}$$

где $n,r,m \in \mathbb{N}, p \in (0,\infty), q(t)$ — весовая на $[0,h](0 < h \le \pi/n)$ функция.

Величину вида (6) при $U_m \equiv \omega_m$ в разное время изучали:

1) Черных [16]: а) $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1;q,\pi/n)$, где $q(t) = \sin nt$;

б) $\mathcal{X}_{n,0,2}(\omega_m;q,2\pi/n)$, где $q(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;

2) Тайков [17]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1;q,h)$, где $q(t) \equiv 1, 0 < t \le h, 0 < h \le 2\pi/n$;

3) Тайков [18]: $\mathcal{X}_{n,r,1}(\omega_1;q,\pi/n)$, где $q(t) \equiv 1$;

4) Тайков [19]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m;q,h)$, где $q(t) = 1, 0 < t \le h, 0 < h \le \pi/n$;

5) Лигун [20]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m;q,h)$, где $q(t) \ge 0, 0 < t \le \pi/n$;

6) Айнуллоев [21]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m;q,h)$, где $q(t) = \sin^\gamma \beta t, 0 \le t \le h$,
$0 \le \gamma \le 2r-1, r \in \mathbb{N}, \beta > 0, 0 < \beta h \le \pi$;

7) Шалаев [22]: $\mathcal{X}_{n,r,2/m}(\omega_m;q,\pi/n)$, где $q(t) = \sin nt, 0 < t \le \pi/n$;

8) Юссеф [23]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1;q,h)$, где $q(t) = \sin(\pi t/h), 0 < t \le h \le \pi/n$;

9) Вакарчук [24]: $\mathcal{X}_{n,r,2/m}(\omega_m;q,h)$, где $q(t)\equiv 1, 0\le t\le h, 0<h\le 2\pi/n$;

10) Шабозов, Юсупов [25]: $\mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m;q,h)$, где $q(t)\ge 0, 0\le t\le h$,
$0<h\le \pi/n, 1/r\le p\le 2,\ m,r\in\mathbb{N}, r\ge 2$.

11) Shabozov, Yusupov, Temurbekova [29]: $\mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m;q,h)$, где $q(t)\ge 0,\ 0\le t\le h$, $0<h\le\pi/n,\ 1/r\le p\le 2,\ m,r\in\mathbb{R}_+,\ r\ge 2$.

Исследуя вопросы наилучшего приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2, Черных отметил [16], что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$, по-видимому, более естественным является не джексоновский функционал $\omega_1(f,\pi/n)$, а его усреднённое значение, т.е. функционал

$$\mathcal{F}_n(f):=\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\omega_1^2(f,t)\sin nt dt\right)^{1/2}.$$

Эти соображения привели А.А.Лигуна [20] к рассмотрению следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{K}_{n,r}(\omega_m;q,h):=\sup\left\{\frac{E_{n-1}^2(f)}{\displaystyle\int_0^h\omega_m^2(f^{(r)},t)q(t)dt}:f\in L_2^{(r)}\right\},$$

где $m,n\in\mathbb{N}; r\in\mathbb{Z}_+; 0<h\le\pi/n; q(t)\ge 0$ — суммируемая на $[0,h]$ функция. Он доказал, что

$$\left\{B_{n,h}^{r,m}(q)\right\}^{-1}\le\mathcal{K}_{n,r}(\omega_m;q,h)\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}B_{k,h}^{r,m}(q)\right\}^{-1}.$$

Здесь

$$B_{k,h}^{r,m}(q):=2^m k^{2r}\int_0^h(1-\cos kt)^m q(t)dt;\quad k\ge n, k,n\in\mathbb{N}.$$

С целью обобщения результата А. А. Лигуна [20], М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов [25] ввели в рассмотренit экстремальную характеристику вида (6), в которой U_m — есть обычный модуль непрерывности m-го порядка ω_m в L_2, и для $0<p\le 2$ доказали следующие неравенства

$$\left\{A_{n,h,p}^{r,m}(q)\right\}^{-1}\le\mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m;q,h)\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}A_{k,h,p}^{r,m}(q)\right\}^{-1},\tag{7}$$

где

$$A_{k,h,p}^{r,m}(q):=2^{m/2}\left(k^{rp}\int_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}q(t)dt\right)^{1/p},\ k\ge n.$$

Отметим, что при конкретном выборе чисел n,m,r,p и весовой функции $q(t)$ из неравенства (7) вытекают все цитированные выше результаты, приведенные в пунктах 1)-11).

Следует также отметить, что для характеристики гладкости Ω_m и $\tilde{\Omega}_m$ неравенства типа (7) соответственно доказаны в работах [26] и [27]. В [27] результаты [25] обобщены для дробной производной в смысле Вейля [28], а в [29] для модуля непрерывности дробного порядка.

В связи с неравенством (7) возникает естественный вопрос: выяснить условия, при выполнении которых в (7) имеет место соотношения

$$\inf_{n\le k<\infty}A_{k,h,p}^{r,m}(q)=A_{n,h,p}^{r,m}(q).\tag{8}$$

Для некоторых конкретных весовых функций доказательство (8) при $p=2$ имеется в [20]. В общем случае в работе М.Ш.Шабозова и Г. А. Юсупова [25] доказано, что если весовая функция $q \in C^{(1)}[0,h]$ при всех $1/r < p \le 2$, $r \geqslant 1$ и $0 < t \le h$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(rp-1)q(t) - tq'(t) \ge 0, \tag{9}$$

то имеет место соотношение (8). Условие (9) является ограничительным, в том смысле, что множество весовых функций q, для которых выполняется неравенство (8), весьма узко. В [27] нами в случае $U_m = \tilde{\Omega}_m$ найдено точное значение величины (7), во-первых, для всех значений $0 < p \le \infty$, и, во-вторых, без дополнительного предположения, что $q \in C^{(1)}[0,h]$ и удовлетворяет условию (9). При этом характеристика гладкости $\tilde{\Omega}_m$ задаётся дробной производной Вейля [28]. Сформулируем основной результат работы [27].

Теорема [27]. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, 0 < p \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}_+, 0 < h \le 3\pi/(4n)$, q — весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,p}(\tilde{\Omega}_m; q, h) = \left\{ n^{\alpha p} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt \right\}^{-1/p}, \tag{10}$$

где

$$\operatorname{sinc} u := \left\{ \frac{\sin u}{u}, \ \ \textit{если} \ \ u \ne 0; \quad 1, \ \ \textit{если} \ \ u = 0 \right\}.$$

Из этой теоремы вытекают очевидные следствия.

Следствие 1. *В условиях теоремы при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > m$ и $q(t) \equiv 1$ имеет место равенство*

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}(\tilde{\Omega}_m; 1, h) = n^{-\alpha} \left\{ \frac{n}{nh - \mathrm{Si(nh)}} \right\}^m, \tag{11}$$

где $\mathrm{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sinc} u\, du$ – интегральный синус. В частности, при $h = \pi/(2n)$ и $\alpha > m$ из (11) имеем

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}\left(\tilde{\Omega}_m; 1, \frac{\pi}{2n}\right) = n^{-\alpha+m} \left\{ \frac{2}{\pi - 2\mathrm{Si}(\pi/2)} \right\}^m.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ и $q(t) \equiv t$ имеет место равенство*

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}\left(\tilde{\Omega}_m; t, h\right) = n^{-\alpha} \left\{ 2(nh/2)^2 - \sin^2(nh/2) \right\}^{-m} \tag{12}$$

и, в частности, при $h = \pi/(2n)$ из (12) следует

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}\left(\tilde{\Omega}_m; t, \frac{\pi}{2n}\right) = n^{-\alpha} \left\{ \frac{8}{\pi^2 - 4} \right\}^m.$$

3. О некоторых новых результатах

В этом пункте излагаем некоторые новые точные неравенства между наилучшими приближениями функции $f \in L_2$ и усреднённой характеристикой гладкости

$$\Lambda_m(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|^2 dh \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{13}$$

ранее рассмотренной в работах К. В. Руновского [2], С. Б. Вакарчука и В. И. Забутная [14].

Полагаем

$$\mathcal{J}_{k,m}(u):=\left\{\frac{1}{u}\int_0^u(1-\cos k\tau)^m d\tau\right\}^{1/2}, \tag{14}$$

где $k,m\in\mathbb{N}, u>0$. Очевидно, что $\lim\limits_{u\to 0+}\mathcal{J}_{k,m}(u)=0$, и при всех $u>0$ имеет место равенство

$$\mathcal{J}_{k,m}(u)=\mathcal{J}_{1,m}(ku). \tag{15}$$

Пусть $f\in L_2^{(r)}, r\in\mathbb{N}$. Тогда легко проверить, что для любого $s\in\mathbb{Z}_+$, $(0\le s\le r)$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f^{(s)})=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{16}$$

и поскольку

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)})\|^2=2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m, \tag{17}$$

то, учитывая равенства (1), (14) и (15) для любого $t\in\mathbb{R}_+$ исходя из (13), с учётом равенства (17), запишем

$$\Lambda_m(f^{(r)},t)=\left\{\frac{2^m}{t}\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m dh\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\mathcal{J}_{1,m}^2(kt)\right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Теорема 1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{Z}_+, r\ge s$ и $0<t\le 2\pi$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)},t/n)}=\frac{1}{2^{m/2}\mathcal{J}_{1,m}(t)}. \tag{19}$$

Доказательство. В [14] доказано, что при любых $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<t\le 2\pi$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r}E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)},t/n)}=\frac{1}{2^{m/2}\mathcal{J}_{1,m}(t)}. \tag{20}$$

В левой части равенства (19) полагаем $f^{(s)}\equiv g$. Тогда получаем $f^{(r)}\equiv g^{(r-s)}$, а это означает, что если $f\in L_2^{(r)}$, то $g\in L_2^{(r-s)}$, а потому учитывая равенство (20) запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)},t/n)}=\sup_{g\in L_2^{(r-s)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(g)}{\Lambda_m(g^{(r-s)},t/n)}=\frac{1}{2^{m/2}\mathcal{J}_{1,m}(t)},$$

откуда и следует равенство (19). Теорема 1 доказана.

Следствие 3. *В условиях теоремы 1 при $t=\pi$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)},\pi/n)}=\frac{1}{2^{m/2}\mathcal{J}_{1,m}(\pi)}=\frac{1}{2^{m/2}}\cdot\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}.$$

Исходя из формулы (13), введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$M_{n,r,s,p}(\Lambda_m;q,h)=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{21}$$

где $m, n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 2\pi/n$. Отметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Lambda_m\|_p$ в знаменателе дроби в правой части (21) определён соотношением

$$\|\Lambda_m\|_p := \begin{cases} \displaystyle\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)q(t)dt, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t\leq h} \Lambda_m(f^{(r)}, t), & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1 \leq p < \infty$ является нормой. Имеет место следующая общая

Теорема 2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 2\pi/n$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$M_{n,r,s,p}(\Lambda_m; q, h) = 2^{-m/2}\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{22}$$

Доказательство. Сначала докажем равенство (22) для случая, когда $s = 0$. В этом случае в [14] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2} n^r \mathcal{J}_{1,m}(nt)E_{n-1}(f). \tag{23}$$

Возведя обе части неравенства (23) в степень $p(0 < p \leq \infty)$, умножим на вес q и интегрируем по отрезку $[0, h](0 < h \leq 2\pi/n)$. В итоге получим неравенство

$$\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)q(t)dt\right)^{1/p} \geq 2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{1/p},$$

откуда и следует, что для произвольной $f \in L_2^{(r)}$

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{2^{m/2}\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{24}$$

Из (24) для величины (21) получаем оценку сверху

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) \leq 2^{-m/2}\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{25}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Lambda_m(f_0^{(r)}, t) = 2^{m/2} n^r \mathcal{J}_{1,m}(nt). \tag{26}$$

Пользуясь равенствами (26), запишем оценку снизу величины (21):

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f_0^{(r)}, t)q(t)dt\right)^{1/2}} = 2^{-m/2}\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{27}$$

Сопоставляя оценку сверху (24) с оценкой снизу (27) получаем

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) = 2^{-m/2}\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p}, \tag{28}$$

и этим равенство (22) доказано при $s=0$. В общем случае при любых $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s\geq 0$, учитывая (28), запишем

$$M_{n,r,s,p}(\Lambda_m;q,h)=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/2}}=$$

$$=\sup_{g\in L_2^{(r-s)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(g)}{\left(\int_0^h\Lambda_m^p(g^{(r-s)},t)q(t)dt\right)^{1/2}}=2^{-m/2}\left(\int_0^h\mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 4. *Пусть $m=1$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, q — весовая функция на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда при любом $n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Lambda_1^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\int_0^h(1-\operatorname{sinc}t)^{p/2}q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{29}$$

Отметим, что равенство (29) при $s=0$ и $0<p\leq 2$ недавно получено в [14]. Из (22), в частности при $p=2$ и $q(t)=1$, имеем:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h\Lambda_1^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-\operatorname{Si}(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Для заданных $h\in\mathbb{R}_+, m,r\in\mathbb{N}, 0<p\leq\infty$ и q — весовой функции на $[0,h]$, обозначим через $W_{p,m}^{(r)}(q,h):=W_p^{(r)}(\Lambda_m;q,h)$ класс функции $f\in L_2^{(r)}$, для которых

$$\int_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\leq 1.$$

Требуется для любого $s\in\mathbb{Z}_+, 0\leq s\leq r$ найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q,h)):=\sup\{E_{n-1}(f^{(s)}):f\in W_{p,m}^{(r)}(q,h)\}. \tag{30}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{Z}_+, r\geq s, 0<p\leq\infty, 0<h\leq 2\pi/n$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q,h))=2^{-m/2}n^{-(r-s)}\left(\int_0^h\mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{31}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (24) для любой функции $f\in L_2^{(r)}$ при любых $r\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{Z}_+, r\geq s, 0<p\leq\infty, 0<h\leq 2\pi/n$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})\leq\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\frac{\left(\int_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}{2^{m/2}\left(\int_0^h\mathcal{J}_{1,m}^p(nt)q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{32}$$

Из (32) для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{p,m}(q,h)$ имеем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \le \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{1/p}},$$

откуда для величины (30) получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}_{p,m}(q,h)) \le \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{33}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу величины (30) введём в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{2^{-m/2}}{n^r} \left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{-1/p} \sin nx.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ имеем:

$$g_0^{(s)}(x) = \frac{2^{-m/2}}{n^{r-s}} \left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{-1/p} \sin\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right),$$

откуда в силу равенств (16) и (18) получаем:

$$E_{n-1}(g_0^{(s)}) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{34}$$

$$\Lambda_m(g_0^{(r)}, t) = \frac{\mathcal{J}_{1,m}(nt)}{\left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{1/p}},$$

$$\int_0^h \Lambda^p_m(g_0^{(r)}, t) q(t) dt = 1. \tag{35}$$

Равенство (35) означает, что функция $g_0 \in W^{(r)}_{p,m}(q,h)$, а потому пользуясь равенством (28), запишем оценку снизу указанной величины

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}_{p,m}(q,h)) \ge E_{n-1}(g_0^{(s)}) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}^p_{1,m}(nt) q(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{36}$$

Требуемое равенство (31) вытекает из сравнения оценки сверху (33) с оценкой снизу (36), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Следствие 5. *Пусть $m = 1, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \ge s, 0 < p \le \infty$, $0 < h \le 2\pi/n$, q — весовая на $[0,h]$ функция. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}_{p,1}(q,h)) = \frac{n^{-(r-s)}}{\sqrt{2}\left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} q(t) dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, в частности, при $p = 2, q \equiv 1$ получаем

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}_{2,1}(1,h)) = \left\{\frac{n}{2(nh - \operatorname{Si}(nh))}\right\}^{1/2} n^{-(r-s)}.$$

4. Заключение

В первой части статьи приводится краткий обзор результатов о наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Во второй части излагаются новые точные результаты между наилучшим приближением и интегралами, содержащими специальные характеристики гладкости функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987. (Springer Ser. Comput. Math.; vol.9). doi:10.1007/978-1-4612-4778-4. 227p.

2. Руновский К. В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, (0 < p < 1)$ // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 81-102.

3. Васильев С. Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, по рожденными произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 11-14.

4. Козко А. И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73. № 5. С. 783-788.

5. Иванов А. В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338-348.

6. Потапов М. К. О свойствах и о применении в теории приближений одного свойства операторов обобщенного сдвига // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 412-426.

7. Пустовойтов Н.П. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 10. С. 95-108.

8. Абилов В. А., Абилова Ф. В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 803-811.

9. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Неравенства типа Джексона—Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92. № 4. С. 497-514.

10. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 6. С. 908-917.

11. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Точные константы в нераенствах типа Джексона и точные значения поперечников некотрых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52. № 6. С. 1414-1427.

12. Тухлиев К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в L_2 // Труды Института математики и механики, УрО РАН. 2016. Т. 22. № 4. С. 284-294.

13. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. - М.: Наука, 1976, 320 с.

14. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Неравества между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 215-238.

15. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p(0 < p < 1)$ // Мат. сб. 1975. Т. 98(140). № 3(11). С. 395-415.

16. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513-522.

17. Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433-438.

18. Тайков Л. В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. 1977. Т. 22. № 4. С. 535-542.

19. Тайков Л. В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т. 25. № 2. С. 217-223.

20. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24. № 6. С. 785-792.

21. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т. 28. № 6. С. 309-313.

22. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 1. С. 125-129.

23. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2, *Применение функционального анализа в теории приближений* // Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т. Калини. 1988. С. 100-114.

24. Вакарчук С. Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 334-345.

25. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90. № 5. С. 764-775.

26. Шабозов М. Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенство типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России. 2013. Т. 451. № 6. С. 625-628.

27. Шабозов М. Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 255-264.

28. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich. 1917. Vol. 62. P. 296-302.

29. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. N-widths of certaing function classes defind by the modulus of continuity // J. of Approximation Theory. 2017. V. 2015. P. 145-162.

REFERENCES

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987.

2. Runovskiy K. V., 1995, “On approximation by families of linear polynomial operators in $L_p, (0 < p < 1)$ spaces”, Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics, vol.82, № 2.

3. Vasilev S. N., 2002, “Sharp Jackson-Stechkin inequality in L2 with the modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients” Dokl. Math., vol.66, № 1, pp.5-8.

4. Kozko A. I., Rozhdestvenskiy A. V. 2003, “On Jackson’s inequality with a generalized modulus of continuity”, Mat. Zametki, vol.73, № 5, pp.783–788.

5. Ivanov A. V., Ivanov V. I. 2013, “Optimal arguments in Jackson’s inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$”, Math. Notes, vol.94, № 3-4, pp.320–329.

6. Potapov M. K., 2001, “On the properties and application in approximation theory of a family of generalized shift operators”, Math. Notes, vol.69, № 3-4, pp.373–386.

7. Pustovoytov N. P., 1997, “An estimate for the best approximations of periodic functions by trigonometric polynomials in terms of averaged differences, and the multidimensional Jackson theorem” Sb. Math. vol.188, № 10, pp.1507–1520.

8. Abilov V. A., Abilova F. V., 2004, “Some problems of the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$”, Math. Notes, vol.76, № 5-6, pp.749–757.

9. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I., 2012, “Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2”, Math. Notes, vol.92, № 3-4, pp.458-472.

10. Shabozov M. Sh., Tukhliev K., 2013, “Best polynomial approximations and the widths of function classes in L_2”, Math. Notes, vol.94, № 5-6, pp.930–937.

11. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., 2011, “Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2”, Sib. Math. J., vol.52, № 6, pp.1124–1136.

12. Tukhliev K., 2016, “Best approximations and widths of some convolution classes in L_2” Tr. Inst. Mat. Mekh., vol.22, № 4, pp.284–294.

13. Korneichuk N.P. Extremal problems in theory of approximation. Moscow, 1976.

14. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I., 2016, “Inequalities between best polynomial approximations and some smoothness characteristics in the space L_2 and widths of classes of functions” Math. Notes, vol.99, № 1-2, pp.222–242.

15. Storojenko E. A., Krotov V. G., Osvald P., 1975, “Direct and inverse theorems of Jackson type in the spaces $L^p, 0 < p < 1$”, Mat. Sb. (N.S.), vol.98(140), № 3(11), pp.395–415.

16. Chernih N. I., 1967, “The best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2”, Mat. Zametki, 2, pp.513–522.

17. Taykov L. V., 1976, “Inequalities containing best approximations, and the modulus of continuity of functions in L_2”, Mat. Zametki, vol.20, № 3, pp.433–438.

18. Taykov L. V., 1977, “Best approximations of differentiable functions in the metric of the space L_2” Mat. Zametki, vol.22, № 4, pp.535–542.

19. Taykov L. V., 1979, “Structural and constructive characteristics of functions from L_2”, Mat. Zametki, vol.25, № 2, pp.217–223.

20. Ligun A. A., 1978, "Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in the space L_2", Mat. Zametki, vol.24, № 6, pp.785–792.

21. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т. 28. № 6. С. 309-313.

22. Shalaev V. V., 1991, "Widths in L_2 of classes of differentiable functions, defined by higher-order moduli of continuity", Ukrainian Math. J., vol. 43, issue 1, pp.104-107.

23. Yussef Kh., 1988, "On best approximation of functions and values of widths of classes of functions in L_2" / Application of functional analyses in theory of approximation // Proceeding of Kalinskiy state university, pp.100-114.

24. Vakarchuk S. B., 2001, "On the best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π-periodic functions and of the exact values of their n-widths", Math. Notes, vol.70, № 3-4, pp.300–310.

25. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., 2011, "Best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π-periodic functions and the exact values of their widths", Math. Notes, vol.90, № 5-6, pp.748–757.

26. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I., 2013, "Sharp inequalities of Jackson-Stechkin type for periodic functions in L_2 and values of widths of classes of functions", Dokl. RAN, vol.451, № 6, pp.625-628.

27. Shabozov M. Sh., Shabozova A. A., 2019, "Some sharp inequalities of Jackson-Stechkin type for periodic differentiable functions in Weyl sense in L_2", Tr. Inst. Mat. Mekh., vol.25, № 4, pp.255–264.

28. Weyl H., 1917, "Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung", Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich., vol. 62, pp.296-302.

29. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D., 2017, "N-widths of certaing function classes defind by the modulus of continuity" J. of Approximation Theory, pp.145-162.

Получено

Информация об авторе

Фамилия, имя, отчество: Шабозов Мирганд Шабозович
Страна: Таджикистан
Ученая степень: доктор физ.-мат.наук
Ученое звание: профессор, академик АН Республики Таджикистан
Место работы авторов: Таджикский национальный университет, кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений. Получено 18.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-350-358

О периодической части группы Шункова, насыщенной линейными группами степени 2 над конечными полями четной характеристики [1]

А. А. Шлепкин (г. Красноярск)

А. А. Шлепкин — Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, пр. Свободной 79, 660074
e-mail: shlyopkin@gmail.com

Abstract

Понятие насыщенности, введенное в конце прошлого века, оказалось плодотворным при изучении бесконечных групп. Было получено описание различных классов бесконечных групп с различными вариантами насыщающих множеств. В частности, было установлено, что периодические группы с насыщающим множеством, состоящим из конечных простых неабелевых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, есть в точности локально конечные группы лиева типа над подходящим локально конечным полем. Естественным шагом в дальнейших исследованиях был отказ от условия периодичности на исследуемую группу и отказ от структуры насыщающего множества, как множества, состоящего из конечных простых неабелевых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. В настоящей работе рассматриваются смешанные группы (т.е. группы которые содержат как элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка) Шункова.

Хорошо известно, что группа Шункова не обязана обладать периодической частью (т.е. множество элементов конечного порядка в группе Шункова не обязательно является группой). В качестве насыщающего множества рассматривается множество полных линейных групп степени 2 над конечными полями четной характеристики. Отсутствие аналогов известных результатов В. Д. Мазурова о периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций долгое время не позволяло установить структуру группы Шункова с упомянутым выше насыщающим множеством. В данной работе эту трудность удалось преодолеть. Доказывается, что группа Шункова, насыщенная полными линейными группами степени 2 над конечными полями характеристики 2, локально конечна и изоморфна полной линейной группе степени 2 над подходящим локально конечным полем характеристики 2.

Ключевые слова: Группа Шункова; группы, насыщенные заданным множеством групп.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. А. Шлепкин О периодической части группы Шункова, насыщенной линейными группами степени 2 над конечными полями четной характеристики // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 350–358.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10017).

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-350-358

On the periodic part of the Shunkov group saturated with linear groups of degree 2 over finite fields of even characteristic

A. A. Shlepkin (Krasnoyarsk)

A. A. Shlepkin — Siberian Federal University, Krasnoyarsk, pr. Svobodny 79, 660074
e-mail: shlyopkin@gmail.com

Abstract

The definition of saturation condition was formulated at the end of the last century. Saturation condition has become useful in study of infinite groups. A description of various classes of infinite groups with various variants of saturating sets was obtained. In particular, it was found that periodic groups with a saturating set consisting of finite simple non-Abelian groups of Lie type, under the condition that ranks of groups in saturation set are bounded in the aggregate, are precisely locally finite groups of Lie type over a suitable locally finite field. A natural step in further research was the rejection of the periodicity condition for the group under study, and the rejection of the structure of the saturating set as a set consisting of finite simple non-Abelian groups of Lie type with ranks bounded in the aggregate. In this paper, we consider mixed Shunkov groups (i.e., groups that contain both elements of finite order and elements of infinite order).

It is well known that the Shunkov group does not have to have a periodic part (i.e., the set of elements of finite order in the Shunkov group is not necessarily a group). As a saturating set, we consider the set of full linear groups of degree 2 over finite fields of even characteristic. The lack of analogues of known results V. D. Mazurova on periodic groups with Abelian centralizers of involutions for a long time did not allow us to establish the structures of the Shunkov group with the saturation set mentioned above. In this paper, this difficulty was overcome. It is proved that a Shunkov group saturated with full linear groups of degree 2 is locally finite and isomorphic to a full linear group of degree 2 over a suitable locally finite field of characteristic 2.

Keywords: Shunkov group, groups saturated with given set of groups.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. A. Shlepkin, 2019, "On the periodic part of the Shunkov group saturated with linear groups of degree 2 over finite fields of even characteristic" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 350–358.

1. Introduction

Let $\mathfrak{X}$ be a set of groups. A group G is saturated with groups from the set $\mathfrak{X}$ if any finite subgroup of G contained in a subgroup of the group G, is isomorphic to a group from $\mathfrak{X}$. The set $\mathfrak{X}$ will be called *saturation set* for G [9]. Let G be a group. If all elements of finite order from G are contained in a periodic subgroup of G, then it is called the periodic part of G and denoted by $T(G)$ [3, p. 90]. Recall that a group G is called the Shunkov group if for any finite subgroup H of G in the factor group $N_G(H)/H$ any two conjugate elements of a prime order generate a finite group [5]. Note that the Shunkov group is not required to have a periodic part [6].

Groups with saturation conditions studied in following works: [8, 14, 15, 12, 1, 2]. In paticular in [4] it is proved that the Shunkov periodic group G saturated with the groups $GL_2(p^n)$ (neither the characteristic of the field p nor the natural n are fixed) is locally finite and isomorphic to $GL_2(P)$, where P is a suitable locally finite field. For a long time, this result could not be transferred to the entire class of Shunkov groups (without failure of periodicity) due to the lack of a description of Shunkov groups with Abelian centralizers of involutions. In this study, for the case $p = 2$, this difficulty is circumvented. The following result is proved.

Theorem. *Let the Shunkov group G be saturated with groups from the set*

$$\mathfrak{M} = \{GL_2(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Then G has a periodic part $T(G)$ that is isomorphic to $GL_2(Q)$ for a suitable locally finite field Q of characteristic 2

2. Definitions, known facts, auxiliary statements

Definition 1. Let G be a group, K be a subgroup of G, $\mathfrak{X}$ be a set of groups. By $\mathfrak{X}_G(K)$ we denote the set of all subgroups of G containing K and isomorphic to groups from $\mathfrak{X}$. If 1 is the identity subgroup of G, then $\mathfrak{X}_G(1)$ will denote the set of all subgroups of G, isomorphic to groups from $\mathfrak{X}$. If it is clear from the context which group we are talking about, then instead of $\mathfrak{X}_G(K)$ we will write $\mathfrak{X}(K)$, and instead of $\mathfrak{X}_G(1)$ we will write $\mathfrak{X}(1)$. [9]

Proposition 1. *A finite invariant set of elements of finite order in any group generates a finite normal subgroup* [3].

Proposition 2. *Shunkov periodic group G, saturated with groups from the set* Im *consisting of all groups $\{GL_2(p^n)\}$ (here p and n are not fixed), is isomorphic to $GL_2(Q)$ for suitable locally finite field* [4].

Proposition 3. *A Shunkov group with an infinite number of elements of finite order has an infinite locally finite subgroup* [10, Lemma 1].

Proposition 4. *Let G be a Shunkov group, a be an element of prime order from G, x be an involution from G. Then $\langle x, a\rangle$ is the finite group* [7, proposition 4].

Proposition 5. *Let G be a Shunkov group and H be a finite normal subgroup of G. Then the factor group $\overline{G} = G/H$ is a Shunkov group* [7, proposition 5].

Proposition 6. *If in a Shunkov group G some Sylow* 2 *-subgroup is finite, then all Sylow* 2 *-subgroups of G are finite and conjugate* [7, Proposition 9].

Proposition 7. *The Shunkov group G, in which all finite subgroups are Abelian, has an Abelian periodic part of $T(G)$* [7, proposition 7].

Proposition 8. *Let G be a Shunkov group saturated with wreathed groups. Then G has the periodic part $T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, where $A^v = B$, A is a locally cyclic group and $|v| = 2$* [11].

Proposition 9. *Let $G = L_2(q)$, where $q = 2^n > 2$, P is a Sylow* 2 *-subgroup of the group G. Then* :

1. *P is an elementary Abelian group, and any two different Sylow* 2 *-subgroups of group G intersect trivially.*
2. *$C_G(a) = P$ for any involution $a \in P$.*
3. *$N_G(P) = P \leftthreetimes H$ is the maximum subgroup of G, which is a Frobenius group with kernel P and a cyclic complement H of order $q - 1$, acting transitively on the set $P \setminus \{1\}$.*
4. *$N_G(H)$ is a dihedral group of order $2(q - 1)$.*
5. *If K is a subgroup of G and K has a nontrivial normal subgroup of odd order, then $N_G(K)$ is a dihedral group of order $2(q - 1)$ or $2(q + 1)$* [13].

Proposition 10. *Let $L = GL_2(2^n)$. Then* :

1. $L = L_2(2^n) \times Z$, *where* $Z = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \rangle$ *is the center of the group* L, $\alpha \in GF(q)$.

2. $R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(2^n)\}$ *is a Sylow* 2 *-subgroup of the group* L, $N_L(R) = R \leftthreetimes D$, *where* $D = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \rangle$ *- a subgroup of diagonal matrices of the group* L, $\beta \in GF(2^n)$, $D = Z \times T$, $T = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, *and* $|Z| = |T| = 2^n - 1$.

3. $PGL_2(p^n) = L/Z = L_2(2^n)$ [13].

3. Proof

Suppose the theorem is false. Further, G is a counterexample to the statement of the theorem.

Lemma 1. *G is not a periodic group.*

Proof. Assume the opposite. Then $T(G) = G$ and by the proposition 2 G is isomorphic to $L_2(Q)$ for a suitable locally finite field Q of characteristic 2. Hence the lemma is proved.

Lemma 2. *G contains infinitely many elements of finite order..*

Proof. Assume the opposite. Then by the proposition 1, the group G has a finite periodic part $T(G)$, which is isomorphic, according to the saturation condition, to the group $L_2(2^m)$ for a suitable m. This contradicts the fact that G is a counterexample. Hence the lemma is proved.

Lemma 3. *All involutions from the group G are conjugate.*

Proof. Let x, y be two different involutions from G. By the proposition 4 $\langle x, y\rangle$ is a finite group. By saturation condition $\langle x, y\rangle < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. In this case, $M \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. According to the propositions 10, 9 $x = y^g$ for some $g \in M$. Hence the lemma is proved.

Lemma 4. *Let S be a Sylow 2 -subgroup of G. Then S is an infinite elementary Abelian 2 -group.*

Proof. By Lemma 2 and Proposition 3 the group G contains an infinite locally finite subgroup L. Therefore, for any positive integer n in the group L there exists a finite subgroup K_n such that $|K_n| > n$. By saturation condition $K_n < M_n < G$ and $M_n \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M_n \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. By the proposition 10 we have $|M_n| = (2^{2l} - 1)2^l(2^l + 1)$. Thus $n < 2^{3l}$, $(ln_2 n)/3 < l$, l can be arbitrarily large due to the arbitrariness of n and in the group G there is a finite 2-group of arbitrarily large order. Hence, using the proposition 6, S is an infinite group.

Now let s be an arbitrary element of S. By saturation condition $s \in M_n < G$ and $M_n \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M_n \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. By the proposition 10 $|s| = 2$. Thus, S is an infinite Abelian group of period 2. Hence the lemma is proved.

Let's fix the group S of the statement of the lemma 4.

Lemma 5. *Let R be a Sylow 2-subgroup of G other than S. Then $S \cap R = 1$.*

Proof. Assume the opposite and let $1 \neq z \in S \cap R$. By the lemma, 4 z is an involution. Let's take the involution $x \in S \backslash R$ and the involution $y \in R \backslash S$. By the proposition 4 $\langle x, y\rangle$ is a finite group from $C_G(z)$ (Lemma 4). Therefore, $\langle z, x, y\rangle$ is a finite group. By saturation condition $\langle z, x, y\rangle < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. According to the propositions 10, 9 we have $xy = yx$. Since the choice of involutions x, y is arbitrary, we conclude that the groups S, R are elementwise permutable. Therefore, SR is an elementary Abelian 2-group. By the lemma 4 $S = SR = R$. Which is a contradiction with the condition of the lemma. Hence the lemma is proved.

Lemma 6. *Let R be a Sylow 2 -subgroup of G other than S. Then $S = R^g$ for some $g \in G$.*

Proof. Let us take the involution $x \in S$ and the involution $y \in R$. By the lemma 3 $x = y^g$ and $x \in S \cap R^g$ for some $g \in G$. By the lemma 5 $S = R^g$. Hence the lemma is proved.

Lemma 7. *$N_G(S)$ has a countable periodic part $T = T(N_G(S))$.*

Proof. 1. Let $1 \neq K$ be a finite subgroup of S. By saturation condition $K < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M containing K. By the lemma 4 $S_M < S$, $N_M(S_M) < N_G(S)$. According to the propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.) $N_M(S_M)$ contains a finite subgroup $R_{S_M} = V_{S_M} \times Z_M$ of order $(2^l-1)^2$ such that $N_M(S_M) = S_M \leftthreetimes R_M$, $S_M \leftthreetimes V_{S_M}$ is a Frobenius group with kernel S_M and cyclic complement V_{S_M} of order $2^l - 1$ acting transitively on the set $S_M \setminus 1$, $Z_M = Z(M)$ is a cyclic group of order $2^l - 1$. Thus, $N_G(S)$ contains finite subgroups of an arbitrarily large odd order due to the fact that l can be arbitrarily large.

Let us consider the factor group $\overline{N} = N_G(S)/S$. Since $\pi(S) \cap \pi(\overline{N}) = \varnothing$, then $\overline{N}$ is a Shunkov group (by the proposition 5). Let us show that all finite subgroups of $\overline{N}$ are Abelian. Let $\overline{K}$ be a finite subgroup of $\overline{N}$ and K be some finite inverse image of $N_G(S)$ such that $S \cap K \neq 1$. By saturation condition $K < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M containing K. By the lemma 4 $S_M < S, N_M(S_M) < N_G(S)$. According to the propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.) $N_M(S_M)$ contains a finite subgroup $R_{S_M} = V_{S_M} \times Z_M$ of order $(2^l-1)^2$ such that $N_M(S_M) = S_M \leftthreetimes R_M$, $S_M \leftthreetimes V_{S_M}$ is a Frobenius group with kernel S_M and cyclic complement V_{S_M} of order $2^l - 1$ acting transitively on the set $S_M \setminus 1$, $Z_M = Z(M)$ is a cyclic group of order $2^l - 1$. Hence,

$$\overline{K} = KS/S < SN_M(S_M)/S = SR_M/S = S(V_{S_M} \times Z_M)/S =$$

$$= SV_{S_M}/S \times SZ_M/S = \overline{V_{S_M}} \times \overline{Z_M}$$

is an Abelian group, as required. It is clear that in this case $\overline{N}$ is saturated with finite Abelian groups and, by the proposition 7 $\overline{N}$, has the periodic part $T(\overline{N})$ which is an Abelian group.

Let us show that for any $p \in \pi(T(\overline{(N)}))$, $p - \mathrm{rank} T(\overline{N})$ equal to 2. Let's assume the opposite, for some p-subgroup of $p \in \pi(T(\overline{N}))$, $\overline{K} = \langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle \times \langle \overline{c} \rangle$ is an elementary Abelian p-subgroup of $T(\overline{N})$. Denote by K some finite inverse image of K in the group $T(N_G(S)$ such that $S \cap K \neq 1$. By saturation condition $K < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. In this case $M \simeq GL_2(2^l)$ for a suitable positive integer l. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M such that $N_M(S_M)$ contains K. By the lemma 4 we have $S_M < S, N_M(S_M) < N_G(S)$. Therefore, $N_M(S_M)$ contains elementary Abelian p-subgroup $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ of order p^3, which is impossible due to the propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.)

Since an Abelian locally finite group is a direct product of its cyclic subgroups, $T(\overline{N})$ is a countable group. Let's take two different involutions x, y in S. By saturation condition $\langle x, y \rangle < M \in \mathfrak{M}(1)$. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M such that $N_M(S_M)$ contains $\langle x, y \rangle$. Clearly, $S_M < S$. By 10 (clause 1.), 9 (clause 3.) there is an element a in $N_M(S_M)$ such that $x^{sa} = y$ for any $s \in S$. Hence, taking into account the countability of $T(\overline{N})$, follows the countability of the groups S, T. Hence the lemma is proved.

Lemma 8. *In G there exists an infinite sequence of subgroups*

$$G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots,$$

with the following properties.

a. *$G_n \simeq GL_2(2^{l_n})$ and l_n divides l_{n+1}*

b. *$T \cap G_n = N_{G_n}(S_n) = S_n \leftthreetimes (Z_n \times V_n)$, where S_n is a Sylow 2-subgroup of G_n, $Z_n = Z(G_n)$,*

c. *$N_{G_n}(S_N) < N_{G_{n+1}}(S_{n+1})$.*

d.
$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{G_n}(S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \leftthreetimes (Z_n \times V_n)) = S \leftthreetimes (Z \times V),$$
where
$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$$
is a locally cyclic subgroup of T generated by all elements of odd orders centralising at least one involution from S.
$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$
is a locally cyclic subgroup of T which is isomorphic to the group Z and acts transitively on S.

Proof. By the lemma, 7 T is a countable group. We number the elements of the group T with elements of the natural series: $T = \{t_1 \cdots t_n \cdots\}$ and let's assume that $1 \neq t_1 \in S$. By saturation condition $\langle t_1 \rangle < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M containing $\langle t_1 \rangle$. By the lemma 4 we have $S_M < S, N_M(S_M) < T$. Let $M = G_1$. It is clear that $G_1 \simeq GL_2(2^{l_1})$ and $G_1 \cap T = N_{G_1}(S_1) = S_1 \leftthreetimes (Z_1 \times V_1)$, where $S_M = S$ is a Sylow 2-subgroup of G_1, $Z_1 = Z(G_1)$, V_1 is a cyclic subgroup of $N_{G_1}(S_1)$ acting regularly and transitively on S_1. (Propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.)

Suppose that for $n \geqslant 1$ a subgroup G_n satisfying the conclusion of the lemma is constructed. Let t_m be an element from $T \setminus N_{G_n}(S_n)$ with the smallest possible index value of m. By the saturation condition, the finite group $\langle t_m, N_{G_n}(S_n)\rangle < M < G$ and $M \in \mathfrak{M}(1)$. Let S_M be a Sylow 2-subgroup of M containing $\langle t_m, S_n\rangle$. By the lemma 4 we have $S_M < S, N_M(S_M) < T$. Let $M = G_{n+1}$. It is clear that $G_{n+1} \simeq GL_2(2^{l_{n+1}})$ and $G_{n+1} \cap T = N_{G_{n+1}}(S_{n+1}) = S_{n+1} \leftthreetimes (Z_{n+1} \times V_{n+1})$, where $S_M = S_{n+1}$ is a Sylow 2-subgroup of G_{n+1}, $Z_{n+1} = Z(G_{n+1})$, V_{n+1} is a cyclic subgroup of $N_{G_{n+1}}(S_{m+1})$ acting regularly and transitively on S_{n+1}. (Propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.) By construction, the points **a,b,c,d** hold. The lemma is proved.

In the notation of the lemma 8, the following statement holds.

Lemma 9. *$N_G(Z_n \times V_n)$ has a periodic part of $T(N_G(Z_n \times V_n))$ and*
$$T(N_G(Z_n \times V_n)) = T(N_G(Z \times V)) = (Z \times V) \leftthreetimes \langle w_n \rangle,$$
where w_n involution from G_n, such that for any $z \in Z, z^{w_n} = z$ and for any $v \in V, v^{w_n} = v^{-1}$.

Proof. Let's show that the group $N_G(Z_n \times V_n)$ is saturated with finite wreathed groups. Let K be a finite subgroup of $N_G(Z_n \times V_n)$. By the saturation condition, the finite group $\langle (Z_n \times V_n), K\rangle < M \in \mathfrak{M}(\langle (Z_n \times V_n), K\rangle)$. According to the propositions 10 (point 1.), 9 (point 3.) $N_M(Z_n \times V_n) = (Z_M \times V_M) \leftthreetimes \langle w \rangle$, where $Z_M = Z(M)$, $Z_n < Z_M$, $V_n < V_M$ and for any $x \in V_M, x^w = x^{-1}$. Let $Z_M = \langle x \rangle$, $V_M = \langle y \rangle$. Then $N_M(Z_n \times V_n) = (\langle xy \rangle \times \langle x^{-1}y \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ is an wreathed group. Due to randomness of choice of K as a finite subgroup of $N_G(Z_n \times V_n)$ the saturation of the latter with finite wreathed groups is proved. By the lemma 8 we have $(Z \times V) < N_G(Z_n \times V_n)$, therefore, by the proposition 8 $T(N_G(Z_n \times V_n)) = (Z \times V) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$. The lemma is proved.

Lemma 10. *In G there exists an infinite sequence of subgroups*
$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$
with the following properties.

a. *$M_n \simeq G_n$.*

b. $M_n \cap G_n = (Z_n \times V_n)$.

c. $N_{M_n}(Z_n \times V_n) = (Z_n \times V_n) \leftthreetimes \langle w \rangle) < N_{M_{n+1}}(Z_{n+1} \times V_{n+1}) = (Z_{n+1} \times V_{n+1} \leftthreetimes \langle w \rangle)$, *where* w *is an involution from* $T(N_G(Z_n \times V_n))$.

Proof. Let's fix some involution $w_{n_0} \in T(N_G(Z_{n_0} \times V_{n_0})) = T(N_G(Z \times V)) = (Z \times V) \leftthreetimes \langle w_{n_0} \rangle$. Let $w = w_{n_0}, R = (Z \times V) \leftthreetimes \langle w \rangle$. By the lemma 9, all involutions in R are conjugate. Therefore, for any n in R there is an element x_n such that $w_n^{x_n} = w_n$. Let $M_n = G_n^{x_n}$. By construction sequence

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

has the properties **a.,b.,c.** Hence the lemma is proved.

Lemma 11. *Subgroup sequence*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

forms a chain

$$M_1 < M_2 < \cdots < M_n < \cdots.$$

Proof. Denote by S_n a Sylow 2-subgroup of M_n which contains the involution w. Since the involution w lies in each of the groups M_n (by the lemma 10) and the order of the group M_n divides the order of the group M_{n+1}, then $S_n < S_{n+1}$. Hence, the group M_{n+1} contains two different Sylow 2-subgroups as subgroups S_n and $S_n^v(1 \neq v \in V_n)$ of M_n, and group $N_{M_n}(Z_n \times V_n) = (Z_n \times V_n) \leftthreetimes \langle w \rangle)$. By the propositions 10 (clause 1.), 9 (clause 3.) $M_n = \langle S_n, S_n^v, N_{M_n}(Z_n \times V_n)$. Hence, $M_n < M_{n+1}$. The lemma is proved.

Let us complete the proof of the theorem. By the proposition 2 and by the lemma 11

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq GL_2(Q)$$

for a suitable locally finite field Q of characteristic 2. By the lemma 1 $L < G$. Let us show that $L = T(G)$. Suppose that M contains all involutions from G. In this case, G contains the characteristic subgroup $L_1 \simeq L_2(Q)$, and all elements of finite order from $C_G(L_1)$ generate the subgroup Z and $L = L_1 \times Z$. Any element g of finite order from G is represented as $g = xz$, where $x \in L_1$, and $z \in Z$. Thus $L = T(G) \neq G$ (by the lemma 1).

Suppose that there is an involution $v \in G \setminus L$. Take the involution $k \in S < L$. By the saturation condition, finite group $\langle v, k \rangle < R \in \mathfrak{M}(\langle v, k \rangle)$. Denote by S_R a Sylow 2-subgroup of R, such that $k \in R$. By the lemmas 5, 7 $N_R(S_K) < T$. Therefore, for some positive integer n, $N_R(S_R) < N_{M_n}(S_n)$. But then $v \in R < M_n < M$. A contradiction with the choice of the involution v. Thus, all involutions from G lie in M, and in this case the statement of the theorem holds. The theorem is proved.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вэй С., Го В., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Характеризация локально конечных простых групп типа 3D4 над полями нечетных характеристик в классе периодических групп // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1013–1019.

2. Джу С., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Характеризация локально конечных простых групп типа G2 над полями нечетных характеристик в классе периодических групп // Матем. заметки 2019. Т. 105, № 4. С. 519–525.

3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп // М. Наука. 1982. 288 с.

4. Шлепкин А. А. О группах Шункова, насыщенных полными линейными группами // Сиб. матем. журн. 2016. № 1, Т. 57. С. 222–235.

5. Сенашов, В.И., Шунков В.П. Группы с условиями конечности // Новосибирск, изд. СО РАН. 2001.

6. Череп А. А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.

7. Шлепкин А. А. Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 341–351.

8. Шлёпкин А. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 4. С. 118—125.

9. Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Матем. тр. 1998. Т. 1 № 1.С. 129-138.

10. Шлепкин А. К. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. 22. С. 226–231.

11. Шлепкин А. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 281–285.

12. Шлепкин А. А. Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. № 22. С. 90–105.

13. Carter R .W. Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons. 1972.

14. Lytkina D. V., Shlepkin A. A. Periodic groups saturated with the linear groups of degree 2 and the unitary groups of degree 3 over finite fields of odd characteristic // Siberian Adv. Math., 2018. T. 28, № 3. C. 175–186.

15. Shlepkin A. A. On a sufficient condition when an infinite group is not simple // Journal of SFU, mathematics and physics 2018. T 11, № 1. C. 103–107.

REFERENCES

1. Wei C., Go B., Lytkina D. V., Mazurov V. D. 2018, “A characterization of locally finite simple groups of type 3D4 over fields of odd characteristics in the class of periodic groups“ *Siberian Math. J.*, vol. 59, no. 5, pp. 1013–1019.

2. Joo C., Lytkina D.;V., Mazurov V. D. 2019, “A characterization of locally finite simple groups of type G2 over fields of odd characteristics in the class of periodic groups“ //*Mat. notes* vol. 105, no. 4, pp. 519–525.

3. Kargapolov, M. I., & Merzlyakov, Yu. I. 1982, *Fundamentals of Group Theory*, Sciene, Moscow 288 p.

4. Shlepkin A. A. 2016, “On Shunkov groups saturated with linear groups“ *Sib. matem. zhurn.*, vol. 57, no. 3, pp. 222–235.

5. Senashov, V.I. & Shunkov V.P 2001, *Groups with limb conditions*, SB RAS, Novosibirsk.

6. Cherep, A. A. 1987, “On the set of elements of finite order in a biprimitively finite group“ *Algebra i logika*, vol. 26, no. 4, pp. 518–521.

7. Shlepkin, A. A. 2016, “Shunkov groups saturated with linear and unitary groups of degree 3 over fields of odd orders“ *Sib. elektron. matem. izv.*, Vol. 13., pp. 341–351.

8. Shlepkin, A. A. 2018, “Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1“ *Algebra i logika*, vol. 57, no 4, pp. 118—125.

9. Shlepkin, A. K. 1993, “On Certain Torsion Groups Saturated with Finite Simple Groups“ *Siberian Adv. Math.*, Vol. 9., no. 2, pp. 100-108.

10. Shlepkin, A. K. 1983, “On conjugate biprimitively finite groups with the condition of primary minimality“ *Algebra i logika*, Vol. 22. pp. 226–231.

11. Shlepkin, A. A. 2018, “On the periodic part of the Shunkov group saturated with wreathed groups“ *Tr. IMM UrO RAN.*, Vol. 24, no 3, pp. 281-285.

12. Shlepkin A. A. 2017, “On a Sufficient Condition for the Existence of a Periodic Part in the Shunkov Group“ *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika*, no. 22, pp. 90–105.

13. Carter R .W. 1972, *Simple groups of Lie type*, Wiley and Sons, New York.

14. Lytkina D. V., Shlepkin A. A. 2018, “Periodic groups saturated with the linear groups of degree 2 and the unitary groups of degree 3 over finite fields of odd characteristic“ *Siberian Adv. Math.*, vol. 28, no 3. pp. 175–186.

15. Shlepkin A. A. 2018, “On a sufficient condition when an infinite group is not simple“ *Journal of SFU, mathematics and physics* vol. 11, no. 1, pp. 103–107.

Получено 18.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 519.85:69.059 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-359-373

Математическое моделирование разрушения элементов строительных конструкций под действием динамической нагрузки

Г. М. Журавлев, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий

Журавлев Геннадий Модестович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.
e-mail: technology@tsput.ru
Теличко Виктор Григорьевич — кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: katranv@yandex.ru
Куриен Никита Сергеевич — аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: kyrien@mail.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

Развитие современных промышленных производств выдвигает ответственную и сложную задачу охраны населения, обслуживающего персонала и окружающей среды от аварий. Первостепенное значение приобретает анализ возможных отклонений от нормальных эксплуатационных режимов на данных производствах и тщательное изучение возможного развития различных аварийных ситуаций, приводящих к динамическим воздействиям на сооружения и нахождение условий разрушения элементов конструкций. В статье предложена математическая методика нахождения условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением. Для решения динамических задач, используется вариационный подход, основанный на построении функционала расчета мощности упругой деформации с учетом мощности сил инерции, в контексте с применением современных программных комплексов, базирующихся на методе конечных элементов. В качестве примера рассмотрена задача компьютерного моделирования воздействия динамической нагрузки, расположенной над центром железобетонной плиты, позволяющая определять напряженно-деформированное состояние простейших элементов строительных конструкций плит. Все расчеты производились в среде ANSYSLS-DYNA. Получены результаты в форме графиков скоростей деформаций и полей напряжений. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическим решением аналогичной задачи, приведенной в работе Г.Т. Володина.

Ключевые слова: динамическое нагружение, функционал мощности упругой деформации, мощность сил инерции, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, железобетон.

Библиография: 26 названия.

Для цитирования:
Г. М. Журавлев, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий Математическое моделирование разрушения элементов строительных конструкций под действием динамической нагрузки // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4, С. 359–373.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 519.85:69.059 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-359-373

Mathematical modeling of structural elements destruction under dynamic load

G. M. Zhuravlev, V. G. Telichko, N. S. Kurien, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy

Zhuravlev Gennady Modestovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: technology@tsput.ru
Telichko Victor Grigorievich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures, Tula State University, Tula.
e-mail: katranv@yandex.ru
Kurien Nikita Sergeevich — Postgraduate Student, Tula State University, Tula.
e-mail: kyrien@mail.ru
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The development of modern industry puts forward a responsible and complex task of protecting the population, service personnel and the environment from accidents. The analysis of possible deviations from normal operating conditions in these industries and a thorough study of the possible development of various emergency situations that lead to dynamic effects on structures and finding conditions for the destruction of structural elements is of paramount importance. The article proposes a mathematical method for finding the conditions of destruction of structural elements by dynamic loading. To solve dynamic problems, a variational approach is used, based on the construction of a functional for calculating the power of elastic deformation taking into account the power of inertia forces, in the context of using modern software systems based on the finite element method. As an example, the problem of computer modeling of the dynamic load located above the center of the reinforced concrete slab, which allows to determine the stress-strain state of the simplest elements of building structures of plates, is considered. All calculations were performed in ANSYSLS-DYNA environment. The results are obtained in the form of graphs of strain rates and stress fields. The obtained results are compared with the analytical solution of a similar problem presented in the work of G.T. Volodin.

Keywords: dynamic loading, functional capacity of elastic deformation, power of the forces of inertia, finite element method, stress-strain state, reinforced concrete.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
G. M. Zhuravlev, V. G. Telichko, N. S. Kurien, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy, 2019, "Mathematical modeling of structural elements destruction under dynamic load" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 359–373.

1. Введение

Развитие ряда современных отраслей промышленности выдвигает ответственную и сложную задачу охраны населения, обслуживающего персонала и окружающей среды от аварий. Первостепенное значение приобретает анализ возможных отклонений от нормальных эксплуатационных режимов на данных производствах и тщательное изучение возможного развития различных аварийных ситуаций, приводящих к динамическим воздействиям на сооружения.

При проектировании зданий и сооружений взрывоопасных производств требуется учитывать нагрузку от динамического воздействия согласно СП 20.13330.2011. Однако развернутых разъяснений по определению нагрузок от динамических воздействий в этом нормативном документе нет. В пособиях и различного рода рекомендациях по расчету динамических воздействий представлены упрощенные методики не способные в полной мере описать происходящий процесс и его последствия [1,2].

Обзор известных научных работ указывает на то, что исследования в этой области, являются малочисленными и недостаточно изученными, их неудобно применять при решении практических задач, отсутствуют реализации данных работ в среде современных систем конечно-элементного моделирования, что ставит серьезные барьеры на пути решения прикладных задач. Разработкам в этой области посвящены работы В.Н. Аптукова, А.В. Герасимова, Т.М. Саламахина, Г.Т. Володина, Н.Н. Белова, Н.Т. Югова, Д.Г. Копаницы, М.А. Лебедева, В.А. Рыжанского, А.Г. Иванова, А.К. Перцева, Ю.И. Кадашевича, У. Бейкера, H.S. Turkmen, W. Riedel ,K. Thoma, S. Hiermaier и др.

Среди указанных работ лучшим образом согласуются с экспериментальными данными те из них, в основе которых лежит энергетический метод расчета [3-14]. Однако в них не рассматривается детально механизм разрушения - фиксируется лишь разрушение в опасном сечении, срединной линии, срединного слоя и т.д. Это не позволяет отслеживать возникновение и распространение зон разрушения по всему объему деформируемой конструкции, в зависимости от расположения динамической нагрузки в окружающем пространстве.

В связи с этим нахождение условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с использованием усовершенствованной методики расчета динамических задач, основанного на использовании функционала расчет мощности упругой деформации с учетом мощности сил инерции, в контексте с применением современных программных комплексов основанных на методе конечных элементов (КЭ) представляет собой актуальную задачу, особенно в прикладном плане.

2. Материалы и методика исследования

Анализ процессов разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с точки зрения практической реализации показывает, что процесс теоретически, можно представитьв виде суммы двух взаимосвязанных задач: внешней, когда рассматривается задача формирования динамической нагрузки, учитывающей энергетические и геометрические характеристики взрывчатого вещества, и внутренней, когда исследуется деформирование и разрушение элементов конструкции динамической нагрузкой. Наибольший интерес представляет исследования упругого формоизменения, происходящего в элементах конструкции, с целью построения решения, которое с учетом критерия прочности позволяет прогнозировать, возникающее напряженно-деформированное состояние элементов конструкции, а также динамику ее изменения во времени, что дает возможность прослеживать образование и развитие участков разрушения.

Для нахождения условий разрушения элементов строительных конструкций предлагается использование усовершенствованной методики расчета динамических задач, основанного на использовании энергетического метода, в контексте с применением современных программных комплексов основанных на методе конечных элементов. Сущность методики рассмотрим на примере действия нагрузки, создаваемой динамическим воздействием на бетонную плиту. Нагрузка должна быть достаточной для того, чтобы пришедшая в движение плита разрушалась при достижении максимального прогиба в первом цикле. Напряженно-деформированное состояние плиты учитываем при помощи классических гипотез Кирхгофа-Лява, вследствие чего, деформированное состояние плиты в целом определяется деформированным состоянием ее среднего слоя. Граничные условия, заданные по контуру неизменны на протяжении всего процесса деформирования, и соответствуют способу ее закрепления (опирание плиты по контуру шарнирное).

Заданная динамическая нагрузка действует на центр плиты и находится в ближайшей области действия, поэтому давлением окружающей среды можно пренебречь. Распределение удельного импульса, создаваемого динамической нагрузкой, по поверхности плиты определяется функцией [4, 7, 15]

$$I = I_{i_H i_T} \tag{1}$$

где i_H – нормальная составляющая, i_T – тангенциальная составляющая удельной динамической нагрузки.

Тангенциальной составляющей удельного импульса можно пренебречь, в предположении, что поверхность плиты является в достаточной степени гладкой. Поэтому, расчет удельного импульса динамической нагрузки будем проводить только с учетом нормальной составляющей.

Для материала плиты принимаются гипотезы о его сплошности, однородности и изотропности. В любой момент времени при деформировании, вплоть до разрушения, материал плиты считаем упругим и подчиняющимся закону Гука, то есть рассматриваем хрупкое разрушение. При этом под разрушением плиты понимаем утрату ее несущей способности вследствие появления в ней трещин, сколов или разделения на фрагменты. Изменение прочностных характеристик материала плиты при высокоскоростном деформировании при нормальной температуре не учитываем. Тепловыми потерями, распространения деформационных волн в материале пластины и затухающей составляющей в векторе перемещений точек среднего слоя плиты пренебрегаем.

Моделирование физических процессов динамического воздействия, находящегося в ближней области действия к плите рассмотрим в некоторый определенный момент времени. Используем энергетический метод Т.М. Саламахина, согласно которому кинетическая энергия, полученная преградой от импульсной нагрузки, полностью расходуется на работу деформирования вплоть до разрушения [4].

$$Э = П \tag{2}$$

Т.М. Саламахин показал [4], что нормальная составляющая удельного импульса динамической нагрузки, действующая на элемент преграды, может быть вычислена, с учетом отражения продуктов нагружения и деформирования поверхности бетонной плиты, по формуле:

$$i = \int_0^\tau P(t)dt \tag{3}$$

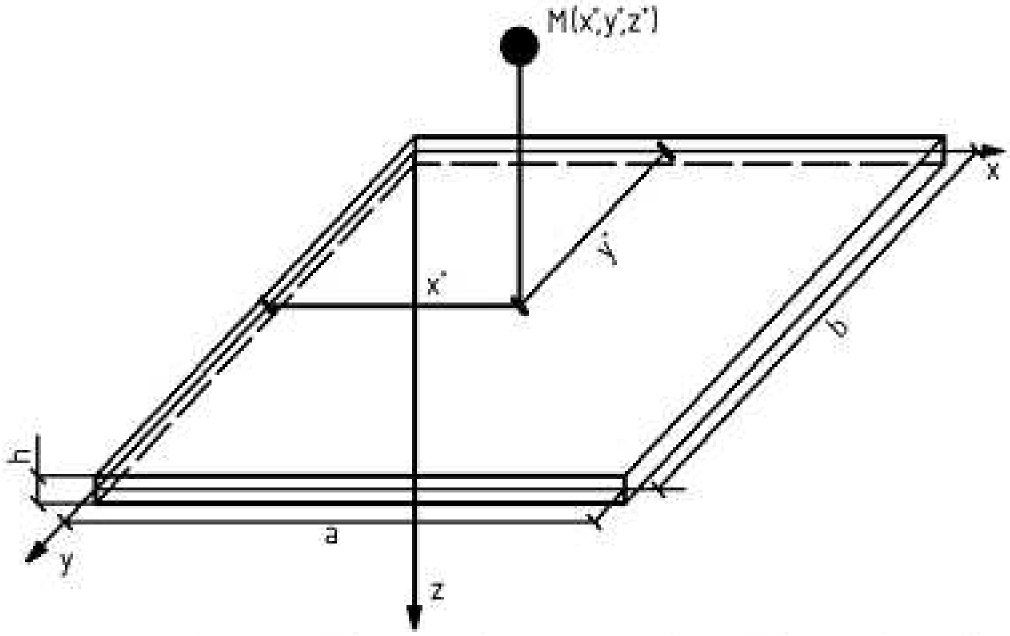


Рис. 1: Расчётная схема

где P(t) -– давление продуктов динамического воздействия на плиту, t – время, отсчитываемое от момента столкновения первой частицы потока продуктов динамического воздействия с плитой в точке с координатами (x, y) показана на рис. 1.

В расчете используем прямоугольную декартову систему координат, оси Ox и Oy поместим в плоскость плиты, ближней к расположению заряда, ось Oz направим вертикально вниз, начало координат поместим в центре плиты.

Кинетическая энергия dЭ, полученная элементом плиты, согласно импульсному характеру действующей нагрузки, вычисляется по формуле [4]:

$$d\text{Э} = \frac{i^2}{2m} = \frac{A_0^2 C^2 z_*^4}{2\rho h[z_*^2 + (x - x_*)^2 + (y - y_*)^2]^4} \tag{4}$$

где ρ — плотность материала плиты, — обобщенная характеристика заряда (литой тротил = 400 м/с), C — масса заряда.

Кинетическая энергия, полученная плитой, за время действия динамического воздействия нагрузки определяется по формуле, полученной Г.Т. Володиным [6-8]:

$$\text{Э} = \frac{A_0^2 C^2 z_*^4}{2\rho h} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \frac{dxdy}{[z_*^2 + (x - x_*)^2 + (y - y_*)^2]^4} \tag{5}$$

Выражение для нахождения работы упругого деформирования, имеет вид

$$\Pi = E\frac{hab}{2(1 - \mu^2)} \int_t dt(P(u, v, w)) \tag{6}$$

где E – модуль Юнга, – коэффициент Пуассона, h – толщина плиты, a и b половина ширины и длины плиты, *P(u,v,w)* - функционал расчет мощности упругой деформации для динамического нагружения, определяется по формуле, приведенной в работах В. Новацкого [16, 17]:

$$P(u, v, w) = \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_V \rho \delta u_i ii_i dV, \tag{7}$$

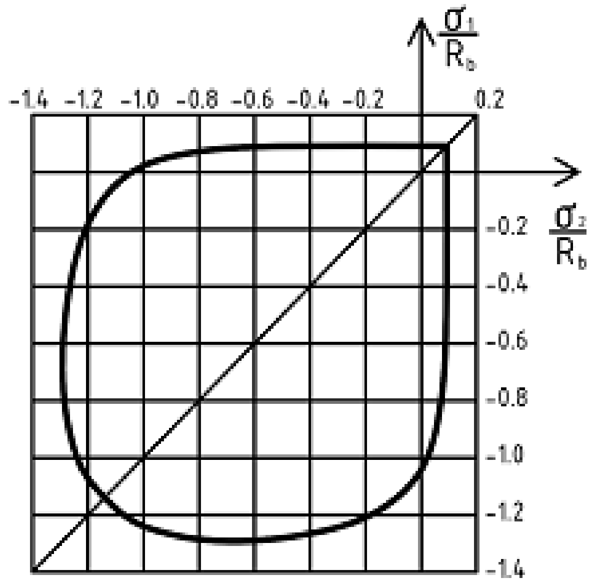


Рис. 2: Предельная поверхность для бетона

где $\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV$ – мощность упругой деформации, $\int_V \rho\delta u_i i i_i dV$ – мощность сил инерции.

Критерий прочности примем в виде [15]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\tfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\tfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\mu\tfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y &= -\tfrac{Ez}{1-\mu^2}\left(\tfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\mu\tfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right); \end{aligned} \tag{8}$$

где $\frac{\sigma_{\max}}{R_b K_{\nu b}} \le 1$ – критерий прочности;

$$K_{\nu,b} = 1,58 - 0,35\log_{10} t + 0,07\left(\log_{10} t\right)^2 \textit{ (см. рис. 2).} \tag{9}$$

На основе изложенного выше подхода Г.Т. Володина и Т.М. Саламахина [4, 6-8] была решена задача деформировании плиты под действием сферического заряда (рис. 3). Исходные данные принимались следующие: размеры плиты: $a = 2$ м; $b = 2$ м; толщина $h = 0,15$ м; бетон тяжелый B25; координаты расположения заряда – $z^* = 0,8$м; $x^* = 1$м; $y^* = 1$м; начальная скорость распространения продуктов взрыва – $A_0 = 400$ м/с; плотность – $\rho = 1620$ кг/м^3; модуль Юнга E = 38000 МПа; предел прочности – $\sigma_{max} = 26,3$ МПа.

Получено следующее решение – максимальный прогиб w=3,2 мм;масса заряда, приводящего к разрушению C=1,4 кг.

Далее авторами проведена верификация проведенного расчета в среде ANSYS с помощью метода конечных элементов (рис. 4).

Одним из перспективных методов изучения механизма разрушения динамическим нагружением является применение математического моделирования, в основе которого положен метод конечных элементов (МКЭ). В настоящее время МКЭ – один из наиболее разработанных методов, позволяющих моделировать явления и процессы с максимальным их приближением к реальности. Теоретические основы МКЭ хорошо освещены вработах зарубежных исследователей, среди которых стоит отметить труды К.-Ю. Бате, Е. Вилсона, Р. Галлагера, О. Зенкевича, Л. Сегерлинда и др. [18-22].

Применение средств численного моделирования позволяет исследовать процессы и явления, изучение которых на практике, в силу тех или иных причин, не представляется возможным или экономически нецелесообразно, а также минимизировать затраты, уточнять теорию,

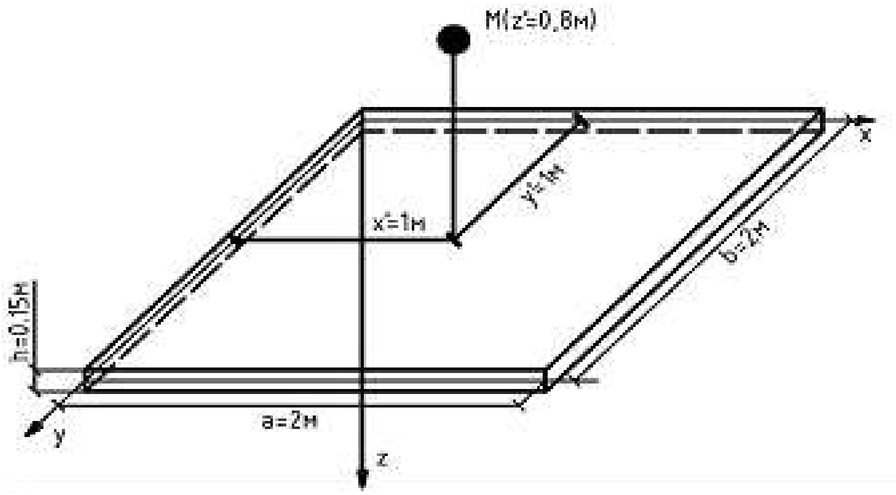


Рис. 3: Модель пример

проверять выводы и получать более полное наглядное представление о сути происходящих явлений.

Несмотря на всю развитость математического аппарата и компьютерных технологий, на сегодняшний день существует не так много верифицированных программных продуктов, позволяющих с высокой степенью достоверности моделировать процессы, происходящие при динамическом нагружении.

Лидером в области разработки программных решений является компания ANSYS с программными продуктами LS-DYNA и AUTODYN. В настоящей работе для моделирования процесса динамического разрушения плиты использовалось лицензионное программное обеспечение системы инженерного анализа ANSYS – LS-DYNA.

Разработка модели разрушения плиты в ANSYSLS-DYNA велась по ряду причин:

компания ANSYS является одним из мировых лидеров в области компьютерного моделирования, в основе которого положен метод конечных элементов, а её пользовательские продукты являются хорошо верифицированными в различных отраслях производства (в том числе такими признанными на международном уровне учреждениями как PAACH) и находят свое применение на многих передовых предприятиях промышленности и научных учреждениях;

LS-DYNA является относительно простым в освоении, а его пользовательский интерфейс дает возможность в сжатые сроки редактировать элементы модели и получать наглядные результаты;

среди аналогов модулю LS-DYNA практически нет равных по расчетным возможностям, которые наиболее полно, при всех прочих равных условиях, отражают физику исследуемого явления, что многократно подтверждено накопленным мировым опытом в использовании данного продукта [23, 24].

Вычисление функционалов проводим с использованием программного модуля LS-DYNA, представляющего многоцелевой конечно-элементный комплекс, предназначенный для анализа высоко нелинейных и быстротекущих процессов в задачах механики твердого и жидкого тела. LS-DYNA представляет возможность эффективного численного моделирования высоко нелинейных термомеханических процессов. Численное моделирование актуально для материала, имеющего разную гетерофазную структуру.

В работе осуществлен расчет бетонной плиты из изотропного материала имеющего E=38000 МПа – модуль Юнга, $\nu = 0,2$ - коэффициент Пуассона. Расчет проводится с целью сравнения полученных численных результатов с результатами, полученными в работах Г.Т. Володина [6-8] на предмет проверки адекватности работы программы.

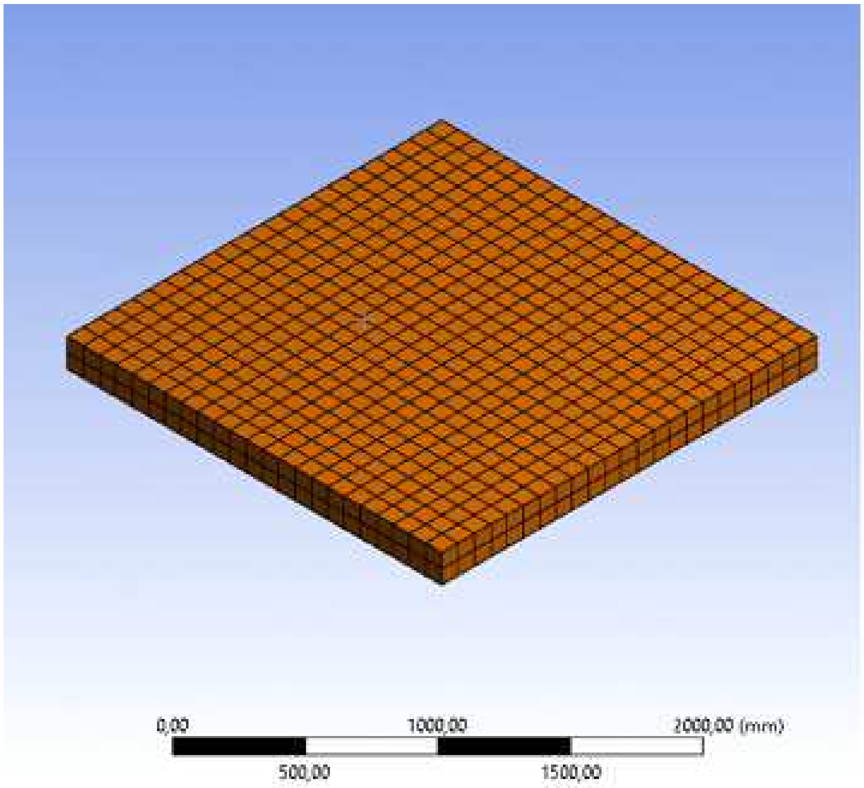


Рис. 4: КЭ модель решаемой задачи

Прочность плиты описывается моделью RHT – моделью прочности (Riedel-Hiermaier-Thoma), разработанной специально для высокоскоростного деформирования железобетона. Данная модель является модульной, и описывает поведение упругопластического тела с упрочнением. В связи с громоздкостью математических выкладок, в настоящей работе не представляется возможным привести полное описание модели. Данная модель полно описано в работах авторов [25, 26].

На рис. 5-7 показана схема деформированной плиты и график перемещения характерных точек (мм) во времени (с).

В результате компьютерного моделирования установлено:

1 – максимальный прогиб пластины в соответствии с подходом Т.М. Саламахина / Г.Т. Володина w=3,21 мм.

2 – Максимальный прогиб, полученный с помощью конечно-элементного моделирования в программном комплексе LS-DYNAw=2,94 мм.

Проведено сравнение величины прогиба, полученного и в работе по методике расчета Г.Т. Володина, расхождение составило 0,27 мм или менее 10%, что подтверждает адекватность работы программы и подтверждает правильность выбора математического обеспечения для автоматизации расчетов.

Таким образом можно сделать вывод, что нахождение условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением выполнено, с использованием усовершенствованной методики расчета динамических задач, основанного на использовании функционала мощности упругой деформации с учетом мощности сил инерции, в контексте с применением современных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, что позволяет проводить расчеты и математическое моделирование влияния различных факторов при разработке новых конструкций, работающих в условиях динамического нагружения.

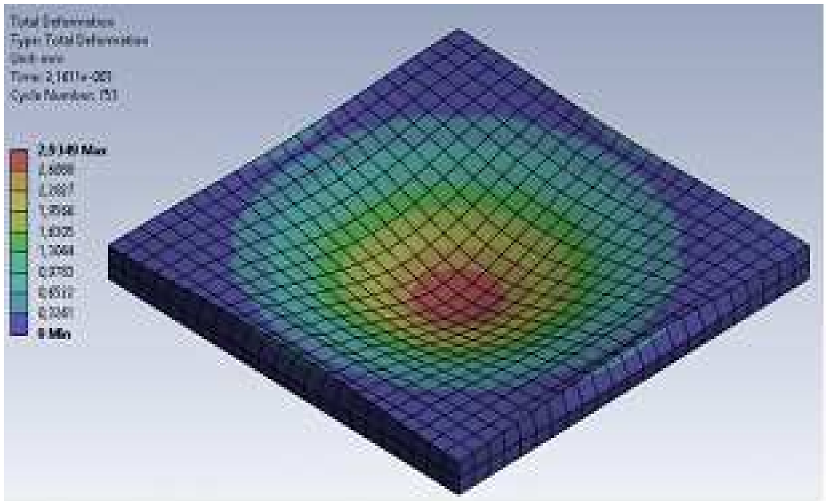


Рис. 5: Общий вид схемы

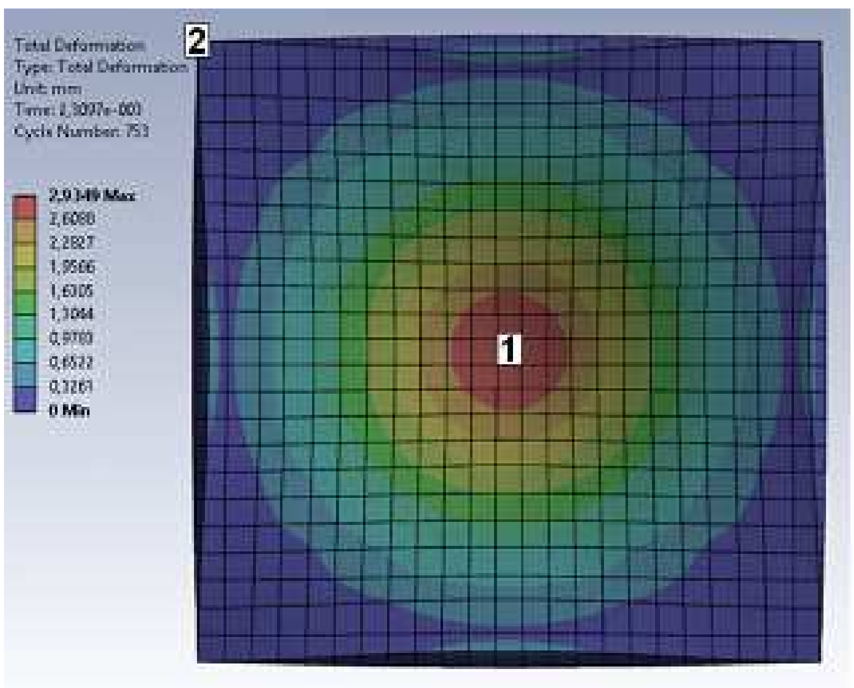


Рис. 6: Вид сверху и характерные точки для плиты

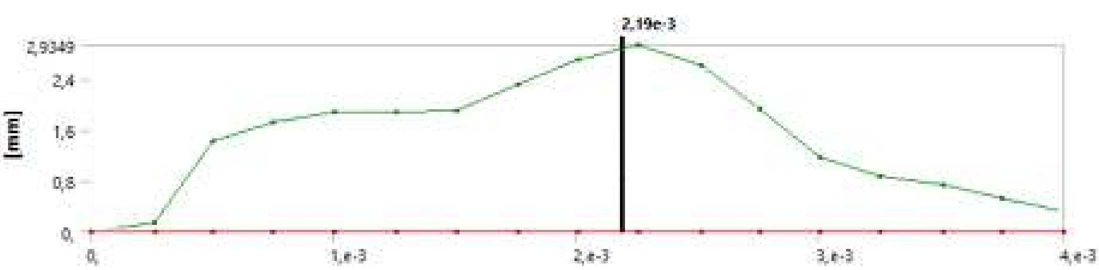


Рис. 7: График перемещений в зависимости от времени для центра плиты

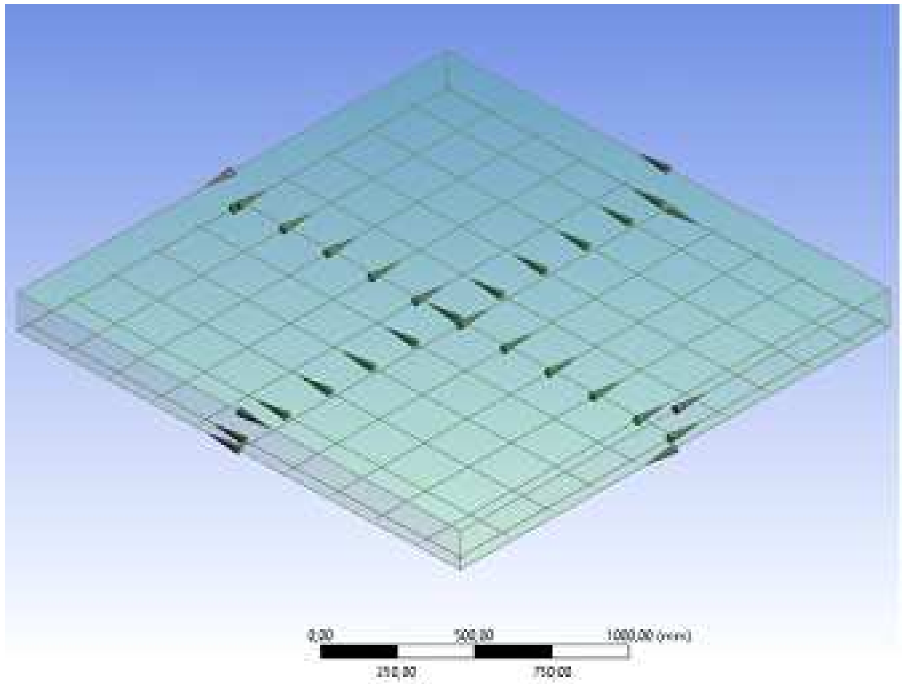


Рис. 8: Конструктивная схема с армированием

В качестве примера далее в развитии предлагаемого подхода, осуществлен расчет железобетонной плиты (рис. 8), состоящей из металлического арматурного каркаса (арматуры) имеющего E=260000 МПа – модуль Юнга, $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона, и бетона, имеющего E=38000МПа – модуль Юнга, $\nu = 0,2$ – коэффициент Пуассона.

На рис. 9-10 показана деформированная схема плиты, в том числе отдельно для арматуры.

На рис. 11 показаны графики перемещения характерных точек (мм) во времени (с).

3. Заключение

Основные научные и практические результаты заключаются в следующем.

Найдены условия разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с использованием усовершенствованной методики расчета динамических задач. Методика основана на расчете функционала мощности упругой деформации с учетом сил инерции и критерия прочности, что позволяет прогнозировать возникающее напряженно-деформированное состояние элементов конструкции, динамику ее изменения во времени и дает возможность анализировать образование и развитие очагов разрушения.

Применением современных программных комплексов (поставленных совместно с ANSYS программное обеспечения LS–DYNA), основанных на методе конечных элементов обеспечивает надежные и достоверные результаты, повышает уровень автоматизации проводимых расчетов, улучшает эффективности работы инженеров-строителей при проектировании сооружений. Установлено, что программный комплекс LS-DYNA в сочетании с моделью бетона RHT в отличие от существующих теоретических моделей, позволяет легко и эффективно учитывать различные дополнительные факторы, такие как армирование и физическую нелинейность материалов, а также сложную конфигурацию сооружений и расположение внешней динамической нагрузки.

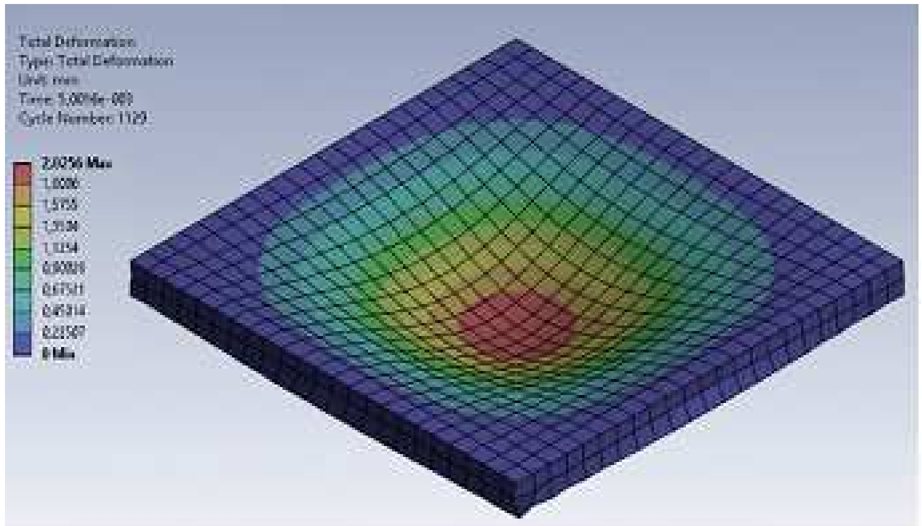


Рис. 9: Деформированная схема плиты с учетом арматуры в плане

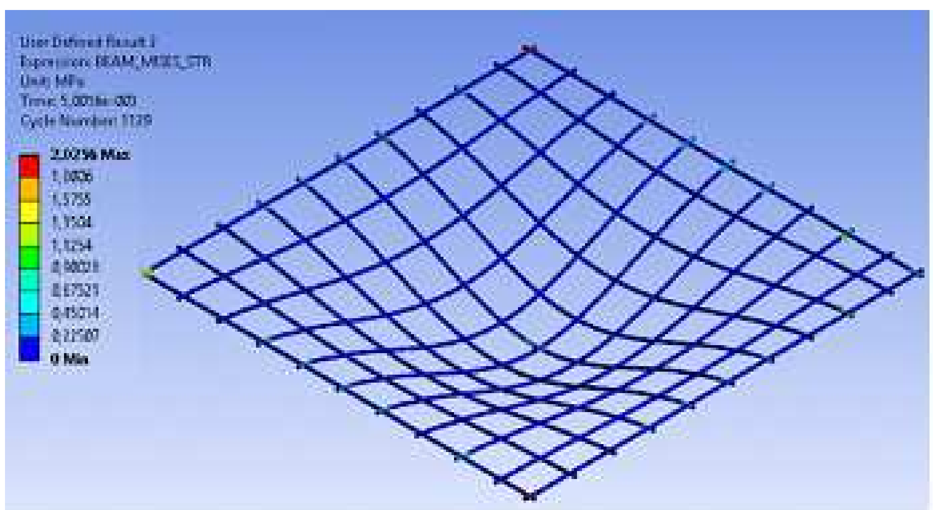


Рис. 10: Схема деформированной арматуры в плите

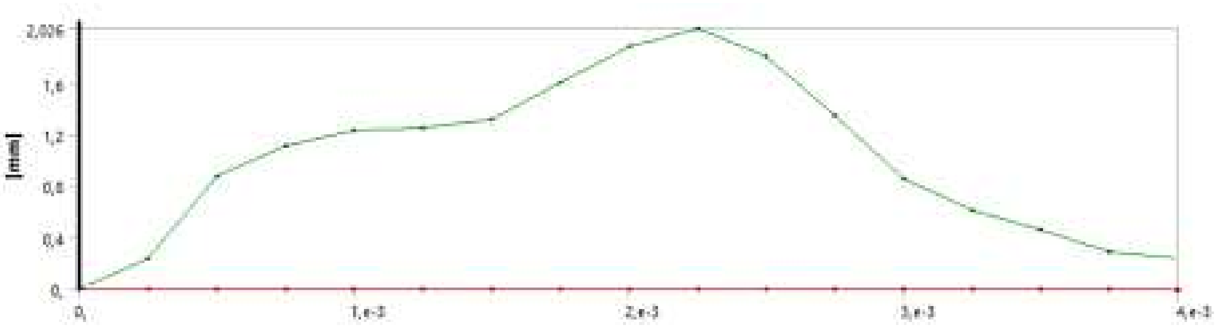


Рис. 11: График перемещений в зависимости от времени для центра армированной плиты

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчетков К.Е., Котляревский В.А., Забегаев А.В. Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий. Книга 1. М.: Изд-во АСВ. 1995. 320 с.

2. Баженов Ю.М. Бетон при динамическом нагружении. – М.:Стройиздат, 1970. 271 с.

3. Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. – Изд. 3-е, переработанное. – В 2 т. Т.1.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 832 с.

4. Саламахин Т.М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. М.: ВИА, 1974. 255 с.

5. Кук М.А. Наука о промышленных взрывчатых веществах / М.А. Кук.– М.: Недра, 1980. 455 с.

6. Володин Г.Т., Новиков А.С. Геометрическая нелинейность в задачах разрушения оболочечных конструкций взрывом.Тула: Известия ТулГУ. Технические науки. 2014. Вып. 3. С. 94-103

7. Володин Г.Т., Новиков А.С. Энергетический метод в задачах разрушения элементов конструкций взрывной нагрузкой // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 243-255

8. Володин Г.Т., Новиков А.С. О проблеме гарантированного разрушения оболочечных конструкций взрывом неконтактных зарядов конденсированных ВВ // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2013. Вып. I. С. 40-47

9. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Калинин А.Н., Кузовлева О.В., Агеев Е.В., Куриен Н.С. Разрушение пластины взрывной нагрузкой. Журнал «Известия Юго-Западн. государственного университета». Курск, Том 7, № 3(24). 2017. С 24-42

10. Makarov E.S., Cheglov A.E., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Sergeev N.N., Kazakov M.V., Breki A.D. Power required in the plastic deformation of metallic powder materials. Steelin-Translation, 2018. Vol. 48, № 9, pp. 597-602

11. Куриен Н.С. Свойства и разрушение материалов под воздействием ударной нагрузки. Доклады 6-я Международная научно-практическая конференция молодых ученых и студентов ОПЫТ ПРОШЛОГО – ВЗГЛЯД В БУДУЩЕЕ. ТулГУ, БНТУ, ДНТУ. г. Тула, 2 - 3 ноября 2016 г. С. 387-392.

12. Журавлев Г.М., Куриен Н.С. Постановка задачи математического моделирования взрывостойкости и гарантированного разрушения пластин взрывной нагрузкой // Научно-технический журнал. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Изд-во ОГУ им. И.С. Тургенева г. Орел, № 2. 2017, С. 56-63

13. Журавлев Г.М., Куриен Н.С. Математическое моделирование взрывного воздействия в ANSYS/AUTODYN // Сборник материалов XX Международной конференции "Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и архитектуры Тула: Изд-во ТулГУ, 2019, С. 191

14. Журавлев Г.М., Куриен Н.С. Математическое моделирование взрывного воздействия неконтактного заряда на изотропную бетонную плиту // Сборник материалов XX Международной конференции "Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и архитектуры Тула: Изд-во ТулГУ, 2019, С.194

15. Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности //Вестник инженеров и техников. 1937. №1. С.12-36.

16. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

17. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир. 1970. 436 с.

18. Бате К.Ю. Методы конечных элементов / К.Ю. Бате. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 1024 с.

19. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

20. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. М.: Мир, 1975. 543 с.

21. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. М.: Мир, 1984. 428 с.

22. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. М.: Мир, 1979. 392 с.

23. Moxnes J.F. et al. (2014) Experimental and numerical study of the fragmentation of expanding warhead casings by using different numerical codes and solution technics. Defence Technology, vol. 10, pp. 161-176.

24. Tham C.Y.(2005) Reinforced concrete perforation and penetration simulation using Autodyn 3D. Finite Elements in Analysis and Design,vol. 41, pp. 1401-1410.

25. Riedel W.(2000) Betonun terdynamis chenlasten, Meso- und makrome chanisc hemodelle und ihre parameter. Ph. D thesis, EMI-Bericht, 220 p.

26. Riedel W., Thoma K., Hiermaier S. Schmolinske E. (1999) Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500. Numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes. Proceeding of 9th international symposium on interaction of the effects of munitions with structures. Berlin, pp. 315-322.

REFERENCES

1. Kochetkov, K. E., Kotlyarevsky, V. A., Zabegaev, A. V., 1995, “Accidents and catastrophes. Prevention and elimination of consequences” [Avarii i katastrofy. Preduprezhdenie i likvidaciya posledstvij], Moscow, Izd-vo ACV, 320 p.

2. Bazhenov, Yu. M., 1970, “Concrete under dynamic loading” [Beton pri dinamicheskom nagruzhenii], Moscow, Izd-vo Strojizdat, 271 p.

3. Orlenko, L. P., 2002, “Physics of explosion” [Fizika vzryva], Moscow, FIZMATLIT, vol. 1, 832 p.

4. Salamakhin, T. M., 1974, “The physical basis of the mechanical actions of explosion and methods of calculation of explosive loads” [Fizicheskie osnovy mekhanicheskogo dejstviya vzryva i metody opredeleniya vzryvnyh nagruzok], Moscow, Izd-vo VIA, 255 p.

5. Cook, M. A., 1980, “The science of industrial explosives” [Nauka o promyshlennyh vzryvchatyh veshchestvah], Moscow, Izd-vo Nedra, 455 p.

6. Volodin, G. T., Novikov, A. C., 2014, “Geometric nonlinearity in problems of destruction of shell structures by explosion” [Geometricheskaya nelinejnost’ v zadachah razrusheniya obolochechnyh konstrukcij vzryvom], Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki, No. 3, pp. 94-103.

7. Volodin, G. T., Novikov, A. C., 2017, “Energy method in problems of structural elements destruction by explosive load” [Energeticheskij metod v zadachah razrusheniya elementov konstrukcij vzryvnoj nagruzkoj], Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki, No. 6, pp. 243-255.

8. Volodin, G. T., Novikov, A. C., 2013, “On the problem of guaranteed destruction of shell structures by explosion of non-contact charges of condensed” [O probleme garantirovannogo razrusheniya obolochechnyh konstrukcij vzryvom nekontaktnyh zaryadov kondensirovannyh VV], Vestnik TulGU. Ser. Differencialnye uravneniya i prikladnye zadachi, vol. 1, pp. 40-47.

9. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Kalinin, A. N., Kuzovleva, O. V., Ageev, E. V., Kuryan, N. S., 2017, “Plate Destruction by explosive load” [Razrushenie plastiny vzryvnoj nagruzkoj], Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta, vol. 7, No. 3 (24), pp. 24-42.

10. Makarov, E. S., Cheglov, A. E., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Sergeev, N. N., Kazakov, M. V., Breki, A. D., 2018, “Power required in the plastic deformation of metallic powder materials”, Steel in Translation, vol. 48, No. 9, pp. 597-602.

11. Kurien, N. S., 2016, “Properties and destruction of materials under impact load” [Svojstva i razrushenie materialov pod vozdejstviem udarnoj nagruzki], 6th international scientific and practical conference of young scientists and students EXPERIENCE of the PAST-a LOOK into the FUTURE, Tula, pp. 387-392.

12. Zhuravlev, G. M., Kurin, N. S., 2017, “Statement of the problem of mathematical modeling of explosion resistance and guaranteed destruction of plates by explosive load” [Postanovka zadachi matematicheskogo modelirovaniya vzryvostojkosti i garantirovannogo razrusheniya plastin vzryvnoj nagruzkoj], Fundamental’nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii, Orel, Izd-vo OGU im. I. S. Turgeneva, No. 2, pp. 56-63.

13. Zhuravlev, G. M., Kurin, N. S., 2019, “Mathematical modeling of explosive impact in ANSYS/AUTODYN” [Matematicheskoe modelirovanie vzryvnogo vozdejstviya v ANSYS/AUTODYN], proceedings of the XX International conference “Actual problems of construction, construction industry and architecture”, Tula, Izd-vo TulGU, p. 191.

14. Zhuravlev, G. M., Kurin, N. S., 2019, “Mathematical modeling of the explosive effect of a non-contact charge on an isotropic concrete slab” [Matematicheskoe modelirovanie vzryvnogo vozdejstviya nekontaktnogo zaryada na izotropnuyu betonnuyu plitu], proceedings of the XX International conference “Actual problems of construction, construction industry and architecture”, Tula, Izd-vo TulGU, p. 194.

15. Balandin, P. P., 1937, “On the hypothesis of strength” [K voprosu o gipotezah prochnosti], Bulletin of engineers and technicians, No. 1, pp. 12-36.

16. Novatsky, V., 1975, “Theory of elasticity” [Teoriya uprugosti], Moscow, Izd-vo Mir, 872 p.

17. Nowacki, V., 1970, “Dynamic problems of thermoelasticity” [Dinamicheskie zadachi termo-uprugosti], Moscow, Izd-vo Mir, 436 p.

18. Bathe, K. Y., 2010, “Finite element Methods” [Metody konechnyh elementov], Moscow, Izd-vo FIZMATLIT, 1024 p.

19. Bathe, K.Y., 1982, “Numerical methods of analysis and finite element method” [Chislennye metody analiza i metod konechnyh elementov], Moscow, Izd-vo Strojizdat,448p.

20. Zenkevich, O., 1975, “Finite element Method in engineering” [Metod konechnyh elementov v tekhnike], Moscow, Izd-vo Mir, 543 p.

21. Gallagher, R., 1984, “Finite element Method. Basics” [Metod konechnyh elementov. Osnovy], Moscow, Izd-vo Mir, 428 p.

22. Segerlind, L., 1979, “Application of the finite element method” [Primenenie metoda konechnyh elementov], Moscow, Izd-vo Mir, 392 p.

23. Moxnes, J. F. et al., 2014, “Experimental and numerical study of the fragmentation of expanding warhead casings by using different numerical codes and solution technics”, Defence Technology, vol. 10, pp. 161-176.

24. Tham, C. Y., 2005, “Reinforced concrete perforation and penetration simulation using Autodyn 3D”. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 41, pp. 1401-1410.

25. Riedel, W., 2000, “Betonun terdynamis chenlasten, Meso- und makrome chanisc hemodelle und ihre parameter”, Freiburg, Breisgau, EMI-Bericht, 220 p.

26. Riedel, W., Thoma, K., Hiermaier, S., Schmolinske, E., 1999, “Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500. Numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes”, proceeding of 9th international symposium on interaction of the effects of munitions with structures, Berlin, pp. 315-322.

Получено 17.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 539.52:669.14.018 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-374-389

История развития лазера и особенности его применения

И. В. Минаев, А. Н. Сергеев, А.Н. Кубанова, Н. М. Добровольский, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий

Минаев Игорь Васильевич — генеральный директор НПП «Телар», лауреат государственной премии РФ в области науки и техники.
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru

Сергеев Александр Николаевич — заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула
e-mail: ansergueev@gmail.com

Кубанова Анастасия Николаевна — инженер кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: chupeychik@mai.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

В работе описаны исторические аспекты изучения световых и электрических явлений, способствующих возникновению лазера и развития лазерной техники. Представлен принцип действия лазера, перечислены основные типы и характеристики лазеров. Показана зависимость мощности излучения от длины волны лазера. Рассказано о различных областях применения лазеров. Приведен список современной научной литературы с технологическими параметрами лазерной обработки различных материалов.

Ключевые слова: свет, лазер, принцип действия лазера, история развития лазера, области применения лазера, типы и характеристики лазера, лазерная техника, обработка лазером.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:
И. В. Минаев, А. Н. Сергеев, А.Н. Кубанова, Н. М. Добровольский, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий История развития лазера и особенности его применения // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4, С. 374–389.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 539.52:669.14.018 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-374-389

History of laser development and features of its application

I. V. Minaev, A. N. Sergeev, A. N. Kubanova, N. M. Dobrovolskiy, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy

Minaev Igor Vasilyevich — General Director of Scientific production enterprise «Telur», senior researcher of the center «High-Tech Laser Technologies», laureate of the state prize of the Russian Federation in the field of science and technology, Tula.
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: ansergueev@gmail.com
Kubanova Anastasia Nikolaevna — Head of Research and Development Department of JSC "POLEMA Engineer of the Department of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: chupeychik@mai.ru
Dobrovolskii Nikolai Mihailovich — Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor, Head of the Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Maliy Dmitriy Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The paper describes the historical aspects of the study of light and electrical phenomena that contribute to the emergence of the laser and the development of laser technology. The principle of operation of the laser is presented, the main types and characteristics of lasers are listed. The dependence of the radiation power on the laser wavelength is shown. It is told about various fields of application of lasers. The list of modern scientific literature with technological parameters of laser processing of various materials is given.

Keywords: light, laser, laser operating principle, laser development history, laser applications, laser types and characteristics, laser technology, laser treatment.

Bibliography: 36 titles.

For citation:
I. V. Minaev, A. N. Sergeev, A. N. Kubanova, N. M. Dobrovolsky, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, 2019, "History of laser development and features of its application", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 374–389.

1. Основные понятия о лазере, история его возникновения и развития

Лазер как устройство появился в результате слияния двух достижений науки и техники – квантовой физики и радиотехники. Квантовая физика напрямую связана с теорией о свете, природа возникновения которого занимала умы выдающихся мыслителей с древних времен.

Свет – это величайшая ценность, которой одарила нас природа, это необходимое условие существования растений, животных и человека. Световые лучи отражаются и преломляются, они могут усиливать и ослаблять друг друга, огибать препятствия, нагревать предметы, порождать электрический ток, обладать химическим воздействием. Все эти удивительные явления света изучались с древних времен [1]. Знаковые этапы изучения природы света представлены на схеме рисунка 1.

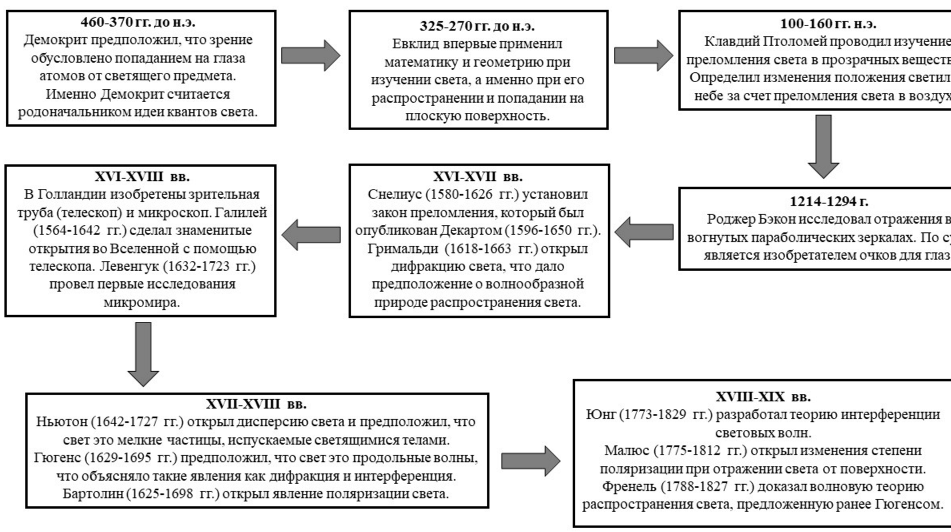


Рис. 1: Исторические этапы исследования природы света.

Изучение радиотехники неразрывно связано с исследованиями электрических явлений, активное развитие которых началось в XIX в. В частности, исследовался разряд лейденской банки (конденсатора, заряженного до высокого напряжения) [2]. Основные этапы развития электрических явлений и продолжение развития теории о свете, способствующие будущему возникновению лазера, приведены на схеме рисунка 2.

Итак, в начале XX века появилась теория света, согласно которой свет проявляет себя как волна или как частица в зависимости от условий наблюдений. Данная теория и послужила в 1954 г. созданию совершенно нового генератора радиоволн - мазера [2].

Конечно же одним из выдающихся научно-технических достижений XX века несомненно является разработка лазера. Его создание в 1960 г. дало начало бурному развитию всей лазерной техники [3]. Лазер (оптический квантовый генератор) – устройство, генерирующее когерентные электро-магнитные волны за счет вынужденного испускания или вынужденного рассеяния света активной средой, находящейся в оптическом резонаторе. Лазер является

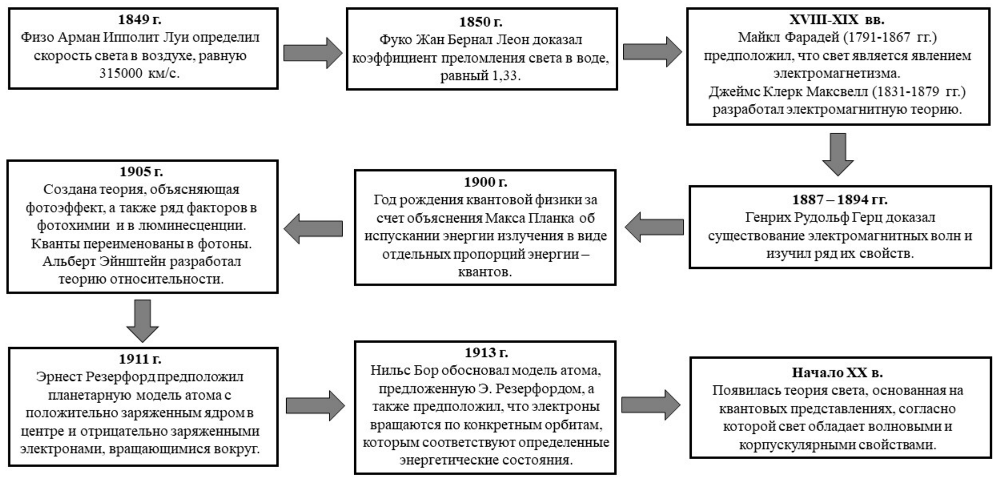


Рис. 2: Исторические этапы изучения электрических явлений и развития теории о свете.

устройством, преобразующим различные виды энергии (электрическую, световую, химическую, тепловую и т.п.) в энергию когерентного электро-магнитного излучения оптического диапазона [4]. Действие лазера основано на вынужденном испускании фотонов под действием внешнего электромагнитного поля [5, 6]. Лазер является источником монохроматического когерентного света с высокой направленностью светового луча. Само слово "лазер" составлено из первых букв английского словосочетания Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, означающего «усиление света в результате вынужденного излучения» [3, 7].

В состоянии теплового равновесия большая часть электронов находится на нижних уровнях, но путем какого-либо возбуждения можно осуществить инверсию состояния – увеличить число электронов на верхних уровнях. Из этого состояния под действием излучения с энергией, равной разности энергии верхнего и нижнего уровня, электроны перейдут на нижние уровни, а их энергия преобразуется в излучение с длиной волны и фазой возбуждающего электрона, усиливая его. Таким образом возникнет вынужденное излучение [8, 9]. Иначе говоря, основной физический процесс, определяющий действие лазера, — это вынужденное испускание излучения, происходящее при взаимодействии фотона с возбужденным атомом при точном совпадении энергии фотона с энергией возбуждения атома (или молекулы) [7]. В результате данного взаимодействия возбужденная частица переходит в невозбужденное состояние, а избыток энергии излучается в виде нового фотона с точно такой же энергией, как у первичного фотона.

Процессы перехода частицы в возбужденное состояние и обратно были постулированы А. Эйнштейном в 1916 г. Возможность усиления света в среде с инверсной населенностью за счет вынужденного испускания впервые указал в 1939 г. советский физик В. А. Фабрикант, предложивший создавать инверсную населенность в электрическом разряде в газе. В 1955 г. группа советских ученых Н. Г. Басова и А. М. Прохорова одновременно и независимо от американского ученого Ч. Таунсона предложили принцип создания первого в мире генератора квантов электромагнитного излучения на среде с инверсной населенностью, в котором вынужденное испускание в результате использования обратной связи приводило к генерации чрезвычайно монохроматического излучения. Позже, в 1964 г., данная группа ученых получила Нобелевскую премию за создание лазера.

В 1960 г. Американский физик Т. Мейман запустил первый квантовый генератор оптиче-

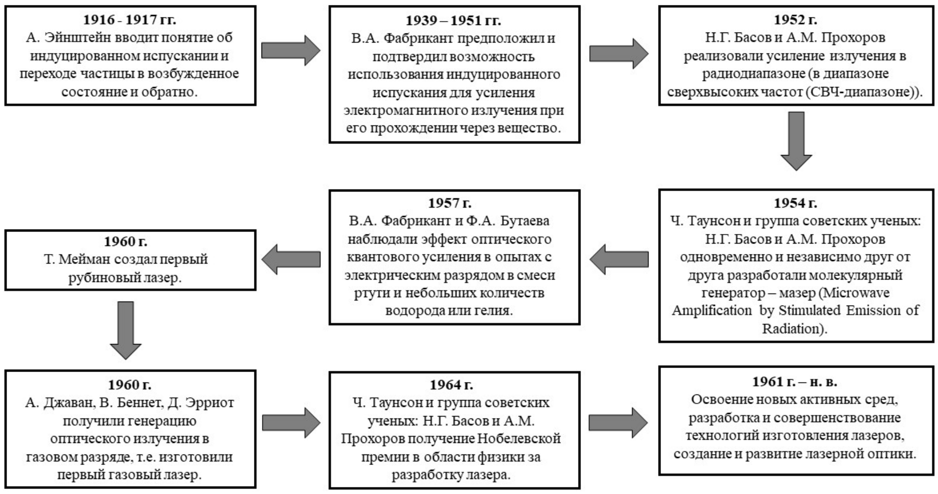


Рис. 3: Исторические этапы возникновения и развития лазера.

ского диапазона – лазер, в котором обратная связь осуществлялась с помощью оптического резонатора, а инверсная населенность возбуждалась в кристаллах рубина (кристалл оксида алюминия с добавкой хрома 0,05%), облучаемых излучением ксеноновой лампы-вспышки. Исторические этапы возникновения и развития лазера представлены на рисунке 3.

Таким образом, многовековое изучение теории света и спектроскопии, развитие радиофизики и квантовой физики, а также радиотехники привело к созданию совершенно нового источника света – лазера. Его разработка означала появление генератора электромагнитных волн светового диапазона с высокой временной и пространственной когерентностью и порогом действия, по причине которых устранялось принципиальное различие между источниками света и генераторами радиоволн

2. Разновидности лазеров

Лазер состоит из трех основных компонентов [5, 10]:

- активная среда (активный элемент), в которой создают инверсию населенностей (появляется люминесценция и сверхлюминесценция). Она может быть твердой, жидкой и газообразной;

- устройство для создания инверсии в активной среде (система накачки);

- устройство для обеспечения положительной обратной связи (оптический резонатор или резонатор Фабри-Перо), состоящий из двух плоских зеркал, расположенных параллельно.

Разновидности лазеров напрямую зависят от характера основных составляющих, в связи с чем выделяют следующие:

- по способу создания в среде инверсной населенности (по способу накачки):
- оптическая накачка;
- возбуждение электронным ударом;
- химическая накачка;
- в зависимости от рабочей среды:
- газы (аргон, гелий-неоновая смесь, углекислый газ);
- жидкости (растворы люминесцирующих веществ, например, родамин 6Ж);
- твердотельные (рубин, иттриево-алюминиевый гранат);

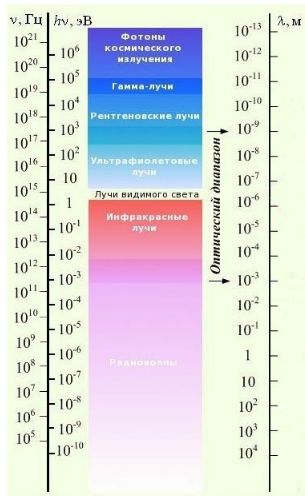


Рис. 4: Средняя длина и мощность наиболее распространенных лазеров [5].

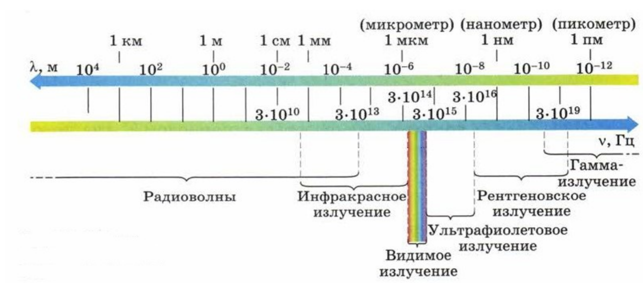


Рис. 5: Шкала электромагнитных волн [11].

- стекла (неодимовое стекло);
- кристаллы (рубин с примесями хрома, кобальта, никеля, урана и др. редкоземельных элементов);
- полуповодники (полупроводниковые и полосковые лазеры);
- по режиму работы:
- импульсный;
- непрерывный;
- по длине волны излучения:
- рентгеновские;
- ультрафиолетовые;
- видимого диапазона;
- ближнего инфракрасного излучения;
- дальнего инфракрасного излучения;
- конструкцией резонатора.

Существующие лазеры охватывают широкий диапазон длин волн – от ультрафиолетового до субмиллиметрового (инфракрасного). Зависимость мощности излучения лазера от длины его волны представлена на рис. 4.

Помимо ультрафиолетового и инфракрасного излучений за счет различных эффектов (генерация гармоник, параметрическое преобразование волн, вынужденные рассеяния) удалось значительно расширить диапазон волн лазерного излучения. На рисунке 5 представлена шкала электромагнитных волн (излучений) при изменении длины волны.

Расширенный перечень типов лазеров с описанием их основных характеристик приведен в таблице 1.

Таблица 1

Типа лазеров и их характеристики [5, 12]. Благодаря своим уникальным типам, характери-

	Активная среда	Способ возбуждения	Длина волны, мкм	Режим	Длительность импульсов	Частота повторения, Гц	Мощность	Расходимость излучения
Газовые лазеры	He + Ne	Газовый разряд	0,63; 1,15;	непрерывный	-	-	1 - 50 мВт	0,5 – 3 мрад
	CO_2	Газовый разряд в отпаянной трубке	3,39; 10,6	непрерывный	-	-	5 - 100 мВт	2 - 10 мрад
		Газовый разряд с прокачкой смеси	10,6	непрерывный импульсный	- 1 – 50 мкс	- 25	100 – 10^4 Вт 10^4 Вт	2 - 10 мрад 2 - 10 мрад
		Электроионизационный	10,6	импульсный	20 мкс	-	10^5 Вт	2 - 10 мрад
		Газодинамический	10,6	непрерывный	-	-	100 кВт	2 - 10 мрад
		Химический	10,6	непрерывный импульсный	- 1 мкс	- -	10 кВт 10^4 Вт	1 мрад 1 мрад
	HF	Химический	2,6 – 3,5	непрерывный импульсный	- 20 нс	- -	10 кВт $2 \cdot 10^{11}$ Вт	- -
	CF_3l	фотодиссоциация	1,315	импульсный	1 мкс – 1 мс	-	10^5 - 10^7 Вт	1 мрад
Жидкостные лазеры	Неорганич. Жидкости (>50)	Ламповая накачка, лазерная накачка	0,22 – 0,86	импульсный	0,1 – 10 мкс	0,1 – 500	10^4 - 10^5 Вт	2 - 4 мрад
	Огранич. красители	Лазерная накачка	0,55 – 0,67	непрерывный	-	-	0,1 – 1 Вт	0,2 мрад
Полупроводниковые лазеры	AlGaAs	Инжекция носителей через p-n-переходы	0,1 – 0,9	импульсный непрерывный	100 – 200 нс -	500 – 5000 -	10 – 50 Вт 0,1 – 1 Вт	4 – 6 град 4 – 6 град
	CdS	Электронным пучком	0,49 – 0,69	импульсный	3 нс	-	200 кВт	4 – 6 град
Твердотельные лазеры	Рубин	Ламповая накачка	0,694	Импульсный свободной генерации Импульсный с модулированной добротностью	1 – 0,5 мс 20 нс	10^{-3} – 1 1 – 2	10^5 - 10^6 Вт 10^6 - 10^9 Вт	10 – 40 мрад 1 – 3 мрад
	Стекло с примесью Nd	Ламповая накачка	1,058	Импульсный свободной генерации Импульсный с модулированной добротностью Режим синхронизации мод	1 – 3 мс 3 – 30 нс $5 \cdot 10^{-3}$ - 1 нс	10^{-3} – 1 10^{-3} – 0,1 -	10^5 - 10^6 Вт 10^5 - $5 \cdot 10^{10}$ Вт 10^{11} - 10^{13} Вт	3 – 15 мрад 0,5 – 1 мрад -

Рис. 6: Типа лазеров и их характеристики [5, 12].

стикам и свойствам лазеры нашли многочисленные применения в науке, технике и медицине.

3. Особенности и области применения лазеров

В качестве достоинств лазерного излучения отмечают следующие [2, 8]:

- высокая монохроматичность,
- высокий уровень выходной мощности,
- высокая когерентность,
- малая расходимость,
- высокая интенсивность лазерного излучения,
- короткая длительность импульса излучения,
- уникальные спектральные характеристики.

Эти достоинства позволяют использовать лазер в качестве тончайшего инструмента для исследования особенностей строения атомов и молекул и для выяснения биологической структуры живых клеток [1].

Лазерная технология обработки материалов и изделий основана, в основном, на применении твердотельных и газовых лазеров, работающих в импульсном, импульсно-периодическом и непрерывном режимах. Основные операции лазерной обработки связаны с тепловым действием лазерного излучения, основными преимуществами которого являются [4]:

- высокая локальность нагрева,
- кратковременность воздействия,
- малая зона термического влияния,
- возможность ведения технологических процессов в любых прозрачных средах и внутри герметически закрытых объемов.

Применение лазеров многообразно и может быть использовано в двух различных направлениях:

1. Нерезонансное взаимодействие мощных световых потоков с веществом в непрерывном и импульсном режимах (лазерная технология, лазерный синтез и др.);

2. Селективное воздействие на атомы, ионы, молекулы, вызывающие процессы фотодиссоциации, фотоионизации, фотохимической реакции (3D-печать в аддитивном производстве [13, 14]).

Лазеры нашли широкое применение в различных технологических областях промышленности для обработки таких материалов как: металл, бетон, стекло, ткань, кожа, полимеры. Такие технологические процессы как сварка, резка и плавление металлов при 3D-печати осуществляются главным образом газовыми лазерами, обладающими высокой средней мощностью. В частности, для резки применяются мощные лазеры на основе углекислого газа. В последнее время волоконные (твердотельне) лазеры применяют как для решения технологических задач по резке материалов, так и для сверления и сварки изделий в автомобильной и авиационной отраслях. Данный тип лазеров не требует водяного охлаждения, а их средняя мощность достигает 1 кВт [2, 5, 15].

В металлургии лазеры позволяют получить сверхчистые металлы, выплавляемые в вакууме или в контролируемой газовой среде. При помощи изменения режимов в процессе лазерной обработки возможно проводить локальные и зональные термообработки, тем самым изменяя характеристики как поверхности, так и структуры изделия [16-21, 22-28]. Сверхстабильные лазеры являются основой оптических стандартов частоты (лазерных сейсмографов и др. точных физических приборов). Лазерный отжиг применяют для кристаллизации как аморфных, так и поликристаллических пленок кремния, осажденного на аморфные подложки [8].

Луч лазера создает на поверхности материала температуру в несколько тысяч градусов, что может привести к мгновенному испарению данного материала в месте падения луча. Это открывает возможность обработки, например, шлифовку поверхностей таких сверхтвердых материалов как алмаз, корунд, специальные жаропрочные сплавы, так и осуществлять сварку тугоплавких материалов, таких как вольфрам и молибден. Современные лазерные установки способны проводить сложнопрофильную резку поверхностей путем программирования на системах числового программного управления [29, 30].

В сфере лазерной спектрометрии и нелинейной спектрометрии применяются лазеры на красителях (лазеры с перестраиваемой частотой) за счет возможности повышения разрешающей способности и чувствительности метода вплоть до наблюдения спектров отдельных атомов.

Лазеры нашли широкое распространение в медицине в качестве бескровного скальпеля в офтальмологии, при лечении кожных заболеваний. При помощи лазерных технологий удалось разработать методику, позволяющую определять ядра клеток и различать здоровые клетки от злокачественных, т.е. проводить биопсию в процессе операции. В области ангиологии фемтосекундные лазеры применяют для изготовления имплантируемых пластмассовых трубок, искусственно замещающих кровеносные сосуды в теле человека. В отрасли генной инженерии с применением лазерных технологий проводятся исследования в области микрохирургии биологической клетки [2].

С появлением лазеров начались исследования по повышению стабильности их частоты. На основе лазеров были созданы источники электромагнитных волн оптического диапазона с высокой стабильностью частоты. Это способствовало применению лазеров в военной отрасли для навигации, точного определения расстояния до объекта и скорости объекта. Уже сейчас лазерные технологии решают задачи по запуску космических и/или крылатых ракет и управление их полетом. Данное применение лазера (как правило, используются фемтосекундные лазеры) так же используется для создания компактных и сверхточных оптических часов. В военной сфере так же широко распространены химические лазеры, особенностью которых является автономность от источников электроэнергии для создания активной среды. Данный тип лазеров работает в непрерывном режиме и способен выдавать мощность 2,2 МВт, за счет чего используется при создании лазерного оружия.

В космической сфере применение лазеров позволяет определить размеры звезд и их угловой размер с точностью до 0,007ґґ, что превосходит возможности лучших оптических телескопов.

В области экологии лазерные локаторы применяются для контроля распределения загрязнений в атмосфере на различных высотах, определяют скорости воздушных течений, состав и температуру атмосферы.

Лазерные технологии применяют для изготовления тонких пленок из газообразного сырья путем химического осаждения с применением световой энергии.

Во многих лабораториях мира проводятся работы по лазерному термоядерному синтезу, для проведения которого необходима лазерная энергия мощностью более 10 кДж и с импульсом в несколько наносекунд. Научные лаборатории, занимающиеся физикой низких температур, стремятся приблизиться к абсолютному нулю при экспериментах. Благодаря использованию лазерных ловушек для охлаждения атомов в 1955 г. удалось снизить температуру до 2-3 мкК. Научно установлено, что энергия лазерного излучения всего в 1-10 Дж, сосредоточенная в фемтосекундном импульсе, дает пиковую мощность близкую в петаватту (1 ПВт = 10^{15} Вт). При фокусировании данного лазерного пучка возможно получить интенсивность до 10^{21} Вт/см^2 [2].

В повседневной жизни каждый человек так же встречается с лазерами. Особенно широко распространены полупроводниковые (диодные) лазеры, которые используются в принтерах, музыкальных проигрывателях, компьютерах, фонарях, детских игрушках. Данные лазеры перекрывают широкий диапазон волн – от 630 до 1600 нм -, и имеют весьма компактные размеры (300*300*100 мкм) при достаточно высоком КПД (50%) [2].

Применение и развитие лазеров позволило ответить на множество вопросов в области астрономии [5, 15]:

- уточнение астрономической постоянной и систем космической навигации,
- расширение знаний об атмосферах и строении поверхности планет,
- измерение скоростей вращения планет.

Основные разновидности сфер применения в зависимости от типа лазера представлены в таблице 2.

Таблица 2

Лазерные технологические процессы [4, 31, 32].

Вид обработки	Особенности лазера	Сфера применения
Сверление отверстий сложного профиля с точностью обработки 1 мкм.	Импульсные лазеры на неодимовом стекле, иттрий-алюминиевом гранате (ИАГ) или СО2. Параметры лазера: — энергия от десятых долей до десятков Дж; — длительность импульса 0,1-1 мс; — плотность потока энергии до 10 МВт/см^2.	— Обработка твердых, хрупких, тугоплавких материалов; — изготовление стальных и алмазных фильер.

Резка с шириной реза 5-30 мкм и скрабирование.	Газовые лазеры (CO2-лазер) на молекулярном азоте либо твердотельные лазеры на ИАГ с ниодимом. Параметры лазера: — средняя мощность 10-50 Вт; — частота следования импульсов 1 кГц.	— Изготовление интегральных схем; — Резка листовых материалов.
Сварка с толщиной сварного шва 0,01-1 мм.	Импульсные лазеры с интенсивностью 0,1-1 МВт/см2.	Сварка лазером позволяет соединять металлы и сплавы, не свариваемые обычным способом (W с Cr или со сталью).

Благодаря возникновению и развитию лазеров в мире появились такие новые научные направления как нелинейная оптика и волоконная оптика. Развитие лазерной науки интенсивно продолжается. Так, успешно осваиваются новые диапазоны длин волн от миллиметровых волн до мягкого рентгена. Пиковые мощности современных лазеров достигают петаватта (1 ПВт = 10^{15} Вт), а работа лазеров в импульсном режиме позволяет получить длительность порядка фемтосекунды (1 фс = 10^{-15} с) [14].

Рассмотрение даже столь небольшого числа применений лазера демонстрирует его уникальные свойства. Наряду с транзистором и быстродействующим компьютером лазер занимает важное место в развитии информатики с возможностью передавать информацию со сверхвысокой скоростью передачи, соответствующей частоте 10^{14}- 10^{15} Гц.

Различные области практического применения и развития лазеров приведены в таблице 3 и в работах [14-36].

Таблица 3

Технология применения лазеров различных характеристик

Особенности лазера	Лазеры невысокой и средней мощности (газовые лазеры импульсно-периодического действия, лазеры на кристаллах иттрий-алюминиевого граната с примесью неодима).	Лазеры большой средней мощности более 1 кВт.
Виды обработки	Сверление тонких отверстий диаметром 1-10 мкм и глубиной до 10-100 мкм.	Резка и сварка толстых металлических (как правило стальных) листов; Резка мрамора, гранита, раскрой тканей, кожи; Поверхностная закалка, наплавление и легирование крупногабаритных деталей; Очистка зданий от поверхностных загрязнений.

Сферы применения	Часовая промышленность; изготовление фильер для прокатки; Резка и сварка в области микроэлектроники и электровакуумной промышленности; Маркировка миниатюрных изделий, полиграфическое дело; Медицина.	Применение как источника энергии для получения электрического тока, механической энергии, энергии химических процессов; Машиностроение; Автомобилестроение; Промышленность строительных материалов; Аддитивные технологии.

За годы развития лазерной аппаратуры (с 1960 г.) достигнут большой прогресс как в области увеличения мощности излучения лазера, так и в сокращении длительности излучения, близкому к периоду световой волны, составляющему 1-2 фемтосекунды.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Билимович Б. Ф. Световые явления вокруг нас: Кн. Для внеклас. Чтения учащихся 8-10 кл. – М.: Просвещение, 1986. 176 с
2. Крюков П. Г. Лазер – новый источник света. М.: Бюро Квантум, 2009. – 176 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 110. Приложение к журналу «Квант» №2/2009.)
3. Тарасов Л.В. Оптика, рожденная лазером. Книга для внеклассного чтения. 8-10 кл. М., «просвещение», 1977.
4. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. Кол. Д.М. Алексеев, А.М. Балдин, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. – М.: Сов. энциклопедия. Т. II. Добротность – Магнитооптика. 1990. 703 с
5. Физика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – 4-е изд. – М.: большая Российская энциклопедия, 1999. 944 с.
6. Шавлов А., Фогель С., Далберджер Л., Оптические квантовые генераторы (лазеры), пер. с англ., М., 1962.
7. Энциклопедический словарь юного физика / Сост. В.А. Чуянов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Педагогика, 1991. 336 с.
8. Гонда С., Сэко Д., оптоэлектроника в вопросах и ответах: Пер. с японского. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1989. 184 с.
9. Лазер. Усов С.В., Минаев И.В., Зверев Ю.Б., Зарубин М.Ю., Грашкин И.Л. патент на изобретение RUS 2229761 08.04.2002.
10. Звелто О., Физика лазеров, пер. с англ., М., 1979.
11. Платформа Материалов Pandia.ru. Режим доступа: https://pandia.ru/text/82/090/23571.php
12. Справочник по лазерам, под ред. А.М. Прохорова, пер. с англ., т. 1-2, М., 1978.
13. Масайло Д. В. Разработка ресурсосберегающей технологии производства сферических порошковых материалов из техногенных отходов машиностроения (стружки) и их использование в аддитивных технологиях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург 2019 г.

14. The impact of the strategy of laser treatment on structure formation of steel in a state of pre-transformation. Gvozdev A.E., Minayev I. V., Tikhonova I.V., Sergeev A.N., Chukanov A.N., Khonelidze D.M., Maliy D.V. В сборнике: Междисциплинарне проблемы аддитивных технологий. Сборник тезисов III Всероссийского научного семинара с международнвм участием. Национальный исследовательский Томский политехнический университет. 2017. С. 27-28.

15. О'Шиа Д., Коллен Р., Родс У., Лазерная техника, пер. с англ., М., 1980.

16. Особенности лазерной резки медных и алюминиевых сплавов. Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Тихонова И.В., Гусев А.Д., Стаханова Я.А., Кутепов С.Н., Гвоздев А.Е., Малий Д.В., монография / Тула, 2019.

17. Методология выбора режимов лазерной резки листов из конструкционных сталей для обеспечения требуемого комплекса показателей качества поверхности. Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Тихонова И.В., Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Сергеев А.Н., Кутепов С.Н., Малий Д.В. Материаловедение. 2019. №10. С. 25-32.

18. Основы лазерной и газопламенной обработки конструкционных сталей. Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Тихонова И.В., Сергеев А.Н., Кутепов С.Н., Комарова М.Ю., Гвоздев А.Е. Монография / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ФГБОУ ВО «тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. толстого», ФГБОУ ВО «тульский государственный университет», Академия проблем качества Российской Федерации. Тула, 2018.

19. Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure (Влияние содержания углерода и параметров лазерной резки на строение и протяженность зоны термического влияния стальных листов). Sergeev N.N., Minaev I.V., Gvozdev A.E., Tsyganov I. A., Tikhonova I.V., Alyavdina E.S., Gubanov O.M., Breki A.D. Steel in Translation. 2018. Т. 48. № 5. С. 313-319.

20. Влияние химического состава листового проката и параметров лазерной обработки на показатели качества. Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Тихонова И.В., Комарова М.Ю., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Кутепов С.Н., Бреки А.Д., Калинин А.А., Малий Д.В. В сборнике: VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Сборник материалов. 2017. С. 208-209.

21. Зависимость показателей качества поверхности от режимов лазерной и газопламенной обработки листового проката из углеродистых сталей. Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Гвоздев А.Е., Минаев И.В., Алявдина Е.С., Сергеев А.Н., Бреки А.Д., Кутепов С.Н., Калинин А.А., Малий Д.В. В сборнике: VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Сборник материалов. 2017. С. 210.

22. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting. Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Minayev I.V., Tikhonova I.V., Sergeyev A.N., Khonelidze D.M., Maliy D.V., Golyshev I.V., Kolmakov A.G., Provotorov D.A. Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. С. 148-152.

23. Распределение температур и структура в зоне термического влияния для стальных листов после лазерной резки. Гвоздев А.Е, Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Колмаков А.Г., Тихонова И.В., Сергеев А.Н., Провоторов Д.А., Хонелидзе Д.М., Малий Д.В., Голышев И.В. Материаловедение. 2016. № 9. С. 3-7.

24. Характеристики поверхности и структуры зоны термического влияния листа стали марки 20 после лазерной резки. Тихонова И.В., Сергеев Н.Н., Минаев И.В., Алявдина А.Е., Гвоздев А.Е, Калинин А.А. В сборнике: ДЕФОРМАЦИЯ И РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И НАНОМАТЕРИАЛОВ. Сборник материалов. 2015. С. 240-241.

25. Характеристики поверхности и структуры зоны термического влияния листов стали марки 65Г после лазерной резки. Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Минаев И.В., Комарова М.Ю., Гвоздев А.Е, Калинин А.А, Авдонин А.А., Новикова В.В. В сборнике: ДЕФОРМАЦИЯ И РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И НАНОМАТЕРИАЛОВ. Сборник материалов. 2015. С. 241-242.

26. Многопараметрическая оптимизация параметров лазерной резки стальных листов. Гвоздев А.Е., Голышев И.В., Минаев И.В., Сергеев А.Н., Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Хонелидзе Д.М., Колмаков А.Г. Материаловедение. 2015. № 2. С. 31-36.

27. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets. Gvozdev A.E., Golyshev I.V., Minayev I.V., Sergeyev A.N., Sergeyev N.N., Tikhonova I.V., Khonelidze D.M., Kolmakov A.G. Inorganic Materials: Applied Research. 2015. Т. 6. № 4. С. 305-310.

28. Влияние параметров лазерной резки на качество поверхности реза стальных листов. Минаев И.В., Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Гвоздев А.Е, Хонелидзе Д.М., Голышев И.В. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 3. С. 50-58.

29. High-power impulse yag laser system for cutting, welding and perforating of super hard materials. Usov S.V., Minaev I.V. Journal of Materials processing Technology. 2004. Т. 149. № 1-3. С. 541-545.

30. Автоматизированные лазерные технологические комплексы для изготовления сложнопрофильных изделий из тонколистового материала. Усов С.В., Минаев И.В., Ануфриев А.И., Кокоулин М.М., Зверев Ю.Б., Зарубин М.Ю., Кузнецов К.Л., Выставкина В.В., Тереховкина Т.Н., Фомичев А.Г., Курочкин И.Е. Вестник машиностроения. 1992. № 5. С. 45.

31. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Кокора А.Н., лазерная обработка материалов, М., 1975.

32. Промышленное применение лазеров, под ред. Г. Кебнера, пер. с англ., М., 1988.

33. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. В. 4(2). с. 113-117.

34. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1-27.

35. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 9. С. 378-382.

36. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5-9.

REFERENCES

1. Bilimovich, B. F., 1986, "Light phenomena around us: Book. For extracurricular activities" [Svetovye yavleniya vokrug nas], Moscow, Education, 176 p.

2. Kryukov, P. G., 2009, "Laser-a new light source" [Lazer – novyj istochnik sveta], Moscow: Bureau Quantum, 176 p.

3. Tarasov, L. V., 1977, "Optics born by laser" [Optika, rozhdennaya lazerom], Moscow, Education, 143 p.

4. Prokhorov, A. M., Alekseev, D. M., Baldin, A. M., Bonch-Bruevich, A. M., Borovik-Romanov, A. S., et al., 1990, "Physical encyclopedia" [Fizicheskaya enciklopediya], Moscow, 703 p.

5. Prokhorov, A. M.,1999, "Physics. Great encyclopedic dictionary" [Fizika. Bol'shoj enciklopedicheskij slovar'], Moscow, Big Russian Encyclopedia, 944 p.

6. Shavlov, A., Vogel, S., Dalberger, L., 1962, "Optical quantum generators (lasers)" [Opticheskie kvantovye generatory (lazery)], Moscow, 1962.

7. Chuyanov, V. A., 1991, "Encyclopedic dictionary of young physicist" [Enciklopedicheskij slovar' yunogo fizika], Moscow, Pedagogy, 1991, 336 p.

8. Gonda, S., Seko, D., 1989 "Optoelectronics in questions and answers" [Optoelektronika v voprosah i otvetah], Leningrad, Leningradskoe otdelenie, 184 p.

9. Usov, S. V., Minaev, V. I., Zverev, B. Yu., Zarubin, M. Y., Gruskin, l.L., 2002, "Laser", Patent for invention RUS 2229761 08.04.2002.

10. Zvelto, O., 1979, "Physics of lasers" [Fizika lazerov], Moscow, Mir, 540 p.

11. Materials Platform Pandia.ru. URL: https://pandia.ru/text/82/090/23571.php

12. Prokhorov, A. M., 1978, "Handbook of lasers" [Spravochnik po lazeram], vol. 1, Moscow, Mir, 472 p.

13. Samoilo, D. V., 2019, "Development of resource-saving technology of production of spherical powder materials from technogenic waste of mechanical engineering (chips) and their use in additive technologies" [Razrabotka resursosberegayushchej tekhnologii proizvodstva sfericheskih poroshkovyh materialov iz tekhnogennyh othodov mashinostroeniya (struzhki) i ih ispol'zovanie v additivnyh tekhnologiyah.], St. Petersburg, 20 p.

14. Gvozdev, A.E., Minaev, I. V., Tikhonova, I.V., Sergeev, A.N., Chukanov, A.N., Khonelidze, D.M., Maliy, D.V., 2017, "The impact of the strategy of laser treatment on structure formation of steel in a state of pre-transformation" [Vliyanie strategii lazernoj obrabotki na strukturoobrazovanie stali v sostoyanii predvaritel'noj transformacii], Proceedings of III scientific seminar with international participation, Tomsk, Nacional'nyj issledovatel'skij Tomskij politekhnicheskij universitet, pp. 27-28.

15. O'Shea, D., Collen, R., Rhodes, W., 1980, "Laser technology", Moscow, 256 p.

16. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V., Gusev, A.D., Stakhanova, Ya. A., Kutepov, S. N., Gvozdev, A.E., Maliy, D. V., 2019, "Features of laser cutting of copper and aluminum alloys" [Osobennosti lazernoj rezki mednyh i alyuminievyh splavov], Tula, 123 p.

17. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., Sergeev, A. N., Kutepov, S.N., Maliy, D. V., 2019, "Methodology for mode selection in laser cutting of sheets of structural steel to provide the required set of indicators of the quality of the surface" [Metodologiya vybora rezhimov lazernoj rezki listov iz konstrukcionnyh stalej dlya obespecheniya trebuemogo kompleksa pokazatelej kachestva poverhnosti.], Materialovedenie, No. 10, pp. 25-32.

18. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., Komarova, M. Yu., Gvozdev, A. E., 2018, "Fundamentals of laser and flame treatment of structural steels" [Osnovy lazernoj i gazoplamennoj obrabotki konstrukcionnyh stalej], Tula, 283 p.

19. Sergeev, N.N., Minaev, I.V., Gvozdev, A.E., Tsyganov, I. A., Tikhonova, I.V., Alyavdina, E.S., Gubanov, O.M., Breki, A.D., 2018, "Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure" [Vliyanie soderzhaniya ugleroda i parametrov lazernoj rezki na stroenie i protyazhennost' zony termicheskogo vliyaniya stal'nyh listov], Steel in Translation, vol. 48, No. 5, pp. 313-319 p.

20. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Tikhonova, I. V., Komarova, M. Yu., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., Kutepov, S. N., Breki, A.D., Kalinin, A. A., Maliy, D. V., 2017, "Influence of chemical composition of sheet metal and laser treatment parameters on quality indicators" [Vliyanie himicheskogo sostava listovogo prokata i parametrov lazernoj obrabotki na pokazateli kachestva], Proceedings of VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials Moscow, pp. 208-209.

21. Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Gvozdev, A. E., Minaev, I. V., Alyavdina, E. S., Sergeev, A. N., Breki, A.D., Kutepov, S. N., Kalinin, A. A., Maliy, D. V., 2017, "The dependence of the quality parameters of the surface from laser and gas-flame processing of sheet metal of carbon steel" [Zavisimost' pokazatelej kachestva poverhnosti ot rezhimov lazernoj i gazoplamennoj obrabotki listovogo prokata iz uglerodistyh stalej], Proceedings of VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials". Moscow, p. 210.

22. Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Minayev, I.V., Tikhonova, I.V., Sergeyev, A.N., Khonelidze, D.M., Maliy, D.V., Golyshev, I.V., Kolmakov, A.G., Provotorov, D.A., 2017, "Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting", Inorganic Materials: Applied Research, vol. 8, No. 1, pp. 148-152.

23. Gvozdev, A. E, Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Kolmakov, A. G., Tikhonova, I. V., Sergeev, A. N., Provotorov, D. A., Honelidze, D. M., Maliy, D. V., Golyshev, I. V., 2016, "Temperature distribution and structure in the heat affected zone for steel sheets after laser cutting" [Raspredelenie temperatur i struktura v zone termicheskogo vliyaniya dlya stal'nyh listov posle lazernoj rezki], Materialovedenie, No. 9, pp. 3-7.

24. Tikhonova, I. V., Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Alyavdina, A. E., Gvozdev, A. E., Kalinin, A. A., 2015, "Characteristics of the surface and structure of the heat affected zone of steel sheet mark 20 after laser cutting" [Harakteristiki poverhnosti i struktury zony termicheskogo vliyaniya lista stali marki 20 posle lazernoj rezki], Proceedings of Deformation and Destruction of Materials and Nanomaterials, Moscow, pp. 240-241.

25. Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Minaev, I. V., Komarova, M. Yu., Gvozdev, A. E., Kalinin, A. A., Avdonin, A. A., Novikova, V. V.,2015, "Characteristics of the surface and structure of the heat-affected zone of 65G steel sheets after laser cutting" [Harakteristiki poverhnosti i struktury zony termicheskogo vliyaniya listov stali marki 65G posle lazernoj rezki], Proceedings of Deformation and Destruction of Materials and Nanomaterials, Moscow, pp. 241-242.

26. Gvozdev, A. E., Golyshev, I. V., Minaev, I. V., Sergeev, A. N., Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Honelizde, D. M., Kolmakov, A. G., 2015, "Multiparametric optimization of parameters of laser cutting of steel sheets" [Mnogoparametricheskaya optimizaciya parametrov lazernoj rezki stal'nyh listov], Materialovedenie, No. 2, pp. 31-36.

27. Gvozdev, A.E., Golyshev, I.V., Minayev, I.V., Sergeyev, A.N., Sergeyev, N.N., Tikhonova, I.V., Khonelidze, D.M., Kolmakov, A.G., 2015, "Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets", Inorganic Materials: Applied Research, vol. 6, No. 4, pp. 305-310.

28. Minaev, I. V., Sergeev, N. N., Tikhonova, I. V., Gvozdev, A. E., Honelidze, D. M., Golyshev, I. V., 2014, "Influence of laser cutting parameters on the cutting surface quality of steel sheets" [Vliyanie parametrov lazernoj rezki na kachestvo poverhnosti reza stal'nyh listov], Proceedings of the Tula State University. Technical science, No. 3, pp. 50-58.

29. Usov, S.V., Minaev, I.V., 2004, "High-power impulse yag laser system for cutting, welding and perforating of super hard materials", Journal of Materials processing Technology, vol. 149, No. 1-3, pp. 541-545.

30. Usov, S. V., Minaev, I. V., Anufriev, A. I., Kokoulin, M. M., Zverev, Yu. B., Zarubin, M. Yu., Kuznetsov, K. L., Vystavkina, V. V., Terekhovkina, T. N., Fomichev, A. G., Kurochkin, I. E., 1992, "Automated laser technological complexes for the manufacture of complex products from thin-sheet material", Bulletin of mechanical engineering, No. 5. p. 45.

31. Rykalin, N. N., Uglov, A. A., Kokora, A. N., 1975, "Laser processing of materials", Moscow, 296 p.

32. Kebner, G., 1988, "Industrial application of lasers", Moscow, 280 p.

33. Rakhmonov, Z. H., 2013, "The Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes" [Raspredelenie znachenij harakterov Dirihle v posledovatel'nosti sdvinutyh prostyh chisel], Izvestiya of Saratov University. New series. Mathematics Series. Mechanics. Informatics, vol. 13. No. 4(2), pp. 113-117.

34. Rakhmonov, Z. H., 2017, "Sums of values of non-capital characters in the sequence of shifted primes" [Summy znachenij neglavnyh harakterov po posledovatel'nosti sdvinutyh prostyh chisel], MIAN, vol. 299, pp. 1-27.

35. Rakhmonov, Z. H., 2017, "On the estimation of the sum of values of non-capital characters in the sequence of shifted primes" [Ob ocenke summy znachenij neglavnyh harakterov v posledovatel'nosti sdvinutyh prostyh chisel], Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, vol. 60, No. 9, pp. 378-382.

36. Rakhmonov, Z. H., 2013, "On the distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes" [O raspredelenii znachenij harakterov Dirihle v posledovatel'nosti sdvinutyh prostyh chisel], Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, vol. 56, No. 1, pp. 5-9.

Получено 17.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-390-395

АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН (19.07.1894 – 18.11.1959)

В. Н. Чубариков (г. Москва)

В. Н. Чубариков —доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

Статья посвящена выдающемуся математику Александру Яковлевичу Хинчину в связи с его 125-летием со дня рождения и 60–летием со дня кончины. Дан комментарий по результатам А.Я.Хинчина в теории чисел:

Ключевые слова: А.Я.Хинчин, представление числа в виде суммы двух простых чисел, двоичные дроби, непрерывные дроби, аддитивная теория чисел, линейные диофантовы приближения, теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений, количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера .

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН (19.07.1894 – 18.11.1959)// Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 390–395.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-390-395

ALEXANDER YAKOVLEVICH KHINCHIN(19.07.1894 – 18.11.1959)

V. N. Chubarikov (Moscov)

V. N. Chubarikov —doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the distinguished mathematician A.Ja.KHintchine in connection with his 125–year anniversary and 60-year of the his death. We give the comment of results of A.Ja.Khintchine in the number theory.

Keywords: A.Ja.Khintchine, the representation of the number as a sum of two primes, diadic fractions, continued fractions, the additive number theory, linear diophantine approximation, the transfer theorem for singular system of linear equations, the quantitative conception of the Kronecker's approximative theory.

Bibliography: 36 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2019, "ALEXANDER YAKOVLEVICH KHINCHIN (19.07.1894 – 18.11.1959) ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 390–395.

1. Биографическая справка

А.Я.Хинчин родился 19.07.1894 г. в с.Кондрово Медынского уезда Калужской области в семье главного инженера Кондровской бумажной фабрики.

Учился в реальном училище в Москве (учителя-математики М.Ф.Берг, К.Н.Рашевский).

В 1911 г. поступил на физико-математический факультет Московского университета (научные руководители: Д.Ф.Егоров, Н.Н.Лузин). 6.11.1914 г. сделал доклад об асимптотической производной на студенческом математическом кружке. 25.11.1915 г. учёный совет физико-математического факультета присудил золотую медаль за сочинение "Бесконечные ряды функций, их сходимость, почленное интегрирование и дифференцирование".

В 1916 г. закончил университет и оставлен в нём для подготовки к профессорскому званию.

1918 г. — преподаватель математики в Московском женском политехническом институте. 1919 г. — политехнический институт в Иваново-Вознесенске, декан физико-математического факультета пединститута.

С 1922 г. работает работает научным сотрудником Научно-исследовательского института математики и механики МГУ, (1932-1934) — директор. С 1927 г. — профессор МГУ, заведует кафедрой теории вероятностей, затем кафедрой математического анализа. Депутат Моссовета.

1938–1940 гг. — руководитель физико-математической секции Учебно-методического совета Наркомпроса РСФСР и кабинетом математики в НИИ школ Наркомпроса РСФСР.

1939 г. — член-корреспондент АН СССР.

1941 г. — лауреат Сталинской премии.

1943 г. — действительный член АПН РСФСР, избран членом Президиума.

А.Я.Хинчин — кавалер ордена Ленина и двух орденов Трудового Красного знамени.

18.11.1959 г. А.Я.Хинчин скончался.

2. К вопросу о представлении числа в виде суммы двух простых чисел (1922)

Дан элементарный вывод следующей асимптотики.

Пусть $T(n)$ обозначает число решений неравенства $p_1 + p_2 \leq n$ в простых числах p_1, p_2. Тогда при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$T(N) = \frac{n^2}{4 \ln^2 n}(1 + o(1)).$$

3. О двоичных дробях (1923)

Известны следующие соотношения

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\tau(n)\ln\ln n}{\ln n}=\ln 2,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\omega(n)\ln\ln n}{\ln n}=1,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n}=e^{\gamma},\qquad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)\ln\ln n}{n}=e^{-\gamma},$$

где $\tau(n)$ — число делителей числа n, $\omega(n)$ — число различных простых делителей числа $n, \sigma(n)$ — сумма всех делителей числа n и $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

В курсе математического анализа доказывается, что верхний предел последовательности равен верхнему предельному числу, а нижний предел — нижнему предельному числу, т.е.

$$\varlimsup_{n\to\infty}f(n)=\inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n}f(m)=L,\qquad \varliminf_{n\to\infty}f(n)=\sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n}f(m)=l.$$

Таким образом, для того чтобы доказать, что число L является верхним пределом последовательности $f(n)$ достаточно показать, что выполняются следующие два условия:
1) для любого натурального n имеем $\sup\limits_{m\geq n}f(m)\geq L$, т.е. найдется бесконечная последовательность натуральных чисел $m_k, k\geq 1$, такая, что $f(m_k)\geq L$,
2) для любого $\varepsilon>0$ найдется номер n_0 такой, что $\sup\limits_{m\geq n_0}f(m)<L+\varepsilon$, т.е. для всех номеров m, не меньших n_0, значения функции $f(m)$ меньше $L+\varepsilon$.

Далее рассмотрим следующую лемму Бореля – Кантелли, относящуюся к событиям, которые случаются “почти наверное”, и на которой основаны многие теоремы метрической теории чисел.

Лемма 1.2. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{B},P)$, и пусть*

$$B=\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n.$$

Тогда, если

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ сходится, то $P(B)=0$;

2) события A_n независимы и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ расходится, то $P(B)=1$.

В качестве арифметического следствия отсюда получаются знаменитые теорема Э.Бореля о “нормальных числах” и закон А.Я.Хинчина повторного логарифма.

Пусть x — иррациональное число, $0<x<1$. Разложим x в двоичную дробь. Рассмотрим первые n цифр в его разложении. Символом $\mu_n(x)$ обозначим разность между количеством нулей в его записи и числом $n/2$. Э.Борель установил, что для всех иррациональных x, за исключением множества меры нуль, при $n\to\infty$ имеем соотношение

$$\mu_n(x)=o(n).$$

В 1914 г. Ф.Хаусдорф уточнил это предельное соотношение. Он доказал, что при $\alpha>1/2$

$$\mu_n(x)=o(n^{\alpha}).$$

В том же году Г.Харди и Дж.Литтлвуд получили, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n\ln n}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С другой стороны, они доказали, что $\mu_n(x) = \Omega(\sqrt{n})$.

Теорема. (А.Я.Хинчин). *Пусть x — иррациональное число, которое представлено в виде двоичной дроби. Пусть в первых n цифрах его двоичного разложения нуль встречается $m(n)$ раз, и пусть $\mu(n) = m(n) - n/2$. Тогда для всех x, за исключением множества меры нуль, при $n \to \infty$ имеем*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n \ln \ln n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Одна теорема о непрерывных дробях и её арифметические приложения (1923)

Пусть x — иррациональное число, $0 < x < 1$. И пусть $a_n = a_n(x)$ обозначает n-й элемент разложения числа x в правильную непрерывную дробь вида

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}.$$

Положим

$$A_n = A_n(x) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, G(n) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Теорема 3.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и каждого иррационального x, за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \to \infty$ выполняются асимптотические неравенства*

$$A_n(x) \ll n^{\varepsilon}, \varlimsup_{n\to\infty} G(n) \le e^{e^{\sqrt{2}\ln 2}}.$$

В качестве приложения А.Я.Хинчин доказывает, что оценка В.Серпинского (1910) для любого иррационального числа при $n \to \infty$ сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(kx) = o(n), \quad \rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\},$$

неулучшаема.

Теорема 3.2. *Пусть $\omega(n) > 0$ — произвольная функция натурального аргумента n и при $n \to \infty$ имеем $\omega(n) \to 0$. Тогда найдётся иррациональное число x такое, что при $n \to \infty$ не выполняется соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(kx) = O(n\omega(n)).$$

Теорема 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого иррационального x, за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(kx) = O(\ln^{1+\varepsilon} n).$$

Теорема 3.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого иррационального x, за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(kx) = \Omega(\ln n).$$

5. К аддитивной теории чисел (1932)

Пусть заданы последовательности A и B неотрицательных целых чисел

$$A = \{a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots\}, \quad B = \{b_0 = 0 < b_1 < b_2 < \dots\},$$

и пусть $A(n), n \geq 0$, обозначает число элементов последовательности A, не превосходящих n.

Назовём, следуя Л.Г.Шнирельману, *плотностью* последовательности A величину

$$D(A) = \inf_{n>0} \frac{A(n)-1}{n}.$$

Определим, далее, *сумму* $C = \{c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \dots\}$ двух последовательностей A и B соотношением вида

$$C = A + B = \{c = a + b | a \in A, b \in B\}.$$

Пример. Пусть $A = B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 12, \dots\}$. Тогда

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, \dots\},$$

$$A(5) - 1 = 2, D(A) = \frac{2}{5}, C(11) - 1 = 9, D(C) = \frac{9}{11}, D(A) + D(B) = \frac{4}{5} < \frac{9}{11} = D(C).$$

Теорема 4.1. *Пусть* $D(A_1) = \dots = D(A_k)$. *Тогда*

$$D(\sum_{r=1}^{k} A_r) \geq \min\{1, \sum_{r=1}^{k} D(A_r)\}.$$

В 1942 г. Г.Б.Манн распространил это утверждение на последовательности с разными плотностями.

6. Об одном классе линейных диофантовых приближений (1926)

В этом исследовании А.Я.Хинчин отталкивается от известной **теоремы Л.Кронекера.** *Пусть действительные числа* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ *линейно независимы над кольцом целых чисел. Тогда точки*

$$(\{n\theta_1\}, \{n\theta_2\}, \dots, \{n\theta_n\})$$

образуют в единичном m*-мерном кубе всюду плотное множество.*

Обозначим символом $\|\theta\| = \min(\{\theta\}, 1 - \{\theta\})$ расстояние до ближайшего целого числа. Имеем, что $\|\theta_1 + \theta_2\| \leq \|\theta_1\| + \|\theta_2\|$ и для любого целого n справедливо неравенство $\|n\| \leq |n| \cdot \|\theta\|$.

Теорема 5.1. (А.Я.Хинчин: принцип переноса). *Пусть* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ *— любые иррациональные числа, и пусть* $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ *являются соответственно точными верхними гранями чисел* ω, ω' *таких, что неравенства*

$$\|u_1\theta_1 + \dots + u_n\theta_n\| \leq (\max_{1\leq j\leq n} |u_j|)^{-n-\omega},$$

$$\max_{1\leq j\leq n} \|x\theta_j\| \leq x^{-(1+\omega')/n}$$

имеют бесконечно много решений в целых числах $u_1, \dots, u_n, x$. *Тогда*

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \frac{\omega_1}{n^2 + (n-1)\omega_1}.$$

7. Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений (1948)

Пусть задана система n линейных форм вида

$$L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ji} x_i \quad (1 \le j \le n),$$

и пусть задана транспонированная система m линейных форм вида

$$M_i(u) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ji} u_j \quad (1 \le i \le m).$$

Система из n линейных форм $L_j(\mathbf{x})$ называется *сингулярной,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $X_0 = X_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $X > X_0$ система неравенств

$$\|L(\mathbf{x})\| < \varepsilon X^{-m/n}, |x_i| \le X,$$

имеет целое решение $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$. В противном случае система называется *регулярной.*

Заметим, что множество коэффициентов θ_{ji} образует в mn-мерном пространстве множество лебеговой меры нуль (по лемме Бореля – Кантелли).

Теорема 6.1. *Для того, чтоб система $L_j(\mathbf{x})$ была сингулярна, необходимо и достаточно, чтобы была сингулярна транспонированная система $M_i(\mathbf{u})$.*

8. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера (1948)

Основной результат аппроксимационной теории Кронекера — критерий того, чтобы система неравенств

$$|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j| < \frac{1}{t} \qquad (1 \le j \le n),$$

где θ_{ij} и α_j — вещественные числа, имела при любом $t > 0$ решения в целых числах x_i, y_j.

А.Я.Хинчин решает следующую задачу: найти критерий того, чтобы система неравенств

$$|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j| < \frac{c_1}{t} \qquad (1 \le j \le n),$$

где θ_{ij} и α_j — вещественные числа, имела при любом $t > 0$ решения в целых числах x_i, y_j при условии, что

$$|x_i| < c_2 \varphi(t) \qquad (1 \le i \le m),$$

причём c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные, а $\varphi(t)$ — любая положительная непрерывная неубывающая функция от t.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-396-399

Николай Григорьевич Чудаков

В. Н. Кузнецов (Саратов)

В. Н. Кузнецов, – профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, СГТУ.
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

Abstract

Работа посвящена сто пятнадцатой годовщине со дня рождения Николая Григорьевича Чудакова.

Ключевые слова: Николай Григорьевич Чудаков.

Библиография: 15 наименований.

Для цитирования:
В. Н. Кузнецов. Николай Григорьевич Чудаков // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4. С. 396-399

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-396-399

Nikolai Grigor'evich Chudakov

V. N. Kuznetsov (Saratov)

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

Abstract

The work is dedicated to the one hundred and fifteenth anniversary of the birth of Nikolai Grigoryevich Chudakov.

Keywords: Nikolai Grigor'evich Chudakov.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. N. Kuznetsov, 2019, "Nikolai Grigor'evich Chudakov", Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 4, pp. 396-399

Николай Григорьевич Чудаков (1904-1986)

В декабре 2019 года исполнилось сто пятнадцать лет со дня рождения крупного специалиста в области теории чисел, основателя и научного руководителя школы по теории чисел Саратовского государственного университета профессора Николая Григорьевича Чудакова.

Н. Г. Чудаков родился 14 декабря 1904 года в селе Лысовка Ново-Бурасовского района Саратовской области. Рано пробудившийся интерес к математике привел его на физико-математический факультет Саратовского университета. Вскоре он перешел в Московский университете, который окончил в 1927 году. С 1927 по 1930 год Н.Г. Чудаков был аспирантом МГУ. Его научным руководителем являлся член-корреспондент АН СССР В. В. Степанов. В 1930 году после окончания аспирантуры Н.Г. Чудаков приехал в Саратов и возглавил в Саратовском университете кафедру высшей математики.

В 1936 году Н. Г. Чудаков успешно защитил диссертацию в Математическом институте АН СССР им. В. А. Стеклова и сразу же получил ученую степень доктора физико-математических наук. В период с 1936 по 1940 год он жил и работал в Москве, а осенью 1940 года вернулся в Саратовский университет на должность заведующего кафедрой алгебры и теории чисел, которая незадолго до этого была организована в университете. Н.Г. Чудаков возглавлял эту кафедру до 1962 года. За период с 1962 по 1972 год он работал в Ленинградском отделении МИАН, а с 1972 по 1983 год он снова возглавляет кафедру алгебры и теории чисел. С 1983 года по состоянию здоровья Н. Г. Чудаков вынужден был перейти на должность профессора-консультанта.

С именем Николая Григорьевича Чудакова связан целый ряд крупных открытий в теории чисел, широко известных отечественным и зарубежным математикам. В 30-е годы, ознаменовавшиеся созданием знаменитого метода И. М. Виноградова, Н.Г. Чудаков мастерски применил этот метод к решению ряда трудных задач и важных проблем теории чисел. С их помощью Николай Григорьевич дал оценку для границы нулей дзета-функции в критической полосе. Этот результат позволил ему улучшить остаточный член в асимптотической формуле для числа простых, не превосходящих числа x, и уточнить оценку сверху разности двух соседних простых. В 40-е годы аналогичные результаты Н. Г. Чудаков получил и для арифметических прогрессий. Другое значительное открытие, сделанное им в 30-х годах, относится к аддитивной теории чисел. Он внес весомый вклад в решение бинарной проблемы Гольдбаха, а именно доказал, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых. К 40-м годам относится работа Н.Г. Чудакова, содержащая новое доказательство теоремы Зигеля о числе бинарных квадратичных форм. Широкую известность приобрела монография Н. Г. Чудакова «Введение в теорию L-функций Дирихле», написанная им в середине 40-х годов. В 50-е годы особое внимание Н. Г. Чудакова привлекает теория характеров. В цикле работ он изучает проблему обобщенных характеров и связанные с ними L-функции. Николаем Григорьевичем был внесен существенный вклад в решение этой проблемы.

В начале 60-х годов Н. Г. Чудаков совместно с Ю. В. Линником и М. Б. Барбаном получил результат о распределении простых чисел в коротких прогрессиях, близкий к гипотетическому. Среди научных трудов Николая Григорьевича того времени видное место занимают

обзорные статьи по аналитической теории чисел.

В начале 70-х годов Николай Григорьевич совместно с Н. И. Фельдманом получил эффективную оценку сверху для десятого одноклассного дискриминанта мнимых квадратичных полей методом, отличным от метода Старка-Бейкера. В 1972 году он снова возглавил кафедру алгебры и теории чисел Саратовского университета. В последующие годы Н.Г. Чудаков вновь возвращается к проблеме обобщенных характеров, расширенной гипотезе Римана, оценкам тригонометрических сумм и т.д. Поставленные им в этот период вопросы оказались весьма глубокими и предопределили исследования многих ученых вплоть до настоящего времени.

Николай Григорьевич всегда реагировал на новейшие достижения в областях, примыкающих к аналитической теории чисел. По его инициативе еще в 50-е годы на кафедре алгебры и теории чисел Саратовского университета разрабатываются вопросы полиадического и р-адического анализа, алгебраической геометрии и их применения к решению теоретико-числовых задач.

Н. Г. Чудаков, Г. Н. Свешников и др. (1960-е гг.)

За долгие годы заведывания кафедрой в Саратовском университете Н. Г. Чудаков приобщил к исследовательской работе в области теории чисел не одно поколение математиков. Среди учеников Николая Григорьевича следует отметить К. А. Родосского, Б. М. Бредихина, В. М. Архангельскую, Н. И. Климова, Г. И. Перельмутера, Д. Н. Ленского, В. Е. Воскресенского, В. В. Глазкова, Г. И. Гусева, В. Н. Кузнецова и др.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.

REFERENCES

1.

Получено 23.01.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 20 Выпуск 4

THE EDITORIAL BOARD

Volume20 Issue 4

TABLE OF CONTENTS

Volume 20 Issue 4