МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

НИИ МЕХАНИКИ МГУ

HYDRODYNAMIC INSTABILITY AND TURBULENCE

MOSCOW

Материалы XXIII Международной конференции

«НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ»

25 февраля – 4 марта 2018 г.
Московская область, г. Звенигород,
пансионат «Звенигородский» РАН

МАКС Пресс

2018

УДК 532.516.532.517
ББК 35.114
М 43

М 43 **Материалы XXIII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность»** 25 февраля – 04 марта 2018 г. пансионат «Звенигородский» РАН, Московская область, г. Звенигород / Ответственные редакторы – Н.В. Никитин, Н.В. Попеленская. Москва: МАКС Пресс, 2018. – 351 с. – (Электронное издание комплексного распространения).
e-ISBN 978-5-317-05812-8

В материалах отражено современное состояние теории гидродинамической устойчивости и турбулентности. Представлены экспериментальные и теоретические работы по прямому численному моделированию турбулентности и по переходу к турбулентности.

Сборник будет полезен аспирантам, студентам и научным сотрудникам.

УДК 532.516.532.517
ББК 35.114

Тезисы докладов публикуются с оригиналов, представленных авторами

Электронное издание комплексного распространения

Данное издание доступно:
http://hit-conf.imec.msu.ru/books/NeZaTeGiUs_2018.pdf

ISBN 978-5-317-05812-8

СОДЕРЖАНИЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

С.Г. Авагян
Национальный политехнический университет Армении, Гюмрийский филиал

В настоящей работе рассматриваются волны на поверхности жидкости конечной глубины, ограниченной нелинейной упругой пластиной. Для решения задачи применяется вариационный принцип, по которому [1]:

$$\delta \iint_R Ldxdt = 0, \text{где } L = L_ж + L_п, \tag{1}$$

$L_ж$ и $L_п$ – лагранжианы жидкости и пластины соответственно. Для усредненного лагранжиана имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Ld\theta, \tag{2}$$

где $\theta = kx - \omega t$ и называется фазой, k – волновое число, ω – частота. Из (1) и (2) следует

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_ж + \mathcal{L}_п. \tag{3}$$

По определению лагранжиана, для пластины

$$L_п = К – П, \tag{4}$$

где К – кинетическая энергия пластины, П – потенциальная энергия. Кинетическая энергия пластины равна

$$K = \frac{1}{2}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v^2\, dz, \tag{5}$$

где ρ – плотность пластины, h – толщина, v – скорость частицы. Принято, что плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластины в недеформированном состоянии. Как известно [2], потенциальная энергия пластины может быть выражена в виде суммы работы изменения объема и работы изменения формы

$$\Pi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{9}{2}K_1\varepsilon_0^2 + 3K_1\chi_1\varepsilon_0^2 + \frac{3}{4}G\psi_0^2 + \frac{3}{8}G\gamma_2\psi_0^4\right)dz, \tag{6}$$

где K_1– модуль объемного сжатия, G – модуль сдвига, χ_1 – функция удлинения, γ_2 – функция сдвига, ψ_0 – интенсивность деформации сдвига. Для тонких пластинок $\psi_0^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x\,\varepsilon_z\right) + \frac{1}{2}\psi_{xy}^2\right)$. Среднее удлинение $\varepsilon_0 = {}^1\!/_3\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)$. Исходя их соотношений напряжений для $\delta_z = 0$, т.е. $3K_1\varepsilon_0\left(1 + \chi_1\varepsilon_0 + {} \right.$ $\left.+\chi_1\varepsilon_0^2\right) + 2G(1 + \gamma_2\psi_0^2)\left(\varepsilon_x - \varepsilon_0\right) = 0$, а также учитывая, что $\varepsilon_z = -\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\varepsilon_x$, $K_1 = \frac{2}{3}\frac{(1+\vartheta)}{(1-2\vartheta)}G$, $\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$, из (6) получим потенциальную энергию. Здесь ϑ – коэффициент Пуассона. Учитывая, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, из (5) для кинетической энергии получим $K = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2$. После соответствующих выкладок из (4) получим лагранжиан пластины. Так как пластина находится на поверхности жидкости, то составляющая вектора деформации u_z будет равна η, где $\eta = N(\theta)$ уравнение поверхности $z = 0$. Периодическая функция $N(\theta)$ представляется в виде рядов Фурье $N(\theta) = b + a_1\cos\theta + \sum_2^\infty a_n\cos n\theta$, где a_1 – амплитудный параметр, а b – средняя высота поверхности воды. Оставляя два члена, будем иметь $u_z = N = b + a_1\cos\theta + \cos\theta +$ $+a_2\cos 2\theta$. После соответствующих выкладок из (2) получится усредненный лагранжиан пластины. Лагранжиан жидкости вычисляется по формуле [1]

$$L_ж = -\rho_0\int_{-h_0}^{\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 + gz\right), \tag{7}$$

где h_0 – глубина жидкости, ρ_0 – плотность, φ – потенциал скоростей. Для одномерного случая наиболее общая форма периодического волнового пакета такова: $\varphi = \beta x - \gamma t + \Phi(\theta, z)$, где β – средняя горизонтальная скорость ${}^{\partial\varphi}\!/_{\partial x}$, а γ связана со средней высотой волн. Периодическая функция $\Phi(\theta, z)$ может быть представлена в виде рядов Фурье $\Phi(\theta, z) = \sum_1^\infty \frac{B_n}{n} chkn(z + h_0)\sin n\theta$. Оставляя два члена и подставляя φ в (7), получим значение $L_ж$, а затем по (2) – усредненный лагранжиан жидкости. Сравнительный анализ с [4] показывает, что наличие пластины увеличивает поперечную устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. – 624 с.
2. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Ил, 1961. – 771 с.
3. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. – 175 с.
4. Авагян С.Г. Нелинейные изгибные волны в пластине, находящейся на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXXYIII, №6, 1985. – С. 51-61.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СНИЖЕНИЯ ТРЕНИЯ В МИКРОКАНАЛЕ С ПОЛОСЧАТОЙ СУПЕРГИДРОФОБНОЙ СТЕНКОЙ

Агеев А.И., Голубкина И.В., Осипцов А.Н.
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Супергидрофобные поверхности (СГП) – это текстурированные поверхности, образованные микролунками (микрокавернами) либо микровыступами, в которых силой поверхностного натяжения статически удерживаются пузырьки воздуха. Пузырьки воздуха не вытесняются из текстуры СГП при течении вязкой жидкости вдоль такой поверхности. Трение между воздухом и жидкостью практически отсутствует, поэтому в экспериментах наблюдается макроскопическое проскальзывание вязкой жидкости вдоль такой СГП и снижение трения, как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течениях вдоль СГП [1, 2]. Для количественной оценки снижения трения на СГП используется величина, называемая тензором эффективной длины скольжения [3]. Тензор эффективной длины скольжения входит в эффективное граничное условие проскальзывания типа Навье на СГП, которое связывает касательную скорость и касательное напряжение, вычисленные на обтекаемой поверхности. Значения компонент тензора скольжения определяют из решения задачи о течении вязкой жидкости в окрестности выделенного периода текстуры СГП, содержащего межфазную границу, с заданным на ней условием отсутствия касательных напряжений. При решении такой задачи необходимо учитывать параметры текстуры СГП, которые влияют на величину осредненной длины скольжения и интенсивность снижения трения: долю газового участка, форму межфазной границы и возможное смещение в микрокаверну точек закрепления мениска [2]. В работе [4] предложен численный алгоритм, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений [5] для решения такой задачи, который позволяет достаточно просто учитывать параметры текстуры, влияющие на величину эффективной длины скольжения. Там же показано, что учет смещения мениска в микрокаверну может привести к значительному снижению величины эффективной длины скольжения по сравнению со значением, соответствующим межфазной границе, закрепленной в углах каверны.

В настоящей работе предложена математическая модель для оценки снижения трения (перепада давления) и изменения локальных свойств проскальзывания на СГП при течении вязкой жидкости в микроканале с нижней полосчатой супергидрофобной стенкой. Разработанная модель основана на сращивании решения задачи об осредненном течении вязкой жидкости в микроканале с заданным расходом на масштабе длины микроканала (макромасштаб) с решением задачи об обтекании выделенного периода текстуры СГП, содержащего одиночную микрокаверну, частично заполненную газовым пузырьком (микромасштаб). Модель позволяет учитывать смещение точек закрепления мениска в микрокавернах, обусловленное сжимаемостью газа, удерживаемого текстурой СГП. Положение мениска в микрокаверне вычисляется из условия сохранения массы газового пузыря, удерживаемого в каверне. Так как статическое давление в жидкости изменяется по длине канала, то вследствие сжимаемости газа положение точек закрепления мениска изменяется от каверны к каверне. Поэтому на макромасштабе величина эффективной длины скольжения будет являться не константой, а функцией локального статического давления. При этом максимум эффективной длины скольжения достигаться на выходе из микроканала, а минимум – на входе, где локальное давление в жидкости максимальное. Выполнено параметрическое численное исследование снижения трения (перепада давления) в микроканале с использованием разработанной модели. Показано, что наряду с долей газового участка и формой межфазной границы глубина микрокаверн, образующих текстуру СГП, решающим образом влияет на интенсивность снижения перепада давления. Установлено, что максимального снижения перепада давления в микроканале можно добиться на СГП, уменьшая глубину микрокаверн, образующих текстуру СГП. Предложенная в работе математическая модель может быть использована для разработки оптимального дизайна текстурированных поверхностей с целью эффективного снижения трения с использованием СГП.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-01-00057.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Rothstein J.P. Slip on superhydrophobic surfaces // Annu. Rev. Fluid. Mech. 2010. **42**. P. 89–109.
2. Lee C., Choi C.-H. and Kim C.-J. Superhydrophobic drag redaction in laminar flows: a critical review // Experim. In Fluids. 2016. **57**. P. 176.
3. Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. **613**. P. 125–134.
4. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Стоксово течение над каверной супергидрофобной поверхности, содержащей пузырек газа // Изв. РАН. МЖГ. 2015. N 6. C. 35-49.
5. Pozrikidis C. Boundary and singularity methods for linearized viscous flows. New York: Cambridge University press, 1992. 272 p.

К ЧИСЛЕННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПЕРАТОРОВ КУПМАНА И ПЕРРОНА-ФРОБЕНИУСА

А.К. Алексеев[1], А.Е.Бондарев[2]
[1]МФТИ, Москва, Россия
[2]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Достаточно давно [1] существует представление о том, что конечномерная ***нелинейная*** динамическая система эквивалентна некоторой бесконечно-мерной ***линейной*** системе. Это дает надежду на глобальную линеаризацию нелинейных решений. Однако до недавних пор эта надежда обесценивалась отсутствием эффективных численных методов построения такой “выпрямляющей” системы.

Прогресс в этом направлении наметился после разработки метода разложения по динамическим модам (Dynamic Mode Decomposition (DMD)) [2].

В работе [3] построение DMD связано с операторами Купмана и Перрона- Фробениуса. Оператор Купмана описывает линейную эволюцию системы в бесконечном наборе наблюдаемых, оператор Перрона-Фробениуса описывает эволюцию плотности вероятности (пропагатор обобщенного уравнения Лиувилля).

DMD обеспечивает построение оператора Купмана в линейном конечном словаре по некоторому последовательному набору срезов (состояний системы в последовательные моменты времени).

В качестве попытки расширения DMD на нелинейные задачи разработан метод EDMD [4], обеспечивающий построение оператора Купмана в нелинейном (возможно, бесконечном) словаре. Ключевым элементом для численной реализации EDMD является использование функции ядра (kernel trick).

Построение оператора Купмана подразумевает и построение оператора Перрона- Фробениуса, так как они являются сопряженными относительно некоторого скалярного умножения. Соответствующие алгоритмы представлены в [5].

Этот подход интересен с точки зрения численного расчета мерозначных решений уравнений газодинамики, перспективных с точки зрения моделирования турбулентности [6]. В отличие от [6], EDMD позволяет отказаться от использования метода Монте-Карло, что создает надежду на создание вычислительно эффективного алгоритма.

В данной работе представлены результаты анализа автоколебательных режимов течения, возникающих при воздействии недорасширенной сверхзвуковой струи на плоскую поверхность. Использованы результаты численного моделирования воздействия струи с помощью нестационарных уравнений (2D+1) Эйлера. Конечномерная аппроксимация уравнений Эйлера рассматривается как конечномерная нелинейная динамическая система.

В работе [7] для анализа этой системы использовано DMD, здесь представлены результаты, полученные с помощью EDMD для полиномиального ядра (порядок полиномов варьировался от 1 до 50). Оценен истинный порядок нелинейности задачи.

С помощью EDMD рассмотрено построение соответствующего оператора Перрона- Фробениуса, возможности применения функции ядра и ограниченных словарей для его компактной записи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00553А и 17-01-444А).

ЛИТЕРАТУРА.

1. T. Carleman, Application De La Théorie Des Équations Intégrales Linéaires Aux Systemes D’Equations Differentielles NonLinaires, Acta Math., 1932, Vol. 59, pp. 63-87
2. P. J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, J. Fluid Mech., 2010, v. 656 p. 5-28.
3. C. W Rowley., I. Mezic I., S. Bagheri , P. Schlatter, and D.S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows. J. Fluid Mech., 2009, 641:115-127
4. M. O. Williams, I. G. Kevrekidis and C. W. Rowley, A data-driven approximation of the Koopman operator: Extending dynamic mode decomposition, J. Nonlinear Sci., 2015. Vol. 25, Issue 6, pp 1307–1346
5. S. Klus, P. Koltai, and Ch. Schutte, On the numerical approximation of the Perron-Frobenius and Koopman operator, arXiv:1512.05997v3 2016
6. U. S. Fjordholm, S. Mishra, E. Tadmor, On the computation of measure-valued solutions, Acta Numerica, 2016, pp. 567–679.
7. A.K. Alekseev, D.A. Bistrian, A.E. Bondarev, I.M. Navon, On Linear and Nonlinear Aspects of Dynamic Mode Decomposition, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2016, V. 82, Issue 6, p. 348–371

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ С ОБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ

И.А. Амелюшкин, А.Л. Стасенко
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского
Московский физико-технический институт
E-mail: Amelyushkin_Ivan@mail.ru

Моделирование граничных условий, а также управление взаимодействием потока с обтекаемой поверхностью представляет большой интерес в различных областях промышленности, науки, техники и жизни человека: уменьшение аэрогидродинамического сопротивления, средства борьбы с обледенением летательных аппаратов, перемешивание потока в микроканалах, нанесение покрытий и т.д. В классических монографиях, посвященных физике льда (напр., [1]) описаны процессы объемной диффузии в частицах льда молекул газов атмосферы, взаимодействия кристаллических зерен друг с другом. Однако, специфика рассматриваемых нами проблем состоит в необходимости описания обтекания гидротермодинамики и массообмена воздушно-капельно-кристаллического потока с неидеально гладкой поверхностью твердого тела в сдвиговом потоке несущего газа, в котором возникают микротурбулентные пульсации в следствии неровности обтекаемой поверхности.

Целью настоящей работы является создание программ, которые позволят моделировать взаимодействие газовой, жидкой, плазменной и дисперсной систем с наноструктурированными поверхностями твердых веществ из различных материалов.

Основными задачами разрабатываемой в настоящей работе программы являются: прогнозирование и оптимизация взаимодействия потока с обтекаемым телом, расчет режимов столкновения частиц и капель с твердой поверхностью, расчет характеристик обтекания тел полидисперсным потоком, моделирование граничных условий на поверхности, исследование и влияние на турбулентность потока, моделирование смачивания и движение капель на поверхности.

Основные задачи работы состоят в разработке программного комплекса для математического моделирования удара капель и кристаллов о твердое тело на молекулярном уровне, которые позволят выработать рекомендации по подбору материала в целях управления взаимодействием газа и частиц с твердым телом.

Решение проблемы обледенения в капельно-кристаллических облаках представляет большой практический интерес[2]. Исследования, проведенные в течение почти последнего столетия, основывались, как правило, на экспериментальных данных и феноменологическом описании процесса обледенения. Однако для успешного решения проблемы необходимо разработать математические модели, учитывающие физические процессы, сопровождающие обледенение на фундаментальном уровне. В этом отношении наиболее важным аспектом является взаимодействие с грубым твердым телом отдельной частицы, увлекаемой турбулентным пограничным слоем влажного воздуха (смесью реальных газов). Классическая теория турбулентности неоднократно подчеркивала необходимость отражать, прежде всего, тот факт, что рассматриваемое явление характеризуется нелинейностью и сильным влиянием краевых эффектов [3]. В феноменологическом описании обычно предполагается, что обтекаемая поверхность является совершенно гладкой и используется условие прилипания; корреляции всех составляющих скорости жидкости или газа равны нулю.

Однако реальная поверхность летательного аппарата практически всегда шероховата. В частности, эксперименты показали [4, 5], что течение в вязком подслое сопровождается значительными турбулентными пульсациями. В [6] методом согласованных асимптотических разложений было показано, что вязкий подслой и «буферную» зону следует рассматривать как единую область, охваченную турбулентным движением. В этом случае важно учесть, что в пограничном слое напряжения Рейнольдса и вязкого трения в рассматриваемой области имеют один и тот же порядок [5]. В результате было обнаружено, что на обтекаемой поверхности корреляция пульсаций компонентов скорости ($\overline{uv}$, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$) не равны нулю, а пропорциональны to $\exp\left(-y\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}/h\right)$, где y – расстояние от поверхности по нормали к ней, h – локальная высота неровности, Re_∞ – число Рейнольдса потока. Отметим, что в авиационной технике средняя шероховатость поверхности имеет порядок $h \sim 1$ мкм. С увеличением высоты полета средняя длина свободного пробега молекул воздуха l приближается к этому значению. Поэтому континуальное описание возникновения турбулентности на микроуровне вблизи поверхности должно быть пересмотрено на основе метода молекулярной динамики, что позволяет учесть влияние числа Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/h$.

В [7] наблюдалось изменение ламинарно-турбулентного перехода при охлаждении поверхности обтекаемого тела: эффект вызван образованием инея. В [8] авторы представили результаты расчетов молекулярной динамики (MD) о поведении жидких нанокапель на шероховатых гидрофобных и гидрофильных твердых поверхностях. Согласно этому исследованию, коротковолновая (молекулярная) шероховатость не очень важна. Для грубых гидрофобных поверхностей отсутствует гистерезис контактного угла $\theta_A - \theta_R$ (индексы A, R – advancing and receding surface tension angles) из-за интенсивных теплдовых флуктуаций, которые возникают близи границы твердое тело-жидкость на молекулярном уровне. Однако в этой статье нет подтверждения достоверности представленных результатов, например, сравнение с результатами других исследователей.

Экспериментальное исследование испарения капель на гидрофильных поверхностях проводилось в [9]. В работе [10] представлены результаты молекулярно-динамического моделирования пограничного слоя однокомпонентной жидкости на волнистой поверхности с использованием упрощенного расчета с помощью термостата Ланжевена и искусственного коэффициента трения. Такой подход не позволяет моделировать удар частицы о поверхность, т.к. приводит к искусственному нефизичному уменьшению скорости удара. Тем не менее, учитывая колоссальное число молекул в расчетной области и, как следствие, интенсивное взаимодействие находящихся в тепловом движении молекул, для увеличения максимального шага по времени и исключения нефизичных возрастаний скорости при вероятном сближении молекул (на величину много меньшую σ) в разработанной программе использован специальный алгоритм. Его работа заключается в уменьшении значений нефизично возросших скоростей молекул и перераспределении избытка энергии между всеми остальными.

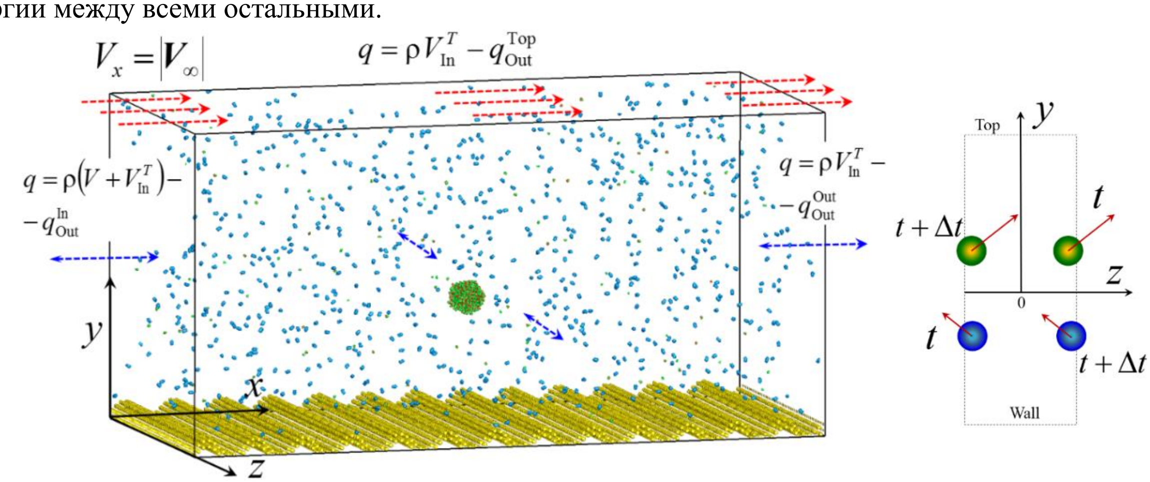


Рис 1. Расчеты пограничного слоя методом молекулярной динамики: q – плотность потока массы [кг/м^2·с]; справа – граничные условия при $z = 0$ and $z = z_{\max}$

Предварительные результаты взаимодействия капель для гладкой поверхности представлены в [11, 12]. В настоящей работе были протестированы различные схемы интегрирования уравнений молекулярной динамики. Простейшей схемой является $\boldsymbol{r}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}_i(t)+\boldsymbol{V}_i(t)\Delta t+0.5\boldsymbol{a}_i(t)\Delta t^2$; $\boldsymbol{V}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{V}_i(t)+0.5(\boldsymbol{a}_i(t)+\boldsymbol{a}_i(t+\Delta t))\Delta t$. Здесь $\boldsymbol{r_i}$, $\boldsymbol{v_i}$ и $\boldsymbol{a_i}$ – радиус-вектор, скорость и ускорение i-й молекулы, соответственно, $\boldsymbol{r_j}$ – радиус-вектор j-й молекулы, $\boldsymbol{a}_i(t)=-m_i^{-1}\sum_j \overline{\nabla} U_{ij}\left(\boldsymbol{r}_i(t)-\boldsymbol{r}_j(t)\right)$, U – потенциал парного межмолекулярного взаимодействия. Эта схема не является симплектической, которая не обеспечивает сохранение полной кинетической энергии многомолекулярной системы. Созданные численные алгоритмы и программное обеспечение позволяют использовать различные потенциалы взаимодействия молекул и схему интегрирования уравнений движения. В качестве основной схемы интегрирования была выбрана симплектическая схема Верле $\boldsymbol{r}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}_i(t)+\boldsymbol{V}_i(t)\Delta t+0.5\boldsymbol{a}_i(t)\Delta t^2$; $\boldsymbol{V}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{V}_i(t)+0.5(\boldsymbol{a}_i(t)+\boldsymbol{a}_i(t+\Delta t))\Delta t$. В предположении о потенциальной природе взаимодействия между атомами или молекулами уравнения движения были численно проинтегрированы в соответствии с алгоритмами, аналогичными описанным в [11]. Была также использована схема, предложенная в [12]:

$\boldsymbol{r}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}_i(t)+\boldsymbol{V}_i(t)\Delta t+(4\boldsymbol{a}_i(t)-\boldsymbol{a}_i(t-\Delta t))\Delta t^2/6$; $\boldsymbol{V}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{V}_i(t)+(2\boldsymbol{a}_i(t+\Delta t)+5\boldsymbol{a}_i(t)-\boldsymbol{a}_i(t-\Delta t))\Delta t/6$.

Несмотря на невысокую экономическую эффективность (с точки зрения вычислительных затрат), вторая схема обеспечивает наиболее стабильное распределение температуры газа и скорости колебаний атомов в кристаллической решетке. Параметры потенциала Леннарда-Джонса взяты из констант уравнения Ван-дер-Ваальса: $\sigma_0 = 2.6\,\mathring{A}$ – масштаб характерной длины, $\varepsilon_0 = 809\mathrm{k_B} \cong 10^{-20}$ Дж - характерная энергия межмолекулярного взаимодействия, m_0 - масса одиночной молекулы воды, V_0 - характеристическая скорость, которая берется из равенства потенциальной и кинетической энергии газа. Значения характерных параметров для молекул воды, которые были использованы в настоящей работе в качестве масштабов, можно найти в таблице 1.

Table 1: Характерные значения физических величин

Физическая величина	Formula	Value
Координата	σ_0	$2.6\cdot10^{-10}$ m
Время	$t_0=\sigma_0/V_0$	$0.425\cdot10^{-12}$ s
Угловая скорость	t_0^{-1}	$2.35\cdot10^{12}$ s^{-1}
Энергия межмолекулярного взаимодействия	ε_0	$1.12\cdot10^{-20}$ J
Ускорение молекулы	V_0/t_0	$1.5\cdot10^{15}$ m/s^2
Плотность	m_0/σ_0^3	1700 kg/m^3
Температура	$\varepsilon_0/3\mathrm{k_B}$	270 K
Давление поверхностных сил	ε_0/σ_0^3	$6.8\cdot10^5$ Pa
Сила межмолекулярного взаимодействия	ε_0/σ_0	$4.3\cdot10^{-11}$ N
Период решетки твердого тела	$a=1.1\,\sigma_0$	$2.85\cdot10^{-10}$ m
Амплитуда колебаний атомов твердого тела	$\Delta a=0.23\sigma_0$	$0.6\cdot10^{-10}$ m
Период колебаний атомов твердого тела	$T_A=\sqrt{m_0/k}=\sqrt{m_0/Ea}=0.34\cdot t_0$	$0.15\cdot10^{-12}$ s
Жесткость модельной пружины	$k=Ea=8.6\cdot\varepsilon_0/\sigma_0^2$	1.4 N/m
Энегия колебаний атомов	$k\Delta a^2/2=Ea\Delta a^2/2=0.23\varepsilon_0$	$0.26\cdot10^{-20}$ J
Напряжение трения	$\tau=\mu V_0/\sigma_0$	$3.5\cdot10^{-8}$ Pa

Здесь $\mathrm{k_B}$ – постоянная Больцмана.

Расчетная область представляла собой параллелепипед $x_{max} \times y_{max} \times z_{max} = L \times H \times D$, $L = 2H$, $D = H = 20$ нм. Граничные условия в плоскостях $z = 0$ и $z = D$ являются периодическими (Рис. 2). Вычисленное пространство – кубическая область (заметим, что характерный размер кубической расчетной области, принятой в настоящей работе, на один-два порядка больше характерного размера рассматриваемой наночастицы). В плоскости $x = 0$ был установлен массовый поток $q = \rho V$. По мере прохождения плоскости $x = L$ и $y = H$ молекулы покидали расчетную область (см. Рис.1). В этом случае в плоскостях $x = 0$, $x = L$ и $y = H$ задан дополнительный массовый расход, обусловленный тепловым движением молекул: $q_x = q_y = \rho < V > / 2\sqrt{3} = \rho\sqrt{RT} / 2$.

Поскольку характерная толщина пограничного слоя значительно больше, скорость набегающего потока справа в верхней части расчетной области задается согласно автомодельному решению Блазиуса. В нижней части расчетной области расположена шероховатая поверхность обтекаемого тела, взаимодействие с которой описывается математическими моделями, определенным ниже. В этой области молекулы воды и воздуха взаимодействуют с атомами твердого тела в зависимости от их физических свойств и температуры стенки. Молекулярные скорости определялись в соответствии с максвелловским распределением скоростей, к которым была добавлена скорость потока.

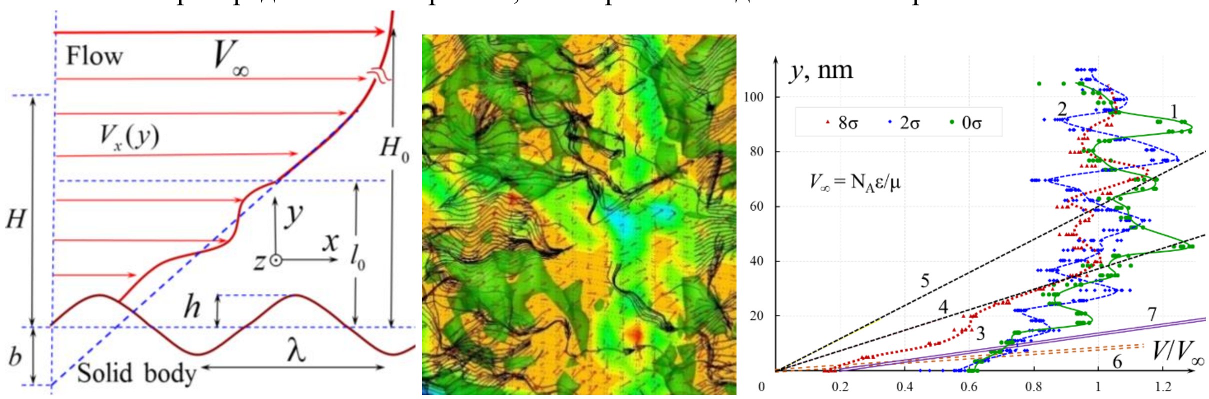


Рис 2. Слева – схема течения вблизи шероховатой поверхности, справа - скриншот молекулярной газодинамики потока вблизи шероховатой поверхности. В центре и слева предварительные результаты расчета пограничного слоя методом молекулярной динамики: поверхности с равными значениями скорости потока, поля скорости трехмерного вектора (по центру), линии потока (черные кривые); ($x \times y \times z$ = 40×20×20 нм) и 2D-поле скоростей (справа). Штриховая линия на рисунке слева – экстраполяция континуальных параметров в слой Кнудсена.

При диффузном отражении молекул от поверхности был введен коэффициент, который показывает связь между отношением составляющих нормального импульса $\beta_n = 0.5\sqrt{\pi}\sqrt{k_B T_r / W_i}$ молекул до и после их отскока от поверхности с температурой поверхности T_r, кинетической энергией W_i удара молекулы. В процессе расчета контролировались профили скорости, поля напряжения трения, коэффициенты вязкости, теплопроводность, поля давления, температуры, плотности фаз, а также распределение молекулярных скоростей, удельная сила межмолекулярного взаимодействия, плотность энергии межмолекулярного взаимодействия, поверхностное натяжение и ряд других характеристик. Результаты расчета были сопоставлены с известными аналитическими решениями и результатами других исследователей [10, 15]. В качестве основных параметров управления выбраны характерная высота h и длина λ периодической шероховатости, а параметр $AK = \varepsilon_{w-m}/\varepsilon_{m-m} \approx 0.5\ (1 + \cos\theta)$, который можно рассматривать как отношение энергий ε_{w-m} взаимодействия между молекулой потока и поверхностью атома (адгезии) с характерной энергией ε_{m-m} взаимодействия молекул потока друг с другом (когезия) и θ – угол смачивания. На рис. 2 представлены примеры молекулярного моделирования пограничного слоя реального газа, адгезии и неполного отскока переохлажденных капель воды из тела рельефа в сдвиговом потоке неидеального газа. В каждой ячейке расчетной области были рассчитаны газотермодинамические параметры потока. Поле скорости показано на рис. 2. Оно сравнивалось с результатами [10] и [15].

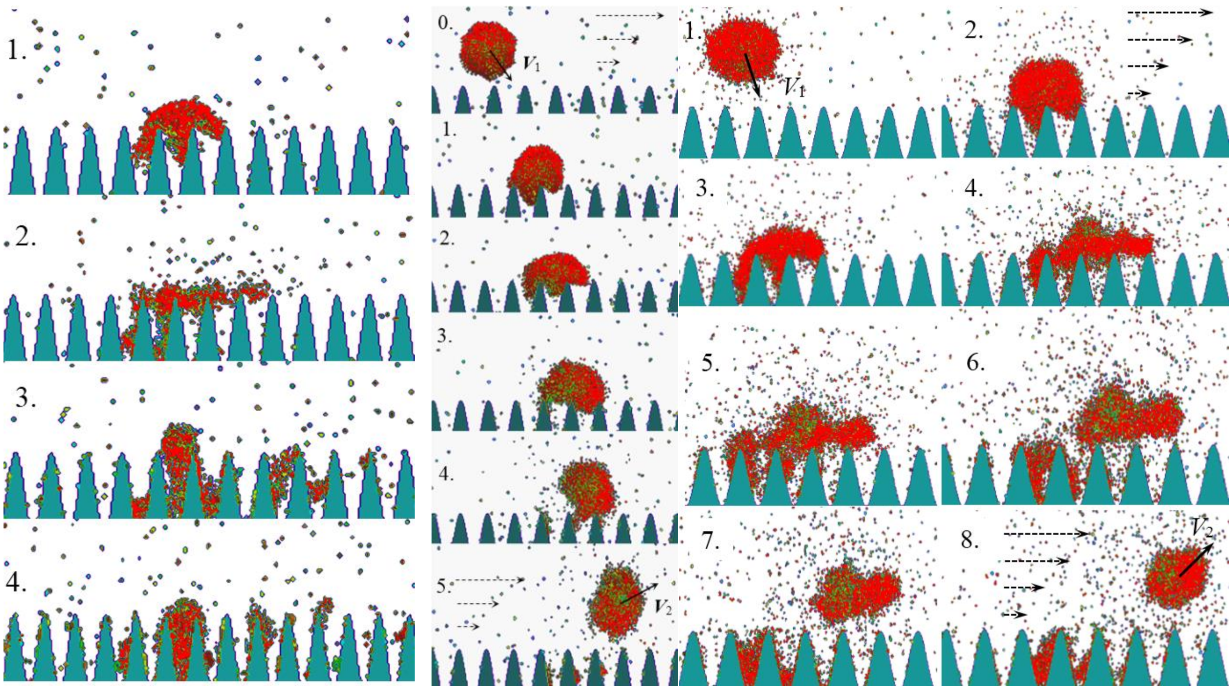


Рис. 3. Расчеты взаимодействия капель с обтекаемыми поверхностями методом молекулярной динамики: (а) слева число молекул воды N = 1000, скорость соударения 200 м / с, нормальные условия, $h = 8\sigma_0$; в центре $N = 2500$, скорость 100 м / с, h одинакова; справа – те же параметры, что и в центре, но N=4600.

На рис. 3 приведены примеры падения капель на шероховатых поверхностях в потоке сдвигового газа. Параметры взаимодействия молекул получены на основе характеристик реального уравнения состояния газа и взяты из справочных данных о параметрах межмолекулярного взаимодействия, а также из квантово-химических расчетов энергии взаимодействия молекул потока с разными атомами обтекаемого тела.

Видно дробление капли и ее адгезию к элементам шероховатой поверхности для большего значения скорости и отскок для меньшего значения.

Заключение. Разработаны математические модели, численные алгоритмы и программы для расчета взаимодействия газа и дисперсного потока с волнистой поверхностью твердых тел из различных материалов в целях моделирования граничных условий на обтекаемой поверхности, оптимизации взаимодействия потока с телом, расчета характеристик потока, исследования микровихревых и турбулентных течений, а также имитации смачивания и движения капель по поверхности. Разработанная программа, учитывающая особенности молекулярных эффектов в тонком слое вблизи рельефного тела, может быть использована для исследования возникновения турбулентности на шероховатости поверхности различных материалов.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, Проект No 16–19–10472.

Литература

1. Hobbs P.V. Ice Physics. Oxford Univ. Press. 2010. 836 p.
2. Tropea C. MUSAF III,ONERA, CERFACS. 27–29 September 2016. Toulouse.
3. Novozhilov V.V. PMM (Applied mathematics and mechanics). 1983, **47** (4), 694–700 (in Russian).
4. Speziale C.G., Sackar S., Gatski J. Fluid Mechanics, 1991, **227**, 245–272.
5. Frisch P.G. Turbulence: Approaches and models. Ed. 2nd, corrected and modified. Moscow–Izhevsk: SRC "Regular and chaotic dynamics", 2010, **332**. (in Russian)
6. Malamanov S.Yu. 2013, Series 10, Issue. 4, 42–88 (in Russian).
7. Alekseev M.A., Kuzminsky V.A., Ragulin N.F., Shvalev Yu.G. Cooling of the surface and transition of the laminar boundary layer to turbulent at supersonic flow velocities. Aeromechanics. A collection of papers dedicated to the 60th V.V. Struminsky. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
8. Yang C., Tartaglino U., Persson B.N.J.. Eur. Phys. J. E 25, 139-152 (2008).
9. Xuemei Chen, Ruiyuan Ma, Jintao Li, Chonglei Hao, Wei Guo, B.L. Luk, Shuai Cheng Li, Shuhuai Yao and Zuankai Wang 14 Phys. Rev. Let. September 2012; PRL 109, 116101 (2012).
10. Priezjev N.V., Troian S.M. J. Fluid Mech. Cambridge University Press, Printed in the United Kingdom, 2006, **554**. 25–46.
11. Amelyushkin I.A., Stasenko A.L. // Proceedings from the 9th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing (PSFVIP9) 25th–28th August 2013. Hanwha Resort, Busan. Korea. 154–159.
12. Amelyushkin I.A., Stasenko A.L. Nanostructures. Mathematical physics and modeling. 2016. **14**. № 2. 5–23 (In Russian).
13. Allen M., Tildesley D. Computer Simulation of Liquids. London: Clarendon Press, 1987, 385 p.
14. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. 1981, McGraw-Hill, New York, 540 p.
16. Blasius, Zeitschr H.. Math. u. Physik, 1908. Bd. 56.

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.И. Аллилуева, А.И. Шафаревич.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва.

В работе обсуждаются коротковолновые решения уравнений газовой динамки, линеаризованных на гладком фоне. Такие решения соответствуют наличию характеристик различной кратности (двукратных для гидродинамической моды и простых для акустических). Обсуждаются эффекты фокусировки акустических мод, а также устойчивость и неустойчивость гидродинамических.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.I. Allilueva, A.I. Shafarevich. “Evolution of Lagrangian Manifolds and Asymptotic Solutions for Equations of Gas Dynamics”. To appear in “Regular and Chaotic Dynamics”, 2018.

Отрицательная магнитная вихревая диффузия, вызванная колебательным α-эффектом

А.А. Андриевский[а], В.А. Желиговский[б], Р.А. Чертовских[в,г]

[а]*ООО ЦПР РТСофт*
[б]*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва*
[в]*Исследовательский центр систем и технологий (SYSTEC), Инженерный факультет Университета Порто, Португалия*
[г]*Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева*

Доказано, что при любой магнитной молекулярной диффузии взаимодействие α-эффекта и вихревой диффузии приводит к кинематической генерации длинномасштабного магнитного поля короткомасштабным течением электропроводной жидкости, имеющим зеркальную антисимметрию.

1. Введение

Мы изучаем кинематическую генерацию магнитного поля, в котором присутствуют большие пространственные масштабы, короткомасштабным течением электропроводной жидкости.

В теории устойчивости к длинномасштабным возмущениям (см. [5]) найдено, что в двумасштабном пространственно-периодическом кинематическом динамо магнитный α-эффект и вихревая диффузия не функционируют одновременно, поскольку действуют на разных временны́х масштабах: магнитное динамо генерирует длинномасштабное поле с использованием либо механизма α-эффекта на временах порядка т.н. *медленного* времени $T_1 = \varepsilon t$, либо механизма отрицательной магнитной вихревой диффузии на временах порядка медленного времени $T_2 = \varepsilon^2 t$ (либо, естественно, генерации может не быть). Здесь t – т.н. *быстрое* время порядка периода оборота вихря в жидкости. Поля, зависящие только от *быстрой* пространственной переменной $\mathbf{x}$, мы называем *короткомасштабными*, тогда как *длинномасштабные* поля зависят также от *медленной* переменной $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}$. Отношение пространственных масштабов ε – малый параметр задачи. Как принято в подобных исследованиях, мы рассматриваем магнитные моды (собственные векторы оператора магнитной индукции), имеющие вид пространственно-периодических короткомасштабных полей с амплитудной модуляцией длинномасштабными гармониками Фурье $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}$.

В данной работе найден класс течений, в которых действие α-эффекта заключается в поддержании гармонических колебаний среднего магнитного поля с конечным периодом в медленном времени T_1. Возникающая вследствие этого средняя электродвижущая сила при взаимодействии потока и флуктуирующей части магнитного поля приводит к появлению магнитной вихревой диффузии. При этом оказывается, что можно гарантировать наличие волновых векторов $\mathbf{q}$, для которых вихревая диффузия отрицательна, что отвечает генерации длинномасштабного поля в медленном времени T_2. Таким образом, оба механизма работают в таких течениях согласованно и необходимы для генерации.

Этот класс состоит из течений с полем скорости, обладающим зеркальной антисимметрией (для определенности будем считать, что это антисимметрия относительно плоскости $x_1 = 0$). Векторное поле $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *зеркально-симметрично относительно плоскости* $x_1 = 0$ (или *симметрично относительно декартовой координаты* x_1), если $f_i(-x_1, x_2, x_3) = (-1)^{\delta_i^1} f_i(\mathbf{x})$ для всех i, и *зеркально-антисимметрично* относительно плоскости $x_1 = 0$ (или *антисим-*

метрично относительно x_1), если $f_i(-x_1, x_2, x_3) = (-1)^{1-\delta_i^1} f_i(\mathbf{x})$ для всех i (где δ_j^i – символ Кронекера).

2. Применение теории усреднения к задаче кинематического динамо с двумя масштабами

Задача о генерации магнитного поля стационарным потоком $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ эквивалентна задаче на собственные значения

$$\mathfrak{L}\mathbf{h} = \lambda \mathbf{h}, \tag{1}$$

где

$$\mathfrak{L}\mathbf{h} = \eta \nabla^2 \mathbf{h} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \tag{2}$$

– оператор магнитной индукции, $\mathbf{v}$ – поле скорости и η – коэффициент молекулярной диффузии. Магнитные моды $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ зависят от быстрых, $\mathbf{x}$, и от медленных, $\mathbf{X}$, пространственных переменных. Предполагаем, что $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ 2π-периодичны по быстрым переменным x_i и соленоидальны; $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, кроме того, короткомасштабно и имеет нулевое среднее: $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$. Среднее по ячейке периодичности $\mathbb{T}^3$ быстрых переменных и флуктуирующая часть векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ определяются соотношениями

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{f} \rangle_k \, \mathbf{e}_k, \qquad \{\mathbf{f}\} = \mathbf{f} - \langle \mathbf{f} \rangle ,$$

где $\mathbf{e}_k$ – орты декартовой системы координат.

Дифференциальные операторы по медленным переменным будем отмечать индексом $\mathbf{X}$; обозначение $\mathfrak{L}$ резервируем для оператора, заданного равенством (2) с дифференцированием в быстрых переменных.

Решение уравнения (1) ищем в виде степенных рядов по ε:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{h}_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \varepsilon^n, \qquad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n.$$

Подстановка этих рядов в (1) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathfrak{L}\mathbf{h}_n + \eta(2(\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{X}})\mathbf{h}_{n-1} + \nabla_{\mathbf{X}}^2 \mathbf{h}_{n-2}) + \nabla_{\mathbf{X}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}_{n-1}) - \sum_{m=0}^{n} \lambda_{n-m} \mathbf{h}_m \right) \varepsilon^n = 0. \tag{3}$$

Из соленоидальности магнитных мод следует, что для всех $n \geq 0$ выполнены равенства

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \langle \mathbf{h}_n \rangle = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}_n + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \{\mathbf{h}_{n-1}\} = 0. \tag{5}$$

2.1. Уравнение при ε^0

Коэффициент в (3) при $n = 0$ имеет вид

$$\mathfrak{L}\mathbf{h}_0 = \lambda_0 \mathbf{h}_0. \tag{6}$$

Усреднением получаем отсюда $0 = \lambda_0 \langle \mathbf{h}_0 \rangle$. Исследованию длинномасштабного динамо отвечает выбор $\lambda_0 = 0$. Рассматриваем МГД систему общего положения, когда ядро короткомасштабного оператора $\mathfrak{L}$ трехмерно. В силу линейности оператора $\mathfrak{L}$, из (6) тогда следует

$$\mathbf{h}_0 = \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{h}_0 \rangle_k \, \mathbf{s}_k, \tag{7}$$

где поля $\mathbf{s}_k(\mathbf{x})$ – решения *вспомогательных задач типа I*:

$$\mathfrak{L}\mathbf{s}_k = 0, \qquad \langle \mathbf{s}_k \rangle = \mathbf{e}_k, \qquad \nabla \cdot \mathbf{s}_k = 0.$$

Существование таких нейтральных мод доказано в [5].

2.2. Уравнение при ε^1

При $n=1$ из (3) следует

$$\mathfrak{L}\mathbf{h}_1 + 2\eta(\nabla\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\mathbf{h}_0 + \nabla_{\mathbf{X}}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{h}_0) = \lambda_1\mathbf{h}_0. \tag{8}$$

Подставляя сюда (7) и усредняя это уравнение по ячейке периодичности, выводим условие его разрешимости:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\times(\mathfrak{A}\langle\mathbf{h}_0\rangle) = \lambda_1\langle\mathbf{h}_0\rangle. \tag{9}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ – т.н. *тензор магнитного α-эффекта*,

$$\mathfrak{A}_k = \langle\mathbf{v}\times\mathbf{s}_k\rangle.$$

Можно показать, что для поля скорости, антисимметричного относительно декартовой координаты x_1, выполнены соотношения

$$\mathfrak{A}_2^3 = -\mathfrak{A}_3^2, \qquad \mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_2^1, \qquad \mathfrak{A}_1^3 = \mathfrak{A}_3^1. \tag{10}$$

Следуя [5, 1, 3], рассмотрим периодическое по пространству среднее поле вида гармоники Фурье

$$\langle\mathbf{h}_0\rangle = \mathbf{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}. \tag{11.1}$$

Представим единичный волновой вектор в сферических координатах:

$$\mathbf{q} = (\cos\theta,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi). \tag{11.2}$$

В силу соленоидальности $\langle\mathbf{h}_0\rangle$ ((4) для $n=0$) имеет место соотношение ортогональности $\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}=0$, откуда

$$\mathbf{H} = \Theta_{\mathrm{t}}\mathbf{q}^{\mathrm{t}} + \Theta_{\mathrm{p}}\mathbf{q}^{\mathrm{p}}, \tag{11.3}$$

где единичные векторы

$$\mathbf{q}^{\mathrm{p}} = (-\sin\theta, \cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi), \qquad \mathbf{q}^{\mathrm{t}} = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi) \tag{11.4}$$

дополняют $\mathbf{q}$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^3$.

Подставив (11) в (9), с учетом соотношений (10) для тензора α-эффекта находим

$$\lambda_1^{\pm} = \mathrm{i}\,(\mathfrak{A}_3^2\cos\theta \pm (\mathfrak{A}_1^3\cos\varphi - \mathfrak{A}_2^1\sin\varphi)\sin\theta) = \mathrm{i}\,(\mathfrak{A}_3^2 q_1 \pm (\mathfrak{A}_1^3 q_2 - \mathfrak{A}_2^1 q_3)), \tag{12.1}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{+} = \begin{bmatrix} -(\mathfrak{A}_1^3\sin\varphi + \mathfrak{A}_2^1\cos\varphi)\cos\theta \\ \mathfrak{A}_1^3\cos\varphi - \mathfrak{A}_2^1\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Theta}^{-} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12.2}$$

Поскольку собственные значения оператора α-эффекта чисто мнимы, α-эффект в данном случае мы называем колебательным.

Подставив (11.1) в флуктуирующую часть (8), получим

$$\mathfrak{L}\mathbf{h}_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\left(2\mathrm{i}\eta\sum_{k=1}^{3}H_k(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{s}_k + \mathrm{i}\mathbf{q}\times\left\{\mathbf{v}\times\sum_{k=1}^{3}H_k\mathbf{s}_k\right\} - \lambda_1\sum_{k=1}^{3}H_k\{\mathbf{s}_k\}\right) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{h}_1 = \sum_{k=1}^{3}\left(\langle\mathbf{h}_1\rangle_k\,\mathbf{s}_k + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}H_k\left(\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_k + \mathrm{i}\sum_{m=1}^{3}q_m\mathbf{g}_{mk}\right)\right), \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_k(\mathbf{x})$ and $\mathbf{g}_{mk}(\mathbf{x})$ – коротокомасштабные пространственно-периодические решения с нулевым средним *вспомогательных задач типов II и II′*:

$$\mathfrak{L}\mathbf{g}_{mk} = -2\eta\frac{\partial\mathbf{s}_k}{\partial x_m} - \mathbf{e}_m\times\{\mathbf{v}\times\mathbf{s}_k\}, \qquad \mathfrak{L}\boldsymbol{\gamma}_k = \{\mathbf{s}_k\}.$$

2.3. Уравнение при ε^2

Из (3) находим при $n = 2$

$$\mathfrak{L}\mathbf{h}_2 + 2\eta(\nabla \cdot \nabla_{\mathbf{X}})\mathbf{h}_1 + \eta\nabla^2_{\mathbf{X}}\mathbf{h}_0 + \nabla_{\mathbf{X}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}_1) = \lambda_1\mathbf{h}_1 + \lambda_2\mathbf{h}_0.$$

Усреднение этого уравнения после подстановки (7) и (13) дает

$$\nabla_{\mathbf{X}} \times (\mathfrak{A}\langle\mathbf{h}_1\rangle) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\mathbf{q} \times \sum_{k=1}^{3} H_k \left(\lambda_1\widetilde{\mathfrak{D}}_k + \mathrm{i}\sum_{m=1}^{3} q_m\mathfrak{D}_{mk}\right) = \lambda_1\langle\mathbf{h}_1\rangle + (\lambda_2 + \eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\mathbf{H}. \qquad (14)$$

Здесь

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_k = \langle\mathbf{v} \times \boldsymbol{\gamma}_k\rangle, \qquad \mathfrak{D}_{mk} = \langle\mathbf{v} \times \mathbf{g}_{mk}\rangle.$$

Решение (14) имеет вид $\langle\mathbf{h}_1\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\mathbf{H}'$. Постоянный вектор $\mathbf{H}'$ ортогонален $\mathbf{q}$ в силу соленоидальности (4) для $n = 1$; при $\lambda_1^+ \neq \lambda_1^-$ его можно представить в виде

$$\mathbf{H}' = \beta^+\mathbf{H}^+ + \beta^-\mathbf{H}^-.$$

Он удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\mathbf{q} \times \sum_{k=1}^{3} H_k \left(\lambda_1\widetilde{\mathfrak{D}}_k + \mathrm{i}\sum_{m=1}^{3} q_m\mathfrak{D}_{mk}\right) = -\mathrm{i}\mathbf{q} \times (\mathfrak{A}\mathbf{H}') + \lambda_1\mathbf{H}' + (\lambda_2 + \eta)\mathbf{H}.$$

Из этих условий находим

$$\lambda_2^\pm = \frac{\sum_{k=1}^{3} H_k^\pm\left(\mathrm{i}\lambda_1^\pm\widetilde{\mathfrak{D}}_k - \sum_{m=1}^{3} q_m\mathfrak{D}_{mk}\right)\cdot\mathbf{H}^\mp}{\Theta_p^\mp\Theta_t^\pm - \Theta_t^\mp\Theta_p^\pm} - \eta \qquad (15)$$

(здесь в верхних индексах у $\mathbf{H}$ и λ_1, определенных равенствами (12), выбираем одновременно верхние или нижние знаки). Соответственно, когда $\lambda_1^\pm$ мнимы (в т.ч. когда поле скорости антисимметрично по декартовой координате), $\lambda_2^\pm$ действительны.

3. Численные результаты

Для численного исследования выбрано соленоидальное течение, 2π-периодическое по каждой декартовой переменной. Оно построено следующей процедурой: псевдослучайное трехмерное векторное поле сгенерировано на регулярной сетке 128^3; выделена его компонента, антисимметричная по x_1; в пространстве Фурье удалены среднее и потенциальная часть; коэффициенты, соответствующие волновым числам $\mathbf{k}$, уменьшены в $2^{|\mathbf{k}|}$ раз; поле нормализовано так, что его среднеквадратичная величина стала равна 1. Изоповерхность кинетической энергии (рис. 1) показывает, что так синтезированное поле имеет нетривиальную структуру, что в принципе способствует генерации магнитного поля.

Нейтральные моды $\mathbf{s}_k(\mathbf{x})$ вычислены с применением спектральных методов кодом [4] как доминирующие (имеющие максимальный инкремент роста) короткомасштабные магнитные моды. На графике (рис. 2) минимального по θ коэффициента магнитной вихревой диффузии $\eta_{\mathrm{eddy}}(\varphi) = -\max_{0\le\theta\le\pi}\lambda_2^\pm$ видна сингулярность инкрементов роста магнитного поля $\lambda_2^\pm$ при некотором $\varphi = \varphi_s$, когда знаменатель выражения (15) обращается в 0. Эта сингулярность присутствует при любом коэффициенте магнитной молекулярной диффузии η. При этом при переходе φ через критическую величину φ_s знаменатель (15) меняет знак. Это гарантирует, что при любом η в некоторой окрестности φ_s один из инкрементов $\lambda_2^\pm$ положителен, т.е. рассматриваемый поток работает как длинномасштабное динамо, реализующее механизм отрицательной анизотропной магнитной вихревой диффузии.

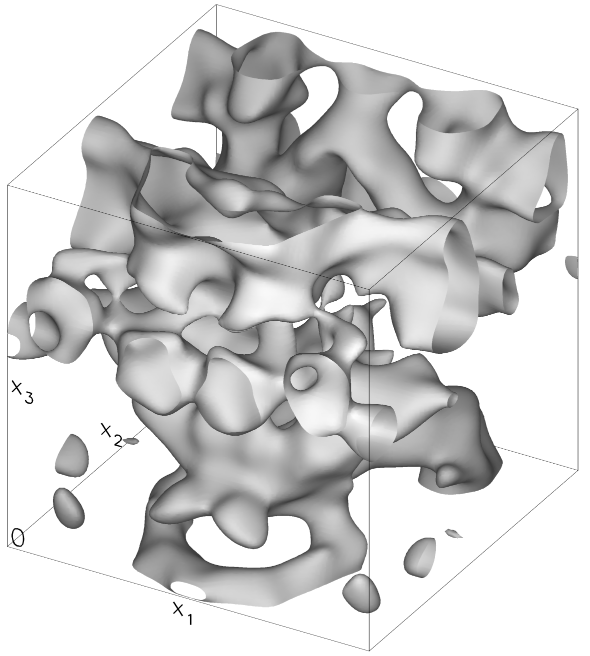


Рис. 1. Изоповерхность плотности кинетической энергии поля скорости на уровне 0.2 максимума.

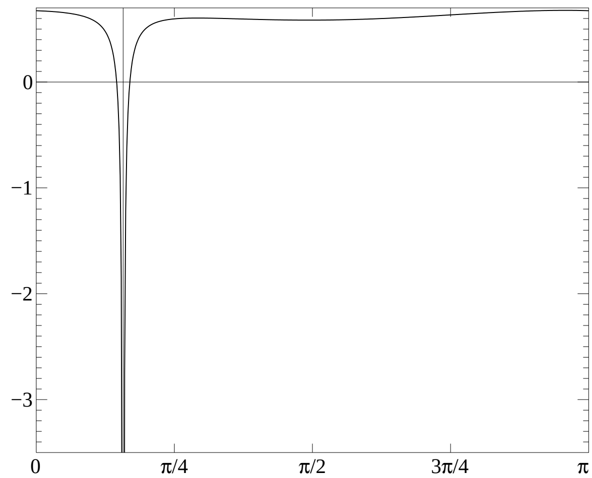


Рис. 2. Зависимость минимального по θ коэффициента вихревой диффузии $\eta_{\rm eddy}$ (вертикальная ось) от азимутального направления φ (горизонтальная ось) волнового вектора (см. (11.2)) при $\eta = 0.5$.

4. Выводы

В данной статье описано двумасштабное динамо, в котором существенно взаимодействие двух важнейших механизмов генерации длинномасштабного магнитного поля: α-эффекта и вихревой диффузии.

Это динамо работает при любых коэффициентах магнитной молекулярной диффузии.

Астрофизические динамо существуют при разных магнитных числах Прандтля, как очень малых (например, в межзвездной среде), так и очень больших (планетарные динамо). Поэтому рассмотренный механизм генерации может представлять непосредственный интерес для астрофизических приложений (см. [2]).

Р. Чертовских был поддержан проектом POCI-01-0145-FEDER-006933/SYSTEC (Research Center for Systems and Technologies, Университет Порто), финансируемым ERDF (European Regional Development Fund) в рамках программы COMPETE 2020 (Programa Operacional Competitividade e Internacionalização) и фондом FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal). Основной объем вычислений выполнен на кластере “Сергей Королев” Самарского Университета.

Литература

[1] Andrievsky A., Brandenburg A., Noullez A., Zheligovsky V. Negative magnetic eddy diffusivities from test-field method and multiscale stability theory. Astrophysical J. **811**, 135 (2015) [arxiv.org/abs/1501.04465].

[2] Chertovskih R., Zheligovsky V. Large-scale weakly nonlinear perturbations of convective magnetic dynamos in a rotating layer. Physica D, **313**, 99–116 (2015) [arxiv.org/abs/1504.06856].

[3] Rasskazov A., Chertovskih R., Zheligovsky V. Magnetic field generation by pointwise zero-helicity flow. Phys. Rev. E, submitted. (2017) [arxiv.org/abs/1708.08770].

[4] Zheligovsky V. Numerical solution of the kinematic dynamo problem for Beltrami flows in a sphere. J. Scientific Computing, 8, 41–68 (1993).
[5] Zheligovsky V.A. Large-scale perturbations of magnetohydrodynamic regimes: linear and weakly nonlinear stability theory. Lecture Notes in Physics, vol. 829, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

НЕУСТОЙЧИВЫЕ И ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, МОДЕЛИРУЕМЫЕ КИНЕТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

В.В. Аристов, О.И. Ровенская
Вычислительный центр им. А.А Дородницына РАН Федеральный исследовательский центр информатики и управления РАН

Развивается подход моделирования течений с проявлением неустойчивости и турбулентности на основе уравнений физической кинетики. Идеи применения в той или иной форме кинетических подходов к описанию турбулентности высказывались Жигулевым, Коганом, Цуге (Zuge), Климонтовичем, Сакураи (Sakurai) и др. В [1] рассмотрены предпосылки и получены первые результаты изучения неустойчивых и турбулентных течений с помощью уравнения Больцмана. Решения с помощью уравнения Больцмана и модельных уравнений свидетельствуют о принципиальной пригодности кинетического моделирования для описания неустойчивых и турбулентных явлений. В [2] с помощью прямого метода решения уравнения Больцмана получен колмогоровский энергетический спектр в задаче об изотропной турбулентности, сходные результаты описаны в [3], где применялся метод прямого статистического моделирования DSMC. В [4] для изучения структуры турбулентного течения также используется уравнение Больцмана. С помощью дискретных кинетических моделей найдены турбулентные решения [5] для модели Карлемана, где впервые исследована краевая неустойчивая задача (в [6] также изучаются вопросы хаотизации решения в задаче для модели Карлемана, являющейся прообразом более сложных дискретных кинетических уравнений).

В настоящей работе приводятся решения сложных двумерных и трехмерных задач на основе прямых методов решения уравнения Больцмана и кинетических модельных уравнений. Для сверхзвуковых течений газа моделируется и исследуется структура неустойчивых вихрей типа Тейлора-Гёртлера. Особый практический интерес может представлять выявленное влияние на характер неустойчивости шероховатости сопла. В задачах обтекания тел различной формы наблюдались неустойчивые явления. Для обратного уступа сопоставлением с экспериментом получено первое подтверждение возможности более точного описания турбулентного теплопереноса при использовании кинетических уравнений по сравнению со сплошносредным описанием типа RAND. Свойства устойчивости различных течений изучаются и с помощью кинетических дискретных моделей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-0100899.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.V. Aristov. Direct methods for solving the Boltzmann equation and study of nonequilibrium flows. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001.
2. V.V. Aristov, O.I. Rovenskaya. Application of the Boltzmann kinetic equation to the eddy problem. Computers and Fluids, 2011, 50, 189-198.
3. M.A. Gallis, N.P. Bitter, T.P. Koehler, J.R. Torczynski, S.J. Plimpton, G. Papadakis. Molecular-level simulations of turbulence and its decay. Physical Review Letters, 2017, 118, 064501.
4. С.А.Попов. О внутренней структуре турбулентности. Доклады Академии наук. 2016, т. 469, №6, с. 686690.
5. V.V. Aristov, O.V. Ilyin. Kinetic model of the spatio-temporal turbulence. Physics Letters A, 2010, 374, 43814384.
6. E.V. Radkevich, O.A. Vasil'eva. Generation of chaotic dynamics and local equilibrium for the Carleman equation. Journal of Mathematical Sciences. 2017, 224, 763–795.

FLOW AND ADVECTIVE SUPERDIFFUSION IN CHANNEL WITH ANISOTROPIC SUPERHYDROPHOBIC WALLS

E. S. Asmolov[a,b], T. V. Nizkaya[a], O. I. Vinogradova[a,c]
[a] Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry RAS, Moscow
[b] Institute of Mechanics, Moscow State University
[c] Department of Physics, Moscow State University

Pressure gradient generates complex flow patterns in superhydrophobic channels with misaligned textured surfaces. We present approximate theoretical solutions of Stokes equations and Dissipative Particle Dynamics (DPD) simulations for 3D flow in striped superhydrophobic channels. The mean flow is the superposition of the Poiseuille, transverse shear and slip-driven plug flows. Our results demonstrate that the transverse shear leads to complex flow patterns, which provide a new mechanism of a passive vertical mixing at the scale of a texture period. Depending on the value of Reynolds number Re two different scenarios occur. At relatively low Re the flow represents a transverse shear superimposed with two co-rotating vortices. For larger Re these vortices become isolated, by suppressing fluid transport in the transverse direction. A transverse shear can strongly enhance spreading of Brownian particles across the channel. We provide simple scaling results to guide the optimization of this transverse hydrodynamic dispersion. We relate short- and long-time spreading of the particle assembly to a Peclet number Pe and average slip velocities. We evaluate an optimal Pe that maximizes transverse spreading in superhydrophobic channels of a finite length. Simulations of particle assembly validate the scaling relationships.

Keywords: superhydrophobic surfaces; slip; particle dispersion

1. Introduction

Superhydrophobic (SH) textures in the Cassie state, where the texture is filled with gas, have motivated numerous studies during the past decade [1]. The use of highly anisotropic SH textures provides additional possibilities for flow manipulation due to secondary flows transverse to the direction of the applied pressure gradient [2]. This can be used to separate non-Brownian microparticles [3] and enhance mixing rate [4] in microfluidic devices. Most of the prior work has focused on calculations of the eigenvalues of the effective slip-length tensor for a single SH interface [5]. In the present paper, we show that any misalignment of textured and anisotropic walls necessarily leads to a generation of shear flow in the transverse direction, which has not been appreciated in previous work [6]. The transverse shear generates complex flow structures at the scale of the texture period [7]. Dispersion of Brownian particles is relevant to many applications. It is difficult in wide microchannels with smooth walls since the diffusion is slow at low Re and large Pe. SH surfaces with anisotropic patterns can enhance mixing in channels and both transverse shear and vertical components of the velocity contribute to this process. We study dispersion of additives in the flow under combined action of advection and molecular diffusion and look for an optimal regime.

2. Flow field

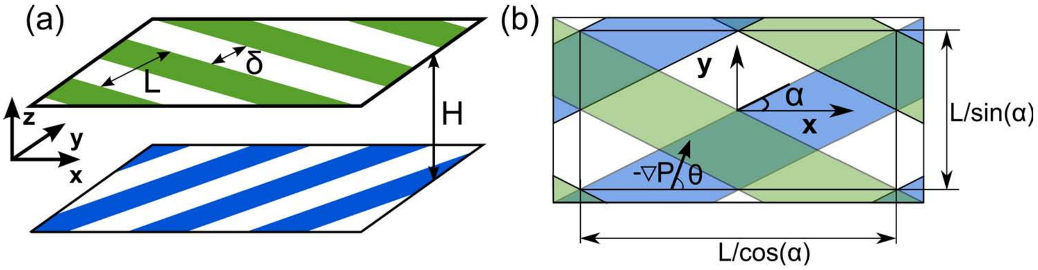


Fig. 1. (a) Two identical misaligned superhydrophobic walls with no-slip (white) and partial-slip (colored) stripes. (b) Top view of a periodic rectangular unit cell.

We consider the pressure-driven flow between two parallel stationary SH walls decorated with identical anisotropic textures with the fraction of the slipping area $\phi = 1 - \delta/L$. The flow is periodic with a rectangular unit cell shown in Fig. 1(b). We assume the gas interface to be flat with no meniscus curvature. We first consider a flow with the pressure gradient aligned with the x-axis. The symmetry of the problem implies that the x-component of the mean velocity is symmetric in z and its y-component is antisymmetric. Therefore, the flow represents a linear superposition of the conventional Poiseuille flow, slip-driven (forward) plug flow, and a linear shear flow in the transverse direction, as shown in Fig. 2.

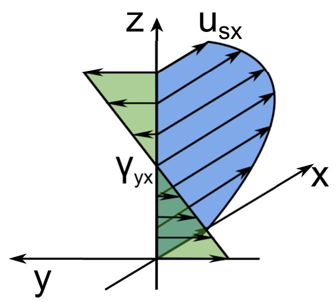


Fig. 2. Sketch of a mean velocity profile

The 3D flow is found using the theoretical solution of Stokes equations valid at Re << 1 and *H/L ~ 1* and DPD simulations for 2 < Re < 30. The effective properties of the channel are characterized by the flow and shear rates averaged over the cell volume V:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{V}\int \mathbf{u}_\tau dV, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{V}\int \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial z} dV,$$

where coordinates are scaled by H, $\mathbf{u}_\tau = (u_x, u_y)$ is the tangential velocity scaled by $U_0 = -H^2 \nabla P/(2\mu)$. The results evaluated within the two approaches are presented in Fig. 3 and compare very well at small Re. The forward flow rates Q_F become maximal for the pressure gradient aligned with the x-axis ($\theta = 0$) and minimal if it is aligned with the y-axis ($\theta = \pi/2$). These directions correspond to the largest amplitude of the transverse shear G_T for not orthogonal lower and upper stripes ($\alpha < \pi/2$). When the stripes are orthogonal Q_F becomes independent on θ.

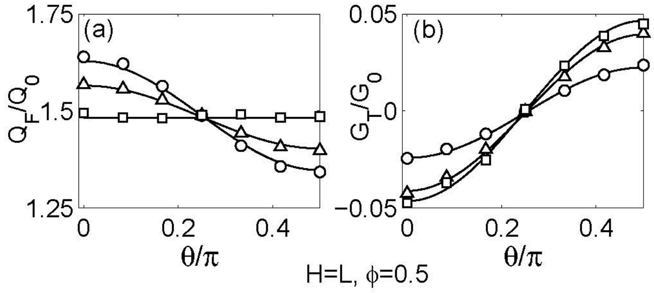


Fig. 3. (a) Forward flow rate (b) and transverse shear rate vs. θ/π. Symbols show simulation results for Re=2.8 and α=π/12 (circles), α=π/6 (triangles) and α=π/4 (squares). Solid curves are theoretical predictions for Re <<1.

To understand the global properties of the simulated flow, we focus on its streamlines and evaluate vector fields of fluid displacements over one period (see Fig. 4(a)). Depending on Re, different scenarios occur. For Re ≪ 1 we observe a mean shear flow with very small vertical component near the walls. At Re = 2.8 and 21 vector fields show a different behavior, i.e. represent a uniform shear superimposed with two co-rotating vortices. Finally, at Re = 28 we detect two isolated vortices and inhibited transport in *y*-direction.

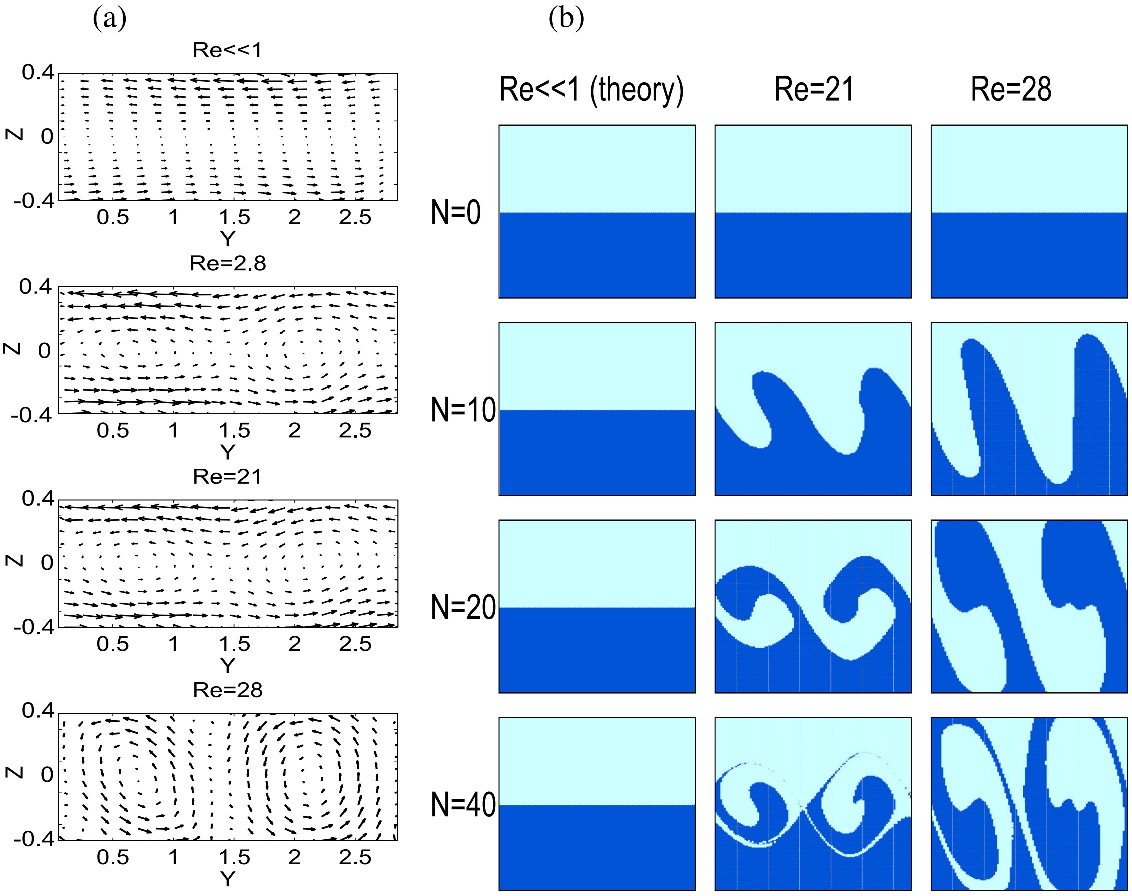


Fig. 4. (a) Vector field of fluid displacements over one cell period in *yz*-plane. (b) Displacements of colored fluids over *N* periods.

Vertical displacement of a fluid could have implication for a vertical mixing in such a channel. To understand whether these results are significant for mixing, we mark the upper and lower parts of the channel by different colors and compute the evolution of this system over N periods. The results for a contour field are shown in Fig.4 (b). We see that no vertical mixing occurs for the Stokes flow. For Re = 21 the mixing area is located in the center of the channel, but for Re = 28 the whole fluid is mixed.

3. Particle dispersion

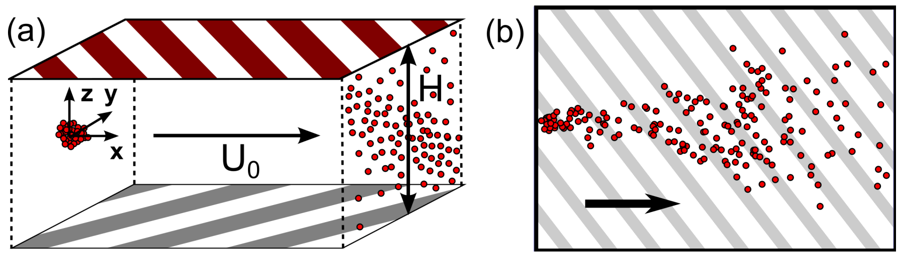


Fig. 5. (a) Sketch of particle dispersion in the superhydrophobic channel with misaligned striped walls. (b) Top view of transverse dispersion.

A transverse shear can induce an advective superdiffusion when the dispersion grows with time faster than $t^{1/2}$. Particle dispersion in the transverse dispersion strongly enhances compared to a normal diffusion [8] (see Fig. 5). Such a regime can be used for boosting dispersion of particles at smaller Peclet numbers compared to known concepts of passive microfluidic mixing.

We consider dispersion of Brownian particles injected from a point source located at channel midplane, $(x,y,z)=(0,0,0)$, and then advected by the flow described in the previous section. The dispersion in the transverse direction due to a combined effect of convection and Brownian diffusion is scaled for the two limiting cases as

$$\frac{\sigma_y(x)}{H} \propto \begin{cases} u_{sy}\mathrm{Pe}^{-1/2}\lambda^{3/2}, & u_{sy}^{-1} << \lambda << \mathrm{Pe}, \\ u_{sy}\mathrm{Pe}^{1/4}\lambda^{3/4}, & \lambda >> \mathrm{Pe}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\lambda = L_{ch}/H >> 1$, L_{ch} is the channel length, u_{sy} is the averaged slip velocity across the flow at channel walls, $\mathrm{Pe} = U_0H/D$ is the Peclet number. It follows from (1) that the maximal spreading can be attained when $\mathrm{Pe} \sim \lambda$, or equivalently, when the time scales for particles to migrate through the channel and to diffuse to channel walls are comparable. This conclusion is validated by simulations of particle assembly (see Fig. 6). We inject a large number of Brownian particles in the channel, track their instantaneous positions and evaluate the dispersion at a given cross-section. It can be seen that σ_y increases with λ, and that for a given λ there exists Pe_{max} which maximize the dispersion. The dispersion is large and could be many times larger than the channel thickness. In agreement with our scaling analysis, simulation data obtained for several λ collapse into a single curve when plotted in scaled by λ coordinates (Fig. 6(b)).

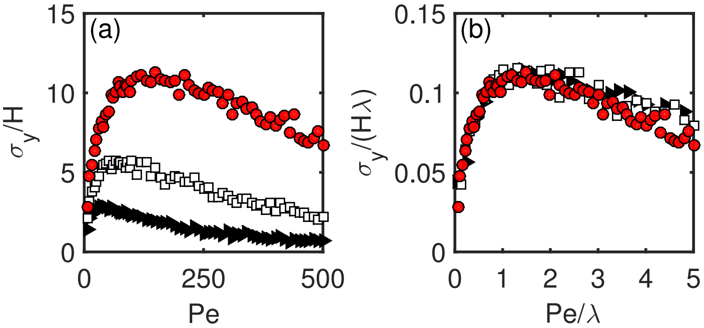


Fig. 6. (a) Transverse particle dispersion calculated with $\phi = 0.75$ at $\lambda = 25$ (squares), 50 (triangles), and 100 (circles); (b) The same data plotted in scaled by λ coordinates.

4. Acknowledgement

Research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 18-01-00729 A).

Bibliography

1. *Darmanin T., Guittard F.* Recent advances in the potential applications of bioinspired superhydrophobic materials // J. Mater. Chem. A. 2014. Vol. 2. P. 16319–16359.
2. *Vinogradova O. I., Belyaev A. V.* Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Cond. Matter. 2011. Vol. 23. P. 184104.
3. *Pimponi D., Chinappi M., Gualtieri P. et al.* Mobility tensor of a sphere moving on a superhydrophobic wall: application to particle separation // Microuidics Nanouidics. 2014. Vol. 16. P. 571–585.
4. *Ou J., Moss G. R., Rothstein J. P.* Enhanced mixing in laminar flows using ultrahydrophobic surfaces // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 016304.
5. *Asmolov E. S., Vinogradova O. I.* Effective slip boundary conditions for arbitrary one-dimensional surfaces // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 706. P. 108.
6. *Bazant M. Z., Vinogradova O. I.* Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 613. P. 125.
7. *Nizkaya T. V., Asmolov E. S., Zhou J. et al.* Flows and mixing in channels with misaligned superhydrophobic walls // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, P. 033020.
8. *Nizkaya T. V., Asmolov E. S., Vinogradova O.I.* Advective superdiffusion in superhydrophobic microchannels // Phys. Rev. E, 2017, Vol.96, P. 033109.

КОНВЕКТИВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В УСЛОВИЯХ ОРБИТАЛЬНОГО ПОЛЕТА

Бабушкин И.А., Глухов А.Ф., Зильберман Е.А., Зюзгин А.В.
Пермский национальный исследовательский университет, Пермь
Емельянов В.М.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
Завалишин В.Д.
Российские космические системы, г. Москва
Иванов А.И.
Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев
Максимова М.М.
Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва, Королев
Сазонов В.В.
Институт Прикладной Математики им. Келдыша РАН, Москва

В обзоре рассматриваются результаты конвективных экспериментов в условиях реальной невесомости и контролируемого динамического воздействия на гравитационно-чувствительные системы. В результате опытов обнаружен тепломассообмен термоинерционной и термовибрационной природы в микрогравитационной обстановке, характерной для орбитального полета крупного комплекса.

В 1995 году на станции МИР проводились эксперименты с помощью французского оборудования Алис-1 [1]. В качестве рабочей среды использовались шестифтористая сера и двуокись углерода в находящиеся в околокритическом состоянии, т.е. в ближней окрестности термодинамической критической точки. Градиент температуры в цилиндрическом слое задавал точечный нагреватель. Прибор был снабжен собственным трёхкомпонентным акселерометром. Каждая из трех серий опытов, состоящая из различных температурных режимов не превышала 80 часов. Задачей опытов было обнаружение конвективных процессов в микрогравитационной обстановке, свойственной орбитальному полету. Основные результаты обсуждаемой серии экспериментов:

- обнаружена, визуализирована (рис.1) и описана термовибрационная конвекция;
- обнаружена, визуализирована и описана термоинерционная конвекция:
- обнаружено, визуализировано и описано влияние квазистатического ускорения, восстановленных по данным телеметрии, на структуру виброконвективных потоков.

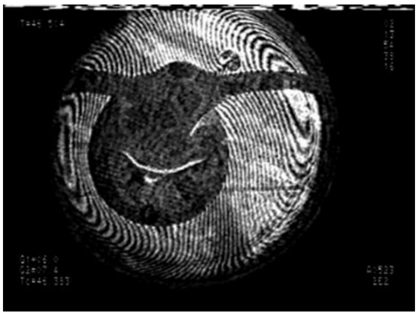


Рис.1. Виброконвективное искажение симметричности распространения теплового пятна от нагревателя. Отклонение температуры T от критического значения Tc составляет 0.121 K, 23 с после начала теплового импульса, частота основной гармоники спектра микроускорений 5 Гц. Максимальная по амплитуде компонента микроускорений горизонтальна в плоскости рисунка.

В 1999-2000 годах на станции МИР проводились две серии экспериментов с помощью французского оборудования Алис-2 [2]. Общая продолжительность эксперимента Алис-2-Вибро, состоявшего из 5-ти различных серий, составила 187 часов 50 минут. Общая продолжительность серии Алис-2-Вибро-2000 составила 71 часа 3 минуты. Основные задачи состояли в воспроизведении результатов предыдущих опытов и изучения воздействия на конвективный тепломассоперенос переменных инерционных ускорений. Внешние воздействия производились силами экипажа, электродинамическим вибратором и вращением орбитальной станции. Основные результаты обсуждаемых опытов:

- воспроизведена и описана термовибрационная конвекция;
- показано, что интенсивное вибрационное воздействие нивелирует влияние квазистатических микроускорений, что может позволить управлять режимами тепломассообмена при орбитальном полете;
- отчетливо воспроизведена термоинерционная конвекция;
- обнаружено и описано влияние вращательного движении корабля на термоинерционную конвекцию и ее структуру (рис.2);
- не обнаружено заметного отличия во влиянии на конвективные процессы поступательного или качательно-вращательного вибрационного воздействия.

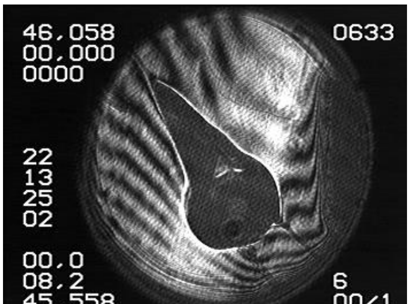


Рис.2. Конвективное искажение симметричности распространения теплового пятна от нагревателя. T – Tc = 0.500 K, 77 с после начала теплового импульса, средняя угловая скорость разворота станции: $\omega_{ср}$ = 0,0034 $с^{-1}$, центробежное ускорение ~ $4.7 \cdot 10^{-5}$ $м/с^2$.

В 1998-2000 годах на станции МИР проводились эксперименты с датчиком конвекции ДАКОН [3]. Программа исследований включала в себя 28 сеансов работы прибора от 4 до 24 часов. В период 2008-2011 годов на Российском сегменте Международной космической станции более 2000 часов отработал модернизированный прибор Дакон-М [4]. Оборудование для этих экспериментов было изготовлено на кафедре общей физики Пермского государственного университета. Рабочая полость датчика конвекции представляла собой цилиндр, ограниченный с торцов нагревателем и холодильником и заполнялась воздухом или двуокисью углерода под давлением. Основными целями экспериментов были мониторинг микрогравитационной обстановки в части ее квазистатической компоненты в различных режимах полета крупного орбитального комплекса и наблюдение конвективных течений в газовой среде камеры, вызванных действием медленно меняющихся ускорений. Для этого измерения Дакон-М сравнивались с ускорениями в точке расположения датчика конвекции, которые рассчитывались исходя из показаний датчиков угловых скоростей. Проводилось сравнение с показаниями акселерометра MAMS (рис.3), которые также предварительно пересчитывались для точки расположения Дакон-М с учетом ориентации его осей.

Эксперименты показали, что конвекция в неоднородно нагретых газовых и жидких средах может возникнуть при динамических операциях с КА, при коррекциях орбиты за счет линейных или тангенциальных инерционных микроускорений. Также возможно возбуждение конвекции за счет постоянной составляющей микроускорений при невозмущенном орбитальном полете МКС. Все эти варианты генерации конвективных течений зафиксированы в орбитальных экспериментах с Дакон-М.

Накопленный опыт позволяет авторам априори дать оценку того, следует ли учитывать конвективное перемешивание в тех или иных технологических установках использующих неоднородно нагретые газовые или жидкие среды в орбитальных экспериментах. А также дать рекомендации относительно ориентации температурных градиентов с целью минимизировать влияние остаточных микроускорений.

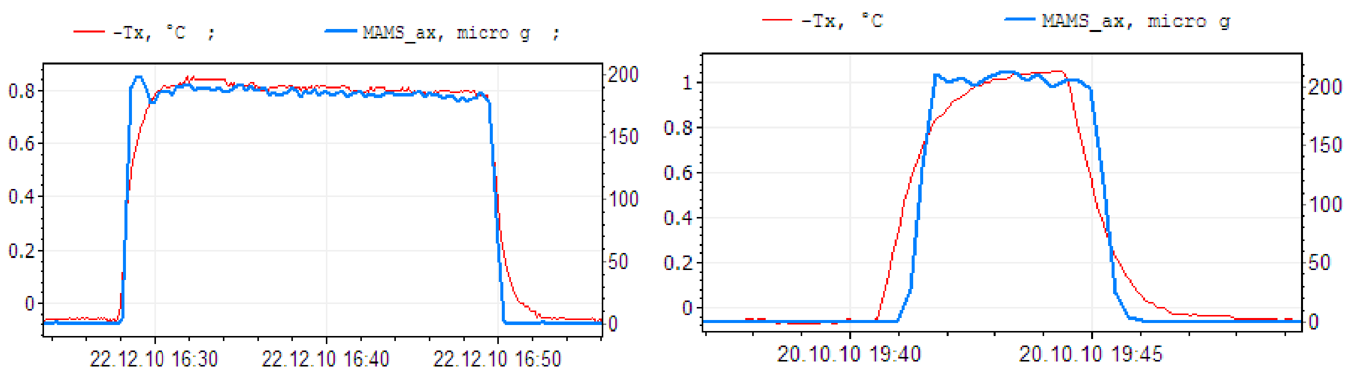


Рис.3. Линейные ускорения при коррекции орбиты МКС двигателями «Прогресс М». Красная линия - сигнал ДАКОН-М, синяя - показания акселерометра MAMS пересчитанные для точки расположения Дакон-М.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зюзгин А.В., Иванов А.И., Полежаев В.И., Путин Г.Ф., Соболева Е.Б. Конвективные движения в околокритической жидкости в условиях реальной невесомости // Космические исследования, 2001. Т. 39. № 2. С. 188 – 201.
2. A.V. Zyuzgin, G.F. Putin, N.G. Ivanova, A.V. Chudinov, A.I. Ivanov, A.V. Kalmykov, V. I. Polezhaev, V.M. Emelianov The heat convection of nearcritical fluid in the controlled microacceleration field under zero-gravity condition // Advances in Space Research, 2003. Vol. 32, No 2, PP. 205-210.
3. Бабушкин И.А., Богатырев Г.П., Глухов А.Ф., Путин Г.Ф., Авдеев С.В., Бударин Н.М., Иванов А.И., Максимова М.М. Изучение тепловой конвекции и низкочастотных микроускорений на Орбитальном комплексе "Мир" с помощью датчика "Дакон" // Космические исследования, 2001. Т. 32. № 2. С. 150 – 158.
4. Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А., Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Иванов А.И., Максимова М.М., Сазонов В.В. Эксперименты с датчиком конвекции Дакон-М // Космические исследования, 2017. Т. 55. № 4. С. 278-284.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕРПРЕТАЦИЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ КОМЕТЫ ЧУРЮМОВА-ГЕРАСИМЕНКО ПРИ ПОМОЩИ АППАРАТА ROSETTA

Баранов В.Б.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

В 2004 году Европейским космическим агенством (ESA) по сложной траектории был запущен аппарат Rosetta для исследования кометы Чурюмова-Герасименко. В сентябре 2014 года, незадолго до прохода кометой перигелия, аппарат встретился с кометой и, маневрируя вокруг нее, в течение двух лет проводил исследования параметров истекающего из кометы газа. При этом большое внимание уделялось взаимодействию кометного газа (газа комы кометы) с солнечным ветром.

Границу раздела плазмы солнечного ветра и заряженной компоненты кометного газа (плазмы), которая является тангенциальным разрывом, обычно называют в литературе «ионопаузой». Поскольку кометы не имеют собственного магнитного поля, то эта граница разделяет межпланетное магнитное поле и область кометной комы, в которой магнитное поле отсутствует (magnetic cavity). Впервые эта область была открыта при исследовании кометы Галлея в марте 1986 года при помощи аппарата Giotto. Было, в частности, показано, что ионопауза имеет определенную структуру, т.е. оказалось, что магнитное поле в солнечном ветре проникает на некоторое расстояние в кому кометы. В работе [1] было показано, что это проникновение может быть объяснено отсутствием «вмороженности» магнитного поля в плазму вследствие эффекта Холла. Аппарат Rosetta при маневрировании вокруг кометы Чурюмова-Герасименко много раз пересекал такую границу, что интерпретировалось как неустойчивость ее ионопаузы.

Проблеме интерпретации некоторых результатов измерений плазменных параметров вблизи кометы Чурюмова-Герасименко при помощи аппарата Rosetta и посвящен настоящий доклад.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В.Б. О влиянии токов Холла на проникновение магнитного поля через тангенциальные разрывы в незамагниченную плазму в физических условиях космического пространства // Письма в АЖ. Т. 39, № 11, 2013.

УПРАВЛЕНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕХОДОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ПОМОЩИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА ПРИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

С.А. Баранов[1], И.А. Моралев[2], Д.С. Сбоев[1], С.Н. Толкачев[1]
[1]Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский
[2]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

В работе представлены результаты экспериментального исследования по управлению ламинарно-турбулентным переходом в трехмерном пограничном слое при помощи диэлектрического барьерного разряда (ДБР). Эксперименты проведены в аэродинамической трубе (АДТ) ЦАГИ Т-124 на модели стреловидной плоской пластины с наведенным отрицательным градиентом давления при скорости потока 12-24 м/с. Угол стреловидности пластины 35°. Потенциальное течение во внешнем потоке моделировалось при помощи искривленных фальшстенок в рабочей части. Измерения проведены однониточным датчиком термоанемометра. Положение перехода определялось по распределениям перемежаемости вблизи стенки. ДБР-актуатор общей длиной 390 мм размещался параллельно передней кромке в 110 мм от неё и предназначался для зажигания микроразрядов с шагом 5 мм в положении X = 125 мм. Положение актуатора выбиралось из соображений возбуждения субкритических стационарных возмущений поперечного течения в малотурбулентном режиме работы АДТ. Напряжение на актуаторе могло регулироваться.

Наши предыдущие измерения показали, что данный актуатор помимо предусматривавшейся стационарной моды генерирует в пограничном слое бегущие колебания неустойчивости поперечного течения, приводившие к раннему переходу. Поэтому в данной работе была предпринята попытка замаскировать эти вносимые актуатором нежелательные возмущения естественными, повысив для этого турбулентный фон внешнего потока. Повышенная степень турбулентности около 0.9% создавалась с помощью сетки, установленной на срезе сопла АДТ.

Результаты экспериментов показали, что при включенном актуаторе в пограничном слое возникает модуляция полей средней скорости и ее среднеквадратичных пульсаций по трансверсальной координате. Такая модуляция отсутствует при выключенном актуаторе. Темп нарастания вниз по потоку интегральных по спектру пульсаций при работе актуатора практически не изменялся. Однако существенно изменялись частотные спектры возмущений. В них оказывались подавленными высокочастотные компоненты, а низкочастотные слабее затухали к внешней границе пограничного слоя. Этот эффект проявлялся по всей ширине зоны измерений и не зависел от положения по трансверсальной координате.

Работа актуатора слабо повлияла на положение начала ламинарно-турбулентного перехода, определявшееся как начало отклонения распределений перемежаемости по продольной координате от нуля. Однако положение конца перехода при работающем актуаторе сдвигалось вниз по потоку на 50-100 мм. При возрастании скорости потока и неизменном положении датчика выигрыш в скорости наступления развитого турбулентного режима течения составлял около 1 м/с. Темп производства турбулентных пятен при включении актуатора существенно снижался, что было заметно и визуально при проведении опытов. Кроме того, было установлено, что для актуатора данной конструкции имеется некоторая оптимальная величина напряжения на электродах, дающая наибольшее снижение производства турбулентных пятен.

Как известно, в трехмерных пограничных слоях при повышенной внешней турбулентности протяженность зоны разрушения ламинарного режима может быть достаточно большой, до 30-40% хорды крыла [1, 2]. Полученные результаты показывают, что, во-первых, ДБР-актуаторы могут иметь некоторые перспективы в управлении ламинарно-турбулентным переходом в таких условиях. Во-вторых, для успешного применения этого метода управления в малотурбулентных течениях необходимо существенно снизить генерацию актуатором бегущих мод.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А.Ф. Киселев, Д.С. Сбоев, С.Л. Чернышев Особенности ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном пограничном слое при повышенной внешней турбулентности. ДАН, 2014, 454(6), 665-668.
2. A.Ph. Kiselev, V.A. Kuzminsky, D.S. Sboev The laminar-turbulent transition zone in 2D and 3D boundary layers with emphasis on effect of free stream turbulence. 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2014), 2014, St. Petersburg, Russia.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПОТОКА В РАБОЧЕЙ ЧАСТИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ СО СВОБОДНОЙ СТРУЕЙ

С.А. Баранов, Н.И. Батура, Г.Г. Гаджимагомедов, Д.С. Сбоев
Центральный Аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский

Аэродинамические трубы со свободной струей имеют широкое применение в практике аэродинамического эксперимента. Важной особенностью этих установок является возникновение пульсаций скорости в рабочей части (РЧ), вызванных генерацией вихрей в слоях смешения. Кроме того, взаимодействие слоя смешения струи и диффузора приводит к возникновению вибраций установки и самого здания, в котором она смонтирована. По этой причине весьма актуальной задачей для существующих и перспективных труб является управление возмущениями в слое смешения. Литература по этой проблеме весьма обширна, однако физические механизмы возбуждения колебаний поняты недостаточно.

Предлагаемое сообщение посвящено описанию экспериментов по исследованию характеристик пульсаций в аэродинамической трубе со свободной струей Т-03 ЦАГИ. Максимальная скорость этой модельной установки - 45 м/с, размеры среза прямоугольного сопла - 570х370 мм, длина открытой рабочей части до диффузора - 1300 мм. Эксперименты проводились как на установке в ее исходном виде, так и при монтаже на срезе сопла треугольных вихрегенераторов различной высоты.

Методом PIV были исследованы средние характеристики полей скорости в районе слоя смешения струи. На всех исследуемых режимах при скоростях до $U_0 = 40$ м/с положение внешней и внутренней границы, а также границы первоначального расхода рабочей струи мало зависит от глубины установки в поток вихрегенераторов и скорости потока. Дымовая визуализация показала присутствие квазиупорядоченных вихрей в слое смешения на некоторых режимах. Пульсации в струе исследовались с помощью двух термоанемометров, которые устанавливались на разных расстояниях от среза сопла. Полученные осцилограммы также выявили квазипериодические пульсации, которым на спектре соответствуют дискретные гармоники. Помимо дискретных гармоник на всех скоростях наблюдаются нарастающие вниз по потоку пульсации в широкой полосе частот (15-300 Гц), центрированные около числа Струхаля Sh=0,48. Анализ спектров турбулентности показал, что источником этих возмущений служит завихренность в турбулентном слое смешения, окружающем струю. По сигналам с двух датчиков были рассчитаны кросспектры и скорость распространения возмущений, которая оказалась равной примерно $0{,}66U$ для наиболее интенсивных колебаний. Характерная длина волны возмущений растет вниз по потоку.

Рассмотрено несколько аэроакустических механизмов, которые могут вызывать возникновение интенсивных квазипериодических колебаний с дискретными гармониками в спектре. В пионерской работе [1] предложена модель возбуждения таких колебаний, основанная на взаимодействии квазипериодических возмущений в свободной струе и собственных колебаний (стоячих акустических волн) закрытой части АДТ. Механизм, лежащий в основе модели [1], состоит в том, что квазипериодические вихри возбуждают в закрытой части АДТ стоячие волны большой амплитуды, которые, в свою очередь, на срезе сопла интенсифицируют порождение квазипериодических вихрей. При этом возникает обратная связь, придающая процессу автоколебательный характер. Анализ полученных в настоящем эксперименте данных показал, что в возбуждении колебаний большой амплитуды на дискретных частотах могут участвовать и акустические моды собственных колебаний других компонентов установки, в частности, камеры Эйфеля.

В представленных экспериментах при помощи термоанемометра изучалось влияние на колебания скорости в рабочей части АДТ Т-03 вихрегенераторов, выполненных в виде треугольных пластинок, выступающих в поток перпендикулярно стенкам сопла и устанавливаемых на его срезе сопла. Механизм влияния таких вихрегенераторов на колебания в слое смешения состоит в том, что они способствуют перераспределению энергии квазиупорядоченного колебательного движения от поперечной завихренности к продольной, тем самым снижая интенсивность колебаний в ядре потока. В сечении $x = 445$ мм в АДТ с вихрегенераторами пульсации, по сравнению с исходной конфигурацией, снижаются примерно на 0,1 %, в среднем с 0,7 до 0,6 %. Ниже по потоку влияние вихрегенераторов более существенное. Пульсации падают примерно на 30 %, с 2 до 1,4 %. Таким образом, исследованные вихрегенераторы благоприятно сказываются на колебаниях потока в АДТ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Стрелков С.П., Бендриков Г.А., Смирнов Н.А. Пульсации в аэродинамических трубах и способы демпфирования их // Труды ЦАГИ. – 1946. – № 593.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЛАГОНАСЫЩЕННОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ВАЛАМИ

Г.А. Бахадиров
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, г. Ташкент

Вопросу движения влагонасыщенного тела переменной массы между вращающимися валами исследователи подходят по разному.

А.Ниссэна [1], зону контакта вращающихся валов, делит на две части: входную и выходную, считает, что влага из материала удаляется в выходную часть. Это объясняется тем, что удаление влаги из материала происходит под действием капиллярных сил в выходной части зоны контакта, где упругие покрытия валков при расширении впитывают влагу.

Другие исследователей [2-3], показывают обратную картину: влага удаляется из входной части зоны контакта и в выходной части имеет место впитывание влаги материалом из покрытий валов. Следует иметь в виду, что характер удаления влаги из материалов и впитывание влаги материалом покрытий валов зависит от свойств материалов и механических параметров отжимных устройств.

Непосредственное использование этих теорий при изучении процесса отжима влагонасыщенного материала (например, кожевенного полуфабриката) валковой парой дает значительную погрешность.

При отжиме влагонасыщенного материала валковой парой целесообразно использовать общий закон динамики для тел переменной массы (уравнение Мещерского) [4]. В этом случае количество влаги, содержащейся в влагонасыщенном материале с течением времени изменяется непрерывно.

В работе рассматривается процесс отжима жидкости из влагонасыщенного листового материала валковой парой с одинаковыми радиусами. Ось абсцисс Ox направим перпендикулярно линии, соединяющих центры валков и проходящей через ее середину. Длина $l = CC_1$ геометрического очага деформации в проекции на ось Ox определяется из треугольника O_1CC_1 и равна $l = R\sin\alpha$ (α - угол захвата) (рис.). Если в очаге деформации на момент времени t выделить элемент массой M, то его движение можно описать уравнением

$$\frac{dM}{dt}\vec{V}_c + M\vec{W}_c = \vec{F}^{(e)}, \qquad (1)$$

где $\vec{V}_c$, $\vec{W}_c$ – соответственно вектора скорости и ускорения центра масс выделенного элемента; $\vec{F}^{(e)}$ - главный вектор внешних сил, действующих на этот элемент.

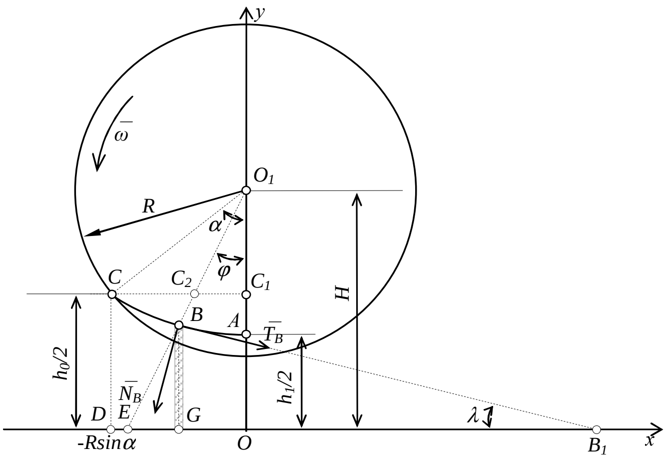


Рис. К определению параметров валковой пары

Время прохождения материала очаг деформации составит $t = \alpha/\omega$ (ω - угловая скорость вращения валков). В произвольный момент времени $t \in [0, \alpha/\omega]$ положение точки B элемента, лежащей на линии дуги AC деформации валка характеризуется углом $\varphi = \alpha - \omega t$. В случае, когда линия деформации представляет параболу, используя координаты точек A и C, найдем ее уравнение [5]:

$$y = \frac{h_0 - h_1}{2R^2 \sin^2\alpha} x^2 + \frac{h_1}{2}, \qquad (2)$$

где h_0, h_1 – толщины материала соответственно до начала захвата и при выходе ее из очага деформации.

Считая, что сила трения и реакция связи будут менять свое положение как в пространстве, так и во времени определяется объем жидкости вытекший из материала на произвольный момент времени.

Выведена зависимость нормальной реакции для выделенного элемента с переменной массой с учетом кинематических и геометрических параметров зоны контакта валковой пары.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Nissan A. Functions of the felts in water removal on the papermaking machine –Tappi, 1954, 37, n 12, p 597-606.
2. Кузнецов Г.К. Динамика текстильных машин: Учебн. пособие. – Кострома.: КТИ, 1992. – 110 с.
3. Новиков Н.Е. Прессование бумажного полотна. – М.: Легкая промышленность, 1972. – 248 с.
4. Фомин Ю.Г. Разработка теоретических основ и средств повышения эффективности обработки тканей валковыми модулями отделочных машин: Ар. дисс. … докт. техн. наук. - Иваново: Ив. гос. текстильная академия. 2001. – 41 с.
5. Ризаев А.А., Бахадиров Г.А., Баклушин М.Б. Определение центра масс элемента кожполуфабриката между двумя валами. Узбекский журнал. Проблемы механики, №3, 2002 г. стр.32-36.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ УСТОЙЧИВОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ МЕТОДА ЧОХРАЛЬСКОГО ПРИ ВРАЩЕНИИ КРИСТАЛЛА И ТИГЛЯ

О.А. Бессонов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Представлены результаты расчетов и анализ влияния раздельного и совместного вращений кристалла и тигля на устойчивость течений в широком диапазоне чисел Прандтля (от 0.01 до 10) в сопоставлении с режимами в отсутствие вращений. Определены режимы с повышенным порогом устойчивости для различных сочетаний скоростей вращения. Рассмотрены и проиллюстрированы механизмы потери осевой симметрии течения. Продемонстрировано, что для высоких чисел Прандтля совместное вращение кристалла и тигля позволяет повысить значение критического числа Грасгофа в 9-12 раз. Построена сводная диаграмма (карта) предельных режимов естественной и смешанной конвекций. Представлена методика контроля и анализа двумерной и пространственной мод неустойчивости.

Ключевые слова: тепловая гравитационная конвекция, вынужденная конвекция, рост кристаллов из расплава, гидродинамическая модель метода Чохральского, численное моделирование, устойчивость течений, конвективные взаимодействия.

ВВЕДЕНИЕ

Колебания температуры расплава в тигле, являющиеся главной причиной полосчатой неоднородности кристаллов, выращиваемых с использованием метода Чохральского, вызываются конвективными неустойчивостями, в которых основную роль играет тепловая гравитационная конвекция. Также имеются различные осложняющие факторы, обусловленные влиянием тепловых граничных условий и движениями негравитационного типа (вращение кристалла и тигля, действие сил поверхностного натяжения и др.). Разнородные граничные условия на боковой границе, дне тигля, фронте кристалла и поверхности расплава существенно влияют на развитие конвективных неустойчивостей и смену опасных мод возникновения колебаний. При этом значительно различаются случаи малых, средних и больших чисел Прандтля (Pr).

Работы по изучению конвективных процессов в методе Чохральского проводились в Институте проблем механики РАН под руководством проф. В.И. Полежаева (1936-2013 гг.) начиная с 80-х годов. Первоначально использовались упрощенные осесимметричные модели, а также программы линейного анализа устойчивости пространственного течения. С середины 90-х годов началось использование разработанных в коллективе программ прямого численного моделирования пространственных течений в модели метода Чохральского. По мере развития средств вычислительной техники динамические параметры моделируемых конфигураций приблизились к реальным, вплоть до параметров переходных и турбулентных течений в осесимметричном и трехмерном приближениях [1–3]. Обзор результатов начального этапа исследования пространственных течений приведен в [4].

Однако дальнейшее продвижение в этом направлении происходило сравнительно медленно, так как в технологических приложениях тепловая гравитационная конвекция обычно рассматривается совместно с вращением кристалла и (или) тигля [5, 6], что приводит к трудностям в установлении общих закономерностей, аналогичных полученным на простейших моделях. Поэтому в качестве следующего шага представлялось естественным детальное изучение в трехмерной постановке тепловой гравитационной конвекции, как ведущего механизма колебаний, и установление ее закономерностей в отдельности.

Статья [7], в которой проведен расчет колебательных режимов на диаграмме Gr-Pr с нахождением зон максимума критического числа Грасгофа Gr и позиций смены опасных мод колебаний, была первой в таком направлении. Ее результаты показали важность понимания взаимодействия элементарных механизмов в замкнутом объеме при комбинированном подводе тепла и были развиты в [8–11]. Однако для технологических приложений представляет интерес более детальное и специализированное рассмотрение особенностей конвективных взаимодействий и неустойчивостей в такой модели.

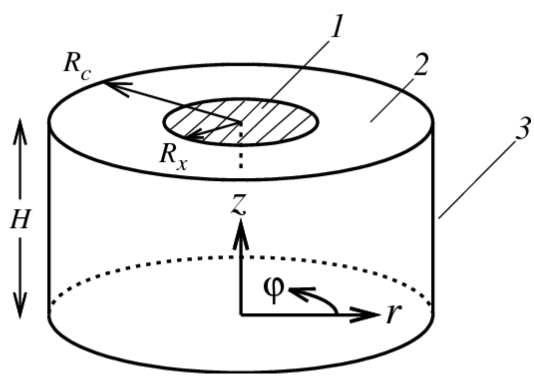
С учетом этого было проведено масштабное параметрическое исследование устойчивости течений в модели метода Чохральского в широком диапазоне чисел Прандтля [12, 13]. Для этих целей была выбрана конфигурация, использовавшаяся в предыдущих работах авторов. Был проведен анализ критических чисел Грасгофа при различных числах Прандтля для осесимметричного и трехмерного приближений при разных тепловых граничных условиях на поверхности расплава, построены обобщенные карты режимов течений, изучена структура и динамика течений. На следующем этапе было исследовано влияние вращения кристалла на устойчивость течений и рассмотрены механизмы потери устойчивости [13, 14].

Естественным продолжением этой работы было исследование смешанной конвекции при совместном вращении кристалла и тигля [15, 16]. Взаимодействие механизмов тепловой гравитационной и вынужденной конвекций в модели метода Чохральского изучалось на протяжении длительного времени [5, 17–21], однако, как правило, в статьях рассматривались частные случаи конвективных течений жидкости малой интенсивности, а расчеты проводились на грубых сетках, либо для осесимметричной модели.

Настоящая статья систематизирует результаты параметрических исследований тепловой гравитационной и смешанной конвекций. В статье приводятся результаты исследования устойчивости течений, проведенного на пространственной модели для различных значений скоростей вращения кристалла и тигля в диапазоне чисел Прандтля от 0.01 до 10. Выбор параметров моделирования производится на основе полученных ранее результатов [12–15]. Основная цель исследования – рассмотрение механизмов взаимодействия тепловой гравитационной и вынужденной конвекций в различных сочетаниях скоростей вращения кристалла и тигля, нахождение режимов течения с повышенным порогом устойчивости, систематизация полученных результатов и построение сводной диаграммы (карты) предельных режимов естественной и смешанной конвекции.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Установка гидродинамической модели метода Чохральского представляет собой цилиндрический тигель радиуса R_c, заполненный расплавом до высоты H (фиг. 1). В центре к поверхности расплава примыкает диск радиуса R_x, имитирующий торец выращиваемого кристалла. Открытая поверхность расплава предполагается плоской.



Фиг. 1. Гидродинамическая модель метода Чохральского и система координат: *1* – кристалл, *2* – поверхность расплава, *3* – тигель

Численное моделирование основано на решении пространственных нестационарных уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для несжимаемой вязкой жидкости в переменных скорость $\mathbf{V}$, давление p, температура θ

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{V} - \mathrm{Gr}\mathbf{g}\theta \qquad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\theta) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \nabla^2 \theta \qquad (1.3)$$

Здесь $\mathrm{Gr} = g\beta L^3 \Delta T / \nu^2$ – число Грасгофа, $\mathrm{Pr} = \nu / \alpha$ – число Прандтля, L и ΔT – масштабы длины и температуры, β – коэффициент температурного расширения, ν – кинематическая вязкость, α – температуропроводность, **g** – вектор силы тяжести. Масштаб скорости определяется как $V_0 = \nu / L$, масштаб времени $t_0 = L^2 / \nu$. Используется цилиндрическая система координат: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le H$, $0 \le r \le R_c$.

Геометрические параметры расчета определены следующим образом: $R_c = 1$, $H = 1$, $R_x = 0.4$ [22]. На поверхности расплава выполняются условия скольжения: $\partial V_r / \partial z = 0$, $\partial V_\varphi / \partial z = 0$, $V_z = 0$. Угловая скорость вращения кристалла равна Re_x, тигля – Re_c. Используются следующие граничные условия для температуры: нагрев на боковой цилиндрической границе $\theta = 1$, охлаждение на границе расплава и кристалла $\theta = 0$, тепловая изоляция на дне тигля и на поверхности расплава $\partial\theta / \partial z = 0$.

Для решения уравнений (1.1) – (1.3) используется метод конечных объёмов. Применяются разнесённые сетки со сгущениями в осевом направлении. Дискретизация конвективных членов производится по схеме с квадратичными интерполяциями против потока [23]. Для температуры θ при высоких Pr, а также для переноса азимутальной компоненты скорости V_φ в радиальном направлении применена оригинальная монотонная неосциллирующая схема с ограничителем потока [24], доработанная для моделирования вязких течений.

Уравнения решаются раздельно, с использованием метода проекций [25] и частично неявной схемы интегрирования по времени, с неявной трактовкой некоторых диффузионных членов и связыванием уравнений переноса импульса (1.1) и температуры (1.3) через половину временного шага. Для явных членов эта схема соответствует методу Рунге-Кутты второго порядка, а для неявных – методу Кранка-Николсона.

Для решения уравнения Пуассона для давления применён вновь разработанный экономичный прямой метод, относящийся к классу методов разделения переменных, с использованием быстрого преобразования Фурье в азимутальном направлении [26] и разложением по базису собственных функций оператора Лапласа в осевом направлении [27]. Применение такого метода вместо традиционного метода Фурье позволяет обеспечить большую неравномерность расчётной сетки для моделирования процессов в тонких пограничных слоях у поверхности растущего кристалла и около дна тигля. Новый метод решения уравнения Пуассона также обладает хорошим потенциалом распараллеливания.

Численный метод разрабатывался в соответствии с концепцией прецизионного вычислительного кода, подразумевающей сбалансированность всех элементов расчетной схемы с точки зрения точности, адекватности и вычислительных затрат. При этом не предполагалось использования схем дискретизации и интегрирования по времени с точностью выше второго порядка, а также совместного решения систем уравнений и прочих дорогостоящих усложнений, поскольку при полномасштабном совместном применении они многократно увеличивают вычислительные затраты без адекватного улучшения качества расчета, а при применении по отдельности – не достигают ожидаемого эффекта из-за несогласованности с остальными частями алгоритма.

Метод является прямым и не содержит дорогостоящих итерационных этапов. Благодаря высокой эффективности он может использоваться для детального моделирования ламинарных, переходных и турбулентных пространственных течений на подробных сетках. Результаты расчетов демонстрируют устойчивость численного метода в очень жестких режимах, когда значения числа Грасгофа достигают $6 \cdot 10^8$ в осесимметричном случае и $1.8 \cdot 10^8$ в пространственном. Результаты сравнения с экспериментом показывают, что используемый метод обеспечивает высокую точность и реалистичность моделирования сложных динамических пространственных течений [12, 28]. Развернутое изложение численного метода представлено в [29].

Расчетная программа распараллелена для многопроцессорных и многоядерных вычислительных систем с общей памятью, а также для кластеров на их основе в гибридной модели OpenMP / MPI. Представляемые результаты получены с помощью эффективного вычислительного кода на параллельных системах с использованием до 48 потоков. Использовались сетки размером 64×87×80 и 64×120×120 (φ, z, r) со сгущениями в пропорции 1:4 около дна полости и у поверхности расплава.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Тепловая гравитационная конвекция расплава в тигле вызывается действием двух механизмов: нарушением механического равновесия при подводе тепла к боковой поверхности тигля и потерей устойчивости равновесия в связи с отводом тепла от торца кристалла. Первый механизм, характерный для низких и средних Pr, вызывает глобальное, или подъемно-опускное течение, захватывающее весь объем жидкости. Второй механизм начинает действовать при повышении Pr, что приводит к снижению теплового потока на границе кристалла и возникновению неустойчивости типа Рэлея-Бенара. Этот механизм вызывает локальное течение, имеющее характер струй либо ячеек (термиков), опускающихся от границы кристалла вниз. Вынужденная конвекция, возникающая при вращении кристалла и (или) тигля, вступает во взаимодействие с этими механизмами.

Главная цель настоящего исследования – определение сочетаний значений числа Грасгофа и скоростей вращения кристалла и тигля (Gr, Re_x, Re_c), при которых происходит потеря устойчивости, и нахождение режимов с повышенным порогом устойчивости. Вращение кристалла и (или) тигля рассматривается в первую очередь как способ полной либо частичной стабилизации течения. Необходимость медленного вращения кристалла или тигля может быть также вызвана технологическими причинами, поэтому представляет интерес нахождение предельных значений Re_x и Re_c, при которых сохраняется стационарный режим.

В качестве критического значения числа Грасгофа Gr_c (при определенных значениях остальных параметров) принимается максимальное значение Gr, при котором течение остается стационарным и осесимметричным.

Для изучения раздельного и совместного влияния вращения кристалла и тигля на устойчивость течения выбран набор значений в трех поддиапазонах чисел Прандтля: низких $0.01 \le \mathrm{Pr} \le 0.1$, средних $0.1 < \mathrm{Pr} \le 0.6$ и высоких $0.6 < \mathrm{Pr} \le 10$. При этом наибольший интерес представляют значения $\mathrm{Pr} \le 0.07$ (расплавы полупроводников) и $\mathrm{Pr} \approx 10$ (расплавы оксидных кристаллов).

Используется прямой метод определения устойчивости течения, при котором производится расчет нестационарного течения в пространственной модели вплоть до установления стационарного режима, либо до потери устойчивости с переходом к колебательному режиму. Потеря устойчивости может происходить вследствие роста двумерной (осесимметричной) моды неустойчивости с сохранением осевой симметрии течения, либо пространственной моды, приводящей к ее нарушению. При этом неосесимметричный режим течения всегда является нестационарным (в неподвижной системе отсчета).

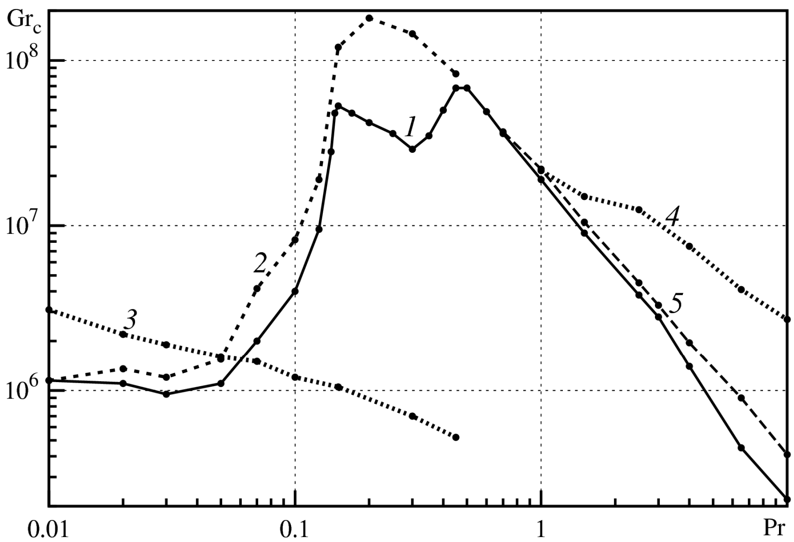
Для раннего выявления неустойчивости в процессе расчета производится контроль характеристики соответствующей моды. В качестве характеристики пространственной моды используется норма L_∞ (максимум модуля) отклонения азимутальной компоненты скорости V_φ от среднего значения по окружности. Отслеживание этой характеристики позволяет определить динамику нарушения осевой симметрии – как правило, экспоненциальное затухание, либо рост. В качестве характеристики двумерной моды неустойчивости используется норма дивергенции скорости, вычисленная после решения уравнения переноса импульса (1.1) перед применением коррекции в методе проекций для приведения поля скорости к дивергентному виду (1.2). Эта величина хорошо характеризует динамику нестационарного процесса. Также она позволяет выявить нарушение устойчивости явной схемы интегрирования по времени (условие Куранта для конвекции и аналогичное для диффузии): при превышении порогового значения временного шага происходит скачкообразный рост этой величины, сигнализирующий о риске появления нефизических осцилляций, которые могли бы остаться незамеченными.

Оперативный контроль характеристик неустойчивости позволяет сделать вывод о сходимости (расходимости) процесса на достаточно раннем этапе расчета, не дожидаясь полной стабилизации (дестабилизации) течения. Кроме того, по поведению характеристик пространственной и двумерной мод неустойчивости можно определять влияние параметров (Gr, Re_x, Re_c) на скорость сходимости и производить их подстройку, а также выявлять другие особенности – например, обнаруживать мелкие вихревые структуры, невидимые на общей картине течения.

В качестве характеристик взаимодействия вращения кристалла и тигля с тепловой конвекцией используются параметры $\mathrm{Re}_x^2/\mathrm{Gr}$ и $\mathrm{Re}_c^2/\mathrm{Gr}$, определяющие соотношения интенсивностей этих механизмов. При значении параметров порядка единицы механизмы вынужденной и тепловой конвекций частично компенсируют друг друга.

3. КРИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СВОДНАЯ КАРТА РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ

Конвективные взаимодействия важны для понимания роли тепловой гравитационной и смешанной конвекции ввиду широкого диапазона применяемых рабочих веществ, от расплавов полупроводников (Pr = 0.01 ÷ 0.1) до материалов оптоэлектроники (Pr >> 1). Такой диапазон параметров определяет специфику в управлении процессами переноса, что необходимо в связи с высокими требованиями к поддержанию однородности поля температуры. Критические числа Грасгофа $\mathrm{Gr_c}$ в зависимости от чисел Прандтля расплава являются основой для такого выбора.

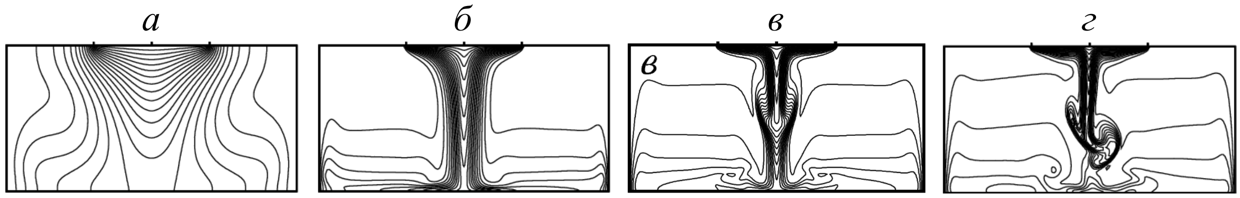


Фиг. 2. Предельные режимы устойчивого пространственного течения; зависимость критических чисел Gr_c от Pr: *1* – без вращений кристалла и тигля, *2* – с вращением кристалла, *3* – с вращением тигля, *4* – с совместным вращением кристалла и тигля, *5* – потеря осевой симметрии колебательного течения при высоких Pr (без вращений)

На фиг. 2 приведена сводная карта режимов неустойчивости естественной и смешанной конвекций в виде зависимости критического числа Грасгофа Gr_c от числа Прандтля Pr с учетом различных факторов. Кривая *1* показывает предельные режимы устойчивости тепловой гравитационной конвекции при неподвижных кристалле и тигле. На графике можно выделить три диапазона чисел Прандтля: низкие ($\mathrm{Pr} \leq 0.1$) с преобладанием глобального механизма конвекции; средние ($0.1 < \mathrm{Pr} \leq 0.6$), представляющие собой зону стабилизации с повышенными значениями Gr_c; высокие ($\mathrm{Pr} > 0.6$), характеризующиеся смешанным либо локальным механизмом тепловой гравитационной конвекции и неустойчивостью типа Рэлея-Бенара.

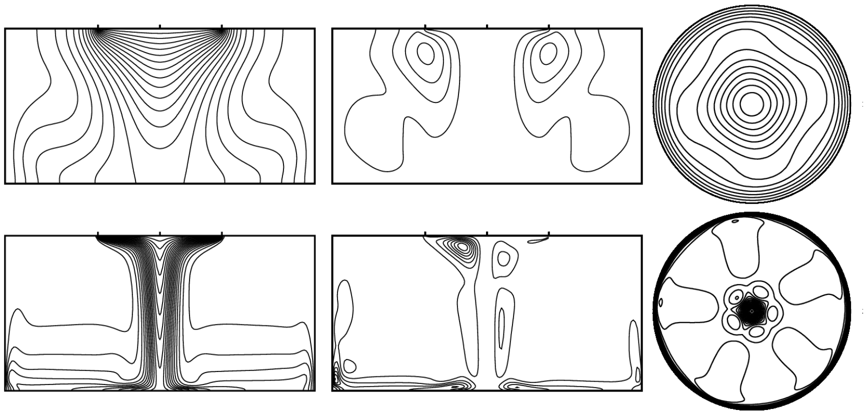
При низких и средних значениях Pr превышение критического числа Gr_c приводит к нарушению осевой симметрии и переходу в нестационарный режим течения. С повышением числа Прандтля значение критического числа увеличивается и достигает максимума $\mathrm{Gr}_c = 6.8 \cdot 10^7$ для $\mathrm{Pr} = 0.45$–0.5. Далее с повышением Pr значение Gr_c монотонно снижается. При $\mathrm{Pr} > 0.6$ происходит смена мод потери устойчивости, связанная с заменой доминирующего механизма конвекции с глобального на локальный: при превышении Gr_c течение становится колебательным с периодическим отпаданием термиков от торца кристалла, но при этом сохраняется осевая симметрия. При дальнейшем повышении числа Грасгофа происходит потеря осевой симметрии (кривая *5*), и термики становятся неосесимметричными.

На фиг. 3 показаны характерные картины течения для различных диапазонов числа Прандтля: *а* – низкие Pr, преобладание глобального механизма конвекции; *б* – средние Pr, зона стабилизации при очень большой интенсивности течения; *в* – высокие Pr, неустойчивость типа Рэлея-Бенара; *г* – высокие Pr, пример неосесимметричного термика.



Фиг. 3. Картины течения для различных диапазонов чисел Прандтля: *а* – низкие ($\mathrm{Pr} = 0.03$); *б* – средние ($\mathrm{Pr} = 0.15$); *в* – высокие ($\mathrm{Pr} = 6.5$), осесимметричный режим; *г* – высокие ($\mathrm{Pr} = 6.5$), неосесимметричный режим

Рассмотрим сверхкритические неосесимметричные режимы течения для трех характерных значений числа Прандтля: низкого, относящегося к левой части графика на карте режимов (фиг. 2), среднего, соответствующего максимуму $\mathrm{Gr_c}$, и высокого, находящегося в зоне смены мод колебаний.



Фиг. 4. Колебательный режим; слева направо: изотермы θ, изолинии отклонения температуры от среднего значения $\delta\theta$ в вертикальном сечении, изотермы θ в горизонтальном сечении вблизи дна полости; сверху вниз: $(\mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}) = (0.03, 1.1 \cdot 10^6)$, $(0.15, 6 \cdot 10^7)$

На фиг. 4 представлены мгновенные картины течения для низких и средних значений Pr, при которых доминирует глобальный механизм конвекции. Здесь имеет место колебательный режим течения, характеризующийся наличием геометрической симметрии в плоскости (φ, *r*). Показаны изотермы θ и изолинии отклонения температуры от среднего значения по азимуту δθ. Использование таких изолиний для визуализации позволяет наглядно иллюстрировать нарушения осевой симметрии и выявлять слабые вихревые структуры, а также определять их динамику. Отклонения температуры от среднего значения вызваны вертикально ориентированными вихревыми структурами. Эти структуры организованы в виде вихревых пар, напоминающих по своему виду вихри Тейлора-Гертлера. Подобные структуры являются типичными для пространственной колебательной неустойчивости, что подтверждается исследованиями динамики и пространственной структуры конвекции Марангони [30].

Качественно картины течения при низких и средних значениях Pr совпадают, но при средних Pr вертикальная струя жидкости в середине полости имеет более выраженный характер. Особенно отчетливо это проявляется при Pr = 0.15, что соответствует зоне стабилизации и характеризуется очень высоким значением $Gr = 6{\cdot}10^7$.

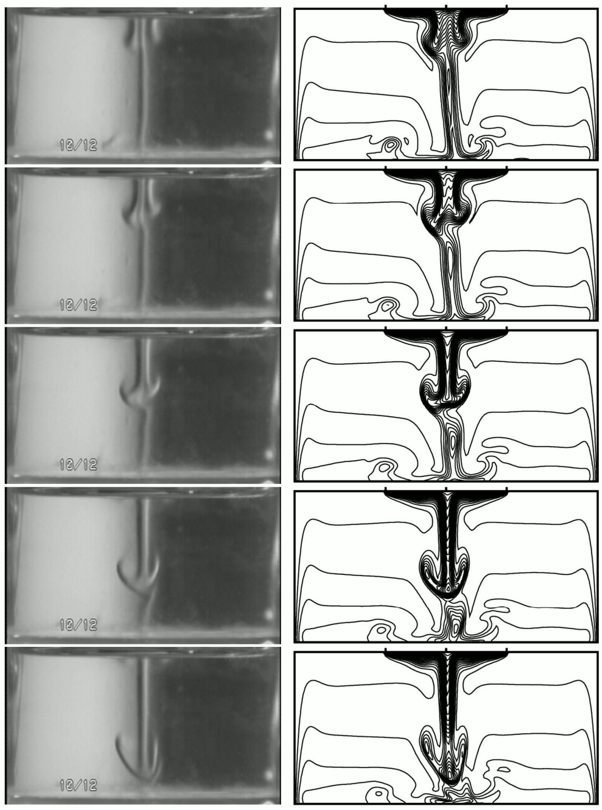
Течения, обладающие геометрической симметрией и имеющие периодический характер, характерны для режимов со слабой надкритичностью. При дальнейшем повышении Gr происходит нарушение периодичности и разрушение симметричной структуры. Аналогичное разрушение с переходом в нерегулярный режим течения наблюдается в сверхкритическом режиме конвекции Марангони [30].

Особый интерес представляет рассмотрение течений при высоких Pr, где преобладает локальный механизм нарушения динамического равновесия с периодическим отпаданием термиков от холодной границы кристалла, подобный неустойчивости типа Рэлея-Бенара. Такие режимы находятся в зоне смены мод возникновения колебаний, когда течение становится неустойчивым при меньшем значении Gr, чем происходит потеря осевой симметрии.

На фиг. 5 представлен пример течения при Pr = 6.5, $Gr = 10^6$ в сопоставлении с результатами эксперимента [28]. При увеличении числа Gr по сравнению с осесимметричным примером (фиг. 3, *в*) конфигурация и размеры термика существенно изменились. Термик приобрел форму шляпки гриба с большими отклонениями от осевой симметрии (фиг. 3, *г*). При этом нарушения осевой симметрии поля температуры наблюдаются только в центральной части полости. В плане картина неосесимметричных возмущений носит нерегулярный характер.

Этот пример характеризуется высокой динамикой нестационарного процесса, когда скорость движения головки термика достигает половины максимальной скорости движения жидкости в вертикальном направлении. Подобная динамика накладывает высокие требования к дискретизации конвективных членов при больших числах Прандтля. Реализованная в данной работе схема с ограничителем позволяет избежать нефизических

а *б*



Фиг. 5. Сравнение результатов эксперимента [28] (*а*) с расчетом (*б*) в варианте с теплоизолированной поверхностью расплава Pr = 6.5, $Gr = 10^6$; показаны картины течения в последовательные моменты времени.

осцилляций при сохранении высокой точности дискретизации.

Параметры эксперимента [28] на фиг. 5 несколько отличаются от используемых в расчетах: $\mathrm{Pr} = 28$, $\mathrm{Gr} = 4\cdot10^5$, $R_x = 0.35$. Несмотря на это, картины течения в экспериментальном и расчетном режимах очень хорошо совпадают. При этом по результатам расчета точно воспроизводится динамика развития термика и его неосесимметричная структура.

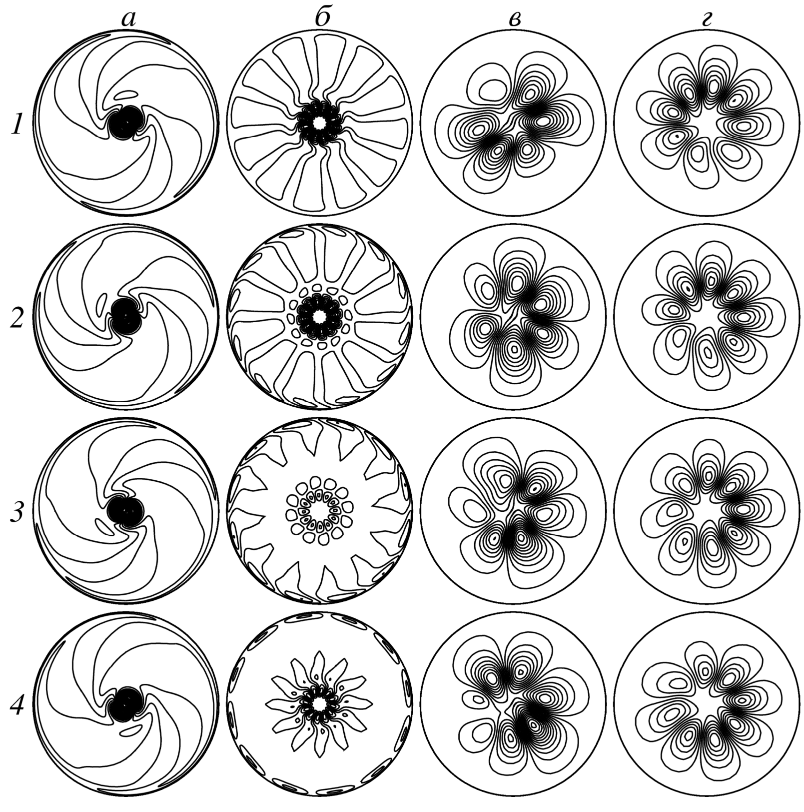
Сравнение экспериментальных и расчетных результатов на фиг. 5 показывает, что представленный численный метод позволяет моделировать сложные трехмерные динамичные течения с высокой реалистичностью. Более подробное рассмотрение течений при высоких Pr представлено в [13].

4. РАЗДЕЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ КРИСТАЛЛА И ТИГЛЯ

4.1. Влияние вращения кристалла на устойчивость течения при низких и средних Pr

Наибольший интерес представляет изучение режима $\mathrm{Pr} = 0.2$, который находится в окрестности точки стабилизации течения с неподвижным кристаллом. В этом режиме за счет вращения кристалла удается повысить критическое значение числа Грасгофа Gr_c более чем в четыре раза, с $4.2\cdot10^7$ до $1.8\cdot10^8$, что достигается при $\mathrm{Re}_x = 3500$. Значения параметра конвективных взаимодействий $\mathrm{Re}_x^2/\mathrm{Gr}$ при этом равно 0.068.

Таким образом, благодаря вращению кристалла достигается стабилизация течения с сохранением осевой симметрии для очень высоких значений Gr. При повышении значений $\mathrm{Re}_x > 4000$ или $\mathrm{Gr} > 1.8\cdot10^8$ переход к неосесимметричным режимам течения происходит по разным сценариям.



Фиг. 6. Изолинии отклонения температуры от среднего значения $\delta\theta$ в горизонтальных сечениях в последовательные моменты времени (*1–4*) для режимов $\mathrm{Pr} = 0.15$, $(\mathrm{Gr}, \mathrm{Re}_x) = (1.15\cdot10^8, 4500)$, $(1.6\cdot10^8, 3500)$ (*а*, *б*, сечение $z = 0.05$) и $\mathrm{Pr} = 0.03$, $(\mathrm{Gr}, \mathrm{Re}_x) = (1.25\cdot10^6, 1100)$, $(1.1\cdot10^6, 1300)$ (*в*, *г*, сечение $z = 0.8$)

При увеличении скорости вращения кристалла наблюдается устойчивое течение спирального типа, при котором глобальные характеристики остаются постоянными с достаточно высокой точностью, в то время как поведение локальных характеристик в каждой точке носит колебательный характер. При этом во вращающейся системе отсчета структуры полей скорости и температуры имеют стационарный характер (фиг. 6, *а*). Подобное поведение сверхкритических течений можно наблюдать при различных значениях параметров [5, 13, 14].

При повышении Gr течение в горизонтальных сечениях (φ, z) обладает геометрической симметрией с волновым числом $\kappa = 6$ (фиг. 6, *б*). На каждом периоде колебаний течение воспроизводится в несколько отличающемся виде, но в целом картина симметрии сохраняется. Подобные течения также наблюдаются в различных конфигурациях и характерны для низких значений числа Прандтля [13, 30]. При дальнейшем увеличении числа Грасгофа происходит нарушение периодичности и разрушение симметричной структуры.

В режиме $\mathrm{Pr} = 0.03$, характеризующемся невысоким значением критического числа Грасгофа $\mathrm{Gr}_c = 9.5 \cdot 10^5$ при $\mathrm{Re}_x = 0$, также наблюдается стабилизация течения за счет вращения кристалла. Наибольшее значение $\mathrm{Gr}_c = 1.2 \cdot 10^6$ достигается при $\mathrm{Re}_x = 1100$. При $\mathrm{Re}_x = 1000$ значение Gr_c снижается до $1.15 \cdot 10^6$, а при $\mathrm{Re}_x = 850$ и 1200 – до $1.1 \cdot 10^6$. Таким образом, область стабилизации для $\mathrm{Pr} = 0.03$ довольно узкая. При этом значения параметра конвективных взаимодействий $\mathrm{Re}_x^2/\mathrm{Gr}$ находятся в интервале от 0.65 до 1.1 [14].

Сценарии перехода к неосесимметричным режимам при повышении значений $\mathrm{Re}_x > 1200$ или $\mathrm{Gr} > 1.2 \cdot 10^6$ тоже различаются. При увеличении Gr развитие течения проходит несколько фаз. Сначала устанавливается осесимметричный режим, который после накопления возмущений теряет устойчивость и переходит в режим слабых колебаний с геометрической симметрией в горизонтальных сечениях. Через некоторое время происходит ступенчатое увеличение амплитуды колебаний, а затем устанавливается окончательный режим с двухчастотными колебаниями. В этом режиме также наблюдается геометрическая симметрия с волновым числом $\kappa = 3$, однако эта симметрия несколько нарушена, так как течение имеет не строго периодический характер (фиг. 6, *в*).

Увеличение скорости вращения кристалла ($\mathrm{Gr} = 1.1 \cdot 10^6$, $\mathrm{Re}_x = 1300$) также приводит к последовательной смене фаз. После потери осевой симметрии устанавливается режим слабо выраженного спирального течения, имеющего стационарный характер во вращающейся системе отсчета. Затем устойчивость такого течения теряется и происходит переход в режим слабых колебаний, после чего устанавливается окончательный колебательный режим, при котором наблюдается несколько нарушенная геометрическая симметрия с волновым числом $\kappa = 4$ (фиг. 6, *г*).

Таким образом, при превышении критических значений Gr или Re_x имеет место сложная смена режимов течения. Каждый режим является устойчивым на достаточно продолжительном интервале времени (порядка одной единицы безразмерного времени). Подобная множественная потеря устойчивости течения требует длительного моделирования нестационарного процесса для того, чтобы гарантировать установление окончательного режима.

Картины течения, представленные на фиг. 6 для $\mathrm{Pr} = 0.15$ и 0.03, имеют динамический характер. На рисунках показаны изолинии отклонения температуры от среднего значения по азимуту в горизонтальных сечениях. Использование для визуализации таких изолиний вместо изотерм позволяет более наглядно иллюстрировать слабые нарушения осевой симметрии и выявлять вертикальные вихревые структуры. Здесь при $\mathrm{Pr} = 0.03$ пространственные структуры в виде пар вихрей хорошо видны около верхней границы полости (*в*, *г*), в то время как в нижних сечениях вихри ослабевают, и их структура становится нерегулярной. При $\mathrm{Pr} = 0.15$, наоборот, структурные особенности течения развиваются по мере опускания струи жидкости и отчетливо проявляются около дна тигля (*а*, *б*). Похожие картины наблюдались и в других расчетах по модели метода Чохральского [13, 30].

4.2. Влияние вращения кристалла на устойчивость течения при высоких Pr

Рассмотрим взаимодействие тепловой гравитационной и вынужденной конвекций для значений $\mathrm{Pr} = 1$ и 6.5. Эти режимы течения характеризуются сменой моды потери устойчивости с трехмерной на двумерную и переходом к неустойчивости типа Рэлея-Бенара с периодическим отделением термиков от холодной нижней границы кристалла. Такой характер течения сохраняется и при вращении кристалла.

В табл. 1 представлены характеристики течения для $\mathrm{Pr} = 1$ при различных значениях числа Грасгофа в зависимости от скорости вращения кристалла Re_x. Для значений $\mathrm{Gr} < \mathrm{Gr}_c$ (здесь $\mathrm{Gr}_c = 1.9 \cdot 10^7$ при неподвижном кристалле) относительно медленное вращение кристалла не приводит к колебаниям, но при повышении Re_x происходит переход к неустойчивости типа Рэлея-Бенара и, в дальнейшем, к нарушению осевой симметрии. В определенном диапазоне значений Re_x наблюдается геометрическая симметрия с волновым числом $\kappa = 2$ для большинства режимов. Для значений $\mathrm{Gr} = 1 \cdot 10^7$, $\mathrm{Re}_x = 1250$ и 1300 волновое число $\kappa = 3$, при этом имеет место некоторое ослабление вихревых структур и снижение амплитуды отклонений температуры $\delta\theta$ от среднего значения.

Таблица 1. Характеристики течения в зависимости от Re_x для $\mathrm{Pr} = 1$

Режим течения	$\mathrm{Gr} = 1 \cdot 10^7$	$\mathrm{Gr} = 1.4 \cdot 10^7$	$\mathrm{Gr} = 1.8 \cdot 10^7$	$\mathrm{Gr} = 2 \cdot 10^7$
Осесимметричный стационарный	0 – 850	0 – 750	0 – 500	—
Осесимметричный колебательный	900	800 – 900	550 – 950	0 – 250
Неосесимметричный с геометрической симметрией	950 – 1300	950 – 1100	1000 – 1100	—
Неосесимметричный без геометрической симметрии	≥ 1400	≥ 1200	≥ 1200	≥ 300

Для сверхкритического значения $\mathrm{Gr} = 2 \cdot 10^7$ стационарного режима течения не наблюдается, а нарушение осевой симметрии происходит уже при достаточно низких значениях $\mathrm{Re}_x \geq 300$. Таким образом, при $\mathrm{Pr} = 1$ вращение кристалла не оказывает стабилизирующего влияния на течение. При этом характер течения при низких значениях Re_x не нарушается.

При $\mathrm{Pr} = 6.5$ неустойчивость типа Рэлея-Бенара выражена более явно, а осесимметричный колебательный режим течения в отсутствие вращения кристалла наблюдается в широком диапазоне чисел Грасгофа $4.5 \cdot 10^5 < \mathrm{Gr} \leq 9 \cdot 10^5$.

В табл. 2 представлены характеристики течения в зависимости от скорости вращения кристалла Re_x для нескольких характерных значений числа Грасгофа: предкритических $\mathrm{Gr} < \mathrm{Gr}_c$ и сверхкритических $\mathrm{Gr} > \mathrm{Gr}_c$, где $\mathrm{Gr}_c = 4.5 \cdot 10^5$ – позиция смены стационарного режима на колебательный при неподвижном кристалле. Для предкритических значений Gr при медленном вращении кристалла сохраняется стационарный режим течения. При повышении скорости вращения происходит переход в колебательный режим с последующей потерей осевой симметрии. При дальнейшем повышении Re_x наблюдается режим спирального течения, имеющего стационарный характер во вращающейся системе отсчета. Наконец, при высоких значениях Re_x течение снова становится нестационарным, с переходом от регулярных периодических колебаний к нерегулярным.

Таблица 2. Характеристики течения в зависимости от Re_x для Pr = 6.5

Режим течения	$Gr = 2\cdot10^5$	$Gr = 4\cdot10^5$	$Gr = 5\cdot10^5$	$Gr = 8\cdot10^5$
Осесимметричный стационарный	0 – 140	0 – 75	—	—
Осесимметричный колебательный	—	100 – 125	0 – 125	0 – 100
Неосесимметричный колебательный	—	150 – 175	150 – 200	125 – 180
Неосесимметричный стационарный	150 – 400	200 – 550	225 – 600	190 – 220
Неосесимметричный колебательный	≥ 450	≥ 600	≥ 650	≥ 225

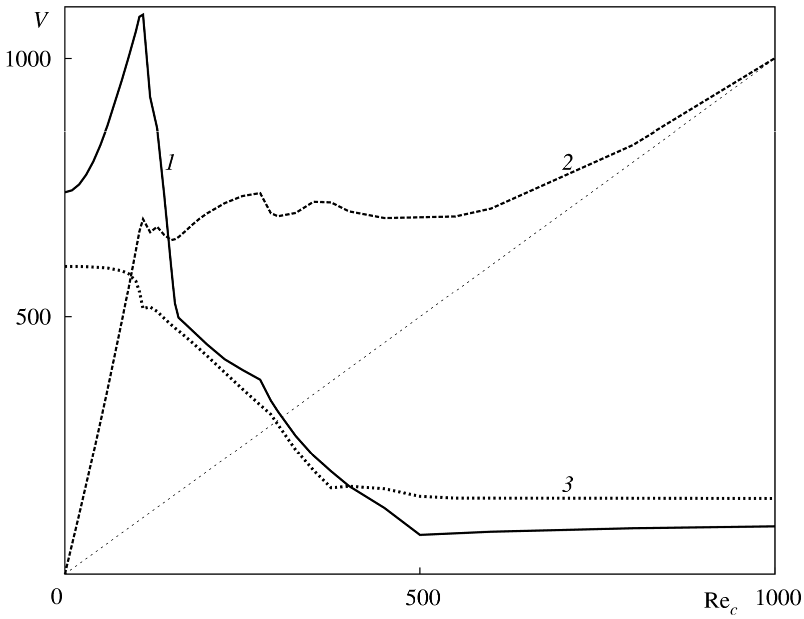
Таким образом, для средних и высоких Pr вращение кристалла не приводит к повышению порога устойчивости осесимметричного стационарного течения. При этом в определенном диапазоне чисел Gr и Re_x наблюдается устойчивое спиральное течение, которое в одной из форм может приводить к частичной стабилизации при повышенном значении числа Грасгофа. В свою очередь, медленное вращение кристалла не снижает порог устойчивости, что может быть важным в технологических применениях.

Более подробное рассмотрение течений с вращением кристалла представлено в [14].

4.3. Влияние вращения тигля на характер течения при низких Pr

Рассмотрим взаимодействие механизмов тепловой гравитационной и вынужденной конвекций при низких Pr в диапазоне скоростей вращения тигля $0 \leq \mathrm{Re}_c \leq 1000$ для фиксированного значения $Gr = 10^6$ в осесимметричном режиме.

На фиг. 7 показаны зависимости максимумов $|V_z|$, $|V_\varphi|$ и $|V_r|$ от скорости вращения тигля Re_c для Pr = 0.07. На начальном участке графика, при повышении значения Re_c от 0 до 110, наблюдается быстрый рост азимутальной компоненты скорости V_φ. Этот эффект вызван тем, что интенсивный поток, идущий к центру от края тигля, подталкивает вращающуюся в подкристальной области жидкость к оси цилиндра, и в соответствии с законом сохранения момента импульса скорость вращения V_φ увеличивается. Аналогичный эффект наблюдается в более сильной форме при вращающемся



Фиг. 7. Влияние вращения тигля на характер осесимметричного течения при неподвижном кристалле; зависимость максимумов абсолютных величин V_z (*1*), V_φ (*2*) и V_r (*3*) от скорости вращения тигля Re_c при Pr = 0.07, $Gr = 10^6$

кристалле и неподвижном тигле [14]. Также при повышении Re_c происходит некоторый рост максимума $|V_z|$, связанный с уменьшением ширины основного вихря под влиянием центробежной силы.

При дальнейшем повышении значения Re_c начинает преобладать влияние центробежных сил, и значения максимумов $|V_z|$ и $|V_r|$ быстро снижаются. При этом основной вихрь в сечении (r, z) распадается на два, примыкающих соответственно к оси полости и к боковой стенке тигля, а между ними образуется слабый вторичный вихрь, вращающийся в противоположном направлении. При $Re_c = 500$ достигается приблизительное равновесие между механизмами тепловой гравитационной и вынужденной конвекций. Здесь $Re_c^2/Gr = 0.25$, что можно считать пороговым значением параметра конвективных взаимодействий.

При $Re_c = 1000$ ($Re_c^2/Gr = 1$) влияние механизма вынужденной конвекции становится преобладающим, распределение температуры – близким к диффузионному, а распределение азимутальной компоненты скорости V_φ – практически линейно зависящим от радиальной координаты r. Интенсивность течения в сечении (r, z) в диапазоне $500 \le Re_c \le 1000$ становится в несколько раз слабее, чем при низких Re_c.

Для $Pr = 0.03$ зависимости максимумов $|V_z|$, $|V_\varphi|$ и $|V_r|$ от Re_c практически не отличаются от приведенных на фиг. 7, так что описанные закономерности являются общими для низких чисел Прандтля.

Представленные результаты были получены в осесимметричном режиме моделирования, так как в пространственной модели течение при $Gr = 10^6$ является неустойчивым для большей части диапазона $0 \le Re_c \le 1000$. Для $Pr = 0.07$ течение не теряет осевой симметрии и устойчивости при неподвижном тигле (критическое число Грасгофа $Gr_c = 2 \cdot 10^6$), а также при его медленном вращении $Re_c \le 50$. В свою очередь, при высоких значениях Re_c механизмы тепловой гравитационной и вынужденной конвекций частично компенсируют друг друга, при этом пространственное течение также остается осесимметричным и устойчивым. Это происходит при $Re_c \ge 800$ для $Pr = 0.03$ и $Re_c \ge 1100$ для $Pr = 0.07$.

Таблица 3. Значения Gr_c и $\langle Nu_x \rangle$ при различных сочетаниях Re_x и Re_c для $Pr = 0.03$ и 0.07

Характер вращения кристалла и тигля	Pr = 0.03				Pr = 0.07			
	Re_x	Re_c	Gr_c	$\langle Nu_x \rangle$	Re_x	Re_c	Gr_c	$\langle Nu_x \rangle$
Кристалл и тигель неподвижны	—	—	$9.5 \cdot 10^5$	5.21	—	—	$2 \cdot 10^6$	8.32
Тигель неподвижен	1100	—	$1.2 \cdot 10^6$	5.25	1600	—	$4.15 \cdot 10^6$	9.66
Медленное противо-вращение тигля	1100	-50	$6 \cdot 10^5$	4.92	1800	-50	$2.85 \cdot 10^6$	8.67
Кристалл неподвижен	—	2000	$1.9 \cdot 10^6$	4.05	—	2000	$1.5 \cdot 10^6$	4.14
Медленное противо-вращение кристалла	-50	2000	$1.9 \cdot 10^6$	4.05	-100	1750	$1.5 \cdot 10^6$	4.17
Медленное вращение кристалла	50	2000	$2 \cdot 10^6$	4.05	50	2000	$1.6 \cdot 10^6$	4.14
Быстрое вращение кристалла и тигля	1750	2000	$2.8 \cdot 10^6$	4.03	1750	2000	$2 \cdot 10^6$	4.04

Эффект частичной стабилизации течения при увеличении Re_c проявляется по-разному в зависимости от числа Прандтля. Для $\mathrm{Pr} = 0.03$ порог устойчивости повышается до $\mathrm{Gr}_c = 1.5\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 1500$, $\mathrm{Gr}_c = 1.8\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 1750$ и достигает максимума $\mathrm{Gr}_c = 1.9\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 2000$, что вдвое выше, чем $\mathrm{Gr}_c = 9.5\cdot10^5$ при неподвижном тигле. Для $\mathrm{Pr} = 0.01$ также наблюдается значительный рост Gr_c – с $1.15\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 0$ до $3.1\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 2000$. В свою очередь, для $\mathrm{Pr} = 0.07$ максимум Gr_c равен $1.5\cdot10^6$ (также при $\mathrm{Re}_c = 2000$), что ниже, чем $\mathrm{Gr}_c = 2\cdot10^6$ при $\mathrm{Re}_c = 0$. При дальнейшем повышении скорости вращения тигля значения Gr_c снижаются для всех чисел Прандтля.

Таким образом, вращение тигля с низкой и средней скоростями (начиная с $\mathrm{Re}_c = 30$) снижает устойчивость течения, а с высокой – позволяет сохранить осесимметричный стационарный режим при более высоком ($\mathrm{Pr} = 0.01$–0.03), либо достаточно высоком ($\mathrm{Pr} = 0.07$) значении числа Грасгофа. При этом имеет место значительное преобладание вынужденной конвекции, а значение параметра конвективных взаимодействий $\mathrm{Re}_c^2/\mathrm{Gr}$ находится в диапазоне от 1.3 до 2.7.

В табл. 3 представлены значения критического числа Грасгофа при различных сочетаниях скоростей вращения кристалла и тигля для $\mathrm{Pr} = 0.03$ и 0.07.

4.4. Сводные результаты исследования раздельных вращений кристалла и тигля

Результаты исследования влияния вращений кристалла и тигля по отдельности [14–16] представлены на фиг. 2 (кривые *2*, *3*) и (для низких и средних Pr) в табл. 4. Из графика и таблицы видно, что наибольший эффект от вращения кристалла достигается в диапазоне средних чисел Прандтля. Максимальное полученное значение Gr_c равно $1.8\cdot10^8$. На краях диапазона низких и средних Pr эффект снижается. При этом оптимальные значения скорости вращения кристалла Re_x находятся в интервале от 2500 до 3500. В свою очередь, за счет вращения тигля устойчивость течения удается повысить только в диапазоне $\mathrm{Pr} < 0.07$, при этом для $\mathrm{Pr} \le 0.05$ быстрое вращение тигля дает более высокий эффект, чем вращение кристалла, а оптимальное значение Re_c равно 2000 почти для всех протестированных значений числа Прандтля.

Таблица 4. Значения Gr_c при вращении кристалла или тигля для низких и средних Pr

Pr	Gr_c $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_c = 0$	Gr_c $\mathrm{Re}_x \neq 0$	Re_x	Gr_c $\mathrm{Re}_c \neq 0$	Re_c
0.01	$1.15\cdot10^6$	$1.15\cdot10^6$	600	$3.1\cdot10^6$	2000
0.02	$1.1\cdot10^6$	$1.35\cdot10^6$	1000	$2.2\cdot10^6$	2000
0.03	$9.5\cdot10^5$	$1.2\cdot10^6$	1100	$1.9\cdot10^6$	2000
0.05	$1.1\cdot10^6$	$1.55\cdot10^6$	1250	$1.6\cdot10^6$	2000
0.07	$2\cdot10^6$	$4.15\cdot10^6$	1600	$1.5\cdot10^6$	2000
0.1	$4\cdot10^6$	$8.2\cdot10^6$	2000	$1.2\cdot10^6$	2000
0.125	$9.5\cdot10^6$	$1.9\cdot10^7$	2500	—	—
0.15	$5.3\cdot10^7$	$1.2\cdot10^8$	3500	$1.05\cdot10^6$	2000
0.2	$4.2\cdot10^7$	$1.8\cdot10^8$	3500	—	—
0.3	$2.9\cdot10^7$	$1.45\cdot10^8$	3250	$7\cdot10^5$	2000
0.45	$6.8\cdot10^7$	$8.3\cdot10^7$	600	$5.2\cdot10^5$	1900

При высоких Pr вращение кристалла не приводит к повышению критического числа Грасгофа [14], однако до достижения определенного значения Re_x течение сохраняет стационарный осесимметричный характер при том же значении Gr_c. При этом с увеличением числа Прандтля предельное значение Re_x снижается (табл. 5).

Таблица 5. Значения Gr_c и $\langle Nu_x \rangle$ при вращениях кристалла и (или) тигля для высоких Pr

	Pr = 1	Pr = 1.5	Pr = 2.5	Pr = 4	Pr = 6.5	Pr = 10
Gr_c ($Re_x = Re_c = 0$)	$1.9 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^6$	$4.5 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^5$
Gr_c ($Re_x \neq 0$, $Re_c = 0$)	$1.9 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^6$	$1.35 \cdot 10^6$	$4.5 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^5$
Re_x	200	150	100	50	40	30
Gr_c ($Re_x = 0$, $Re_c \neq 0$)	$1.9 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$
Re_c	15	25	15	25	50	75
Gr_c ($Re_x \neq 0$, $Re_c \neq 0$)	$2.15 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^7$	$1.25 \cdot 10^7$	$7.5 \cdot 10^6$	$4.1 \cdot 10^6$	$2.7 \cdot 10^6$
Re_x	700	1300	1250	1625	750	350
Re_c	-50	-100	-125	-250	-275	-425
$\langle Nu_x \rangle$ ($Re_x = 0$, $Re_c = 0$)	32.55	31.17	29.81	27.22	24.22	23.13
$\langle Nu_x \rangle$ ($Re_x \neq 0$, $Re_c \neq 0$)	33.49	35.25	39.10	40.78	41.79	44.34

Анализ скоростей сходимости характеристик течения показывает, что вращение кристалла при определенных условиях подавляет пространственную моду неустойчивости и усиливает двумерную моду. Этим объясняется отсутствие положительного эффекта от вращения кристалла при высоких Pr, так как значения критических чисел Грасгофа для пространственной моды неустойчивости (фиг. 2, кривая *5*) здесь выше, чем для двумерной (кривая *1*), которая является причиной возникновения колебаний для данного режима течения. Усиление двумерной моды неустойчивости при вращении кристалла также объясняет снижение предельного значения Re_x с увеличением Pr.

В свою очередь, вращение тигля при определенных условиях подавляет двумерную моду неустойчивости и усиливает пространственную моду. В связи с этим стабилизация течения для низких Pr возможна только за счет центробежных сил при высокой скорости вращения тигля. На фиг. 2 (кривая *3*) и в табл. 4 представлены результаты, полученные в [15, 16].

В диапазоне чисел Прандтля от 1 до 2.5 вращение тигля также не приводит к повышению критического числа Грасгофа, при этом предельное значение Re_c остается достаточно низким (от 15 до 25). Начиная со значения Pr = 4 вращение тигля оказывает стабилизирующее влияние на течение, подавляя двумерную моду неустойчивости (табл. 5). С ростом числа Прандтля этот эффект усиливается, и при Pr = 10 увеличение критического числа Грасгофа за счет вращения тигля достигается до значения 3.4 (с $2.2 \cdot 10^5$ до $7.5 \cdot 10^5$). Дальнейшее повышение устойчивости течений при высоких Pr возможно за счет совместного вращения кристалла и тигля.

5. СОВМЕСТНОЕ ВРАЩЕНИЕ КРИСТАЛЛА И ТИГЛЯ

5.1. Стабилизация течения при совместном вращении кристалла и тигля в одном направлении при низких Pr

Как показано выше, медленное вращение тигля приводит к потере устойчивости течения, а быстрое – к его стабилизации и увеличению критического числа Грасгофа. Вращение кристалла в том же направлении, что и тигель, приводит к увеличению центробежных сил в середине области и дополнительному снижению интенсивности течения, что позволяет повысить значение Gr_c. Для значений Pr = 0.03 и 0.07 при быстром вращении тигля (Re_c = 2000) с увеличением Re_x наблюдается небольшой прирост Gr_c. При Re_x = 1750 достигается максимальная стабилизация течения. В результате критическое число Грасгофа дополнительно повышается за счет вращения кристалла приблизительно в 1.35, 1.45 и 1.3 раза (для Pr = 0.01, 0.03 и 0.07 соответственно) (табл. 3). При этом интенсивность течения снижается более чем в два раза.

Стабилизирующее влияние совместного вращения тигля и кристалла проявляется также в снижении теплового потока через торец кристалла. В табл. 3 представлены значения среднего числа Нуссельта $\langle Nu_x \rangle$ на торце для основных устойчивых режимов течения. Для Pr = 0.03 значение $\langle Nu_x \rangle$ снижается в сравнении с предельными режимами без вращения тигля приблизительно в 1.3 раза, для Pr = 0.07 – в 2–2.4 раза. В обоих случаях при быстром вращении тигля тепловой поток близок к значению $\langle Nu_x \rangle = 4.03$, наблюдающемуся при чисто диффузионном режиме (Gr = 0, Re_c = 0, Re_x = 0).

5.2. Влияние вращения кристалла и тигля во взаимно противоположных направлениях при низких и средних Pr

Рассмотрим два варианта течений – с медленным противовращением тигля при быстром вращении кристалла и с медленным противовращением кристалла при быстром вращении тигля. При этом медленное вращение кристалла и тигля в противоположных направлениях интереса не представляет, так как такие течения характеризуются низким порогом устойчивости.

В качестве основы для первого варианта взято влияние на устойчивость течения вращения тигля со скоростью Re_c = -50 для чисел Pr от 0.03 до 0.45. Во всем диапазоне наблюдается снижение критического числа Грасгофа в сравнении с предельным значением при оптимальном Re_x: с $1.2 \cdot 10^6$ до $6 \cdot 10^5$ (Pr = 0.03), с $4.15 \cdot 10^6$ до $2.85 \cdot 10^6$ (0.07), с $1.2 \cdot 10^8$ до $1.15 \cdot 10^8$ (0.15), с $1.45 \cdot 10^8$ до $8 \cdot 10^7$ (0.3) и с $8.3 \cdot 10^7$ до $8 \cdot 10^7$ (0.45). Таким образом, в большинстве случаев имеет место снижение Gr_c в полтора раза и более, что вызвано усилением пространственной моды неустойчивости вследствие вращения тигля. Отметим, что влияние Re_c имеет пороговый характер: при уменьшении скорости вращения тигля с 50 до 40 снижения критического числа Gr_c для Pr = 0.15, 0.3 и 0.45 не происходит.

В свою очередь, медленное противовращение кристалла при быстром вращении тигля не вызывает снижения устойчивости течения. Во всем диапазоне Pr от 0.01 до 0.07 критическое число Грасгофа сохраняется при Re_x = -50 и медленно снижается с увеличением скорости вращения кристалла [15]. Таким образом, противовращение кристалла может применяться в сочетании с быстрым вращением тигля без ущерба для устойчивости течения в тех случаях, когда оно обусловлено технологическими или иными причинами (например, для выравнивания фронта растущего кристалла).

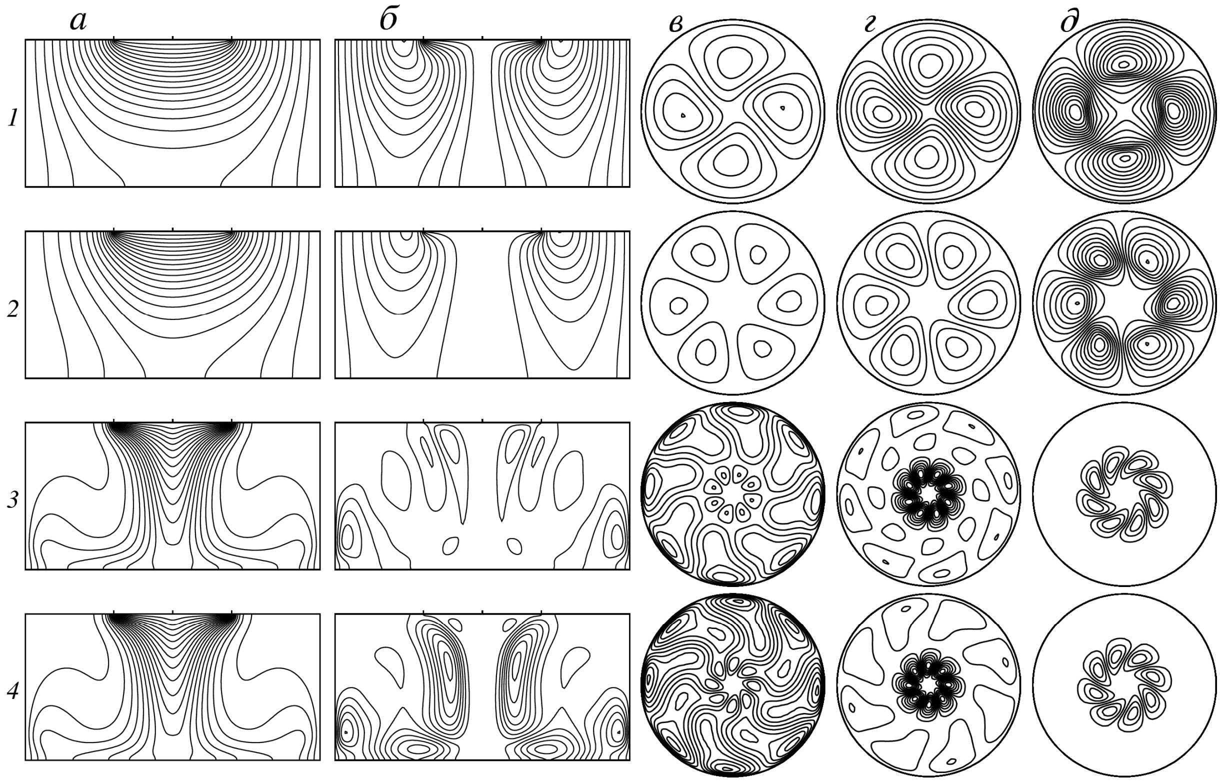
В табл. 3 представлены основные характеристики всех рассмотренных предельных случаев стационарного осесимметричного течения для Pr = 0.03 и 0.07.

5.3. Потеря устойчивости и переход к неосесимметричным режимам течения при низких Pr

При превышении критического числа Грасгофа происходит нарушение осевой симметрии течения и переход к нестационарному режиму. При слабой надкритичности такие течения имеют, как правило, установившийся колебательный характер и характеризуются наличием геометрической симметрии. При дальнейшем повышении Gr происходит нарушение периодичности и разрушение симметричных структур. Рассмотрим характер нестационарных течений для нескольких сочетаний скоростей вращения кристалла и тигля.

Для сверхкритических режимов с быстрым вращением тигля и медленным противовращением кристалла при Pr = 0.03 (Re_c = 2000, Re_x = -100) течение в диапазоне чисел Gr от $1.9 \cdot 10^6$ до $2.75 \cdot 10^6$ характеризуется слабым отклонением от осевой симметрии и является стационарным в системе отсчета, связанной с вращающимся тиглем. При этом глобальные характеристики течения не меняются со временем, а поведение локальных характеристик в каждой точке колебательное. В горизонтальных сечениях течение обладает геометрической симметрией с волновым числом $\kappa = 2$, а траектории частиц жидкости и изотермы имеют слегка вытянутую овальную форму. При этом их угловая ориентация одинакова по всей высоте расплава.

На фиг. 8, *1* представлена картина течения при $Gr = 2.75 \cdot 10^6$. Показаны изотермы θ и изолинии отклонения температуры от среднего значения по азимуту $\delta\theta$. Здесь изотермы $\delta\theta$ в вертикальном сечении (*1*, *б*) приведены для момента времени, когда отклонения от осевой симметрии выражены наиболее ярко.



Фиг. 8. Примеры неосесимметричных течений: изотермы θ (*а*) и изолинии отклонения температуры от среднего значения $\delta\theta$ (*б*) в вертикальном сечении, изолинии $\delta\theta$ в горизонтальных сечениях $z = 0.2, 0.5, 0.95$ (*в–д*) при (Pr, Gr, Re_x, Re_c) = (0.03, $2.75 \cdot 10^6$, -100, 2000) (*1*), (0.03, $2.9 \cdot 10^6$, 1750, 2000) (*2*) и (0.07, $3.3 \cdot 10^6$, 1900, -50) (*3* и *4*, в разные моменты времени)

При повышении числа Грасгофа до $3 \cdot 10^6$ течение становится существенно нестационарным, с периодическими колебаниями на продолжительном периоде, а при дальнейшем увеличении Gr характер колебаний становится менее регулярным.

При $Pr = 0.07$ и близких параметрах вращения ($Re_c = 1750$, $Re_x = -100$) стационарный вращающийся режим течения наблюдается только в очень узком диапазоне $1.55 \cdot 10^6 < Gr < 1.65 \cdot 10^6$. В остальном характеристики этого течения практически совпадают с приведенными выше.

При быстром вращении кристалла и тигля в одном направлении течение при слабой надкритичности также сохраняется стационарным во вращающейся системе отсчета, связанной с тиглем. На фиг. 8, *2* показана картина такого течения для $Pr = 0.03$, $Gr = 2.9 \cdot 10^6$, $Re_x = 1750$, $Re_c = 2000$. Здесь имеет место геометрическая симметрия с волновым числом $\kappa = 3$, а траектории и изотермы в горизонтальных сечениях имеют скругленную треугольную форму.

Следует отметить, что рассмотренные неосесимметричные стационарные течения с геометрической симметрией существенно отличаются по характеру от устойчивых спиральных течений, наблюдаемых при вращающемся кристалле и неподвижном тигле [13, 14].

В режимах с быстрым вращением кристалла и медленным противовращением тигля небольшое превышение критического числа Грасгофа приводит к появлению слабых вертикально ориентированных вихрей, подобных наблюдаемым в различных конфигурациях модели метода Чохральского и характерных для низких значений числа Прандтля [11, 13, 14, 30]. Такие течения имеют колебательный характер с периодической перестройкой этих вихрей. На фиг. 8, *3* и *4* показаны мгновенные картины течений в разные моменты времени с интервалом в половину периода ($\mathrm{Pr} = 0.07$, $\mathrm{Gr} = 3.3 \cdot 10^6$, $\mathrm{Re}_x = 1900$, $\mathrm{Re}_c = -50$). Течение обладает геометрической симметрией с волновым числом $\kappa = 4$, при этом отклонение поля температуры от осевой симметрии очень слабое.

Таким образом, в определенном диапазоне сверхкритических значений числа Грасгофа для всех сочетаний параметров вращения наблюдаются периодические режимы течений различного вида с достаточно слабыми отклонениями от осевой симметрии. При этом сценарий потери устойчивости определяется преобладающим механизмом вынужденной конвекции: при быстром вращении тигля имеет место устойчивое течение, стационарное во вращающейся системе отсчета, а при доминирующем вращении кристалла – течение с периодической перестройкой вертикально ориентированных вихрей.

Более подробное рассмотрение течений с совместным вращением кристалла и тигля при низких Pr представлено в [15].

5.4. Стабилизирующий эффект противовращения кристалла и тигля при высоких Pr

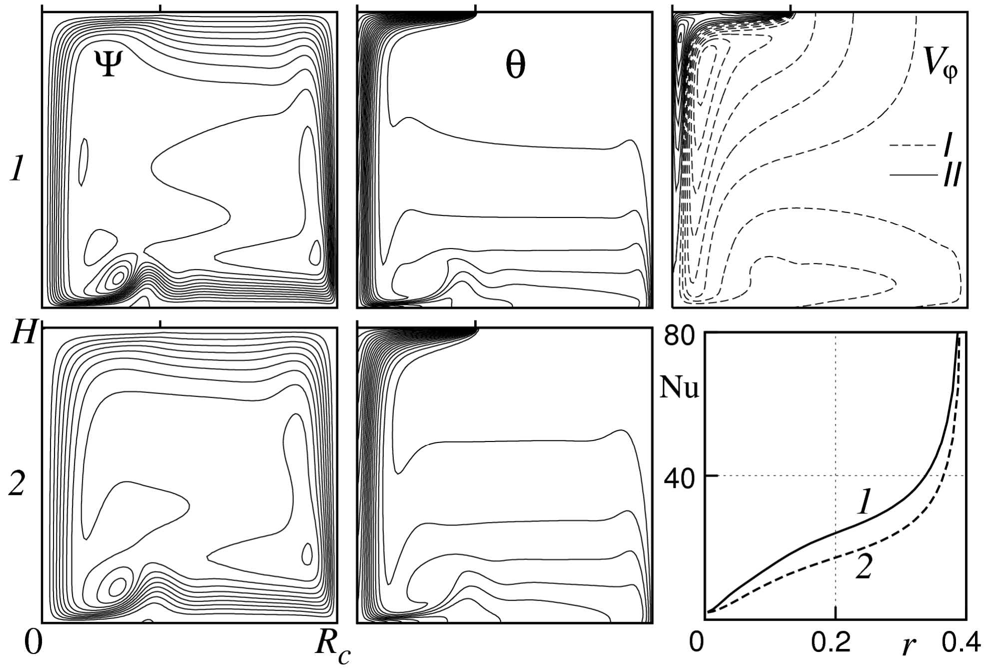
При высоких Pr, как показано выше, возможна определенная стабилизация течения за счет вращения тигля при неподвижном кристалле (табл. 5). При совместном вращении кристалла и тигля в противоположных направлениях стабилизирующий эффект многократно усиливается [16]. При этом вращение тигля подавляет двумерную моду неустойчивости (приводящую к возникновению колебаний типа Рэлея-Бенара), несколько повышая пространственную неустойчивость. В свою очередь, вращение кристалла способствует подавлению пространственной моды неустойчивости (приводящей к нарушению осевой симметрии) и некоторому усилению двумерной моды. Наивысшие значения критического числа Gr_c наблюдаются при достижении определенного баланса между Re_x и Re_c. С ростом числа Прандтля этот баланс меняется – оптимальные значения абсолютной величины Re_c монотонно увеличиваются (что связано с усилением двумерной моды неустойчивости в сравнении с пространственной), а соответствующие им значения Re_x снижаются после некоторого роста в начале диапазона.

Стабилизирующий эффект совместного вращения кристалла и тигля усиливается с ростом числа Прандтля. При $\mathrm{Pr} = 6.5$ достигается увеличение критического числа Gr_c более чем в 9 раз (с $4.5 \cdot 10^5$ до $4.1 \cdot 10^6$), а при $\mathrm{Pr} = 10$ – более чем в 12 раз (с $2.2 \cdot 10^5$ до $2.7 \cdot 10^6$).

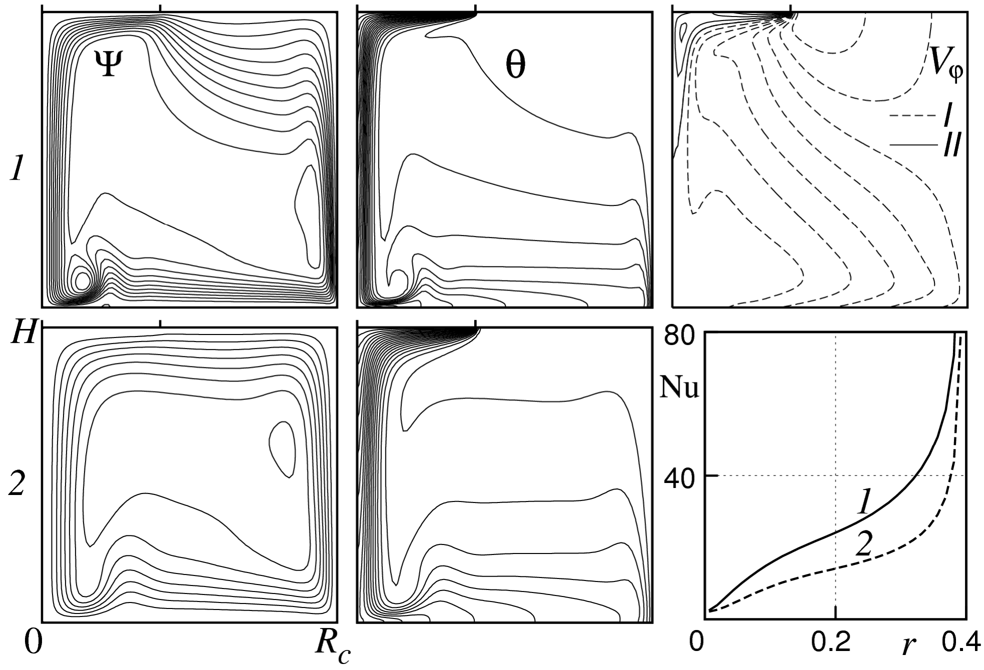
Результаты расчетов для данного варианта представлены на фиг. 2 (кривая *4*) и в табл. 5. В таблице также показаны значения среднего числа Нуссельта $\langle \mathrm{Nu}_x \rangle$ на торце кристалла для предельных режимов устойчивого течения без вращений и при совместном вращении кристалла и тигля. С увеличением числа Прандтля значения $\langle \mathrm{Nu}_x \rangle$ для режимов без вращений монотонно уменьшаются, а для режимов с вращениями – монотонно увеличиваются.

На фиг. 9 и 10 показаны картины течений и профили $\mathrm{Nu}_x(r)$ для тех же предельных режимов при $\mathrm{Pr} = 2.5$ и 6.5. Наибольший интерес представляют изолинии азимутальной компоненты скорости V_φ для режимов с вращениями (*1*). Здесь кривой *I* показаны отрицательные значения V_φ, что соответствует направлению вращения тигля, а кривой *II* –

положительные, соответствующие направлению вращения кристалла. Можно видеть, что при Pr = 2.5 быстрое вращение торца кристалла приводит к появлению интенсивного вихря вокруг оси цилиндра, занимающего почти всю высоту полости. Этот вихрь препятствует проникновению к оси другого вихря, вызванного вращением тигля и подталкиваемого движением жидкости от края к центру. Динамическое равновесие между вихрями и баланс между Re_x и Re_c обеспечивают устойчивость течения при повышенном значении числа Грасгофа.



Фиг. 9. Предельные режимы устойчивого течения при Pr = 2.5: *1* – с вращением кристалла и тигля, $\mathrm{Gr} = 1.25\cdot10^7$, $\mathrm{Re}_x = 1250$, $\mathrm{Re}_c = -125$; *2* – без вращений, $\mathrm{Gr} = 3.8\cdot10^6$; линии тока Ψ, изотермы θ, изолинии азимутальной компоненты скорости V_φ и профили локального числа Нуссельта Nu_x на торце кристалла (изолинии показаны в половине плоскости сечения); *I, II* – для отрицательных, положительных V_φ



Фиг. 10. Предельные режимы устойчивого течения при Pr = 6.5: *1* – с вращением кристалла и тигля, $\mathrm{Gr} = 4.1\cdot10^6$, $\mathrm{Re}_x = 750$, $\mathrm{Re}_c = -275$; *2* – без вращений, $\mathrm{Gr} = 4.5\cdot10^5$; обозначения как на фиг. 9

При Pr = 6.5 соотношение между Re_x и $|Re_c|$ снижается, и вихрь вокруг оси цилиндра оттесняется в верхнюю половину полости. Интенсивность двух взаимодействующих вихрей здесь намного ниже, чем при Pr = 2.5, в то время как относительный прирост критического числа Грасгофа существенно выше.

Сравнение профилей $Nu_x(r)$ показывает, что характер теплообмена на торце кристалла за счет вращений кристалла и тигля качественно не меняется, за исключением прироста полного теплового потока на 31 и 73% (для Pr = 2.5 и 6.5, соответственно).

В табл. 6 представлены значения критических чисел Грасгофа для Pr = 6.5 при различных сочетаниях скоростей вращения кристалла и тигля. Таблица иллюстрирует методику нахождения оптимального сочетания Re_x и Re_c: для каждого значения Re_c подбирается скорость вращения кристалла Re_x, при которой достигается предельное значение критического числа Gr_c. Представленная последовательность параметров (Gr_c, Re_x, Re_c) может рассматриваться как приблизительный график нагрева и раскрутки кристалла с тиглем, при котором течение сохраняет стационарный осесимметричный режим.

Таблица 6. Значения Gr_c при при различных сочетаниях Re_x и Re_c для Pr = 6.5

Gr_c	Re_x	Re_c
$4.5{\cdot}10^5$	0	0
$5.3{\cdot}10^5$	100	-25
$9.5{\cdot}10^5$	200	-50
$1.15{\cdot}10^6$	250	-75
$1.25{\cdot}10^6$	350	-100
$1.7{\cdot}10^6$	400	-125
$2.4{\cdot}10^6$	450	-150
$3.2{\cdot}10^6$	450	-175
$3.3{\cdot}10^6$	500	-200
$3.4{\cdot}10^6$	575	-225
$3.6{\cdot}10^6$	650	-250
$4.1{\cdot}10^6$	750	-275

Представляет интерес сравнение предельного режима устойчивого течения для Pr = 6.5 ($Gr = 4.1{\cdot}10^6$, $Re_c = 750$, $Re_c = -275$) с нестационарным течением без вращений кристалла и тигля при том же значении Gr. Такое течение имеет колебательный неосесимметричный характер с нерегулярным отпаданием термиков от торца кристалла. При этом максимальные значения компонент скорости $|V_r|$ и $|V_z|$ ниже, чем в устойчивом режиме, а суммарная кинетическая энергия (без учета вклада V_φ) – существенно выше, что объясняется наличием большого числа мелких вихрей. Тепловой поток на торце кристалла также выше и колеблется в диапазоне $\langle Nu_x \rangle$ от 41.7 до 45.8 (в сравниваемом устойчивом режиме $\langle Nu_x \rangle = 41.79$).

Таким образом, совместное вращение кристалла и тигля может использоваться для существенного повышения критического числа Грасгофа при высоких числах Прандтля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа завершает цикл параметрических исследований тепловой гравитационной и смешанной конвекций в гидродинамической модели метода Чохральского. В рамках цикла проведено изучение раздельного и совместного влияния вращений тигля и кристалла на устойчивость течения в широком диапазоне чисел Прандтля. Исследованы течения с различными сочетаниями скоростей вращения, проведен численный анализ двумерной и пространственной мод неустойчивости, найдены комбинации параметров течения, при которых достигается максимальная стабилизация течения. Рассмотрены механизмы потери осевой симметрии течения, показаны примеры нестационарных пространственных течений при слабой надкритичности.

Особое внимание уделено значениям $\mathrm{Pr} \leq 0.07$ (расплавы полупроводников) и $\mathrm{Pr} \approx 10$ (расплавы оксидных кристаллов). Определены режимы с повышенным порогом устойчивости для различных сочетаний скоростей вращения. Продемонстрировано, что для высоких чисел Прандтля совместное вращение кристалла и тигля позволяет существенно (в 9-12 раз) повысить значение критического числа Грасгофа, описана методика поиска оптимальных сочетаний Re_x и Re_c. По сведениям автора, такие результаты расчетов ранее в литературе не встречались и получены впервые.

Проведена систематизация полученных результатов, представлена сводная диаграмма (карта) предельных режимов естественной и смешанной конвекций для чисел Прандтля от 0.01 до 10.

Параметрическое исследование проведено на основе построенной ранее карты режимов тепловой гравитационной конвекции. Полученные результаты позволили продвинуться в понимании практических вопросов повышения устойчивости течения и устранения колебаний расплава при выращивании кристаллов методом Чохральского.

Работа выполнена в рамках темы НИР Института проблем механики РАН «Развитие методов решения эллиптических уравнений для задач гидромеханики» при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 15-01-06363 и 15-01-02012). Расчеты выполнялись на компьютерах вычислительного центра Университета Экс-Марсель, финансируемого в рамках проекта Equip@Meso (ANR-10-EQPX-29-01) программы "Investissements d'Avenir" Национального агентства научных исследований (Франция).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Н.В.*, *Полежаев В.И.* Трехмерная конвективная неустойчивость и колебания температуры при выращивании кристаллов по методу Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 26-39.
2. *Никитин Н.В.*, *Полежаев В.И.* Трехмерные эффекты переходных и турбулентных режимов тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 81-90.
3. *Polezhaev V.I.* Modeling of technologically important hydrodynamics and heat/mass transfer processes during crystal growth // Crystal Growth Technology / Eds. H.J. Scheel and T. Fukuda. N.Y.: Wiley, 2004. P. 155-186.
4. *Никитин Н.В.*, *Никитин С.А.*, *Полежаев В.И.* Конвективные неустойчивости в гидродинамической модели роста кристаллов методом Чохральского // Успехи механики. 2003. Т.2. № 4. С. 63-105.
5. *Zeng Z.*, *Chen J.*, *Mizuseki H. et al.* Three-dimensional oscillatory convection of $LiCaAlF_6$ melt in Czochralski crystal growth // J. Crystal Growth. 2003. V. 252. № 4. P. 538-549.

6. *Crnogorac N.*, *Wilke H.*, *Cliffe K.A.*, *Gelfgat A.Yu.*, *Kit E.* Numerical modelling of instability and supercritical oscillatory states in a Czochralski model system of oxide melts // Cryst. Res. Technol. 2008. V. 43. № 6. P. 606-615.
7. *Полежаев В.И.*, *Никитин Н.В.*, *Никитин С.А.*, *Мякшина М.Н.* Конвективные неустойчивости в гидродинамической модели метода Чохральского. Препринт № 809. М.: ИПМех РАН. 2006. С. 40-44.
8. *Полежаев В.И.*, *Никитин С.А.* Особенности теплообмена при свободно-конвективных взаимодействиях в замкнутых объемах. Технические и технологические приложения // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях. М.: Изд. дом МЭИ, 2009. Т. 2. С. 15-18.
9. *Polezhaev V.I.*, *Nikitin S.A.* Interaction of the basic mechanisms of buoyancy–driven convection: fundamentals, technical and material sciences applications // Int. J. Transport Phenomena. 2011. V. 12. № 1-2. P. 113-131.
10. *Polezhaev V.I.*, *Myakshina M.N.*, *Nikitin S.A.* Heat transfer due to buoyancy–driven convective interaction in enclosures: fundamentals and applications // Int. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. № 1-3. P. 156-165.
11. *Бессонов О.А.*, *Полежаев В.И.* Нестационарные неосесимметричные течения в гидродинамической модели метода Чохральского при больших числах Прандтля // Изв. РАН, МЖГ. 2011. № 5. С. 16-32.
12. *Бессонов О.А., Полежаев В.И.* Неустойчивости тепловой гравитационной конвекции и теплообмен в модели метода Чохральского при различных числах Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 27–40.
13. *Бессонов О.А., Полежаев В.И.* Карта режимов и пространственные эффекты конвективных взаимодействий в гидродинамической модели метода Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 2. С. 16–28.
14. *Бессонов О.А.* Конвективные взаимодействия и устойчивость течений в модели метода Чохральского при вращении кристалла // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 3. С. 44–55.
15. *Бессонов О.А.* Влияние вращения кристалла и тигля на устойчивость течения в модели метода Чохральского при низких числах Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 33–43.
16. *Бессонов О.А.* Анализ смешанной конвекции в модели метода Чохральского в широком диапазоне чисел Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 3. С. 44-56.
17. *Capper P., Elwell D.* Crucible rotation and crystal growth in the Czochralski geometry // J. Crystal Growth. 1975. V. 30. № 3. P. 352–356.
18. *Kakimoto K., Watanabe M., Eguchi M., Hibiya T.* The Coriolis force effect on molten silicon convection in a rotating crucible // Int. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 35 № 10. P. 2551–2555.
19. *Zeng Z., Chen J., Mizuseki H., Sato H., Shimamura K., Ichinoseki K,. Fukuda T., Kawazoe Y.* Numerical study on $LiCaAlF_6$ Czochralski crystal growth // Materials Transactions. 2004. V. 45. № 5. P. 1515–1521.
20. *Li Y.-R., Akiyama Y., Imaishi N., Tsukada T.* Global analysis of a small Czochralski furnace with rotating crystal and crucible // J. Crystal Growth. 2003. V. 255. № 1–2. P. 81–92.
21. *Бердников В.С., Гапонов В.А.* Смешанная конвекция в режимах дифференциального вращения кристалла и тигля в методе Чохральского // Тр. 4-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд. дом МЭИ, 2006. Т. 3, С. 71–75.
22. *Wheeler A.A.* Four test problems for the numerical simulation of flow in Czochralski crystal growth // J. Crystal Growth. 1991. V. 102. № 4. P. 691-695.

23. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
24. *Gaskell P.H., Lau A.K.C.* Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm // Int. J. Num. Meth. Fl. 1988. V. 8. № 6. P. 617–641.
25. *Bell J.B., Colella P., Glaz H.M.* A second order projection method for the incompressible Navier.Stokes equations // J. Comput. Phys. 1989. V. 85. № 2. P. 257–283.
26. *Hockney R.W.* A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis // J. Assoc. Comput. Mach. 1965. V. 12. № 1. P. 95–113.
27. *Bessonov O.* OpenMP parallelization of a CFD code for multicore computers: analysis and comparison // Parallel Computing Technologies: Proc. of the 11th Int. Conf – PaCT-2011. 2011. V. 6873. P. 13-22.
28. *Teitel M., Schwabe D., Gelfgat A. Yu.* Experimental and computational study of flow instabilities in a model of Czochralski growth // J. Crystal Growth. 2008. V. 310. № 7–9. P. 1343–1348.
29. *Бессонов О.А*. Эффективный метод расчета течений несжимаемой жидкости в областях регулярной геометрии. Препринт № 1021. М.: ИПМех РАН. 2012. 59 с.
30. *Бессонов О.А., Полежаев В.И.* Моделирование трехмерных надкритических термокапиллярных течений в методе Чохральского. Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 60–67.

СВОБОДНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕГУЩЕГО В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В.В. Боголепов, В.Я. Нейланд
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
г. Жуковский, Московская область

Несомненным достижением механики жидкости и газа прошлого века, по утверждению Д. Лайтхилла [1], является асимптотическая теория свободного взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем [2,3], которая возникла при исследовании стационарной задачи об отрыве пограничного слоя. Эта теория вобрала в себя достижения и опыт многочисленных предыдущих исследований, дала объяснение механизму развития отрывного течения, позволила определить все характеристики этого сложного явления. которое занимало умы величайших механиков 20-го века.

Нестационарная форма теории свободного взаимодействия оказалась эффективной при исследовании различных видов возмущений пограничного слоя, его устойчивости (см., например, [4]).

Эта теория инициировала широкий круг исследований, позволила решить многие задачи, которые не поддаются изучению в рамках классической теории пограничного слоя при сверх- и гиперзвуковых скоростях набегающего потока [5].

В работе сформулирована краевая задача нестационарной асимптотической теории взаимодействия бегущего в сверхзвуковом потоке внешнего возмущения давления с пограничным слоем. В невязком стационарном приближении получены аналитические и численные решения с учетом механизма самоиндукции, когда изменение толщины пограничного слоя индуцирует дополнительное возмущение давления. Показано, что учет самоиндукции значительно ослабляет воздействие на поток внешних возмущений и способствует смещению окрестности взаимодействия в направлении движения внешнего возмущения.

Получено решение для зарождения схода вихревой пелены с поверхности тела в случае движения возмущения давления вниз по потоку при учете самоиндукции.

Представленные модельные решения являются хорошей основой для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M.J. Fluid Mechanics. Twentieth Century Physics. Edited by L.M. Brown, A. Pais, B. Pippard. Institute of Physics and American Institute of Physics. 1905. Vol. II. Chap. 10. P. 795-912.
2. Нейланд В.Я. Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва / III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике 25.01.1968-01.02.1968 // Сборник аннотаций докладов съезда. М.: Наука, 1968. С. 224.
3. Stewartson K., Williams P.G. Self-indeed separation / Proc. Roy. Soc, A, 1969. – Vol. 312. № 1509. – P. 181-296.
4. Жук В.И. Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны / М.: Наука. – 2001. – 167 с.
5. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа / М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 456 с.

ТЕХНОЛОГИЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.В. Бойко[1], К.В. Демьянко[1,2,3], Ю.М. Нечепуренко[1,2,3]
[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
[2]Институт вычислительной математики РАН, Москва
[3]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Первая часть доклада посвящена обзору технологии численного анализа пространственно неоднородных сдвиговых течений, разработанной авторами на основе оригинальных специализированных матричных методов, предложенных и обоснованных в работах [1-7]. Технология включает новые, не имеющие аналогов экономичные высокоточные матричные алгоритмы вычисления линейного и энергетического критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации плотности кинетической энергии возмущений и оптимальных возмущений с гарантированной точностью. Для дополнительного ускорения вычислений и повышения точности расчетов используется алгебраическая редукция. Особое место в технологии занимают методы ньютоновского типа, предназначенные для решения частичных линейных и нелинейных проблем собственных значений с большими разреженными матрицами [8-11]. Использованию этой технологии и обсуждению полученных результатов для различных фундаментальных задач устойчивости будет посвящен на этой конференции отдельный доклад.

Вторая часть доклада посвящена инженерному приложению разработанной технологии – блоку ламинарно-турбулентного перехода LOTRAN, который авторы разрабатывают и используют в промышленных проектах в течение нескольких последних лет [12-14]. Этот блок представляет собой оригинальную реализацию e^N-метода.

Разработка численных алгоритмов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60092), реализация и обоснование - при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-20149), численные эксперименты выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-00354).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М. Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения. ЖВМ и МФ, 2008, 48(10), 1731-1747.
2. А.В. Бойко, Ю.М. Нечепуренко. Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений. ЖВМ и МФ, 2010, 50(6), 1109-1125.
3. A.V. Boiko, Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane. Fast computation of optimal disturbances with a given accuracy for duct flows. Comput. Math. Math. Phys., 2010, 50(11), 1914-1924.
4. Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane. A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm. SIAM J. Matr. Anal. Appl., 2011, 32(2), 349-363.
5. A.V. Boiko, Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane. Computing the maximum amplification of the solution norm of differential-algebraic systems. Comput. Math. Modeling, 2012, 23(2), 216-227.
6. Нечепуренко Ю.М. О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления. Доклады АН. 2012, 445(1), 17-19.
7. Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Численный анализ пространственной гидродинамической устойчивости сдвиговых течений в каналах постоянного сечения. ЖВМ и МФ, 2018, 58(5).
8. G. El Khoury, Yu. M. Nechepurenko, M. Sadkane. Acceleration of inverse subspace iteration with Newton's method. J. Comput. Appl. Math. 2014, 259, 205-215.
9. K.V. Demyanko, Yu. M. Nechepurenko, M. Sadkane. A Newton-like method for computing deflating subspaces.J. Numer. Math., 2015, 23(4), 289-300.
10. K.V. Demyanko, Yu.M. Nechepurenko, M.Sadkane. A Newton-type method for non-linear eigenproblems. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2017, 32(4), 237-244.
11. K.V. Demyanko, Yu.M. Nechepurenko. A block Newton's method for computing invariant pairs of non-linear matrix pencils. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2018, 33(1).
12. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Блок расчёта положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛОГОС. Теплофизика и аэромеханика, 2014, 21(2), 201-220.
13. A.V. Boiko, Yu.M. Nechepurenko, I.V. Abalakin, V.G. Bobkov. Numerical prediction of laminar-turbulent transition on an airfoil. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2014, 29(4), 205-218.
14. A.V. Boiko, K.V. Demyanko, Yu.M. Nechepurenko. On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2017, 32(1), 1-12.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

А.В. Бойко[1], А.В. Довгаль[1], Ю.М. Нечепуренко[1,2,3]
[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
[2]Институт вычислительной математики РАН, Москва
[3]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

На примере ряда задач рассмотрены особенности гидродинамической устойчивости течений, существенно зависящих от нескольких пространственных переменных и формирующихся при наличии сложной геометрии обтекаемой поверхности. Такие поверхности, усложненные, например, оребрением, продольной кривизной, тепловыми пятнами, локальными выступающими технологическими элементами, угловыми конфигурациями широко применяются на практике, что делает рассматриваемые задачи чрезвычайно актуальными.

Исследования имели комплексный характер и включали в себя разработку новых методов адекватного лабораторного и численного моделирования таких течений и распространения возмущений в них, экспериментальное и численное исследование устойчивости различных конкретных пространственно неоднородных сдвиговых течений, представляющих значительный фундаментально-научный и практический интерес, сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов [1-6].

Установлена возможность немодового нарастания стационарных возмущений в областях отрыва ламинарного пограничного слоя, модулированных элементами неровности обтекаемой поверхности, периодически размещенными в трансверсальном потоку направлении. Определены закономерности перехода от затухания стационарных возмущений к их усилению в зависимости от пространственной конфигурации системы элементов и объяснен парадокс наблюдаемого экспериментально реверса дефекта скорости; изучена устойчивость такого пространственно периодического течения. Изучена реакция областей отрыва ламинарного пограничного слоя на температурные возмущения, образованные пространственно периодическим нагреванием/охлаждением обтекаемой потоком поверхности.

Исследовано влияние продольного оребрения обтекаемой поверхности на устойчивость плоских течений. Впервые подтвержден численно известный экспериментальный парадокс, состоящий в том, что оребрение может увеличивать критическое энергетическое число Рейнольдса и уменьшать при этом линейное. Кроме того, впервые установлено, что при определенных периодах оребрения увеличиваются либо уменьшаются одновременно оба критических числа Рейнольдса. Дано строгое теоретическое объяснение обнаруженного эффекта.

На основе сравнения расчетных и доступных экспериментальных данных обоснован принципиально новый подход к задачам восприимчивости сдвиговых течений к внешним возмущениям, основанный на анализе оптимальных возмущений, и позволивший впервые получить коэффициенты восприимчивости вихрей Гёртлера с хорошей точностью совпадающие с экспериментальными.

Физические и численные эксперименты выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-00354), разработка и реализация численных алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-20149).

ЛИТЕРАТУРА.

1. A.V. Boiko, A.V. Dovgal, S. Hein. Control of a laminar separating boundary layer by induced stationary perturbations. Eur. J. Mech. B/Fluids, 2008, 27(4), 466–476.
2. A. Boiko, A. Dovgal, S. Hein, A. Henning. Particle image velocimetry of a low-Reynolds-number separation bubble. Exp. Fluids, 2011, 50, 13-21.
3. A.V. Boiko, A.V. Dovgal, A.M. Sorokin. Instability of a backward-facing step flow modified by stationary streaky structures. Phys. Fluids, 2012, 24, 104104.1-104104.11.
4. A.V. Boiko, A.V. Dovgal, A.M. Sorokin. Modification of flow perturbations in a laminar separation bubble by heat transfer. Phys. Fluids, 2017, 29, 024103.1-024103.8.
5. А.В. Бойко, Н.В. Клюшнев, Ю.М. Нечепуренко. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016.
6. A.V. Boiko, A.V. Ivanov, Y.S. Kachanov, D.A. Mischenko, Yu.M. Nechepurenko. Excitation of unsteady Görtler vortices by localized surface nonuniformities. Theor. Comput. Fluid Dyn., 2017, 31, 67–88.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ МНОГОФАЗНЫХ И ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

С.А. Боронин
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Сколковский институт науки и технологий (Сколтех).

Течения дисперсных сред широко распространены в различных технологических процессах, требующих эффективного контроля их режима (барботажные и очистные установки, гидро- и пневмотранспорт в трубопроводах, аэрокосмические и нефтесервисные технологии). Мотивацией теоретических исследований устойчивости потоков с включениями является также практически полное отсутствие экспериментальных данных о влиянии дисперсной примеси на ламинарно-турбулентный переход потоков сплошных сред.

Основой для развития теории гидродинамической устойчивости течений дисперсных сред послужила пионерская работа Ф.Г. Сэфмана 1962г [1], в которой в рамках модели взаимопроникающих континуумов была сформулирована задача линейной устойчивости плоскопараллельного потока запыленного газа. Был сделан ряд упрощающих предположений о модели дисперсной среды и конфигурации потока: межфазное взаимодействие определяется силой Стокса, в основном течении рассогласование скоростей фаз отсутствует и концентрация частиц распределена однородно по потоку, объемная доля дисперсной фазы пренебрежимо мала. В реальных дисперсных потоках указанные предположения, как правило, не выполняются ввиду конечности объема дисперсной фазы (например, при исследовании течений суспензий, где отношение плотностей материалов фаз изменяется в широком диапазоне); высоких градиентов скорости на масштабе частицы (при течении дисперсной среды в пограничном слое, где для корректного описания межфазного взаимодействия помимо силы Стокса необходимо учитывать подъемную силу); неоднородности концентрации частиц ввиду их инерционной или сдвиговой миграции; рассогласования скоростей фаз в основном течении, вызванного, например, гравитационным осаждением частиц.

На примере ряда плоскопараллельных течений дисперсных сред рассмотрено влияние указанных новых факторов на модальную и немодальную устойчивость потоков с включениями: стратифицированное течение запыленного газа в пограничном слое [2, 3], стратифицированные течения Пуазейля и Куэтта суспензии в плоском канале [4-7], стратифицированное течение запыленного газа в вертикальном канале, и цилиндрическая свободная и затопленная двухфазная струя [9]. Получено, что рассмотренные новые факторы оказывают существенное влияние на модальную устойчивость дисперсных потоков, и их необходимо учитывать при анализе ламинарно-турбулентного перехода реальных течений сплошных сред с включениями. В частности, получен новый механизм неустойчивости стратифицированных течений суспензии и течения запыленного газа в вертикальном канале с осаждающимися частицами при малых числах Рейнольдса (обобщение неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и длинноволновая гравитационная неустойчивость). Изучена также немодальная устойчивость дисперсных и многофазных потоков, позволяющая предсказать потерю устойчивости плоскопараллельных потоков в докритической области определяющих параметров и получить форму трехмерных структур, предшествующих возникновению турбулентности (оптимальные возмущения). Получено, что в широком диапазоне определяющих параметров дисперсная примесь существенно усиливает алгебраический (немодальный) механизм нарастания возмущений. Для струйного двухфазного течения получено, что алгебраический механизм пространственного нарастания возмущений существенен для стационарных возмущений (стоячих волн) с малыми азимутальными числами (от 1 до 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00057), автор выражает благодарность руководству Сколтеха за финансовую поддержку в рамках стартап проекта.

ЛИТЕРАТУРА.

1. P.G. Saffman, “On the stability of laminar flow of a dusty gas,” J. Fluid Mech. 13(1), 120–128 (1962).
2. Боронин С.А., Осипцов А. Н. Устойчивость течения дисперсной смеси в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 76–87
3. Боронин С.А., Осипцов А.Н. Модальная и немодальная устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2014 N. 6. С. 80-93.
4. Боронин С.А. Исследование устойчивости течения суспензии в плоском канале с учетом конечной объемной доли частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 40–53
5. Боронин С.А. Гидродинамическая устойчивость стратифицированного течения суспензии в плоском канале // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 477-480
6. Боронин С.А. Устойчивость плоского течения Куэтта дисперсной среды с конечной объемной долей частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2011. N 1. С. 85-94
7. Боронин С.А. Оптимальные возмущения течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2012 N 3. С. 74-88
8. Boronin S.A., Healey J.J., Sazhin S.S. Nonmodal stability of round viscous jets // J. Fluid Mech. 2013. V. 716, P. 96-119
9. Boronin, S.A., Osiptsov, A.N., Nonmodal instability of a stratified plane-channel suspension flow with fine particles. Phys. Rev. E. 2016. V. 93, Iss. 3, 033107.

ДИНАМИКА ПЛЕНКИ НЕРАСТВОРИМОГО СУРФАКТАНТА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ОБЪЕМНЫМ ТЕЧЕНИЕМ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ – ШОУ

Д.А. Брацун[1], В.А. Демин[2], А.И. Мизев[3], М.И. Петухов[1], А.В. Шмыров[3]
1 – Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь
2 – Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь
3 – Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Образование квазитвердой пленки на свободной поверхности в замкнутой полости изучалось теоретически в работах [1,2]. Чтобы получить аналитическое решение задачи, в них делалось множество упрощений. В частности, рассматривалась полость с нагревом со стороны одной из вертикальных граней, но при этом распределение температуры вдоль всей полости считалось линейным. В работе [3] данная задача была исследована экспериментально с целью подтверждения теоретических выводов работы [1]. Как выяснилось, получить навязываемое в теории распределение температуры достаточно сложно, поэтому в опытах был использован неоднородный нагрев сверху так, чтобы создать распределение на свободной поверхности, максимально приближенное к линейному. Данное изменение привело к существенным отличиям в результатах, в частности, положение точки застоя в зависимости от параметра эластичности не совпало с теоретическими предсказаниями. В нашей работе проводится прямое численное моделирование поведения нерастворимого сурфактанта на свободной поверхности жидкости в ячейке Хеле – Шоу при наличии неоднородного нагрева сверху с целью согласовать теорию и эксперимент.

Численное моделирование основывалось на классических уравнениях межфазной гидродинамики. Рабочая жидкость находилась в ячейке Хеле – Шоу со свободной горизонтальной поверхностью, на которой присутствовал нерастворимый сурфактант. В отсутствие градиента температуры на всей свободной поверхности образуется мономолекулярная пленка. По мере увеличения разности температур пленка смещается, создавая участок со свободной поверхностью. Одним из ключевых параметров, характеризующих положение точки, разделяющей свободную поверхность и пленку, является так называемый параметр эластичности, который по существу равен отношению концентрационного числа Марангони к тепловому. Задача решалась численно методом конечных разностей с помощью двухполевого метода посредством программы, написанной на языке программирования Fortran-90. По результатам численного моделирования было установлено, что изменение температурных граничных условий действительно сильно сказывается на положении точки застоя. Результирующая кривая, определяющая положение точки застоя в зависимости от параметра эластичности E теперь хорошо повторяет экспериментальные данные. В области $0 < E < 1$ на поверхности образуются две области: свободный участок и пространство, закрытое пленкой. Уменьшение параметра эластичности усиливает термокапиллярный эффект и генерирует течение с большей интенсивностью, что, в свою очередь, сильнее сдвигает пленку в противоположный конец полости. В ходе расчетов было учтено изменение состояния сурфактанта (газовое и жидкорасширенное). Характерное отклонение от линейной зависимости при больших E вызвано переходом сурфактанта в жидкорасширенное состояние. Полученные в результате расчетов поля функции тока и температуры количественно хорошо согласуются с экспериментом [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00662 а).

ЛИТЕРАТУРА

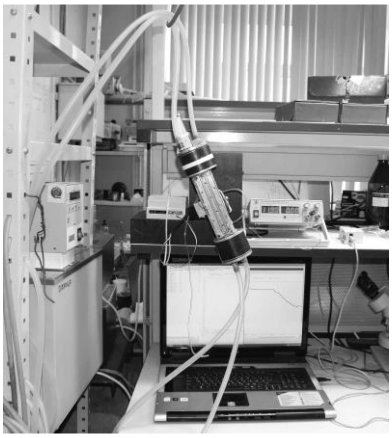
1. *Homsy G.M.*, *Meiburg E.* The effect of surface contamination on thermocapillary flow in a two-dimensional slot // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 139. P. 443–459.
2. *Carpenter Bradley, Homsy G.M.* The effect of surface contamination on thermocapillary flow in a two-dimensional slot. Part 2. Partially contaminated interfaces // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 155. P. 429–439.
3. *Мизев А.И.*, *Шмыров А.В.* Взаимодействие термокапиллярного течения с поверхностной фазой в ячейке Хеле – Шоу // Сб. науч. трудов «Конвективные течения», Вып. 7. Пермь: ПГГПУ, 2015. С. 37–60.

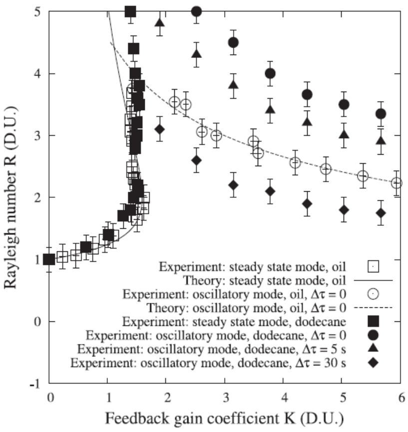
АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОНВЕКТИВНЫМ ТЕЧЕНИЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕ ПОСРЕДСТВОМ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ ОРИЕНТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Д.А. Брацун[1], А.В. Зюзгин[2], И.В. Красняков[1]
[1] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь
[2] Пермский государственный научно-исследовательский университет, Пермь

Вопросы управления процессами тепломассопереноса вызывают значительный интерес, как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с многочисленными технологическими приложениями. Особенно актуальна задача об активном управлении с обратной связью, когда управление осуществляется в автоматическом режиме. Задача об автоматическом поддержании механического квазиравновесия неоднородно нагретой жидкости в конвективной петле с запаздыванием была рассмотрена в [1]. В отличие от множества работ зарубежных и российских авторов была рассмотрена прямоугольная петля, а управление осуществлялось путем наклона системы в поле тяжести. Было показано, что в этом случае можно добиться уверенной стабилизации механического равновесия жидкости в широком диапазоне управляющих параметров даже для линейного закона управления. Было обнаружено также, что чрезмерное усиление обратной связи возбуждает в системе колебания, которые вызываются запаздыванием контроллера вовремя вносить коррекцию в состояние управляемой системы [1]. Влияние шума на управление было изучено в [2].

Данная работа посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию влияния запаздывания на эффективность управления [3]. Для этого в ходе экспериментов к естественному значению запаздывания искусственно производилась добавка, при изменении которой было возможно изучать устойчивость системы в широком диапазоне значений запаздывания. На фотографии слева представлена сама конвективная петля в определенной фазе движения под углом к полю тяжести, а также контроллер, состоящий из компьютера, соединенного в термосифоном через вольтметр и термопару, и шаговый двигатель, осуществляющий поворот петли. Карта устойчивости для различных режимов конвекции, полученная для трансформаторного масла и додекана представлена на рисунке справа.





В настоящей работе построена маломодовая динамическая модель явления и рассмотрены динамические свойства модели далеко от точки первой бифуркации. Изучение её свойств показало, что из-за запаздывания контроллер вступает в сложное нелинейное взаимодействие с управляемой конвективной системой. Это взаимодействие в зависимости от значений управляющих параметров (числа Релея и коэффициента управления) может привести к стационарному, периодическому или даже хаотическому поведению. Построены фазовые портреты, выявлены основные бифуркации в системе. Поставлен вопрос об организации интеллектуального управления, которое бы выполняло функции предиктора, снижало величину запаздывания и повышало бы качество управления. Проводится сравнение с данными эксперимента. Сплошная и пунктирная линии на рисунке справа обозначают монотонную и колебательную моду соответственно, вычисленные для масла. Величина $\Delta\tau$ определяет искусственную добавку к запаздыванию контроллера. Обнаружено хорошее согласие с экспериментальными данными.

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (№ 3.6990.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

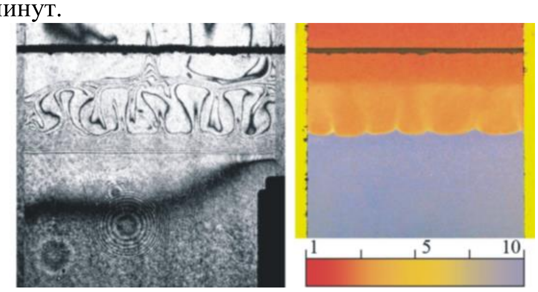
1. D.A. Bratsun, A.V. Zyuzgin, K.G. Polovinkin, G.F. Putin. Active control of fluid equilibrium in a thermosyphon. Techn. Phys. Let., 2008, 34(8), 650-652.
2. D. Bratsun, I. Krasnyakov, A. Zyuzgin A. Delay-induced oscillations in a thermal convection loop under negative feedback control with noise. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2017, 47, 109-126.
3. D. Bratsun, I. Krasnyakov, A. Zyuzgin Active Control of Thermal Convection in a Rectangular Loop by Changing its Spatial Orientation. Microgravity Sci. Technol., 2017, 1-10.

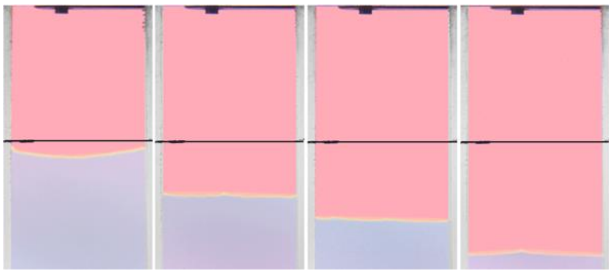
ХЕМОКОНВЕКЦИЯ В РЕАГИРУЮЩИХ СМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЯХ С КОНЦЕНТРАЦИОННО-ЗАВИСИМОЙ ДИФФУЗИЕЙ: ОТ СТАЦИОНАРНЫХ ЯЧЕЕК ДО ВОЛН ПЛОТНОСТИ УДАРНОГО ТИПА

Д.А. Брацун[1], К.Г. Костарев[2], А.И. Мизев[2], Е.А. Мошева[2]
[1] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь
[2] Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В работе теоретически и экспериментально изучено развитие конвективной неустойчивости в двухслойной системе смешивающихся жидкостей, помещенных в узкий вертикальный зазор. Верхний и нижний слои образованы, соответственно, водными растворами кислоты и основания. При приведении жидкостей в контакт в системе начинается фронтальная реакция нейтрализации. Визуализация течений и полей концентрации выявила новый тип конвективной неустойчивости, обусловленный сильной зависимостью процессов диффузии реагирующих компонентов и продукта реакции от их концентрации. В зависимости от значения отношения начальных концентраций реагентов наблюдалось несколько характерных типов конвективных структур. При значительном превышении плотности нижнего слоя над верхним зафиксирована слабая традиционная неустойчивость диффузионного слоя (DLC конвекция). При приближении управляющего параметра к линии изопикны наблюдалось спонтанное возникновение регулярной периодической структуры конвективных ячеек, локализованных внутри кармана плотности. Такое структурообразование в системах смешивающихся жидкостей наблюдается впервые и было связано авторами к сильной зависимостью коэффициентов диффузии реагентов от их концентрации [1]. Новый тип неустойчивости был назван авторами *конвекцией концентрационно-зависимой диффузии* (CDD конвекция) [1,2]. На рисунке (слева) представлены интерферограмма и pH-поле указанной неустойчивости.

При задании начальных концентраций реагентов еще ближе к изопикне, возникает удивительная структура, которая также ранее не наблюдалась: в системе стремительно развивается волна плотности, профиль которой меняется скачкообразно, а сама она быстро распространяется в направлении силы тяжести [3,4]. Волна возникает в результате схлопывания карманов плотности с CDD конвекцией внутри. Скорость распространения волны составляет примерно 0.06 мм/с, а фронт волны во время движения остается плоским, что резко контрастирует с привычной для хемоконвективных задач фингер-неустойчивостью (см. рисунок справа, на котором приведено несколько кадров эволюции pH-поля). При этом волна демонстрирует мощное перемешивание ингредиентов в своем спутном потоке. Весь процесс прохождения волны по кювете и полная реакция исходных реагентов занимает в эксперименте всего 5-7 минут.





Предложена математическая модель явления, включающая систему уравнений реакции-диффузии-конвекции, записанных в приближении Хеле-Шоу. Законы диффузии реагентов оценены на основании данных, известных в литературе. Представлены результаты численных расчетов основного состояния, нейтральных кривых и нелинейных режимов конвекции. Показано, что в случае использования постоянных значений коэффициентов диффузии эффект в численном эксперименте не воспроизводится. Между экспериментальными данными и результатами численных расчетов в рамках предложенной модели наблюдается хорошее согласие.

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (№ 3.6990.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bratsun, K. Kostarev, A. Mizev, E. Mosheva. Concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids. Phys. Rev. E., 2015, 92, 011003.
2. E.V. Aitova, D.A. Bratsun, K.G. Kostarev, A.I. Mizev, E.A. Mosheva. Convective instability in a two-layer system of reacting fluids with concentration-dependent diffusion. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2016, 57(7), 76-88.
3. D. Bratsun, A. Mizev, E. Mosheva, K. Kostarev. Shock-wave-like structures induced by an exothermic neutralization reaction in miscible fluids. Phys. Rev. E., 2017, 96, 053106.
4. D.A. Bratsun. Internal density waves of shock type induced by chemoconvection in miscible reacting liquids. Tech. Phys. Lett., 2017, 43(10), 944-947.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД

В.В. Булатов, Ю.В.Владимиров
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

В настоящее время наблюдается рост интереса к математическому моделированию волновых движений природных стратифицированных сред, обусловленный проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, охраны и изучения окружающей среды, эксплуатации сложных гидротехнических сооружений, в том числе морских нефтедобывающих комплексов и рядом других актуальных задач науки и техники. Доклад посвящен изложению фундаментальных проблем волновой динамики природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Исследованы основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения внутренних гравитационных волн в стратифицированных по вертикали, неоднородных по горизонтали и нестационарных средах, изложены асимптотические методы, являющихся обобщением пространственно-временного лучевого метода (метода геометрической оптики). Значительное место уделено сравнению получаемых аналитических результатов с данными натурных измерений гидрофизических полей в реальных природных стратифицированных средах (океане, атмосфере Земли).В основе анализа лежат асимптотические методы, так как на базе изучения невозмущенных уравнений гидродинамики формируются асимптотические разложения (анзацы, Anzatz (нем.) - виды решения), позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности реального природных стратифицированных сред. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с волновой динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных среда, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев, первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели в дальнейшем входят в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина динамики волн, позволяющая проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь. Однако иногда, даже, несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить физически интересные результаты.

Внутренние гравитационные волны в океане и атмосфере Земли изучаются уже достаточно давно, и по данной тематике опубликовано значительное число работ. Тем не менее, в последнее время интерес к ним в какой-то степени угасает, что можно судить по общему количеству публикаций, посвященных данной проблематике. Вместе с тем, сейчас возникают новые направления в исследовании внутренних волн, о которых ранее не говорилось. Во-первых, стало понятным, что в поле внутренних волн могут появляться аномально большие короткоживущие волны-убийцы, природа которых напоминает природу волн-убийц на поверхности моря. Во-вторых, сдвиговые течения во внутренних волнах приводят к большим изгибающим моментам на опоры нефтяных платформ, что уже приводит к деформации подводных технологических конструкций в ряде районов Мирового океана. В настоящее время разрабатывается система мониторинга интенсивных внутренних волн, аналогичная системе мониторинга цунами. В-третьих, внутренние волны способны вызвать транспорт донных наносов в глубоководных районах, где эффект поверхностных волн на дно минимален. Наконец, классические задачи воздействия внутренних волн на морскую поверхность по-прежнему остаются актуальными. Внутренние гравитационные волны, возникающие при прохождении подводных течений через подводные хребты или при движении по континентальному шельфу, двигаются вдоль термоклина (слоя максимального скачка плотности), расположенного на определенной глубине и отделяющего слой воды на поверхности океана от глубинных вод. Вектор колебаний этих волн направлен вниз или вверх с периодом порядка десятков минут, и однажды возникнув, внутренние волны распространяются, сохраняя свою форму и силу, и способны пройти большие расстояния без затухания. Поэтому внутренние гравитационные волны играют важную роль в динамике океанических вертикальных и горизонтальных обменов, выполняют функцию транспортного средства, переноса биомассу и питательные вещества, так как их амплитуда сопоставима с глубиной поверхностного слоя океана. Внутренние волны существуют в океане везде, где наблюдается стратификация плотности, и они играют важную роль во всей динамике океанических процессов, особенно в перемешивании и формировании океанической стратификации. Внутренние волны пронизывают всю толщу океана и являются основным механизмом переноса энергии ветра с поверхности в глубину: в полярных районах формируются холодные водные массы высокой плотности, которые, погружаясь в глубинные слои, распространяются в Мировом океане. Солнечные лучи прогревают лишь верхний слой морской воды незначительной толщины. Поскольку в океане наблюдается в целом стационарное распределение плотности по вертикали, отличное от резко выраженного двуслойного, то можно полагать, что оно достигается в процессе медленного перемешивания. Этот физический механизм перемешивания определяется в основном энергией приливов и ветра, и поэтому роль внутренних приливов в вертикальных и горизонтальных океанических обменах является доминирующей. Качественные и аналитические оценки переноса энергии, массы, количества движения, учет влияния внутренних гравитационных волн на процессы перемешивания в океане, изучение генерации, распространения, неустойчивости, разрушения внутренних и поверхностных волн – основные фундаментальные задачи современной физики океана.

На распространение внутренних гравитационных волн в океане существенное влияние оказывают как неоднородности и нестационарность гидрофизических полей, так и изменение рельефа океанического дна. При этом точные аналитические решения волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности воды и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики среды и границы произвольны, можно построить только численные решения таких задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения.

Математическое моделирование волновой динамики в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах возможно с помощью модифицированного варианта пространственно-временнóго лучевого метода (метод геометрической оптики). Это метод представляет собой модификацию метода «вертикальные моды – горизонтальные лучи», при этом медленности изменения параметров океана по вертикали не предполагается. Конкретная форма асимптотических представлений определяется из решения задач, описывающих волновую динамику в стратифицированной по вертикали, горизонтально-однородной и стационарной среде. Как правило, при исследовании эволюции волновых пакетов в стратифицированных средах с медленно меняющимися и нестационарными параметрами предполагается, что этот волновой пакет является локально гармоническим. В отличие от большинства работ, посвященных исследованию данной проблемы, предложенный модифицированный метод геометрической оптики дает возможность описывать структуру волновых полей вблизи особых поверхностей: каустик и волновых фронтов. Асимптотические представления решений о распространении волновых пакетов в среде с неоднородной по горизонтали и нестационарной плотностью, проведенные численные расчеты для типичных океанических параметров свидетельствуют о существенном влиянии факторов нестационарности и горизонтальной неоднородности на реальную динамику внутренних волн в океане. Все полученные результаты математического моделирования волновой динамики применимы для произвольных распределений плотности и других параметров стратифицированных природных сред, и эти результаты необходимо рассматривать в контексте непротиворечивости имеющимся данным натурных измерений внутренних волн. Использованные методы асимптотического исследования волновой динамики могут быть также применимы к широкому классу физических задач, вполне адекватно описываемых этими методами. Значение таких методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов в теории распространения волновых пакетов иной физической природы. Термин геометрическая оптика в научной литературе употребляется в различных значениях: геометрическая оптика в узком (лучевом), смысле изучает только способы построения изображения с помощью лучей, тогда как геометрическая оптика в широком (волновом), понимании выступает как метод приближенного описания волновых полей. При волновом толковании, которое будет использовано в данной работе, лучи, как правило, образуют только геометрический костяк, на который «нашивается» волновое поле. В соответствии с двумя указанными толкованиями геометрической оптики в ее развитии выделяется два периода. Первоначальный лучевой период идейно был завершен фундаментальными трудами Гамильтона, которые также оказали существенное влияние на развитие классической механики. Построение лучей лежит в основе инструментальной геометрической оптики, ориентированной в основном на расчет различных оптических устройств. Современный волновой период геометрической оптики ведет свое начало с работ Дебая, которые оказали решающее влияние на формирование лучевых представлений в волновой теории. Исследованию волн в средах с медленно меняющимся параметрами посвящена обширная литература, в то же время проблеме исследования внутренних волн в средах с меняющимися параметрами (в силу значительных математических трудностей, возникающих при решении этих задач) посвящено не так много работ. В [1-9] систематически изложены основные положения пространственно-временнóго лучевого метода (метод геометрической оптики) с учетом специфики внутренних гравитационных волн, позволяющего исследовать волновую динамику полей внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах

Промышленная деятельность на континентальном шельфе, связанная с добычей ископаемых является важной причиной исследований внутренних волн, так как их характеристики используются для оценки волнового воздействия на окружающую среду и технологические морские конструкции. Знания о волновой динамике важны для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ на континентальном шельфе, и для этих целей также необходимо контролировать воздействие волн. При строительстве нефтяных платформ необходимо проводить систематическое измерения внутренних волн и течений, поэтому решение фундаментальной проблемы моделирования волновой динамики позволяет избежать дорогостоящих натурных измерений. Особый интерес к моделированию динамики внутренних гравитационных волн связан с интенсивным освоением Арктики и ее природных богатств. Эти волны пока недостаточно изучены в Арктике, так как двигаются подо льдом и сверху практически не видны, однако доступная информация о движении подводных объектов свидетельствует об их наличии. Внутренние волны достигают льда и поднимают или опускают его с определенной периодичностью, что доступно наблюдению с помощью средств радиолокационного зондирования. Воздействие волн способно привести к расколу ледового покрытия в Арктике, они способствуют движению айсбергов и распространению различного рода загрязнений. Поэтому исследования особенностей волновой динамики в области Арктического бассейна является важной фундаментальной научной и практической задачей, в том числе для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ.

Решение проблемы интерпретации результатов мониторинга морской поверхности, осуществляемого с помощью дистанционных аэрокосмических средств, имеет своей целью создание методов дистанционного аэрокосмического мониторинга поверхности, позволяющих прогнозировать возникновение катастрофических ситуаций, уточнять координаты скопления планктона и косяков рыб, отмечать различного рода экологические нарушения на участках протяженностью в сотни и тысячи километров; определять границы течений, исследовать топографию морского дна и фиксировать изменения подводного рельефа, дистанционно исследовать районы добычи полезных ископаемых. Существует большое число работ, посвященных экспериментальному исследованию внутренних волн в искусственных стратифицированных средах. Однако специфика большинства лабораторных исследований не позволяет напрямую использовать получаемые результаты для реальных океанологических расчетов и оценок. Поэтому на первый план выдвигаются асимптотические методы исследований внутренних волн в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли). Большинство теоретических работ (в силу существенных математических трудностей), посвященных исследованию динамики волн в природных стратифицированных средах, как правило, решены в двумерной постановке (вертикальная и одна из горизонтальных координат). При этом наиболее физически наглядным и интуитивно понятным является метод геометрической оптики (лучевой метод) и его модификации. Сложность применения лучевого подхода, помимо чисто математических проблем, заключается также в том, что в Мировом океане наблюдается многообразие пространственно-временных масштабов: масштабы вертикальной и горизонтальной изменчивости, нестационарности, изменчивости рельефа дна, сдвиговых течений. Поэтому учет многомасштабности асимптотических разложений при следовании полей внутренних волн должен являться предметом дальнейших исследований. До настоящего времени с помощью геометро-оптических подходов удавалось, как правило, рассматривать динамику гармонических волновых пакетов в океане с переменными параметрами, между тем наблюдаемые цуги внутренних волн, как правило, короткие и широкополосные, поэтому необходимо использовать разработанные основными исполнителями проекта модифицированные методы пространственно-временного лучевого анализа. В условиях мелководных шельфовых и прибрежных зон морских акваторий большой площади, окружающих территорию России актуальными являются фундаментальные задачи исследования влияния океанических параметров на наблюдаемые поверхностные волновые явления. В частности, касательное напряжение ветра, создаваемое движущимися ураганами, формирует в океане структуру в виде волнового шлейфа или следа: экспериментальное обнаружение этой структуры явилось одним из впечатляющих достижений современной океанологии. Теоретические исследования волнового следа, как правило, основаны на аналитическом или численном решении системы гидродинамических уравнений. Поэтому развитие дистанционных методов диагностики состояния водной поверхности Мирового океана требует глубокого изучения физических механизмов рассеяния поверхностью океана на основе исследования динамики поверхностных гидродинамических образований, вызванных как ветровым волнением и приповерхностными течениями, так и расположенными в океане источниками возмущений. В свою очередь, на состояние свободной поверхности влияют находящиеся в толще воды неоднородности, например, обтекаемые преграды, изменения глубины океана. Среди факторов, оказывающих влияние на свободную поверхность моря, особое место занимают внутренние гравитационные волны, то одной из основных фундаментальных научных проблем является разработка методов, которые дают возможность аналитически и численно исследовать эффекты возбуждения отдельных частотных составляющих распространяющихся волновых цугов. Для правильной интерпретации данных, полученных при зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. Поэтому в настоящее время остро встает вопрос о развитии методов математического моделирования процессов внутренних колебаний в океане и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Например, в Баренцевом море, глубина которого составляет в районе Штокмановского газового месторождения 300-400 метров, наблюдаются внутренние волны амплитудой до 20 метров, кроме того существенную часть в вертикальные и горизонтальные обмены это района Мирового океана вносят дрейфующие айсберги. При моделировании внутренних волн от подобного рода нелокальных источников возмущений необходимо учитывать особенности этих возмущающих факторов (подводные технологические и природные объекты), неоднородность гидрофизических полей и так далее. Безопасность морских технологических платформ требует исследования поведения гидрофизических полей и расчета нагрузок, которые могут быть оказаны на морские платформы. Существенной нагрузкой на подводные платформы является нагрузка от внутренних волн, которой ранее считала малой по сравнению с нагрузкой от ветровых волн и ветра. Однако внутренние волны могут влиять на подводные конструкции и приводить в частности, к деформации дна при прокладке протяженных трубопроводов.

Построенные математические модели волновой динамики позволяют описывать поля внутренних волн для реальных параметров природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Универсальный характер предложенных асимптотических методов моделирования полей внутренних волн позволяет эффективно рассчитывать волновые поля, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде и атмосфере Земли. Особая роль разработанных асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, и попытки их точного численного решения по исходным уравнениям гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений. На рис.1-4 приведены некоторые результаты моделирования волновой динамики стратифицированных сред [1-9].

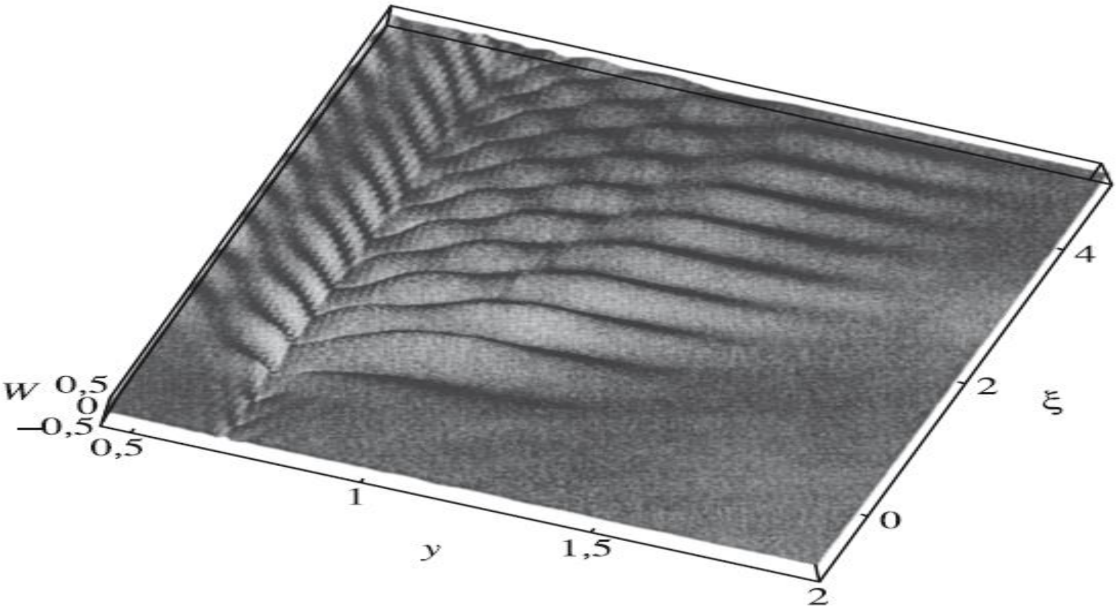


Рис. 1. Внутренние волны в океане переменной глубины

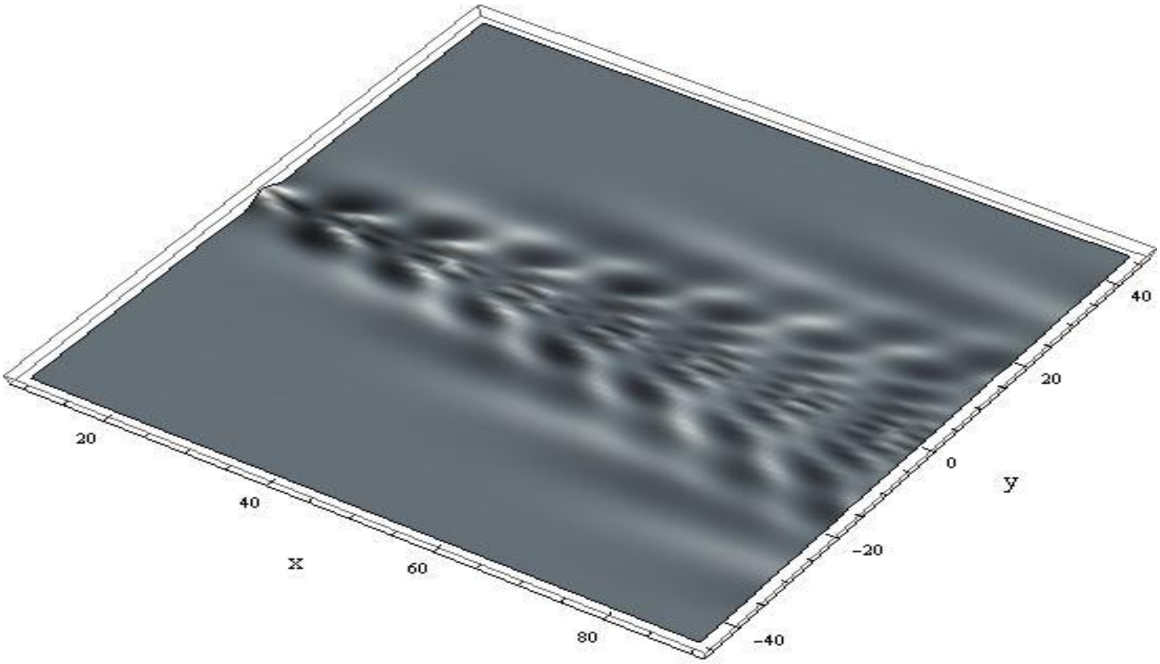


Рис. 2. Внутренние волны в океане, возбуждаемые нестационарным источником

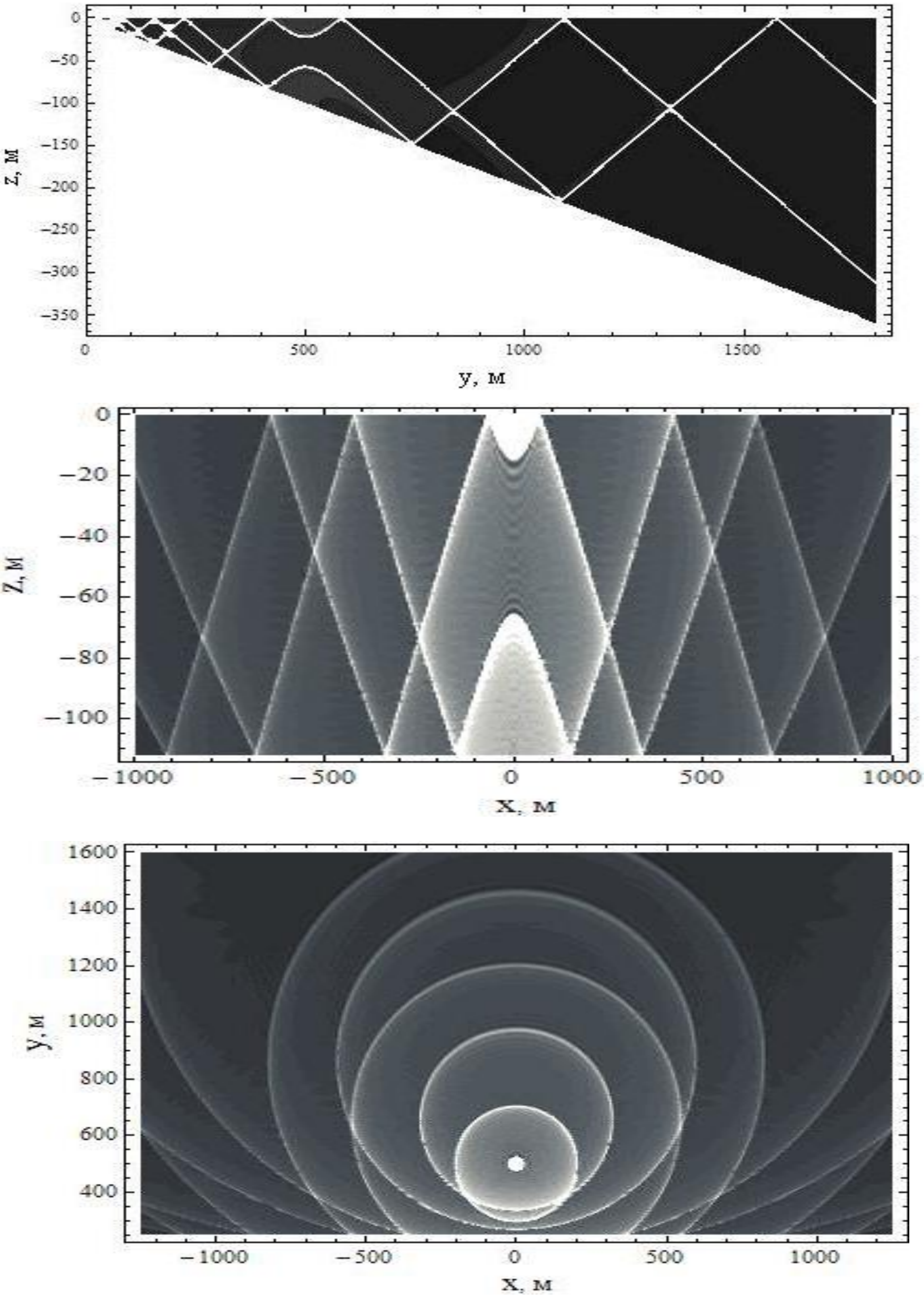


Рис. 3. Гармонические внутренние волны в стратифицированной среде переменной глубины

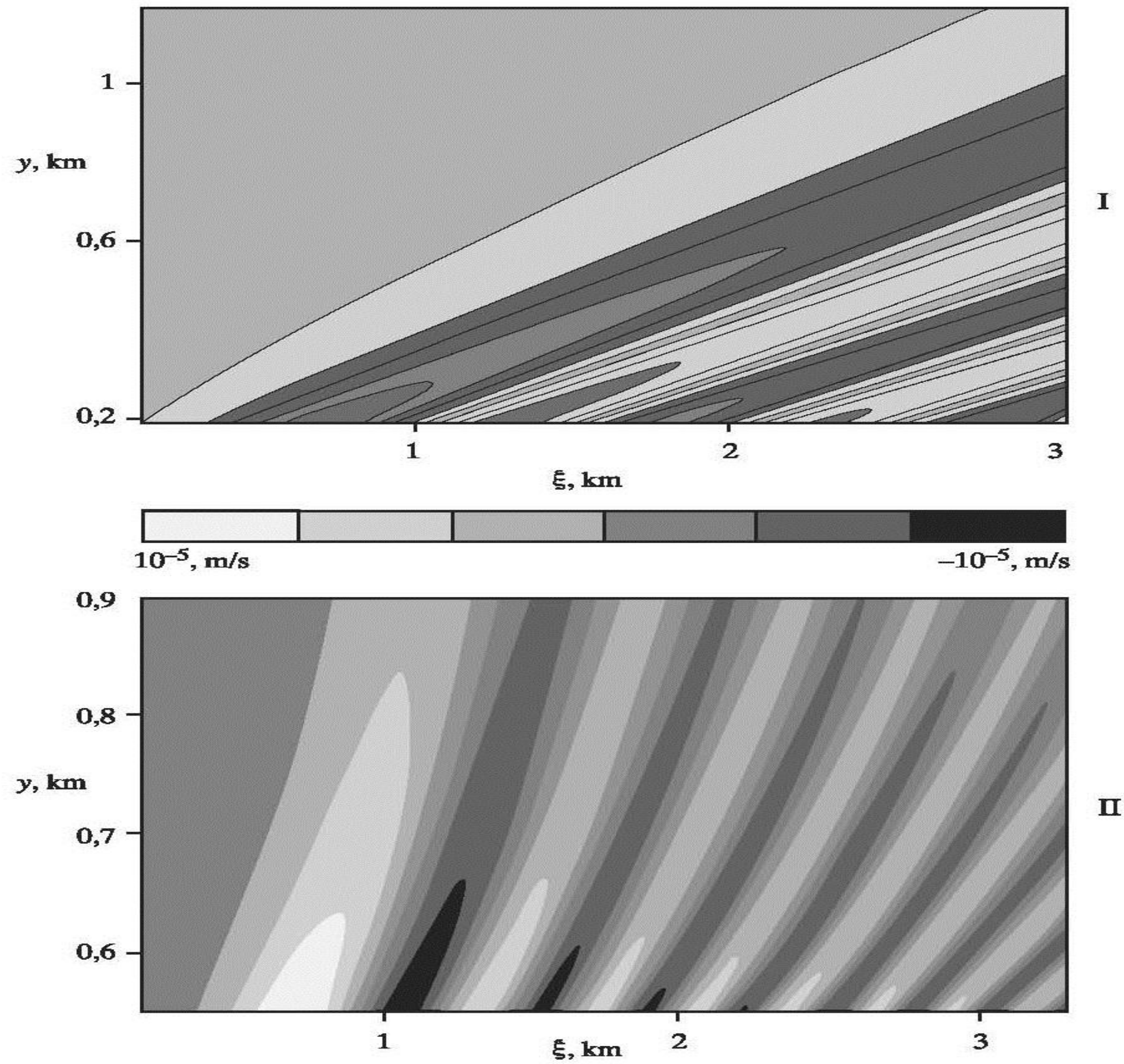


Рис. 4. Внутренние волны от источника, движущегося в нестационарном (I) и неоднородном по горизонтали (II) океане

ЛИТЕРАТУРА.

1.В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010, 470 с..

2. В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015, 735 с..

3. В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Теория волновых движений неоднородных сред. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017, 580 с.

4.В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Точные и асимптотические решения уравнения внутренних гравитационных волн в клиновидной области. Прикладная математика и механика, 2014, т. 78, №.5, с.690-699.

5.В.В.Булатов, ЮВ.Владимиров Внутренние гравитационные волн, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений. Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2015, №6, с. 26-34.

6.Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2016, №5, С. 57-63.

7.В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров, И.Ю.Владимиров Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в жидкости бесконечной глубины. Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2017, №5, с.23-29.

8.В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений. Прикладная математика и механика, 2017, т.81, № 5, с. 556-564.

9.В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые движущимся с докритической скоростью источником возмущений. Прикладная механика и техническая физика, 2017, т.58, №6, с.50-57.

О ТОЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ ВИБРАЦИОННОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

В.А. Вяткин, Д.А. Брацун
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Точные нестационарные решения уравнений гидромеханики малочисленны, так как получение функциональных зависимостей от двух и более переменных в замкнутой форме является непростой задачей. В 1882 году Громека нашёл точное решение задачи нестационарного изотермического движения вязкой жидкости в бесконечной цилиндрической трубе, к концам которой приложено периодически пульсирующая разность давлений [1]. Было показано, что в этой задаче может быть проведена процедура разделения переменных. Похожим образом было получено точное нестационарное решение неизотермической конвективной задачи в работе [2]. В работе одного из авторов [3] показано, что решение может быть обобщено на случай запыленной среды. Было рассмотрено комбинированное течение в плоском слое жидкости, по одной из координат которого действует стационарная сила тяжести, а по другой — осуществляются вибрации с конечной частотой. Оказалось, что такое сложное течение не меняет свой ламинарный характер, что даёт возможность расщепить задачу по пространственным направлениям, найти отдельно аналитические выражения для двух компонент скорости вдоль слоя, рассчитать их эпюры поперек слоя, а затем отдельно решить задачи устойчивости для компонент течений.

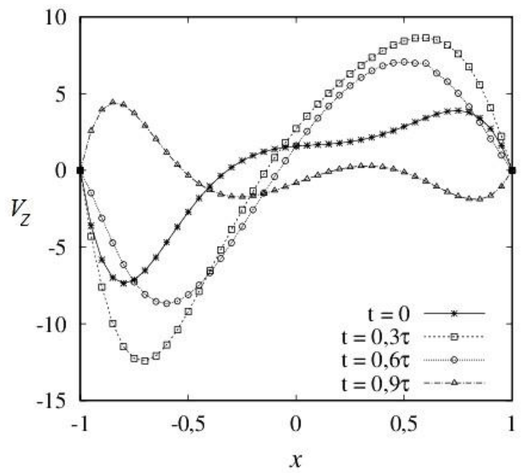


Рис. 1.

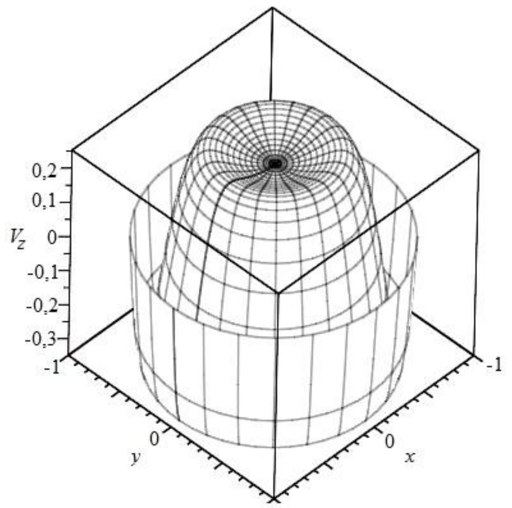


Рис. 2.

Используя описанный выше подход в данной работе были получены точные нестационарные решения для ряда задач вибрационной гидромеханики: течение вязкой жидкости в плоском слое, подогреваемом сбоку и совершающем продольные периодические гармонические вибрации; течение вязкой тепловыделяющей жидкости в плоском слое под действием вибраций, направленных вдоль слоя; течение вязкой жидкости в слое, на границе которого задан постоянный градиент реагирующего вещества и протекает химическая реакция первого порядка, а сам слой периодически колеблется в продольном направлении (эпюры компоненты скорости, направленной вдоль слоя, представлены для разных моментов времени на периоде вибраций на рисунке 1); течение вязкой тепловыделяющей жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд, который совершает периодические движения в направлении оси симметрии (профиль компоненты скорости, направленной вдоль оси цилиндра, для одного из моментов времени представлен на рисунке 2). В каждом из перечисленных случаев получены аналитические выражения для скорости жидкости, давления, температуры и концентрации реагента. Обсуждается общая процедура нахождения точных выражений для данного класса решений [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.6990.2017/8.9, выполняемый в рамках госзадания).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Учен. зап. Казан. ун-та. Отд. физ.-мат. наук, 1882, Кн. I, с. 41-72.
2. Гершуни Г.З., Келлер И.О., Смородин Б.Л. О вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости плоского горизонтального слоя жидкости при конечных частотах вибрации. МЖГ, 1996, № 5, с.44-51.
3. Bratsun D.A., Teplov V.S. On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles. Eur. Phys. J. A., 2000, Vol. 10, P.219-230.
4. Брацун Д.А., Вяткин В.А. Мухаматуллин А.Р. О точных нестационарных решениях уравнений вибрационной конвекции. ВМСС, 2017, Т. 10, № 4, с.433-444.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОЛИТА ВОЗЛЕ ИОНООБМЕННОЙ МЕМБРАНЫ С НЕПОЛНОЙ СЕЛЕКТИВНОСТЬЮ

Н.Ю. Ганченко[1], Е.В. Горбачева[1], Г.С. Ганченко[2], Е.А. Дёмёхин[2,3]
[1]Кубанский государственный университет, Краснодар.
[2]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Краснодарский филиал)
[3]Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

В данной работе представлены новые механизмы возникновения режимов сверхпредельных токов в электролите около неидеальных ионоселективных поверхностей. В качестве таких поверхностей могут выступать ионообменные мембраны, системы наноканалов в заряженном диэлектрике, некоторые электроды. Под действием внешнего электрического тока ионы солей, растворенных в электролите, устремляются к соответствующим электродам и образуется электрический ток. При этом большую часть электрического тока составляет поток ионов, проходящих через ионоселективную поверхность, а ток коионов при этом достаточно мал. Обычно при моделировании подобных процессов рассматривалась модель идеальных ионоселективных поверхностей, в которой предполагалось отсутствие потока коионов через мембраны. На основе этой модели было открыто явление неравновесной электрокинетической неустойчивости [1]: при достаточно большой разности потенциалов около мембраны возникает зона пространственного заряда, где располагается отошедший от мембраны заряд, который может терять устойчивость и приводить к электроконвективному движению. При этом было показано, что для идеальных ионоселективных мембран невозможно возникновение равновесной электрокинетической неустойчивости, предположительно образующейся без формирования зоны пространственного заряда. Однако последние исследования [2, 3] предсказали, что равновесная неустойчивость может возникать около неидеальных ионоселективных мембран.

В нашей работе математическая модель (рис. 1) основана на системе уравнений Нернста-Планка-Пуассона-Стокса относительно концентраций ионов, электрического потенциала и поля скоростей. Найдено одномерное стационарное решение и исследована его линейная устойчивость, которая дополнена нелинейным анализом, представляющим из себя полное двумерное моделирование нелинейной системы. Расчеты показывают, что, помимо равновесной электроконвекции [2], в системе также присутствует новый тип колебательной неустойчивости [4, 5] с частотой от 50 до 300 Гц, который характерен для мембран слабой селективности или для насыщенных растворов электролитов. Особенность данных типов неустойчивости заключается в том, что они могут вызывать режим сверхпредельных токов сразу из омических режимов, минуя режим допредельных токов. Такая особенность может быть использована на практике для проектирования микромиксеров без подвижных частей.

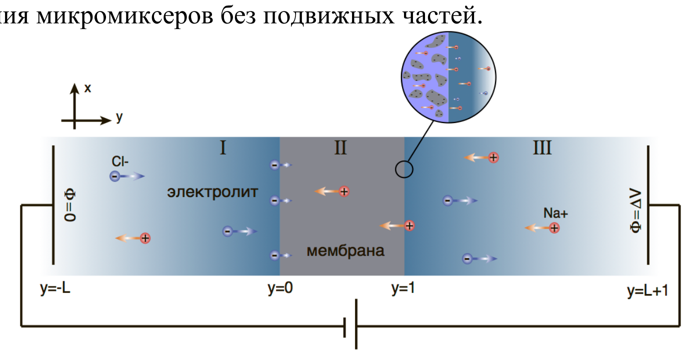


Рис. 1. Схематичная постановка. Области I и III заполнены электролитом, область II – мембрана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-08-01158-а, и Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант для молодых кандидатов наук МК-5302.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Rubinstein, B. Zaltzman, Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Phys. Rev. E., 2000. Vol. 62, № 2. Pp. 2238–2251.
[2] I. Rubinstein, B. Zaltzman, Equilibrium Electroconvective Instability // Physical Review Letters, 2015. Vol. 114, № 11. Pp. 114502.
[3] R. abu-Rjal, I. Rubinstein, B. Zaltzman, Driving factors of electro-convective instability in concentration polarization // Phys. Rev. Fluids., 2016. Vol. 1, № 2. Pp. 023601–023617.
[4] G.S. Ganchenko, E.N. Kalaydin, J. Schiffbauer, E.A. Demekhin, Modes of electrokinetic instability for imperfect electric membranes // Phys. Rev. E., 2016. Vol. 94, № 6. P. 063106.
[5] Г.С. Ганченко, Е.Н. Калайдин, С. Чакраборти, Е.А. Демехин, Гидродинамическая неустойчивость при омических режимах в несовершенных электрических мембранах // Докл. РАН. 2017. Т. 474, № 3. с. 296-300.

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ ОКОЛО БИПОЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МЕМБРАН

Н.Ю. Ганченко[1], В.А. Кирий[2], Е.А. Дemёхин[2,3]
[1]Кубанский государственный университет, Краснодар.
[2]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Краснодарский филиал)
[3]Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Работа посвящена исследованию электрогидродинамических течений электролита около неидеальных биполярных ионоселективных мембран. Биполярная мембрана представляет собой комбинацию катионообменной и анионообменной мембран. Подобная конструкция широко используется на практике для решения проблем водоподготовки, производства кислот, управления кислотностью жидкостей и продуктов питания, а также может быть использована при проектировании микрореакторов по генерации водорода из воды с помощью солнечной энергии в автономных системах [1,2].

Особенность биполярных мембран заключается в образовании области высокой напряженности электрического поля на стыке катионообменной и анионообменной мембран, в котором происходит химическая реакция диссоциации воды. Ранее исследования подобных мембран были основаны по большей части на изучении электростатических явлений [3,4,5]. Гидродинамика рассматривалась только в проточных системах, где электроосмотические эффекты играли второстепенную роль. Это связано с тем, что в непроточных системах в стационарном случае плоской геометрии движение электролита отсутствует, и возникнуть оно может только вследствие потери устойчивости одномерным решением и образования электроконвективных течений. Подобные течения, вызванные электрокинетической неустойчивостью, были открыты в начале XXI века [6] для идеальных монополярных мембран. Неустойчивость в этом случае порождается зоной пространственного заряда, образующейся около мембраны, на границе которой возникает электроосмотическое скольжение со скоростью, достаточной для запуска электроконвекции. В случае биполярных мембран подобная зона образуется только на стыке двух мембран, где из-за пористости мембран движение электролита существенно ограничено, а на внешних (со стороны электролита) границах мембраны образуются только двойные электрические слои, заряд в которых существенно меньше. По этой причине до недавнего времени считалось, что около биполярных мембран не возникает электрокинетической неустойчивости, наподобие той, которая наблюдается около монополярных мембран. Однако работы последних нескольких лет [7,8] показали, что в случае неидеальных ионоселективных мембран в электролите может возникать равновесная электрокинетическая неустойчивость, для развития которой достаточно двойных электрических слоев и потока коионов через мембрану. В нашем исследовании обнаружено, что подобная неустойчивость возникает и около биполярных мембран, особенно в том случае, когда разность потенциалов, приложенная к системе, достаточно велика, а электрическая мембрана обладает слабой селективностью. Отсутствие экспериментальных наблюдений данного феномена, скорее всего, можно объяснить тем фактом, что практически все промышленные мембраны обладают очень высокой селективностью – более 95% – и близки к идеальным.

С математической точки зрения, рассмотрена трехслойная система электролит – биполярная мембрана – электролит, на которую подается разность потенциалов так, чтобы напряженность электрического поля была направлена по нормали к мембране. Электролит предполагается ионным раствором, а транспорт ионов, распределение электрического поля и поле скоростей описываются системой нелинейных уравнений Нернста-Планка-Пуассона-Стокса. Внутри мембраны предполагается наличие объемного заряда, равного заряду мембраны, а движение электролита отсутствует. В модель также включены уравнения транспорта катионов водорода и анионов гидроксила с источниковыми слагаемыми, отражающими химические реакции диссоциации и рекомбинации воды. Исследование модели проведено численно в одномерной и двумерной постановках. Обнаружен новый тип равновесной электрокинетической неустойчивости, получены качественные характеристики, оценены критические значения параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края, проект 16-48-230107-р_а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.И. Заболоцкий, В.В. Никоненко, Перенос ионов в мембранах. - М.: Наука, 1996. - 392 с.

[2] Grabowski A., Zhang G., Strathmann H., Eigenberger G. Production of High-Purity Water by Continuous Electrodeionization with Bipolar Membranes: Influence of Concentrate and Protection Compartment // Separ. and Purif. Technol. 2008. V. 60. P. 86–95.

[3] Гребень В.П., Пивоваров Н.Я., Коварский Н.Я., Нефедова Г.З. Влияние природы ионита на физико-химические свойства биполярных ионообменных мембран // ЖФХ. 1978. Т. 52. № 10. С. 2641.

[4] Заболоцкий В.И., Гнусин Н.П., Шельдешов Н.В. Вольтамперные характеристики переходной области биполярной мембраны МБ-1 // Электрохимия. 1984. Т. 20. № 10. С. 1340–1345.

[5] Mafe S., Ramirez P., Alcaraz A. Electric Field-Assisted Proton Transfer and Water Dissociation at the Junction of a Fixed-Charge Bipolar Membrane // Chem. Phys. Lett. 1998. V. 294. No 4–5. P. 406–412.

[6] Rubinstein I., Zaltzman B., Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Phys. Rev. E., 2000. Vol. 62, № 2. Pp. 2238–2251.

[7] Rubinstein I., Zaltzman B., Equilibrium Electroconvective Instability // Physical Review Letters, 2015. V. 114(11). Pp. 114502.

[8] G.S. Ganchenko, E.N. Kalaydin, J. Schiffbauer, E.A. Demekhin, Modes of electrokinetic instability for imperfect electric membranes // Phys. Rev. E., 2016. V. 94(6). P. 063106.

МАЛОМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛЕДА ОТ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Г.В. Гембаржевский
ИПМех РАН, Москва

Неравновесные турбулентные течения, характеризуемые высокими скоростями процессов переноса, представляют интерес, как для фундаментальной науки, так и для различных технических приложений [1]. Подобные течения могут быть реализованы в форме ближнего следа за плохообтекаемым телом или группой тел. Нас здесь интересует комплексный объект - плазменный след в условиях тлеющего разряда, используемый, в частности, в быстро-проточных лазерах, для которого было обнаружено влияние мощности разряда на конфигурацию следа [2]. Этот объект характеризуется обширным набором параметров и для его исследования желательно иметь по возможности простую модель. Для нашего исследования гидродинамическая модель не только желательна, но необходима, так как ввиду особенностей конструкции экспериментальной установки визуализация следового течения невозможна; но доступна информация о пульсациях скорости, получаемая с помощью специально разработанного датчика [3].

Уже при изучении гидродинамики нейтральных следов принято проводить (численное) моделирование не только в рамках уравнений Навье-Стокса или их обобщений, но и строить упрощенные маломерные (аналитические) модели. Для следа уединенного цилиндра это может быть модель двумерного течения в форме классической дорожки Кармана в идеальной жидкости, а также одномерные модели дорожки. Это - модель дорожки-осциллятора Ван дер Поля или модель типа Ландау-Стюарта. Простые маломерные модели проливают свет на физику исследуемых явлений, а с другой стороны, они полезны в практических приложениях (скажем в вопросах оптимизации устройств, при построении систем автоматического регулирования течения в схеме с обратной связью и так далее). Исторически модель Ландау – Стюарта (бифуркации Ландау-Хопфа) была сформулирована и обоснована на «физическом» уровне строгости в применении к задаче ламинарно-турбулентного перехода в гидродинамических течениях [4]. К настоящему времени применение модели Ландау – Стюарта к описанию ламинарного режима течения ближнего следа за цилиндром в форме классической дорожки Кармана (для чисел Рейнольдса течения $48 < \mathrm{Re} < 190$) имеет «строгое» обоснование. Это - асимптотическое разложение решения соответствующей граничной задачи для двумерных уравнений Навье-Стокса по малому параметру надкритичности $(\mathrm{Re}_{cr})^{-1} - (\mathrm{Re})^{-1} << 1$, например [5]. При маломерном моделировании ближнего следа цилиндра в форме дорожки Кармана, наряду с моделью Ландау-Стюарта, используется также модель осциллятора Ван дер Поля [6, 7], являющаяся простейшей (но общей) моделью автогенератора с «мягким» возбуждением (произвольной природы, вблизи порога генерации). Эта модель широко используется в гидродинамике при исследовании задач «аэро-упругого резонанса»="vortex induced vibrations", не говоря о ее применении в различных областях естествознания [8].

В практических приложениях широко распространены широкоапертурные следовые течения, порождаемые группой цилиндров. Соответственно, следующим шагом в моделировании таких следовых течений является обобщение моделей на учет взаимодействия дорожек Кармана от соседних цилиндров в группе. Как правило, в рамках маломерного моделирования это взаимодействие учитывается в простейшей форме линейных членов, дополнительно включаемых в уравнения Ландау-Стюарта или Ван дер Поля. Такой подход может быть оправдан с учетом слабости взаимодействия дорожек Кармана в случае не слишком близкого расположения порождающих цилиндров.

Наша модель следа пары цилиндров, предложенная в рамках работ по гранту РФФИ № 13-01-00742-а, также основывается на уравнениях осциллятора Ван дер Поля. Система уравнений, несколько модифицированная с учетом малости параметра Δ относительно первоначального варианта [9], имеет вид:

$$\frac{d^2 X_1}{d t^2} + \left[1 - \Delta\left(\rho^2 - 4\right)\right] X_1 - \varepsilon \left[1 - X_1^2 - \lambda X_2^2 - l X_1 X_2\right] \frac{d X_1}{d t} = h_1 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 X_2}{d t^2} + \left[1 - \Delta\left(r^2 - 4\right)\right] X_2 - \varepsilon \left[1 - X_2^2 - \lambda X_1^2 - l X_1 X_2\right] \frac{d X_2}{d t} = h_2 \qquad (2)$$

Уравнения сформулированы относительно управляющих параметров двух дорожек Кармана X_i (отождествляемых в эксперименте, как правило, с поперечной составляющей скорости флюида в характерной точке соответствующей дорожки). Отличительные особенности модели следующие. Первое – для общности рассмотрения взаимодействие дорожек учтено с помощью нелинейного члена уравнений (посредством квадратичной формы общего вида с коэффициентами $\lambda ; l$ [10]). Рассматриваемое взаимодействие дорожек Кармана - осцилляторов Ван дер Поля, учтенное в нашей модели с помощью параметров $\lambda ; l$, это, вообще говоря, сильное взаимодействие в окрестности порождающих след цилиндров (иными словами, в области формирования дорожек) $\lambda ; l >< 1$. При этом дальнейшая (медленная) эволюция дорожек ниже области формирования за счет вязкости флюида не рассматривается (в одномерной модели). Вторая особенность – непосредственный учет в уравнениях зависимости частоты осцилляций от амплитуды осцилляций (с помощью параметра Δ, введенного в модель [9]). Зависимость частоты осцилляций от амплитуды принято игнорировать при моделировании следа с помощью уравнений Ван дер Поля, но учитывать в моделях типа Ландау-Стюарта. При этом оказывается, что укороченное уравнение Ван дер Поля (но модифицированное с учетом зависимости частоты осцилляций от амплитуды в простейшей форме (1, 2)) для следа за уединенным цилиндром эквивалентно соответствующему уравнению Ландау-Стюарта. Тем самым отмечается, что наша модель следа имеет такое же «строгое» гидродинамическое обоснование, по крайней мере, в части моделирования ламинарного следа за уединенным цилиндром, что и популярная ныне модель Ландау-Стюарта. Здесь следует отметить, что близость подходов к моделированию следа на основе уравнений Ван дер Поля и Ландау Стюарта известна [6]. В качестве третьей особенности модели можно отметить то, что ее уравнения (1, 2) содержат правые части h_i, представляющие собой источник стохастизации турбулентного следа (аналог сил Ланжевена), причем в ламинарном режиме течения $h_i = 0$.

Ввиду малости параметра модели $\varepsilon << 1$ решение системы уравнений (1), (2) следует искать в форме осцилляций с медленно меняющимися амплитудами и фазами:

$$X_1 = \rho \cos(P_1) \qquad (3)$$

$$X_2 = r \cos(P_2) \qquad (4)$$

Как показал анализ решения модельных уравнений при условии $h_i = 0$ [10, 2], в рамках модели реализуются пять глобальных квазиламинарных одночастотных мод следа, при этом в турбулентном течении в соответствующих областях параметров возможны различные режимы перемежающегося следа. Сравнительное богатство набора режимов следа в рамках модели позволяло надеяться на успешность ее применения к описанию наших экспериментальных данных [2]. Однако, согласно экспериментальным наблюдениям [11, 12], след близкорасположенных цилиндров $1{,}5 < L/D < 2$ (в отличие от такового для сравнительно удаленных цилиндров), как правило, асимметричен (то есть интенсивность дорожек Кармана различна), при этом частота осцилляций в двух дорожках Кармана также различается. Проведенный анализ показал, что наша модель следа содержит такую асимметричную ламинарную двухчастотную моду течения для соответствующей области параметров модели. В турбулентном течении она реализуется в режиме перемежаемости с симметричной модой следа.

Настоящее сообщение посвящено в основном анализу свойств этой двухчастотной моды следа в рамках модели. Затрагиваются такие ее свойства как конфигурация, фазовый портрет, область существования. Соответственно, на рисунке 1 приведена установившаяся динамика осцилляций скорости в характерных точках двух дорожек Кармана в режиме двухчастотной моды для случая $\varepsilon = 0{,}12; \Delta = -0{,}12; \lambda = 0{,}49; l = 3{,}0$. Обращает на себя внимание синхронизованная низкочастотная модуляция пульсаций в двух дорожках.

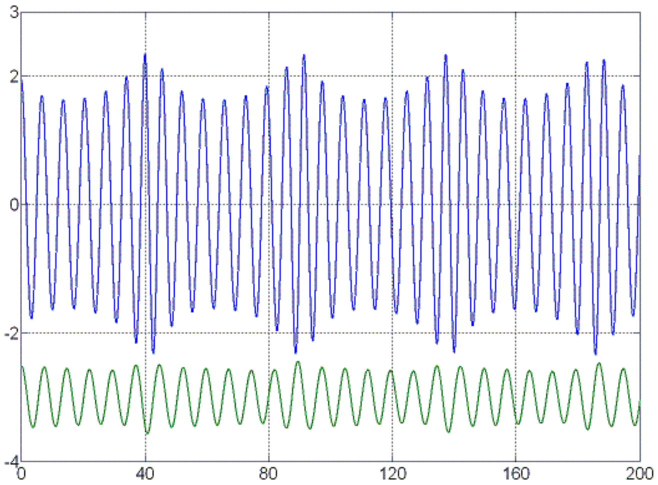


Рисунок 1. Стационарный режим ламинарной двухчастотной моды следа.
Пульсации развитой дорожки X_1 - синий цвет кривой;
пульсации частично подавленной дорожки $(X_2 - 3)$ – зеленый
(и осциллограмма осцилляций смещена на три единицы вниз).

Также проиллюстрирован процесс релаксации следа, заканчивающийся на глобальной асимметричной двухчастотной моде. Для этого на рисунке 2 приведена зависимость разности фаз осцилляций в двух дорожках Кармана $P = P_1 - P_2$ от величины, характеризующей асимметрию дорожек $N = 0{,}5\dfrac{(\rho^2 - r^2)}{(\rho^2 + r^2)}$ для случая $\varepsilon = 0{,}12; \Delta = 0{,}12; \lambda = 0{,}49; l = 3{,}0$. Согласно приведенным данным относительная интенсивность двух дорожек N претерпевает высокочастотные незатухающие осцилляции на фоне сравнительно медленного процесса релаксации. Здесь уместно будет отметить, что изменение знака у параметра модели Δ приводит в решении «укороченных» уравнений модели лишь к такой же замене знака у разности фаз осцилляций в дорожках $P_{(t)} \to -P_{(t)}$.

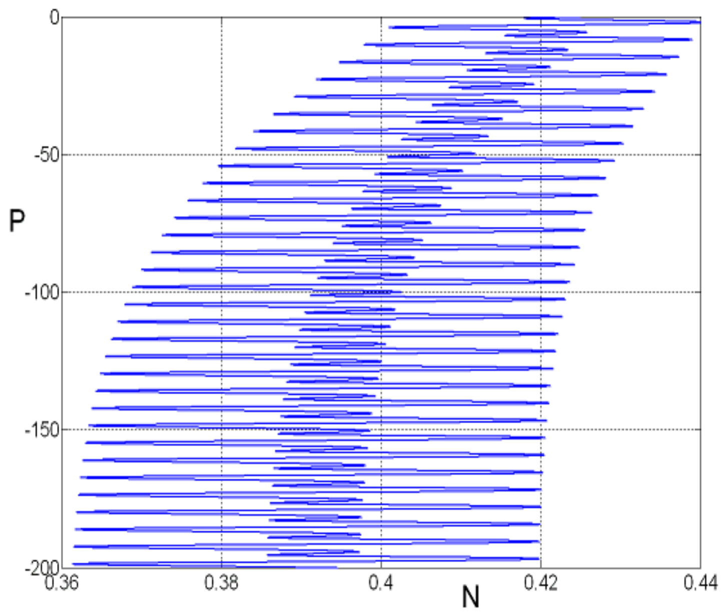


Рисунок 2. Релаксация коллективных переменных следа к двухчастотной глобальной моде для случая: $\varepsilon = 0{,}12; \Delta = 0{,}12; \lambda = 0{,}49; l = 3{,}0$.

На основе полученных результатов обсуждается возможный подход к экспериментальной оценке свободных параметров модели. Информативной величиной здесь представляется временной ход разности фаз осцилляций в двух дорожках Кармана. Одновременно, экспериментальная оценка ширины спектральных пиков осцилляций позволяют получать информацию о собственно «турбулентных» характеристиках течения, как было показано ранее [13, 14].

Автор благодарен Э.В. Теодоровичу за плодотворную дискуссию, А.К. Ледневу и К.Ю. Осипенко за представленные данные численного расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Т. Суржиков. Физическая механика газовых разрядов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
2. G.V. Gembarzhevskii, A.K. Lednev and K.Yu. Osipenko. Mode intermittence in a wake from two cylinders. Journal of Physics: Conf Series, 2017, V. 825. 012020
3. Г.В. Гембаржевский, Н.А. Генералов, В.Д. Косынкин. Датчик пульсаций скорости турбулентного газового потока в условиях тлеющего разряда. Приборы и техника эксперимента. 1993, № 3, с. 149-155.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика, Глава 3.
5. D. Sipp, A. Lebedev. Global stability of base and mean flows: a general approach and its application to cylinder and open cavity flows. J. Fluid Mech., 2007, V. 593, pp. 333-358.
6. П.С. Ланда. Нелинейные колебания и волны. М.: Либроком, 2010. (Синергетика: от прошлого к будущему.)
7. Э. Симиу, Р. Сканлан. Воздействие ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат 1984.

8. А.П. Кузнецов, Е.С. Селиверстова, Д.И. Трубецков, Л.В. Тюрюкина. Феномен уравнения Ван дер Поля. Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 2014, т. 22, № 4, с. 3-42.
9. Г.В. Гембаржевский, А.К. Леднев, К.Ю. Осипенко. Моделирование эволюции плазменного следа пары цилиндров под действием электрического разряда. Письма в ЖТФ, 2015, т. 41, № 23, с. 40-48.
10. G.V. Gembarzhevskii, A.K. Lednev. Reduced order model for effect of pulsation energy redistribution in cylinders wake induced by glow discharge. Proceedings of 12-th International workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics 2013, Moscow, JIHT. P. 67-70.
11. D. Sumner. Two circular cylinders in cross-flow: A Review. Journal of Fluids and Structures 2010, V. 26, pp. 849-899.
12. MdM. Alam, Y. Zhou, X.W. Wang. The wake of two side-by-side square cylinders. J. Fluid Mech., 2011, V. 669, pp. 432-471.
13. Г.В. Гембаржевский, Н.А. Генералов. Вихревое течение в электроразрядном лазере. Математическое моделирование, 2001, т. 13, № 7, с. 11-16.
14. Г.В. Гембаржевский, Н.А. Генералов. О модели турбулентного течения ближнего следа в тлеющем разряде. ТВТ, 2004, т. 42, № 4, с. 501-505.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

С. О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ)

E-mail: *sglad@newmail.ru*

АННОТАЦИЯ

С помощью метода диссипативной функции предложен формальный механизм описания эволюционного роста кристаллов в неоднородном расплаве, находящимся при температуре, близкой к температуре кристаллизации. В качестве параметра описания выбран момент импульса **M** неравновесных элементарных кристалликов, "налипающих" на локально – выделенные центры зародышеобразования, стохастически разбросанные по всему объему гетерогенной среды. Решение задачи основано на феноменологическом подходе и выводе уравнений эволюции, позволяющих адекватно описывать не только динамику роста кристаллов, но и их форму.

ВВЕДЕНИЕ

К пионерским исследованиям процесса кристаллизации можно с уверенностью отнести работы Фогеля [1] и Фульчера [2], посвященные экспериментальному изучению свойств жидких расплавов в области температур, близких к температуре кристаллизации T_{cr}. В частности, этими авторами был эмпирически установлен закон изменения вязкости расплава η при приближении к точке кристаллизации в условиях его переохлаждения. Оказалось, что эта зависимость носит экспоненциальный характер и имеет вид $\eta = \eta_0 e^{\frac{\Delta}{T - T_{cr}}}$, где η_0 – вязкость жидкого расплава при $T \to \infty$, а параметр Δ представляет собой некоторый энергетический потенциал, который можно трактовать, как энергетический барьер, связанный с эффектом туннелирования из расплава в твердую фазу и обратно. Температура T представляет собой температуру сильно флуктуирующего жидкого расплава, которая в общем случае сама меняется с течением времени, однако в данном выражении (по определению авторов [1, 2]) она играет роль параметра. Надо заметить, что приведенный эмпирический закон изменения вязкости для процесса кристаллизации (и, кстати сказать, теоретически объясненный в работах [3, 4] (см. также работы [5 - 9])) будет необходим в дальнейшем для описания динамики роста кристаллов (см. ниже). Некоторые другие аспекты приложения модели свободного объема можно найти и в монографии [10]. При исследовании любых неравновесных явлений важную роль играет такое понятие, как степень удаленности рассматриваемой релаксирующей системы от положения равновесия. При малых отклонениях от равновесного состояния, как правило, оказывается достаточным найти решения линеаризованных уравнений эволюции (будь то кинетическое уравнение, описывающее динамику функции распределения, для оценки изменения которой в этом случае хватает так называемого «тау – приближения», или, скажем, концентрация индивидов в биологических системах, для которых можно также найти линеаризованные уравнения "движения". В приведенных примерах мы имели возможность оценить только время окончательного установления равновесия, а вся информация о предшествующей эволюции, к сожалению, теряется. Именно поэтому линеаризованного приближения бывает не всегда достаточно. Типичной сильно неравновесной системой здесь может служить классическая реакция Белоусова - Жаботинского, когда в течение некоторого достаточно большого (но конечного) интервала времени раствор из двух составляющих периодически изменяет свой цвет. По прошествии, однако, обозримого промежутка времени реакция стабилизируется, и изменение цвета раствора прекращается.

Вопросы, связанные с изучением динамических систем, находящихся далеко от положения равновесия, относятся к разряду синергетических проблем и им посвящены специальные методы исследования, в основном связанные с численным интегрированием дифференциальных уравнений и систем уравнений (по определению И. Пригожина [11, 12] (см. также [13]) подобные системы носят название диссипативных структур). Математические методы, применяемые в описании сильно неравновесных систем, базируются на принципе нахождения экстремума некоторого функционала (что также является обобщенным подходом), исходя из которого, строится соответствующая система дифференциальных уравнений и что, кстати сказать, является типичнейшим правилом в деле исследования любых синергетических проблем. Подчеркнем, что именно в этом определении заключается смысл задач синергетики, но в каждом конкретном физическом случае такой подход строго индивидуален. Как будет показано ниже, именно принцип решения экстремальных задач позволяет выявить не только динамику роста кристаллов в геле, который получается из раствора стеклообразующих веществ, но также оценить направление развития кристалла и его форму.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть имеется некоторая субстанция, представляющая собой систему, состоящую из растворителя и растворенных веществ, которая благодаря выпариванию жидкости (что, в общем-то, физически эквивалентно процессу кристаллизации расплава в переохлажденной среде) охлаждается и приводит к зарождению и развитию зародышей, хаотически локализованных по всему объему. Появление зародыша в некотором локальном месте можно определить чисто математическим термином, определив его как притягивающее множество. Будем считать все локальные флуктуационно зародившиеся области центрами роста будущих кристаллов, и представим себе (пока лишь чисто абстрактно), что дальнейший рост и динамика таких точек должна определяться потоком вещества в их направлении из окружающего объема. Как показал эксперимент и теория, изложенные, например, в работе [14], направление развития может быть спиралеобразным (или вихревым), в результате чего формируются кристаллы игольчатой формы. Заметим, что с чисто математической точки зрения этот случай описать в рамках уравнения Эйнштейна - Смолуховского не удастся. Именно поэтому возникает вполне закономерный вопрос о том, как описать это явление?

Чтобы получить систему динамических уравнений, описывающих эволюцию роста кристалла и его форму, в качестве функционала мы выберем наиболее удобную для этого случая диссипативную функцию $\dot{Q}$ [15]. При этом следует помнить, что процесс роста кристалла из некоторой субстанции имеет ярко выраженный необратимый характер, а кроме того, как во всякой неньютоновской жидкости (и тем более, для области температур, близких к температуре кристаллизации), вязкость зависит от координат и меняется на интервалах δx порядка или больше размера элементарного кристаллика b, из которых и "лепится" основной массив. Другими словами, в качестве рабочей модели будем полагать, что имеет место их диффузионное "налипание" на флуктуационно - образовавшуюся область повышенной плотности и пониженной температуры, в которой начинает формироваться будущий кристаллический зародыш при отличном от нуля градиенте вязкости ($\nabla\eta$) (подробное изложение этой теории можно найти в работе [16]). Для векторного характера "налипания" каждый кристаллик характеризуется скоростью $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, меняющуюся на расстояниях, больших или порядка его условного линейного размера b. Отождествим это движение с моментом импульса $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$. Дополнительным аргументом в пользу описания динамики процесса кристаллизации на языке вектора $\mathbf{M}$, служит сильная неизотропность пространства расплава и анизотропия развития кристаллов.

Учет параметров $\mathbf{u}$, $\mathbf{M}$ и $\nabla\eta$ в диссипативной функции, составленной по типу ее не инвариантности по отношению к операции изменения знака времени, приводит к следующему функционалу

$$\dot{Q}\{\mathbf{M}\} = \frac{1}{2\tau\eta_0}\int_V B^*_{iknm} M_i M_k u_n \nabla_m \eta dV + \ldots \tag{1}$$

где $\tau-$ некоторая постоянная, имеющая размерность времени, а $B^*_{iknm}-$ тензор четвертого ранга, определяющийся чисто симметрийными соображениями. Заметим, что в (1) мы ограничились лишь первым слагаемым, которого оказывается вполне достаточно для решения поставленной задачи. Для получения уравнения «движения» вектора $\mathbf{M}$, воспользуемся феноменологическим уравнением (см., например, [15], а также работы [16], [17]) в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma\frac{\delta\dot{Q}}{\delta\mathbf{M}},$$

где $\gamma-$ некоторая константа, обеспечивающая правильную размерность, а символ $\frac{\delta}{\delta}$ означает вариационную производную. В результате простого варьирования функционала (1), находим

$$\dot{M}_i = \eta_0^{-1} B_{iknm} M_k u_n \nabla_m \eta \tag{2}$$

где введенный нами безразмерный тензор четвертого ранга $B_{iknm} = \gamma\tau^{-1}B^*_{iknm}$.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2).

1. Пусть тензор B_{iknm} факторизуется и имеет простейшую форму $B_{iknm} = e_{iks}e_{snm}$, где e_{ijk} – единичный антисимметричный тензор третьего ранга, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В силу свойств этого тензора, имеем тогда $B_{iknm} = e_{iks}e_{snm} = \delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn}$, где δ_{ik} – символ Кронекера, и уравнение (4) приобретает вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \eta_0^{-1}\left[\mathbf{u}(\mathbf{M}\nabla\eta) - \nabla\eta(\mathbf{uM})\right] = \eta_0^{-1}\left[\mathbf{M}\times[\mathbf{u}\times\nabla\eta]\right]. \tag{3}$$

Как видно из полученного уравнения, поведение момента импульса имеет в данном случае явно выраженный закручивающийся характер с характерной частотой вращения $\vec{\Omega} = \eta_0^{-1}[\mathbf{u}\times\nabla\eta]$. В случае, если мы приближаемся к точке кристаллизации градиент вязкости стремится к большой (но конечной) величине, то частота закручивания возрастает. Это означает, что динамика роста кристалла допускается спиралевидной, а направление "закручивания" может быть как левым, так и правым в зависимости от знака векторного произведения $\left[\mathbf{u}\times\nabla\eta\right]$. Знак этого вектора определяется не градиентом вязкости (как может показаться), а направлением скорости налипания кристалликов на основной массив $\mathbf{u}$.

2. Положим теперь, что тензор $B_{iknm} = a\delta_{ik}\delta_{nm} + b\delta_{in}\delta_{km} + c\delta_{im}\delta_{kn}$ где $a,b,c-$ некоторые константы. Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \eta_0^{-1}\left[a\mathbf{M}(\mathbf{u}\nabla\eta) + b\mathbf{u}(\mathbf{M}\nabla\eta) + c\nabla\eta(\mathbf{u}\mathbf{M})\right]$$

Поскольку момент импульса $\mathbf{M}$ пропорционален векторному произведению $\left[\mathbf{u}\times\mathbf{r}\right]$, где $\mathbf{r}-$ радиус – вектор траектории закручивания, то последнее слагаемое тождественно обращается в нуль и в итоге имеем

$$\dot{\mathbf{M}} = \eta_0^{-1}\left[a\mathbf{M}(\mathbf{u}\nabla\eta) + b\mathbf{u}(\mathbf{M}\nabla\eta)\right]. \qquad (4)$$

Отсюда видно следующее. Если $b=0$, то развитие кристалла направлено вдоль некоторой оси (ось $\mathbf{M}$), относительно которой рассматривается его рост. Если $a=0$, то такая ситуация описывает кристалл, по форме похожий на иглу и его развитие будет ориентировано вдоль скорости кристаллизации $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{cr}$. Причем в зависимости от знака скорости $\mathbf{v}$ "иголки" могут быть направлены либо по часовой стрелке, либо против, если смотреть сверху на основной ствол кристалла. Как видно из уравнения (4), момент импульса системы в такой ситуации не сохраняется, в отличие от уравнения (3), где этот закон сохранения удовлетворяется автоматически. Такое чрезвычайно важное отличие говорит нам о том, что уравнение (4) описывает чисто релаксационный характер (что не противоречит действительности) и характеризует процесс исчезновения момента при достижении критической температуры $T=T_{cr}$. Именно поэтому здесь следует учесть еще и уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \left(c_P\rho\right)^{-1}\nabla\eta\nabla T = \left(c_P\rho\right)^{-1}\nabla\left(\kappa\nabla T\right) + q_{cr}$, где $q_{cr}-$ скрытая теплота кристаллизации, $\rho-$ плотность зародыша, c_P- изобарическая теплоемкость его единицы массы, второе слагаемое в левой части - феноменологически введенный член, учитывающий неравновесность процесса.

Проанализируем уравнение (3) для оценки зависимости предельного (при $T\to T_{cr}$) поведения момента "закручивания" $M=\left|\mathbf{M}\right|$ от разности $T-T_{cr}$. Действительно, $\dfrac{dM}{dt} = \eta_0^{-1}\,\mathrm{v}_{cr}\,M\dfrac{d\eta}{dT}\dfrac{dT}{dr}$, где $r-$ радиальное расстояние, отсчитываемое в перпендикулярном направлении от оси роста кристалла. Левую часть представим как $\frac{dM}{dt}=\frac{dM}{dT}\frac{dT}{dt}$, а потому $\frac{dM}{dT}\frac{dT}{dt}=\eta_0^{-1}\,\mathrm{v}_{cr}\,M\frac{d\eta}{dT}\frac{dT}{dr}$ и отсюда, положив по порядку величины, что $\frac{dr}{dt}\approx-\frac{b}{\tau_0}$, где τ_0 – характерное время "налипания" кристалликов, найдем $\frac{dM}{dT}=-\alpha\eta_0^{-1}M\frac{d\eta}{dT}$, где параметр $\alpha=\frac{\mathrm{v}_{cr}\,\tau_0}{b}$. Следовательно, решение есть

$$M\left(T-T_{cr}\right)=M_0 e^{-\frac{\alpha\eta}{\eta_0}},$$

где M_0 – константа интегрирования. Согласно полученному решению при приближении температуры T к температуре кристаллизации T_{cr} момент M должен экспоненциально быстро стремиться к нулю. Физически же такое поведение означает только, что полный момент в процессе кристаллизации чрезвычайно быстро исчезает по значительно более резкому закону, чем вязкость стремится к бесконечности, хотя оба параметра (M и η) доходят до своих критических значений и одновременно. Если сказать точнее, то η представляет собой хотя и конечное, но весьма большое значение, совпадающее с "вязкостью" твердой фазы и по порядку величины соответствующее (см. [14]) значению $\frac{\rho_{cr}a^2 J_{ex}}{\hbar}$, где a – межатомное расстояние, $\hbar$ – постоянная Планка, J_{ex} – обменное взаимодействие между атомами, а ρ_{cr} – плотность кристалла. Рассмотрим теперь решение уравнения (3) в важном случае, когда угловая скорость $\vec{\Omega}$ постоянна, то есть $\vec{\Omega}=\eta_0^{-1}\left[\mathbf{v}\times\nabla\eta\right]=const$. Поскольку $\mathbf{M}=m\left[\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right]$, то второе слагаемое, фигурирующее в уравнении (3), тождественно обращается в нуль. Что же касается произведения $\mathbf{M}\cdot\nabla\eta$, то направление вектора $\nabla\eta$ не совпадает с направлением $\mathbf{r}$ и, более того, $\nabla\eta$ считается параметром задачи. Наиболее любопытным и весьма интересным является определение геометрической формы растущего из жидкого расплава кристалла. Чтобы определить одну из множества возможных форм (получаемых чисто аналитически благодаря уравнениям (3) и (4)), поступим следующим образом. Вспомним, что момент импульса есть $\mathbf{M}=m\left[\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right]$, где m – масса налипающего произвольным образом кристаллика и которая (что весьма показательно) просто выпадает из ответа (см. уравнения (5), в которых m сокращается). В итоге получается следующая система

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathrm{v}}_y\, z - \dot{\mathrm{v}}_z\, y = A\frac{\mathrm{v}_x}{\eta_0},\\
&\dot{\mathrm{v}}_z\, x - \dot{\mathrm{v}}_x\, z = A\frac{\mathrm{v}_y}{\eta_0},\\
&\dot{\mathrm{v}}_x\, y - \dot{\mathrm{v}}_y\, x = A\frac{\mathrm{v}_z}{\eta_0},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $A = \nabla\eta\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]$.

В качестве демонстрации примера получения одного из возможных решений системы (5), выберем направление градиента вязкости вдоль оси z, и будем считать, что вектор $\nabla\eta = \left(0, 0, \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)$, причем $\frac{\partial\eta}{\partial z} = g = const$. Координату z выберем в качестве независимого параметра задачи и положим скорость "налипания" вдоль оси z постоянной и равной $\mathrm{v}_z = \mathrm{v}_0 = const$. Решим для начала нижнее уравнение системы (5). Для этого очень удобно перейти в цилиндрическую систему координат. Положим $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$, тогда разность $\mathrm{v}_x\, y - \mathrm{v}_y\, x = -r^2\dot{\varphi}$. С учетом же явного выражения $A = \frac{\partial\eta}{\partial z}\left(\mathrm{v}_x\, y - \mathrm{v}_y\, x\right) = gr^2\dot{\varphi}$ приходим к уравнению $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = r^2\dot{\varphi}\frac{\mathrm{v}_0\, g}{\eta_0}$. Полагая здесь, что $r \approx R_0 = const$, получаем $\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}\frac{\mathrm{v}_0|g|}{\eta_0}$. Его решение будет

$$
\begin{aligned}
&\Omega(t) = \dot{\varphi} = \Omega_0 e^{-\frac{\mathrm{v}_0|g|}{\eta_0}t},\\
&\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\Omega_0\eta_0}{\mathrm{v}_0|g|}e^{-\frac{\mathrm{v}_0|g|}{\eta_0}t},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где учтено, что градиент вязкости отрицателен, а Ω_0 – значение частоты "наматывания" кристалликов на флуктуационно зародившийся начальный зародыш кристалла в момент времени $t = 0$.

Из двух нижних уравнений системы (5) с учетом постоянства скорости v_z, имеем

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathrm{v}}_y\, z = A\frac{\mathrm{v}_x}{\eta_0} = R_0^2\dot{\varphi}|g|\frac{\mathrm{v}_x}{\eta_0},\\
&\dot{\mathrm{v}}_x\, z = -A\frac{\mathrm{v}_y}{\eta_0} = -R_0^2\dot{\varphi}|g|\frac{\mathrm{v}_y}{\eta_0}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Как видно из (7), если нижнее уравнение умножить на $-i$ и сложить с верхним, и обозначить через v сумму $\mathrm{v}_x + i\,\mathrm{v}_y$, то получим простое дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathrm{v}} = i\omega \mathrm{v},$$

где частота $\omega = \dfrac{R_0^2 \dot{\varphi} |g|}{\eta_0 z}$. Его решение есть $\mathrm{v}(t) = u_0 e^{i\omega t}$, а потому

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_x(t) &= u_0 \cos \omega t, \\ \mathrm{v}_y(t) &= u_0 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда непосредственно видно, что сумма квадратов скорости в плоскости $x - y$ сохраняется и конец вектора $\mathbf{v}$ описывает окружность $\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 = u_0^2$. Причем, как видно из определения частоты ω, она уменьшается с ростом координаты z, которая является независимой переменной. В полярной системе координат это условие запишется как $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = u_0^2$. Как видно из решения (8), $\dot{\varphi} = a\omega = const$, где $a = \dfrac{\eta_0 z}{R_0^2 |g|}$, поэтому для функции $r(t)$ получается простое уравнение $\dot{r}^2 + r^2 a^2 \omega^2 = u_0^2$. Его элементарное решение есть

$$r(\varphi, z) = \frac{u_0 R_0^2 |g|}{\omega \eta_0 z} \sin\left(\alpha + \varphi\right), \tag{9}$$

где $\alpha -$ произвольная фаза. Решение (9) иллюстрирует следующую весьма любопытную картину роста кристаллического образования. При малых значениях z появляется некоторая локальная область зарождения будущего кристаллического образования, имеющего вид плоской лепешки и представляющую собой начальное кристаллическое образование, которое с ростом z ведет себя как сталактит с осциллирующим радиусом, уменьшающимся к вершине. При этом будет наблюдаться вполне физическая картина эволюции, связанная с изменением вязкости кристаллизующегося вещества, которое в рамках нашего предположения определяется постоянным градиентом $g = \dfrac{\partial \eta}{\partial z}$.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Резюмируя итоги исследования, следует обратить внимание на три важных момента.

1. Благодаря феноменологически введенной диссипативной функции удалось построить математическую модель физического процесса роста кристаллов в гетерогенной стеклообразной среде.
2. Предложенный подход позволяет определить не только динамику роста, но и форму образующихся кристаллов.
3. Описанная общая методика годится в равной степени и для анализа свойств любых других сильно неравновесных структур Последнее связано с тем обстоятельством,

что выражение для функции $\dot{Q}$ строится по принципу инвариантности по отношению к изменению знака времени, а потому оно позволяет получать уравнения эволюции не только для гетерогенных субстанций, но и для гомогенных, за исключением кристаллических.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Vogel. Phys. Ztschr. 1921, Bd. 22, pp. 645 - 646.
2. G. S. Fulcher. J. Amer. Ceram. Soc. 1925, v. 8, pp. 339 - 341.
3. S. O. Gladkov. Phys. Lett. A 1990, v. 149, N5, pp. 275 - 278.
4. S. O. Gladkov. Physica B 1990, v. 167, pp. 145 - 158.
5. Я. И. Френкель. ЖЭТФ 1936, т. 6, сс. 647 - 653.
6. Я. И. Френкель. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука 1975, 592 с.
7. D. Turnbull, M. H. Cohen. J. Chem. Phys. 1961, v. 14, N 1, pp. 120 - 125
8. M. H. Cohen, G. S. Grest. Phys. Rev. B 1979, v. 20, N 3, pp. 1077 - 1098.
9. А. З. Паташинский, Б. И. Шумило. ЖЭТФ 1985, т. 89, № 7, сс. 315 - 329.
10. Г. М. Бартенев, Д. С. Сандитов. Релаксационные процессы в стеклообразных системах. Новосибирск: Наука, 1986, 240 с.
11. И. Пригожин, И. Стенгерс. Порядок из хаоса. М.: Прогресс 1986, 286 с.
12. I. Prigogine. Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. 3 rd edition. - N. Y. Wiley 1967, 415 p.
13. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. 3-е изд. перераб. и доп. М.: Наука 1989, 354 с.
14. С.О. Гладков, Е.М. Медведев. Физика и химия стекла. 2006. Т. 32. В. 3. СС. 479 – 488.
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука 1982, 620 с.
16. С.О. Гладков. ЖТФ. 2008. Т. 78. В. 7. СС. 136 – 140.

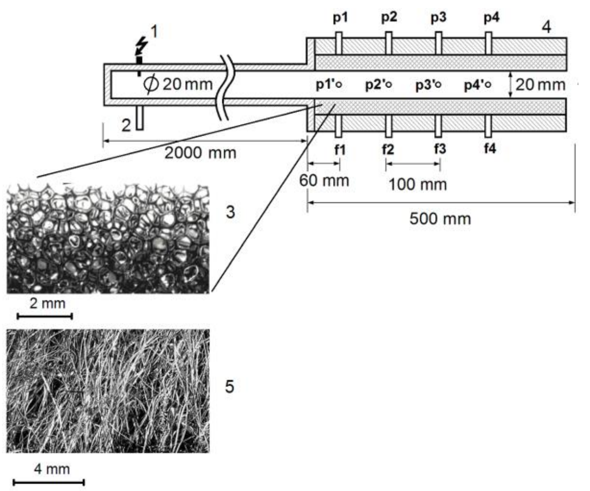
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ФОРМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ ПРИ РАСПАДЕ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ НАД ПОРИСТЫМ ПОКРЫТИЕМ

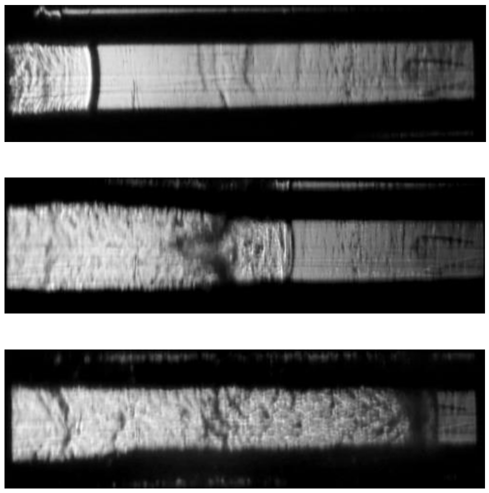
С.В. Головастов, Г.Ю. Бивол
Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

Одним из способов подавления детонационного распространения горения в газах является использование пористого покрытия на внутренней поверхности детонационной трубки [1]. Так как фронт детонационной волны представляет собой ячеистую структуру, состоящую из поперечных волн сжатия, имеющих поперечную составляющую скорости распространения, то расположение пористого покрытия на боковой стенке канала приведет к поперечному смещению массы ударно нагретого газа за фронтом волны и к снижению интенсивности поперечных возмущений. Механизм воздействия пористого покрытия на распространение фронта пламени представляет собой комбинированный эффект теплопереноса, массопереноса и газодинамического ослабления. Распространение быстрого горения в пористых средах изучалось в [2,3]. Состав горючей смеси и толщина пористого материала также могут значительно изменять параметры распространения пламени [4].

Целью настоящей работы было изучение динамики фронта пламени водородно-воздушной смеси и давления на ударной волне в канале с пористыми стенками, изучение распространения пламени в пористом материале и сравнение параметров детонации в каналах с твердыми стенками и двумя типами пористых материалов: пенополиуретан и стальная шерсть.

На рисунке приведена схема экспериментальной установки, представляющей собой детонационную трубку круглого сечения (длина 2000 мм, внутренний диаметр 20 мм), соединенную с измерительной секцией *4* прямоугольного сечения (длина 500 мм, внутреннее сечение 40х20 мм). Верхняя и нижняя поверхности секции покрывались пористым материалом *3,4* толщиной 10 мм каждая. Фотодиоды и пьезоэлектрические датчики давления использовались для регистрации ударной волны и фронта пламени. Детонационная волна формировалась перед измерительной секцией. Теневой прибор ИАБ-451 совместно с высокоскоростной камерой Videosprint использовался для регистрации фронта пламени и ударных волн. На рисунке также представлены фотографии распространения фронта пламени и ударной волны при расположении пенополиуретана пористостью 95%.





0 мкс

80 мкс

160 мкс

В результате выполнения цикла работ проведены оценки влияния пористости покрытия, толщины покрытия и материала на динамику фронта пламени и ударных волны. А также на возможность повторного реинициирования детонации.

Работа была выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант №14-50-00124.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Teodorczyk A., Lee J. H. S. Detonation attenuation by foams and wire meshes lining the walls. Shock Waves, 1995, 4 (4), 225-236.
2. Babkin V., Korzhavin A., Bunev V. Propagation of premixed gaseous explosion flames in porous media. Combustion and Flame, 1991, 87, 182-190.
3. Yan X., Yu J. Effect of aluminum silicate wool on the flame speed and explosion overpressure in a pipeline. Combustion, Explosion and Shock Waves, 2013, 49, 153-158.
4. Vasil'ev A. Near-limiting detonation in channels with porous walls. Combustion Explosion and Shock Waves, 1994, 30, 101-106.

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОГО ЦИЛИНДРА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ТЕЛООТДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗАЗОРЕ

М.М. Гончаров, А.Н. Кондрашов, И.О. Сбоев
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

Изучен процесс тепломассопереноса в системе коаксиальных цилиндров [1], [2] с неравномерным подогревом. Рассматривается влияние интенсивности нагрева и ориентации системы [3] относительно направления вектора ускорения свободного падения g на структуру течения, распределение температуры в слое жидкости и интенсивность теплоотдачи. Задача решается в двумерной постановке. Внешний цилиндр находится при температуре T_0 и играет роль холодильника. Внутренний цилиндр разделён на две области в вертикальном направлении: одна половина теплоизолированна, другая поддерживается при постоянной температуре $T_i > T_0$. Система находится в поле силы тяжести, причём вектор ускорения свободного падения g ортогонален оси цилиндров. Для имитации поворота внутреннего цилиндра, вектор g задаётся под некоторым углом α к вертикальной оси y. Размер зазора между цилиндрами, заполненного исследуемой жидкостью, определяется аспектным соотношением $A = R_o/R_i$.

Численное решение системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска выполняется при следующих значениях параметров: числе Релея $Ra \in [1 \cdot 10^2, 2 \cdot 10^6]$, числе Прандтля $\sigma = 7$ и углах $\alpha \in [0°,180°]$.

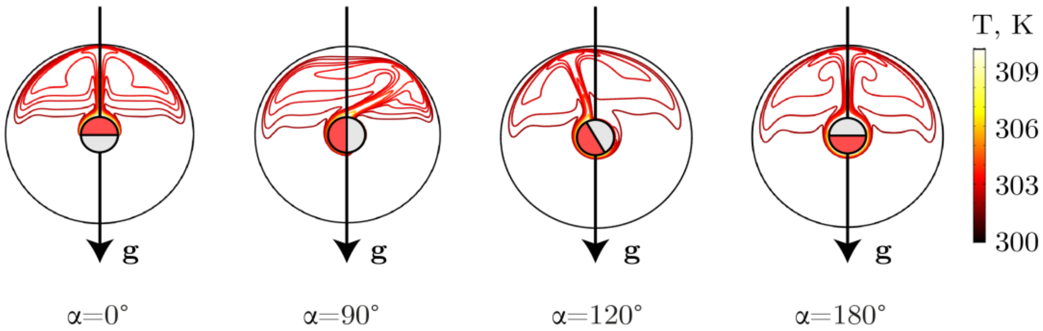


Рис.1: Изотермы, соответствующие термогравитационной конвекции при различных направлениях гравитационного поля $\alpha = 0°,90°,120°,150°,180°$, при $Ra = 10^6$

В ходе проведения численного эксперимента наблюдалось запаздывание оси теплового факела относительно направления вектора g. Получены зависимости локальных и глобальных значений числа Нуссельта от параметра Релея для различных положений источника тепла на поверхности внутреннего цилиндра. Показано, что изменение угла α от 0° до 90° влечёт уменьшение интенсивности теплоотдачи. Дальнейшее увеличение угла вплоть до α = 180° приводит к монотонному росту числа Нуссельта. Полученные результаты аппроксимированы степенным законом, связывающим эффективность теплоотдачи с интенсивностью нагрева и поворотом источника тепла относительно вектора ускорения свободного падения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Teertstra P, Yovanovich M.M.* Comprehensive review of natural convection in horizontal circular annuli // ASME-PUBLICATIONSHTD. — 1998. — Vol. 357. — P. 141–152.
2. *Шеремет М. А.* Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2010. — no. 2.
3. *Shareef A. J., Abed W. M., Najeeb A. A.*. Natural convection heat transfer in horizontal concentric annulus between outer cylinder and inner flat tube // AJES. — 2010. — Vol. 3, no. 2. — P. 31.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА

Ю.Н. Григорьев[1,2], И.В. Ершов[3,4]

[1] Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

[3] Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008 Новосибирск, Россия

[4] Новосибирский государственный аграрный университет, 630039 Новосибирск, Россия

Численно исследовано влияние температурных возмущений коэффициентов переноса на устойчивость двумерных возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта совершенного и колебательно возбужденного газов. В обоих случаях рассматривалась альтернатива, когда коэффициенты переноса либо принимались постоянными, либо зависящими от статической температуры потока. Для учета температурной зависимости сдвиговой вязкости использовалась модель Сазерленда. Показано, что “вязкая” стратификация с учетом возмущений коэффициентов переноса значительно повышает устойчивость течения по сравнению со случаем постоянной вязкости. В частности, критическое число Рейнольдса возрастает примерно в $3-6$ раз для $\eta_T \neq 0$ и в $1.5-2$ раз для $\eta_T = 0$ по сравнению с моделью постоянной вязкости, хотя соответствующие волновые числа увеличиваются в пределах 20 % для $\eta_T = 0$ и 30 % для $\eta_T \neq 0$. Вместе с тем простая модель постоянной вязкости сохраняет все характерные особенности развития вязких возмущений в модели Сазерленда. При учете температурной зависимости коэффициентов переноса диссипативный эффект возбуждения колебательной моды сохраняется. Соответствующее ему увеличение критического числа Рейнольдса для обеих моделей вязкости и условий $\eta_T = 0$ и $\eta_T \neq 0$ составляет около 12 %.

Ключевые слова: линейная устойчивость, формула Сазерленда, колебательная релаксация, акустические моды.

Плоское течение Куэтта широко используется в линейной теории устойчивости в качестве простой модели для исследования влияния различных факторов, таких как реология, физико-химические процессы, механические характеристики граничных поверхностей на устойчивость потока. В работах [1, 2] рассматривалась линейная устойчивость сверзвукового течения Куэтта совершенного газа при конечных числах Рейнольдса. Температурная

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00209а).

зависимость вязкости описывалась формулой Сазерленда, число Прандля принималось постоянным, объемная вязкость исключалась из рассмотрения с помощью соотношения Стокса. В [2], в частности, была изучена зависимость инкрементов нарастания и критических чисел Рейнольдса наиболее неустойчивых вязких мод от числа Маха потока. Эти исследования на современном этапе при тех же предположениях были продолжены в работе [3], где дополнительно к модели Сазерленда рассматривался случай постоянной вязкости. Основное внимание здесь было посвящено изучению промежуточного интегрального нарастания вязких возмущений на базе немодального энергетического подхода. В рамках классической (модальной) линейной теории сопоставление двух вязкостных моделей ограничилось в основном сравнением критических параметров течения наиболее неустойчивой вязкой моды для нескольких значений числа Маха. Было показано, что “вязкая” стратификация в несколько раз увеличивает критические числа Рейнольдса относительно соответствующих значений для случая постоянной вязкости.

В работах [4], где на основе линейной теории исследовалось влияние колебательного возбуждения на устойчивость сжимаемого течения Куэтта в невязком пределе, было зафиксировано заметное стабилизирующее воздействие колебательной релаксации на невязкие акустические моды. В работе [5] рассматривалась линейная устойчивость вязких возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно-возбужденного и совершенного газов с не зависящими от температуры коэффициентами переноса. Основной результат этой работы состоял в том, что колебательное возбуждение на уровне, который достижим, например, в нерасчетных струях или с помощью лазерной накачки, увеличивает устойчивость течения в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. При этом относительное увеличение критического числа Рейнольдса по сравнению с совершенным газом может достигать 12 %.

В связи с отмеченным в [3] чрезвычайно сильным влиянием “вязкой” стратификации на критические параметры течения возникает естественный вопрос, сохранится ли в этих условиях заметное стабилизирующее влияние колебательной релаксации. Кроме того, представляет самостоятельный интерес провести подробное сравнение характеристик линейной устойчивости течения Куэтта совершенного газа для двух моделей вязкости. Это позволит сделать заключение, насколько в данном случае содержательна более простая модель постоянной вязкости, одним из преимуществ которой является возможность использовать при линеаризации известное точное решение уравнений Навье — Стокса. Исследованию этих вопросов посвящена настоящая работа.

Уравнения движения и среднее течение. Рассматривается задача линейной устойчивости плоского течения Куэтта сжимаемого вязкого колебательно-возбужденного газа. В плоскости декартовых координат (x, y) поток ограничен двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Координата x ориентирована по направлению потока, соответственно координата y является нормалью к границам. Считается, что плоскость $y = 0$ покоится, а граница $y = h$ движется равномерно в собственной плоскости со скоростью U_0. Течение описывается в рамках модели двухтемпературной аэродинамики [6, 7], в которой в общем случае учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. Рассмотрение ограничивается молекулярной моделью двухатомных газов с одной колебательной степенью свободы.

В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны ширина канала h, скорость U_0, плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения на движущейся границе канала и образованные из них величины времени $t_0 = L/U_0$ и давления $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей обезразмеривались на величины η_0 и $\eta_{b,0}$, коэффициенты теплопроводности, обусловленные переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы молекул — на $\lambda_0 = \lambda_{t,0} + \lambda_{r,0}$, а диффузионным переносом колебательных квантов — на $\lambda_{v,0}$, которые соответствовали значениям коэффициентов переноса при температуре T_0.

В безразмерных переменных система уравнений имеет вид [8, 9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta(T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta(T) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right], \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + (\gamma - 1)\rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta(T) \frac{\partial T}{\partial x_i}\right] + \frac{\rho\,\gamma_v\,(T_v - T)}{\tau} +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2 \eta(T)}{2\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + 2\left(\alpha_1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2\right], \tag{3}$$

$$\gamma_v \rho\left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_v}{\partial x_j}\right) = \frac{\gamma\,\alpha_2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta(T) \frac{\partial T_v}{\partial x_i}\right] - \frac{\gamma_v \rho\,(T_v - T)}{\tau}, \tag{4}$$

$$\gamma \mathrm{M}^2 p = \rho T, \quad i = 1,\, 2, \quad j = 1,\, 2 \tag{5}$$

($x_1 = x$, $x_2 = y$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Коэффициенты и параметры, входящие в уравнения системы (1) — (5), определяются следующим образом. При учете температурной зависимости $\eta(T)$ коэффициента сдвиговой вязкости используется закон Сазерленда [10], температурная зависимость $\eta_b(T)$ коэффициента объемной вязкости описывается формулой $\eta_b(T) = \alpha_1\,\eta(T)$, где $\alpha_1 = \eta_{b,0}/\eta_0$, а η_0,

$\eta_{b,0}$ — значения сдвиговой и объемной вязкостей при температуре потока $T = T_0$. В [6] проведен анализ экспериментальных данных по объемной вязкости η_b, полученных с помощью измерений коэффициента поглощения ультразвука и электронно-оптических измерений ширины релаксационной зоны за ударными волнами. В результате было показано, что для двухатомных газов значения параметра α_1 лежат в диапазоне: $\alpha_1 = 0 - 2$.

Коэффициенты теплопроводности выражены через коэффициент сдвиговой вязкости $\eta(T)$ с помощью полуэмпирических соотношений Эйкена [11] следующим образом:

$$\lambda_t(T) = \frac{5}{2}\, c_{V,\,t}\, \eta(T), \quad \lambda_r(T) = \frac{6}{5}\, c_{V,\,r}\, \eta(T), \quad \lambda_v(T) = \frac{6}{5}\, c_{V,\,v}\, \eta(T), \tag{6}$$

где $c_{V,\,t}$, $c_{V,\,r}$, $c_{V,\,v}$ — удельные теплоемкости при постоянном объеме, обусловленные поступательным, вращательным и колебательным движением молекул, соответственно. Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической (поступательной) T и колебательной T_v температур газа и постоянны. В частности, принимается, что поступательные и вращательные степени свободы молекул находятся в состоянии квазиравновесия, и для их внутренней энергии справедливо равнораспределение по степеням свободы, а соответствующие теплоемкости определяются равенствами: $c_{V,\,t} = 3R/2$ и $c_{V,\,r} = R$, где R — газовая постоянная. В уравнении (3) для статической температуры T используется коэффициент теплопроводности, обусловленный суммарным переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы $\lambda = \lambda_t + \lambda_r$. Коэффициент $\gamma = c_p/c_V$ — показатель адиабаты, $c_V = c_{V,\,t} + c_{V,\,r}$, $c_p = c_V + R$ — соответственно удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении, где выделены составляющие, обусловленные поступательным и вращательным движением молекул. Коэффициент $\gamma_v = c_{V,\,v}/\left(c_{V,\,t} + c_{V,\,r}\right)$ характеризует степень неравновесности колебательной моды, τ — характерное время релаксации последней. Критерии $\mathrm{Re} = \rho_0 h U_0/\eta_0$, $\mathrm{M} = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ и $\mathrm{Pr} = \eta_0 c_V/\lambda_0$ — соответственно числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока. Параметр $\alpha_2 = \lambda_{v,\,0}/\left(\lambda_{t,\,0} + \lambda_{r,\,0}\right)$.

Используя соотношения Эйкена (6), параметр α_2 выражается в виде

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{v,\,0}}{\lambda_{t,\,0} + \lambda_{r,\,0}} = \frac{12\gamma_v\left(c_{V,\,t} + c_{V,\,r}\right)}{25 c_{V,\,t} + 12 c_{V,\,r}} = \frac{20\gamma_v}{33}.$$

В качестве среднего течения (несущего потока) выбрано равновесное стационарное решение, где $\gamma_v = 0$ и $T_v = T$. Предполагается, что гидродинамические переменные среднего течения зависят только от поперечной координаты y:

$$u_x = U_s(y), \quad u_y = 0, \quad T = T_s(y), \quad \rho = \rho_s(y) \tag{7}$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$U_s(0) = 0, \quad U_s(1) = 1, \quad T_s(1) = 1, \quad \left.\frac{dT_s}{dy}\right|_{y=0} = 0. \tag{8}$$

В силу геометрии профилей среднего течения (7) уравнение неразрывности (1) удовлетворяется автоматически. Уравнение Ландау — Теллера (4) также выполняется тождественно, поскольку для рассматриваемого равновесного решения имеем $\gamma_v = 0$, $T_v = T$. Из уравнений импульсов (2) и уравнения состояния (5) при выполнении граничных условий (8) следует, что $\rho_s T_s = 1$ и давление $p_s = 1/\left(\gamma \mathrm{M}^2\right)$. При этом из уравнений импульсов (2) и энергии (3) следует, что профили скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dy}\left(\eta_s \frac{dU_s}{dy}\right) = 0, \quad \frac{d}{dy}\left(\eta_s \frac{dT_s}{dy}\right) + (\gamma - 1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}^2 \eta_s \left(\frac{dU_s}{dy}\right)^2 = 0, \tag{9}$$

где $\eta_s = \eta(T_s)$.

Рассматривается модель вязкости, определяемая формулой Сазерленда [10]

$$\eta(T) = \eta(T_0)\left[\frac{T_0 + C}{T(y) + C}\right]\left[\frac{T(y)}{T_0}\right]^{3/2}.$$

Как известно, константа C практически не зависит температуры, а ее отношение к характерной температуре для двухатомных газов $C/T_0 \leq 0.4$ [10]. Для удобства сравнения с результатами работ [2, 3] в расчетах использовалась обезразмеренная формула

$$\eta(T) = \frac{1.5}{T(y) + 0.5}\, T^{3/2}(y). \tag{10}$$

Система (9) с граничными условиями (8) при $\gamma = 1.4$, $\mathrm{Pr} = 3/4$ и различных чисел Маха M интегрировалась численно на интервале $y = [0, 1]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$ методом стрельбы по схеме Рунге — Кутты четвертого порядка. Примеры зависимостей скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ для двух моделей вязкости представлены на рис. 1. Следует отметить, что даже при $\mathrm{M} = 5$ относительные среднеквадратичные отклонения профилей не превышают 2 %.

Линеаризованные уравнения малых возмущений. Запишем мгновенные значения гидродинамических переменных в уравнениях (1) — (5) в виде

$$u_x = U_s + u_x^*, \quad u_y = u_y^*, \quad \rho = \rho_s + \rho^*, \quad T = T_s + T^*, \quad T_v = T_s + T_v^*,$$

$$p = p_s + p^*, \quad \eta(T_s + T^*) = \eta(T_s) + \eta_{T,s}\, T^* = \eta_s + \eta^*, \quad \eta_{T,s} = \left.\frac{d\eta}{dT}\right|_{T=T_s},$$

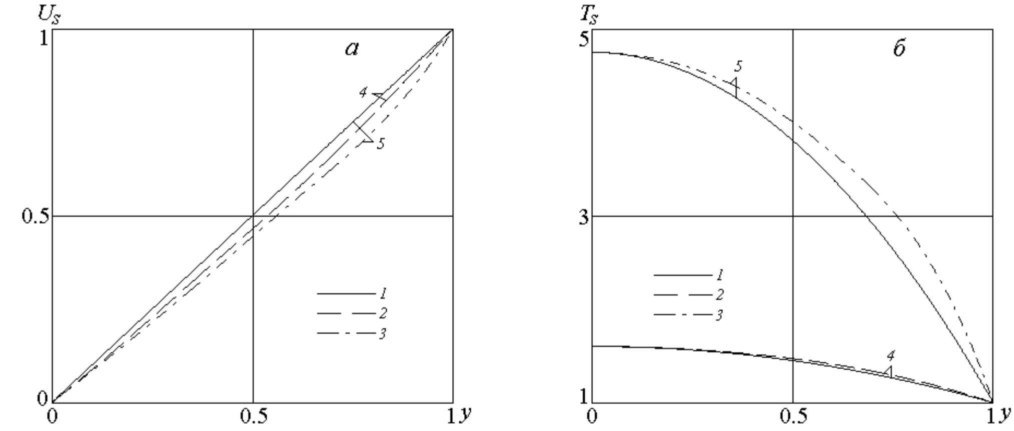


Рис. 1: Профили скорости $U_s(y)$ (*а*) и температуры $T_s(y)$ (*б*) среднего течения: модель постоянной вязкости (*1*), Сазерленда (*2* и *3*); $\mathrm{M} = 2$ (*4*), 5 (*5*).

где аддитивные добавки $f^* = f^*(x, y)$. Линеаризация системы в предположении малости величин u_x^*, u_y^*, ρ^*, T^*, T_v^*, p^*, η^*, дает систему уравнений для двумерных возмущений [8,9]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + U_s \frac{\partial \rho^*}{\partial x} + \rho_s \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial x} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y} \right) + u_y^* \frac{d\rho_s}{dy} = 0, \\
\rho_s \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial t} + U_s \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + u_y^* \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\eta_s}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^2} \right) + \\
+ \frac{\eta_s}{\mathrm{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\frac{\partial u_x^*}{\partial y} \frac{d\eta_s}{dy} + \frac{d\eta^*}{dy} \frac{dU_s}{dy} + \eta^* \frac{d^2 U_s}{dy^2} \right], \\
\rho_s \left(\frac{\partial u_y^*}{\partial t} + U_s \frac{\partial u_y^*}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\eta_s}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2} \right) + \frac{\eta_s}{\mathrm{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2} \right) + \\
+ \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial u_y^*}{\partial y} \right] \frac{d\eta_s}{dy}, \\
\rho_s \left(\frac{\partial T^*}{\partial t} + U_s \frac{\partial T^*}{\partial x} + u_y^* \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \gamma(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 p_s \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial x} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y} \right) = \qquad (11) \\
= \frac{\gamma \eta_s}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right) + \frac{2\gamma(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \eta_s}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x} \right) \frac{dU_s}{dy} + \frac{\gamma_v \rho_s (T_v^* - T^*)}{\tau} + \\
+ \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \left[\frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{d\eta_s}{dy} + \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \frac{dT_s}{dy} + \eta^* \frac{d^2 T_s}{dy^2} \right] + \frac{\gamma(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \eta^*}{\mathrm{Re}} \left(\frac{dU_s}{dy} \right)^2, \\
\gamma_v \rho_s \left(\frac{\partial T_v^*}{\partial t} + U_s \frac{\partial T_v^*}{\partial x} + u_y^* \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) = \frac{20 \eta_s}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T_v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_v^*}{\partial y^2} \right) - \frac{\gamma_v \rho_s (T_v^* - T^*)}{\tau} + \\
+ \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \left[\frac{\partial T_v^*}{\partial y} \frac{d\eta_s}{dy} + \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \frac{dT_s}{dy} + \eta^* \frac{d^2 T_s}{dy^2} \right], \\
\gamma \mathrm{M}^2 p^* = \rho_s T^* + \rho^* T_s, \quad \frac{d\eta^*}{dy} = \frac{dT^*}{dy} \eta_{T,s} + T^* \left. \frac{d\eta_{T,s}}{dT} \right|_{T=T_s} \frac{dT_s}{dy}.
\end{gathered}
$$

Принималось, что на границах канала при $y = 0$ и $y = 1$ все возмущения обращаются в нуль.

Рассматривается устойчивость периодических по продольной координате x возмущений в виде бегущих плоских волн

$$\boldsymbol{q}^*(x,\,y,\,t) = \boldsymbol{q}_0(y)\,\exp\left[i\alpha(x-ct)\right],$$

$$\boldsymbol{q}^*(x,\,y,\,t) = (u_x^*,\,u_y^*,\,\rho^*,\,T^*,\,T_v^*,\,p^*\,),\quad \boldsymbol{q}_0(y) = (u,\,\alpha v,\,\rho,\,\theta,\,\theta_v,\,p) \tag{12}$$

(α — волновое число вдоль периодической переменной x, $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость, i — мнимая единица). Подстановка (12) в уравнения (11) приводит к следующей системе уравнений для амплитуд возмущений [8, 9]:

$$\begin{gathered}
D\rho + \alpha\rho_s' v + \alpha\rho_s\sigma = 0,\\
\frac{\eta_s}{\mathrm{Re}}\triangle u - \rho_s Du - \alpha\rho_s v U_s' - i\alpha\varepsilon + \frac{\eta_{T,\,s}\,T_s'}{\mathrm{Re}}\,u\,' + \frac{(\eta_{T,\,s}\,U_s')'}{\mathrm{Re}}\,\theta + \frac{\eta_{T,\,s}\,U_s'}{\mathrm{Re}}\,\theta\,' = 0,\\
\frac{\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}}\triangle v - \alpha\rho_s Dv - \varepsilon' + \frac{\alpha\,\eta_{T,\,s}\,T_s'}{\mathrm{Re}}\,v' = 0,\\
\frac{\eta_s\gamma}{\mathrm{RePr}}\triangle\,\theta - \rho_s D\theta - \alpha\rho_s v T_s' - \alpha(\gamma-1)\sigma + \frac{2\gamma\,(\gamma-1)\,\eta_s\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}}\left(u\,' + i\alpha^2 v\right)U_s' +\\
+\frac{\gamma_v\rho_s}{\tau}\,(\theta_v - \theta) + \frac{2\gamma\,\eta_{T,\,s}\,T_s'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta\,' + \left[\frac{\gamma(\eta_{T,\,s}\,T_s')'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} + \frac{\gamma(\gamma-1)\,\eta_{T,\,s}\,\mathrm{M}^2\,U_s'^{\,2}}{\mathrm{Re}}\right]\theta = 0,\\
\frac{20}{33}\,\frac{\gamma\gamma_v\eta_s}{\mathrm{RePr}}\triangle\,\theta_v - \gamma_v\rho_s D\theta_v - \alpha\gamma_v\rho_s v T_s' - \frac{\gamma_v\rho_s}{\tau}(\theta_v - \theta) +\\
+\frac{20}{33}\,\frac{\gamma\gamma_v\eta_{T,\,s}\,T_s'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta_v' + \frac{20}{33}\,\frac{\gamma\gamma_v\eta_{T,\,s}\,T_s'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta' + \frac{20}{33}\,\frac{\gamma\gamma_v\,(\eta_{T,\,s}\,T_s')'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\theta = 0,\\
\gamma\mathrm{M}^2 p = \rho_s\theta + \rho T_s,\\
D = i\alpha(U_s - c),\quad \sigma = v' + iu,\quad \varepsilon = p - \frac{\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\sigma,\quad \triangle = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2.
\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь и далее штрихи у функций означают дифференцирование по переменной y. На стенках канала при $y = 0$ и $y = 1$ амплитудные функции принимают нулевые значения. Отметим, что для модели постоянной вязкости система (13) несколько упрощается [5].

Спектральная задача и метод ее решения. Система (13) вместе с однородными граничными условиями определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а числа Рейнольдса Re, Маха M и волновое число α служат параметрами. Для расчета спектра собственных значений $c = c_r + i\,c_i$ вязких мод спектральная задача (13) с однородными граничными условиями решалась численно в среде пакета Matlab. Рассматривались модели постоянной вязкости и вязкости, описываемой законом Сазерленда (10). Для оценки влияния температурного градиента вязкости $\eta_{T,\,s}$ на спектральные характеристики задачи (13) в расчетах исследовались варианты, когда $\eta_{T,\,s} = 0$ и $\eta_{T,\,s} \neq 0$. Использовался метод коллокаций [12,13]. Следует отметить, что в работах [1–3], посвященных исследованию линейной устойчивости течения Куэтта в невозбужденном совершенном газе, также применялся метод коллокаций, причем в [2, 3] использовался инструментарий Matlab.

В данном случае спектральная задача записывалась в матричном представлении:

$$A_1\boldsymbol{\varphi}'' + A_2\boldsymbol{\varphi}' + A_3\boldsymbol{\varphi} = cA_4\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi}\big|_{y=0} = \boldsymbol{\varphi}\big|_{y=1} = 0, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = (\rho,\, u,\, v,\, \theta,\, \theta_v)$, а матрицы A_k $(k = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ размером 5×5 имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\eta_s}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \dfrac{4}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\gamma\eta_s}{\mathrm{RePr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{20\gamma\gamma_v\eta_s}{33\mathrm{RePr}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_s & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \dfrac{i\alpha^2\eta_s}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & a_5 & 0 \\ -\dfrac{T_s}{\gamma\mathrm{M}^2} & \dfrac{i\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & \alpha\, a_2 & -\dfrac{\rho_s}{\gamma\mathrm{M}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\gamma\,(\gamma-1)\,\eta_s\mathrm{M}^2U_s'}{\mathrm{Re}} & -\alpha\,(\gamma-1) & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -iU_s & -i\rho_s & -\rho_s' & 0 & 0 \\ -\dfrac{i\alpha T_s}{\gamma\mathrm{M}^2} & -\alpha\, b_1 & -\alpha\rho_sU_s' & -\dfrac{i\alpha\rho_s}{\gamma\mathrm{M}^2} + \dfrac{(\eta_{T,\,s}\,U_s')'}{\mathrm{Re}} & 0 \\ -\dfrac{T_s'}{\gamma\mathrm{M}^2} & i\alpha\, b_5 & -\alpha^2\, b_2 & -\dfrac{\rho_s'}{\gamma\mathrm{M}^2} & 0 \\ 0 & -i\alpha\,(\gamma-1) & \alpha\, b_6 & -b_3 & \dfrac{\gamma_v\rho_s}{\tau} \\ 0 & 0 & -\alpha\gamma_v\rho_sT_s' & \gamma_v\, b_7 & -\gamma_v\, b_4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha\rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha^2\rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha\rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha\gamma_v\rho_s \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{\eta_{T,\,s}\,T'_s}{\mathrm{Re}}, \;\; a_2 = a_1\left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right), \;\; a_3 = \frac{2\gamma\, a_1}{\mathrm{Pr}}, \;\; a_4 = \frac{10\gamma_v a_3}{33},$$

$$a_5 = \frac{\eta_{T,\,s}\,U'_s}{\mathrm{Re}}, \;\; b_1 = i\rho_s U_s + \frac{\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right), \;\; b_2 = i\rho_s U_s + \frac{\alpha\eta_s}{\mathrm{Re}},$$

$$b_3 = i\alpha\rho_s U_s + \frac{\gamma_v\rho_s}{\tau} + \frac{\alpha^2\gamma\eta_s}{\mathrm{RePr}} - \frac{\gamma\, a'_1}{\mathrm{Pr}} - \gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\, a_5\, U'_s, \;\; b_4 = i\alpha\rho_s U_s + \frac{\rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma\eta_s\alpha^2}{33\mathrm{RePr}},$$

$$b_5 = a_1\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right), \;\; b_6 = \frac{2i\alpha\gamma\,(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\eta_s U'_s}{\mathrm{Re}} - \rho_s T'_s, \quad b_7 = \frac{\gamma_v\rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma_v\gamma\,(\eta_{T,\,s}\,T'_s)'}{33\mathrm{RePr}}.$$

В качестве узлов коллокации выбирались точки Гаусса — Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi\, n}{N}\right)\right], \quad n = 0,\, 1,\, \ldots,\, N,$$

в которых полином Чебышева N-й степени $T_N(y)$ имеет экстремумы на отрезке $y \in [0, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данной сетке матрицей коллокационных производных D^1_N размером $(N+1)\times(N+1)$ [12,13]:

$$D^1_{N,\,lj} = \begin{cases} (-1)^{l+j} s_l/[s_j(z_l - z_j)], & l \neq j, \\ -z_j/[2(1-z_j^2)], & 1 \leq l = j \leq N-1, \\ (2N^2+1)/6, & l = j = 0, \\ -(2N^2+1)/6, & l = j = N, \end{cases}$$

$$s_j = \begin{cases} 2, & j = 0,\, N, \\ 1, & j = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1. \end{cases}$$

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (14) к обобщенной матричной задаче на собственные значения (линейному спектральному матричному пучку) относительно спектрального параметра c:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} \big(G_{ij} - c\, F_{ij}\big) z_j = 0, \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 5N+4, \tag{15}$$

где вектор неизвестных $\boldsymbol{z}$ размерности $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\boldsymbol{z} = (\rho_0,\, \rho_1,\, \ldots,\, \rho_N,\, u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_N,\, v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_N,\, \theta_0,\, \theta_1,\, \ldots,\, \theta_N,\, \theta_{v,0},\, \theta_{v,1},\, \ldots,\, \theta_{v,\,N}).$$

Матрицы G, F размером $5(N+1)\times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A_1 \otimes D^2_N + A_2 \otimes D^1_N + A_3 \otimes I_N\,, \quad F = A_4 \otimes I_N,$$

где знак “$\otimes$” обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [14]; I_N — единичная матрица размером $(N+1)\times(N+1)$.

В дискретном представлении однородные граничные условия для уравнения (15) учитываются неявно через оператор D_N^1 и реализуются заменой матрицы D_N^1 на окаймленную матрицу размером $(N-1)\times(N-1)$. Последняя получается при выполнении условий

$$D^1_{0,j} = D^1_{N,j} = 0, \quad D^1_{i,0} = D^1_{i,N} = 0, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Для нахождения полного спектра собственных значений и соответствующих собственных функций обобщенной спектральной задачи (15) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [15], который позволяет единым ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений чисел Рейнольдса Re, Маха M, степени неравновесности колебательной энергии γ_v, времени колебательной релаксации τ и волнового числа α получался набор $N+1$ собственных значений $c = c_r + i\,c_i$.

Для проверки точности параллельно были проведены расчеты собственных значений c с помощью метода “стрельбы”. Для этого уравнения (13) заменялись нормальной системой уравнений первого порядка с однородными граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций ρ, u, v, θ, θ_v. Полученная таким образом система при фиксированных наборах параметров M, Re, Pr, α, α_1, γ_v, τ интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге — Кутты четвертого порядка на интервалах $y \in (0,\, 0.5)$ и $y \in (0.5,\, 1)$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Точкой “прицеливания” служила середина канала ($y = 0.5$). Значения c_r и c_i подбирались таким образом, чтобы вычисленные “слева” и “справа” в точке $y = 0.5$ значения функций ρ_r, u_r, v_r, θ_r, $\theta_{v,r}$ и ρ_i, u_i, v_i, θ_i, $\theta_{v,i}$ совпадали с точностью до 10^{-8}. Соответствующее такому совпадению значение c принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров M, Re, Pr, α, α_1, γ_v, τ. Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и “стрельбы” для моделей постоянной вязкости и вязкости, описываемой законом (10), показало, что различия в значениях $c = c_r + i\,c_i$, наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Это обеспечивает необходимую точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

Расчет нейтральных кривых $c_i(\alpha, \mathrm{Re}) = 0$ для n-ой вязкой моды возмущений производился следующим образом. Для фиксированных значений параметров α_1, γ_v, τ и числа Маха M вычислялись двумерные массивы инкрементов (декрементов) n-ой вязкой моды

$$\omega^n_{j\,k} = \omega^n\left(\alpha_j,\, \mathrm{Re}_k\right) = \alpha_j\, c^n_i\left(\alpha_j,\, \mathrm{Re}_k\right), \tag{16}$$

где одномерные массивы α_j, Re_k рассчитывались по формулам

$$\alpha_j = \alpha_0 + j\,\Delta\alpha, \quad \mathrm{Re}_k = \mathrm{Re}_0 + k\,\Delta\mathrm{Re}, \quad j = 0,\,1,\,\ldots,\,J, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,K.$$

Здесь $\Delta\alpha$, $\Delta\mathrm{Re}$ — шаги приращений по волновому числу и числу Рейнольдса, соответственно.

Массив (16) определяет поверхность $\omega\,(\alpha,\,\mathrm{Re})$ для n-ой вязкой моды возмущений. Координаты в множестве, определяющем геометрическое место точек данной линии уровня $\omega\,(\alpha,\,\mathrm{Re}) = C$ на плоскости $(\alpha,\,\mathrm{Re})$, находились в соответствии с неравенством

$$|\omega^n\,(\alpha_j,\,\mathrm{Re}_k) - C| \leq 10^{-8},$$

где C некоторое заданное числовое значение. При $C = 0$ получается нейтральная кривая $\omega\,(\alpha,\,\mathrm{Re}) = 0$ для n-ой вязкой моды.

Расчеты велись при следующих значениях параметров: $\gamma_v = 0 - 0.667$, $\tau = 10^{-2} - 10$, $\alpha_1 = 0 - 2$, $\alpha = 0 - 10$, $\mathrm{Re} = 10^4 - 10^8$, $\Delta\mathrm{Re} = 50$, $\Delta\alpha = 10^{-3}$, $\mathrm{M} = 0.5 - 25$, $\mathrm{Pr} = 3/4$, $\gamma = 7/5$. Число узлов коллокации в интервале $y \in (0,\,1)$ варьировалось в диапазоне от $N + 1 = 100$ до $N + 1 = 500$ и в большинстве расчетов принималось равным $N + 1 = 300$. Такой выбор определялся отмеченной в работах [2,3] чувствительностью собственных значений вязкой задачи к погрешностям вычислений.

Результаты расчетов. Параметрические расчеты спектральной задачи (15), выполненные как для модели постоянной вязкости, так и для модели вязкости, описываемой формулой (10), показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне $10^{-2} \leq \tau \leq 10$ слабо влияет на поведение спектров вязких возмущений. Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения времени $\tau = 1$.

Динамика картины спектра вязких возмущений на комплексной плоскости $(c_r,\,c_i)$, в частности, подмножества сильно затухающих вязких мод, асимптотически не связанных с невязкими модами [16], подробно изучена в [1,2]. В работе [5] для модели постоянной вязкости было показано, что все характерные особенности поведения этого подмножества в зависимости от параметров M, Re, α, γ_v, выделенные в [1,2], воспроизводятся как для совершенного квазиравновесного, так и для колебательно возбужденного газов. Вместе с тем поведение этой части спектра с точки зрения устойчивости не представляет интереса и в данной работе не рассматривается.

В расчетах исследовалось поведение семейства четных и нечетных акустических мод, имеющих асимптотическую связь с невязкими модами в пределе $\mathrm{Re} \to \infty$, в первую очередь, выделенных мод I и II с конечными пределами фазовой скорости $c_r(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

Следует заметить, что в отличие от сжимаемого пограничного слоя, где первая мода является обобщением волны Толлмина — Шлихтинга на сжимаемый случай, а вторая — акустической модой [17], здесь обе моды квалифицируются как акустические [18]. Анализ данных позволяет сделать вывод, что ни один из сравниваемых диссипативных эффектов, связанных с колебательным возбуждением, "вязкой" стратификацией, вариацией числа Рейнольдса практически не влияет на фазовые скорости распространения возмущений, рассчитанных в невязком приближении при $\mathrm{Re} \to \infty$. В частности, для обеих моделей вязкости при числе Маха $\mathrm{M} = 3$ кривые $c_r(\alpha)$ для мод I и II симметричны относительно линии $c_r = 0.5$, соответствующей положению критического слоя на оси канала. Вместе с тем стратификация не оказывает заметного влияния на нарушение симметрии относительно $c_r = 0.5$ при $\mathrm{M} = 5$, несмотря на большую, по сравнению с моделью постоянной вязкости, несимметрию температурного профиля $T_s(y)$.

Сравнение декрементов (инкрементов) $\omega_i(\alpha) = \alpha c_i$ мод I и II для двух моделей вязкости в совершенном газе представлено на Рис. 2. На графиках Рис. 2, *а* можно заметить, что дестабилизирующее влияние вязкости на устойчивую [4] в невязком пределе моду I при $\mathrm{M} = 3$ имеет место для обеих моделей. Влияние "вязкой" стратификации по сравнению со случаем постоянной вязкости ($\eta = \mathrm{const}$) [5] сводится к смещению зоны неустойчивости в сторону больших волновых чисел и небольшому снижению максимального инкремента. При этом отсутствие в уравнениях спектральной задачи (13) слагаемых пропорциональных производным по температуре коэффициента сдвиговой вязкости $\eta_{T,s}$ (случай $\eta_{T,s} = 0$) сопровождается смещением зоны неустойчивости в сторону меньших волновых чисел по сравнению со случаем, когда $\eta_{T,s} \neq 0$. Следует заметить, что такая вязкая дестабилизация

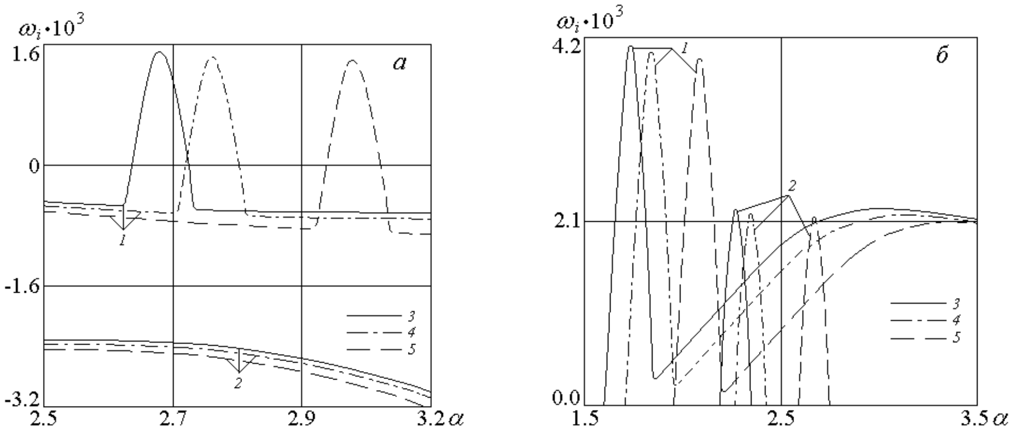


Рис. 2: Зависимости $\omega_i(\alpha)$ мод I (*а*) и II (*б*) для совершенного газа: $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^5$, M=3 (*1*), 5 (*2*); модель постоянной вязкости (*3*), Сазерленда и $\eta_{T,s} = 0$ (*4*), $\eta_{T,s} \neq 0$ (*5*).

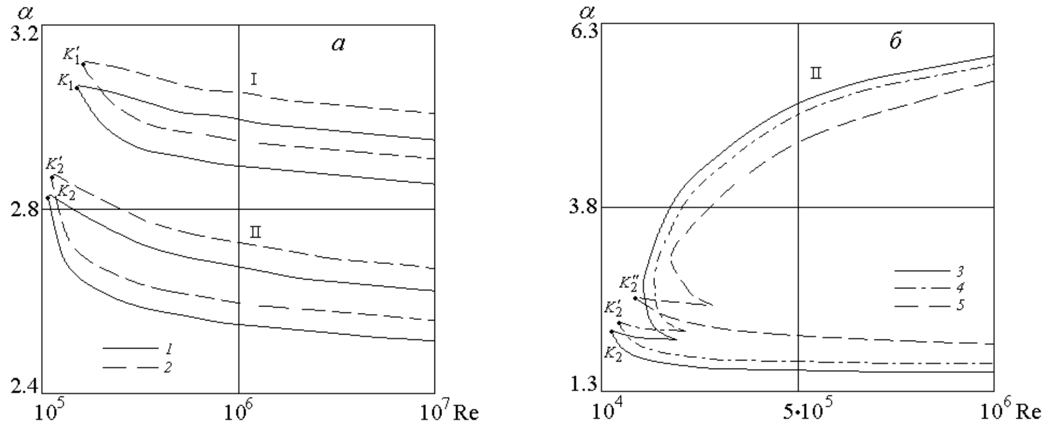


Рис. 3: Кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(\mathrm{Re}, \alpha) = 0$: *a* — модель Сазерленда и $\eta_{T,\,s} \neq 0$, M $= 3$, совершенный (*1*) и колебательно возбужденный (*2*) газы; *б* — совершенный газ, M $= 5$, модель постоянной вязкости (*3*), Сазерленда и $\eta_{T,\,s} = 0$ (*4*), $\eta_{T,\,s} \neq 0$ (*5*); I — мода I, II — мода II; K_1, K_1' — критические точки моды I, K_2, K_2', K_2'' — критические точки моды II.

моды I проявлется лишь в очень узком диапазоне чисел Маха M ≈ 3. При всех других числа Маха мода I остается устойчивой, и вязкость оказывает на нее исключительно дополнительное стабилизирующе воздействие. В частности, это подтверждается кривыми декрементов для M $= 5$.

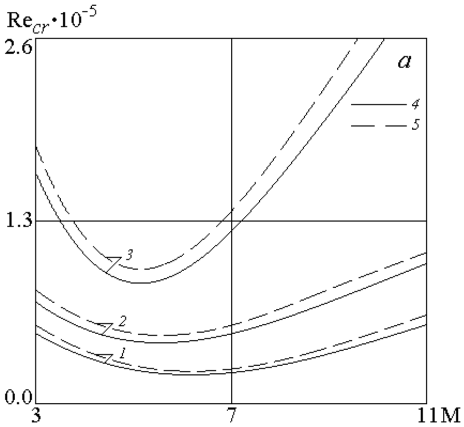
Как следует из Рис. 2, *б* стратификация также сдвигает кривые инкрементов моды II в сторону коротковолновых возмущений, незначительно снижая их максимумы. При этом поведение кривых $\omega_i(\alpha)$ моды II в случаях, когда $\eta_{T,\,s} = 0$ и $\eta_{T,\,s} \neq 0$, аналогично поведению кривых инкрементов $\omega_i(\alpha)$ моды I (см. Рис. 2, *a*). Вместе с тем для обеих моделей вблизи $\alpha \approx 1.5$ при M $= 5$ фиксируется резкое локальное возрастание инкремента ω_i, вызванное дополнительным дестабилизирующим воздействием вязкости. Этот эффект сохраняется и при дальнейшем продвижении в зону дальнего сверхзвука [2].

Расчеты показали, что в стратифицированном течении как при выполнении условия $\eta_{T,\,s} \neq 0$, так и $\eta_{T,\,s} = 0$ в основной части диапазона неустойчивости возбуждение колебательной моды приводит к уменьшению инкрементов нарастания наиболее неустойчивых акустических мод возмущений. При этом относительная величина подавления возмущений остается такой же, как и для модели постоянной вязкости [5].

Общее представление об устойчивости течения Куэтта в рассматриваемых случаях дают кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(\mathrm{Re}, \alpha) = 0$ на Рис. 3. Влияние возбуждения на стратифицированный поток при M $= 3$ для обеих мод I и II представлено графиками Рис. 3, *a*. Пунктирные кривые, отвечающие предельному возбуждению колебательной моды ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0.667$), можно рассматривать как сдвиг соответствующих сплошных кривых для совершенного газа ($\alpha_1 = \gamma_v = 0$) в область больших чисел Re и α без изменения формы, в частности, без деформации внутренней области неустойчивости. Точки K_1, K_1' соответствуют минимальным (критическим) числам Рейнольдса Re_{cr}, определяющим порог, ниже которого все возмущения затухают. Видно, что наиболее неустойчивой является мода II, у которой существенно меньше критические числа Рейнольдса и заметно шире внутренняя зона неустойчивости в направлении оси волновых чисел α. Можно констатировать, что учет зависимости вязкости от температуры никак не сказывается на диссипативном эффекте колебательного возбуждения, которое повышает устойчивость обеих мод, увеличивая критические числа Рейнольдса.

На Рис. 3, *б* сравниваются нейтральные кривые для совершенного газа и обеих моделей вязкости при числе Маха $\mathrm{M} = 5$. Анализ графиков позволяет заключить, что во всем диапазоне чисел Рейнольдса влияние стратификации по вязкости сводится в основном к усилению диссипативного эффекта, проявляясь в сужении зоны неустойчивости и существенном возрастании критического числа Рейнольдса, что видно из сравнения точек K_2, K_2', K_2''. При этом отсутствие в уравнениях спектральной задачи (13) слагаемых, пропорциональных производной $\eta_{T,\,s}$ сдвиговой вязкости по температуре (случай $\eta_{T,\,s} = 0$) приводит к расширению зоны неустойчивости и значительном падению критического числа Рейнольдса по сравнению со случаем, когда $\eta_{T,\,s} \neq 0$ (ср. точки K_2' и K_2''). Вместе с тем характерные особенности поведения кривых нейтральной устойчивости в дальней сверхзвуковой области при $\mathrm{M} \geq 5$ остаются неизменными для обеих моделей и двух случаев $\eta_{T,\,s} = 0$, $\eta_{T,\,s} \neq 0$. В частности, здесь область неустойчивости при возрастании числа Рейнольдса расширяется (ср. Рис. 3, *а*). Кроме того, в обоих случаях кривые имеют два минимума по числу Рейнольдса. При этом острый пик вблизи $\alpha \approx 1.5$ соответствует острому пику инкремента нарастания на графике Рис. 2, *б*, связанному с дополнительной вязкой неустойчивостью. Минимум на пологой части кривых, наоборот, определяется дисспативным влиянием вязкости на максимальный инкремент инерционной неустойчивости при $\mathrm{M} = 5$ [4].

Анализ [8, 9] вычисленных кривых нейтральной устойчивости $\omega_i(\mathrm{M},\,\alpha) = 0$ и изолиний фазовых скоростей $\omega_r(\mathrm{M},\,\alpha) = \mathrm{const}$ моды II во всем расчетном диапазоне чисел Маха для обеих моделей вязкости в совершенном газе показал независимость фазовых скоростей $c_r(\alpha)$ от диссипативных эффектов для всего расчетного диапазона чисел M. При этом кривые $\omega_i(\mathrm{M},\,\alpha) = 0$ показывают, что расхождение между моделями вязкости резко усиливается с возрастанием числа Рейнольдса, что прослеживается по максимальному размеру основной области неустойчивости вдоль оси M. В частности, если для модели Сазерленда этот раз-



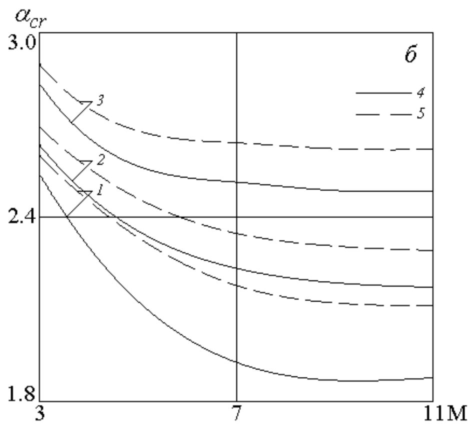


Рис. 4: Зависимости $\mathrm{Re}_{cr}(\mathrm{M})$ (*а*) и $\alpha_{cr}(\mathrm{M})$ (*б*): модель постоянной вязкости (*1*), Сазерленда и $\eta_{T,\,s} = 0$ (*2*), $\eta_{T,\,s} \neq 0$ (*3*); совершенный (*4*) и колебательно возбужденный (*5*) газы.

Таблица 1: Критические значения числа Рейнольдса Re_{cr} и соответствующие им значения волновых чисел α_{cr} для моды II.

M	$\alpha_1 = \gamma_v = 0$					
	$\eta = \mathrm{const}$		$\eta = \eta(T)$ (10)			
			$\eta_{T,\,s} = 0$		$\eta_{T,\,s} \neq 0$	
	$\mathrm{Re}_{cr} \cdot 10^{-5}$	α_{cr}	$\mathrm{Re}_{cr} \cdot 10^{-5}$	α_{cr}	$\mathrm{Re}_{cr} \cdot 10^{-5}$	α_{cr}
3	0.5006	2.5460	0.7256	2.6398	1.6487	2.8398
5	0.2383	2.1310	0.4414	2.3588	0.8572	2.5688
7	0.2164	1.9301	0.4933	2.2356	1.2183	2.5156
9	0.3508	1.8706	0.7188	2.1884	2.0511	2.4884
11	0.5575	1.8790	0.9925	2.1741	3.0817	2.4851
13	0.7524	1.8840	1.2584	2.1722	4.6155	2.4872
15	0.8515	1.8110	1.4665	2.1718	6.5585	2.4950
	$\alpha_1 = 2,\ \gamma_v = 0.667$					
3	0.5606	2.6039	0.8123	2.6981	1.8419	2.9025
5	0.2693	2.3377	0.4988	2.4638	0.9575	2.6831
7	0.2423	2.1801	0.5523	2.3493	1.3608	2.6435
9	0.3963	2.1226	0.8086	2.3077	2.2911	2.6241
11	0.6272	2.1144	1.1016	2.2937	3.4423	2.6218
13	0.8494	2.1119	1.3923	2.2930	5.1555	2.6255
15	0.9615	2.0660	1.6217	2.2975	7.3258	2.6394

мер остается неизменным, то в случае постоянной вязкости при $\mathrm{Re} = 10^6$ обе ветви кривой нейтральной устойчивости $\omega_i(\mathrm{M},\,\alpha) = 0$ выходят далеко за предел $\mathrm{M} = 25$ (см. [8, 9]).

Графики Рис. 4 дают возможность качественно оценить влияние модели вязкости, сжимаемости, учета температурного возмущения коэффициента вязкости и возбуждения колебательной моды на критические параметры моды II. Можно видеть, что во всем диапазоне чисел Маха для совершенного газа "вязкая" стратификация при условии $\eta_{T,\,s} \neq 0$ в несколько раз увеличивает значение Re_{cr} по сравнению со случаем постоянной вязкости, хотя длины волн наиболее неустойчивых возмущений (критические волновые числа) при переходе от модели к модели меняются незначительно. Из графиков Рис. 4, *a* следует, что предположение $\eta_{T,\,s} = 0$ приводит к значительному падению критического числа Рейнольдса по сравнению со случаем, когда $\eta_{T,\,s} \neq 0$. Для модели Сазерленда как при $\eta_{T,\,s} = 0$,так и для $\eta_{T,\,s} \neq 0$, возбуждение колебательной моды увеличивает критические числа Рейнольдса и критические волновые числа при всех числах Маха, хотя и существенно меньше, чем собственно стратификация. Видно, что немонотонность всех кривых в зависимости от числа Маха имеет одинаковый характер: в области умеренных сверхзвуковых значений $\mathrm{M} \leq 6$ с ростом сжимаемости понижается устойчивость течения, а ее дальнейшее увеличение, наоборот, стабилизирует поток.

Точные количественные оценки влияния каждого рассматриваемого фактора на критические числа Рейнольдса Re_{cr} и критические волновые числа α_{cr} моды II можно извлечь из приведенной Табл. 1, в которой представлены значения Re_{cr} и α_{cr} моды II для совершенного ($\alpha_1 = \gamma_v = 0$) и колебательно возбужденного ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_v = 0.667$) газов. В частности, учет температурной зависимости вязкости по модели Сазерленда (10) при выполнении условия $\eta_{T,\,s} \neq 0$ для $3 \leq \mathrm{M} \leq 15$ увеличивает Re_{cr} от трех до шести раз, а при $\eta_{T,\,s} = 0$ — от полутора до двух раз по сравнению со значениями Re_{cr}, полученными для модели постоянной вязкости. При этом относительное возрастание чисел Re_{cr} при возбуждении колебательной моды для обеих моделей вязкости и обоих условий $\eta_{T,\,s} \neq 0$, $\eta_{T,\,s} = 0$ в модели Сазерленда практически совпадает и составляет $10 - 12$ %. Критические волновые числа α_{cr} возрастают в пределах 20 % для $\eta_{T,\,s} = 0$ и 30 % для $\eta_{T,\,s} \neq 0$.

Заключение. Численное исследование устойчивости двумерных возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта для двух моделей вязкости и условий $\eta_{T,\,s} \neq 0$, $\eta_{T,\,s} = 0$ в совершенном и колебательно-возбужденном газах позволяет сделать следующие выводы.

"Вязкая" стратификация совершенного газа в модели Сазерленда (10) как при учете температурного возмущения коэффициета вязкости ($\eta_{T,\,s} \neq 0$) в уравнениях спектральной задачи (13), так и без его учета ($\eta_{T,s} = 0$) существенно усиливает стабилизацию течения. В частности, в диапазоне чисел Маха $3 \leq \mathrm{M} \leq 15$ критическое число Рейнольдса моды II, остающейся наиболее неустойчивой при всех числах Маха $\mathrm{M} \geq 3$, возрастает примерно в $3 - 6$ раз для $\eta_{T,s} \neq 0$ и в $1.5 - 2$ раз для $\eta_{T,s} = 0$ по сравнению с моделью постоянной вязкости, хотя соответствующие волновые числа α увеличиваются в пределах 20 % для $\eta_{T,s} = 0$ и 30 % для $\eta_{T,s} \neq 0$ (см. Табл. 1). При этом относительное уменьшение инкрементов нарастания вязких мод возмущений I и II при колебательном возбуждении практически одинаково для обеих моделей вязкости и условий $\eta_{T,s} \neq 0$, $\eta_{T,s} = 0$, а относительное увеличение критического числа Рейнольдса во всех рассматриваемых случаях лежит в пределах 12 % (см. Табл. 1).

Следует также отметить, что более простая модель постоянной вязкости на качественном уровне полностью воспроизводит все характерные особенности развития вязких возмущений акустических мод I и II в совершенном газе с учетом модели Сазерленда, а именно: дестабилизацию устойчивой в невязком пределе моды I в узком диапазоне волновых чисел α в окрестности $\mathrm{M} \approx 3$; существенное увеличение инкремента нарастания моды II по сравнению с невязким пределом при $\alpha \approx 1.5$ для сверхзвукового диапазона $5 \leq \mathrm{M} \leq 15$; характерное поведение кривых нейтральной устойчивости в координатах (α, Re) при $5 \leq \mathrm{M} \leq 15$; немонотонную зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от числа Маха с незначительным сдвигом минимума в точку $\mathrm{M} \approx 6$.

Список литературы

[1] **Duck, P.W., Erlebacher, G., Hussaini, M.Y.** On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P. 131–165.

[2] **Hu, S., Zhong, X.** Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, No. 3. P. 709–729.

[3] **Malik, M., Dey, J., Alam, M.** Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, No. 3. P. 036322.

[4] **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // Прикл. мех. и техн. физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 57–73.

Grigor'ev, Yu.N., Ershov, I.V. Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 1. Inviscid problem // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. Vol. 55, No. 2. P. 258–269.

[5] **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 2. Вязкая задача // Прикл. мех. и техн. физика. 2016. Т. 57, № 2. С. 64–75.

Grigor'ev, Yu.N., Ershov, I.V. Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 2. Viscous problem // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2016. Vol. 57, No. 2. P. 247-257.

[6] **Grigoryev, Yu.N., Ershov, I.V.** Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Cham: Springer International Publishing, 2017. 233 p.

[7] **Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.** Stability investigations of relaxing molecular gas flows. Results and perspectives // AIP Conf. Proc. 2017. Vol. 1893. P. 020013.

[8] **Grigor'ev, Yu.N., Ershov, I.V.** Linear stability of Couette flow of vibrationally non-equilibrium gas // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1770. P. 030043.

[9] **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость сверхзвукового течения Куэтта молекулярного газа в условиях вязкой стратификации и возбуждения колебательной моды // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 11–27.

Grigor'ev, Yu.N., Ershov, I.V. Linear stability of supersonic Couette flow of a molecular gas under the conditions of viscous stratification and excitation of the vibrational mode // Fluid Dynamics. 2017. Vol. 52, No. 1. P. 9-24.

[10] **Кэй Дж., Лэби Т.** Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962. 248 с.

Kaye, G.W., Laby, T.H. Tables of physical and chemical constants. London: Longmans, Green & Co. 1958. 248 p.

[11] **Ферцигер Дж., Капер Г. К.** Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 555 с.

Ferziger, J.H., Kaper, H.G. Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1972. 550 p.

[12] Spectral methods in fluid dynamics: Springer ser. in comput. phys. / C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 568 p.

[13] **Trefethen, L.N.** Spectral methods in Matlab. Philadelphia: Society for Industrial and Appllied Mathematics, 2000. 180 p.

[14] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 720 с.
Korn, G.A., Korn, T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1961. 943 p.

[15] **Moler, C.B., Stewart, G.W.** An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, No. 2. P. 241–256.

[16] **Morawetz, C.S.** The eigenvalues of some stability problems involving viscosity // J. Rat. Mech. Anal. 1952. Vol. 1. P. 79–603.

[17] **Гапонов С.А., Маслов А.А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. 144 с.
Gaponov, S.A., Maslov, A.A. Development of perturbations in compressible flows. Novosibirsk: Nauka, 1980. 144 p. (In Russ.)

[18] **Mack, L.M.** On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows. Part I: Two-dimensional waves // Theor. Comput. Fluid Dynamics. 1990. Vol. 2. P. 97–123.

ПОПЕРЕЧНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА, СИЛЬНО ЗАГРОМОЖДАЮЩЕГО ПОТОК ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова, Я.А. Дынников, П.Р. Андронов
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

В начале 2000-х годов в НИИ механики МГУ под руководством профессора В.П. Карликова был проведён цикл экспериментальных исследований обтекания в каналах тел, которые существенно загромождают поток жидкости и обладают свободой перемещения поперёк канала [1–3]. В частности, исследовались поперечные автоколебания цилиндра с соударением о стенки вертикального плоского канала (рис.1) и найдена эмпирическая зависимость [3]:

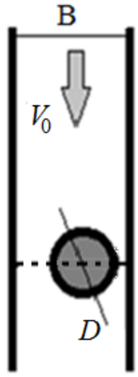


Рис. 1

$$\mathrm{Sh} = \left(\frac{B-D}{D}\right)^{-1}\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)^{-0.1}\left(0.4+\frac{2100}{\mathrm{Re}}\right) \tag{1}$$

$(B\text{-}D)/D = \delta = 0.11–0.31$

$\rho_c/\rho = \eta = 1.29–8.2$

$\mathrm{Re} = (1.5–7.2)\cdot 10^4$

где $\mathrm{Sh} = f\,D/V_0$ – безразмерная частота автоколебаний (число Струхаля), δ – относительный максимальный зазор между цилиндром и стенками канала, η – отношение средней плотности цилиндра к плотности жидкости, $\mathrm{Re} = V_0\,D/\nu$ – число Рейнольдса, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости. Количественных данных о величине коэффициента восстановления скорости цилиндра при соударении со стенками канала не приводилось. Дополнительно измерялось среднее за период значение продольной составляющей гидродинамической силы, действующей на цилиндр в процессе его автоколебаний (по сути – силы реакции со стороны связи, удерживающей цилиндр в заданном сечении канала). Вычисленный по этому среднему значению коэффициент сопротивления $c_x = F_x/(0.5\rho V_0^2)$ приближенно подчиняется схожей с (1) зависимости [3]

$$c_x = \delta^{-1}\,\eta^{-0.1}\,(9.1+33100/\mathrm{Re}) \tag{2}$$

Известны примеры [4, 5] математического моделирования автоколебаний рассматриваемого типа на основе оригинальных феноменологических моделей для гидродинамических сил, действующих на колеблющийся цилиндр в канале.

В работе [4] соударение цилиндра со стенками канала предполагается абсолютно неупругим. Модель гидродинамических сил основана на квазистационарных схемах обтекания цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью со срывом струй и образованием донной изобарической области. Для каждого смещения цилиндра относительно стенок канала гидродинамическая сила вычисляется интегрированием распределений давления из приближенного решения стационарной задачи о струйном обтекании цилиндра в канале. При этом внешними параметрами модели являются априорно задаваемые положения двух точек отрыва на поверхности цилиндра в зависимости от его поперечных смещений относительно стенок канала, по сути – две неизвестные функции.

В работе [5] допускаются произвольные значения коэффициента восстановления скорости цилиндра при соударении со стенкой канала. Модель нестационарных гидродинамических сил учитывает присоединенную массу цилиндра в канале и силу Жуковского при безотрывном циркуляционном обтекании цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью. Дополнительно используются предположения о скачкообразном изменении знака циркуляции скорости жидкости на контуре цилиндра в моменты его соударения со стенками канала и о последующем затухании этой циркуляции по мере движения цилиндра к противоположной стенке канала. Для замыкания задачи задается некоторый постоянный коэффициент силы гидродинамического сопротивления поперечному перемещению цилиндра. Предложенная модель содержит два внешних параметра – коэффициент восстановления при соударении и коэффициент сопротивления поперечному перемещению цилиндра в канале.

С помощью подбора подходящих значений внешних параметров, приближенные теории [4, 5] позволяют рассчитать частоту автоколебаний цилиндра в частичном согласии с эмпирической зависимостью (1). Однако всех свойств действительного течения вязкой жидкости в канале с колеблющимся цилиндром эти теории не описывают. Не было получено и соответствующих экспериментальных данных, поскольку идентификация параметров нестационарного движения жидкости в канале около колеблющегося цилиндра представляет большие затруднения. Для исследования структуры нестационарного течения взаимодействия требуется детальное численное моделирование явления автоколебаний жидкости и цилиндра в канале. Однако удачных попыток численного решения данной задачи до настоящего времени известно не было. Основные трудности постановки адекватного вычислительного эксперимента обусловлены тем, что:

- геометрия области течения существенно изменяется во времени, причем в моменты касания цилиндра со стенкой канала изменяется связность этой области;
- в каждый момент времени требуется строить решение с согласованием граничных условий для жидкости на поверхности цилиндра с учетом неизвестной в этот момент его скорости;
- процесс соударения твёрдых тел в жидкости представляет собой отдельную малоизученную проблему моделирования.

В данной работе математическая задача о поперечных автоколебаниях цилиндра в потоке вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале решается в полной сопряжённой постановке, при которой сплошная среда и подвижное твёрдое тело описываются как единая динамическая система без расщепления на последовательные динамическую и гидродинамическую составляющие. Это позволило преодолеть вышеперечисленные трудности моделирования в данной задаче. Расчёты выполнены с помощью авторского программного кода, основанного на бессеточном численном методе решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса в лагранжевых координатах [6].

Постановка задачи

Плоский горизонтальный канал конечной длины погружен в затопленное неограниченное пространство покоящейся вязкой несжимаемой жидкости. Левый торец канала A_1 является глухим, правый A_2 полностью открыт, рис.2. В средней части канала расположен цилиндр, имеющий одну степень свободы поперек канала. Сила тяжести отсутствует. В начальный момент ось цилиндра находится в плоскости симметрии канала. Движение возникает за счет включения источника постоянного расхода той же жидкости, расположенного внутри канала около скругленного глухого торца A_1. Жидкость свободно истекает из канала через сечение A_2 в окружающее затопленное пространство. Под действием напора жидкости цилиндр может свободно перемещаться поперек канала вплоть до столкновений с его стенками.

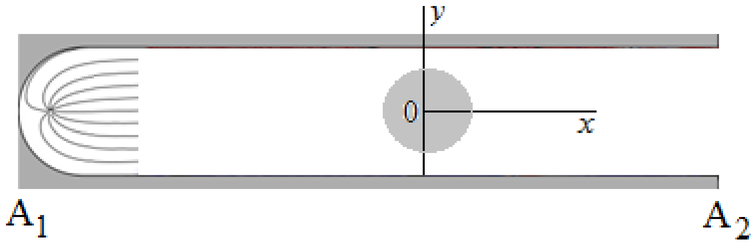


Рис. 2

Предполагается, что при столкновении время контакта бесконечно мало и в момент касания со стенкой цилиндр мгновенно получает результирующий контактный импульс $\mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$, равный сумме импульса $\mathbf{P}_1$, необходимого для остановки цилиндра с учетом его взаимодействия с жидкостью, и импульса $\mathbf{P}_2= k\,\mathbf{P}_1$, где k – физическая константа, имеющая смысл коэффициента восстановления скорости отскока цилиндра при соударении со стенкой канала в вакууме. В этот же самый момент происходит мгновенная передача части полученного цилиндром импульса в жидкость – своеобразный удар цилиндра по жидкости. После чего начинается плавное перемещение цилиндра к противоположной стенке под действием только гидродинамической силы. Коэффициент восстановления k – это единственный внешний параметр задачи, учитывающий свойства материала и формы соударяющихся твердых тел. Подобная модель соударения твердых тел в жидкости была предложена и получила экспериментальное подтверждение в работе [7].

Течение жидкости описывается нестационарными двумерными уравнениями Навье-Стокса и неразрывности. На поверхности твердых тел выполняются граничные условия прилипания[1], а в бесконечности – условия затухания всех возмущений. Цилиндр свободно движется под действием поперечной составляющей гидродинамической силы и результирующих контактных импульсов от боковых стенок канала в моменты столкновений.

Метод решения

Двумерные уравнения Навье-Стокса после применения оператора ротор записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t}=\nabla\times\left(\mathbf{V}_\Sigma\times\mathbf{\Omega}\right),\quad \mathbf{\Omega}=\nabla\times\mathbf{V},\quad \mathbf{V}_\Sigma=\mathbf{V}-\nu\frac{\nabla\Omega}{\Omega},$$

где $\mathbf{V}$ – скорость жидкости, $\mathbf{\Omega}=\mathbf{e}_z\Omega$ – вектор завихренности. По известному распределению завихренности скорость жидкости вычисляется с помощью обобщенной формулы Био-Савара

[1] Возможно технологическое упрощение, при котором на внешних сторонах канала ставится только условие непротекания.

$$\mathbf{V}(\mathbf{R})=\int_S \Omega(\mathbf{r})\mathbf{e}_z\times\mathbf{K}(\mathbf{R},\mathbf{r})ds+\int_C(\mathbf{V}_c\times\mathbf{n})\times\mathbf{K}dl-\int_C\mathbf{K}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_c)dl+\mathbf{V}_\infty,$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{R},\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{(\mathbf{R}-\mathbf{r})^2}$$

При такой форме записи очевидна возможность интерпретировать скаляр Ω как плотность некоторой материальной субстанции, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ и представлять вихревые области малыми элементами конечного размера (в терминологии метода ВВД – доменами [8]), которые движутся со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$.

В дискретном представлении интеграл по пространству S заменяется суммированием по доменам, а интегралы по контурам C твердых тел – суммами по отрезкам дискретизации этих контуров. При этом у каждого домена сохраняется циркуляция γ_j вектора скорости жидкости, равная интегралу $\int_{S_j}\Omega\, ds$ по площади домена. Граничные условия прилипания на контурах обтекаемых тел обеспечиваются генерацией новых вихревых доменов с циркуляцией γ_{new}, представляющих поток завихренности с этих контуров. Важнейшим элементом метода ВВД является использование интегральных представлений гидродинамических сил и моментов через потоки завихренности с границ тел (в дискретном представлении – через новые циркуляции γ_{new}). Принципиально важно, что эти потоки входят в указанные интегральные представления гидродинамических нагрузок линейно. Помимо гидродинамических сил на тела действуют реакции связей. Все перечисленные величины являются неизвестными и должны удовлетворять условиям непротекания жидкости через отрезки контуров тел с учетом неизвестной скорости самих отрезков на каждом временном шаге. В результате получается замкнутая система N_Σ линейных алгебраических уравнений, составленная из граничных условий, уравнений динамики тел, выражений гидродинамических сил и уравнений связей. В общем случае порядок системы $N_\Sigma = \sum_{n=1}^{N_b} N^{(n)} + 9N_b$, где $N^{(n)}$ – количество отрезков дискретизации на n-м контуре, N_b – количество тел. Сведение задачи к решению указанной расширенной системы СЛАУ представляет собой безытерационный способ решения сопряженных задач динамики и гидродинамики. Соответствующий обобщенный алгоритм реализован в виде авторских программных кодов [9, 10], использованных также и в настоящей работе.

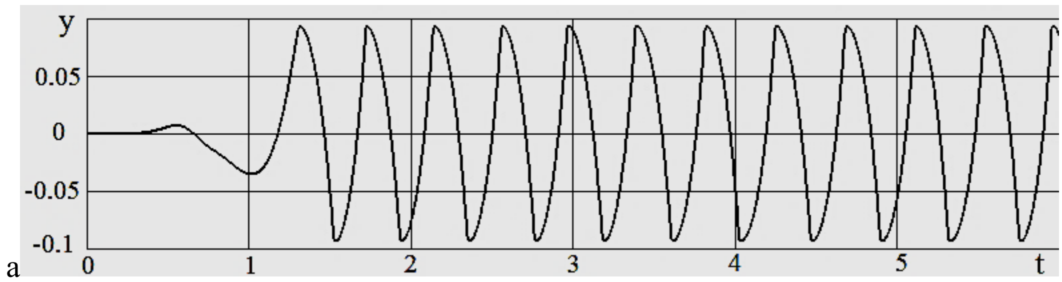
Решение расширенной системы СЛАУ строится в последовательные моменты времени t с шагом Δt. На каждом шаге находятся одномоментные значения скорости цилиндра и параметров всех доменов, определяющих поле скорости во всем пространстве с обеспечением выполнения граничных условий на поверхностях цилиндра и стенок канала, а также все действующие на цилиндр силы со стороны жидкости и наложенной связи. Важно подчеркнуть, что для каждого момента времени мы получаем согласованные значения скорости цилиндра и потоков завихренности, удовлетворяющие граничным условиям. При этом система не вырождается даже при стремлении относительной плотности цилиндра к нулю, что является следствием учета инерционности жидкости в упомянутых выше интегральных представлениях для гидродинамических нагрузок [6, 8]. В частном случае модели идеальной жидкости инерционность среды проявляется лишь в виде присоединенной массы цилиндра [5].

Шаг по времени Δt принимается постоянным до тех пор, пока цилиндр не достигает стенок канала. В противном случае, вычисляется дробный шаг $(\Delta t)^*$, при котором цилиндр в точности соприкасается со стенкой канала в момент $t+(\Delta t)^*-0$. Решая для этого момента расширенную систему СЛАУ, находим импульсы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, характеризующие результат взаимодействия цилиндра со стенкой. Затем для момента времени $t+(\Delta t)^*+0$ повторно строим решение расширенной СЛАУ и находим результирующую скорость отскока цилиндра в жидкости. Тем самым учитывается рассеивание в жидкость доли импульса $\mathbf{P}_2$, полученного от стенки при внезапном изменении направления и величины скорости цилиндра при отскоке. Затем расчет движения цилиндра возобновляется прежним порядком с постоянным шагом Δt вплоть до очередного соударения.

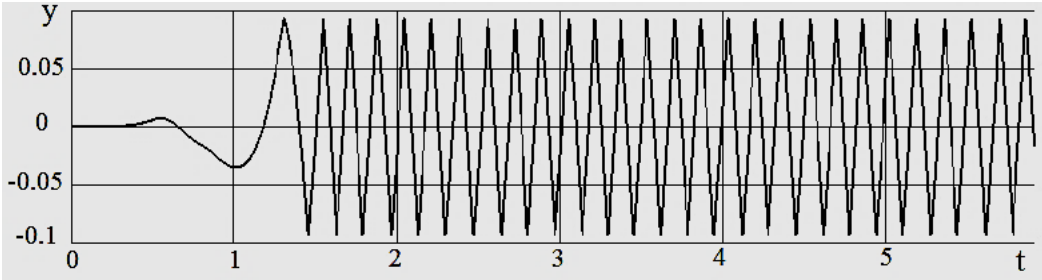
Результаты расчетов

Далее всюду используются безразмерные величины. В качестве характерных масштабов длины и скорости взяты ширина канала B и средняя скорость потока в канале $V_0 = G/B$, где G – удельный объемный расход плоского источника. Время нормировано на B/V_0, удельная гидродинамическая сила – на $\rho V_0^2 B$, где ρ – плотность жидкости, $\eta = \rho_c/\rho$ – относительная средняя плотность цилиндра. Параметр $\delta = (B\text{-}D)/D$, характеризующий в экспериментах [1–3] относительный максимальный зазор между цилиндром и стенкой канала, определяет безразмерную амплитуду $a = (B\text{-}D)/2B$ автоколебаний цилиндра по формуле $a = 0.5\,\delta\,(1+\delta)^{-1}$.

На рис. 3 показаны результаты расчета процессов развития автоколебаний цилиндра из начального состояния до установления регулярных автоколебаний с соударениями для двух предельных значений коэффициента восстановления: $k = 0$ – абсолютно неупругий удар и $k = 1$ – абсолютно упругий. По осям на рис. 3 отложено безразмерное время t и безразмерная ордината y оси цилиндра. До момента первого соударения процессы развиваются одинаково (ср. рис. 3,а и рис. 3,б). Затем устанавливаются автоколебания с одинаковой амплитудой $a = 0.093$, но с существенно различающимися частотами: Sh = 1.93 при $k = 0$ и Sh = 4.89 при $k = 1$. Экспериментальное число Струхаля [3] по формуле (1) для значений η, δ, Re на рис. 3 равно Sh = 2.57, т.е. занимает промежуточное положение между указанными предельными расчетными значениями. Отсюда следует важный вывод (согласующийся с моделью в [5]) о существенном влиянии коэффициента восстановления k на частоту автоколебаний.



а) $k = 0$



б) $k = 1$

Рис. 3 Колебания положений оси цилиндра при $\eta = 1.16$, $\delta = 0.23$, Re = 17000 для предельных значений коэффициента восстановления k

Далее детально рассматривается нестационарное течение вязкой жидкости в канале с колеблющимся цилиндром для следующего фиксированного набора определяющих параметров

$$\eta = 6; \quad \delta = 0.23; \quad \mathrm{Re} = 17000; \quad k = 0.5 \tag{3}$$

где значение свободного параметр k выбрано из условия совпадения расчетного числа Струхаля с эмпирическим значением Sh = 2.18 по формуле (1). На рис. 4 построен фазовый портрет автоколебаний. Также как для вариантов на рис. 3, выход на предельный цикл происходит практически с момента третьего касания цилиндра стенок канала. Средняя за полупериод скорость перемещения цилиндра поперек канала близка к средней скорости V_0 потока жидкости в канале.

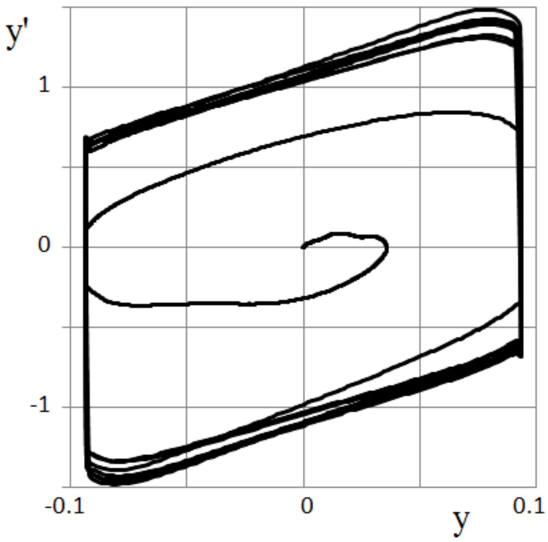


Рис. 4 Фазовый портрет автоколебаний цилиндра в канале с параметрами (3)

На рис. 5 представлены картины мгновенных линий тока и полей завихренности для последовательных моментов безразмерного времени t в пределах одного периода колебаний:

a) цилиндр занимает срединное положение и движется верх;
b) произошло соударение с верхней стенкой канала и цилиндр начал движение вниз;
c) цилиндр занимает срединное положение, продолжая движение вниз;
d) картина течения непосредственно перед ударом цилиндра о нижнюю стенку;

e) картина течения после удара, цилиндр движется вверх;
f) цилиндр занимает срединное положение, продолжая движение верх.

Кривые на рис.5 построены как мгновенные изолинии функции тока с постоянным шагом, т.е. между каждой парой соседних линий тока мгновенный расход жидкости одинаков. В областях красного цвета сосредоточена положительная завихренность, в областях синего – отрицательная.

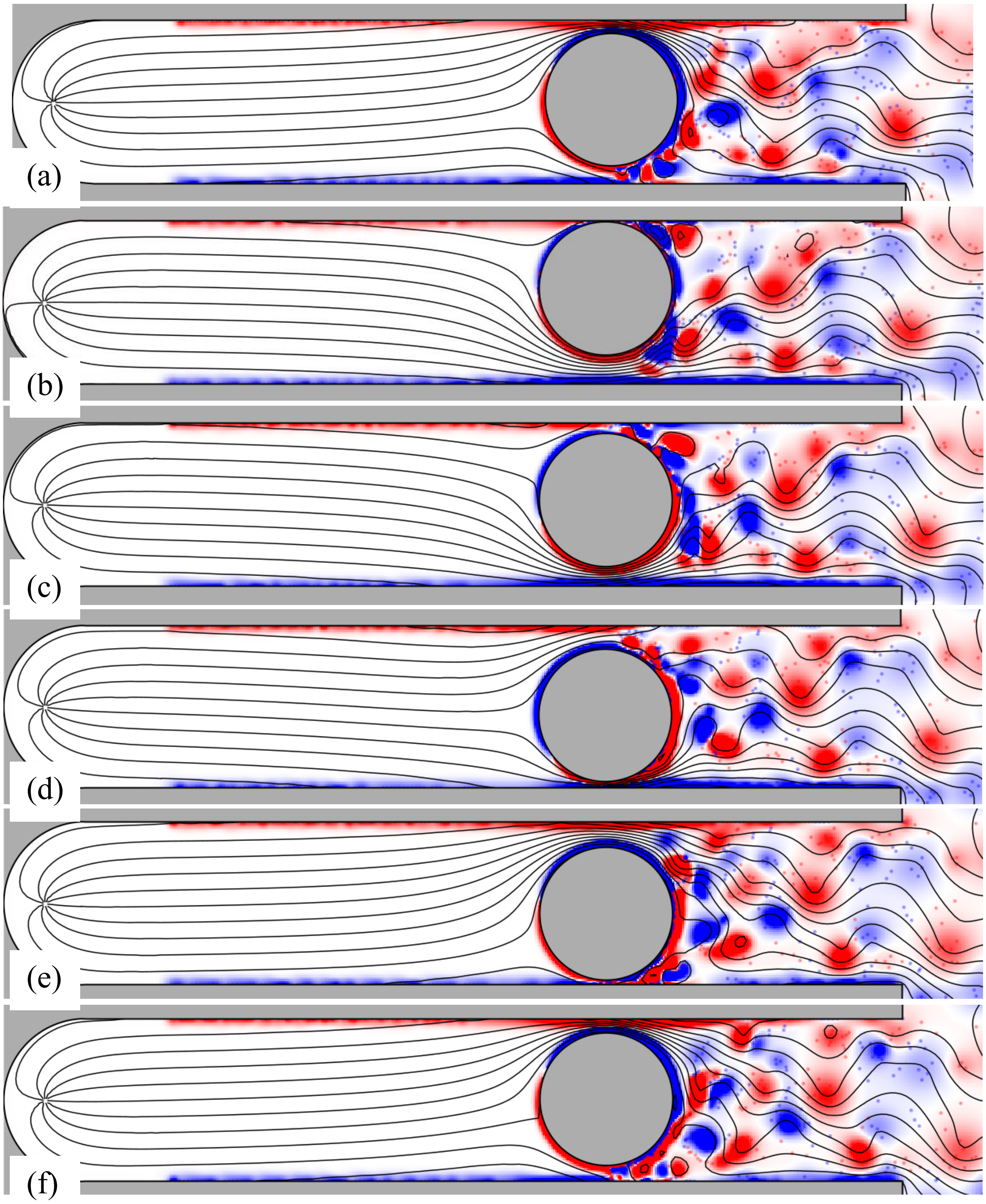
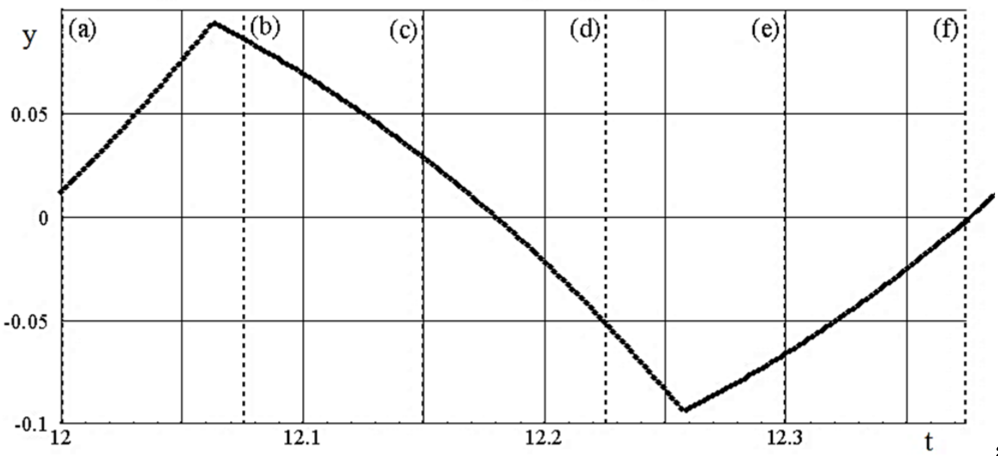
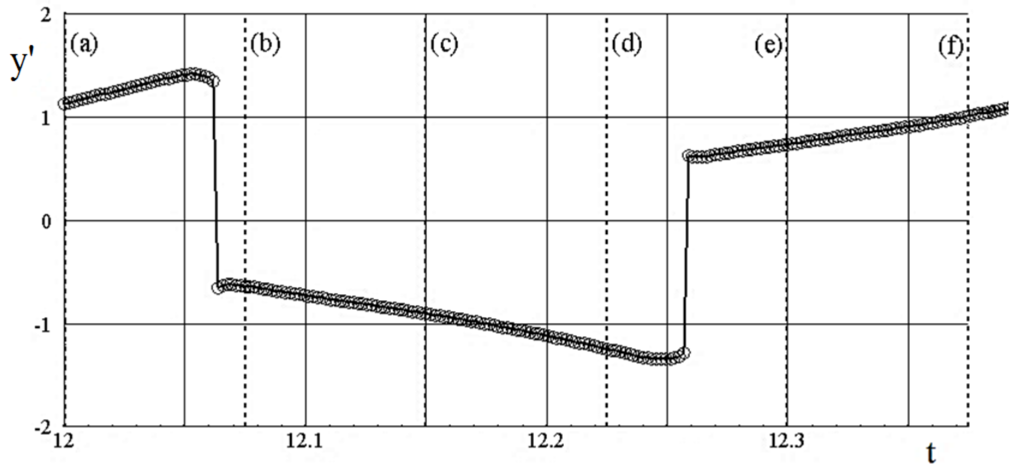


Рис. 5. Мгновенные картины линий тока и полей завихренности для набора параметров (3): t = 12 (a), 12.075 (b), 12.15 (c), 12.225 (d), 12.3 (e), 12.375 (f)

На рис. 6,а построена расчетная временная зависимость смещения центра цилиндра от срединного положения $y = 0$ в канале. Точки излома кривой $y(t)$ соответствуют моментам соударения. Вертикальными штрихами отмечены моменты (a)-(b)-(c)-(d)-(e)-(f), для которых на рис. 5 построены картины мгновенных линий тока и распределения завихренности. Аналогично на рис. 6,б построено изменение безразмерной скорости $y'(t)$ поперечных перемещений цилиндра на периоде колебаний. На рис. 7. построена расчетная временная зависимость безразмерной силы F_x на полупериоде колебаний цилиндра. Горизонтальной линией на этом рисунке показано среднее значение $0.5c_x = 23.24$ по эмпирической формуле (2) для параметров (3).



а



б

Рис. 6 Перемещения центра и скорость цилиндра в процессе автоколебаний с параметрами (3)

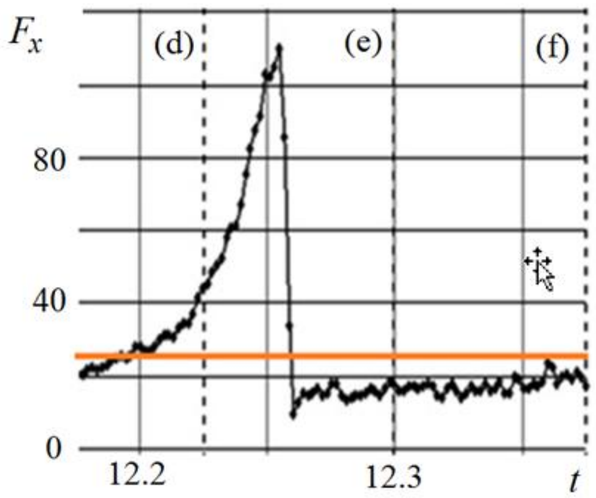


Рис. 7 $F_x(t)$ для параметров (3)

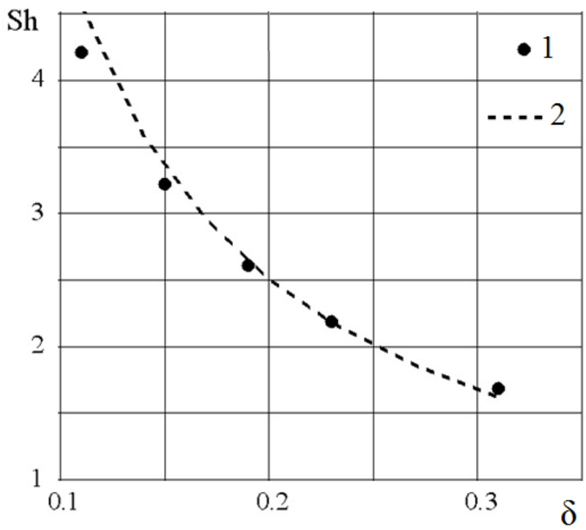


Рис. 8 Sh(δ) для параметров (3):
1– ВВД-расчет; 2 – аппроксимация (1)

Параметр k =0.5 в данной серии расчетов был выбран из условия соответствия расчетного числа Струхаля эмпирическому значению по формуле (1) с параметрами (3). Благодаря этому, с одной стороны, в расчете воспроизведены автоколебания цилиндра с такой же частотой как в эмпирической зависимости (1), а с другой стороны, достигнута возможность «увидеть» детали соответствующего нестационарного течения жидкости и движения цилиндра в процессе автоколебаний. Последнее представляет интерес, например, для оценки качества гипотез, на которых основываются феноменологические модели [4–5]. Предсказательную способность применяемой расчетной технологии демонстрирует рис. 8, на котором расчетные данные сравниваются с эмпирической зависимостью (1) при варьировании δ с сохранением значений (3) остальных определяющих параметров.

Заключение

Представленная вычислительная технология позволяет выйти далеко за рамки исследованного в эксперименте диапазона параметров, например, – рассмотреть случай сверхлегкого цилиндра исчезающе малой плотности. В принятой математической постановке задачи допускается переход к пределу при $\eta \to 0$. Это не приводит к сингулярности или вырождению системы уравнений [6, 8, 9], поэтому можно просто принять $\eta = 0$. Предположим, что цилиндр на рис. 1 представляет собой жесткую тонкостенную газонаполненную или вакуумированную оболочку в потоке воды. В этом случае средняя плотность цилиндра может быть на три порядка меньше плотности жидкости, поэтому расчеты при $\eta = 0$ имеют физический смысл. Оказалось, что и в этом случае происходит выход на режим квазипериодических автоколебаний с конечной частотой, зависящей от δ, Re и свободного параметра k (см. рис. 10 и табл. 1, где отсутствующие параметры принимают значения (3)).

Таблица 1

η=6; k = 0.5	η=0; k = 0.5	η=0; k = 0
Sh = 2.18	Sh = 3.78	Sh = 2.34

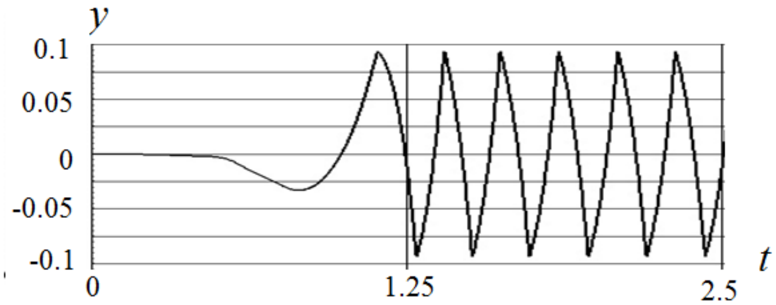


Рис. 10 Перемещение центра сверхлегкого цилиндра в процессе автоколебаний при $\eta=0$; $k = 0.5$

В целом, результаты исследования подтверждают, что коэффициент восстановления *k,* характеризующий упругое взаимодействие соударяющихся тел, является существенным параметром задачи об автоколебаниях в стесненных потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карликов В.П., Резниченко Н.Т., Шоломович Г.И.* О динамических эффектах обтекания в трубах колеблющихся тел, сильно загромождающих поток // Изв. РАН, МЖГ. – 2001. – № 4. – С. 122–122.

2. *Карликов В.П., Лукашевич М. В., Резниченко Н.Т. и др.* Об автоколебаниях свободных цилиндров, сильно загромождающих поток в плоском канале // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Мат. Мех. – 2004. – № 3. – С. 35–40.

3. *Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович Г.И.* Экспериментальное исследование поперечных автоколебаний круговых цилиндров, сильно загромождающих поток в плоском канале // Изв. РАН, МЖГ. – 2005. – № 5. – С. 133–138.

4. *Молодых О.В., Степанов Г.Ю.* Расчет поперечных квазистационарных автоколебаний кругового цилиндра при отрывном обтекании несжимаемой жидкостью в плоском канале // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Мат. Мех. – 2004. – № 3. – С. 41–44.

5. *Харламов А.А.* Моделирование поперечных автоколебаний кругового цилиндра, обтекаемого несжимаемой жидкостью в плоском канале при наличии циркуляции. // *Изв. СО РАН,* ПМТФ. – 2012. – Т. 53. – №1. – С. 45-50.

6. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: изд-во Моск. ун-та. – 2006. – 184 с.

7. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынников Я.А., и др.* Теоретическое и экспериментальное исследование соударений шара с неподвижной стенкой в вязкой жидкости / В сб.: "Материалы XXVIII научно-технической конференции по аэродинамике". – Жуковский, ЦАГИ – 2017. – С. 39–40.

8. *Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Изв. РАН, МЖГ. – 2007. – № 1. – С. 3–14.

9. *Дынников Я.А.* К расчету машущего гибкого профиля в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Изв. высших учебных заведений. Машиностроение. – 2016. – № 4. – С. 22–30.

10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016613552. Программа расчёта нелинейных автоколебаний упруго-связанных тел в потоке вязкой жидкости / *Я.А. Дынников, П.Р. Андронов*. – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.03.2016.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ МАССОПЕРЕНОСА В БИНАРНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РАСПЛАВАХ ВБЛИЗИ ПЛОХО СМАЧИВАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.А. Демин[1], А.И. Мизев[2], М.И. Петухов[1], Н.П. Углев[3]
1 – Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь
2 – Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь
3 – Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Явление продольного разделения компонентов металлических расплавов в тонких капиллярах впервые наблюдалось в работе [1]. Алундовый или стеклянный капилляр диаметром от 0.8 до 1.2 мм и высотой от 40 до 220 мм, заполненный однородной двухкомпонентной смесью жидких металлов (Sn-Pb, Cd-Bi или Al-Si), в вертикальном положении помещался в печь так, чтобы оба компонента поддерживались в расплавленном состоянии. Спустя время порядка 1 ч его вынимали и немедленно остужали, после чего изучалось продольное распределение компонентов расплава. В опытах фиксировалось распределение, приближенное к экспоненциальному, и достаточно большой перепад концентрации ~ 5 – 20% на торцах капилляра. По результатам многочисленных экспериментов было выявлено несколько особенностей явления разделения: 1) устремление перепада концентрации к некоторому пределу при увеличении продолжительности эксперимента, 2) разделение происходило только в случае вертикальной ориентации капилляра, 3) при увеличении температуры выдержки в печи наблюдалось уменьшение перепада концентрации.

Для объяснения эффекта разделения смеси жидких металлов на компоненты было сделано предположение о наличии в капилляре диффузинно-концентрационного и конвективного механизмов переноса. На вертикальных стенках рассматриваемого капилляра, вследствие особенности процессов теплообмена в печи, устанавливается градиент температуры, направленный вверх. В силу специфики используемого в экспериментах материала капилляра, на вертикальных гранях имеет место условие полного несмачивания. На образованной таким образом вертикальной свободной поверхности возникает температурная неоднородность поверхностной энергии, которая приводит к термокапиллярному эффекту. Также в модели были учтены эффекты адсорбции-десорбции. Задача в плоской, максимально упрощенной постановке была решена в [2], где было показано, что наличие указанных механизмов приводит к небольшому (1 – 5 %) перепаду концентрации. В рамках совершенствования модели можно учесть концентрационно-капиллярный механизм [3] и цилиндрическую форму полости, что не было сделано ранее. Задача о разделении смеси в цилиндрическом капилляре решалась нами методом конечных разностей с помощью двухполевого метода посредством программы, написанной на языке Fortran-90.

Результаты численного моделирования показали, что в процессе разделения смеси на компоненты за время порядка одного часа устанавливается достаточно сильный перепад концентрации (~20%), что достаточно близко к результатам экспериментов [1]. Численное решение уравнений концентрационной конвекции приводило к появлению опускного течения на поверхности. Примесь, скапливаемая в нижней части капилляра, из-за эффекта десорбции проникает в объем, и за счет подъемного течения в центре капилляра незначительно переносится в его верхнюю часть. Затем, за счет адсорбции, в области с низкой концентрацией она возвращалась на поверхность. Отдельно была изучена роль термо- и концентрационно-капиллярного механизмов в формировании профилей поверхностной и объемной концентрации.

Рост теплового числа Марангони, что соответствует усилению термокапиллярного механизма, приводит к увеличению перепада концентрации. В то же время рост концентрационного числа Марангони (усиление концентрационно-капиллярного механизма) дает обратный результат. Аналогичное поведение проявляется и на профилях скорости. Исходя из представленных результатов, можно утверждать, что предложенная модель позволяет качественно описать разделение бинарных металлических расплавов, находящихся в условиях, близких к экспериментам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00662 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаврилин И.В.*, *Фролова Т.Б.*, *Захаров В.П.* О ликвации в жидких эвтектических расплавах // Известия АН СССР. Металлы, 1984. № 3. С. 191–193.
2. *Демин В.А.*, *Петухов М.И.* К вопросу о механизме крупномасштабного переноса компонентов металлических расплавов в неоднородно нагретых тонких капиллярах // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. Вып. 3 (34). 2016. С. 65–71.
3. *Демин В.А.*, *Петухов М.И.* Крупномасштабный перенос компонентов металлических расплавов в тонких капиллярах // Вестник Томского университета. Сер. Математика и Механика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, № 48, 2017. С. 57-69.

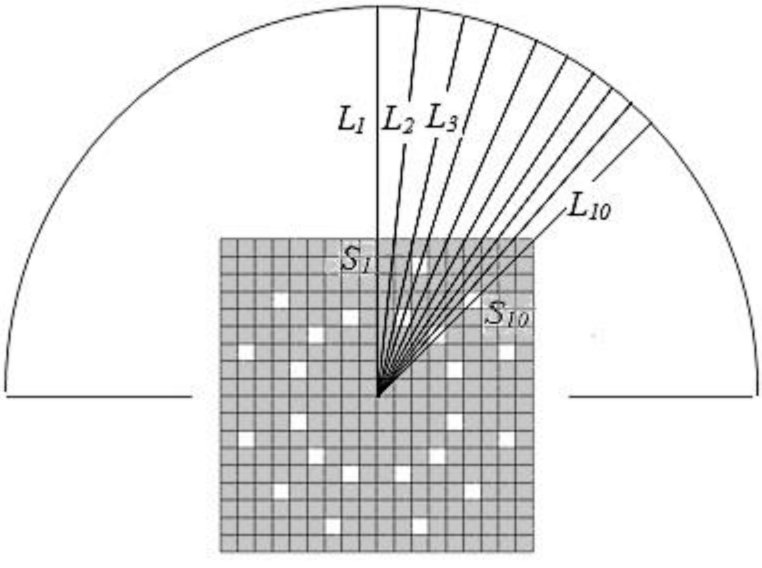
ФОРМООБРАЗОВАНИЕ КУПОЛА КВАДРАТНОГО ПАРАШЮТА С КОНСТРУКТИВНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

М.В. Джалалова
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Форма купола парашюта в потоке воздуха является одним из основных факторов, влияющих на распределение перепада давления по поверхности купола. В работах [1, 2] исследовались модели квадратного парашюта с различным набором длин строп, вследствие которых парашют принимал разные формы в потоке, и имел различный вид распределения перепада давления вдоль радиальных лент на куполе. В работе [3] рассматривался квадратный парашют (плоский в раскрое), с 28-ю равными по длине стропами и полюсным отверстием – группа симметрии у парашюта такой конструкции состоит из четырех секторов. Как было доказано в теоретической работе [4], а также подтверждено экспериментально в аэродинамической трубе, перепад давления по поверхности купола квадратного парашюта с одинаковыми по длине стропами можно считать постоянным. Это обстоятельство значительно упрощает как аналитическое, так и численное решение.

Известно, что устойчивость любого парашюта в потоке сильно зависит от типа ткани: купол с непроницаемой тканью, как правило, совершает колебательные движения, амплитуда которых зависит от конструкции парашюта, но при некоторых значениях воздухопроницаемости ткани устойчивость купола значительно повышается. Иным способом стабилизации парашюта является конструктивная проницаемость. Для решения такой задачи требуется найти определенный набор величин и схем конструктивной проницаемости, которые могут обеспечить наилучшую устойчивость парашюта в потоке при сохранении достаточной величины коэффициента его сопротивления.

В данной работе рассматривается изображенная на рис.1 одна из перспективных схем конструктивной проницаемости, проверенная экспериментально и показавшая хорошее устойчивое поведение парашюта в потоке.



$$L_i = L_1 + S_1 - S_i\,, \quad i = 2, 3, \dots, 10$$

Рис.1. Схема модели купола квадратного парашюта с конструктивной проницаемостью. L_i – длины строп, S_i – мнимые радиальные ленты

Экспериментальные исследования проводились в дозвуковой аэродинамической трубе А-6 Института механики МГУ с моделями парашюта площадью 0.81 м^2.

Длины строп назначались следующим образом: из центра купола в плоскости раскроя проведена окружность радиуса $R = L_1 + S_1$, где наибольшая длина стропы L_1 равна стороне квадрата. Группа симметрии у парашюта такой конструкции состоит из девяти «мнимых» секторов, образованных «мнимыми» радиальными лентами S_i . Количество лент каркаса – 38, количество строп – 76. Ленты каркаса нашиты параллельно сторонам квадрата на равных расстояниях одна от другой. Всего 18·18 = 324 квадратика на поверхности купола, из них белые квадратики (вырезанная ткань) заключены в кольце, ограниченном окружностями с радиусами 0.47 и 0.95 от стороны квадрата купола, при суммарной площади отверстий, составляющей 0.074 от его площади. Таким образом, конструктивная проницаемость купола парашюта для такой схемы $K_п = 7.4\%$.

После выхода установки на заданный режим оператор кольцевым ножом разрезáл нить, зачековывающую чехол, в который укладывался парашют вместе со стропами. Одновременно включалась регистрирующая аппаратура для записи работы парашюта. Во время экспериментов проводились исследования нестационарных аэродинамических характеристик моделей парашютов при скоростях набегающего потока v = 20, 30, 40 м/с (помимо стационарного режима фиксировалось раскрытие купола модели), параметры потока, нагрузка, действующая на парашют, а также кинокамерой фиксировалась форма и положение парашюта в трубе А-6.

В качестве примера на рис.2 и 3 представлены нагрузки в виде осциллограмм, дающие представление о раскрытии исследуемых моделей. Парашют с непроницаемой тканью и не имеющий конструктивной проницаемости, обладает большим коэффициентом динамичности $K_д = 2.65$, время раскрытия – 0.11 секунд, коэффициент сопротивления $C_п \approx 0.63$. Такой парашют совершал поперечные колебания с большой амплитудой.

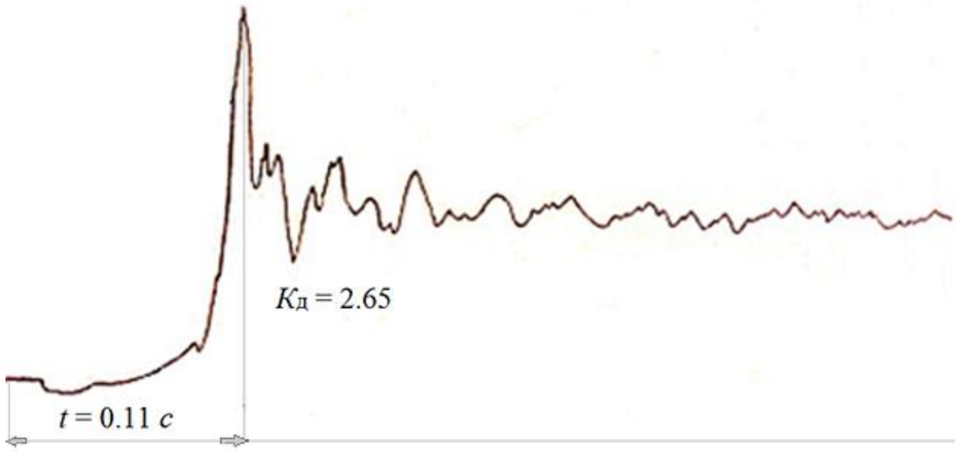


Рис.2. Осциллограмма действующей нагрузки на парашют с непроницаемой тканью без конструктивной проницаемости

Значительно устойчивее парашют с конструктивной проницаемостью $K_п = 7.4\%$ (схема на рис.1, см. рис.3). По сравнению с непроницаемым парашютом у этого парашюта коэффициент динамичности меньше почти на 20% – $K_д = 2.2$, время раскрытия чуть больше – 0.14 секунд, коэффициент сопротивления $C_п \approx 0.60$.

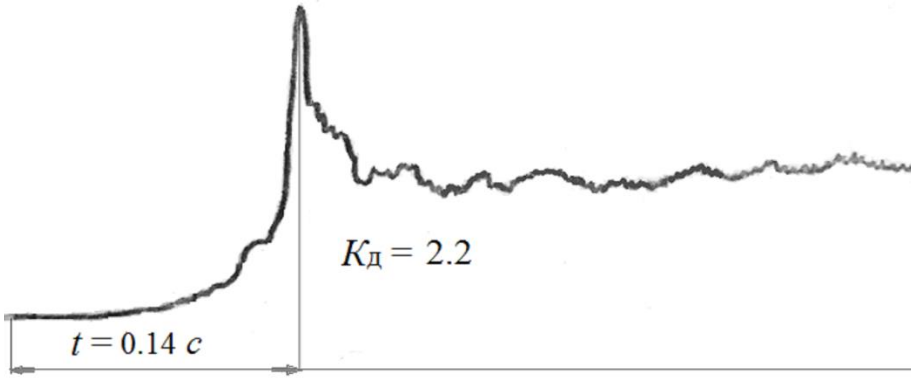


Рис.3. Осциллограмма действующей нагрузки на парашют с конструктивной проницаемостью $K_{п} = 7.4\%$

Сравнивая эти две осциллограммы, видно, что после раскрытия кривая у парашюта с $K_{п} = 7.4\%$ имеет более сглаженный вид, в эксперименте наблюдалось его устойчивое поведение.

В настоящей работе рассматриваются различные методы исследования формообразования купола парашюта: экспериментальный – с продувкой моделей парашюта в аэродинамической трубе, численный – с использованием компьютерного моделирования, а также приводится сравнение с аналитическим методом, основанным на решении системы дифференциальных уравнений.

Как было отмечено выше, значение перепада давления по поверхности купола квадратного парашюта с одинаковыми по длине стропами можно считать постоянным [4]. В случае же парашюта с различным набором длин строп, это несправедливо. Как показали более ранние исследования с похожим по форме и длинам строп парашютом (28 строп), характер распределения перепада давления имеет совсем иной вид: Δp вдоль углового сечения (4-я и 3-я радиальные ленты) резко уменьшается от полюса к кромке, а вдоль срединного сечения меняется более плавно (1-я и 2-я радиальные ленты) – рис.4.

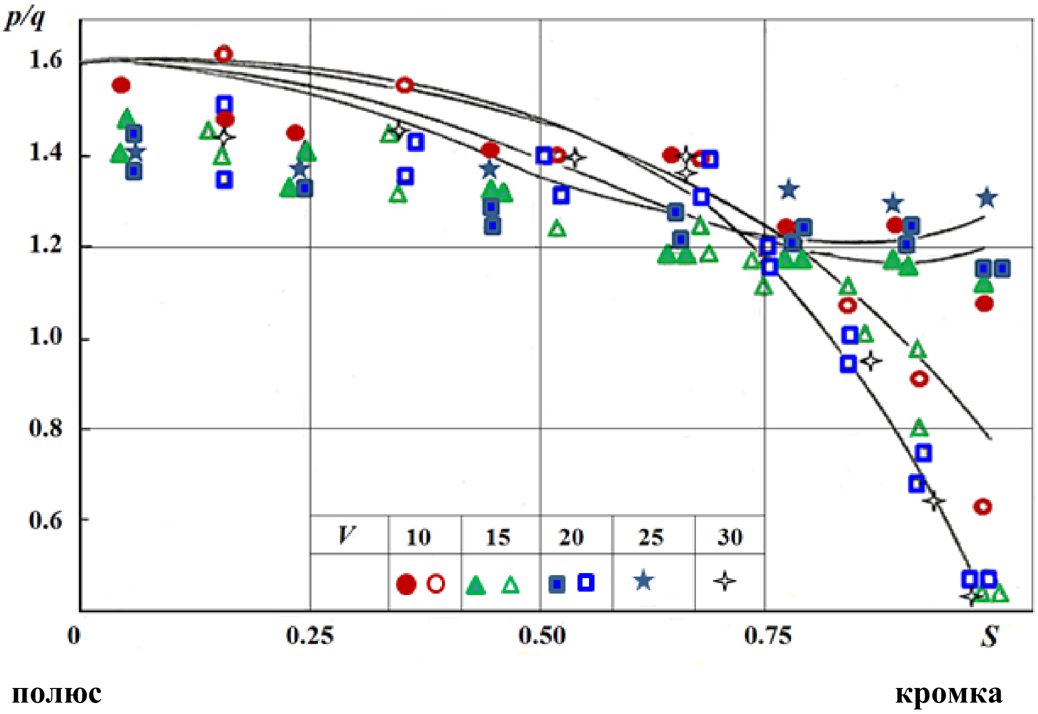
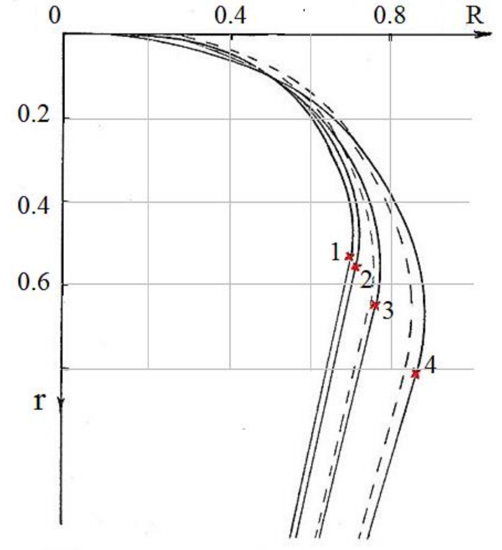


Рис. 4. Распределение безразмерного перепада давления вдоль 1-й и 4-й радиальных лент для модели квадратного купола, имеющего группу симметрии из 4-х секторов

Заштрихованными значками в соответствии со скоростью набегающего потока обозначены значения перепада давления по первой радиальной ленте купола, а незаштрихованными – по четвертой.

Теоретические кривые перепада давления 1, 2, 3, 4 на рис.4 и формы радиальных лент 1, 2, 3, 4 на рис. 5 (звездочками показаны точки крепления строп на кромке модели) получены из решения краевой 8-ми параметрической задачи системы дифференциальных уравнений равновесия купола квадратного парашюта [1], описывающей распределение параметров формы, натяжения и аэродинамического сопротивления парашюта для режима установившегося движения.



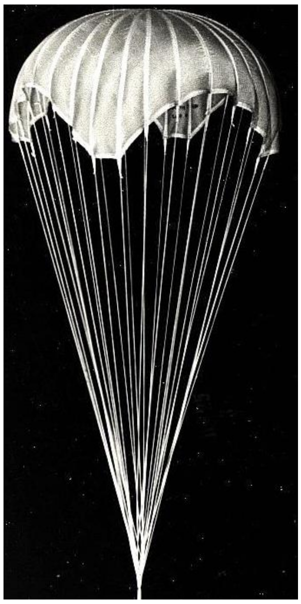


Рис. 5. Теоретические формы радиальных лент, справа – фото модели в трубе

Минимальные значения координат по горизонтали и по вертикали – у 1-ой радиальной ленты (самой короткой), а максимальные – у 4-ой ленты (угловой, самой длинной); 2-ая и 3-я формы радиальных лент располагаются между 1-ой и 4-ой лентами соответственно. На рис.5 сплошные кривые – это расчетные формы купола, а пунктирные – линии, нанесенные с фотопленки. Таким образом, прослеживается хорошее качественное соответствие расчетных и экспериментальных форм.

Для расчета раскрытия купола парашюта в потоке газа в настоящее время в основном используется *FSI* подход (*Fluid Structure Interaction*), основанный на совмещенном лагранжево-эйлеровым описании движения [7, 8], требующий значительных временных и вычислительных ресурсов. Одним из альтернативных подходов этому методу решения является процедура, в соответствие с которой форма и напряженно-деформированное состояние (НДС) купола парашюта определяется численно в лагранжевой постановке (без учета взаимодействия с воздухом) с заданным распределением давления на куполе, которое выбирается на основании накопленного опыта натурных испытаний и численных расчетов.

В задаче о раскрытии купола круглого парашюта с полюсным отверстием и центральной стропой [5] применялась численная процедура, сходимость которой обеспечивалась чередованием явной (динамической) и неявной (квазистатической) расчетных схем решения. С использованием определенных упрощений решение подобной задачи было получено в [6] для квадратного парашюта с четырьмя стропами.

В работе [3] предложен модифицированный лагранжевый подход, основанный на аналогичной процедуре, численно получена форма купола квадратного парашюта без конструктивной проницаемости с полюсным отверстием и отличающимся от модели, рассмотренной в настоящей работе, иным набором длин строп.

В отличие от работы [3] в данной работе использовался более эффективный по времени расчета метод, основанный на применении явной схемы интегрирования по времени с дополнительным демпфированием и с предписанным перепадом давления по куполу, взятым в первом приближении из работы [2].

Начальная форма квадратного парашюта предполагалась плоской (рис. 6). Материалы строп и ткани полагались линейно упругими и изотропными. Давление на поверхность купола и вертикальные перемещения виртуальных коушей (1,2,…,10) задавались по линейному закону от времени. Коуш 10 закреплялся по всем степеням свободы.

Для осесимметричных парашютов условия совмещения всех строп в коуше выполняется автоматически, так как уравнения равновесия составляются для элемента только одной радиальной ленты. В случае неосесимметричного парашюта совмещение строп соответствует $i-1$ условиям:

$$OQ = r_1(S) + R_1(S)ctg\theta_1(S) = r_2(S) + R_2(S)ctg\theta_2(S) = r_3(S) + R_3(S)ctg\theta_3(S) =$$

$$= r_4(S) + R_4(S)ctg\theta_4(S) \quad \text{на кромке} \quad S = 1,$$

где r и R – координаты (рис.5), точка Q – коуш, θ_i – угол между касательной, проведенной в точке радиального сечения, и осью парашюта OQ.

Решение задачи проводилось по следующей схеме: при расчете делалось предположение о независимости формы купола от среды и скорости потока, а в динамическое уравнение добавлялся член, пропорциональный импульсу, отвечающий за дополнительное вязкое демпфирование с коэффициентом k. Значение коэффициента k подбиралось таким образом, чтобы решение задачи (для оптимизации расчетного времени) было получено за один расчетный шаг. При этом расчетное время раскрытия купола парашюта составляло порядка 1 минуты на стандартном компьютере.

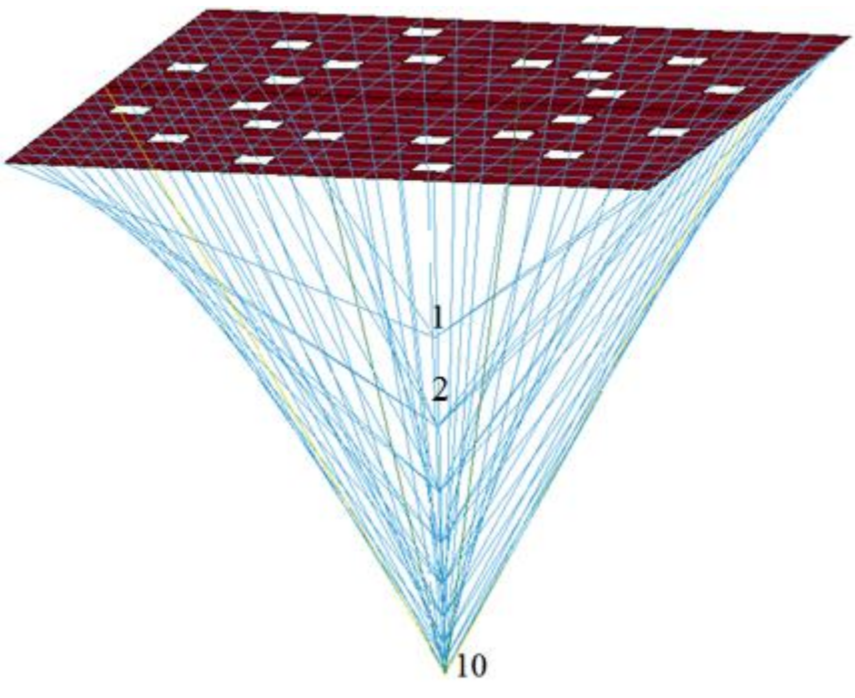


Рис. 6. Вид плоского квадратного парашюта с конструктивной проницаемостью:

при такой схеме стропы не сходятся в одной точке-коуше (в нем должны совмещаться все стропы). Угловые стропы (самые короткие) собираются на центральной (мнимой) оси в коуше 1 выше по сравнению со стропами, прикрепленными к срединным радиальным лентам (самые длинные) в коуше 10. Таким образом, получается 10 виртуальных коушей (1,2,…,10).

На рис. 7 приведены формы купола квадратного парашюта, полученные численным расчетом. Для сравнения показана форма точно такой же модели парашюта из эксперимента в аэродинамической трубе А-6.

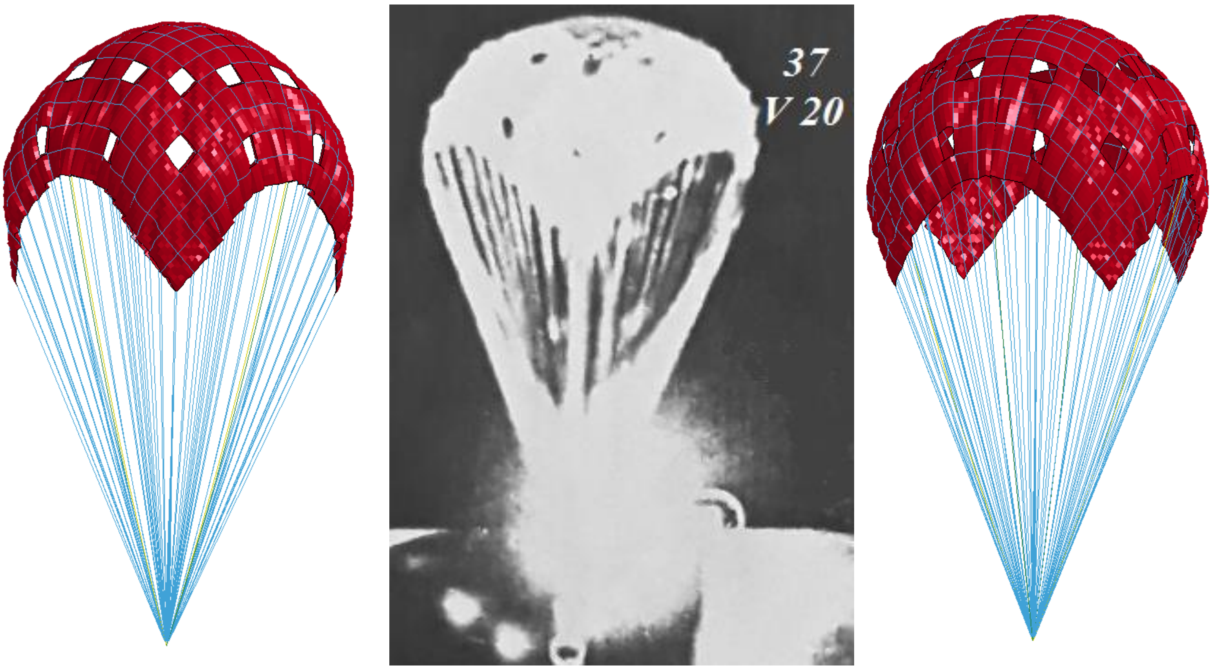


Рис.7. Формы купола квадратного парашюта – численный расчет; в середине – снимок модели квадратного парашюта в аэродинамической трубе А-6 (37-й по номеру эксперимент при скорости набегающего потока V = 20 м/с, из-за вспышки света не четко виден коуш).

Предложенная численно-экспериментальная процедура решения задачи об определении формы купола парашюта, имея сопоставимую точность, существенно более эффективна по сравнению с *FSI* подходом с точки зрения вычислительных и временных ресурсов, а в сравнении с аналитическим методом демонстрирует лучшее согласование с экспериментом и имеет бóльшую наглядность.

Удовлетворительное соответствие формы квадратного парашюта из эксперимента с формой, полученной в результате численного расчета, свидетельствует о том, что предложенную схему расчета можно эффективно использовать для решения оптимизации формы парашюта и определения корреляции между формой и распределением давления по куполу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Джалалова М.В. Исследование параметров формы и напряженного состояния купола квадратного парашюта численным методом. Парашюты и проницаемые тела. Изд. МГУ. М.,1987, с. 63-79.

2. Джалалова М.В., Ульянов Г.С. Особенности распределения перепада давления по куполу квадратного парашюта. Парашюты и проницаемые тела. Изд. МГУ. М., 1987, с. 58-62.

3. Джалалова М.В. Компьютерное моделирование процесса формообразования купола квадратного парашюта. Материалы XXII Международной конференции «Нелинейные

задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» 14 − 21 февраля 2016 г. Московская область, г. Звенигород, пансионат «Звенигородский» РАН / Ответственный редактор – Н.В. Никитин. Изд-во Моск. ун-та. Москва, тезисы, с. 57-62.

4. Джалалова М.В. Выбор параметров квадратного парашюта, обеспечивающих постоянство перепада давления по куполу. Отчет НИИ механики МГУ. 1887, №3325, 65 с.

5. Джалалова М.В. Численное исследование задачи о раскрытии купола парашюта. Материалы Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». 2014, панс. Звенигородский РАН. Изд. НИИ механики МГУ, с. 65-68.

6. Dzhalalova M.V., Leonov S.V. Effect of Structural Permeability on the Stability of a Parachute with Four Suspension Lines. Moscow University Mechanics Bulletin – Springer. 2013. Том 68, № 1, с. 28-31.

7. Kenji Takizawa, Samuel Wright, Creighton Moorman and Tayfun E. Tezduyar. Fluid–structure interaction modeling of parachute clusters. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2011; 65: 286–307.

8. S. Sathe, R. Benney, R. Charles, E. Doucette, J. Miletti, M. Senga, K. Stein and T.E. Tezduyar, “Fluid-Structure Interaction Modeling of Complex Parachute Designs with the Space-Time Finite Element Techniques”, Computers & Fluids, 36 (2007), 127-135.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.С. Дрюма
Институт математики и информатики АН РМ, Кишинев

Уравнения трехмерных течений несжимаемой жидкости в лагранжевых переменных имеют вид

$$\frac{d^2X^i}{dt^2}=-[X^j,X^k,P]+\mu\left[X^2,X^3,\left[X^2,X^3,\frac{dX^i}{dt}\right]\right]+\mu\left[X^3,X^1,\left[X^3,X^1,\frac{dX^i}{dt}\right]\right]+\mu\left[X^1,X^2,\left[X^1,X^3,\frac{dX^i}{dt}\right]\right], \quad (1)$$

$$[X^1,X^2,X^3]=\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}-\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dz}+\frac{dX}{dz}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dy}+\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dx}=1, \quad (2)$$

Здесь P=P(x,y,z,t) – давление, $\mu-$ коэффициент вязкости, $X^i = X^i(\mathrm{x,y,z,t})$ –зависящие от времени координаты частиц жидкости, i=1,2.3, идентифицируемых по значениям векторного параметра $\bar{x}$=(x,y,z).

В докладе будут приведены примеры точных частных решений системы уравнений (1) и (2) , в конструкции которых основная роль принадлежит условию несжимаемости жидкости (2). На этом пути появляется возможность привлечения результатов теории полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx^i}{dt}=\sum a^i{}_{kj}x^kx^j$ с параметрами $a^i{}_{kj}$и обладающих предельными циклами для описания свойств полной системы уравнений (1) и (2).

Теорема 1.

В результате замены переменных вида

$$\mathrm{Y(x,y,z,t)}=\mathrm{M}\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)t,\ \mathrm{Y(x,y,z,t)}=\mathrm{L}\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)t,\ Z(\mathrm{x,y,z,t})=\mathrm{N}\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)t, \quad (3)$$

соотношение (2) принимает вид

$$\mathrm{A}(\xi,\eta,\chi)\frac{\partial L}{\partial \xi}+\mathrm{B}(\xi,\eta,\chi)\frac{\partial L}{\partial \eta}+\mathrm{C}(\xi,\eta,\chi)\frac{\partial L}{\partial \chi}-1=0, \quad (4)$$

где $\xi=\frac{x}{t},\ \eta=\frac{y}{t},\ \chi=\frac{z}{t}$, с коэффициентами

$$\mathrm{A}(\xi,\eta,\chi)=\frac{\partial N}{\partial \chi}\frac{\partial M}{\partial \eta}-\frac{\partial M}{\partial \chi}\frac{\partial N}{\partial \eta},\ \ \mathrm{B}(\xi,\eta,\chi)=-\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial N}{\partial \chi}+\frac{\partial M}{\partial \chi}\frac{\partial N}{\partial \xi},\ \ \mathrm{C}(\xi,\eta,\chi)=-\frac{\partial N}{\partial \xi}\frac{\partial M}{\partial \eta}+\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial N}{\partial \eta}, \quad (5)$$

которые можно рассматривать в качестве компонент бездивергентного векторного поля

$$\frac{\partial\ \mathrm{A}(\xi,\eta,\chi)}{\partial \xi}+\frac{\partial\ \mathrm{B}(\xi,\eta,\chi)}{\partial \eta}+\frac{\partial\ \mathrm{C}(\xi,\eta,\chi)}{\partial \chi}=0. \quad (6)$$

С помощью сотношений (4), (5) и (6) могут быть найдены компоненты скорости течения (3) с достаточно большим функциональным произволом, который используется далее для интегрирования полной системы уравнений (1) с учетом условий ее совместности.

Теорема 2. [4]

Квадратичная система уравнений

$$\frac{dy}{dt}=b_0+b_1x+b_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2,\ \ \frac{dx}{dt}=a_0+a_1x+a_2y+a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,$$

обладает предельными циклами при специальных значениях параметров b_i, a_i, b_{ij}, a_{ij} . При переходе к проективным координатам $\xi=\frac{x}{t},\ \eta=\frac{y}{t},\ \chi=\frac{z}{t}$ ей отвечает векторное поле с условием (6) на компонеты

$$\mathrm{A}(\xi,\eta,\chi)=4a_0\chi^2+4a_2\eta\chi+(3a_1-b_2)\xi\chi+4a_{22}\eta^2+(3a_{12}-2b_{22})\xi\eta+(2a_{11}-b_{12})\xi^2,$$

$$\mathrm{B}(\xi,\eta,\chi)=4b_0\chi^2+4b_1\xi\chi+(3b_2-a_1)\eta\chi+4b_{11}\xi^2+(3b_{12}-2a_{11})\xi\eta+(2b_{22}-a_{12})\eta^2, \quad (7)$$

$$\mathrm{C}(\xi,\eta,\chi)=-(b_2+a_1)\chi^2-(2b_{22}+a_{12})\eta\chi-(2a_{11}+b_{12})\xi\chi.$$

В докладе будут рассмотрены некоторые примеры решений лагранжевых уравнений течения жидкости, порождаемых бездивергентными векторными полями вида (7).

ЛИТЕРАТУРА.

1.А.С.Монин. О Лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой жидкости, Прикладная математика и механика. т. XXVI, 1962, с. 320-327.
2. V.S.Dryuma. On equations of incompressible liquids in Lagrangian variables. International Conference Современные проблемы механики сплошной среды, Тезисы докладов, МИАН, Москва, 13-15 ноября, 2017 г., с.14-16.
3. V.S.Dryuma. On Solving of Euler equations of ideal incompressible liquid. International Conference on Mathematical Control theory and Mechanics, Suzdal ,July’3-7,Abstracts, 2015, c. 166-168.
4. V.S.Dryuma. Homogeneous extensions of the first order ODE’s. International Conference “Algebraic Topology and Abelean functions”. Moscow,18-22 June, Steklov Mathematical Institute of RAS, Abstracts, 2013, c. 78-79.

МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБЕ, ОСНОВАННАЯ НА АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НИКУРАДЗЕ

О.И. Дударь
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

До настоящего времени для анализа влияния шероховатости на турбулентное течение в шероховатых трубах применяются преимущественно феноменологические модели, основанные на физических экспериментах Никурадзе [1, 2], Коулбрука и Уайта [3] и других авторов (например, [4, 5]), которые в последние годы успешно заменяются численными экспериментами (например, [6-8]). Тем не менее, достаточно универсальные феноменологические модели пока отсутствуют, так как неясно, какие параметры шероховатости нужно выбрать, чтобы модель оказалась применимой для достаточно широкого класса шероховатых поверхностей.

В данной работе предлагается следующая иерархия моделей шероховатой поверхности: с однородной (моноспектральной) шероховатостью, с дискретным спектром шероховатостей, с непрерывным спектром шероховатостей. В экспериментах Никурадзе по турбулентному течению в трубах [2] искусственная песочная шероховатость является однородной, а потому характеризуется только одним, но наиболее существенным параметром шероховатости – относительной высотой элементов шероховатости k/r_p (r_p – радиус трубы). Поэтому данные экспериментов Никурадзе могут служить базисом в построении моделей шероховатой поверхности.

Прежде всего, необходимо иметь аналитическое описание этих экспериментов. В феноменологических моделях влияние шероховатости на турбулентность принято учитывать с помощью взаимосвязанных функций $\lambda(Re, k/r_p)$ и $V(r)(Re, k/r_p)$, где λ – коэффициент сопротивления, $V(r)$– профиль продольной скорости, форма которого задана (например, линейная для ламинарного подслоя и логарифмическая для турбулентного ядра по теории Прандтля [1, 2, 9]). В экспериментах более достоверной является первая функция ввиду интегральности параметра λ, и потому ее считаем основной. В [2] приведены экспериментальные кривые $\lambda(Re)$ для шести значений k/r_p, а также полученные на их основе аналитические выражения: $\lambda_S(Re)$ для гидравлически гладкой трубы (см. также [1]) и $\lambda_\infty(k/r_p)$ – уравнение семейства горизонтальных асимптот полной шероховатости, к которым стремятся кривые $\lambda(Re)$ при $Re \to \infty$ для фиксированных значений k/r_p.

В настоящей работе на основе анализа данных [2] представлены аналитические выражения кривых, являющихся переходными от гладкостенной кривой $\lambda_S(Re)$ к асимптотам $\lambda_\infty(k/r_p)$. При этом были установлено следующее:

1) переходные кривые удобнее рассматривать в осях $(\alpha, \Delta p^*)$ («гидравлическая проводимость», «перепад безразмерного давления»), где

$$\alpha = \lambda^{-1/2}, \tag{1}$$

$$\Delta p^* = \frac{16\rho r_p^3}{\mu^2 l}; \tag{2}$$

2) у семейства переходных кривых имеется две огибающих: первой огибающей в исходных осях $(\alpha, \lg(\Delta p^*))$ является гладкостенная кривая (рис.1), а второй огибающей в осях $(\alpha - \alpha_\infty, \lg(\Delta p^*) - \alpha_\infty)$, приводящих к совмещению асимптот всех переходных кривых, является правая ветвь гауссовой кривой нормального распределения (рис.2), которая для каждой переходной кривой и стремится к горизонтальной асимптоте $\alpha_\infty(k/r_p)$ (рис.1);

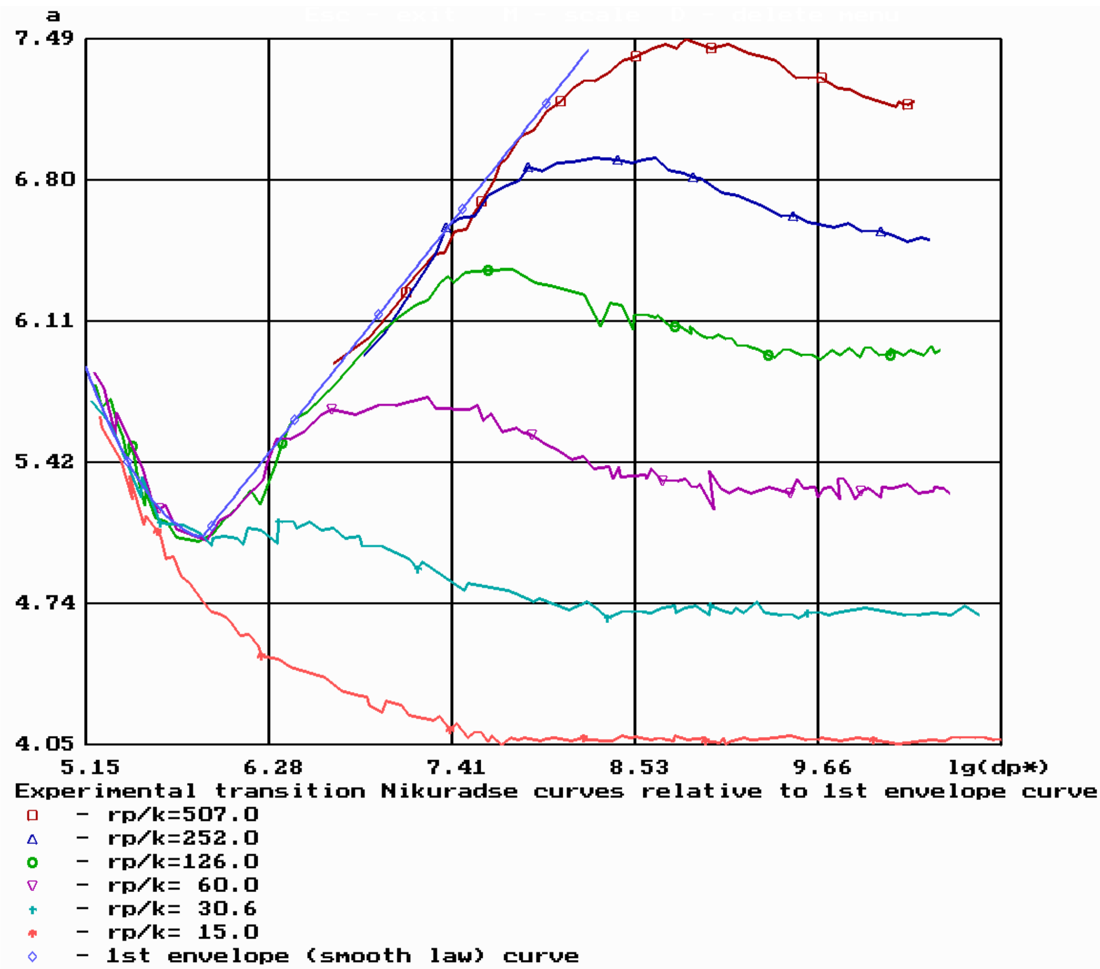


Рис.1

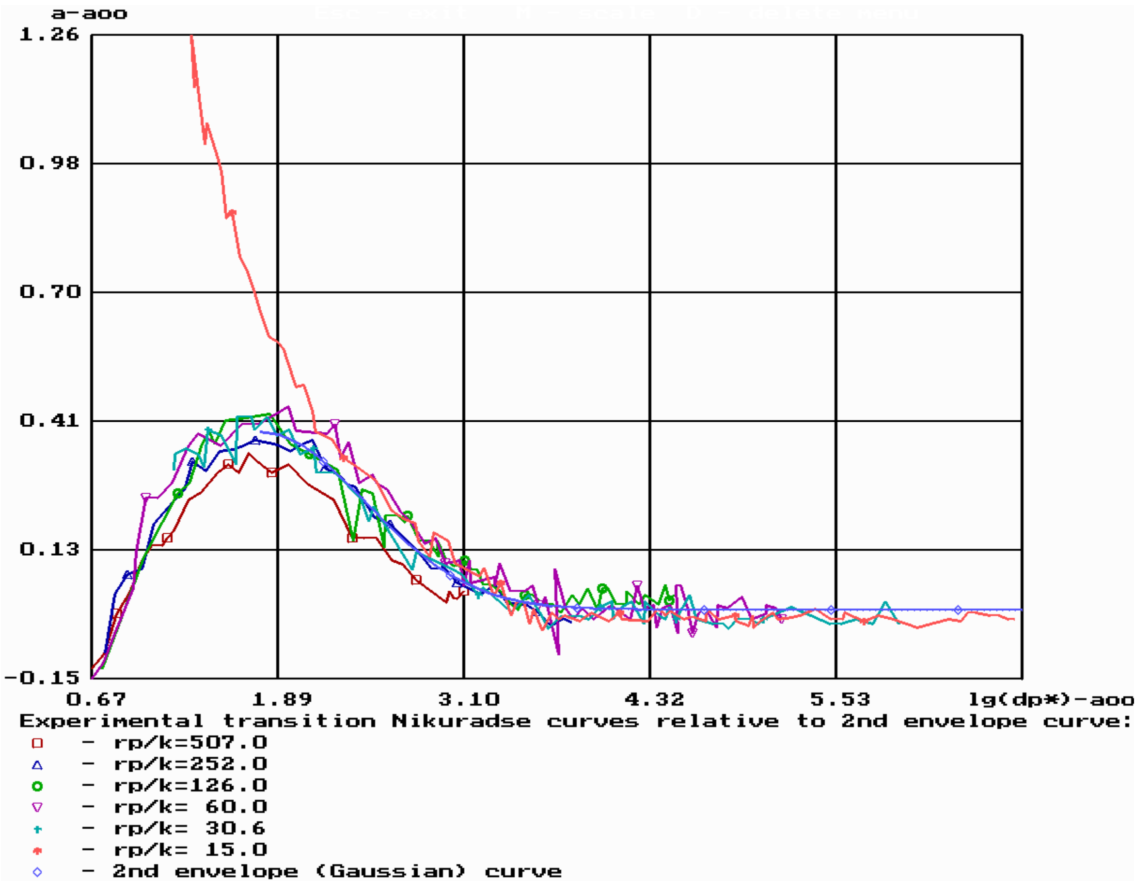


Рис.2

3) если обозначить

$$x = \lg(\Delta p^*), \tag{3}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_\infty, \tag{4}$$

$$\tilde{x} = x - \alpha_\infty, \tag{5}$$

то можно записать уравнения первой и второй огибающих, а также уравнение асимптот следующим образом

$$\alpha_S = \begin{cases} 53{,}38 - 16{,}28x + 1{,}371x^2, & 5{,}154 \le x \le 5{,}872, \\ x - 0{,}8057, & 5{,}872 \le x < \infty, \end{cases} \tag{6}$$

$$\tilde{\alpha}_G = 0{,}3928e^{-[1{,}027(\tilde{x}-1{,}777)]^2}, \qquad 1{,}777 \le \tilde{x} < \infty, \tag{7}$$

$$\alpha_\infty = -2\lg(k/r_p) + 1{,}743, \tag{8}$$

(все численные значения в (6-8) были получены в результате обработки приведенных в [1,2] экспериментальных данных методом наименьших квадратов);

4) аналитические формулы участков переходных кривых, связывающих две огибающие, получаются из записи условий соприкосновения переходных кривых с огибающими; причем характер огибающих определяет поведение переходных кривых, которые можно разделить на:

а) монотонно возрастающие кривые малой $(k/r_p \le 0{,}0176)$ шероховатости, полностью совпадающие при совмещении асимптот и описываемые параболой с постоянными (не зависящими от шероховатости) коэффициентами;

б) монотонно возрастающие кривые средней ($0{,}0176 \leq k/r_p \leq 0{,}0343$) шероховатости, описываемые параболой с переменными (зависящими от шероховатости) коэффициентами, которая при $k/r_p = 0{,}0343$ вырождается в отрезок прямой;

в) монотонно убывающие кривые большой ($0{,}0343 \leq k/r_p$) шероховатости, которые описываются так называемыми «соприкасающимися полиномами», степень которых возрастает от 0 (при $k/r_p = 0{,}0343$) до 12 (при $k/r_p = 0{,}219$), причем точки повышения степени полиномов определяются старшими корнями полиномов Эрмита, порождаемых дифференцированием уравнения гауссовой кривой.

Если, мы получили зависимости $\alpha(x)$ или $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$, то несложно с помощью формул (1-5,8) сделать обратный переход к привычным переменным λ и Re.

На рис. 3 и 4 в осях (λ, Re) сравниваются аналитические и экспериментальные переходные кривые для малой шероховатости (рис.3), а также для средней и большой шероховатости (рис.4).

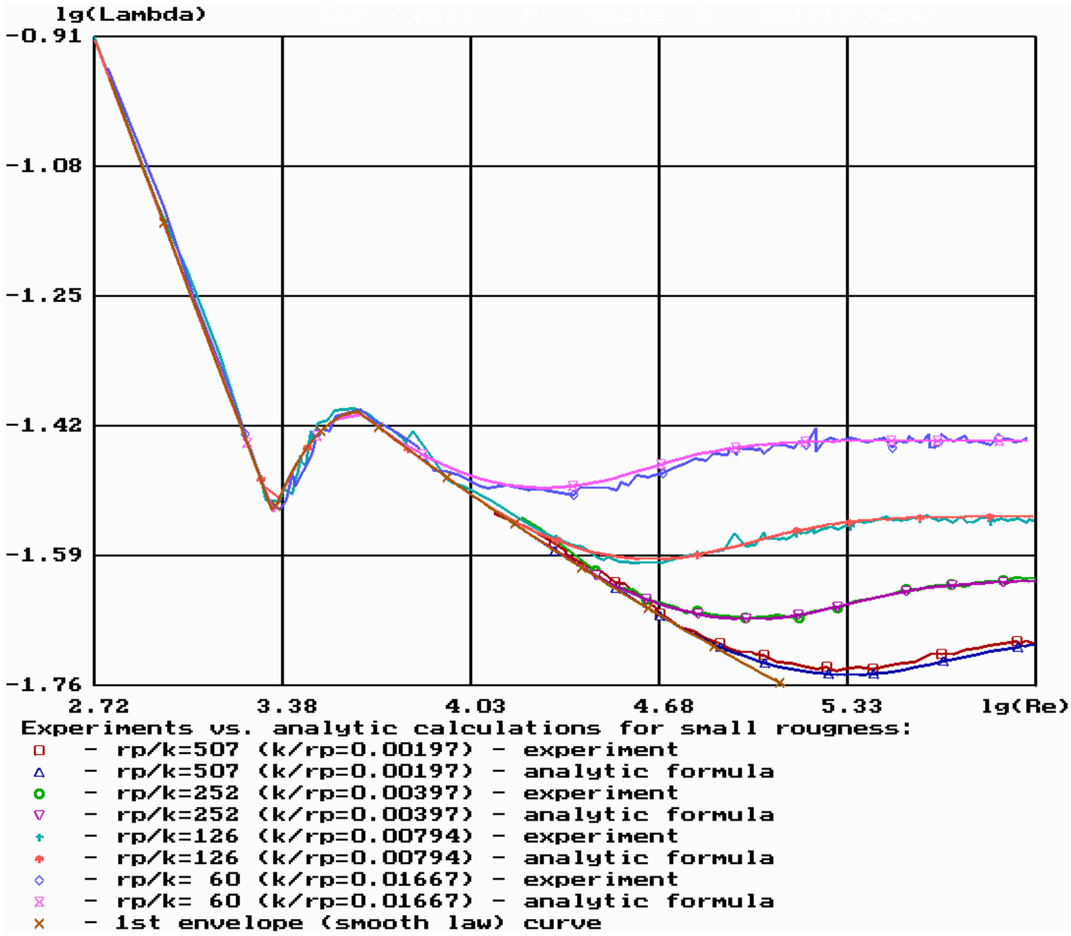


Рис.3

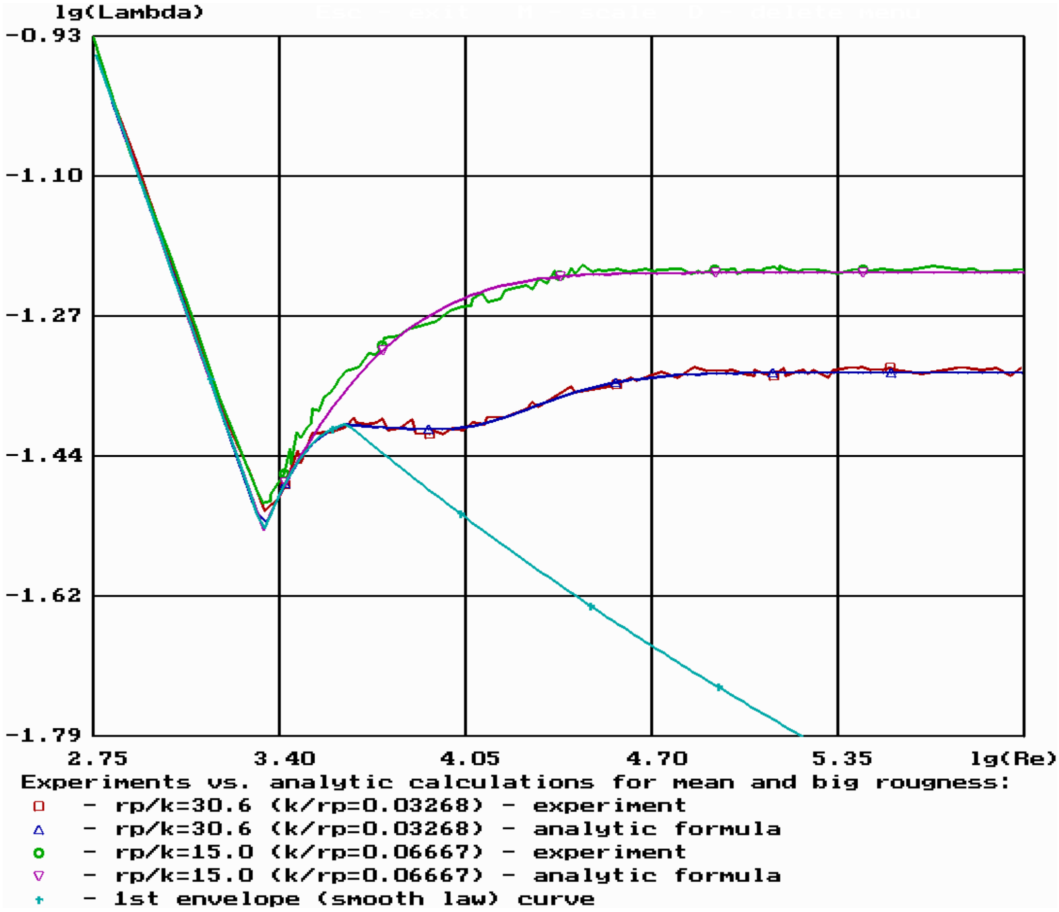
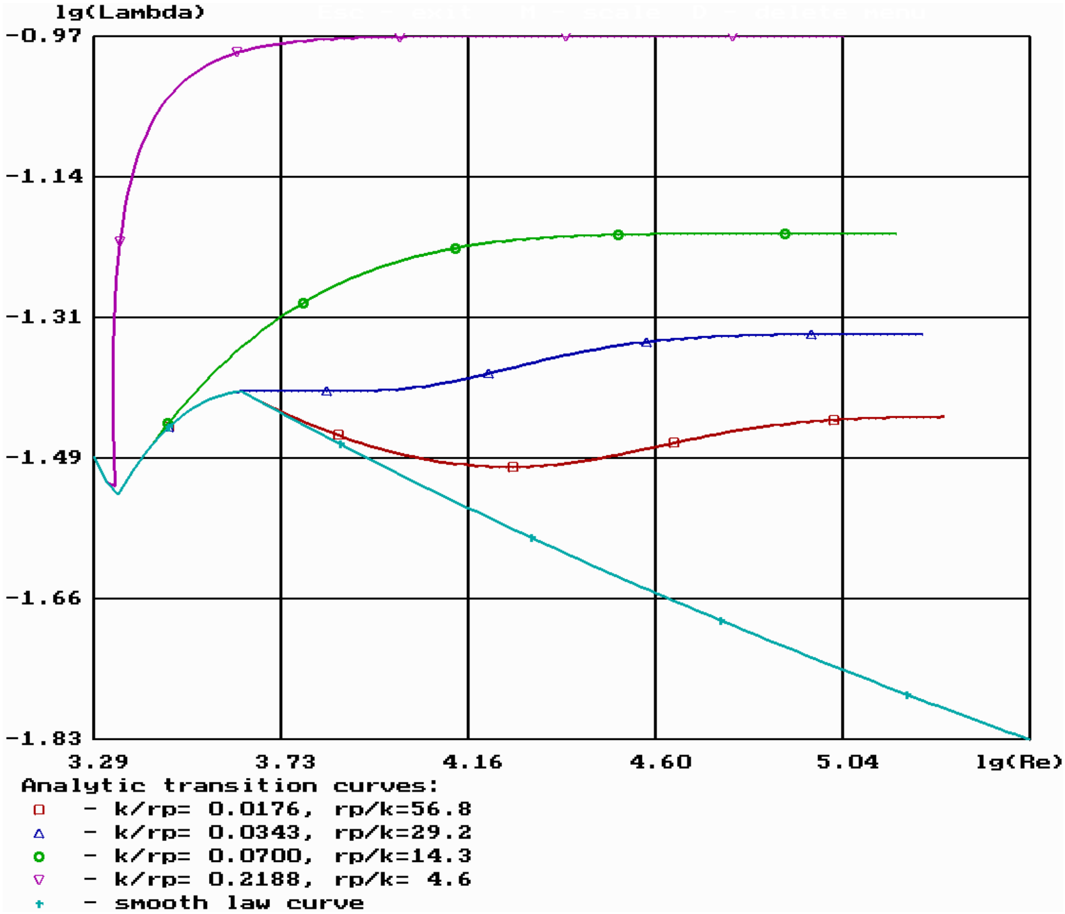


Рис.4

Видим, что имеет место хорошее совпадение аналитических и экспериментальных кривых. На рис. 5 показаны полученные аналитически следующие представляющие интерес переходные кривые:

- предельная (при $k/r_p = 0{,}0176$) переходная кривая, являющаяся одновременно кривой малой и средней шероховатости;
- предельная (при $k/r_p = 0{,}0343$) переходная кривая, являющаяся одновременно кривой средней и большой шероховатости, для которой характерно наличие двух участков $\lambda = const$;
- строго монотонная переходная кривая большой шероховатости ($k/r_p = 0{,}07$), которая в осях (α, x) описывается полиномом 4 степени;
- переходная кривая с наибольшей достигнутой относительной шероховатостью ($k/r_p = 0{,}2188$), которая в осях (α, x) описывается полиномом 12 степени.

Полученные аналитические выражения $\lambda(Re, k/r_p)$ для однородной шероховатости были использованы для моделирования шероховатости со спектром, состоящим из 2 и 3 значений шероховатости. В этом случае важным параметром становится доля площади, занимаемая элементами шероховатости с данным значением k/r_p. Проверка с помощью экспериментов Коулбрука [2] показала хорошее качественное совпадение зависимостей $\lambda(Re)$ и удовлетворительное количественное. Проблемы с количественным совпадением можно объяснить необходимостью более точного учета экранирующего эффекта.



По кривым сопротивления $\lambda(Re, k/r_p)$ были построены профили скорости $V(r)(Re, k/r_p)$, которые сравнивались с имеющимися экспериментальными данными Никурадзе. Имело место очень хорошее совпадение.

Также было получено уравнение зависимости толщины ламинарного подслоя от Re и k/r_p, которое было использовано для качественного анализа влияния шероховатости на турбулентное течение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Nikuradse J. Gesetzmäβigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren // Forschungsheft 356. Beilage zu “Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens”. Ausgabe B, Bd. 3. Berlin, 1932. S.1-36.
2. Nikuradse J. Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Forschungsheft 361. Beilage zu “Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens”, Ausgabe B, Bd. 4, Berlin, 1933, S.1-22.

3. Colebrook C.F., White C.M. Experiments with fluid friction in roughened pipes. Proc. Royal Soc. London, Ser. A., vol.161, 906, 1937, pp 367-381.
4. McKeon B. J, Swanson C. J., Zagarola M. V., Donnelly R. J., Smits A. J. Friction factors for smooth pipe flow. J. Fluid Mech., vol. 511, 2004, pp. 41–44.
5. Shockling M. A., Allen J. J., Smits A. J. Roughness effects in turbulent pipe flow. J. Fluid Mech., vol. 564, 2006, pp 267–285.
6. Herwig H., Gloss D., Wenterodt T. A new approach to understanding and modelling the influence of wall roughness on friction factors for pipe and channel flows. J.Fluid Mech., vol. 613, 2008, pp 35- 53
7. Chan L., MacDonald M., Chung D., Hutchins N., Ooi A. A systematic investigation of roughness height and wavelength in turbulent pipe flow in the transitionally rough regime. J.Fluid Mech., vol.771, 2015, pp 743-777.
8. Chung D., Chan L., MacDonald M., Hutchins N., Ooi A. A fast direct numerical simulation method for characterising hydraulic roughness. J.Fluid Mech., vol. 773, 2015, pp 418- 431
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711с.

ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В КОНВЕКТИВНОМ ТЕЧЕНИИ ОТ НАГРЕТОГО ИСТОЧНИКА

А.В. Евграфова, М. О. Кучинский, А. Н. Сухановский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь
Пермский государственный национальный исследовательский университет

В неравномерно нагретой жидкости в поле силы тяжести равновесие, как правило, невозможно. Наличие градиента температуры будет приводить к возникновению конвективных движений, изучению которых посвящен широкий спектр как экспериментальных, так и численных работ.

Изучению конвективных движений возникающих от локализованных источников тепла посвящено множество работ. Это связано с широким распространением подобного рода систем. В [1] предложена математическая модель процессов теплообмена в радиоэлектронной аппаратуре и электронной техники. Модель представляла собой замкнутую прямоугольную полость с локализованным источником тепла В [2] авторы представили результаты по лабораторному моделированию течений вблизи нагретой круглой пластины, расположенной в центре кубической полости (Urban Heat Island Effect). Лабораторный аналог тропического циклона предложен в серии работ Богатырева Г. П. [3] Исследовано возникновение конвективного вихря во вращающемся слое жидкости над нагретым диском. Показано, что возникающее в такой системе вихревое движение схоже по структуре со структурой урагана, а предложенная конфигурация перспективна для изучения природы циклонов. Дальнейшие исследования конвекции в неподвижных и вращающихся цилиндрических слоях жидкости при наличии локализованного нагрева показали существование в зоне нагрева системы вторичных конвективных валов [4, 5], существенное влияние нагрева и скорости вращения на структуру крупномасштабного вихря [6].

В данной работе экспериментально исследованы процессы теплообмена в горизонтальном слое жидкости локально подогреваемом снизу. Постановка задачи максимально приближена к постановке [3, 4, 6]. Экспериментальная модель представляла собой цилиндрический слой жидкости диаметров 300 мм. Нагрев осуществлялся при помощи медного теплообменника диаметром 104 мм, расположенного заподлицо с дном модели. Питание нагревателя происходило через источник переменного тока. Нагрев осуществлялся двумя способами – постоянный поток тепла и постоянная температура нагревателя. Температура нагревателя контролировалась с точностью до 0,5 К через систему Termodat. Высота слоя жидкости составляла 30 мм. В качестве рабочей жидкости использовались силиконовое масло ПМС-5 с кинематической вязкости 5 сСт при 20 ^{0}С. Для измерения температуры жидкости была использована линейка медь-константановых термопар – 12 термопар, расположенных на расстоянии 10 мм друг от друга. Линейка размещалась по диаметру нагревателя на разных высотах слоя.

Были получены зависимости безразмерного потока тепла от степени нагрева. Изучено влияние динамики вторичных течений на интенсивность процессов теплообмена.

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-31-00150)

ЛИТЕРАТУРА.

1. Шеремет М. А., Мартюшев С. Г. Численный анализ конвективно радиационного теплопереноса в замкнутой воздушной полости с локальным источником энергии // Компьютерные исследования и моделирование. 2014.Vol. 6.P. 383–396.
2. J. Lu, S. Pal Arya, W. H. Snyder, R. E. Lawson, Jr A Laboratory Study of the Urban Heat Island in a Calm and Stably Stratified Environment. Part I: Temperature Field // Journal of Applied Meteorology. 1997. Vol. 36.P. 1377–1391.
3. Bogatyrev, G.P.,Excitation of a cyclonic vortex or a laboratory model for a tropical cyclone // Pisma Zh.Eksp. Teor. Fiz. 1990. V. 51. P. 557-559.
4. A. Sukhanovskii, A. Evgrafova, E. Popova Horizontal rolls over localized heat source in a cylindrical layer // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. Vol. 316. P. 23–33
5. Boubnov B. M., van Heijst G. J. F. Experiments on convection from a horizontal plate with and without background rotation // Experiments in Fluids.1994.Vol. 16.P. 155–164.
6. A. Sukhanovskii, A. Evgrafova, E. Popova Laboratory study of a steady-state convective cyclonic vortex // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2016. Vol. 142. P. 2214-2223

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОМ МОСТЕ ПРИ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

М.К. Ермаков
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Потеря устойчивости термокапиллярной конвекции в жидком мосте имеет число гидродинамическую природу при низких числах Прандтля и двойную гидротепловую природу при высоких числах Прандтля [1]. Эксперименты при высоких числах Прандтля показывают, что количественное совпадение с анализом линейной устойчивости требует учета теплообмена через свободную поверхность [2].

В данной работе спектр задачи линейной устойчивости [3] с использованием методов обратных итераций и Арнольди. Спектр линейной задачи представляет собой группы ветвей с азимутальными числами от 0 до 10. Получены и анализируются различия спектров линейной задачи для низких и высоких чисел Прандтля и влияния на них теплообмена через свободную поверхность, соответствующего условиям эксперимента MEIS на международной космической станции [2].

ЛИТЕРАТУРА.

1. M. Wanschura, V. M. Shevtsova, H. C. Kuhlmann, H. J. Rath. Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges. Phys. Fluids 7 (1995) 912-925.
2. K. Nishino, T. Yano, H. Kawamura, S. Matsumoto, I. Ueno, M. K. Ermakov. Instability of thermocapillary convection in long liquid bridges of high Prandtl number fluids in microgravity. J. Cryst. Growth 420 (2015).
3. M.K. Ermakova, M.S. Ermakova. Linear-stability analysis of thermocapillary convection in liquid bridges with highly deformed free surface. J. Cryst. Growth 266 (2004) 160–166.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF FLOW PATTERNS IN A VERTICAL T-JUNCTION CONFIGURATION

C. Evrim, A. Isaev, R. Kulenovic and E. Laurien
Institute of Nuclear Technology and Energy Systems, University of Stuttgart,
Pfaffenwaldring 31, 70569 Stuttgart, Germany

Turbulent and stratified mixing flows can cause thermal fatigue in nuclear power plant piping systems. In order to diminish the investigation effort of thermal mixing flow phenomena, a geometrically similar isothermal Mixed Fluid Interaction (MFI) mixing tee using a sodium chloride solution to model the cold heavy branch pipe fluid is built. The purpose of the MFI experiments is to predict the flow phenomena in the vertical thermal mixing Fluid Structure Interaction (FSI) T-junction configuration at the University of Stuttgart. Due to limited optical accessibility of the FSI facility a numerical similarity comparison of the flow phenomena occurring in both experimental setups (MFI/FSI) is essential. Thus, Large Eddy Simulations are carried out which are experimentally validated by applying the Particle Image Velocimetry and Planar Laser Induced Fluorescence measurement techniques and as well as benchmark data. The similarity investigation confirms the usage of three characterizing parameters for the adaption of relevant physical boundary conditions to the FSI setup (branch pipe Reynolds number (Re_b), mixing Richardson number (Ri) and momentum ratio (M_R)). Thereby, the evidenced similarity ensures the utilization of the cold mixing experimental setup for the visual prediction of flow patterns occurring in the hot mixing FSI facility.

Both, the MFI and the Vattenfall simulations show a good agreement with corresponding qualitative and quantitative experimental data. The comparison of the flow patterns shows a good similarity between both experimental setups (MFI/FSI) and confirms the use of the three non-dimensional parameters (Re_b, Ri, M_R) for recalculation of physical boundary conditions between the MFI and FSI setup, which allow to reproduce similar spatial and time dependent flow phenomena in both cases. Therefore, the demonstrated similarity ensure the utilization of the cold mixing experimental setup for the visual prediction of flow patterns occurring in the hot mixing FSI facility.

Keywords: Thermal fatigue, turbulent and stratified flow mixing, flow similarity, T-junction, flow patterns, LES.

RESULTS OF NUMERICAL BIFURCATION ANALYSIS IN SOME PROBLEMS OF LAMINAR–TURBULENT TRANSITION

Evstigneev N.M.
Federal Research Center "Computer Science and Control" of
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
evstigneevnm@yandex.ru

Abstract

An overview of numerical bifurcation analysis for some problems of laminar–turbulent transition (LTT) is presented from the dynamical system point of view. This work is a section of prime results that were obtained by the author for the last 7 years of work in this field. The LTT is considered as a succession of bifurcations, crisises and multistability swapping leading to initial stage of turbulence i.e. chaotic solutions. The results are mainly focused on supercritical LTT for such problems as Rayleigh–Bénard convection or Kelvin–Helmholtz instability problems. We use numerical methods to simulate problems with DNS resolution and use Poincarè section and phase space vector field techniques, stabilization of unstable solutions (stationary, periodic, quasi-periodic) and solution of the eigenvalue problems for the determination of bifurcation types. Is is shown that all considered problems, despite their complexity, have some standard features of transition to chaos. These features include generation of dense fractal winding in attractors that may trigger high dimensional chaos by intermittency crisis or appearance of Blue Sky catastrophe or by phase locking.

This work is supported by RFBR grant no. 17-07-00116.

1 Introduction

In this paper we present an overview of results for numerical bifurcation analysis for some problems of laminar–turbulent transition (LTT). The transition process, usually, can be divided into three parts: 1) loss of stability of the main solution (prime flow) either through subcritical or supercritical route; 2) succession of bifurcations with (mainly) increasing complexity; 3) formation of complex solutions with high order crisis regimes that lead to statistically developed turbulence. The idea of the analysis is not new and was used by many authors to explain the initial instabilities in the route to chaos. Some classical papers by Landau and Yudovich can be considered as the basis for this approach [1, 2, 3, 4, 5]. In all these papers analytical methods are applied that analyze the stability loss of the main solution with the representation of the reduced forms of the solutions by the application of linear analysis and week nonlinear perturbation theory. The technical difficulties that arise withing the framework of the analytical approach prohibit further research. So the second and the third parts of the LTT are analyzed by numerical methods, dominantally (counterexample, see [6, 13] and references there). First results in the area started to appear with the increase of the computational power by the end of the 80-th. Those results were obtained for 2D problems, for example [7, 8, 10] papers are dedicated to the circular Couette problems. Good example of such analysis is presented in [9] where a main 2D flow over the cylinder is considered and 3D perturbations are numerically analyzed. It is shown that 3D instabilities are developed right after the von-Karman shredding. Results mainly show the formation of either limited cycles of various period or limited 2D invariant tori with further evolution to the chaos. A possible existence of non-local bifurcations and bifurcations with co-dimension greater than 1 is assumed. The view of turbulence in the dynamical system interpretation in the perspective of the 80-th and 90-th is given in [11].

The analysis of full 3D problems and deeper insight in to the dynamical system characteristics is presented in papers, starting from the end of 90-th and begining of 2000-th. We present some notable examples of such papers. Backward-facing step flow problem is analyzed in [14] where a lowest Reynolds number of 3D perturbations is obtained for critical value of spanwise wave number and in [15] secondary bifurcation for the bifurcated limited circle are obtained for full 3D simulation. In [43] we also obtained secondary bifurcation of the limited circles and invariant tori, these results are shown bellow. The analysis of the double-diffusive convection problem was performed in [16, 17], where existence of low dismentional strange attractors is demonstrated. Another outstanding result for this problem is obtained at [18] where an existence of the Blue Sky catastrophe is presented for the first time for a 2D fluid dynamics problem. The Rayleigh–Bénard (RB) convection problem attracted much attension with 2D and 3D problem formulations (due to the link with nonlinear dynamics by notorious Lorenz system). Excellent analysis is performed in [19] for 3D RB problem in cylindrical geometry, see more information on bifurcations in the problem in the references there.

Poiseuille flow is also a problem that is drawing attension by the dynamical system community. We will not mension huge amount of literature dedicated to the subject, limiting only to bifurcation analysis. Some preliminary results of bifurcational analysis for 2D flow are obtained in [22]. Very detailed results on the 2D plane flow are obtained in [23] where the analysis of periodic cycles, their evolution and stability of invariant tori is performed. A clever model of exited medium analogue is proposed by Bartly in [20] that gives bifurcational approach to the explanation of the Poiseuille flow regimes with development of turbulent localized patches and turbulent puffs. Results of bifurcated solutions and route to chaos is presented in [21] where continuation of unstable solutions is performed for 2D plane Poiseuille flow. A 3D computationally stable invariant torus was obtained.

Another excellent research in the field of bifurcation analysis for the viscous ABC flow (3D in space) is conducted by O.Podvigina and co-authors in [27, 28, 29, 30, 31]. The results demonstrate emergence of limited cycles and 2D invariant tori, followed by stable 3D invariant tori, that, in turn, becomes unstable via phase locking. A global bifurcation is also suggested with the underlying heteroclinic structure. A deep research is conducted for the relation of symmetries in the ABC-flow with observed bifurcations.

Bifurcation analysis of the compressible flows are also performed, for example [24], where results are obtained for the flow in the cavity, showing existence of Hopf and period doubling bifurcations.

Such analysis requires the usage of complicated numerical methods on high performance computational architectures (DNS solvers; stabilization methods for stationary, periodic and quasi periodic solutions; solution of the eigenvalue problem). Good overview of great challenges in numerical aspects of the bifurcation analysis is given in some papers see [12, 33] and references there for more information.

One can see from the literature that there are some common features of LTT can be traced. First, all central manifolds are low dimensional at the start of the LTT. Second, multistability is usually observed and such observations are mistakenly taken for intermittency. Third, some computations reveal stable invariant 3D tori despite the work of Ruelle and Takens. Forth, appearance of chaotic attractors doesn't usually lead to turbulence. Fifth, all results are mainly focused on either 2D flows or reduced systems, only few results where full spacially 3D problems are considered. We wish to address all these questions so our goal is to trace the initial stage of laminar-turbulent transition in some problems governed by fluid dynamics equations using methods of bifurcation analysis as far (in parameter space) as possible. We started duing bifurcation analysis in fluid dynamical problems in 2006 and by 2008 we obtained first results (it took about 2 years to perform one route of bifurcations on CPU-based 32 core cluster). Now this work is accelerated by the application of the high performance computing on Graphical Processing Units (GPUs).

2 Definitions, Method of research

We consider the system of governing equations equiped with initial–boundary value problem. Such system is a time-continuous dynamical infinite dimensional system that can be written in the form:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{R}), \tag{1}$$

where $\mathbf{R}$ is the vector of bifurcation parameters, $||\mathbf{R}|| = N$. Let $\mathbf{x} \in \mathbb{M} \in X$, t is time, $\mathbb{M}$ is a phase space and $\varphi^t(\mathbf{x}) : \mathbb{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ is a phase flow on $\mathbb{M}$. Let $\gamma(t) \in \mathbb{M}$ be a phase trajectory of a solution of (1). Let us give some definitions, following [34] and [35].

Definition 1. *Compact set $B \in \mathbb{M}$, invariant with respect to φ^t is an attracting set if there exists a neighborhood U of the set B such that for almost all $\mathbf{x} \in U$, $\varphi^t(\mathbf{x}) \to B, t \to \infty$.*

Definition 2. *Attractor of the system (1) is an indecomposable attracting set.*

Definition 3. *Regular attractors of the system (1) are: stable singular points, stable invariant limited cycles and stable invariant tori of any dimension.*

We define the set of **regular attractors** including fixed points (P), invariant periodic orbits (Cn) of various periods (n) and invariant tori ($mTn := \bigotimes_{j=0}^{m} Cn_j$) of different dimensions (m) and possibly resonant (mTn_R).

All other attractors are defined as **singular attractors** including chaotic cycles and tori (C_c, T_c) and intermittency crisis (I).

Definition 4. *Singular attractor of (1) is an attractor that is not regular.*

Please note, that hyperbolic attractors are considered singular.

Definition 5. *Bifurcation points of the system (1) are those and only those points in which there is no continuous dependence of the phase portrait of the system by its parameters.*

Definition 6. *Global attractor is a union of all singular and regular attractors for the fixed bifurcation parameters of the problem.*

Linearize the system (1) on its regular *stationary* solution $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in B$ for the parameter value $\mathbf{R}_0$:

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathtt{L}(\mathbf{u}_0, \mathbf{R}_0)\mathbf{y}(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

where $\mathtt{L} : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ is a linear operator and

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x},t).$$

If the spectrum of $\mathtt{L}$ lies in the left complex half-plane when $\forall j = \{1,2\}, R_j \leq R_{0,j}$, and if $\exists j : R_j > R_{0,j}$ with one or few its eigenvalues that are moving in the right half-plane, then the system (1) has a bifurcation at $\mathbf{R}_0$.

If the linearisation (2) is done on the *periodic* regular solution $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) \in B$ with period $\mathcal{T}$ then the Floquet theory is used [36] and we have the following condition: if the spectrum of $\mathtt{L}$ lies inside or on the boundary of the unit circle $\forall j \in [1,..,N], R_j \leq R_{0,j}$, and if $\exists j : R_j > R_{0,j}$ with one or few eigenvalues of $\mathtt{L}$ that are moving out of the unit circle, then the system (1) has a bifurcation at $\mathbf{R}_0$. The operator $\mathtt{L}(\mathbf{u}_0, \mathbf{R}_0, \mathcal{T})$ is called the monodromy matrix and its eigenvalues are characteristic exponents.

Let numbers $M_j < +\infty$ be defined for all $j \in [1,..,N]$.

Definition 7. *The sequence of bifurcations:* $\forall \in [1,..,N] : R_{j,n} \to M_j, n \to \infty$ *is called the cascade of bifurcations.*

We use the term branch to define the branching of solutions at pitchfork and multistable points, since multistability usually develops in such complicated systems as Navier-Stokes equations. We assume that numbers M_j are chosen to represent chaotic solution. Any cascade of bifurcations we call a scenario of transition to chaos. Our analysis is based on the track of evolution in regular attractors and detection of local (pitchfork, saddle–node, Hopf, transcritical, period–doubling) and global (homoclinic, heteroclinic, infinite–period, Blue Sky ($BlueSky$)) bifurcations until all routes lead to Chaos, defined as ($Chaos$).

Problems are selected in such way that the central manifold theorem is applicationable. For more information on the central, stable and unstable manifolds in Navier-Stokes equations please see a good paper [32] and [25]. In our research we relay, mostly, on numerical analysis. We apply DNS timesteppers that are used to advance solution in time and parameter space, solve eigenvalue problems and give basis to stabilization methods for stationary (feedback controll and Newton's methods) and time periodic and quasi-periodic (Newton's method in Poincare map) solutions. Newton's methods require inversion of the Jacobi or Floquet projected linear operators on each iteration. To solve these problems we apply Krylov – type methods (BiCGStab(L) and GMRES) and use approximate preconditioners (constructed by low order numerical methods, e.g. Lax-Friedrichs solvers with artificial compressibility method for incompressible flows) solved by geometric multigrid method for acceleration with block Gauß–Seidel smoothers. For each problem we use at least two methods of discretization in timesteppers to perform results validation. To solve the eigenvalue problem we use the Implicitly Restarted Arnoldi method with polynomial filters and exponent preconditioner described in [38]. Methods that are used for stabilization are to be soon published. All codes are designed to be used on multiple GPGPU architecture clusters, performance of codes is outlined in [48].

3 Problems

First we present well known governing equations for our problems considered and then formulate the problems. We also include information on numerical method used to solve these particular problems. Some of these method are not yet published in full denail since the author is working alone.

Incompressible problems governing equations: *Let the domain* $\Omega \subset \mathbb{R}^k, k = 2, 3,$ *be given with initial and boundary conditions. Let the continuous vector-function* $\mathbf{f} : \Omega \times (0, T] \to \mathbb{R}^3$ *be given. For each value of the bifurcation parameter (e.g. Reynolds number - R) in the given finite segment find* $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T] \to \mathbb{R}^k$, $p : \Omega \times (0, T] \to \mathbb{R}$ *such, that the system of Navier-Stokes equations on* Ω *is satisfied:*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

Compressible problems governing equations: *Given* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, initial and boundary conditions. Let us define* f *as* $f : \Omega \times (0, T] \to \mathbb{R}$ *and* $\mathbf{f}$ *as* $\mathbf{f} : \Omega \times (0, T] \to \mathbb{R}^3$*. Then for each value of the bifurcation parameter from the given finite segment find* $\mathbf{u}$*,* ρ*,* E*, such, that the system is satisfied on* Ω*:*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial \rho}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j\right] = 0; \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ji}\right] = f_i, \quad i = 1, 2, 3;\\
&\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho E\right) + \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j E + u_j p - u_i \tau_{ij}\right] = 0; E = \tfrac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 + \rho e;\\
&p = (\gamma - 1)(E - 1/2\rho\mathbf{u^2}); \tau_{ij} = 2\mu S_{ij};\\
&S_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\tfrac{\partial u_k}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Here: E is a full gas energy; e is and internal gas energy; γ is the ratio of specific heats; p is a pressure; $\mathbf{u}$ is a velocity; ρ is density; μ dynamic gas viscosity.

3.1 Kolmogorov 2D and 3D problems

A.N.Kolmogorov's flow is a well known problem on an extended prediodic torus and 2D special problem formulation is used here as a benchmark against known data and verification of Galerkin methods at the begining of the research, though it was only published later. The author worked with D.A.Silaev on this problem during his study. General formulation for both 2D and 3D problems is: $\Omega = \mathbb{T}^k(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, α is the parameter on the periodic torus extension, for $k = 3$: $\Omega = [0, 2\pi/\alpha] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $R = \dfrac{\sqrt{A}}{\nu}\left(\dfrac{L_y L_z}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\mathbf{f} = (\sin(ny)\cos(mz); 0; 0)^T$; for $k = 2$: $\Omega = [0, 2\pi/\alpha] \times [0, 2\pi]$, $R = \dfrac{\sqrt{A}}{\nu}\left(\dfrac{L_y}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$,$\mathbf{f} = (\sin(ny); 0)^T$; m,n are the parameters of the forcing; A is the forcing amplitude; L_j is the dimension in j-th spacial direction; ν is the kinematic fluid viscosity.

The 2D problem is solved using spectral method with basis of trigonometric functions and Bubnov-Galerkin method using S-splines [37]. The 3D problem is solved using pseudo-spectral method and Bubnov-Galerkin method using S-splines. We use only one of these methods (spline method for 2D and pseudo-spectral method for 3D) to perform bifurcational analysis and compare results only at some points in parameter space.

3.2 Backward-facing step flow [43]

We define $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\Omega_1 = L \times H \times W$, $\Omega_2 = l \times h \times W$, where $L > l$, $H > h$. Wall boundary conditions are set for system (3), (4) for all $\partial\Omega_j$, except for inflow conditions at $\partial\Omega_j|_{x=0}$ and outflow conditions at $\partial\Omega_j|_{x=L}$. The other setup is when periodic boundary conditions are imposed in z direction.

We use three methods for this simulation. The first one is the hybrid finite element-finite volume method with finite volume used for convective part of equations using WENO-9 scheme. The pressure is projected using finite element staggered formulation that satisfies LBB condition, the method is discribed in [45]. The second method is the finite difference method constructed using compact differences schemes and standard pressure projection. The third method is the Lattice Boltzmann approximation of the incompressible system (3), (4) that is used to benchmark possibility to use these approximate methods for bifurcation analysis.

3.3 Rayleigh-Bénard convection problem

We focus on rectangular 3D domain, two problem setups are considered: $\Omega_1 = 1 \times 4 \times 4$ in rectangular doman with periodic boundary conditions along longer directions and two walls and $\Omega_2 = 1 \times 1 \times 1$ with wall boundary conditions. System (3), (4) is added with Oberbeck-Boussinesq approximation for $\mathbf{f} = RaPr(T - T_0)(0;0;-1)^T$ and heat transfer equation $T_t + (\mathbf{u}, \nabla)T = \Delta T$. Bifurcation parameters are Prandtl number $Pr = \dfrac{\nu}{\chi}$ and Rayleigh number $Ra = \dfrac{\beta g h^3 \Delta T}{\nu\chi}$, with χ is a fluid temperature transfer coefficient; β is a thermal expansion coefficient; h is a domain height; ΔT is the temperature difference; g is the gravity vector norm.

Two methods are used to solve the problem. The first one is appled to the rectangular domain is the Bubnov-Galerkin method with divergence-free basis, constructed using trigonometric polynomials in periodic directions and Chebyshev polynomials in wall-normal direction. The second method is the already mentioned hybrid finite element-finite volume method, applied for both problem setups.

3.4 Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities

The setup of the Kelvin-Helmholtz instability problem is the following. The domain is $\Omega = [8 \times 1 \times 1]$, the flow direction is from left to right. The following boundary conditions are imposed: $\partial\Omega(0, y, z) = \partial\Omega_0$ is the inflow boundary condition, $\partial\Omega(8, y, z) = \partial\Omega_1$ is the outflow boundary condition, $\partial\Omega(x, y, 0) = \partial\Omega(x, y, 1) = \partial\Omega_2$ is the periodic boundary condition in z direction and $\partial\Omega(x, 0, z) = \partial\Omega(x, 1, z) = \partial\Omega_3$ is the non-reflecting (symmetry) boundary condition. We use simple ghost cell boundary conditions for $\partial\Omega_2$ and $\partial\Omega_3$. For $\partial\Omega_1$ we use appropriately chosen absorbing boundary conditions with characteristic far-field treatment and we use characteristic boundary conditions for $\partial\Omega_0$. The initial conditions are identical to the boundary conditions on $\partial\Omega_0$ and are given bellow:

$$\begin{gathered} \rho|_{\partial\Omega_0} = 1.0, \\ u_x|_{\partial\Omega_0} = 3/2 + 1/2\mathrm{tanh}\left(\tfrac{y-1/2}{\delta} + C_z\cos(6\pi z)\right), \\ u_y|_{\partial\Omega_0} = 1 \cdot 10^{-5}\sin(6\pi y), \\ u_z|_{\partial\Omega_0} = 0, \\ p|_{\partial\Omega_0} = 22.14. \end{gathered} \tag{6}$$

The perturbations are set depending on the problem setup, either 2D (in this case $C_z = 0$) or 3D (in this case $C_z = 1$).

We setup the coupled (Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor) problem of analogously to the previous one but we have one more parameter, that is the Richardson number. The boundary on $\partial\Omega_0$ and initial values are set as follows:

$$\begin{gathered} \rho|_{\partial\Omega_0} = 1.1 + \tfrac{1}{10}\mathrm{erf}\left(\tfrac{y-1/2}{\delta} + C_z\cos(6\pi z)\right), \\ u_x|_{\partial\Omega_0} = 2.0 + \mathrm{erf}\left(\tfrac{y-1/2}{\delta} + C_z\cos(6\pi z)\right), \\ p|_{\partial\Omega_0} = 22.14 + \rho g y + (\rho_{max} - \rho)g. \end{gathered} \tag{7}$$

The Richardson number $Ri = \frac{gH(\rho_2-\rho_1)}{\rho_0(u_1-u_2)^2} < \frac{1}{4}$ is set depending on the problem in range of $1/5 - 1/8$, where $H = 4\delta$ is the length of the mixing layer and $\rho_0 = 1.2$. We also consider two options - $C_z = 0$ or $C_z = 1$.

To solve the problem numerically we use one numerical method based on exact Riemann solver (Godunov method) coupled with high order finite volume approximation using modified WENO-7 or 9 schemes [49] and compact differences for viscous tensor part.

Problem formulation

Having defined intitial-boundary-value problems for governing equations find cascades of bifurcations that represent transition to chaos and identify common and unique features from the phase space point of view. We use analytical methods for the stability analysis, where it is possible and relay on numerical analysis for this problem research.

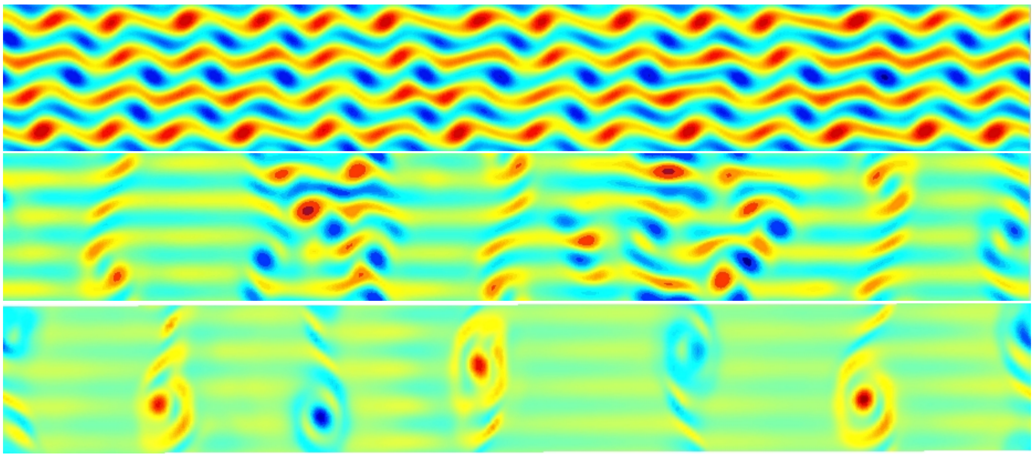


Figure 1: Solution complication in the 2D Komogorov flow, modulus of curl depicted, $R = 19, 30, 60$.

4 Results

Here we present the full bifurcation scenarios (with N and K are finite iterators in bifurcation maps).

4.1 Kolmogorov 2D and 3D flow problem [40, 41, 44]

The results of 2D physical space complication configurations with the growth of the Reynolds number are shown in figures 1. One can notice the formation of the traveling wave configurations. This is the result of the translational invariance of the solution that can be avoided by considering only the symmetry preserving subset of solutions. In this case one Hopf bifurcation is excluded, reducing the attractor dimension by one.

We focus on the phase space bifurcation patterns. The evolution of attractors is shown in figure 3 for the full problem formulation (i.e. without translation invariance).

We can clearly see the formation of the invariant torus via two successive Hopf bifurcations with further solution complication via Feigenbaum period doubling bifurcations. The phase locking can be observed at around $R \sim 20.17$, so we can confirm results of [26]. The further complication of the solution is taking the Sharkovskiy route to chaos. The invariant torus of period 7 and 3 can be traced at the Poincare section for $R \sim 20.203$. Further increase of the Reynolds number leads, possibly, to the Hopf bifurcation with the formation of the 3D invariant torus, that was traced using stabilization of the quasi-periodic orbit in the Poincare section. This can't be guaranteed (only partly confired by the analysis of the frequency spectrum) since Floquet theory analogue is not developed for quasi-periodic mappings. The last two sections present multistable results that are symmetric relative to the central point of the domain. These routes are also leading to attractor dismention increase and, further, to chaos.

The 3D Kolmogorov flow problem having analytical solution:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = R\frac{1 - \exp(-(2t)(R)^{-1})}{2}\mathbf{f}, t \geq 0,$$

is way more complicated having different routes to chaos, depending on the domain stretching ratio. For $\alpha \geq 1$ we observe analytically that the flow is not unconditionally stable (results now being submitted) as 2D flow behaves. The following scenario, shown in figure 4 for physical domain and in figure 5 for phase space correspond to the $\alpha > 1$.

We can see that at $\alpha = 1, R \sim 12.4903$ a double Hopf bifurcation of co-dimension 2 occurs with the foration of the invariant torus. However this torus is unstable, leading to the appearing "intermittency". With further analysis one can see, that the the solution behaviour is different. The trajectory of the attractor was analysed in all subsections. The bifurcation point in the Reynolds number line lies at a transversal intersection of two curves of Andronov-Hopf bifurcations. Two branches of torus bifurcations emanate from the point of double Hopf bifurcation. It is known [34] that for complex systems other bifurcations occur for nearby parameter values, including bifurcations of Shilnikov's homoclinic orbits to the focus-focus equilibrium, and bifurcations of a heteroclinic structure connecting saddle limit cycles and equilibria. For $R > 12.6$ we see the formation of

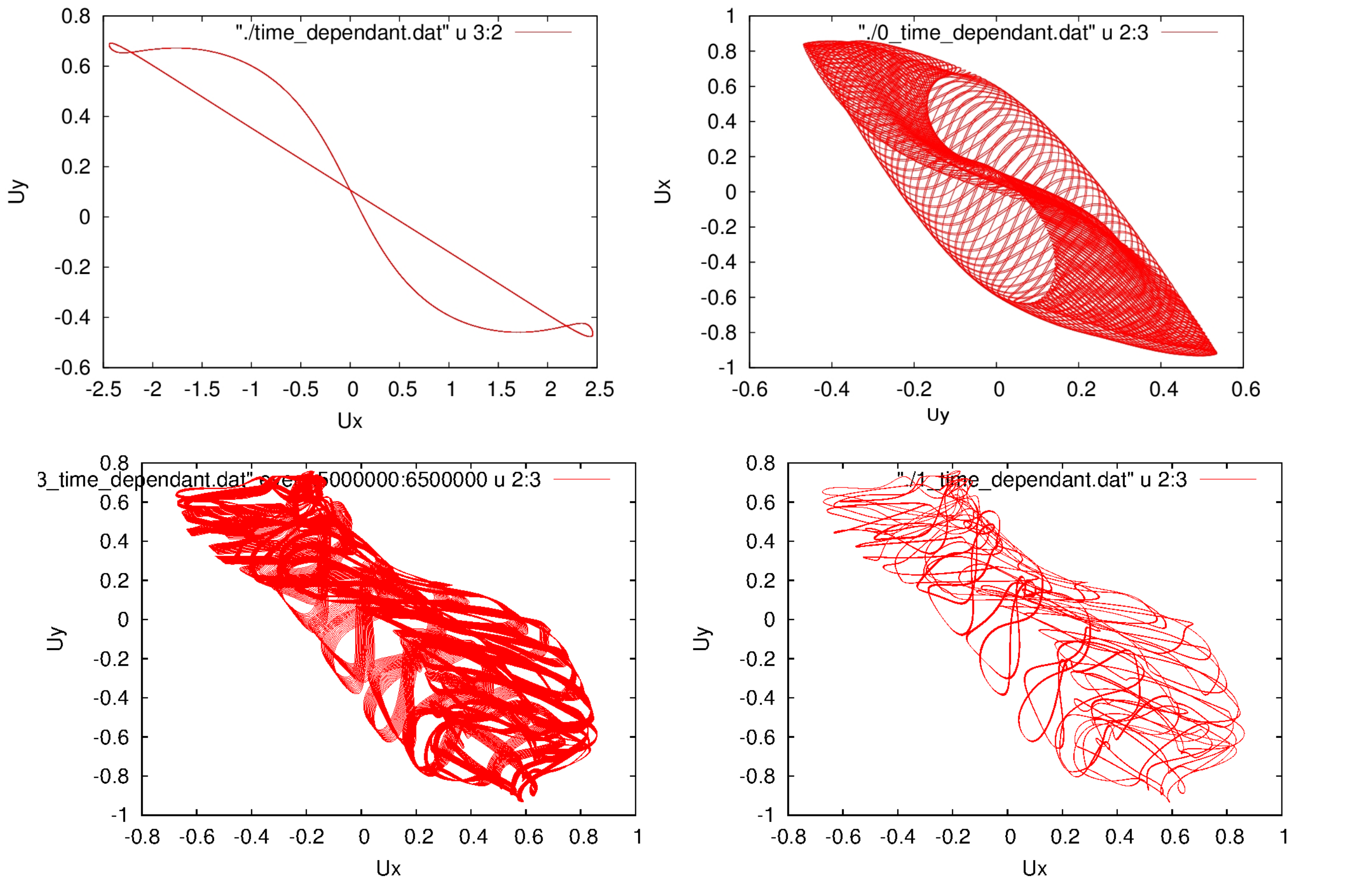


Figure 2: Phase space evolution in the 2D Komogorov flow, phase space projections, $R = 18, 19, 20.15, 20.17$.

a complex global attractor that appears to be a symmetry restoring – breaking intermittency. Time evolution of velocity at a central point is presented in figure (4). The situation is likely to develop as the "blue sky catastrophe" scenario [39], yet homoclinic curve travels through locally chaotic manifold generated by fast subharmonic cascade of one of the initial periodic orbits, see figures 5, upper right. The attempt to stabilize periodic solution failed for $R > 12.6$ so we can assume that one of the cycles loose stability through saddle-node bifurcation and forms a homoclinic orbit, thus leading to chaos.

For other aspect ratios the bifurcation analysis reveals a more classical picture of, mostly, supercritical bifurcations. These results are now being published in more details and are not presented here. We are able to trace Feigenbaum and Sharkovskiy sequencise of limited cycles bifurcations to singular low dimensional attractors with the formation of, possibly, full Smale horseshoe. Example of such attractor with fractal structure is presented in figure 6. The Hausdorf dimension of the Poincare section is measured with the MATLAB *boxcount* program resulting in $\dim(\mathcal{A}) = 1.2582 \pm 0.0168$ using at least 25 times zooming.

We also noticed the formation of computationally stable invariant 3D and 4D tori. These tori are formed partly due to the symmetry loss.

The full map of the bifurcation scenario is presented bellow:

$$\begin{aligned}
&P \to T \to BlueSky \to Chaos.\\
&P \to C \to\\
&1.\{[C \to C2 \to C4 \to \ldots \to C_c \to \ldots \to C2\cdot 9 \to\\
&\to C2\cdot 7 \to I \to C7 \to C5 \to C3]_K \to Chaos.\}\\
&2.P \to C \to 2T \to 3T \to 4T \to 4T_R \to Chaos.\\
&3.P \to C \to 2T \to 2T\cdot 2 \to \ldots \to 2T\cdot 3 \to Chaos.\\
&4. \to 2T \to 3T \to 3T_R \to Chaos.
\end{aligned} \tag{8}$$

Rayleigh–Benard convection in rectangular domains [42, 45]
We wish to show here only the most interesting results of the chaos formation. Different flow patterns are presented at figure 7. These patterns result in the formation of different bifurcation scenarios, however all these scenarios

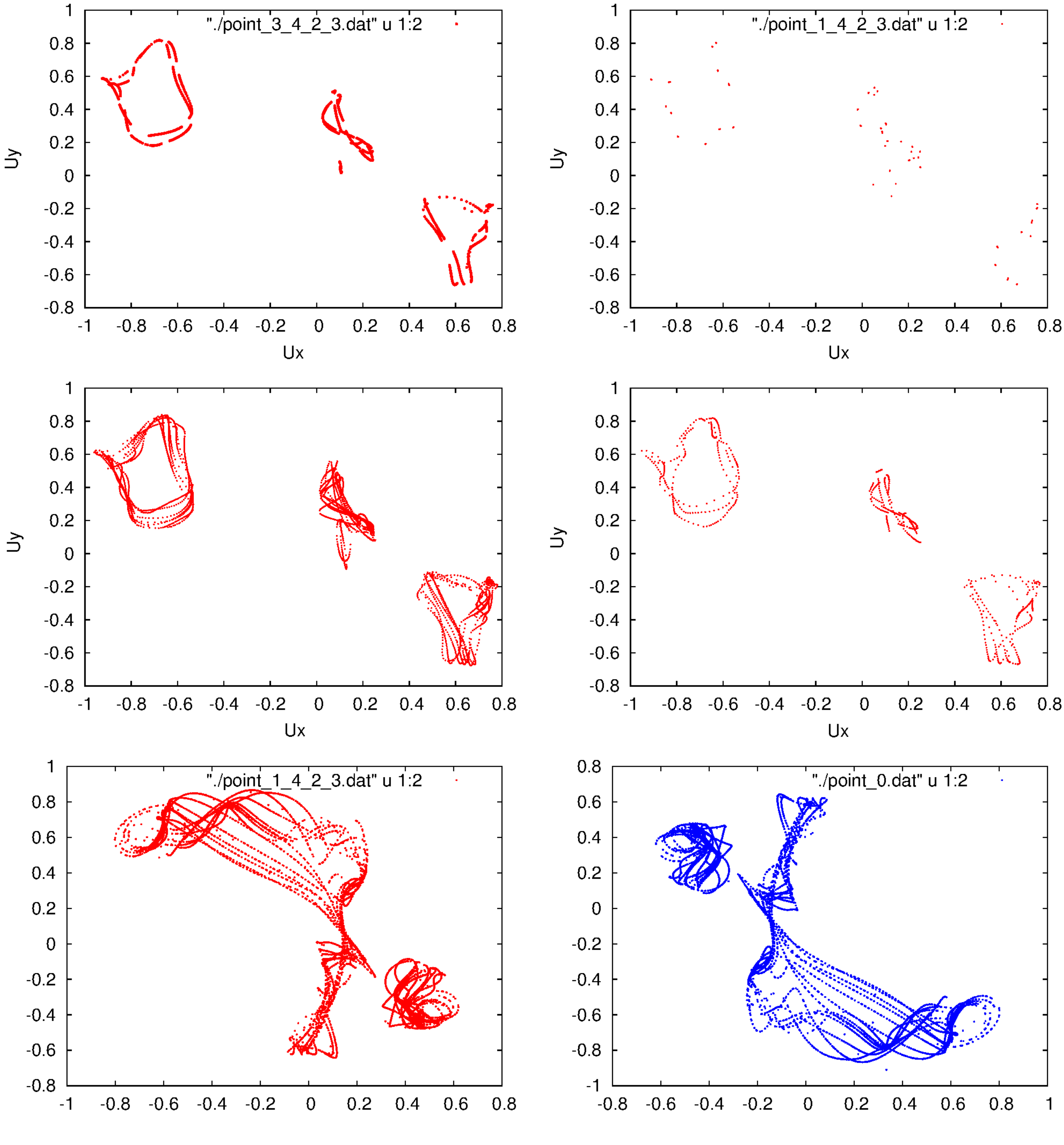


Figure 3: Phase space evolution in the 2D Komogorov flow, Poincare sections of projections, $R = 20.15, 20.17, 20.201, 20.203, 20.01m, 20.01p$.

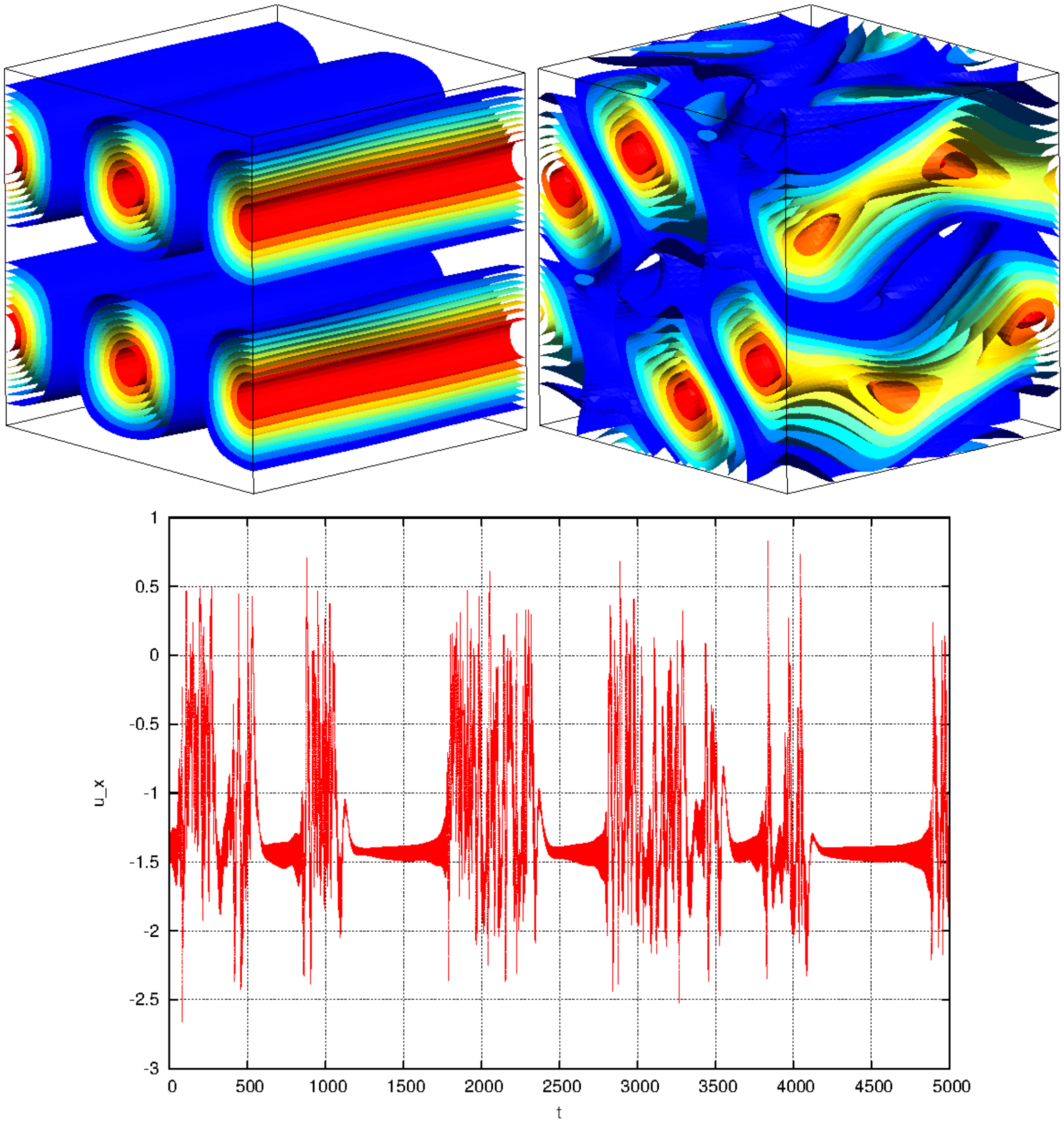


Figure 4: Velocity magnitude distribution in the 3D Kolmogorov flow problem for $\alpha = 1$, $R = 12.6$ at different times, ”intermittent” regime velocity component evolution at point.

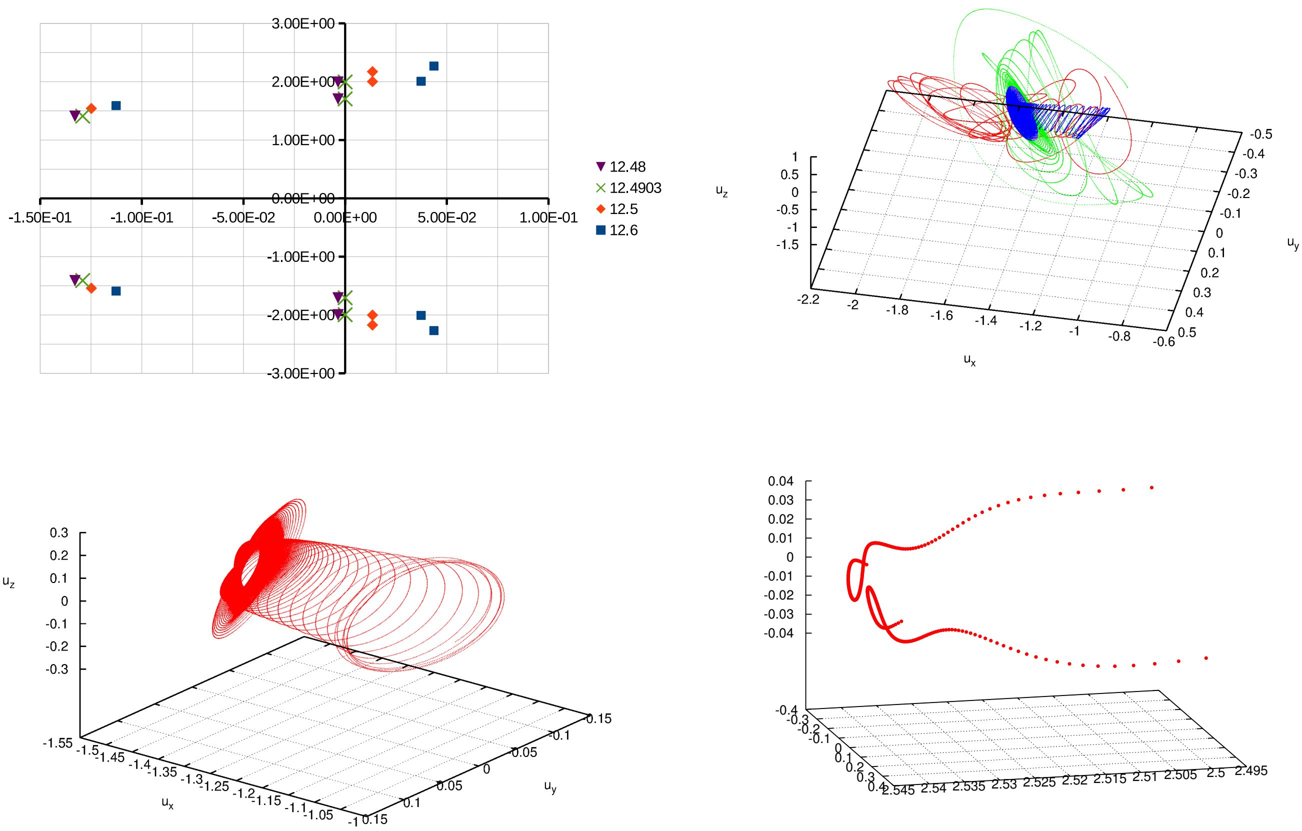


Figure 5: Leading eigenvalues near critical point for different R values, phase space projections in the 3D Komogorov flow, sections for $\alpha = 1$.

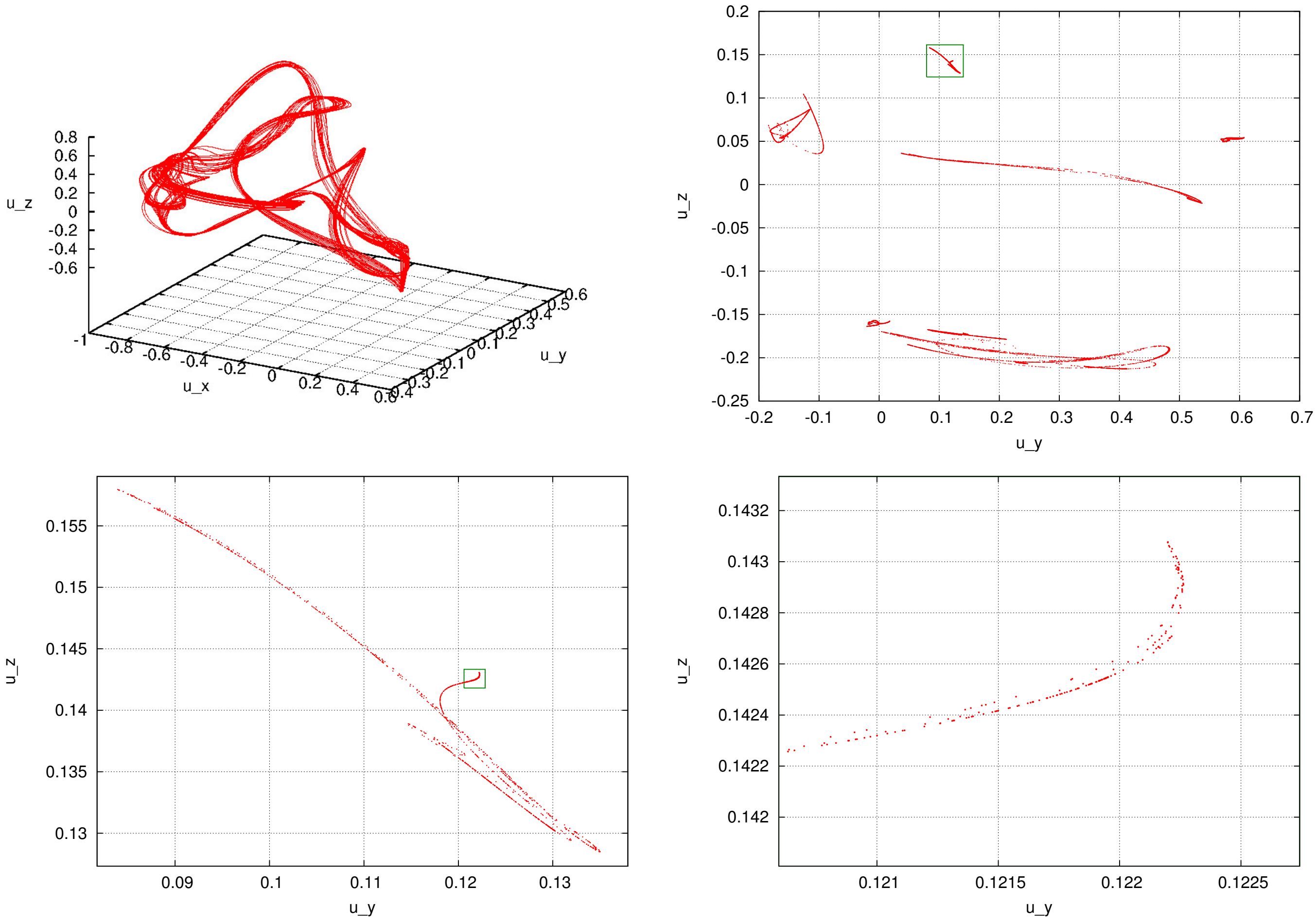


Figure 6: Fractal singular attractor with Smale horseshoe structure projection into phase subspace and succession of zoomed Poincare sections for $R = 11.29$ and $\alpha = 1/2$ (zoom pdf for details).

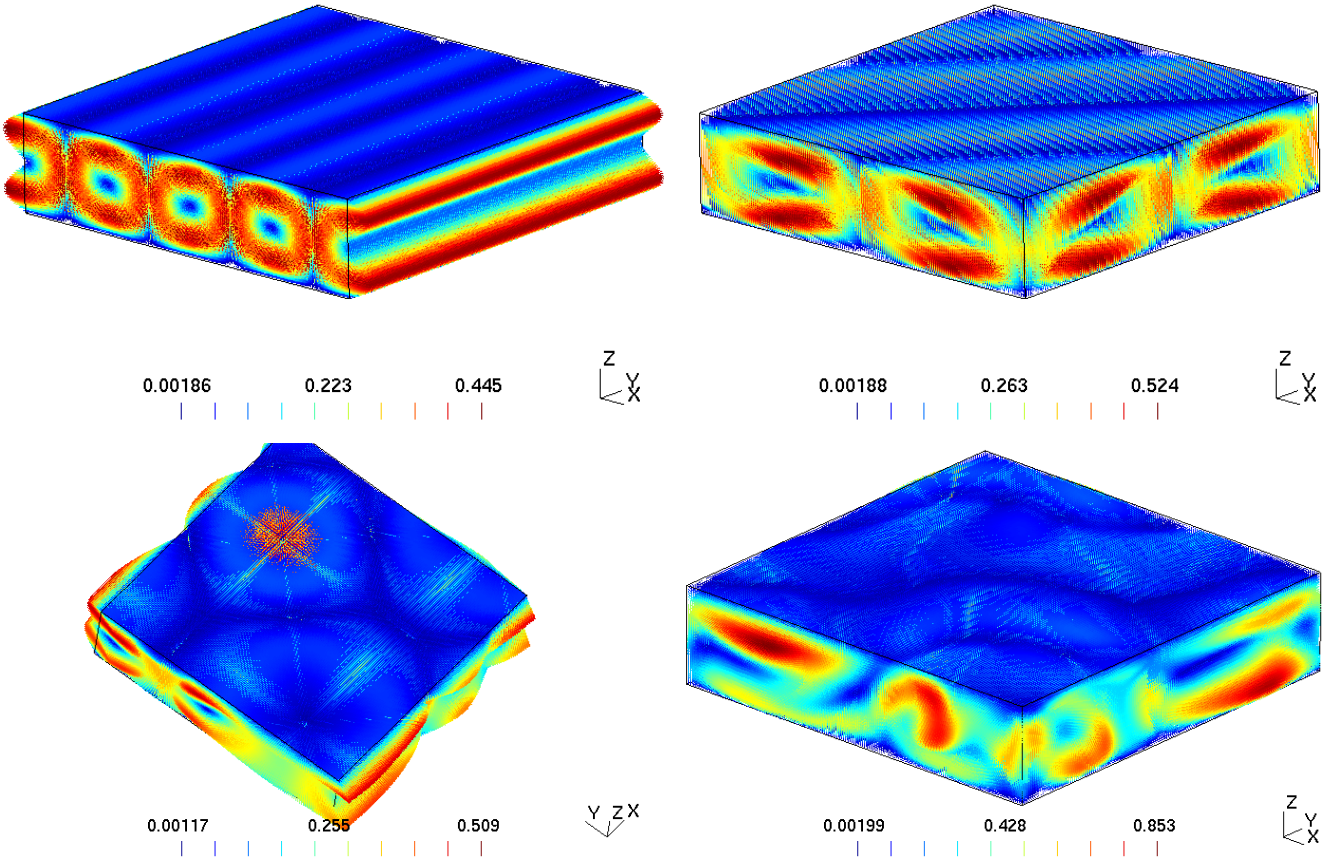


Figure 7: Configuration of velocities in the RB convection problem for different wave numbers, lower left is the oscillating solution corresponding to the periodic orbit.

are homomorphic in the phase space represented by either formation of cascades of limited cycles in Feigenbaum and Sharkovskiy sequences with developed singular attractors of low dimension. These cycles, mainly forming via supercritical and saddle-node bifurcations prone to loose stability via symmetry breaking or intermittency. This scenario is very hard to detect and was observed mainly on Fourier-Galerkin method simulations.

We also found the cascade of bifurcations that lead to the formation of singular fractal invariant 2D tori. An example of the Hopf bifurcation that leads to the 2D invariant torus is provided in figure 8. One can see the evolution of leading eigenvalues of the monodromy matrix for different numerical methods as function of Rayleigh number.

The observed torus suffers series of phase locking bifurcations that are further developing into a singular 2D invariant torus. The evolution of singular attractor is presented in figure 9. This formation is developing right after the phase locking - points that one can observe for $Ra = 8351$ is a phase locked invariant torus. The analysis of monodromy matrix leading eigenvalues (applied on the linearization of the phase locked invariant torus) reveals that the formation of singular cycle occurs through saddle-node and not period doubling bifurcation (the leading eigenvalues are leaving unit circle via (+1,0) point, but not (-1,0) point). It means that right after the phase-lock one can expect chaos regimes, as it is observed. The topology of this singular attractor can be described as:

$$2T_c := C_1 \otimes C_c, \tag{9}$$

where C_c is the singular cycle formed by the saddle-node bifurcation. Each observed cycle in the Poincare section in figure 9 is stabilized by the Newton's-method applied to the return map, except the one for $Ra = 8383$.

We analyze the dynamics on the return map. Let us consider a zoom-in of Poincare section at figure 9 for $Ra = 8377$ and construct Lameray diagram. In figure 10 we show a part of Poincare section (we selected the one that is closer to the straight line located at $0.255 < u_z < 0.267, -0.07 < u_y < -0.055$ on fig.9) that was rotated in such way that the image of the mapping is of minimal width. Then for this data we construct Lameray

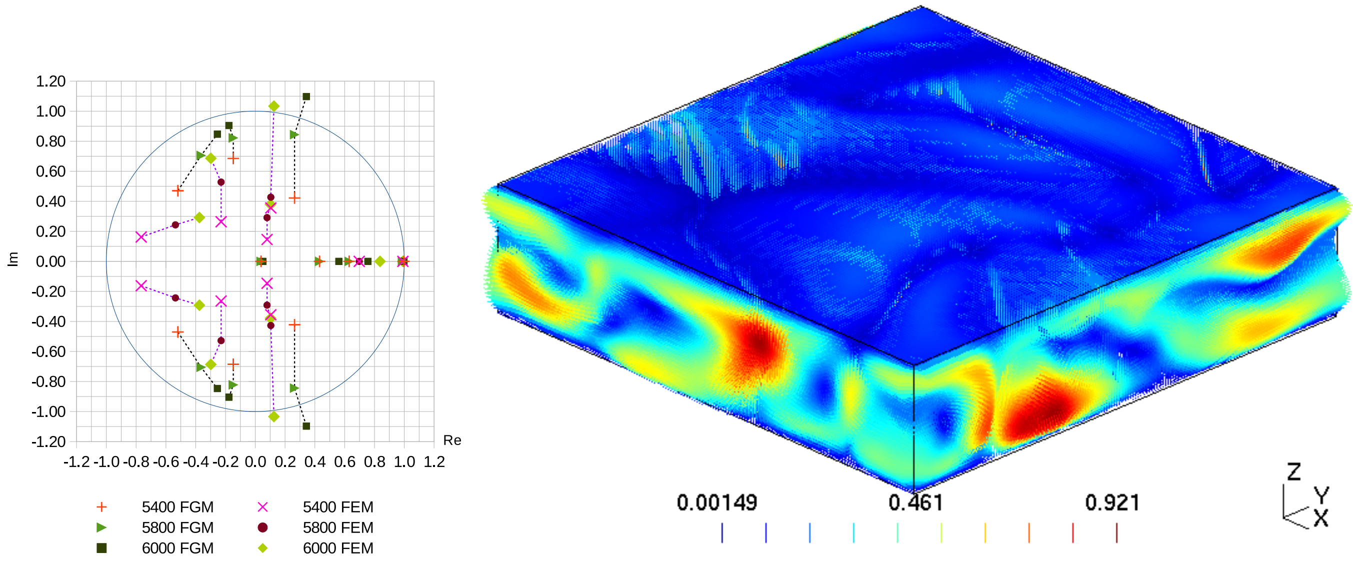


Figure 8: Ten leading eigenvalues of the Monodromy matrix(left) and velocity field that corresponds to the 2D invariant torus solution (right) for $Ra = 6000$, $Pr = 1$.

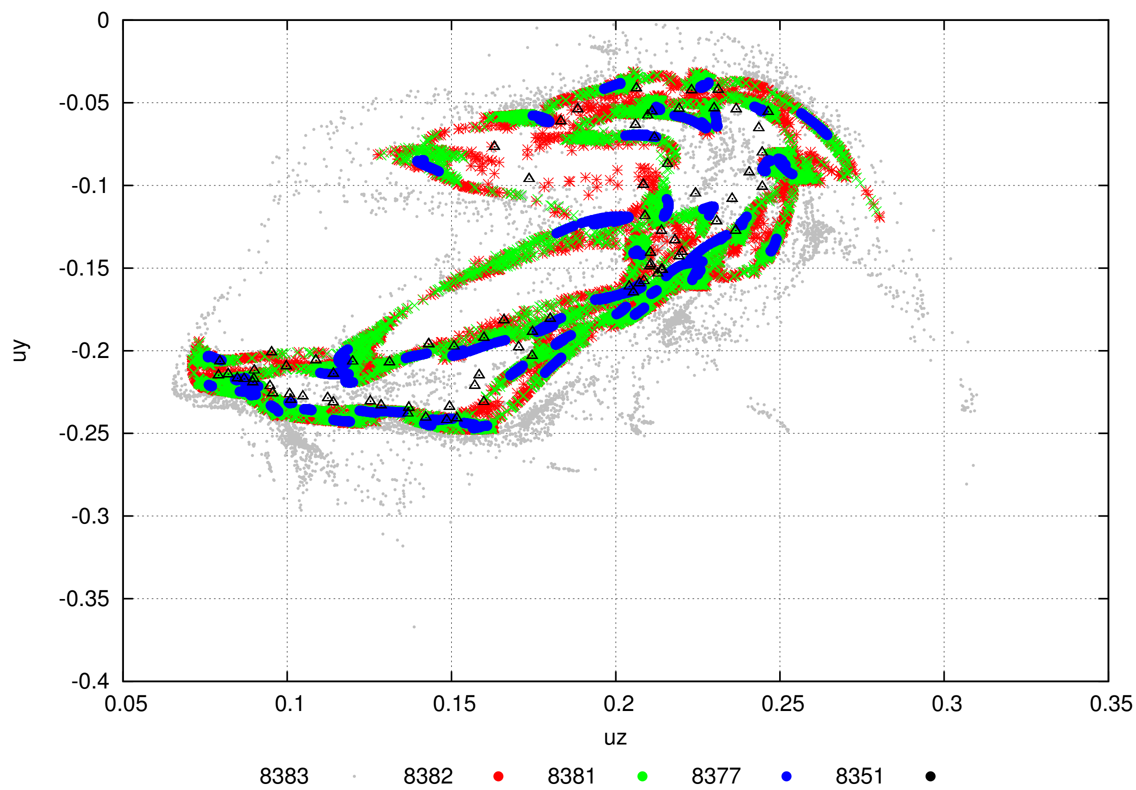


Figure 9: Evolution of the invariant 2D torus in the Poincare section as function of Rayleigh number with the formation of a singular attractor (zoom in for more details), $Pr = 1$.

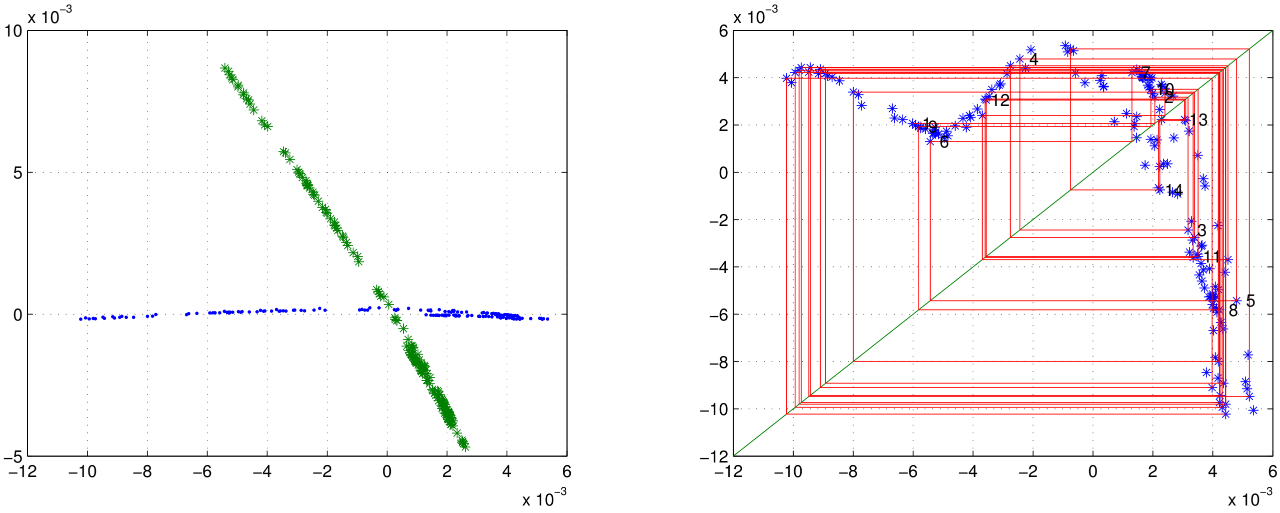


Figure 10: Poincare section fragment and its Lameray diagram for $Ra = 8377, Pr = 1$.

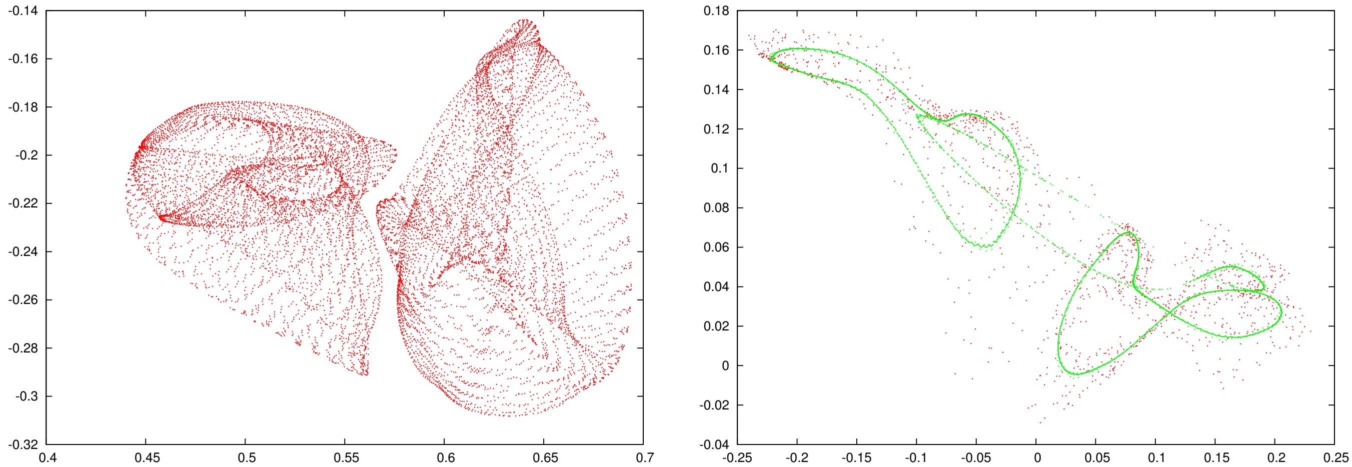


Figure 11: First and second Poincare section of the 3D ($Ra = 8590$) and forming 4D ($Ra = \{8618, 8618.5\}$) tori, $Pr = 1$.

diagram by considering mapping $U_n \to U_{n+1}$, where U is u_z data in selected Poincare section part. One can see that the iteration map has neither cyclic behavior (as can be exacted in case of finite number of period doubling bifurcations) nor convergence. If we take more data for the points in figure 10 we will observe the formation of a fractal set with infinitely many tight inclusions that will not change with the zoom-in. This diagram shows that even at the initial stage of the transition to chaos the attractor, though low dimensional, is very complex.

Another interesting scenario is related to the initial stage of Landau-Hopf scenario with the formulation of computationally stable invariant 3D and 4D tori. These results are shown in figure 11. We are unable to trace any other regular attractors after this point, the system becomes so sensative, that changing Ra from 8618.5 to 8618.6 leads to chaos. We assume that crisis emerges at this point.

The full map of the bifurcation scenario for cubic domain ($1 \times 1 \times 1$):

$$\begin{aligned}
&P \to C \to C2 \to .. \to C_c \to ...I \to ... \to C5 \to C3 \to ... \to Chaos.\\
&P \to C \to C2 \to C4 \to T \to 2T \to ... \to Chaos.\\
&P \to C \to C2 \to ... \to 2T_c ... \to Chaos.\\
&P \to C \to 2T \to 2T2 \to 2T4 \to ... \to Chaos.
\end{aligned} \tag{10}$$

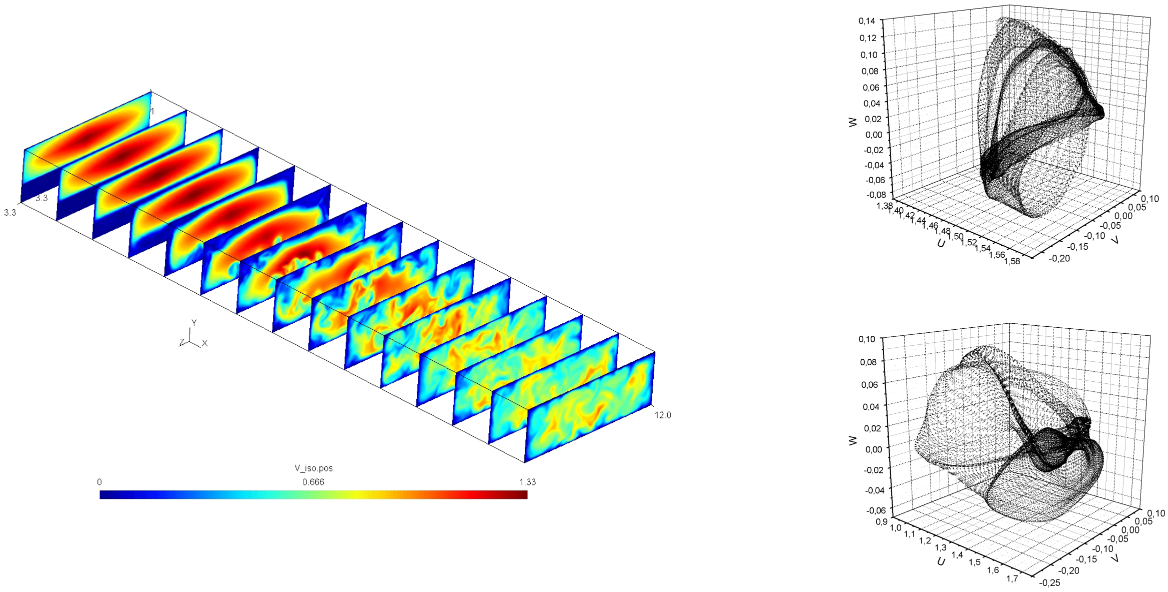


Figure 12: Velocity vector magnitude for the backward facing step flow central part $R = 900$ (left), and projection to the phase subspace of 2D invariant torus for $R = 881$ and $R = 881.5$ (right).

The full map of the bifurcation scenario for rectangular domain ($4 \times 4 \times 1$):

$$
\begin{aligned}
&P \to \\
&1.\{[C \to C2 \to C4 \to ... \to C_c \to ... \to I^* \to C2 \cdot 9 \to \\
&C2 \cdot 7 \to ... \to C7 \to C5 \to C3]\}_N \to Chaos. \\
&{}^* \to Chaos. \\
&2.P \to P \to 2T \to 2T_c^{**} \to 3T \to 4T \to Chaos. \\
&{}^{**}2T \to 2T_R \to 2T \to 2T_R \to 2T_R \to T_c(C \otimes C_c) \to Chaos.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Backward facing step flow [43, 46]

The backward facing step flow, historically, was analyzed after the 2D Kolmogorov flow and it took about 2 years to collect suitable data for analysis. There are two rotes to chaos we were able to detect, depending on the boundary conditions. The first one for periodic boundary conditions is analogous to the one given in [14], where the critical Reynolds number is found to be around 790 for the most dangerous span length $W \sim 7$. Then, the scenario is a low dismentional limited cycles bifurcation cascades leading to formation of singular cycles and transition to chaos through intermittency. This intermittency is triggerred, most probably by the swapping to the mulisable attractor of the closed basin of attraction. In case of a slight increase in the Reynolds number the flow can become chaotic by double Hopf bifurcation (symmetry loss). In this case the scenario is homomorphic to the scenario of the Kelvin-Helmholtz intability excluding intermittency, see bellow.

For wall bounded problem the route to chaos is different. The critical Reynolds number is around 837 resulting in the formation of the limited cycle, that further undergoes Hopf bifurcation (torus projection in subspaces is shown in figure 12) and another Hopf bifurcation forming a 3D computationally stable torus. The projections and Pincare sections of this process are shown in figure 13. We than witnessed formation of the computationally stable invariant 3D torus of period 2, shown in figure 14 that is formed by the fold bifurcation of one of the cycles. Further increase of the Reynolds number lead to chaos through fast formation of a singular attractor (possibly crisis) that is formed as $\bigotimes_{j=1}^{2} C_j \otimes C_c$. Topology of such attractor is analogous to the one observed in the RB convection above for 2D invariant singular tori. The latter Hopf bifurcation can be triggered by the symmetry loss in the $W = 0$ plane. The full map of the bifurcation scenario is presented bellow:

$$
\begin{aligned}
&P \to C \to \\
&1.2T \to 3T3 \to 3T2 \to 3T_R \times 2 \to Chaos. \\
&2.\{[C \to C2 \to C4 \to ... \to C_c \to I^{(1)} \to C2 \cdot 9 \to \\
&C2 \cdot 7 \to ... \to C7 \to C5 \to C3]\}_N \to Chaos.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

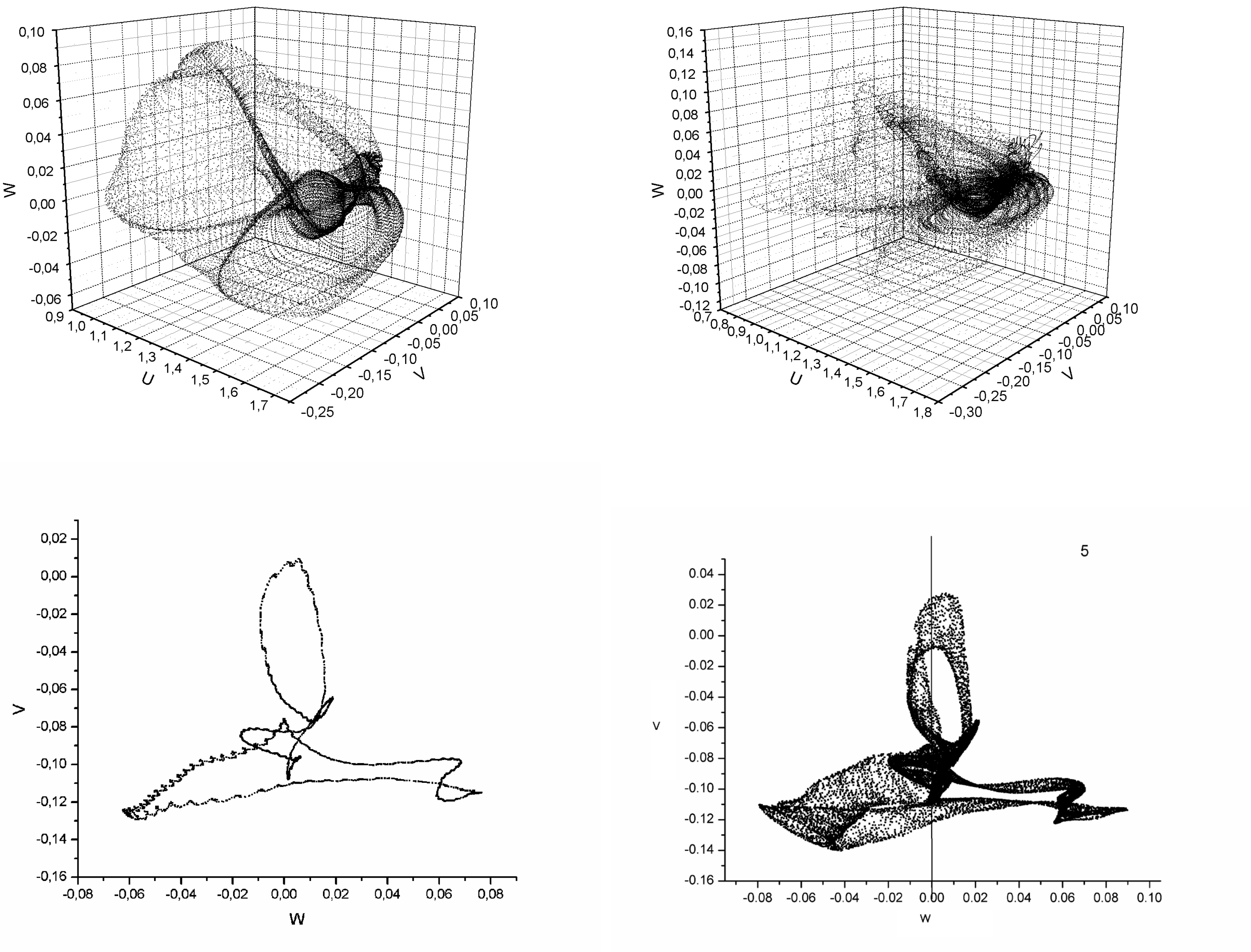


Figure 13: Evolution of invariant 2D torus ($R = 883.5$) to 3D torus ($R = 884.5$) and Poincare section.

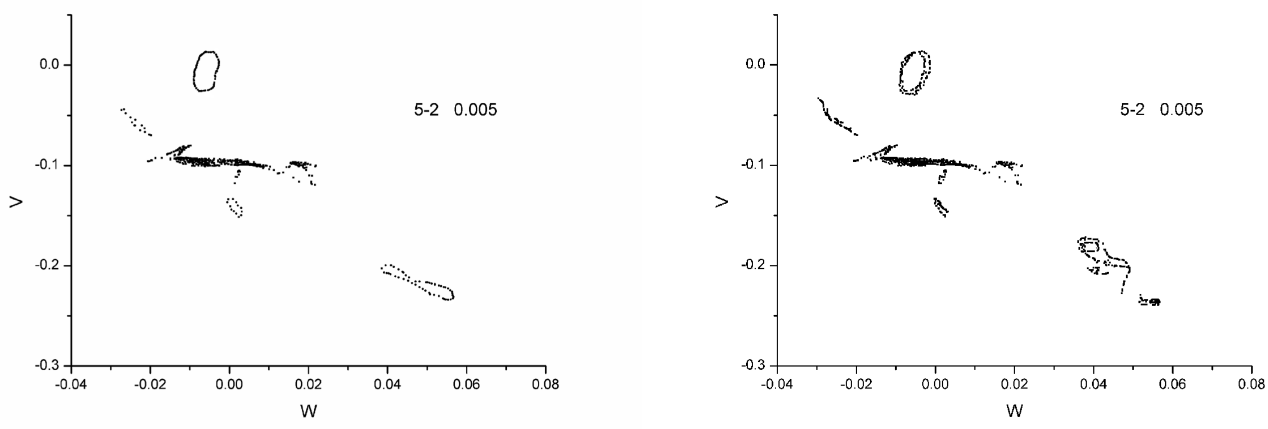


Figure 14: Evolution of a 3D invariant torus $R = 884.5$ to a 3D invariant torus period 2 $R = 884.55$, second Poincare section is shown.

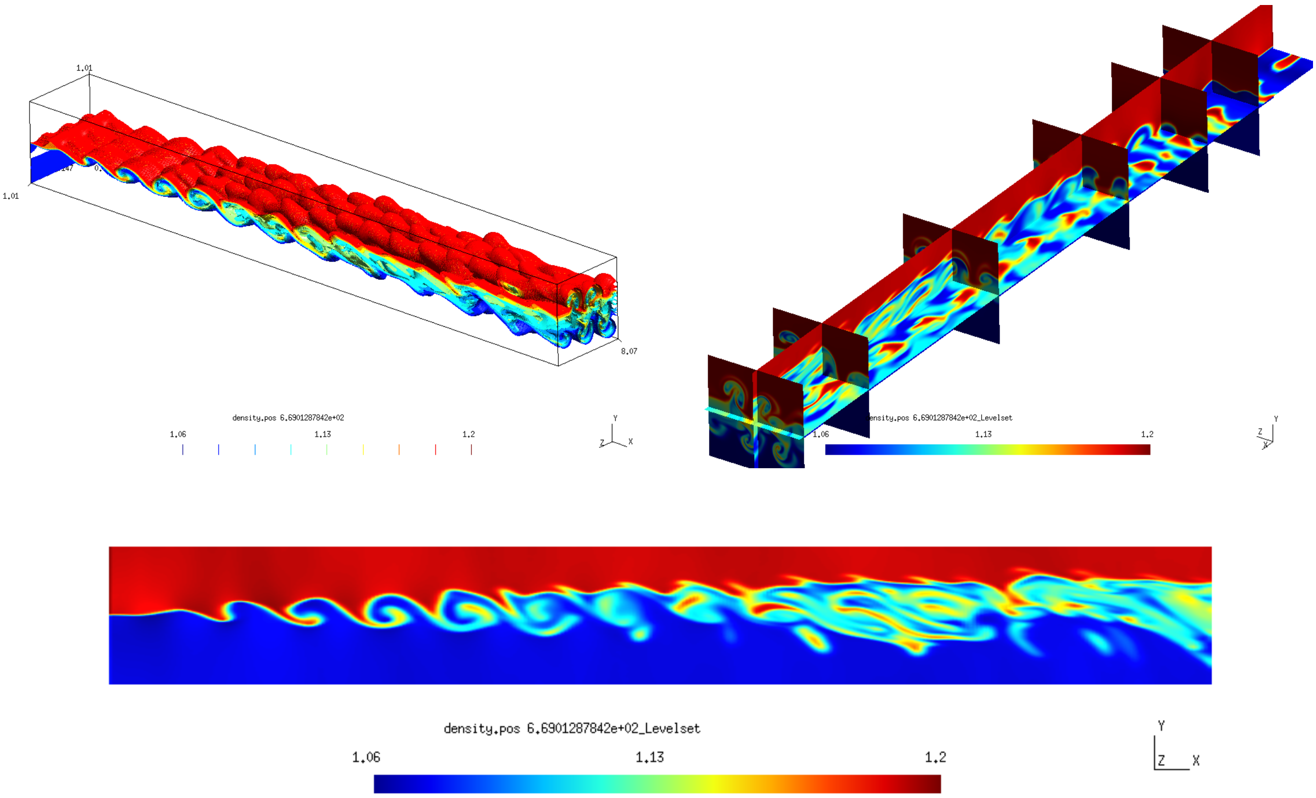


Figure 15: Isosurfaces of density for the coupled Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instability problem, $R = 520$ and section by $z = 0$ plane.

Interesting to note that the Lattice Boltzmann Model fails to predict 2D and 3D tori for wall bounded problem setup and generates three period doubling bifurcations of limited cycles with further break into chaos. In short Lattice Boltzmann method can't be used to perform bifurcation analysis, unless used with very high discretization.

Compressible Kelvin-Helmholtz and Rayleigh–Taylor instabilities [47] These results are mainly discussed in the book chapter referenced above. We just want to pinpoint some specific features. The flow of the coupled KH and RT instability problem is presented in figures 15 and 16. The problem is simulated for subsonic regime with $M_\infty = 0.8$ and $Ri = 1/5$. One can see the formation of KH billows followed by RT instability "mushrooms". Here we use Reynolds number as a bifurcation parameter, constructed using mixing height and velocity and density variation: $R = \frac{H(u_1 - u_2)(\rho_2 + \rho_1)}{2\nu}$. Please note, that the domain size in this problem setup is also a bifurcation parameter. We fix the length with $L_x = 8, L_y = 1, L_z = 1$ as stated in the problem formulation.

Initial stage of transition is analogous to the incompressible flow problems, namely, either through formation of periodic cycles with Feigenbaum and Sharkovskiy sequences, or by formation of invariant Tori cascades. We wish to illustrate the topology of a 4D stable invariant torus, appearing at $R = 520.5$ shown in figure 17. This torus is stable for all integration time and required about $1 \cdot 10^{11}$ timesteps to construct these sections. The formation of this invariant torus can be partly triggered by the symmetry loss.

The full map of the bifurcation scenario found for these problems is presented bellow:

$$\begin{array}{l}
P \to C \to ... \to C5 \to ... \to C11 \to ... \to C \\
P \to C \to 2T \to 3T \to Chaos. \\
P \to C \to C2 \to C4 \to Cn \to .. \to C5 \to C3 \to Chaos. \\
P \to C \to nC \to ... \to C \to 2T \to 3T \to ... \to 3Tn \to ... \to 4T \to Chaos.
\end{array} \tag{13}$$

5 Discussion

After considering these problems we formulate the following Conjecture:
The laminar–turbulent transition is related to the Feigenbaum and Sharkovskiy cascades with terminal formation of fractal attractors (possibly Smale's horseshoe maps) having dimension greater than three (e.g. an m is the

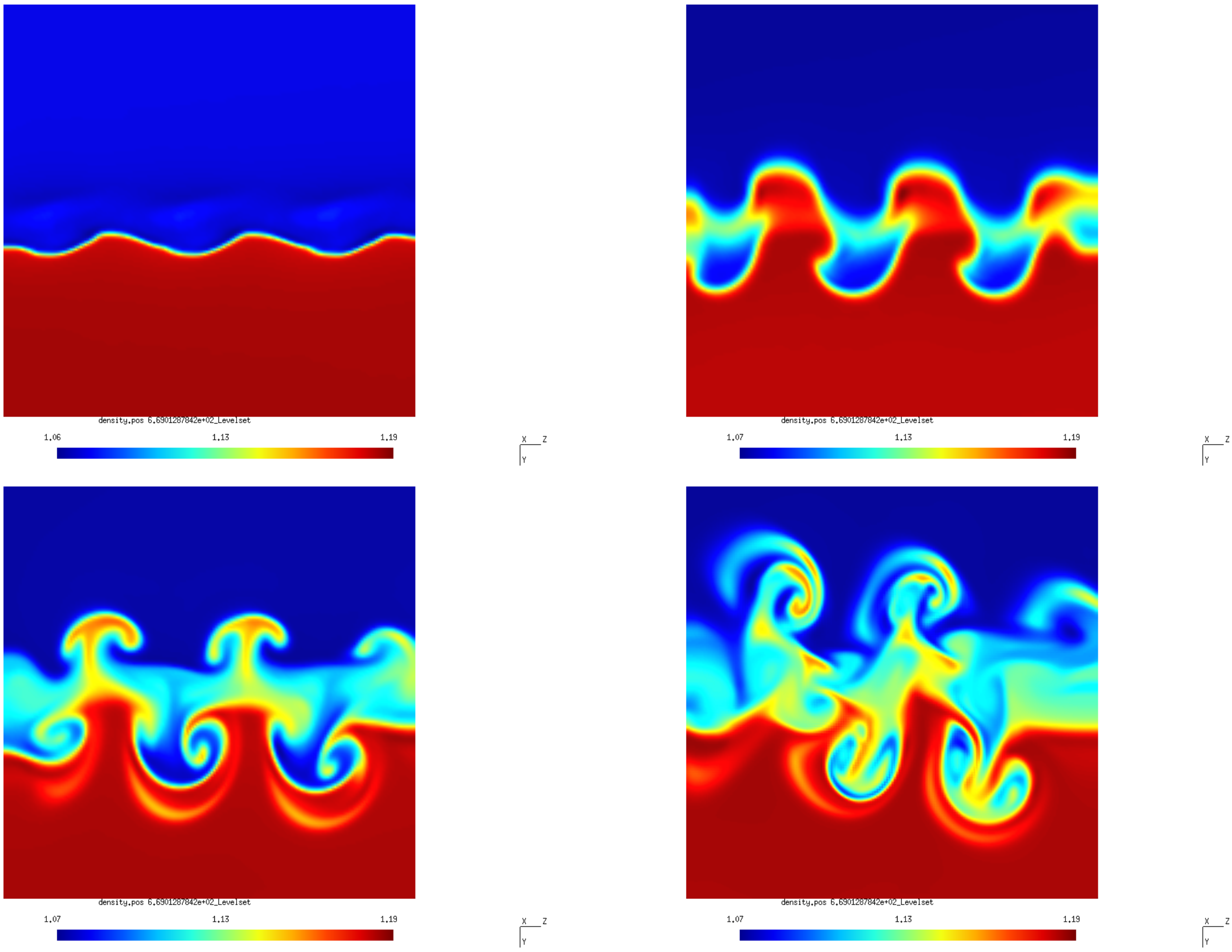


Figure 16: Sections of density distribution at different distances from the inflow boundary by planes $x = \{0.5, 1, 3, 5\}$.

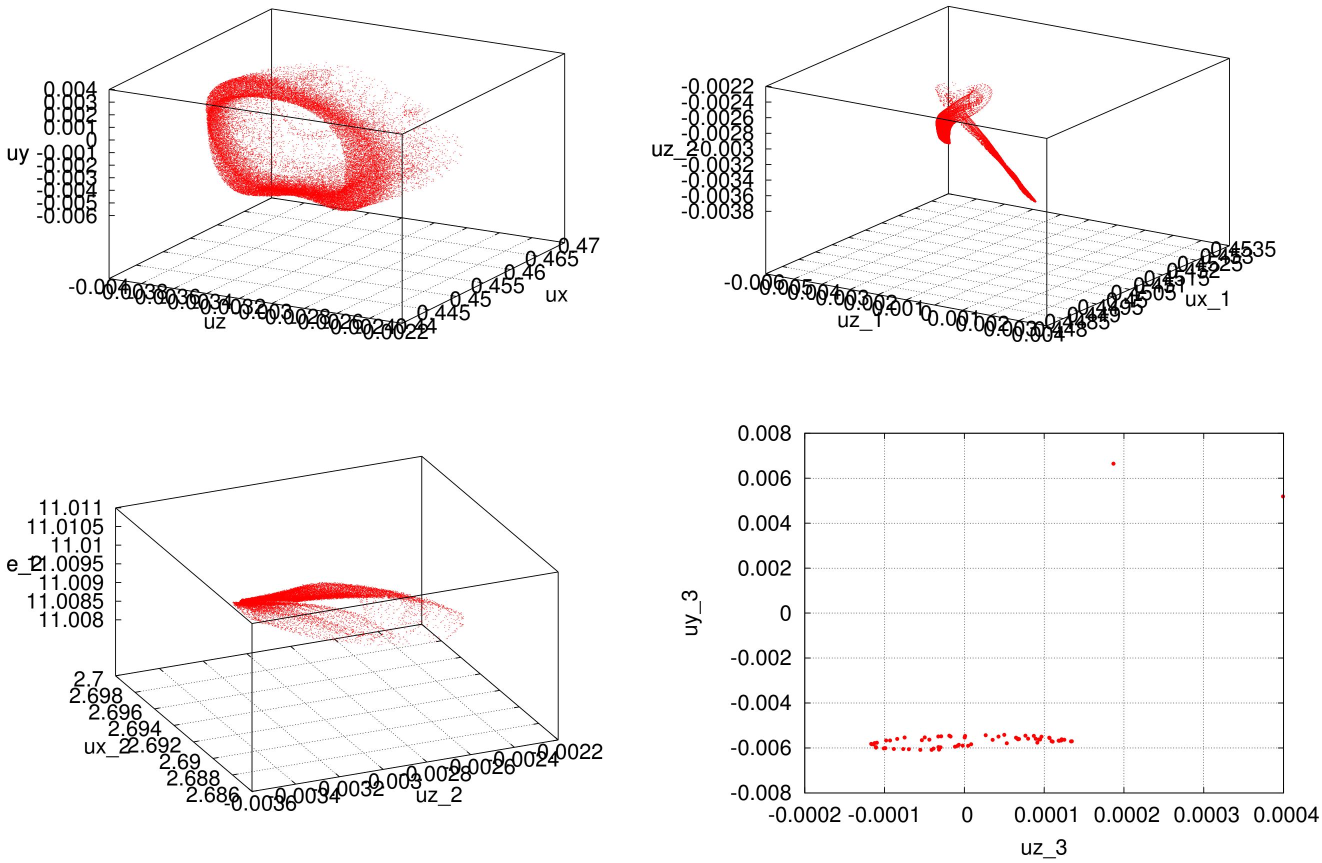


Figure 17: Projection in the 3D subspace of a computationally stable 4D invariant torus and its Poincare first second and third sections for $R = 520.5$.

torus dimension that is formed as $\underbrace{C \otimes ... \otimes C}_{m-1} \otimes C_c$ *and* $m \geq 2$ *). In this case the phase trajectory generates dense fractal winding that may trigger high dimensional chaos by intermittency crisis, by (possibly high dimensional) Blue Sky catastrophe or by phase locking thus leading to Chaos and, successively, turbulence.*

Such conjecture is confirmed by some computations shown above. However the problems that we considered are usually developing via supercritical route to chaos. A common milestone in the transition is the Feigenbaum and Sharkovskiy sequences of cycle periods. These sequences are not necessarily in the order of mentioned theories, for example appetence of cycle period 3 doesn't mean immediate chaos. So these results agree with FShM theory [35] only partly. On the other hand we witness formation of fractal locally hyperbolic attractors (prosumably, Smale horseshoe type). So it looks reasonable that this local hyperbolicity can trigger many degrease of freedom resulting in the catastrophic change in the attractor topology. The turbulent flow is then described as a multistable trajectory that is located on all singular hyperbolic attractors.

Now, the main difficulty is to explain results for dominantly subcritical transition to turbulence in terms of dynamical systems. Promissing results are obtained by, already cited, Barkley [20], where Hagen-Poiseuille flow is described as the reaction-diffusion-advection process in an 1D model. This is the main goal of my future work.

References

[1] Landau, L. D.: On the problem of turbulence.// Doklady Akademii Nauk SSSR. 44: 339–342, 1944.

[2] Yudovich, V.I.: An example of loss of stability and generation of a secondary flow in a closed vessel. Sbornik Mathematics, 116:4, 519–533, 1967.

[3] Ruelle, D. and Takens, F. On the Nature of Turbulence.//Commun. math. Phys. 20, 167–192, 1971.

[4] Kirchgassner,K., Kielhofer, H. Stability and bifurcation in fluid dynamics.// Rocky Mountain J. Math. 3(2), 275–318, 1973.

[5] Joseph, D. D.: Stability of Fluid Motions II. – Springer Tracts in Natural Philosophy, Mathematics, 1978.

[6] Johnson, R., Nistri, P., Kamenskii, M. Bifurcation of periodic solutions of the Navier-Stokes equations in a thin domain. // Topological methods in nonlinear analysis, 13(1), 53–72, 1999.

[7] Andereck, C.D., Liu, S.S., Swinney, H.L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders.//J. Fluid Mech., 164, 155–183, 1986.

[8] Feudel, F., Seehafer, N. On the bifurcation phenomena in truncations of the 2D Navier-Stokes equations.// Chaos, Solitons & Fractals, 5 (10), 1805–1816, 1995.

[9] Barkley, D., Henderson, R.D. Floquet stability analysis of the periodic wake of a circular cylinder. // J. Fluid Mech., 322, 215–241, 1996.

[10] Braun, R., Feudel, F., Seehafer, N. Bifurcations and chaos in an array of forced vortices.// Physical Review E 55, 6979, 1997.

[11] Bohr, T., Jensen, M.H., Paladin G. and Vulpiani, A. Dynamical Systems Approach to Turbulence. – Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[12] Sanchez, J., Marques, F. and Lopez,J. M.: A continuation and bifurcation technique for Navier-Stokes flows. J. Comput. Phys., 180, 78–98, 2002.

[13] Yudovich, V.I., Ovchinnikova, S.N.: Resonances in the intersections of bifurcations in the Couette - Taylor problem. Patterns and Waves, Saint-Petersburg, 55–77, 2003.

[14] Barkley, D., M. Gomes and D. Henderson. Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step.// J. Fluid Mech. 473:167–190, 2002.

[15] Rani, H.P, Sheu, T.W.H. Nonlinear dynamics in a backward-facing step flow.// Physics of Fluids 18, 084101, 2006.

[16] Sibgatullin, I.N., Gertsenstein, S.J., Sibgatullin N.R. Some properties of two-dimensional stochastic regimes of double-diffusive convection in plane layer. // Chaos, 13(4):1231-41, 2003.

[17] Gertsenstein S. J., Sibgatullin I. N. Bifurcation and attractors of double-diffusive convection in plain layer // Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 2009, Isola Rosa, Italy, 88–90, 2009.

[18] Meca E, Mercader I, Batiste O, Ramirez-Piscina L. Blue sky catastrophe in double-diffusive convection.// Phys Rev Lett. 92(23):234501, 2004.

[19] Boronska, K. and Tuckerman, L.S.: Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Benard convection. I, II. Time dependence and oscillations, Bifurcation diagram and symmetry classification. Physical Review E 81, 036320/1, 2010.

[20] Barkley, D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe.//J. Fluid Mech., P1, 803, 2016.

[21] Casas, P.S. Numerical study of Hopf bifurcations in the two-dimensional plane Poiseuille flow. – PhD thesis, Universidad Politecnica de Cataluna, 2002.

[22] Soibelman, I., Meiron, D.I. Finite-amplitude bifurcations in plane Poiseuille flow : two-dimensional Hopf bifurcation.//J. Fluid Mech. vol. 229, pp. 389–416, 1991.

[23] Casas, P.S. and Jorba, A. Hopf bifurcations to quasi-periodic solutions for the two-dimensional plane Poiseuille flow.//Com. Nonlin. Sc. and Num. Sim., 17(7), 2864–2882, 2012.

[24] Bres, G.A. and Colonius, T. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities.//J. Fluid Mech., 599, 309–339, 2008.

[25] Jolly, M.S. and Rosa, R. Computation of non-smooth local centre manifolds.// IMA Journal of Numerical Analysis, 25(4), 698–725, 2005.

[26] Lucas, D. and Kerswell, R. Spatiotemporal dynamics in 2D Kolmogorov flow over large domains. //J. Fluid Mech., 750, 518–554, 2014.

[27] Podvigina, O., Pouquet, A. On the non-linear stability of the 1:1:1 ABC flow.//Physica D Nonlinear Phenomena, 75(4), 471–508, 1994.

[28] Podvigina, O. Spatially-periodic steady solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equation with the ABC-force.// Physica D 128, 250–272, 1999.

[29] Ashwin, P., Podvigina, O. Hopf bifurcation with cubic symmetry and instability of ABC flow.// The Royal Society A,

[30] Podvigina, O.M. Investigation of the ABC flow instability with application of centre manifold reduction.//Dynamical Systems, 21(2), 2006.

[31] Podvigina, O., Ashwin, P., Hawker, D. Modelling instability of ABC flow using a mode interaction between steady and Hopf bifurcations with rotational symmetries of the cube.// Physica D: Nonlinear Phenomena, 215(1), 62–79, 2006.

[32] Podvigina, O.M. The center manifold theorem for center eigenvalues with non-zero real parts.// `http://arXiv:physics/0601074`, 2006.

[33] Dijkstra et.al. Numerical Bifurcation Methods and their Application to Fluid Dynamics: Analysis beyond Simulation. //Commun. Comput. Phys., 15(1)1–45, 2014.

[34] Kuznetsov, Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition, 2004.

[35] Magnitskii, N.A. and Sidorov S.V. New Methods for Chaotic Dynamics – World Scientific, Singapore 596224, 58, 2006.

[36] Chicone, C. Ordinary Differential Equations with Applications.–Springer-Verlag, New York, 1999.

[37] Silaev, D.A. Semilocal smoothihg S-splines. // Computer Research and Modeling, 2,(4), 349–357, 2010.

[38] Evstigneev. N.M. Implementation of Implicitly Restarted Arnoldi Method on multiGPU Architecture with Application to Fluid Dynamics Problems.//Communications in Computer and Information Science, 753, 296–311, 2017.

[39] Turaev, D.V. and Shilnikov, L.P. Blue sky catastrophes.//Dokl. Math. 51,404–407, 1995.

[40] Evstigneev, N.M., Magnitskii,N.A. and Silaev, D.A.: Qualitative Analysis of Dynamics in Kolmogorov's Problem on a Flow of a Viscous Incompressible Fluid.// Differential Equations, 2015, Vol. 51, No. 10, pp. 1–14., 2015.

[41] Evstigneev N.M.: Numerical bifurcation analysis in laminar-turbulent transition for 3D Kilmogorov-type flow. //Proc. BIFD-2017, 2017.

[42] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov S.V.: Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh–Benard convection. //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15:10, 2851–2859, 2010.

[43] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov S.V.: On The Nature Of Turbulence In A Problem On The Motion Of A Fluid Behind A Ledge. //Differential Equations, 45:1, 68–72, 2009.

[44] Evstigneev N. and Magnitskii N. Nonlinear Dynamics of Laminar-Turbulent Transition in Generalized 3D Kolmogorov Problem for Incompressible Viscous Fluid at Symmetric Solution Subset.// Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 6. 345-353, 2017.

[45] Evstigneev, N.M. Laminar-Turbulent Bifurcation Scenario in 3D Rayleigh-Benard Convection Problem.// Open Journal of Fluid Dynamics, 6(4), 2016.

[46] Evstigneev, N.M. and Magnitskii, N.A. FSM Scenarios of Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Fluids. - Chapter 10 in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. INTECH, 2013, pp.250-280.

[47] Evstigneev N.M. and Magnitskii N.A.: Numerical Analysis of Laminar–Turbulent Bifurcation Scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor Instabilities for Compressible Flow. – Chapter 2 in Turbulence Modelling Approaches - Current State, Development Prospects, Applications. INTECH, 2017, pp.29-60.

[48] Evstigneev, N.M. and Ryabkov, O.I. Application of multiGPU+CPU architecture for the direct numerical simulation of laminar-turbulent transition. //Num. Meth. and Prog., 17, 55–64, 2016.

[49] Evstigneev, N.M. On the construction and properties of WENO-schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen. Part 1,2.//Computer Research and Modeling, 8(5), 721–753, 2016.

ВОЗМОЖНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ УРОВНЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова
Институт механики МГУ, Москва

Экспериментально исследованы изотермические турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое. Объектом исследования были течения, формирующиеся при противоположном вращении границ слоя, поскольку в этом случае переход к турбулентности происходит при сравнительно небольших числах Рейнольдса [1]. Рассматривалось воздействие модуляции скорости вращения внутренней сферы на свойства турбулентности. В ходе экспериментов проводились измерения пульсаций скорости течения лазерным анемометром. Установлено, что в отсутствие модуляции наклоны спектров скорости близки к величине -11/5, что ранее экспериментально наблюдалось только в случае стратифицированных по температуре течений [2]. С увеличением частоты и амплитуды модуляции возможно формирование спектров, характерных для двумерной турбулентности: с наклоном -5/3 на низких частотах и наклоном -3 на высоких частотах. Показано, что при небольших амплитудах модуляции скорости вращения наблюдается снижение уровня турбулентных пульсаций скорости, и этот уровень в случае двумерной турбулентности ниже, чем в случае трехмерной [3]. Показано, что переход от трехмерной турбулентности к двумерной под действием модуляции обусловлен высоким уровнем синхронизации между скоростью течения и скоростью вращения сферы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-05-00004 и 18-08-00074).

ЛИТЕРАТУРА.

1. С.Я.Герценштейн, Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. Ламинарно-турбулентный переход в сферическом течении Куэтта при встречном вращении границ. Изв. РАН. МЖГ. 2001, №2, с. 56-63.
2. X.-D. Shang, K.-Q. Xia. Scaling of the velocity power spectra in turbulent thermal convection. Phys. Rev. E, 2001, 64, 065301.
3. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. Изменение свойств турбулентных течений в сферическом слое под действием модуляции скорости вращения. Письма в ЖТФ, 2017, т.43, 10, с. 87-94.

УСКОРЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЩЕЙ ДИНАМИКУ ВЯЗКОГО ГАЗА

К.А. Жуков, А.А. Корнев, А.В. Попов
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Рассматривается линеаризованная система дифференциальных уравнений, приближенно описывающая динамику вязкого баротропного газа. В работе получены результаты по ускорению граничной стабилизации, а именно: построено семейство управляющих граничных условий первого рода, обеспечивающих для известных начальных данных ускорение выхода на стационар соответствующего решения. Приводятся необходимые оценки скорости сходимости для нулевых краевых условий. Результаты получены как в случае дифференциальной системы уравнений, так и в случае конечно-разностной аппроксимации. Приводятся результаты численных расчетов стабилизации для начальных условий типа скачок давления и/или скачок плотности. Проведенные численные эксперименты показали эффективность рассмотренного подхода.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОШАГИЦЫ В СОПЛОВОМ АППАРАТЕ ТУРБИНЫ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ ВИБРОНАПРЯЖЕНИЙ В РАБОЧИХ ЛОПАТКАХ

В.Н. Заваркин, А.Н. Поткин, И.А. Немтырева
ПАО «ОДК-Сатурн», Рыбинск

Доводка изделия является наиболее трудоемким и продолжительным этапом создания газотурбинного двигателя. Часто при эксплуатации обнаруживается, что не обеспечиваются заявленные характеристики двигателя, например, присутствуют повышенные вибрационные напряжения в рабочих лопатках турбины, снижающие надежность работы изделия в течение заданного ресурса.

Для решения технической задачи, направленной на уменьшение вибрационных напряжений на рабочих лопатках первой ступени турбины ГТД-110, возникающих за счет взаимного влияния венцов вверх и вниз по потоку и переменных по времени силовых нагрузок, связанных с недостаточным осевым зазором между венцами турбины, была предложена разношагица [1, 2] в расстановке сопловых лопаток второй ступени при условии минимального изменения существующей конструкции. Исходный вариант конструкции соплового аппарата представляет собой двухлопаточные блоки с постоянным шагом Δ_1 расстановки лопаток числом z=48. Для получения разношагицы и снижения риска возникновения возбуждающих колебаний на рабочем колесе первой ступени по 48 гармонике, сопловой аппарат делится на два неравных полукольца 1 и 2 в соответствии с рисунком 1. Причем для возможности создания разношагицы количество лопаток уменьшено на одну за счет того, что от одного двухлопаточного блока отрезается часть с лопаткой. В дальнейшем блоки разделяют на две группы, первую из которых устанавливают в СА без изменений относительно исходной конструкции (полукольцо 1), а во второй группе у блоков при механической обработке удаляют с торцев припуск меньше (полукольцо 2), чем у блоков первой группы. То есть первую группу двухлопаточных блоков устанавливают в окружном направлении как в исходном варианте конструкции с постоянным шагом Δ_1. Вторую группу двухлопаточных блоков устанавливают в окружном направлении с переменным (чередующимся) шагом Δ_2 между лопатками соседних блоков, при этом между лопатками в блоке шаг остается Δ_1.

Для подтверждения влияния такой схемы на структуру потока было выполнено нестационарное численное моделирование течения газа во второй ступени турбины на номинальном режиме работы двигателя. На гистограмме газовых сил (рис.2), полученной при выходе на установившийся расчетный режим в момент времени, соответствующий полному обороту колеса, четко видна зона прохождения рабочими лопатками области с разношагицей, причем газовые силы, действующие на рабочие лопатки, проходящие через область с разношагицей, превышают газовые силы, действующие на рабочие лопатки, проходящие через область с постоянным шагом, на 6%.

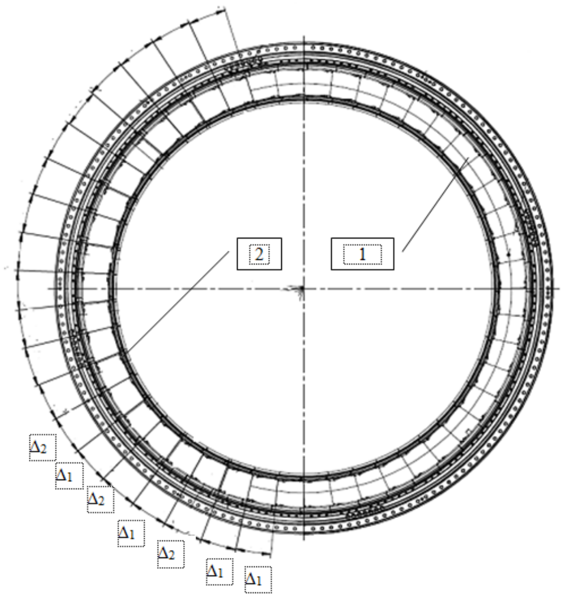


Рисунок 1

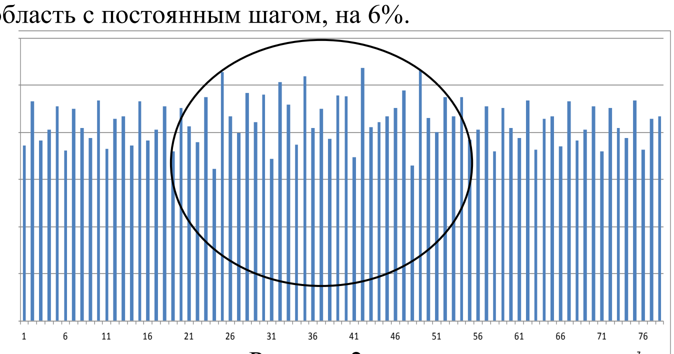


Рисунок 2

Таким образом, по результатам расчета выявлено влияние неравномерной расстановки сопловых лопаток в сопловом аппарате на величину газовых сил, действующих в осевом направлении на последующий венец рабочих лопаток, вследствие чего возникает неравномерность потока, которая должна снижать амплитуду переменных напряжений в рабочих лопатках при их колебаниях по высокочастотным формам вверх и вниз по потоку [1].

На настоящий способ доводки соплового аппарата турбины газотурбинного двигателя получен патент на изобретение.

ЛИТЕРАТУРА.

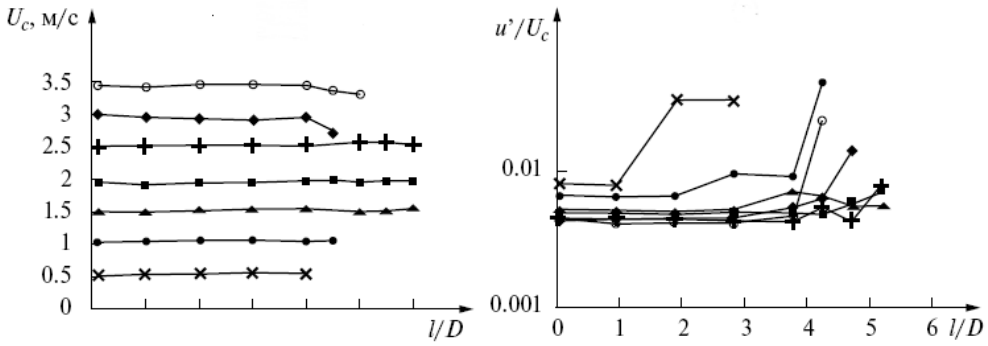
1. И.А. Биргер и др. Расчет на прочность деталей машин. М: Машиностроение, 1993, с.126-127.
2. Описание изобретения к авторскому свидетельству СССР №274956; МПК F01D9/02, F01D5/10; дата подачи заявки 24.02.1969; опубл. 23.02.1986

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

Ю.С. Зайко, А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов, А.Д. Чичерина
Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Проведены расчетные и экспериментальные исследования формирования и течения ламинарной затопленной струи диаметром 0.12 м при числах Рейнольдса ~ 10000. Струя сформирована с помощью компактного устройства, основным элементом которого служит сверхкороткий диффузор. Экспериментальные результаты подтверждают ламинарный характер течения на расстоянии 5.5 начальных диаметров струи от формирующего устройства при оптимальных скоростных режимах. Проведены и подтверждены экспериментальными результатами расчеты течения внутри диффузора. Они иллюстрируют влияние геометрии канала диффузора и сопротивления сеток на выходе из него на профиль скорости формируемой струи. Для измерения поля скорости использовался термоанемометр DISA 56C01 CTA, сигнал с него передавался на аналого-цифровой преобразователь и обрабатывался. Скорость и турбулентные пульсации измерялись проволочными датчиками малого размера Dantec Dynamics 55P11, закрепленными на устройстве перемещения. Длина нити датчика составляла 1.25 мм, толщина – 5 мкм. Визуализация струи выполнена с помощью светоотражающих частиц, лазера KLM532 и видеокамеры [1].

Измерения при фиксированном скоростном режиме показали, что скорость и начальная интенсивность турбулентных пульсаций сохраняются на оси струи на расстоянии нескольких диаметров, а на определенном расстоянии, различном для разных скоростных режимов, от выхода из установки начинают изменяться (скорость падает, турбулентные пульсации растут). Результаты измерений профилей скорости и пульсаций на различных расстояниях от выхода из диффузора показали, что струи с самым длинным ламинарным участком реализуются для данного формирующего устройства при скоростях, изменяющихся в диапазоне U_c = 1.5–2.5 м/с.



Скорость U_c и турбулентные пульсации u'/U на оси струи на различных расстояниях l от формирующего устройства при интенсивности турбулентности на входе 0.6%.

Ламинарная затопленная струя

Для изучения картины течения внутри диффузора и детального исследования профиля скорости, на выходе из установки, проведен расчет течения за детурбулизующей частью формирующего устройства. Методом контрольных объемов в пакете ANSYS CFX решались уравнения Навье–Стокса и моделировалось ламинарное течение в диффузоре.

Расчеты показали, что при U_c = 0.5 м/с касательное напряжение всюду на стенке канала положительно, в то время как при U_c = 2.5 и 3.5 м/с на небольшом участке стенки диффузора касательное напряжение отрицательно, что соответствует локальной зоне отрыва. Причиной возникновения локального отрыва при увеличении скорости потока является слишком резкое увеличение диаметра канала диффузора в области перехода от цилиндрической части диффузора к расширению. Сглаживание этой части профиля канала и использование пакета сеток с большим коэффициентом сопротивления устраняют возникновение локального отрыва в исследуемой области параметров течения и увеличивают длину ламинарного участка затопленной струи.

С использованием полученных профилей скорости на выходе из диффузора были проведены численные исследования линейной задачи гидродинамической устойчивости. Они показали, что уменьшение длины ламинарного участка при скоростях, превышающих оптимальную, происходит за счёт увеличения скорости роста возмущений, причем амплитуда наиболее быстро растущих возмущений максимальна в окрестности точки перегиба у внешнего радиуса струи. Режим, соответствующий наибольшей длине ламинарного участка, вырабатывается за счёт оптимального баланса между входным уровнем пульсаций, т.е. начальной амплитудой возмущений, и скоростью их нарастания.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Reshmin A., Sudarikova A., Teplovodskii S., Zayko J. Technology for formation of axisymmetric jet with long laminar region. Journal of Physics: Conference Series, 2017, 894, 012080.

ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЛН В АТМОСФЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СОДАРОМ И МИКРОБАРОГРАФОМ

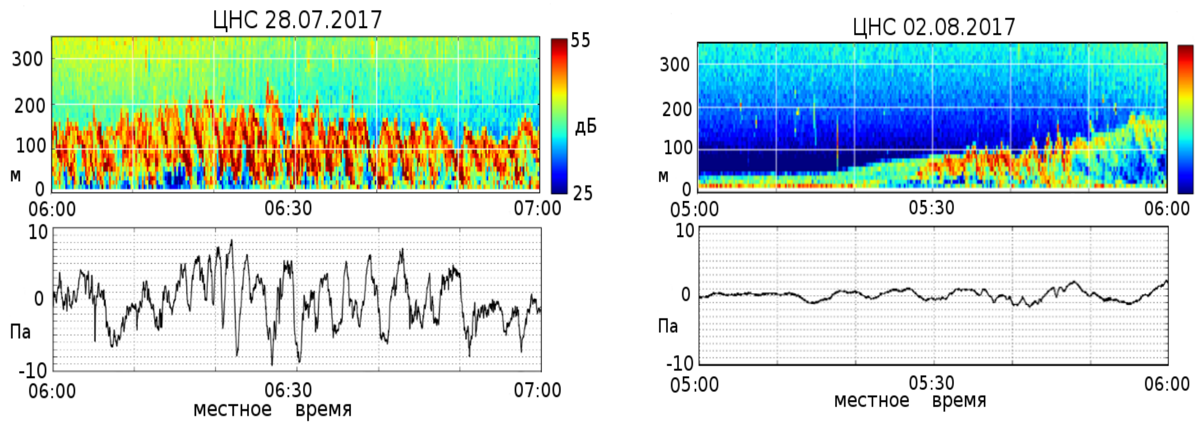
Д. В. Зайцева, М. А. Каллистратова
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва

Внутренние гравитационные волны (ВГВ) играют важную роль в динамических процессах в термически устойчивом атмосферном пограничном слое (УАПС). По механизму генерации ВГВ разделяют на несколько типов [Sun et al.2015], различно влияющих на метеорологические параметры и интенсивность турбулентности.

Сопоставление одновременных точечных и дистанционных измерений даёт возможность разделять эпизоды волновой активности не только по временным и горизонтальным масштабам, но и по форме, а также вертикальным масштабам [напр. Reddy et al. 1998, Blumen et al. 2001]. Анализ таких совместных измерений открывает возможность для формирования и уточнения критериев разделения волн на типы, применимых для натурных наблюдений.

В работе были использованы данные одновременных измерений доплеровского содара и микробарометра в августе 2017 года над ровной степной поверхностью (Цимлянская научная станция, Ростовская область). По содарным эхограммам были зарегистрированы 11 эпизодов волновой активности в ночное и утреннее время. По вертикальной структуре волновые эпизоды были разделены на два класса: колебания высоты слоя приземной инверсии (или приподнятых слоёв) и периодические структуры, “вкрапленные” в приземный инверсионный слой. Каждый эпизод был разделён на интервалы, внутри которых толщина слоя, охваченного колебаниями менялась менее, чем на 10 метров. Для эпизодов, отнесённых к первому классу, была обнаружена средняя положительная корреляционная связь между значением толщины слоя, охваченного колебаниями и амплитудой колебаний давления. Однако, для некоторых волновых эпизодов этого класса колебания давления с соответствующими периодами не наблюдались. В то же время для второго класса корреляционной связи между указанными величинами не наблюдалось.

На рисунке показаны два примера одновременных содарных эхограмм (верхние панели) и барограмм (нижние панели) для эпизодов с разной толщиной слоя, охваченного колебаниями.



Полученные данные показали, что связь между параметрами волн, измеряемыми содаром и микробарографом, неоднозначна, и требует проверки и уточнения на большем объёме экспериментальных данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-05-01072).

ЛИТЕРАТУРА.

1. W. Blumen, R. Banta, S. Burns, et al. Turbulence statistics of a Kelvin-Helmholtz billow event observed in the nighttime boundary layer during the Cooperative Atmospheric-Surface Exchange Study field program. Dynam. Atmos. Oceans, 2001, 34, 189–204.
2. K.K. Reddy, T.R.V. Kumar, S.V.B. Rao, et al. Investigation of gravity waves in the atmospheric boundary layer using sodar and microbarograph. Indian J. of Radio & Space Phys., 1998, 27, 247-259.
3. J. Sun , C.J. Nappo, L. Mahrt, et al. Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer. Rev. Geophys., 2015, 53, 956-993.

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ВЯЗКИХ ПУЛЬСАЦИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Б. Заметаев, А. Р. Горбушин

Московский Физико-Технический Институт, г. Жуковский

В работе построена асимптотическая теория двухмерного турбулентного пограничного слоя в рамках трехмерных уравнений Навье-Стокса на плоской пластине при больших числах Рейнольдса для несжимаемой жидкости. Подтверждено, что турбулентный пограничный слой делится на основную невязкую часть, содержащую быстрые пульсации относительно основного (осредненного) профиля продольной скорости и вязкий ламинарный подслой. Однако найдено, что вязкий ламинарный подслой не является традиционным тонким слоем, а состоит из набора малых квадратных (в том смысле, что размеры по направлениям x,y одного порядка величины) подобластей, решение в которых удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса. Определены асимптотические величины толщины турбулентного пограничного слоя и ламинарного подслоя. Найден механизм взаимодействия основной, пульсационной части турбулентного пограничного слоя и малой вязкой области на обтекаемой поверхности. Это взаимодействие описывается спектром решений уравнения Гамеля с большим значением параметра и означает интенсивный обмен жидкостью между этими областями. Решение оказывается быстро осциллирующей функцией, которая описывает множество тонких струек, как втекающих в вязкую пристенную область, так и вытекающих из нее. Данное решение предлагает механизм генерации мелкомасштабной завихренности (турбулентности) в уравнениях Навье-Стокса.

Для анализа полных нестационарных уравнений Навье-Стокса используется метод многих масштабов при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности, а неизвестной заранее толщины пограничного слоя к нулю.
Как известно, толщина турбулентного пограничного слоя зависит от предыстории его создания, что доказывает, например, эксперимент Клебанова и Диля [1] по изучению искусственно утолщенных слоев, и поэтому будем полагать толщину некой малой величиной. В качестве основы для рассмотрения используются результаты работы Заметаева и Горбушина [2], посвященной развитию крупномасштабных пульсаций (вихрей) в ламинарных или турбулентных пограничных слоях в рамках невязкой линейной постановки. В силу линейности задачи для первого приближения, в работе рассматривается наиболее простое частное двухмерное решение. В частности используется найденный факт [2], что малые возмущения относительно основного (осредненного) профиля продольной скорости состоят из суммы сносимых (традиционных решений Рэлея) возмущений и так называемого сингулярного возмущения, которое отвечает за взаимодействие вихрей со стенкой. Показано, что найденные сингулярные аналитические пульсации качественно соответствуют поведению пульсаций в турбулентных пограничных слоях, описанных Райхардтом [3], а теоретический коэффициент корреляции пульсаций близок по величине к экспериментальному значению. Вблизи стенки описана вязкая малая ламинарная область, решение в которой удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса, но эта область не является тонким слоем, а имеет квадратную форму. Таким образом, в каждой точке по медленной переменной вдоль пластины, происходит взаимодействие крупномасштабных пульсаций в пограничном слое со своей малой вязкой ламинарной областью на дне пограничного слоя. То есть быстрое решение имеет сложную форму по времени и пространству, но в результате дает свой вклад в генерацию турбулентности в пограничном слое. Основные результаты данной работы изложены в статье Горбушина и Заметаева [4] в рамках двухмерных уравнений Навье-Стокса, что как выяснилось, является частным решением полной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klebanoff P.S., Diehl Z.W. Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient. Rep. NACA 1110, 1952.
2. Zametaev V. B., Gorbushin A. R. Evolution of vortices in 2D boundary layer and in the Couette flow. AIP Conference Proceedings 1770, 030044 (2016) doi: 10.1063/1.4963986.
3. Reichardt H. Messungen turbulenter Schwankungen. Naturwissenschaften 404 (1938).
4. Горбушин А.Р., Заметаев В.Б. Асимптотический анализ вязких пульсаций в турбулентном пограничном слое. Изв. РАН, МЖГ, 2018, №1, с.1-12.

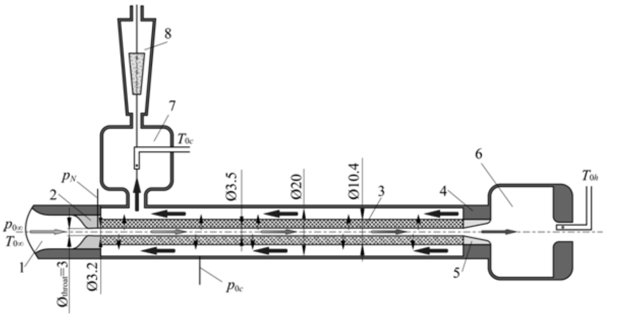
ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

А.Г. Здитовец, Н.А. Киселёв, Ю.А. Виноградов, М.М. Стронгин
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

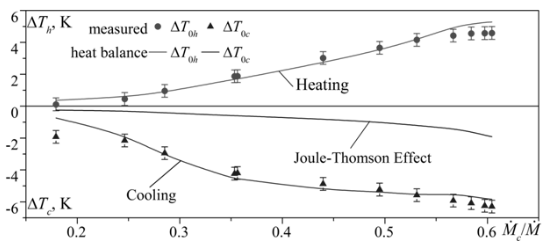
Под энергоразделением (температурным разделением) понимается спонтанное возникновение областей в газовом потоке с полной энтальпией (полной температурой в случае совершенного газа) больше и меньше некой начальной величины. Спонтанного в том смысле, что газовый поток не обменивается энергией с окружающей средой ни в виде теплоты, ни в виде работы. Данное явление лежит в основе устройств для безмашинного энергоразделения (температурного разделения) газового потока. Наиболее известные из них – это вихревые трубы Ранка-Хилша, резонансные трубы Гартмана-Шпренера.

В НИИ механики МГУ на протяжении нескольких лет проводятся исследования метода энергоразделения предложенного в работе [1]. Он основан на эффекте энергоразделения в пограничном слое высокоскоростного газового потока, возникающем при отличии молекулярного критерия Прандтля (Pr) от единицы. При Pr<1 полная температура пристенных газовых слоев меньше начальной, при Pr=1 равна, при Pr>1 больше начальной. В [2] показано, что если дозвуковой и сверхзвуковой поток с одинаковой начальной полной температурой и Pr≠1 разделены проницаемой перегородкой, то в зависимости от направления перетекания газа среднемассовая полная температура в пограничном сверхзвукового потока может как уменьшаться, так и возрастать. Практически в то же время было экспериментально зафиксировано [3], что для воздушных потоков с одинаковой начальной температурой самоорганизующийся отсос пристенных слоев из сверхзвукового потока в дозвуковой приводит к росту его среднемассовой температуры. Более подробно данное явление было исследовано в работе [4]. В [5] численно был рассмотрен способ энергоразделения за счет отсоса пристенных слоев через проницаемую пластину, обтекаемую с одной стороны сверхзвуковым потоком.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования энергоразделения, возникающего при течении воздушного потока с начальной сверхзвуковой скоростью (M=1.07-1.09) в трубке с проницаемыми стенками. Схема рабочего части стенда представлена на рис.1а.



а



б

Рис. 1. а - схема экспериментального стенда (1 - форкамере, 2 – сменное сверхзвуковое сопло, 3 – пористая проницаемая трубка, 4 – коллектор отсасываемого воздуха, 5 – диффузор, 6,7 – ресиверы, 8 – ротаметр);
б – «нагрев» ΔT_{0h} потока, истекающего из пористой трубки, ΔT_{0c} – охлаждение потока, протекающего сквозь проницаемую стенку в зависимости от массовой доли охлажденного потока

Рабочее тело – сжатый воздух. Исследовалось непосредственно температурное разделение (энергоразделение) воздушного потока в данном устройстве в зависимости от полного давления воздуха (массового расхода через сверхзвуковое сопло) в форкамере. На рис. 1б приведены данные по нагреву и охлаждению потоков, проходящих через данное устройство. Как видно эффект энергоразделения существенно выше, эффект Джоуля-Томсона в данном диапазоне параметров.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00699)

ЛИТЕРАТУРА.

1.Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Доклады Академии наук. 1997.Т. 354, № 4. С. 475–477.
2.Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Якубенко А.Е. Влияние вдува отсоса на энергоразделение потоков // Известия РАН Механика жидкости и газа. 2011. № 6. С. 98–105.
3.Здитовец А.Г. Экспериментальное исследование явления температурного разделения воздушного потока, истекающего через сверхзвуковое сопло, с центральным телом в виде пористой проницаемой трубки // Труды конференции-конкурса молодых ученых 13-15 октября 2010 г. 2011. С. 128–136.
4.Vinogradov Y.A., Zditovets A.G., Strongin M.M. Experimental investigation of the temperature stratification of an air flow through a supersonic channel with a central body in the form of a porous permeable tube // Fluid Dyn. 2013. Vol. 48, №
5.Leont’ev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S. Temperature stratification under suction of the boundary layer from a supersonic flow // High Temp. 2012. Vol. 50, № 6. P. 739–743.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В УПРУГИХ МЕМБРАННЫХ ТРУБАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВОДОЙ

А.Т. Ильичев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Рассматриваются свойства устойчивости распространяющихся локализованных волн постоянной формы в податливых мембранных трубах, наполненных идеальной жидкостью. В ряде работ обсуждается возможность моделирование стенок человеческих артерий при помощи упругих мембран (см., например, [1]). Конечно, свободные гибкие трубки, наполненные идеальной жидкостью, не могут служить моделью кровотока в артериях, что связано в первую очередь с двумя обстоятельствами: кровь является не идеальной жидкостью, (а скорее даже неньютоновской), а также сама артерия погружена во внешнюю среду и на границе с внешней средой необходимо ставить адекватные граничные условия. Добавим, что модели кровотока в артериях сейчас активно изучаются физиками в сотрудничестве с медиками и существующие его модели очень сложны (см., например [2]). В работах [3]-[5] на основе мембранного подхода к моделированию стенок артерии делается попытка общего объяснения явления возникновения аневризмы, как явления бифуркации из однородного состояния. Однако стоячая уединенная волна, моделирующая аневризму в рамках данной приближенной модели, оказывается неустойчивой по форме в случае неподвижной на бесконечности жидкости, а при наличии среднего течения – орбитально устойчивой, т. е. приобретающей в результате возмущения скорость и начинающей движение. По-видимому, следует признать, что формирование аневризмы происходит в результате повреждения стенок артерии, что согласуется с результатами работы [6]. Основные уравнения для квазиодномерного движения идеальной жидкости внутри осесимметричной мембранной трубы были получены в работе [7] при помощи прямого вывода. Изучение спектральной устойчивости ветви решений типа неподвижной уединенной волны (так называемой аневризмы) при отсутствии жидкости внутри трубы (случай контролируемого давления) представлен в работе [3]. Параметром бифуркации в этом случае служит давление накачивания. Установлено, что вся ветвь уединенных волн спектрально неустойчива (т. е. возмущение формы волны экспоненциально растет по времени). В работе [4] изучается устойчивость всей ветви решений типа аневризмы, когда жидкость внутри трубы присутствует, но среднее течение (постоянная скорость жидкости на бесконечности) – ноль. Доказано, что аневризма по-прежнему неустойчива, однако присутствие жидкости оказывает сильный стабилизирующий эффект. Авторы статьи [5] предприняли анализ устойчивости решения типа аневризмы в присутствии среднего потока и обнаружили, что если скорость жидкости на бесконечности отделена от нуля, то аневризма спектрально устойчива. Используемая модель является весьма реалистичной для течения воды по шлангам. В настоящем докладе рассматривается вопрос об устойчивости бегущих уединенных волн, возникающих в результате возмущения давления в подобных трубах (в качестве примера таких явлений приведем импульсную подачу воды в ранее используемые пожарные шланги). Параметром бифуркации в этом случае более не является давление накачивания (оно может принимать произвольные значения), но скорость волны.

В докладе обсуждаются также другие свойства устойчивости бегущих и стоячих локализованных волн на стенках упругой мембранной трубы при отсутствии и наличии среднего течения в наполняющей ее жидкости.

ЛИТЕРАТУРА.

1. G.F. Holzapfel, R.W. Ogden. Constitutive modelling of arteries. Proc R Soc A, 2010. 466, 1551-1597.
2. D. Sodhani, S. Reese, R. Moreira, P. Mela, S. Jockenhoevel and S. E. Stapleton. Multi-scale modelling of textile reinforced artificial tubular aortic heart valves. Advances In Biomechanics: From Foundations To Applications. Meccanica; Springer. 2016, 1-17.
3. S.P. Pearse, Y.B. Fu, Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes. IMA J. Appl. Math., 2010, 7, 581-602.
4. A. T. Il'ichev, Y.-B. Fu. Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube. Acta Mechanica Sinica, 2012. 28, 1209–1218.
5. Y. B. Fu, A. T. Il'ichev. Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow. Math. Mech. Solids, 2015, 20, 1198-2014.
6. A. T. Il'ichev, Y. B. Fu. Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning. Internat. J. Engrg. Sci., 2014., 80, 53-61.
7. M. Epstein, C. Johnston. On the exact speed and amplitude of solitary waves in fluid-filled elastic tubes. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 2001, 457, 1195-1213.

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ SST-МОДЕЛИ 2003 ГОДА С КОРРЕКЦИЕЙ НА КРИВИЗНУ ЛИНИЙ ТОКА ПО РОДИ-ЛЕЩЦИНЕРУ-ИСАЕВУ ДЛЯ (U)RANS РАСЧЕТОВ ОТРЫВНЫХ И ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

С.А. Исаев[1,2], М.С.Грицкевич[2], С.В. Гувернюк[3], И.А. Попов[1], А.Е. Усачов[4]
[1]Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – Казанский авиационный институт, Казань; [2]Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург; [3]Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва; [4]Московский комплекс ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва

Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) остается одним из эффективных инструментов численного моделирования турбулентных течений, особенно в области индустриальных разработок. Для замыкания уравнений используется иерархия разноуровневых моделей турбулентности, в число употребительных из которых входят двухпараметрические модели переноса сдвиговых напряжений (SST-модели) в версиях 1993 и 2003 года. Десять лет назад для расчета отрывных течений предложена поправка на кривизну линий тока в рамках подхода Роди-Лещцинера-Исаева [1]. В последние годы проводится ее систематическая верификация [2-7] с использованием многоблочных вычислительных технологий (МВТ) в пакете VP2/3 (скорость-давление, 2D/3D) [5-7]. МВТ базируются на блочных пересекающихся сетках, предназначенных для отображения разномасштабных структурных элементов вихревых течений несжимаемой жидкости и вязкого газа. В качестве тестовых задач рассматриваются стационарные и периодические, двумерные и пространственные, до -и сверхзвуковые течения в задачах внутренней и внешней аэродинамики, а также конвективного теплообмена, имеющие экспериментальные аналоги. Течение в каналах с квадратными и круговыми кавернами, теплообмен в канале со сферической лункой, обтекание пластины со сферической лункой и прямоугольной стойкой, цилиндра с выступающим диском, полукругового профиля, теплообмен при обтекании одиночного цилиндра и пакета цилиндров представляют далеко не полный перечень решенных задач. Численные прогнозы с приемлемой точностью согласуются с экспериментальными данными, полученных в аэродинамических трубах, на аэробаллистической трассе и теплофизических стендах в Институте механики МГУ им.М.В. Ломоносова, ФТИ им.А.Ф.Иоффе, СПбГУ Петра Великого, ИТ им.С.С.Кутателадзе СО РАН, университетов Ростока и Саутгемптона и др. Сопоставительный анализ скорректированной SST-модели с аналогичными модели показал, что применение стандартной SST-модели может приводить к значительной ошибке в оценке интегральных силовых характеристик (до 30% в случае двумерных периодических течений). Предложенная модель с поправкой на кривизну линий тока позволила получить ряд прорывных результатов в области вихревой интенсификации теплообмена овальными траншеями и аэродинамики утолщенных несущих поверхностей с вихревыми ячейками.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проекты 17-08-00148 и 18-58-52005), а также в экспериментальной части при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (ведущий ученый — С. Исаев, КНИТУ-КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003.

ЛИТЕРАТУРА.

1.Исаев С.А. Верификация модифицированной MSST с учетом влияния кривизны линий тока в рамках подхода Роди-Лещцинера-Исаева при расчете стационарных и периодических течений. Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015. С. 1629-1631.
2.Исаев С.А., Баранов П.А., Жукова Ю.В., Усачов А.Е., Харченко В.Б. Коррекция модели переноса сдвиговых напряжений с учетом кривизны линий тока при расчете отрывных течений несжимаемой вязкой жидкости. Инженерно-физический журнал. 2014. Т.87. №4. С.966- 979.
3.Исаев С.А., Баранов П. А., Судаков А. Г., Попов И. А. Верификация стандартных и модифицированных с учетом кривизны линий тока MSST и оценка приемлемости комбинированных по Ментеру граничных условий при расчете ультранизкого профильного сопротивления оптимальной компоновки цилиндра с соосным диском. Журнал технической физики. 2016. Т.86. №8. С.32-41.
4.Исаев С.А. Верификация модифицированной с учетом влияния кривизны линий тока в рамках подхода Роди-Лещцинера-Исаева модели переноса сдвиговых напряжений на расчетных примерах до- и сверхзвуковых отрывных течений. Сборник докладов IV Минского международного коллоквиума по физике ударных волн, горения и детонации. Минск: ИТМО им.А.В.Лыкова, 2015. С.62-69.
5. Исаев С.А., Баранов П.А., Усачов А.Е. Многоблочные вычислительные технологии в пакете VP2/3 по аэротермодинамике. Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 316с.
6.Аэродинамика утолщенных тел с вихревыми ячейками. Численное и физическое и моделирование / Под ред. С.А. Исаева. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2016. 215 с.
7.Вихревые технологии для энергетики / А.И. Леонтьев, С.В. Алексеенко, Э.П. Волчков и др.; под общей редакцией академика А.И. Леонтьева. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. 350с

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

А.Н.Карелин
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург

Для обоснования результатов практических исследований турбулентных потоков, проводимых в СПбГМТУ с 2002 года, и проверки полученных данных с использованием методов теории планирования эксперимента были составлены математические модели [1 – 4].

Регрессионное уравнение математической модели взаимодействия системы струй в начальном моменте в бесконечном пространстве имеет вид:

$$У = 20{,}83 - 9{,}83625X_2 + 13{,}80125X_3 - 2{,}605X_1X_2 + 12{,}156X_2^2,$$

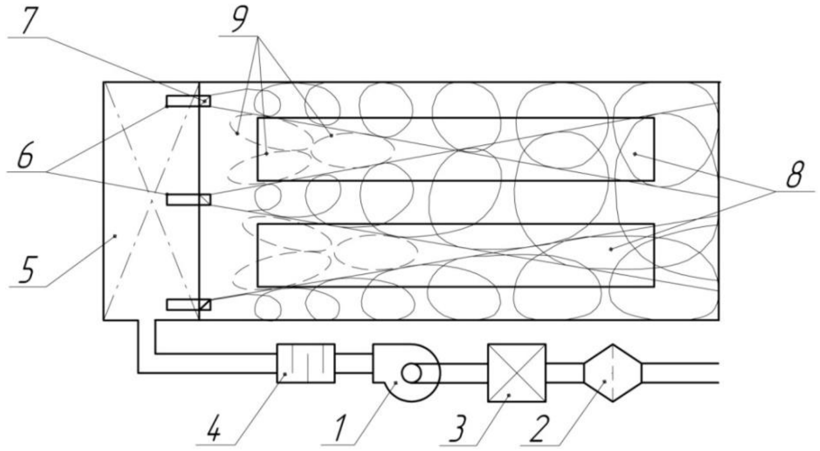
где - $У = L_{вз}/d_c$ - "долгота вихревой зоны" системы струй, выраженная в виде отношения расстояния от плоскости среза сопел до точки начала взаимодействия соседних струй в потоке $L_{вз}$ к диаметру сопла d_c;

- $X_1 = Re = (0{,}93 - 8{,}37)\cdot 10^4$ – число Рейнольдса;

- $X_2 = C = (1;2;3)$ - «сторонность закрутки», т.е. направление вращения турбулентных закрученных струй;

- $X_3 = B_c/d_c = (6{,}25 - 27{,}08)$ – отношение поперечного расстояния между соплами B_c к диаметру сопла d_c.

Визуализация модели проводимых исследований системы потоков представлена на рисунке.



На вход подается система взаимодействующих разносторонне закрученных свободных струй. Закрутка – местная.

В состав экспериментальной установки входит центробежный вентилятор (1), механический фильтр (2) и кондиционерный блок (3), находящийся в вентиляционной выгородке, вне помещения. Через глушитель (4), воздух наполняет навесную переборочную напорно-воздушную камеру (5).

Воздухоподающие патрубки (6), длиной $L \approx 10 \cdot d_n$ (d_n – диаметр патрубка), снабжены запатентованными соплами (7), струи подаются в проходы между основным оборудованием (8).

Представляется, что эффект достигается за счет особенностей реализации предложенной основополагающей идеи данного способа и конструкции устройства.

Струи образуют единое аэродинамическое поле. Также в системе формируются вторичные вихри (9).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Веников В.А. Теория подобия и моделирования/ В.А. Веников. – М.: Высшая школа, 1976.
2. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. - М: Машиностроение; София: Техника, 1980. - 304 с.
3. Карелин А.Н. Гидродинамика и интенсификация теплообмена в сборках ядерных реакторов// Материалы XXI Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» 25 февраля – 04 марта 2014 г. Московская область, пансионат «Звенигородский» РАН. – М.: Издательство Московского университета, 2014. – 270 с.
4. Карелин А.Н. Натурное моделирование межмашинного руслового канала для проведения исследований аэродинамики турбулентного воздушного потока// Материалы XXII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» 14 − 21 февраля 2016 г. Московская область, г. Звенигород, пансионат «Звенигородский» РАН / Ответственный редактор – Н.В. Никитин. - М.: Издательство Московского университета, 2016. – 311 с.

ОСРЕДНЁННАЯ ДИНАМИКА СВОБОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЯДРА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ И ВИБРИРУЮЩЕЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

И.Э. Карпунин[1], Н.В. Козлов[2]
[1] Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: vankarpunin@yandex.ru
[2] Институт механики сплошных сред УрО РАН, ПФИЦ, 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1
email: kozlov.n@icmm.ru

Вибрации являются эффективным инструментом управления механическими системами [1], благодаря чему делают возможными новые технологические решения. Одним из ярких эффектов, связанных с вибрациями, являются осреднённые течения [2]. Особый интерес представляют вращающиеся двухфазные системы (тела в жидкости, системы несмешивающихся жидкостей разной плотности, частично заполненная жидкостью полость), для которых специфическим является богатый спектр собственных колебаний [3], возбуждаемых переменными силовыми полями. Действие внешней силы на вращающуюся двухфазную систему приводит к возбуждению инерционных колебаний [4, 5, 6]. Резонансное возбуждение колебаний вращающихся гидродинамических систем посредством вибраций может служить эффективным инструментом управления течениями и тепломассопереносом.

В данной работе проводится подробное изучение динамики тела большой относительной длины, рассматривается траектория движения, находятся частоты колебаний. Возмущающее действие на цилиндрическое ядро во вращающейся полости определяется суперпозицией силы тяжести и связанной с вибрациями осциллирующей силы инерции. В результате возбуждаются колебания тела в системе отсчета полости с различными частотами.

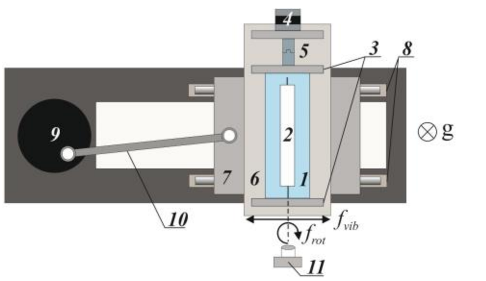


Рис. 1

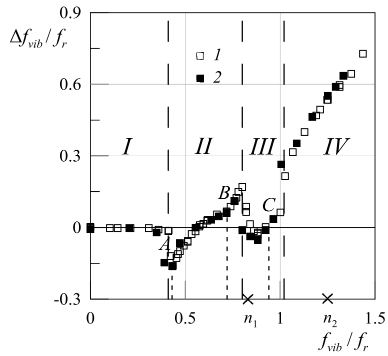


Рис. 2

Экспериментальная модель представляет собой прозрачную цилиндрическую кювету из оргстекла. Внутри полости – рабочая жидкость (вода) и цилиндрическое тело из капролона Модель помещается на вибростенд (рис.1), который осуществляет поперечные оси вращения вибрации с заданной частотой: $f_{vib} = 0-7$ *Гц*. Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что дифференциальное вращение тела (рис.2) определяется суперпозицией осредненных эффектов, связанных с колебаниями тела с разными частотами. К ним относятся: вызванные силой тяжести (внешним статическим силовым полем) колебания тела относительно вращающейся полости; вынужденные колебания тела с частотой вибраций; собственные колебания тела. Следует отметить важный вклад в дифференциальное вращение тела круговых колебаний с собственными частотами n_1 и n_2, которые возбуждаются резонансным образом. Обнаружено, что колебания тела могут быть трёхмерными. Это особенно сильно проявляется при относительной частоте вибраций, превышающей единицу, когда круговые трансляционные колебания тела сопровождаются прецессией большой амплитуды.

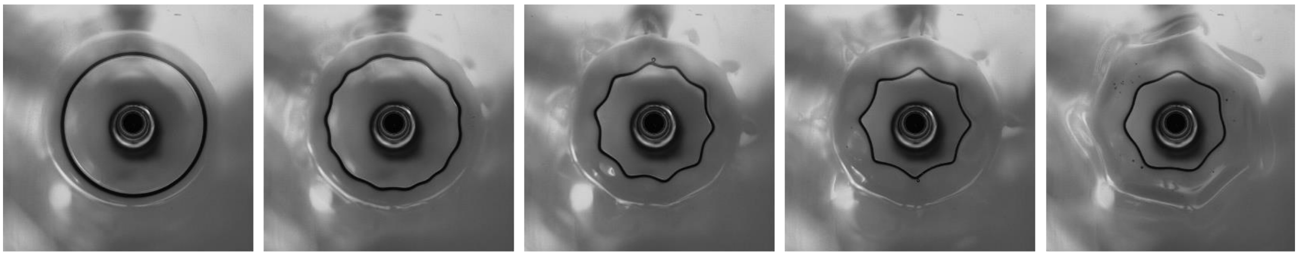
ЛИТЕРАТУРА.

1. I.I. Blekhman. Vibrational Mechanics (Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications) // Singapore: World Scientific. 2000. 536 pp.
2. N. Riley. Steady streaming // Ann. Rev. Fluid Mechanics. 2001. Vol. 33. P. 43–65.
3. H.P. Greenspan. The Theory of Rotating Fluids // Cambridge University Press. 1968. 327 pp.
4. А.А. Иванова, В.Г. Козлов, А.В. Чиграков. Динамика жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 98–111.
5. А.А. Иванова, В.Г. Козлов, Д.А. Полежаев. Вибрационная динамика центрифугированного слоя жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 147–156.
6. В.Г. Козлов, Н.В. Козлов. Вибрационный гидродинамический волчок // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 6. С. 759–762.

HYDRAULIC JUMP AND ITS INSTABILITIES

A.R. Kasimov
P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Saudi Arabia

A circular hydraulic jump is a well-recognized phenomenon: when a jet of fluid strikes vertically on a horizontal plate, a typically circular ring forms at some distance from the jet impact point. The ring is a location where the supercritical flow from near the jet transitions rapidly to subcritical flow downstream. Despite the long history of its study, this phenomenon is still attracting the interest of researchers for reasons of many fascinating dynamical and morphological features that are observed. Perhaps the most interesting one is the formation of polygonal patterns of the jump shape [1]. When the fluid is sufficiently viscous and at appropriate conditions for the flow rate, plate size, and jet radius, the circular shape is observed to lose its stability and to transition to various polygonal forms. These forms can be either stationary or spinning [1,2].



Examples are shown in the figures, where one can see snapshots of the hydraulic jump taken from below the horizontal transparent plate [2]. The fluid used was ethylene glycol, the glass plate diameter 32 cm, and the typical radius of the jump was about $2-3$ cm. The jet impact location is seen as the central dark spot. It was equipped with an outer ring, and controlling the height of the ring, we could control the fluid depth downstream of the hydraulic jump. The figures show the polygon formation when the ring height is increased (from left to right). The jump region is seen to undergo complex structural changes in addition to the formation of polygons of its inner boundary. These experimental patterns will be described and a theoretical model that predicts the patterns will be introduced.

ЛИТЕРАТУРА.

1. C. Ellegaard, A. E. Hansen, A. Haaning, K. Hansen, A. Markussen, T. Bohr, J. L. Hansen, and S. Watan- abe. Creating corners in kitchen sinks. Nature, 392:767–768, 1998.

2. H. Abderrahmane, A. R. Kasimov, Spinning hydraulic jump, 66-th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Nov. 24-26, 2013, Pittsburgh, PA, USA, http://meetings.aps.org/link/BAPS.2013.DFD.A28.6

ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЛАДКОЙ И ВИХРЕОБРАЗУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ

Н.А. Киселёв, А.Г. Здитовец, М.М. Стронгин, Ю.А. Виноградов
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Исследованиям процессов интенсификации теплообмена и увеличения сопротивления посвящены многочисленные работы, в большинстве которых исследуется интенсификация теплообмена на поверхностных интенсификаторах [1]. Среди таких теплообменных поверхностей выделяются облуненные поверхности, так как в данном случае возможно нарушение аналогии Рейнольдса в сторону теплообмена.

Однако так же известны работы, посвященные процессам интенсификации теплообмена и увеличения сопротивления, вызванные подавлением естественных соотношений между тепловым и динамическим пограничными слоями [2]. Наиболее часто реализуемым в данном случае методом является создание крупномасштабных вихревых структур: возникая в следе за плохо обтекаемым телом, они приводят к существенному увеличению локальных коэффициентов теплоотдачи, сопровождающемуся снижением коэффициента сопротивления трения. Это приводит к существенному увеличению теплогидравлической эффективности участка поверхности, находящегося в следе. В данной работе проведены исследования коэффициентов теплоотдачи и сопротивления вихреобразующего рельефа, расположенного в следе за поперечно установленным цилиндром. Подобная постановка не встречалась авторам в научной литературе.

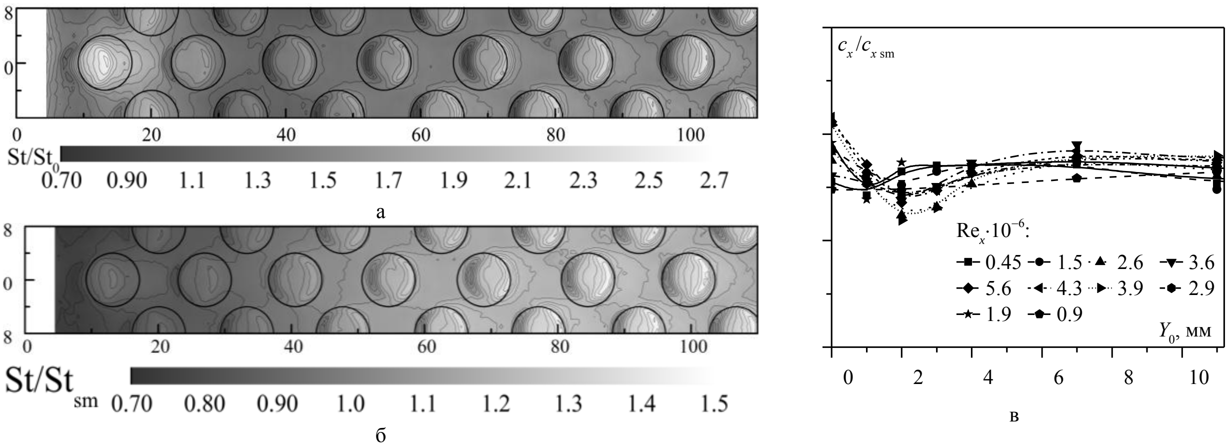


Рис. 1. Коэффициенты теплоотдачи на облуненной пластине, отнесенные к гладкой пластине в невозмущенном потоке (а) и к гладкой пластине, стоящей параллельно (б) при Y_0=4 мм при $Re_x=3.5\cdot10^6$ (размеры в мм, «0» соответствует задней кромке цилиндра); сопротивление облуненной пластины, отнесенное к стоящей параллельно гладкой

Расстояние от нижней стенки канала до нижней кромки цилиндра менялось в диапазоне Y_0=0-11 мм. Коэффициент сопротивления определялся путем взвешивания исследуемых пластин (гладкая и облуненная пластины стояли параллельно на расстоянии 40 мм за задней кромкой цилиндра). Коэффициент теплоотдачи определялся путем регистрации процесса охлаждения поверхности пластин с использованием ИК-Камеры. В экспериментах расстояние от начала канала до исследуемых пластин составляло 0.7 м, число Рейнольдса, определенное по длине пограничного слоя, варьировалось в диапазоне $Re_x=0.5\cdot10^6$-$5.6\cdot10^6$.

Значения коэффициентов теплоотдачи, отнесенных к коэффициенту теплоотдачи гладкой пластины в невозмущенном потоке, лежали в диапазоне St/St_0=1.0-2.8 и изменялись вдоль направления потока вслед за коэффициентом теплоотдачи на гладкой пластине (рис. 1а). Коэффициенты теплоотдачи, отнесенные к коэффициенту теплоотдачи стоящей параллельно гладкой пластины, имели менее выраженные максимальные и минимальные значения в сравнении с теплообменом в невозмущенном потоке (рис. 1б).

Осредненные по площади плавающего элемента значения увеличения сопротивления, отнесенные к коэффициенту сопротивления гладкой пластины в невозмущенном потоке, для облуненной поверхности лежали в диапазоне c_x/c_{x0}=(-2.6)-(2.9). Коэффициенты сопротивления, отнесенные к коэффициенту сопротивления стоящей параллельно гладкой пластины, при этом лежали в диапазоне 1.25-1.55 и практически не зависели от положения цилиндра (рис. 1в). На удалении от цилиндра значения коэффициентов теплоотдачи и сопротивления стремились к значениям, соответствующим обтеканию облуненных поверхностей невозмущенным потоком при всех положениях цилиндра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 18-08-00413).

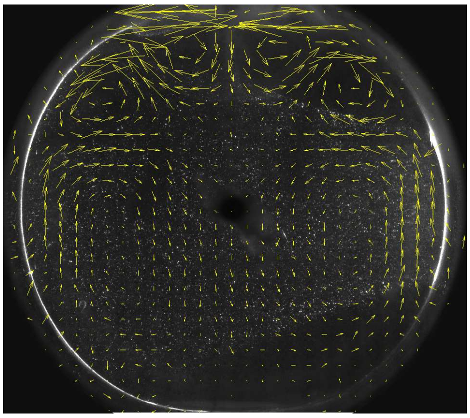
ЛИТЕРАТУРА.

1. Bergles A.E. Recent developments in enhanced heat transfer // Heat Mass Transf. 2011. Vol. 47, № 8. P. 1001–1008.
2. Suzuki H., Suzuki K., Sato T. Dissimilarity between heat and momentum transfer in a turbulent boundary layer disturbed by a cylinder // Int. J. Heat Mass Transf. 1988. Vol. 31, № 2. P. 259–265.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСРЕДНЁННОГО ТЕЧЕНИЯ В ОБЪЁМЕ ЖИДКОСТИ С КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ДЕФОРМИРУЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Н.В. Козлов
Институт механики сплошных сред УрО РАН, ПФИЦ, Пермь

Экспериментально исследуется осреднённая динамика вязкой несжимаемой жидкости в колеблющемся закрытом контейнере. Цилиндрический контейнер радиуса R имеет деформируемые упругие стенки, которым извне сообщаются вибрации с безразмерной частотой $\Omega_{vib}R^2/\nu$, изменяющейся в широком диапазоне $\sim 10^2 - 10^4$. Жидкость вязкости ν занимает весь объём контейнера. Структура и скорость осреднённого течения изучаются при обработке изображений, отснятых через прозрачный торец кюветы. При относительно малых амплитудах вибраций реализуется двумерная структура течения в виде валов, вытянутых вдоль оси контейнера. На рисунке представлено векторное поле скорости, осреднённой по периоду колебаний, при частоте и амплитуде вибраций, соответственно, 20.0 Гц и 0.70 мм в водном растворе глицерина вязкостью 0.25 Ст.



Исследование представляет интерес с точки зрения возможности управления тепло-массопереносом при помощи осреднённых течений. Благодаря аналогии между жидкими и твёрдыми эластичными поверхностями [1, 2], полученные результаты могут быть проанализированы в сравнении с течениями в колеблющихся каплях [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-71-10189).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Snoeijer J. H. Analogies between elastic and capillary interfaces. Phys. Rev. Fluids, 2016, Vol. 1, P. 060506.
2. Sznitman J., Rosgen T. Acoustic streaming flows in a cavity: An illustration of small-scale inviscid flow. Physica D, 2008, Vol. 237, P. 2240–2246.
3. Murtsovkin V.A., Muller V.M. Steady-State Flows Induced by Oscillations of a Drop with an Adsorption Layer. Journal of Colloid and Interface Science, 1992, Vol. 151, Issue 1, P. 150–156.
4. Yarin A.L. Stationary d.c. streaming due to shape oscillations of a droplet and its effect on mass transfer in liquid–liquid systems. J. Fluid Mech, 2001, Vol. 444, PP. 321–342.

ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЕЙ ПУЛЬСАЦИЙ В ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Смородский Б.В., Ермолаев Ю.Г., Яцких А.А.
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Изучение закономерностей ламинарно–турбулентного перехода в условиях сверхзвуковых скоростей газовых потоков относится к числу важнейших фундаментальных задач механики жидкости и газа. Положение ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя существенно влияет на аэротермодинамические характеристики и эффективность органов управления сверхзвуковых летательных аппаратов. Экспериментальные и расчетные исследования турбулизации в пристенных сдвиговых течениях продолжают оставаться предметом пристального внимания ученых ведущих научных центров мира. Отсутствие глубоких знаний о закономерностях ламинарно-турбулентного перехода и его чувствительности к изменению различных условий полета затрудняет развитие инженерных методов определения положения ламинарно-турбулентного перехода.

В данной работе приводятся результаты измерений возмущений двумерного и трехмерного сверхзвукового пограничного слоя с помощью сканирующего по перегревам ниточного датчика термоанемометра постоянного сопротивления CTA-2016 v2. Исследования полей пульсаций проведены на следующих моделях: модель плоской пластины с острой передней кромкой; модель скользящего крыла с 3% профилем и углом скольжения 45 градусов; модель скользящего крыла с 3% профилем и углом скольжения 72 градусов. На этих моделях измерены профили среднего и пульсационного течения в пограничном слое при числах Маха M=2 и 2,5 с помощью термоанемометра в режиме автоматического сканирования. На моделях пластины и 45-градусного скользящего крыла изучалось развитие возмущений вниз потоку и зафиксированы положения конца ламинарно-турбулентного перехода. На модели скользящего крыла с углом скольжения 72 градуса измерен рост возмущений в процессе ламинарно-турбулентного перехода при варьировании единичного числа Рейнольдса. Получены диаграммы перехода и величины отношения пульсаций температуры торможения к пульсациям массового расхода в процессе ламинарно-турбулентного перехода.

Для условий выполненных экспериментов на плоской пластине подтверждено, что максимальная величина отношения пульсаций массового расхода и температуры торможения внутри пограничного слоя в процессе перехода практически постоянна (около 0,1). Оценка распределений числа Маха, температуры, скорости и плотности потока поперек пограничного слоя, полученная по результатам термоанемометрических измерений соответствует результатам расчетов в сверхзвуковой части пограничного слоя (M>1,1) при числах Маха набегающего потока M=2 и 2,5. Разделение возмущений на пульсации плотности, скорости и температуры осуществлялось с помощью известных газодинамических соотношений и обычных для пограничного слоя допущений [1, 2]. В результате разделения получено, что над пограничным слоем отношение пульсаций скорости к пульсациям плотности удовлетворяет изоэнтропическим соотношениям. Вблизи границы пограничного слоя изоэнтропичность течения нарушается, а внутри пограничного слоя до числа Маха 1,1-1,2 это отношение монотонно возрастает, но имеет систематически большие значения (не более 15%) в сравнении с изоэнтропической оценкой (1/M^2). При использовании «сильной рейнольдсовой аналогии» Морковина в сверхзвуковом пограничном слое, относительная величина пульсаций переоценивается более чем в 2 раза. Получены оценки амплитуд пульсаций скорости, плотности и температуры в пограничном слое гладкой плоской пластины при числах Маха 2 и 2,5 в процессе ламинарно-турбулентного перехода (диаграммы перехода). Впервые в трехмерных сверхзвуковых пограничных слоях экспериментально измерено развитие возмущений температуры торможения и массового расхода в процессе ламинарно-турбулентного перехода. Получено, что при ламинарно-турбулентном переходе отношение уровней естественно порожденных пульсаций температуры торможения к пульсациям массового расхода практически постоянно, что аналогично случаю плоской пластины. Максимальное значение отношения возмущений массового расхода и температуры торможения поперек пограничного слоя на моделях скользящих крыльев со сверх- и дозвуковыми передними кромками близки и лежат в диапазоне 0,1-0,15.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-19-01289).

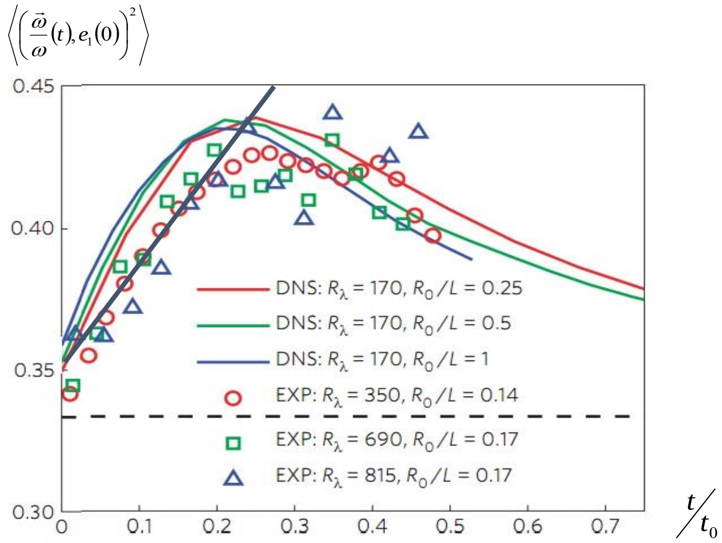
ЛИТЕРАТУРА

1. A.D. Kosinov, Yu.G. Yermolaev, N.V. Semionov, G.L. Kolosov, A.V. Panina. To the analysis of the natural pulsation development during laminar-turbulent transition in supersonic boundary layer. AIP Conference Proceedings, 2017, 1893, 030073
2. Yu.G. Yermolaev, A.D. Kosinov, N.V. Semionov, S.N. Tagaev, A.I. Semisynov. On the pulsation decomposition of supersonic flow for natural and controlled conditions of experiments. Recent Advances in Fluid Mechanics and Aerodynamics, 7th IASME / WSEAS International Conference on Fluid Mechanics and Aerodynamics, Moscow, 2009, 89-93.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ, ОСНОВАННАЯ НА ЛИНЕЙНОМ МЕХАНИЗМЕ

А.В. Копьев, К.П. Зыбин
ФИАН, Москва

Известно, что турбулентность характеризуется перемежаемостью, что проявляется, в частности, в развитии неизотропных нестационарных интенсивных мелкомасштабных вихревых структур [1]. В работе показано, что исходя из общих уравнений динамики жидкости, можно дать количественные оценки явлению раскручивания и вытягивания небольших жидких частиц из инерционного интервала изотропной турбулентности. Само явление, названное ранее пируэт-эффектом [2], раскрывает механизм образования интенсивных структур в мелкомасштабной турбулентности. На основании [3] в работе построена линейная стохастическая лагранжева модель, в которой получено кинетическое уравнение на функцию распределения квадрата косинуса угла между завихренностью и собственным вектором тензора скоростей деформации жидкой частицы, а также аналитически посчитаны асимптотики зависимости от времени этой величины при больших и малых временах. Результаты находятся в хорошем согласии с результатами проведенных ранее экспериментов и численных расчетов [2, 4]. Проведенный анализ показывает, что линейные процессы, возможно, играют основную роль в некоторых процессах принципиально нелинейного явления изотропной турбулентности. Предлагаемая модель позволяет проанализировать статистику собственной динамики небольших жидких частиц в инерционном интервале, что может оказаться полезным при замыкании уравнений, описывающих перемежаемые турбулентные течения [1, 5].



На рисунке показаны численные (DNS) и экспериментальные (EXP) результаты из [2] с наложенной на них универсальной линейной асимптотикой (полученной в развитой теоретической модели) зависимости от времени усредненного квадрата косинуса угла между текущей крупномасштабной завихренностью и изначальным крупномасштабным вектором доминирующего растяжения. Важность представленных результатов заключается в самом факте применимости линейной стохастической модели в принципиально нелинейном процессе турбулентности. Показано, что линейные эффекты возможно играют главную роль в пируэт-эффекте, который раскрывает механизм образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ проект 17-11-01271.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В.Р. Кузнецов, В.А. Сабельников. Турбулентность и горение, М: Наука, 1986, 288 с.
2. H. Xu, A. Pumir, E. Bodenschatz. The pirouette effect in turbulent flows, Nat. Phys., 2011, 7, 709-712
3. К.П. Зыбин, В.А. Сирота, А.С. Ильин, А.В. Гуревич. Генерация мелкомасштабных структур в развитой турбулентности, ЖЭТФ, 2007, 132, 2 (8), с. 510-523
4. A. Pumir, E. Bodenschatz, H. Xu. Tetrahedron deformation and alignment of perceived vorticity and strain in a turbulent flow, Phys. Fluids, 2013, 25, 035101
5. S.B. Pope. PDF methods for turbulent reactive flows, Prog. Energy Combust. Sci., 1985, 11 (2), 119-192

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АЭРОАКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

В.Ф. Копьев
Центральный Аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, ЦАГИ, Москва

Исследуются механизмы турбулентности, участвующие в генерации шума турбулентными струями. Рассматриваются три модели генерации шума, связанные с различными представлениями об излучающей турбулентности, – это мелкомасштабная турбулентность, связанная с процессами рождения мелких вихрей, волны неустойчивости, развивающиеся вниз по потоку за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, и крупномасштабные когерентные вихри (вихревые кольца), излучающие за счет собственных колебаний ядра. В разных ситуациях доминировать могут различные механизмы, и наиболее интересными являются случаи, когда механизмы проявляют себя одновременно. Именно такая ситуация имеет место для высокоскоростных струй, когда мелкомасштабной турбулентности, определяющей излучение малоскоростных струй, оказывается недостаточно для объяснения результатов акустических измерений, и требуется рассматривать дополнительно шум, связанный с волнами неустойчивости.

Разработана новая корреляционная модель [1], основанная на моделировании процесса рождения вихрей, как случайного процесса, и детерминированном описании динамики отдельного вихря. Предложенная модель позволяет проанализировать известные корреляционные модели, основанные на эмпирическом моделировании корреляционной функции монопольных, дипольных или квадрупольных источников. Результаты расчета спектральных характеристик, полученные на основе предлагаемой модели с использованием квадрупольных источников, находятся в хорошем соответствии с данными измерений шума круглой струи.

Рассматриваются различные способы влияния на волны неустойчивости с целью управления аэродинамическим шумом. Общая идеология основана на возможности генерации одних и тех же волн неустойчивости при воздействии на струю из различных областей течения. Разработана схема управления искусственно созданной и естественно развивающимися волнами неустойчивости с помощью HF DBD плазменных актуаторов [2]. Предпринята также попытка управления непосредственно вихревыми кольцами в возбужденной струе за счет воздействия на собственные моды вихревого ядра. Показано, что эффект разрушения вихревых колец носит резонансный характер. Эти результаты показывают важность колебательных свойств этих вихрей в динамике всего турбулентного течения.

По результатам экспериментальных, теоретических и численных исследований [3] разработаны методы моделирования и снижения шума взаимодействия струи и крыла самолета, основанные на представлении о волнах неустойчивости и их роли в шуме турбулентной струи. Экспериментально показано, что интенсивность излучаемого шума экспоненциально нарастает при уменьшении расстояния между струей и задней кромкой крыла/закрылка. Данные эффекты корректно описываются созданной теоретической моделью и методами численного моделирования.

На настоящем этапе развития вихреразрешающих методов особую роль играет валидация расчетов. В работе [4] впервые был сформулирован принципиально новый способ валидации расчетов шума струй с помощью измерений, проведенных по методу азимутальной декомпозиции. Будучи валидированными, методы вычислительной аэроакустики позволяют получать различные характеристики турбулентного течения, некоторые из которых невозможно измерить, а значит, открывают новые возможности в познании механизмов шумообразования в турбулентных течениях. Так, подробный анализ течения турбулентной струи, рассчитанного численным методом, позволил идентифицировать пакеты волн неустойчивости, что является одной из необходимых задач при создании демонстратора системы активного управления шумом.

Представленные работы демонстрируют важность понимания структуры излучающей турбулентности в турбулентных струях с точки зрения снижения шума турбулентных потоков, разработки новых методов измерения шума струй и разработки методов управления шумом, а также с точки зрения валидации численных методов, необходимых для решения индустриальных задач.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 17-11-01271.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. “Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источника шума в струях”, Акустический журнал, 2012, Т.58, №4, с.482-497
2. В.Ф. Копьев, Г.А. Фараносов, С.А. Чернышев, О.П. Бычков, И.В. Беляев, М.Ю. Зайцев, В.А. Копьев, Н.Н. Остриков, «Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях», МЖГ, 2018, (принято к печати)
3 Kopiev V.F., Belyaev I.B., Faranosov G.A., Kopiev V.A., Ostrikov N.N., Zaytsev M.Yu., Paranin G.V. Numerical and Experimental Study of JFI Effect on Swept Wing. AIAA Paper 2014-3060, June 2014.
4 . Копьев В.Ф., Шур М.Л., Азимутальные компоненты звукового поля турбулентной струи: результаты измерений и их использование для валидации современных методов расчета шума, Уч.Зап. ЦАГИ, 2010, №1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ИНФРАКРАСНОЙ ТЕРМОГРАФИИ

Е.Ю. Коротеева, И.А. Знаменская
МГУ им. Ломоносова, Москва

В настоящей работе проведен количественный анализ пограничного слоя жидкости с использованием новой методики на основе инфракрасной (ИК) термографии. Данная методика применена к исследованию приповерхностного течения воды, формируемого осесимметричной затопленной струей при ее натекании на плоскую ИК-прозрачную стенку. Получены и проанализированы спектры пульсаций температуры при различных режимах течения. Показано, что изменения наклона спектра на разных расстояниях от точки торможения могут быть напрямую связаны с изменением характера турбулентного течения в погранслое.

Импактные струи находят широкое применение в самых разнообразных технологических процессах и устройствах, а в вычислительной гидродинамике используются как тестовый объект для верификации моделей турбулентности. Многочисленные исследования импактных струй сосредоточены, в основном, на изучении процессов тепломассообмена в области взаимодействия струи с преградой [1-3]. При этом основная доля работ приходится на конфигурации с малым относительным расстоянием сопла от преграды, при которых коэффициенты тепло- и массообмена оказываются максимальными [4]. Задачей данной работы было изучение пульсационных характеристик течения вблизи поверхности преграды методом ТВПЖ – термографии высокоскоростных потоков жидкости [5-6].

В экспериментах горячая (35-40 °C) струя воды, погруженная в резервуар с холодной (15-20 °C) водой, натекала на вертикальную стенку резервуара с окном из фторида кальция диаметром 50 мм. Проводилась съемка ИК камерой FLIR SC7000 с рабочим диапазоном длин волн 3.7-4.8 мм. В этом диапазоне более 90% ИК-излучение проходит через окно из фторида кальция, поглощаясь при этом в слое воды порядка 0.1 мм, что позволяет при фокусировке камеры на внутренней стенке окна регистрировать тепловое излучение из тонкого пограничного слоя. Съемка проводилась на частоте от 200 до 400 Гц. Длительность съемки составляла не более 1-2 с, чтобы пренебречь действием теплопроводности и рассматривать температурный контраст ΔT как пассивную примесь.

Обработка тепловизионных измерений в широком диапазоне начальных параметров струи показала, что показатель степени в спектральном законе для тепловых пульсаций является функцией расстояния от точки торможения потока. При этом вид функции определяется параметрами течения – числом Рейнольдса и относительным расстоянием сопла до преграды. Обычно, вблизи точки торможения потока и до 1-2 относительных диаметров вокруг нее спектр мощности пульсаций погранслоя практически не зависит от частоты. Для точек, расположенных на расстоянии порядка 3-6 относительных диаметров от места соударения становится возможным выделить участок с наклоном -5/3, соответствующий появлению инерционного интервала. Далее по потоку наклон спектров увеличивается, а показатель степени, в основном, находится в интервале от -1.8 до -3.5. Изменения в показателе степени можно напрямую связать с изменением характера течения в пристеночном слое, что открывает возможности использования предложенной методики для оценки турбулентных характеристик пограничных слоев жидкости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-38-60186).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Юдаев Б.Н., Михайлов М.С., Савин В.К. Теплообмен при взаимодействии струй с преградами. М.: Машиностроение, 1977.
2. Волков К.Н. Взаимодействие круглой турбулентной струи с плоской преградой // ПМТФ. 2007. Т. 48, No. 1. С. 55–67.
3. Zuckerman N, Lior N. Jet impingement heat transfer: physics, correlations, and numerical modeling, Adv. Heat Transfer. 2006, Vol.39, P.565–631.
4. Carlomagno GM, Ianiro A, Thermo-fluid-dynamics of submerged jets impinging at short nozzle-to-plate distance: a review, Exp. Thermal Fluid Sci. 2014. Vol.58, P.15–35.
5. И. А. Знаменская, Е. Ю. Коротеева, А. М. Новинская, Н. Н. Сысоев. Особенности спектров турбулентных пульсаций струйных затопленных течений воды. Письма в "Журнал технической физики", 2016, Т.13, С. 51–57.
6. М.А. Большухин, И.А. Знаменская, В.И. Фомичев. Метод количественного анализа быстропротекающих тепловых процессов через стенки сосудов при неизотермическом течении жидкости. Доклады Академии наук, 2015, Т. 465(1), С. 38–42.

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЗАПИРАНИЯ ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

К.Б. Кошелев, С.В. Стрижак
Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва

Течение суспензии с твердыми частицами часто встречается в природе и в промышленных процессах. Движение эритроцитов в артериях человека, перенос речных отложений в реках, движение пшеницы внутри бункера, течение суспензии в проппантной пачке трещины гидроразрыва нефтяного пласта являются хорошим примером течений с переменной плотностью. В подобных механических системах поток частиц обычно связан вместе с жидкостью. Объединенные микроскопические системы (частица-частица и частица-жидкость), взаимодействия между собой, управляют макроскопическим поведением механического процесса. Поэтому понимание явлений микромасштаба может помочь с формулировкой общих методов, выбором масштабных соотношений, с надежным проектированием и контролем различных процессов с участием макрочастицы. Для движения частиц в узких каналах и трещинах характерно явления заклинивания (запирания, блокировки, засорения). Удержание частицы в отсутствии деформирования и смещения постулировалось несколькими исследователями, и демонстрировалось экспериментально. В каналах возможен режим течения когда несколько частиц прибывают в горловину или в область сужения канала одновременно, при этом частицы запирают выход, формируя мост или арку (Рис.1). Объемная доля концентрации твердых частиц может достигать ϕ= 20 %. При этом важно оценивать при какой объемной доли частиц и отношении диаметра порового канала к диаметру частицы D_0/d_p возникает запирание течения.

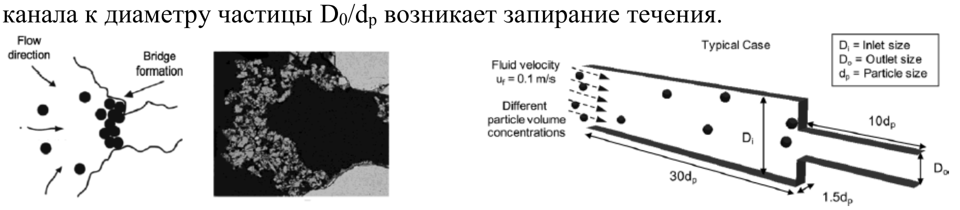


Рисунок 1. Течение в узком канале переменного сечения с твердыми частицами

При моделировании движения вязкой жидкости с частицами твердая фаза может быть смоделирована с помощью Лагранжева подхода. В работе для расчета использовался решатель MPPIFoam с Эйлер-Лагранжевым подходом для моделирования нестационарного течения. В данном решателе учитывался объединенный транспорт единственного облака частиц с учетом влияния объемной фракции частиц на непрерывную фазу. Для расчета соударений использовался метод частиц в ячейке и модель мягких сфер. Для расчета скорости движения частиц проводилось интегрирование дифференциальных уравнений движения частиц. Математическая модель для жидкости включала в себя уравнения неразрывности, количества движения для непрерывной фазы. Для дискретизации уравнений использовался метод конечных объемов. Полученные уравнения для связи скорости и давления решались итерационным методом PIMPLE. Рассматривалась модельная задача о течении облака частиц в канале с ужением и в канале с подводом частиц через инжекторы. Размеры расчетной области для случая канала с инжектором выбирались (0.53 0.12 0.01) метра. Расчетная область имела форму плоского канала с двумя разными секциями. Скорость подвода частиц, с диаметром до 1 мм, через два инжектора задавалась равной (18.8 6.8 0) м/с. Распределение количества частиц в инжекторе задавалось 1390885 в секунду. На входе в область для скорости использовалось условие фиксированного значения, на выходе условие продолжения решения, на стенках условия отсутствия проскальзывания, на передней и задней границах условие симметрии. Количество шестигранных ячеек задавалось равным 9776. Течение жидкости полагалось ламинарным. На рисунке 2 показано рассчитанное поле давления и поле концентрации частиц, которые оказывали влияние на течение в момент времени t=0.05 секунды. Шаг по времени выбирался равным 0.0001 с. Расчеты проводились на вычислительном кластере web-лаборатории UniCFD ИСП РАН на 12-48 ядрах.

Рисунок 2. Течение в узком канале с подводом частиц через инжекторы

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ РАСЧЕТА ПРИ ПРЯМОМ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С УСРЕДНЕНИЕМ ПО НЕСКОЛЬКИМ НЕЗАВИСИМЫМ АНСАМБЛЯМ

Б.И. Краснопольский
НИИ механики МГУ, Москва

Постоянный рост производительности многопроцессорных вычислительных систем открывает новые возможности для использования вихреразрешающих методов расчета турбулентных течений. Наиболее распространенные подходы к моделированию статистически стационарных турбулентных течений используют процедуру интегрирования по времени для осреднения характеристик течения и набора статистики. Одним из основных недостатков такого подхода является необходимость проведения длительного интегрирования процесса эволюции течения. В [1-4] авторами предложен подход, предполагающий проведение расчета нескольких реализаций турбулентного течения. Сочетая интегрирование по времени с набором статистики по нескольким ансамблям реализаций, оказывается возможным заменить длительный расчет одного состояния течения на расчет нескольких состояний на более коротком интервале времени. Это позволяет «распараллелить» расчет во времени.

Работы [1-4] рассматривают различные подходы такого распараллеливания. В [1] предлагается проводить независимый расчет состояний течения, используя для каждого из них дополнительный набор вычислительных ресурсов. Хотя этот подход позволяет в ряде случаев многократно сократить время расчета, такое сокращение достигается за счет повышения ресурсоемкости и общих вычислительных затрат. В [2-4] для моделирования несжимаемых течений предлагается другой подход, основанный на одновременном расчете нескольких состояний турбулентного течения. Это позволяет использовать более эффективные реализации методов решения систем линейных алгебраических уравнений для решения систем одновременно с несколькими правыми частями. За счет использования такого подхода оказывается возможным сократить время расчета и снизить общие вычислительные затраты.

Вообще говоря, оба подхода, предложенных в [1-4], являются частными случаями более общей конфигурации, допускающей проведение нескольких независимых расчетов, в каждом из которых моделируется несколько реализаций турбулентного течения. В докладе рассматривается указанная обобщенная схема проведения расчета и приводятся теоретические оценки и критерии, позволяющие определить оптимальную конфигурацию для конкретной вычислительной системы и количества используемых вычислительных устройств. Полученные оценки подтверждаются результатами расчетов для задачи об обтекании турбулентным потоком массива кубов, расположенных на стенке канала. Данные результаты демонстрируют в ряде случаев дополнительное ускорение до 20% по сравнению с предложенными ранее методиками.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 17-01-00140-а. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА.

1. V. Makarashvili, E. Merzari, A. Obabko, A. Siegel, P. Fischer. A performance analysis of ensemble averaging for high fidelity turbulence simulations at the strong scaling limit // Computer Physics Communications, 2017, 219, 236-245.
2. Б.И. Краснопольский. Одновременное моделирование нескольких состояний турбулентного течения // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (26-27 сентября 2016 г., г. Москва). Изд-во МГУ, 2016, с. 333-342.
3. Б.И. Краснопольский. Оценка эффективности одновременного моделирования нескольких состояний турбулентного течения на примере задачи о прямом расчете турбулентного обтекания массива кубов // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (25-26 сентября 2017 г.). Изд-во МГУ, 2017, с. 662-670.
4. B. Krasnopolsky. Simultaneous Modelling of Multiple Turbulent Flow States // arXiv preprint arXiv:1711.10622, 2017.

ВЛИЯНИЕ МЕРИДИОНАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН, ВЫЗВАННЫХ КОЛЕБАНИЯМИ ОДНОЙ ИЗ ГРАНИЦ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

О.Э. Кривоносова, Д.Ю. Жиленко,
Институт механики МГУ, Москва

Численно исследованы изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вызванные вращательными колебаниями его внутренней границы с двумя частотами относительно состояния покоя. Расчеты проведены в осесимметричной постановке по алгоритму [1]. По рассчитанным полям скорости течения построены волновые поверхности [2], характеризующие направление распространения и вид волн. Показано, что при небольших амплитудах колебаний на каждой из двух частот образуются сферические волны: вблизи внутренней сферы волна определяется колебаниями на большей из частот (f_1), вблизи внешней – на меньшей (f_2). Увеличение амплитуды колебаний границы на частоте f_1 может приводить к существенному усилению низкочастотной моды вблизи внешней границы. При этом изменяется и волновая структура течения: в области, граничащей с внешней сферой направление распространения волны меняется с радиального (сферическая волна) на меридиональное. Следует отметить, что в течении присутствуют только колебания на исходных частотах f_1 и f_2, колебания на комбинационных частотах и гармониках отсутствуют. Анализ декрементов затухания показал, что усиление низкочастотной моды происходит благодаря интенсивной меридиональной циркуляции, которая, в свою очередь, возрастает при увеличении амплитуды колебаний границы на частоте f_1. Отношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной мод возрастает с уменьшением низкой частоты и существенно зависит от меридионального угла, увеличиваясь по мере удаления от экватора к полюсу [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-05-00004 и 18-08-00074).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Н.В. Никитин. Конечно-разностный метод решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в произвольных криволинейных ортогональных координатах. Журнал вычисл. физики. 2006. Т.217. №2. С.759-781.
2. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. Определение волновой структуры замкнутых течений с неравномерным вращением границ методом мгновенной разности фаз. ДАН, 2015, т. 464, №4, С. 417-420.
3. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. Усиление волн при вращательных колебаниях жидкости. Письма в ЖЭТФ, 2016, т. 104, 8, С. 552-559.

НОВЫЙ ВИД НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ В ТОНКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

О.Э. Кривоносова, Д.Ю. Жиленко,
Институт механики МГУ, Москва

Численно исследованы изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вызванные одночастотными вращательными колебаниями его внутренней границы относительно состояния покоя. Расчеты проведены в не осесимметричной постановке в соответствии с алгоритмом [1]. Установлено, что при увеличении частоты вращательных колебаний происходит изменение вида неустойчивости с переходом от вторичных течений в виде вихрей Тейлора к ранее не наблюдавшимся тороидальным структурам. Определены границы области существования обнаруженной неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-05-00004 и 18-08-00074).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Н.В. Никитин. Конечно-разностный метод решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в произвольных криволинейных ортогональных координатах. Ж. вычисл. физики. 2006. Т.217. №2. С.759-781.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА «КАБАРЕ» НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ТЕЙЛОРА-ГРИНА И НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

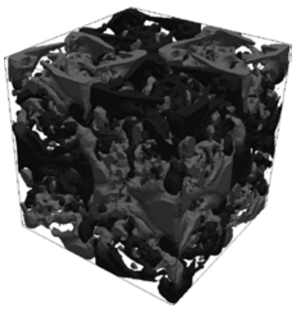
Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон
Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

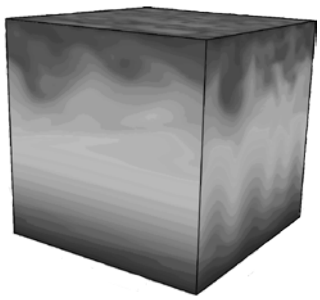
Работа посвящена применению схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости, к задачам трехмерных турбулентных течений. В первой части представляются результаты моделирования ламинарного и турбулентного распада вихря Тейлора-Грина, являющегося одной из канонических задач вычислительной гидродинамики. Система уравнений Навье-Стокса решалась на последовательности расчетных сеток с 64^3, 128^3, 256^3 ячейками при числах Рейнольдса Re=100, 280, 1600, 4000.

Конечно-разностный явный метод КАБАРЕ, имеющий формально второй порядок точности по времени и по пространству, рассматривается в сравнении с другими типами численных методов, – квазигидродинамическим подходом [1], спектральным методом [2] и разрывным методом Галеркина [3]. Схема КАБАРЕ, отличающаяся значительной универсальностью, не уступает другим подходам как в части воспроизводства вихревых структур при ламинарном и турбулентном распаде, так и интегральных параметров. Установлено, что на грубых стеках значения скорости диссипации, полученные из энстрофии, существенно ниже результатов непосредственного дифференцирования, а механизм численной диссипации не в полной мере повторяет реальный физический процесс. Таким образом, данный численный метод следует относить к группе ILES-методов. Рассматривая процесс распада турбулентности можно выявить влияние искусственных с физической точки зрения периодических граничных условий, определяющих закон убывания турбулентной кинетической энергии на больших временах эволюции. Энергетический спектр течения в момент максимума скорости диссипации приближается к асимптотике «-5/3», вместе с тем, имеет место существенное демпфирование высокочастотного диапазона спектра.

Во второй части представлены результаты моделирования напорного течения слабосжимаемой термовязкой жидкости с использованием квазипериодических граничных условий. В данной постановке можно проследить эволюцию мелкомасштабных хаотических пульсаций, наложенных на стационарный асимметричный профиль скорости, возникающий в неоднородном температурном поле. Характеристики неоднородного турбулентного течения рассматриваются на основе уравнения для турбулентной кинетической энергии, а также свойств турбулентного теплопереноса. Кроме того, показано влияние недивергентных начальных условий и модельной сжимаемости, интенсивности турбулентных пульсаций и характерного числа Рейнольдса на эволюцию течения слабосжимаемой жидкости. В общем случае наиболее интенсивная генерация турбулентности происходит в окрестности горячей стенки, в результате чего образуется развитый слой смешения. В дальнейшем, в зависимости от числа Рейнольдса и интенсивности пульсаций пристеночный слой может вызвать крупномасштабное перемешивание в центральной части, приводя к турбулизации практически всего канала. Характерный размер перемешивающихся молей жидкости оказывается в несколько раз большим пристеночного масштаба.

На нижеприведенном рисунке представлены изоповерхности положительной и отрицательной завихренности при Re=4000 для времени t=12 для вихря Тейлора-Грина (слева), а также поле условной температуры в течении термовязкой жидкости при Re=2100 для t=0.11 (справа), демонстрирующее начало процесса крупномасштабного смешения.





ЛИТЕРАТУРА.

1. Т.Г. Елизарова, И.А. Широков. Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, т. 63, 16 с.
2. M.E. Brachet et al. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. JFM. 1983, Vol. 130, 411-452.
3. K. Hillewaert. Direct numerical simulation of the Taylor-Green vortex at Re = 1600. 2nd International Workshop on High-Order CFD Methods. Sponsored by DLR, AIAA and AFOSR, 2013, May

ИДЕНТИФИКАЦИЯ БАРОКЛИННЫХ МОД В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ БАССЕЙНАХ

Куркина О.Е., Куркин А.А., Кокоулина М.В
НГТУ им Р.Е Алексеева, Нижний Новгород

В данной работе представлен расчет теоретических бароклинных мод, вычисление коэффициентов обобщенного ряда Фурье разложения заданного волнового поля по этим модам [1], расчет эмпирических вертикальных мод по заданному критерию точности для заданного волнового поля [2].

В качестве входных данных были использованы данные за 2010 год район Куршской косы, побережье Балтийского моря, на рисунке точка М - место замеров. Глубина в районе измерений достигает 30 метров.

Разложение на теоретические моды, заключается в решении задачи Штурма-Лиувилля вида:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2}\Phi = 0 \qquad \Phi(0) = \Phi(H) = 0 .$$

Где Ф - мода, N - частота Вяйсяля-Брента, с – скорость, z – глубина. Частоту Вяйсяля-Брента находим из плотности.

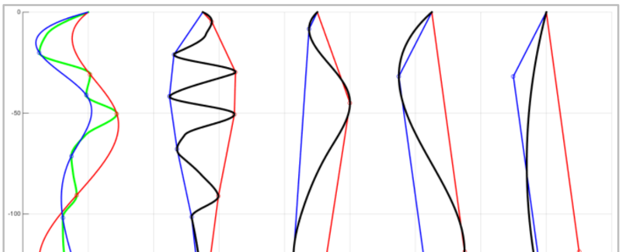
Для разложения волнового поля считаются коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье

$$u(z,t) = \sum_n A_n(t) \cdot \frac{d\Phi_m}{dz}(z)$$

Где коэффициенты A_n были найдены по формуле:

$$A_n(t) = \frac{\int_0^H u(z,t) \cdot \frac{d\Phi_m}{dz}(z) \cdot N^2(z)dz}{\int_0^H \left(\frac{d\Phi_m}{dz}(z)\right)^2 \cdot N^2(z)dz}$$

Вычисление эмпирических мод представляет собой итерационную вычислительную процедуру Пример разложения на теоретические моды в конкретный момент времени представлен на рисунке.



В заключение дается сравнительный анализ полученных теоретических и эмпирических мод.

По данной работе был создан программный комплекс для идентификации теоретических и эмпирических вертикальных бароклинных мод в волновых полях в стратифицированных бассейнах на языке Matlab script.

ЛИТЕРАТУРА.

1. A. Rybin Spatial structure of velocity field in the layered fluid induced by internal solitary wave/ O.Kurkina, E. Rouvinskaya, A. Kurkin, 2017.
2. В. А. Давыдов, А. В. Давыдов Очистка геофизических данных от шумов с использованием преобразования Гильберта-Хуанга, 2010.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ МАГНИТНОЕ ПЕРЕСОЕДИНЕНИЕ В ГЕОМАГНИТНОМ ХВОСТЕ МАГНИТОСФЕРЫ: МЕХАНИЗМ И СОПУТСТВУЮЩИЕ ЭФФЕКТЫ

А.П. Лихачев[1], Е.В. Губанов[1], С.А. Медин[1,2]
[1]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва
[2]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл.,

В исследованиях динамики магнитосферы важное место занимает проблема пересоединения магнитных силовых линий в геомагнитном хвосте – резкого изменения топологии магнитного поля в относительно тонком слое между областями с противоположно направленным вектором магнитного поля. Интерес к этому явлению обусловлен его определяющей ролью в развитии магнитных бурь и суббурь – основных причин космической «непогоды» на Земле. В ряду физических механизмов, влияющих на процесс пересоединения в магнитосфере, ведущую роль играют резистивные неустойчивости токового слоя, в частности, наиболее важная из них - тиринг-неустойчивость [1], развивающаяся при выполнении условия $Lu>1$ (число Лундквиста $Lu=\mu\sigma v_a l$, где σ, $v_a=B(\mu\rho)^{-1/2}$, l – проводимость, альфвеновская скорость и характерный размер, соответственно).

В работе рассматривается влияние одного из главных параметров солнечного ветра – проводимости плазмы – на структуру магнитосферы и происходящие в ней процессы. В 2D МГД приближении решается задача об обтекании магнитосферы солнечным ветром в меридиональной плоскости. Полагается, что решение симметрично относительно продольной оси, параметры солнечного ветра с южным направлением межпланетного магнитного поля (ММП) задаются постоянными. Моделирование проводилось для двух значений проводимости плазмы σ_p - 10^{-6} См/м и 10^{-4} См/м. Эти два варианта решения имеют принципиально разный характер: при $\sigma_p=10^{-6}$ См/м реализуется режим стационарной магнитной конвекции, при $\sigma_p=10^{-4}$ См/м возникает квазипериодический режим (т.н. пилообразное событие - см., например, [2]). При скорости солнечного ветра 400 км/с и магнитном поле 10^{-9} Т период цикла составляет 4000 с. Именно этому варианту решения в работе уделяется основное внимание.

В результате пересоединения формируется магнитный остров (плазмоид), который отрывается от диполя и сносится в ночном направлении. Каждый цикл (период) имеет три четко выраженные фазы: фазу роста, взрывную фазу и фазу восстановления (Рис. 1), которые коррелируют с временными изменениями открытого потока ММП и скорости пересоединения в ночной Х-точке (Рис. 2). Начало цикла (и, соответственно, фазы роста) определяется минимумом открытого потока ММП и равенством скоростей пересоединения в дневных и ночной Х-точках. Ночная Х-точка отделяет дипольное магнитное поле и свободное ММП. В первых двух фазах растет магнитная энергия магнитосферы за счет увеличения открытого ММП. Фаза роста сменяется взрывной фазой в момент пересоединения, когда скорость пересоединения в ночной Х-точке становится минимальной. Переход к фазе восстановления начинается в момент достижения максимальных значений скорости пересоединения в ночной Х-точке и открытого потока ММП (Рис. 2). В фазе роста и взрывной фазе в ночном секторе диполя возбуждаются пульсации скорости и давления, распространяющиеся вниз по потоку. Газодинамические эффекты анализируются в их взаимосвязи с электродинамическими процессами.

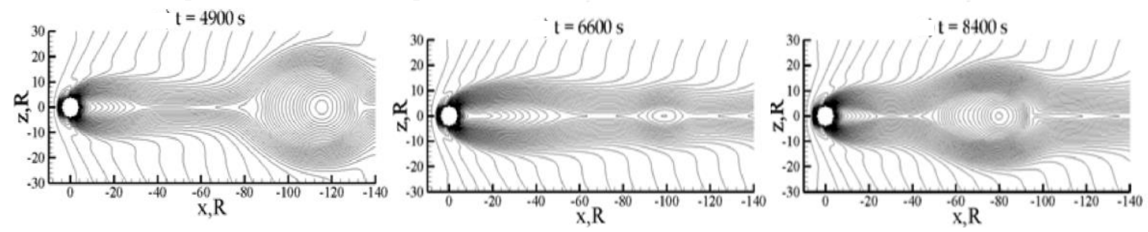


Рисунок 1. Магнитные силовые линии: t=4900с – фаза роста, t=6600с – взрывная фаза, t=8400с – фаза восстановления.

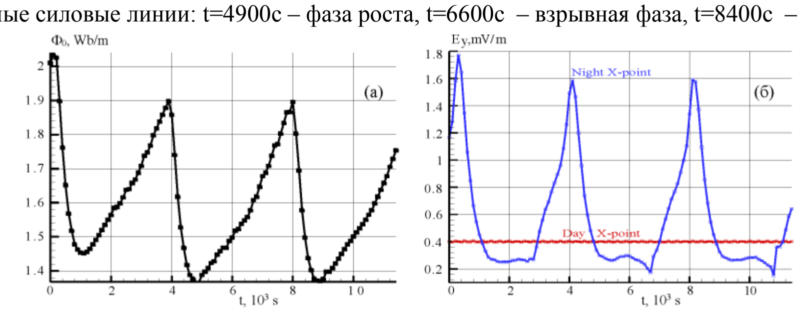


Рисунок 2. Временные профили открытого магнитного потока ММП (а) и скорости пересоединения в дневной и ночной Х-точках (б), красная линия – дневная Х-точка, синяя кривая - ночная Х-точка.

1. Priest, E. R., and T. G. Forbes, Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications, Cambridge Univ. Press, New York, 2000
2. Huang C. S. et al. Periodic magnetospheric substorms: Multiple space based and ground-based instrumental observations // J. Geophys. Res.: Space Physics. 2003. V. 108. C. 1411.

Вывод уравнения Эйлера для газа Чаплыгина из микродинамики

Лыков А.А., Малышев В.А.

МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва

Рассмотрим систему N частиц на прямой с взаимодействием

$$U = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} V(|x_j - x_i|), \tag{1}$$

где потенциал взаимодействие между частицами имеет вид

$$V(x) = \frac{\omega^2}{2} \begin{cases} \phi(x), & 0 < x \leqslant a - a_1, \\ (x-a)^2, & a - a_1 < x \leqslant a + a_1, \\ const, & x > a + a_1, \end{cases}$$

для произвольной гладкой функции $\phi(x)$, и $a = \frac{1}{N} > a_1 = \frac{r}{N} > 0$, $r < 1$ и $\omega = \omega' N > 0$. Начальные условия таковы

$$x_{k+1}(0) - x_k(0) = \frac{1}{N} X\left(\frac{k}{N}\right) > 0, \quad \dot{x}_{k+1}(0) - \dot{x}_k(0) = \frac{1}{N} V\left(\frac{k}{N}\right), x_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = v,$$

$$x_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(0) = v, \ \ X(0) = X(1) = 1, \quad V(0) = V(1) = 0$$

для некоторых $v \in \mathbb{R}$ и $X, V \in C^4([0,1])$.

Также рассмотрим уравнение Эйлера для газа Чаплыгина:

$$u_t + u u_y = -\frac{1}{\rho} p_y, \quad p = -\frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

где $p = p(t,y)$—давелние, $u(t,y)$ — эйлерова скорость газа в точке y в момент t.

В работе [2] доказывется, что при соотсветствующем скейлинге динамика частиц с потенциалом (1) описывается уравненим Эйлера для газа Чаплыгина (2). Одним из ключевых моментов доказательства выступает понятие регулярности системы частиц. Мы называем систему регулярной, если в ней отсутствуют столкновения, т.е. $x_k(t) \neq x_j(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $k \neq j$. Заметим, что даже для простейшей системы с потенциалом (1) проверка этого свойства является нетривиальной задачей. В частности, мы доказываем следующую теорему:

Теорема. Для всех $t \geq 0, k = 1, ..., N-1$ имеет место

$$\frac{1-\gamma}{N} \leqslant x_{k+1}(t) - x_k(t) \leqslant \frac{1+\gamma}{N}$$

где константа γ зависит только функций X и V, что означает отсутствие столкновений между частицами.

При $N \to \infty$ мы получаем регулярную континуальную систему частиц [1] с траекториями $y(t,x)$, скоростями $u(t,y)$ и начальными условиями $y(0,x) = x, u(0,y) = v(x)$.

Стоит отметить, что газ Чаплыгина получил большую популярность в связи с исследованиями в космологии, в частности, в проблеме описания тёмной энергии и тёмной материи ([3,4,5,6,7]).

Список литературы

[1] А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков. Регулярные континуальные системы точечных частиц, I: Системы без взаимодействия. Чебышевский сборник, 2016, т. 17, № 3, с. 148–165.

[2] A. A. Lykov, V. A. Malyshev. From the N Body Problem to Euler Equations. Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, v. 24, № 1, p. 179-195.

[3] J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, and P. E. de Souza. Density Perturbations in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas. General Relativity and Gravitation, Vol. 34, No. 1, 2002.

[4] Luis P. Chimento. Extended tachyon field, Chaplygin gas, and solvable k-essence cosmologies. Phys. Rev. D, Vol. 69, Iss. 12 — 15, 2004.

[5] Ka Luen Cheung. Finite Propagation Speed and Finite Time Blowup of the Euler Equations for Generalized Chaplygin Gas. Advances in Theoretical and Applied Mathematics, v. 12, 1,51-63, 2017.

[6] M. Salti, H. Yanar, O. Aydogdu. Logarithmic-corrected Ricci and modified Chaplygin gas dark energy models in fractal framework. The European Physical Journal Plus, 132, 5, 2017.

[7] Subhra Bhattacharyaa, Shibaji Halderb,Subenoy Chakraborty. Evolving cosmic scenario in modified Chaplygin gas with adiabatic matter creation. Annals of Physics, Volume 388, 443–455, 2018.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ И КРУГЛОМ КАНАЛАХ С ДИФФУЗОРОМ

М.С. Макарова, В.Г. Лущик, А.И. Решмин
НИИ Механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрены круглый и плоский диффузоры, в которых реализуется течение с переменным по длине градиентом давления. Для решения задачи использовались уравнения неразрывности и движения в приближении узкого канала и трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности. Проведенное сравнение результатов расчета интегральных и локальных характеристик течения в круглом и плоском диффузорах позволило установить основные особенности достаточно сложных процессов перестройки течения, имеющих как похожий, так и отличный характер изменения профилей скорости и характеристик турбулентности по длине каналов. Показано, что при одинаковом угле раскрытия в круглом диффузоре коэффициент трения и интенсивность турбулентности существенно выше, чем в плоском диффузоре и это превышение возрастает с увеличением угла раскрытия диффузоров.

ВВЕДЕНИЕ

Продольный градиент давления является параметром, который оказывает существенное влияние на турбулентное течение, приводя в пределе в случае положительного градиента давления при течении в диффузоре – к его отрыву. В инженерной практике проточный тракт энергоустановок состоит из участков как постоянного, так и переменного сечения, в частности, и из диффузорных участков. Знание режима течения на этих участках проточного тракта имеет важное значение при определении гидравлических характеристик энергоустановок.

Проведенные ранее экспериментальные и расчетные исследования течения в круглом коническом безотрывном диффузоре с малым углом раскрытия [1] показали сильное влияние расширения на режим течения. Измеренные профили скорости и напряжений Рейнольдса хорошо согласуются с расчетами, выполненными с использованием трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности [2], прошедшей всестороннюю проверку в широком классе задач пограничного слоя [3], тестированной также на примере течения в расширяющемся канале с нарастающим положительным градиентом давления [4] и показавшей хорошее согласование результатов расчёта с экспериментальными данными. Полученные в [1] экспериментальные и расчетные результаты и результаты численного исследования [5] показали, что напряжения Рейнольдса и энергия турбулентности в диффузоре заметно выше, чем в круглой трубе при тех же числах Рейнольдса.

Целью настоящей работы является сравнение результатов расчета интегральных и локальных характеристик течения в круглом и плоском безотрывном диффузорах при одинаковом угле раскрытия.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрены круглый и плоский диффузоры (рис. 1) с линейным профилем образующей по длине (рис. 2а), в которых реализуется течение с переменным по длине градиентом давления. Входу в диффузоры предшествовал участок стабилизации длиной $\overline{L}_1$, равной 100 входных диаметров каналов ($\overline{L} = x/d_1$) для круглого диффузора и входных высот канала ($\overline{L} = x/h_1$) для плоского диффузора, на котором устанавливалось развитое турбулентное течение при заданном числе Рейнольдса. Далее следовал участок длиной $\overline{L}_2$ = 50, на котором в круглом диффузоре число Рейнольдса уменьшалось по длине в зависимости от угла раскрытия диффузора, а в плоском диффузоре при любом угле раскрытия оно оставалось постоянным (рис. 2б). За диффузором следовал участок постоянного сечения $\overline{L}_3$=100, на котором устанавливалось развитое турбулентное течение при выходном числе Рейнольдса. Для решения задачи, как и в [1, 5] использовались уравнения неразрывности и движения в приближении узкого канала.

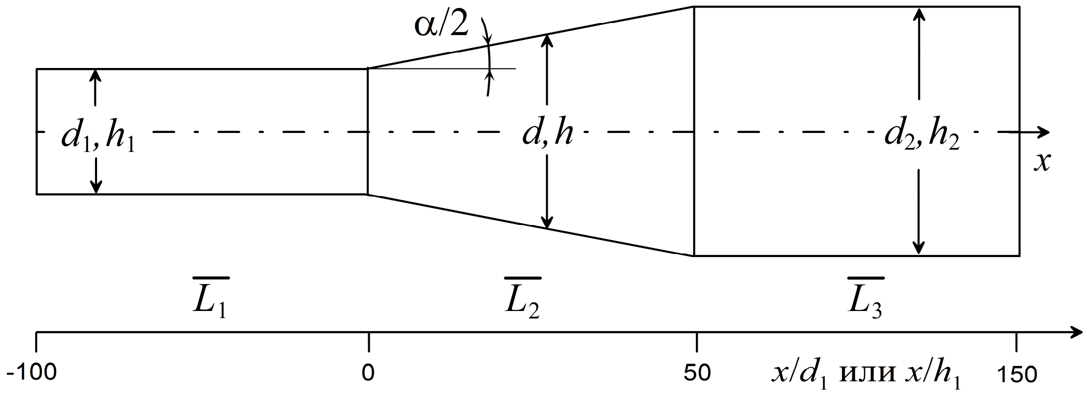


Рис. 1. Расчетная схема

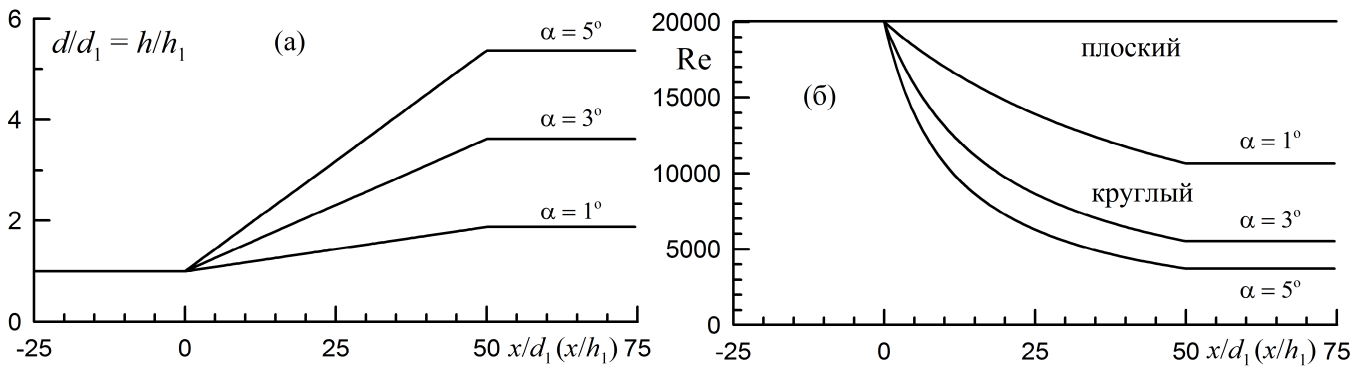


Рис. 2. Профили диффузоров (а) и число Рейнольдса (б) для углов раскрытия α=1°, 3°, 5°

Рассчитывались параметры течений при числе Рейнольдса на входе $\mathrm{Re}_1 = 20000$, определенному по гидравлическому диаметру и среднерасходной скорости U_1 на входе в диффузор. При определении чисел Рейнольдса в качестве характерного размера принимался гидравлический диаметр d_{h}, который для круглого диффузора равен диаметру канала d, а для плоского диффузора – двойной высоте канала $2h$. В качестве рабочего тела принят воздух при давлении на входе в канал 0.1 МПа и температуре 300 К.

Для вычисления входящей в уравнение движения величины турбулентного трения $\rho\tau = \rho < u'v'>$ использована трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности [2], в которой уравнения переноса записаны для энергии турбулентности $E = 0{,}5\,\Sigma < u_i'^2 >$, величины напряжения Рейнольдса $\tau = < u'v'>$ и параметра $\omega = E / L^2$ (L – поперечный интегральный масштаб турбулентности).

Граничные условия на стенке ($r=d/2,\ y=h/2$), на оси симметрии ($r,y=0$) и на входе ($x=0$) для круглого и плоского диффузоров имеют вид:

$$u=0,\ v=0,\ \ E=\frac{\partial E}{\partial n}=\tau=0 \quad (r=d/2,\ y=h/2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=v=0, \frac{\partial E}{\partial r}=\frac{\partial \omega}{\partial r}=\tau=0 \ \ (r,y=0)$$

$$p=p_1, u=U_1,\ E=E_1,\ \tau=0,\ \omega=\omega_1 \ \ (x=0)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Результатами расчетов явились локальные значения относительного градиента давления $\nabla\overline{P}$ и коэффициента трения ξ, определенных как

$$\nabla\overline{P}=\frac{dp/dx}{(dp/dx)_0}, \quad \xi=8\frac{\tau_w}{\rho U^2}.$$

Здесь U – среднерасходная скорость, $\tau_w=-(\eta\partial u/\partial y)_w$, $(dp/dx)_0=\xi_0\rho U^2/2d_h$ – абсолютная величина градиента давления для развитого течения в канале постоянного сечения при числе Рейнольдса, соответствующем течению в диффузоре. В расчетах получены также безразмерные профили скорости $u^{\text{o}}=u/U$, интенсивности турбулентности $e=\sqrt{E}/U$ и напряжения Рейнольдса $\bar{\tau}=\langle u'v'\rangle/U^2$. Расчеты проведены для углов раскрытия в круглом и плоском диффузорах α=1°, 3°, 5°.

На рис. 3 приведено изменение по длине безразмерного градиента давления $\nabla\overline{P}$ в круглом и плоском диффузорах. Как видно, градиент давления с ростом угла раскрытия существенно возрастает, оставаясь при малых углах раскрытия примерно одинаковым как в круглом, так и в плоском диффузоре.

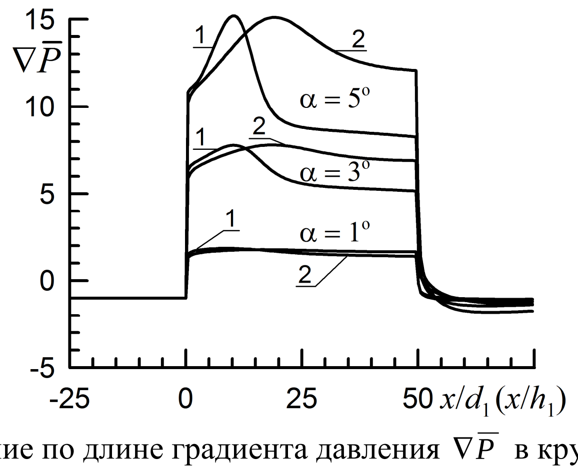


Рис. 3. Изменение по длине градиента давления $\nabla\overline{P}$ в круглом (линии 1) и плоском (линии 2) диффузорах для углов раскрытия α = 1°, 3°, 5°

На рис. 4 представлены результаты расчёта изменения по длине коэффициента трения ξ в каналах. Как видно, коэффициент трения в диффузоре возрастает по сравнению с величиной ξ в канале постоянного сечения на входном участке (при $x<0$). Затем в выходном участке коэффициент трения уменьшается до значений, соответствующих развитому течению при соответствующем числе Рейнольдса. С увеличением угла раскрытия диффузора величина ξ существенно возрастает, причем в большей степени для круглого диффузора.

Представленные ниже результаты расчетов получены для угла раскрытия $\alpha = 5°$, при котором влияние градиента давления на соответствующие величины является максимальным.

На рис. 5 приведены результаты расчёта изменения по длине продольной скорости на оси каналов u_0, отнесённой к местной среднерасходной скорости U и максимального по сечению значения интенсивности турбулентности $e_m = \sqrt{E_{\max}}/U$.

Проведенные расчёты показали, что в канале с круглым диффузором скорость на оси, как и интенсивность турбулентности, изменяются сильнее, чем в канале с плоским диффузором.

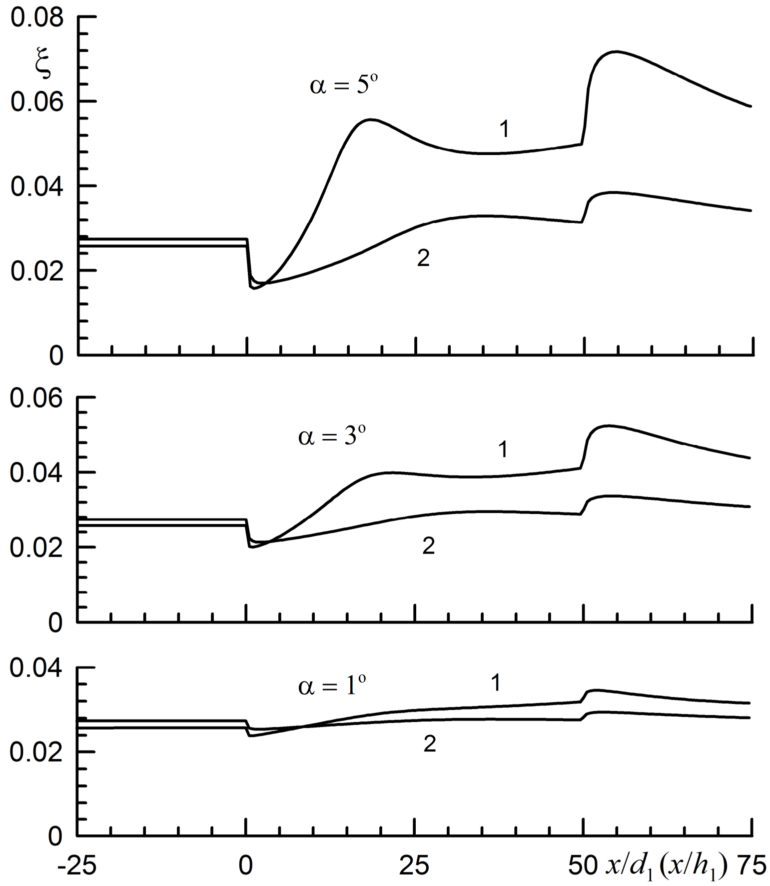


Рис. 4. Изменение по длине коэффициента трения ξ в круглом (линии 1) и плоском (линии 2) диффузорах для углов раскрытия α = 1°, 3°, 5°

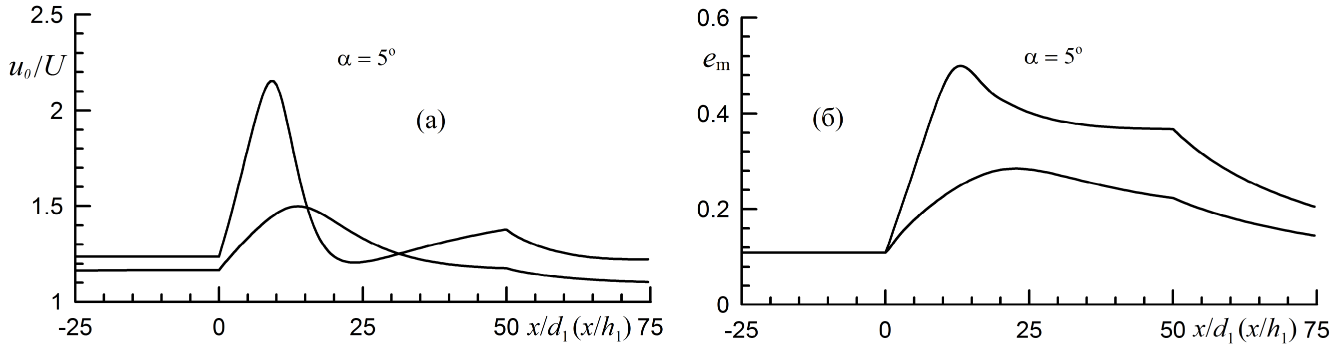


Рис. 5. Изменения по длине относительной продольной скорости на оси канала u_0/U (а) и максимального по сечению значения интенсивности турбулентности $e_m = \sqrt{E_{\max}}/U$ (б). в круглом (линии 1) и плоском (линии 2) диффузорах.

На рис. 6, 7, 8 соответственно представлены профили скорости u/U, интенсивности турбулентности $e=\sqrt{E}/U$ и напряжения Рейнольдса $\bar{\tau}=<u'v'>/U^2$ для сечений на входе в диффузор, в средине диффузора, на выходе из диффузора и в конце выходного канала.

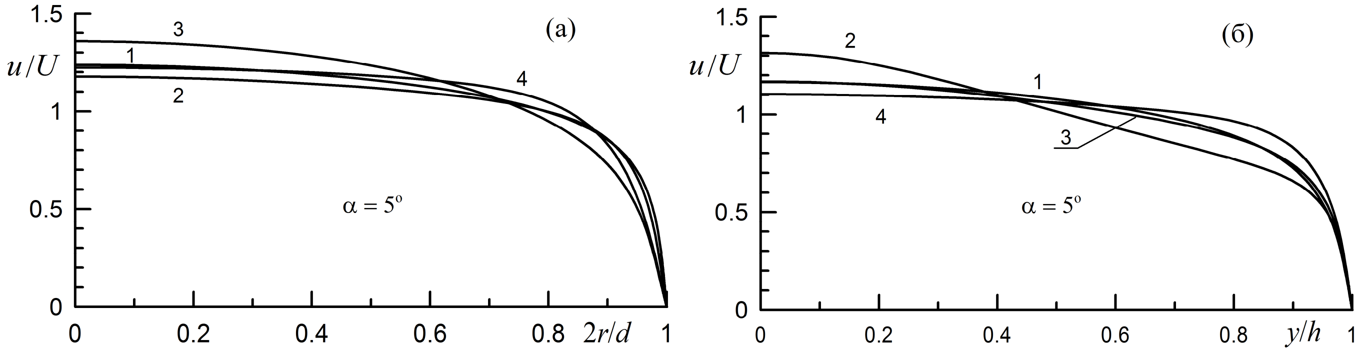


Рис. 6. Профили скорости u/U для сечений на входе в диффузор (линии 1), в средине диффузора (линии 2), на выходе из диффузора (линии 3) и в конце выходного канала (линии 4): (а) – круглый, (б) – плоский диффузор.

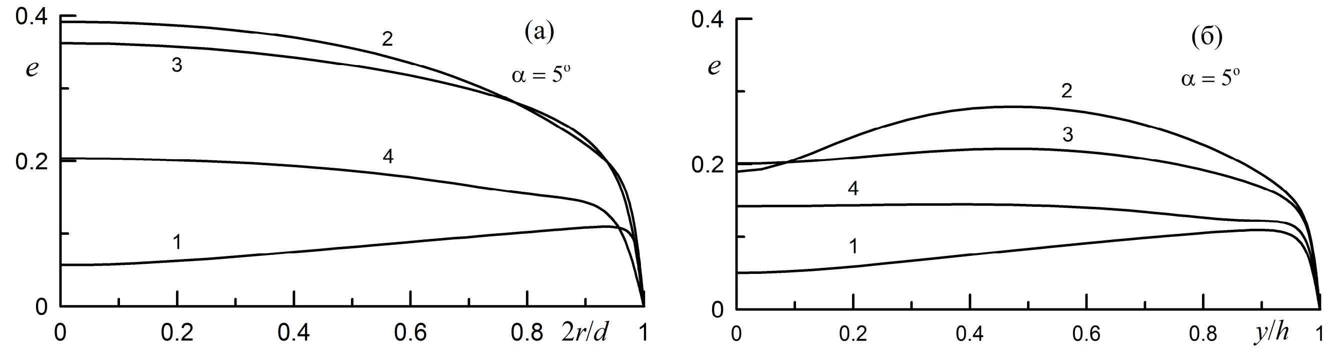


Рис. 7. Профили интенсивности турбулентности $e=\sqrt{E}/U$ для сечений на входе в диффузор (линии 1), в средине диффузора (линии 2), на выходе из диффузора (линии 3) и в конце выходного канала (линии 4): (а) – круглый, (б) – плоский диффузор.

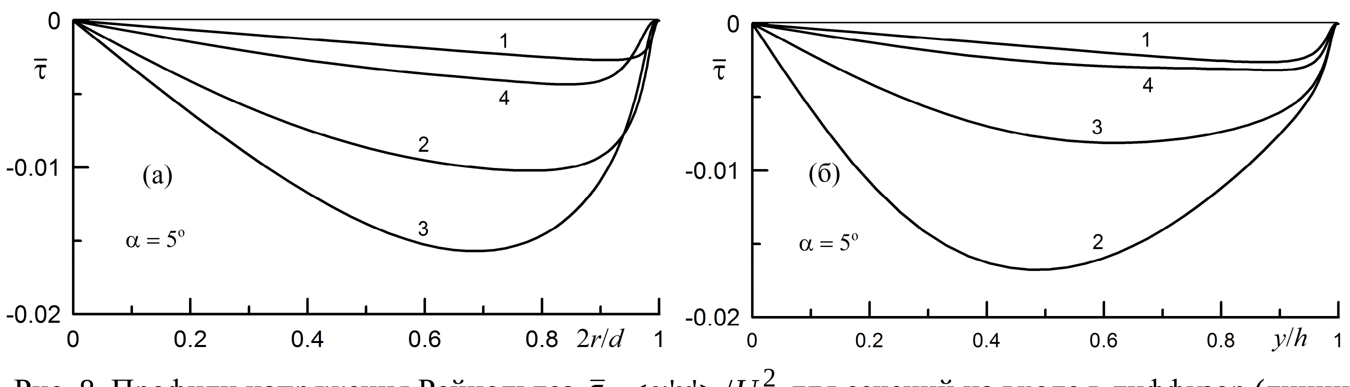


Рис. 8. Профили напряжения Рейнольдса $\bar{\tau}=<u'v'>/U^2$ для сечений на входе в диффузор (линии 1), в средине диффузора (линии 2), на выходе из диффузора (линии 3) и в конце выходного канала (линии 4): (а) – круглый, (б) – плоский диффузор.

Полученные продольные и поперечные распределения интегральных и локальных характеристик течения: градиента давления, коэффициента трения, профили скорости, интенсивности турбулентности и напряжений Рейнольдса позволили установить, что перестройка течения и появляющийся в диффузоре положительный градиент давления приводят к росту турбулизации течения. Подтверждением этого являются изменение интенсивности турбулентности и напряжений Рейнольдса, которые существенно возрастают в диффузоре.

Показано, что при одинаковом угле раскрытия в круглом диффузоре коэффициент трения и интенсивность турбулентности существенно выше, чем в плоском диффузоре и это превышение возрастает с увеличением угла раскрытия диффузоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное численное исследование показало, что в круглом диффузоре характеристики турбулентности - энергия турбулентности и напряжения Рейнольдса - оказываются выше, чем в плоском диффузоре при той же степени расширения, и в обоих диффузорах они существенно выше, чем в каналах постоянного сечения при тех же числах Рейнольдса. Можно предположить, что турбулизация потоков обусловлена перестройкой течения в расширяющихся каналах и появляющимся при этом положительным градиентом давления.

Следует отметить, что принципиальное отличие процессов течения в плоском и в круглом диффузоре состоит в том, что в плоском диффузоре число Рейнольдса остается постоянным по всей длине диффузора, а в круглом диффузоре оно уменьшается обратно пропорционально диаметру диффузора по длине. Это сказывается на изменении относительных характеристик течения по длине диффузора, которые зависят от величины числа Рейнольдса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-08-00115) и Совета по грантам Президента РФ (СП-3993.2018.1).

Литература

1. *Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Трифонов В.В.* Турбулентное течение в круглом безотрывном диффузоре при числах Рейнольдса меньших 2000 // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 121.

2. *Лущик В.Г, Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13.

3. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4.

4. *Samuel A.E., Joubert P.N.* A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient // J. Fluid Mech. 1974. V 66. P. 481.

5. *Лущик В.Г., Решмин А.И.* Особенности турбулентного течения в круглых каналах с уменьшающимся по длине числом Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 76-82.

ВЛИЯНИЕ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ГЕНЕРАЦИЮ ЗАВИХРЕННОСТИ ТАЙФУНОВ И ТОРНАДО

Маслов С.А.[1], Смирнов В.А.[2], Харчевский А.А.[2]
[1]Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
[2]Московский технологический университет (МИРЭА)

Предложен механизм генерации завихренности тайфунов (тропических ураганов) и торнадо (смерчей) за счет турбулентности атмосферы. С использованием вейвлет-анализа реальных атмосферных вихрей показано, что вклад турбулентных пульсаций составляет до 35% от вклада растяжения вихревых линий. Турбулентное движение воздуха в атмосферных вихрях описывается с использованием уравнений неразрывности и Навье – Стокса, причем для характеристик потока справедливо разложение на среднюю и пульсационную составляющие, где осреднение проводится по времени малому по сравнению со временем жизни атмосферного вихря (тайфуна или торнадо) и большому в сравнении с периодом турбулентных пульсаций. Предполагается, что характерный размер пульсаций r' существенно меньше пространственного масштаба R среднего потока [1]. На основе описанных предположений получено уравнение для средней завихренности:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\mathbf{U} \times \mathbf{\Omega}\right) + \left\langle \mathrm{rot}\left(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}'\right)\right\rangle + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{\Omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{u}'$ - средняя и пульсационная скорости, $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\omega}'$ - средняя и пульсационная завихренности, треугольные скобки обозначают операцию осреднения. Первый член правой части (1) отражает влияние растяжения вихревых линий, второй – воздействие атмосферной турбулентности. Слагаемое $\mathrm{rot}\left(\mathbf{U}\times\mathbf{\Omega}\right)$ имеет порядок величины $U\Omega/R$, $\left\langle \mathrm{rot}\left(\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\right)\right\rangle \sim u'\omega'/r'$, $\Omega \sim U/R, \omega' \sim u'/r'$. Кроме того, характерную пульсационную завихренность можно оценить как $\omega' \sim 2\pi\nu'$, где частота флуктуаций ν' находится посредством вейвлет-анализа [2] данных натурных наблюдений. Следовательно, относительный вклад турбулентности в генерацию завихренности тайфунов и торнадо приближенно определяется величиной

$$N \sim \frac{4\pi^2 R^2 \nu'^2}{U^2}. \tag{2}$$

Для оценки частоты пульсаций проведено сравнение частотно-временной эволюции атмосферного давления на земной поверхности в следующих типичных случаях атмосферных вихрей: торнадо [3] (Пратт, Канзас, США, 07.05.2002), тайфунов Айрин [4] (15 – 29.08.2011, США) и Андреа [5] (06.2013, США). В дальнейшем для обозначения характеристик торнадо используем индекс «1», параметров ураганов Айрин и Андреа – соответственно «2» и «3». Вейвлет-анализ показывает, что характерная частота колебаний давления, а следовательно, и турбулентных пульсаций завихренности, для торнадо в Канзасе имела порядок $\nu_1' \sim 1\cdot10^{-2}$ Гц (рис. 1), для урагана Айрин $\nu_2' \sim 5\cdot10^{-5}$ Гц, в тайфуне Андреа $\nu_3' \sim 2\cdot10^{-5}$ Гц. По оценкам [3 – 5], максимальные азимутальные скорости U_1=31 м/с, U_2=54 м/с, U_3=18 м/с радиус ядра торнадо R_1~250 м, радиусы глаза тайфунов R_2~100 км, R_3~50 км. Из (2) получаем, что для торнадо в Канзасе вклад турбулентности $N_1 \sim 0.25$, для тайфунов соответственно N_2~0.34, N_3~0.18.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00456 мол_а)

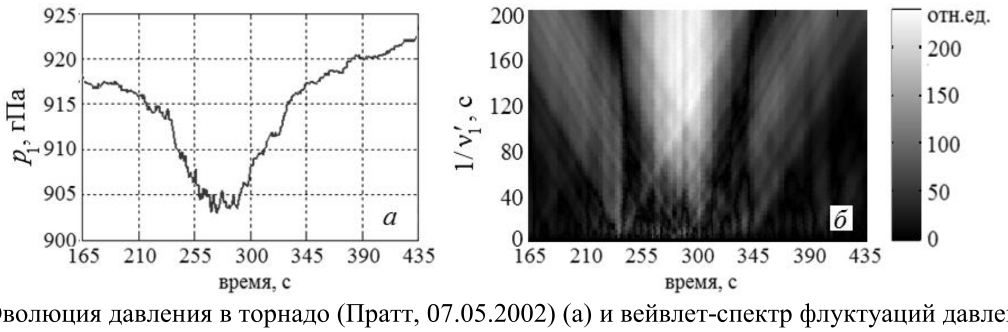


Рис. 1. Эволюция давления в торнадо (Пратт, 07.05.2002) (а) и вейвлет-спектр флуктуаций давления (б).

ЛИТЕРАТУРА

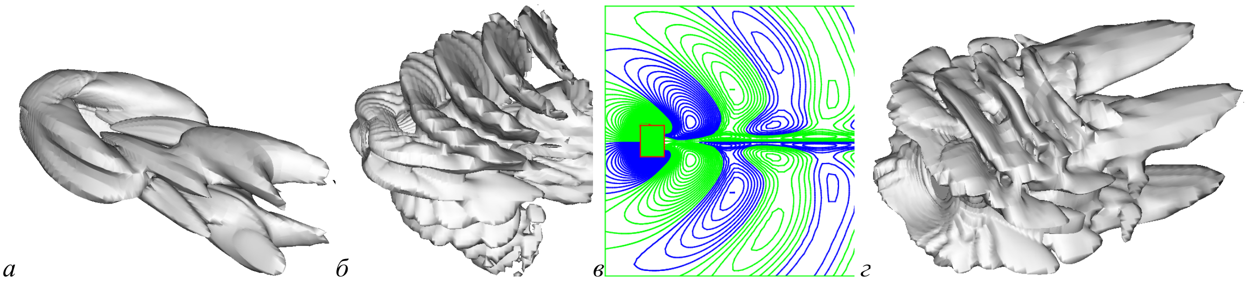
1. Арсеньев С.А., Бабкин В.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана / Под ред. Г.С. Голицына. М.; Ижевск: РХД, 2010.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.
3. Samaras T.M., Lee J.J. Pressure measurements within a large tornado https://ams.confex.com/ams/pdfpapers/74267.pdf
4. Hurricane Irene August 26 – 27, 2011. http://www.weather.gov/mhx/Aug272011EventReview
5. Tropical Storm Andrea Event Summary. http://www.weather.gov/tae/event-201306_andrea

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, КАК ГЕНЕРАТОР ВНУТРЕННИХ ВОЛН НАД МЕСТОМ СТАРТА ТЕЛА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

П.В. Матюшин
Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

В связи с необходимостью детального описания структуры океанических и атмосферных течений, создаваемых движущимися объектами, разработан программный комплекс математического моделирования пространственных отрывных течений линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости около диска с диаметром d, равномерно двигающегося в горизонтальном направлении вдоль своей оси симметрии Z со скоростью U. На вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН) решалась система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска при помощи метода МЕРАНЖ с явной гибридной конечно-разностной схемой для аппроксимации конвективных членов уравнений (второй порядок аппроксимации, монотонность) [1].

Поля скоростей всех рассчитанных течений имеют горизонтальную плоскость симметрии Y-Z [2-3]. Поэтому для определенности рассмотрим в дальнейшем только верхнее полупространство над плоскостью Y-Z ($X \geq 0$). В результате проведенных расчетов впервые был исследован нелинейный пространственный универсальный механизм формирования гравитационных внутренних волн над местом M импульсного старта тела в горизонтальном направлении. Через каждый промежуток времени, равный половине периода плавучести жидкости T_b, в *силу гравитационной неустойчивости* над точкой M формируется небольшое деформированное вихревое кольцо, которое со временем постепенно увеличивается в размерах и сдвигается вниз к точке M [2]. Левые полукольца заполняют верхнее полупространство над следом (рис. *б*, *г*), а правые остаются у точки M, утончаясь со временем под давлением новорожденных правых полуколец, давящих на них сверху. Каждая пара левых полуколец образует одну волну (рис. *б*, *в*) [2-4]. Этот универсальный механизм работает при любых внутренних числах Фруда $Fr = U{\cdot}T_b/(2\pi{\cdot}d)$. Так при $U = 0$ установившимся течением будут две тонкие горизонтальные конвективные ячейки у верхней и нижней точек тела [5]. В силу того, что длина волны λ равна $2\pi{\cdot}d{\cdot}Fr$, а внешняя граница расчетной сетки удалена от диска вдоль Z на $25{\cdot}d$, то при $Fr > 10$ мы не заметим этих длинных волн ($\lambda > 20\pi{\cdot}d$) маленькой амплитуды. А при $Fr = 0.5$ $\lambda = \pi{\cdot}d$ и в расчетной сетке умещается 8 волн, первые две из которых представлены на рис. *б*-*в*.



На рис. *а*, *б*, и *г* показаны три пространственные вихревые структуры (изоповерхности $\beta = 0.02$, 0.01, 0.02) течений, возбуждаемых движением диска (толщиной $H = 0.76{\cdot}d$) в жидкости в горизонтальном направлении вдоль своей оси симметрии Z при $Fr = 1$, 0.5, 0.1 для числа Рейнольдса $Re = U{\cdot}d/\nu = 50$, где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, β – мнимая часть собственных значений тензора градиента скорости [6]. На рис. *в* показаны изолинии возмущения солености S с шагом 10^{-5} в вертикальной плоскости X-Z при $Fr = 0.5$, $Re = 50$. При $X \geq 0$ более темные изолинии соответствуют $S < 0$ (полуволны впадин), а более светлые – $S \geq 0$ (полуволны гребней). Две «клешни» в правом краю рис. *а* – это первая полуволна гребней у оси Z, которая с уменьшением Fr приближается к диску, сращивается с ним при $Fr = 0.45$ и создает у плоскости Y-Z слой течения с нулевой вертикальной компонентой вектора скорости.

ЛИТЕРАТУРА.

1. О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, В.Н. Коньшин. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью. ЖВМ и МФ, 1987, 27 (4), 594-609.
2. П.В. Матюшин. Эволюция течения стратифицированной вязкой жидкости при начале движения тела. Научный журнал «Процессы в геосредах», 2016, 4 (9), 333-343.
3. П.В. Матюшин. Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска. Научный журнал «Процессы в геосредах», 2017, 4 (13), 678-687.
4. В.А. Гущин, П.В. Матюшин. Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров. Журнал вычислит. математики и математич. физики, 2016, 56 (6), 1049-1063.
5. В.Г. Байдулов, П.В. Матюшин, Ю.Д. Чашечкин. Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость. Известия РАН, МЖГ, 2007, 2, 130-143.
6. M.S. Chong, A.E. Perry, B.J. Cantwell. A general classification of three-dimentional flow field, Phys. Fluids, 1990, A 2, 765-777.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ВИХРЕВЫМИ МЕТОДАМИ

Е.А.Михайлов[1], И.К.Марчевский[2]
[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва
[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки», Москва

В основе вихревых методов вычислительной гидродинамики, используемых для моделирования обтекания профиля несжимаемым потоком, лежит высказанная еще в начале прошлого века Н.Е. Жуковским мысль о том, что обтекаемый профиль можно заменить вихревым слоем, оказывающим эквивалентное воздействие на поток [1]. Как правило, в вихревых методах задачу поиска неизвестной интенсивности вихревого слоя сводят к решению сингулярного граничного интегрального уравнения типа Фредгольма первого рода, однако в работах [2, 3] развит альтернативный подход, позволяющий сводить задачу к граничному интегральному уравнению второго рода с ограниченным (для случая гладкого профиля) ядром:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_L K(\vec{x},\vec{\xi})\gamma(\vec{\xi})dl_\xi - \frac{1}{2}\gamma(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \text{где} \quad K(\vec{x},\vec{\xi}) = \frac{(\vec{x}-\vec{\xi})\cdot\vec{n}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2},$$

$\gamma(\vec{x})$ – искомая интенсивность вихревого слоя; $f(\vec{x})$ – известная функция, зависящая от формы профиля, скорости набегающего потока и распределения завихренности в области течения; $\vec{n}(\vec{x})$ - орт внешней нормали к профилю в соответствующей точке.

В простейшем случае отсутствия вихревого следа правая часть имеет вид

$$f(\vec{x}) = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{\tau}(\vec{x}),$$

где $\vec{V}_\infty$ – скорость набегающего потока; $\tau(x)$ – орт касательной к профилю.

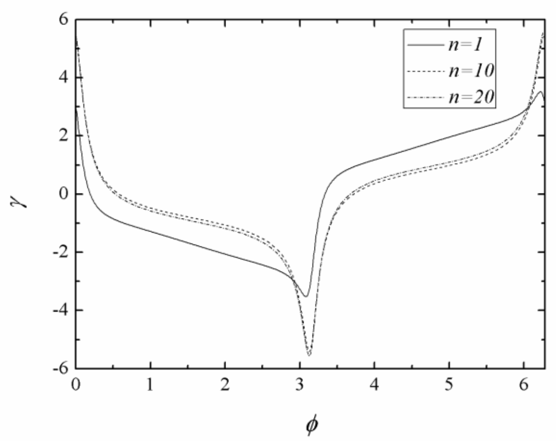


Рис. 1. Зависимость интенсивности вихря от угла обобщенной полярной системы координат для эллипса с соотношением полуосей 1:10.

Решение интегрального уравнения, как правило, сводится к его аппроксимации линейной системой, решаемой, в свою очередь методом Гаусса. В данной работе предлагается использовать для решения данной задачи метод последовательных приближений, известный в теории интегральных уравнений [4]. При этом, предложенный метод, как показывает практика, достаточно быстро сходится к решению, что позволяет значительно сэкономить вычислительные ресурсы.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях. // Тр. отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1906. Т. 13, № 2. 14 с.
2. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С. Определение интенсивности вихревого слоя при моделировании вихревыми методами обтекания профиля потоком несжимаемой среды // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 10. С. 20–34.
3. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С., Рятина Е.П. Расчетная схема вихревых методов второго порядка точности для моделирования обтекания профилей несжимаемым потоком // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 3. С. 73–80.
4. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: КДУ, 2008.

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАССООБМЕНА.

В.В.Моденова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Работа посвящена разработке математических моделей для решения задач разделения бинарных смесей газов. Экспериментально подтверждена высокая скорость установления адсорбируемого равновесия (при контакте газовой смеси с адсорбентом) поэтому обоснованным является использование приближенных моделей.

Исследовались процессы, протекающие в каскаде аппаратов позволяющих разделять бинарные смеси газов. При переходе от одного полуцикла к следующему в качестве начального распределения рассматривается распределение, установившееся в адсорбере к моменту их переключения. Заметим, что в одном из циклов основным фактором является равновесный фактор, в другом - диффузионный перенос, что позволило при математическом моделировании в аппаратах, работающих в разных режимах (сорбции и адсорбции) учитывать в одном диффузионный поток, и пренебрегать им в другом .Рассматриваемые модели качественно правильно характеризуют рассматриваемый процесс. При решении системы закон Дарси рассматривался как в линейной, так и в обобщенной форме, используя полуэмпирическую формулу Эргана. Особое внимание было уделено постановке начальных и граничных условий при переходе от одного полуцикла к другому. Оригинальный численно-аналитический подход позволил продвинуться в решении задач разделения бинарной смеси газов, приводящей к решению существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Общая модель решалась разностным методом с использованием итерационного процесса. Идентификация и установление границ применимости каждой из этих моделей – одна из важных задач рассматриваемого исследования Целью работы являлась идентификация параметров при моделировании этих процессов. Предложен эффективный численно-аналитический алгоритм решения начально-краевой задачи для системы существенно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Актуальность рассматриваемой задачи обуславливается целым рядом ее практических применений.

КАВИТАЦИЯ В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ПОТОКЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ВДОЛЬ СТЕНКИ

Монахов А.А., Попеленская Н.В.
Институт механики МГУ

Газовая кавитация

В жидкости, контактирующей с атмосферой, находится растворенный газ, главной характеристикой которого является давление. Состав и количество растворенного газа определяются свойством жидкости адсорбировать газ из окружающей среды, а также температурой жидкости и внешним давлением. При медленном изменении температуры или давления равновесие между растворенным газом и внешней средой происходит за счет диффузии газа в ту или другую сторону. При движении жидкости может возникнуть условие для локального падения давления ниже давления растворенного газа, т.е. для возникновения газовой кавитации. Обычно кавитация наблюдается и исследуется при больших скоростях вращения на лопатках турбин, гребных винтах. Но более полувека назад было обнаружено, что кавитацию можно наблюдать и при малых скоростях движения [1]. При этом числа Рейнольдса могут не превышать 1 [2-4]. Так, при движении сферы или цилиндра в жидкости вдоль поверхности с малым зазором, перед линией минимального зазора возникает конфузорная область с поджатием потока, а за ней – диффузорная область с его расширением, где происходит понижение давления. Образование расширяющейся области потока происходит и в случае движения тела по слою жидкости на поверхности [5]. Долгое время не было известно о влиянии величины зазора и скорости на возникновение кавитации.

Для паровой кавитации давление в жидкости должно быть не выше давления насыщения паров жидкости, что намного ниже, чем для условия возникновения газовой кавитации. Исследование такого вида кавитации представляется непростой задачей, так как необходимо, чтобы исследуемая жидкость не имела примесей и была исключена возможность адсорбции газов из внешней среды. Так, в [8] исследовалась паровая кавитация в зазоре между вращающимся цилиндром и плоской стенкой. Для этого жидкость дегазировали до давления 60 мм рт. ст. и внешнее давление уменьшали более чем в 10 раз.

В [9] предложен критерий образования полости в жидкости, согласно которому напряжение растяжения должно превышать предел прочности жидкости, который существенно зависит от наличия газовых и жидких неоднородностей в ней. Поэтому в эксперименте невозможно оценить падение давления для малых зазоров при движении цилиндра вдоль стенки. Для этого необходимо проводить глубокую степень дегазации жидкости. Ответить на вопрос, до какого уровня падает давление с уменьшением зазора, может дать расчет такого течения. Удобной схемой как для проведения эксперимента, так и для расчета является течение между эксцентрично вращающимися цилиндрами с малым зазором.

В [6] показано, что при уменьшении давления до давления растворенных газов, на поверхности цилиндра возникает газовая кавитация в виде цепочки пузырьков. Установлено, что граница возникновения кавитации определяется как скоростью движения цилиндра, так и зазором между цилиндром и стенкой, и имеется предельный зазор, при превышении которого кавитация не возникает. Уменьшение зазора приводит к росту падения давления в расширяющейся области, и необходимая скорость движения цилиндра для возникновения кавитации может быть снижена. В [7] представлены результаты измерения давления на поверхности цилиндра в конфузорной и диффузорной областях. Показано, что при кавитации дальнейшее уменьшение зазора не приводит к падению давления в области кавитации, и остается на уровне давления растворенных газов. поскольку давление растворенных газов стабилизирует это давление.

1. Описание установки

Схема установки представлена на Рис. 1. Исследовалось течение между вращающейся стенкой цилиндрической кюветы 1, выполненной из органического стекла с внутренним диаметром D=100 мм, и сменными внутренними цилиндрами 2 с диаметрами d=8, 25, 50 и 82,4 мм с осью, параллельной оси вращения кюветы. Величина зазора H между стенкой кюветы и цилиндром изменялась перемещением последнего вдоль радиуса кюветы микровинтом с шагом 0.01 мм. Линейная скорость движения кюветы V относительно неподвижного цилиндра могла меняться от 1 до 50 мм/с. Для измерения давления жидкости на поверхность внутреннего цилиндра в нем по радиусу было сделано отверстие 3, диаметром 0.5 мм, соединенное с датчиком давления M, типа MPXV7002DP. Внутренний цилиндр 2 мог поворачиваться вокруг своей оси и, таким образом, измерять давление в конфузорной и диффузорной областях, а также в кавитационном пузырьке.

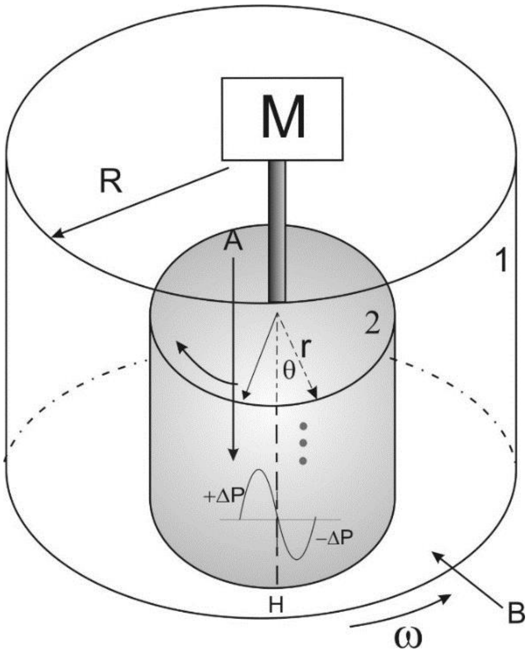


Рис. 1. Схема установки для исследования кавитации в зазоре между вращающимися цилиндрами.

На Рис. 2 показано совмещение отверстия и кавитационного пузырька, прилегающего к поверхности цилиндра, отмеченное стрелкой. Важным условием для измерения давления в кавитационном пузырьке является небольшой объем газа в микродатчике давления. Это условие определяет постоянную времени всей системы измерения давления. Поскольку измерение в каждой точке длилось более 1 минуты, то за это время давление в магистрали между отверстием и датчиком выравнивалось, и ошибка составляла 0.1 мм рт. ст. В качестве жидкости использовалось силиконовое масло ПМС с вязкостью 10^3 сСт без дегазации. Использовалось также масло И А-20 с вязкостью 80 сСт. Для исключения образования воздушной воронки, верхний край цилиндра был ниже уровня жидкости в кювете. Числа Рейнольдса, вычисленные по зазору, не превышали 0.1. Регистрация кавитационных пузырьков осуществлялась кино и фотосъемкой микроскопом с 20-тикратным увеличением. В некоторых экспериментах внутренний цилиндр 2 и внешний 1 могли вращаться как в одном, так и в противоположном направлениях.

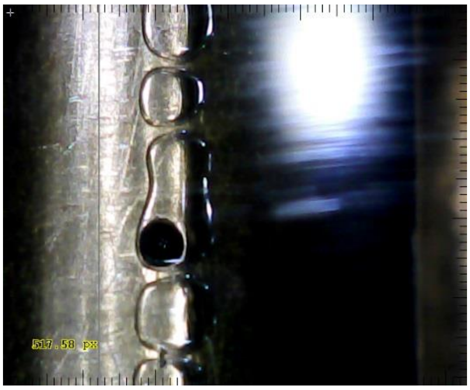


Рис. 2. Совмещение отверстия и кавитационного пузырька для измерения давления в кавитационном пузырьке.

2. Влияние величины зазора и скорости движения на границу возникновения кавитации

При движении цилиндрического тела или сферы вдоль стенки перед линией минимального зазора *H* происходит поджатие потока и повышение давления, а за ней поток расширяется и давление падает (см. Рис. 2а). При понижении давления в потоке ниже давления растворенных газов происходит выделение из жидкости растворенного газа. В эксперименте наблюдается формирование цепочки дискретных кавитационных пузырьков вдоль образующей внутреннего цилиндра размером около 0.2 мм (см. Рис. 2б).

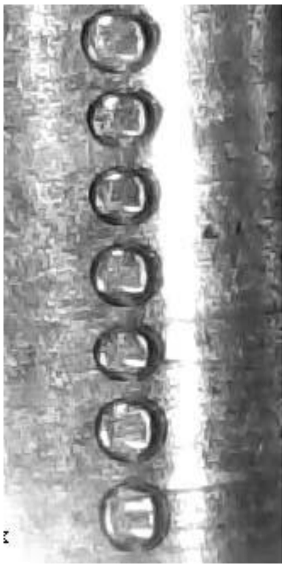


Рис. 2а

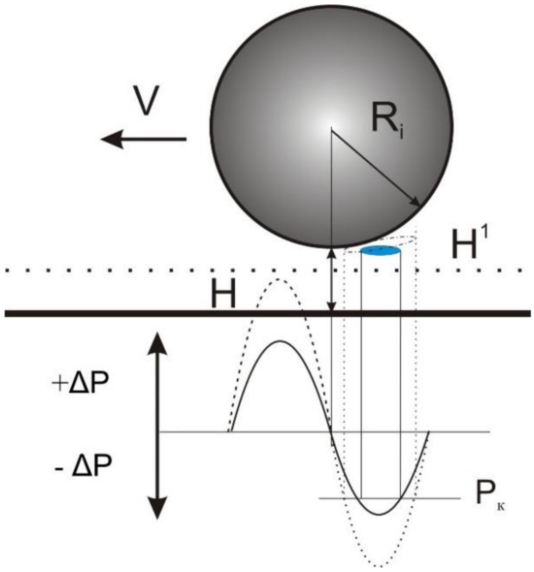


Рис. 2б

Долгое время не было данных о влиянии величины зазора на возникновение кавитации. Естественно было предположить, что при некотором расстоянии между телом и поверхностью кавитация прекратится. Проведенные исследования показали, что имеется асимптотическая зависимость между величиной зазора и скоростью движения стенки для возникновения кавитации [1]. С увеличением зазора скорость движения цилиндра должна возрастать. Имеется предельный зазор, при превышении которого кавитация не возникает. На Рис. 3 представлена кавитационная кривая в плоскости параметров скорость движения стенки Ω и величина зазора *H*.

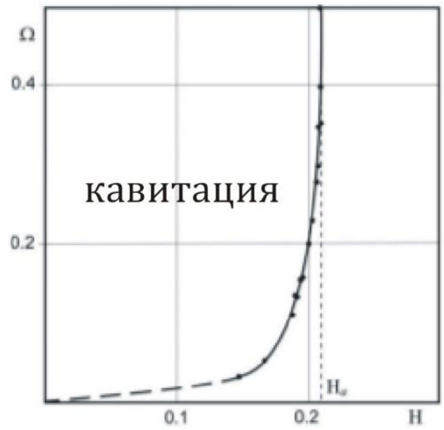


Рис. 3. Кавитационная кривая.

Изменение вязкости жидкости приведет к смещению кривой вправо или влево. Для более вязких жидкостей кавитация будет возникать при меньших скоростях и больших зазорах.

Для некоторых технологических процессов наличие растворенного газа в жидкости является нежелательным фактором. Так, на электроподстанциях, в трансформаторах применяют дегазированное трансформаторное масло, электрическая прочность которого зависит от количества растворенного воздуха в нем. Со временем в масле накапливается газ, понижая его электрическую прочность. Проведенные исследования позволяют оценить время восстановления дегазированной жидкости до прежнего газонасыщения. Были проведены исследования по восстановлению кавитационной кривой дегазированного масла со временем. На Рис. 4. представлены кавитационные кривые силиконового масла. 1 – перед дегазацией. Кривые 3,4,5 получены для разных времен после дегазации: 3 – кавитационная кривая через 20 мин после вакуумной дегазации масла до уровня 5*10-3 мм РТ ст., 4 – через 21 час после дегазации, 5 – через 48 часов после дегазации. 2 – кавитационная кривая через 72 часа после окончания дегазации. Восстановление жидкости происходило при внешнем давлении и постоянной температуре за счет диффузии газа через границу раздела газ-жидкость. Через 3 суток жидкость почти полностью восстанавливает первоначальное давление растворенных газов.

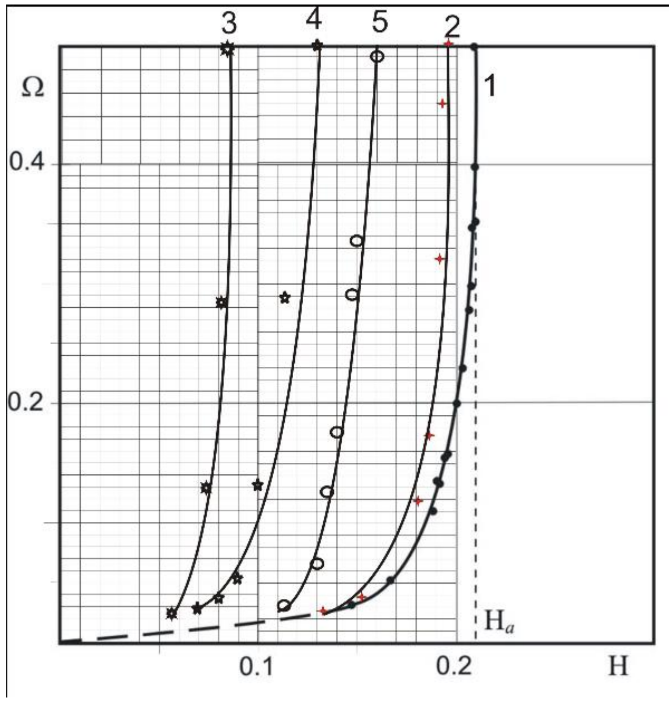
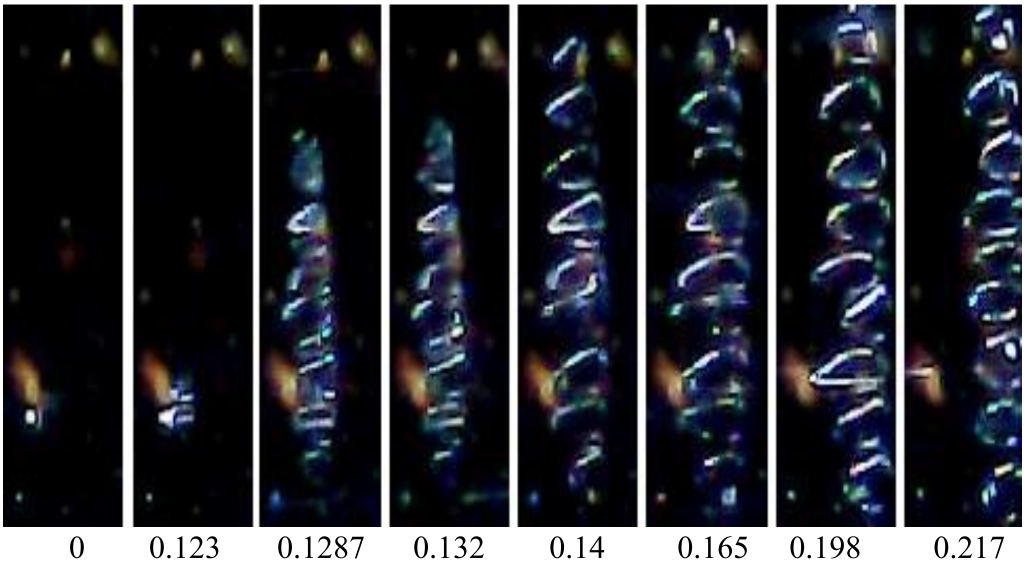


Рис. 4. Кавитационные кривые силиконового масла в зависимости от степени насыщения атмосферным воздухом.

3. Дискретность кавитации в виде кавитационных пузырьков

Причина дискретности кавитационных пузырьков долгое время была дискуссионной и объяснялась модуляцией понижения давления в области кавитации. Поскольку кавитация зависит от величины зазора между цилиндрическим телом и стенкой, то влияние шероховатости нельзя не учитывать. Шероховатость вносит случайный характер на изменение зазора и, соответственно, на изменение давления за цилиндром. На Рис. 5 представлена покадровая динамика развития кавитации в виде цепочки пузырьков. Жидкость движется слева направо, время дано в секундах.



0 0.123 0.1287 0.132 0.14 0.165 0.198 0.217 т (с)

Рис. 5. Развитие кавитации.

Возникший первый кавитационный пузырек имеет на своей поверхности заряд. Заряд всегда возникает на границе раздела газ-жидкость и, в данном случае, препятствует объединению с последующими возникающими пузырьками. В начальный момент развития кавитации, газовый пузырек имеет заостренную форму. Носик пузырька показывает начало возникновения кавитации, рост пузырька из малого размера обусловлен обтеканием его жидкостью и диффузией газа из жидкости в кавитационный пузырек. Диффузия прекращается при выравнивании давления растворенного газа в жидкости и в кавитационном пузырьке. Заостренная форма кавитационного пузырька отмечалась в [8] при исследовании паровой кавитации.

4. Давление на поверхности цилиндра в конфузорной и диффузорной областях

Давление жидкости на цилиндр в конфузорной области и области расширения потока измерялось через радиальное отверстие диаметром 0.5 мм на цилиндре с радиусом 4 мм. На Рис. 6. представлено давление, нормированное на атмосферное. Перед линией минимального зазора в результате поджатия потока давление немного возрастает. За линией минимального зазора, в дифузорной области, поток расширяется и давление падает.

С уменьшением зазора точка минимального давления перемещается на поверхности цилиндра к линии минимального зазора, то есть, кавитация возникает раньше.

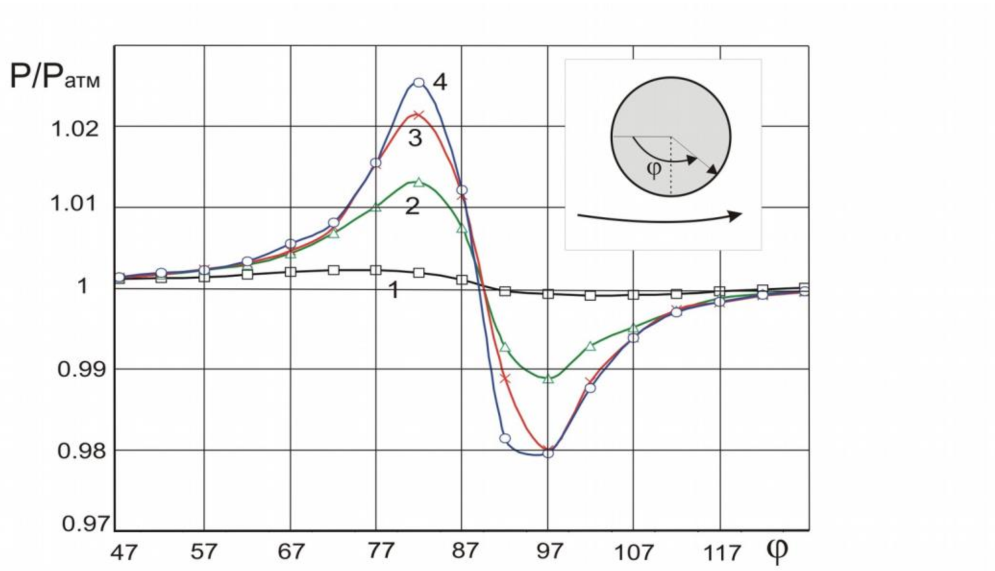


Рис. 6. Давление на поверхности цилиндра для разной величины зазора:
1 – 0.5мм, 2 – 0.3 мм, 3 – 0.2 мм, 4 – 0.1 мм

Измерение давления в области кавитации ($\varphi = 97^0$) при уменьшении зазора показало, что давление нелинейно уменьшается до величины, при которой возникает кавитация, и далее остается практически постоянной. На Рис. 7. представлен график давления на цилиндр в области кавитации при уменьшении величины зазора. Давление нормировано на атмосферное.

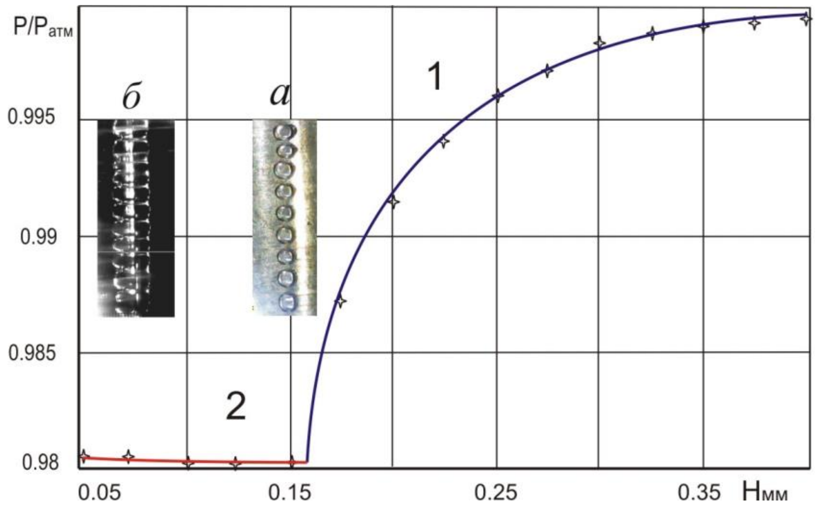


Рис. 7. Давление в кавитационной области при уменьшении зазора между цилиндром и стенкой, а – кавитационные пузырьки на границе возникновения, б – пузырьки в закритической области.

Область 1 характеризует течение без кавитации, граница 2 определяет давление растворенных газов в жидкости. Точка пересечения обеих кривых лежит на границе возникновения кавитации. На Рис. 7а представлена цепочка кавитационных пузырьков для зазора между цилиндрами H=0.2 мм. С уменьшением зазора ниже предела кавитации давление в кавитационной области не уменьшается, а остается практически постоянным. Возникающие при этом кавитационные пузырьки стабилизируют давление на поверхности внутреннего цилиндра за счет диффузии газа из жидкости.

5. Патентование способа измерения давления растворенных газов в жидкостях

Давление растворенных газов определяется концентрацией растворенных газов в жидкости и зависит от свойства жидкости адсорбировать газы, а также температуры и внешнего давления. В литературе не описан способ непосредственного измерения давления растворенных газов, но используются различные способы определения концентрации газа в жидкости. Из физики известно, что газовая кавитация – образование пузырьков – возникает, если давление в жидкости становится меньше давления растворенных газов [1].

В литературе имеется много способов определения концентрации растворенных газов в жидкости. Большинство из них основаны на дегазации пробы жидкости и замере количества выделенного газа химическим индикатором. Концентрация газа в пробе жидкости определяется по формуле на основании всего выделенного из пробы жидкости газа с учетом остаточного доли газа в дегазированной пробе жидкости. Точность таких методов зависит от степени дегазации образца и становится абсолютной только при очень глубокой дегазации.

На основе проведенных исследований предлагается способ определения давления растворенных газов в жидкости путем непосредственного измерения давления газа в кавитационном пузырьке. В начале кавитации давление в пузырьке немного меньше, чем давление растворенных газов, но при обтекании пузырька жидкостью происходит выравнивание давления в нем до давления растворенных газов за счет диффузии растворенного газа из жидкости. При выравнивании давления этот процесс прекращается. На Рис.7 эта область помечена красным цветом.

Получен международный патент (№ 2016125348) по определению давления растворенного газа в жидкости.

6. Возвратные течения в конфузорной и диффузорной областях

Методом макросъемки было установлено, что не весь поток жидкости в конфузорной области проходит через зазор между цилиндром и стенкой, часть его из-за поджатия потока возвращается обратно вдоль внутреннего цилиндра. На Рис. 8а представлены негативные снимки треков частиц алюминиевой пудры 1-9 в возвратном течении в конфузорной области. Частота видеосъемки составляла 30 кадров в секунду со временем экспозиции кадра, практически равной 1/30. Это связано с малым временем переключения между кадрами «обратный ход», которое намного меньше времени экспозиции кадра.

В диффузорной области, за линией минимального зазора, также возникает возвратное течение (Рис. 8б, треки 1-8), по причине падения давления жидкость возвращается извне. Здесь возвратное течение доходит до минимума падения давления, где возникают кавитационные пузырьки, отмеченные буквой К*, тормозится и после трека 4 разворачивается к вращающейся внешней стенке, где ее скорость возрастает (треки 6-8). Размер кавитационных пузырьков равен 0.2 мм. Скорость движения внешней стенки составляла 44.8 мм/с.

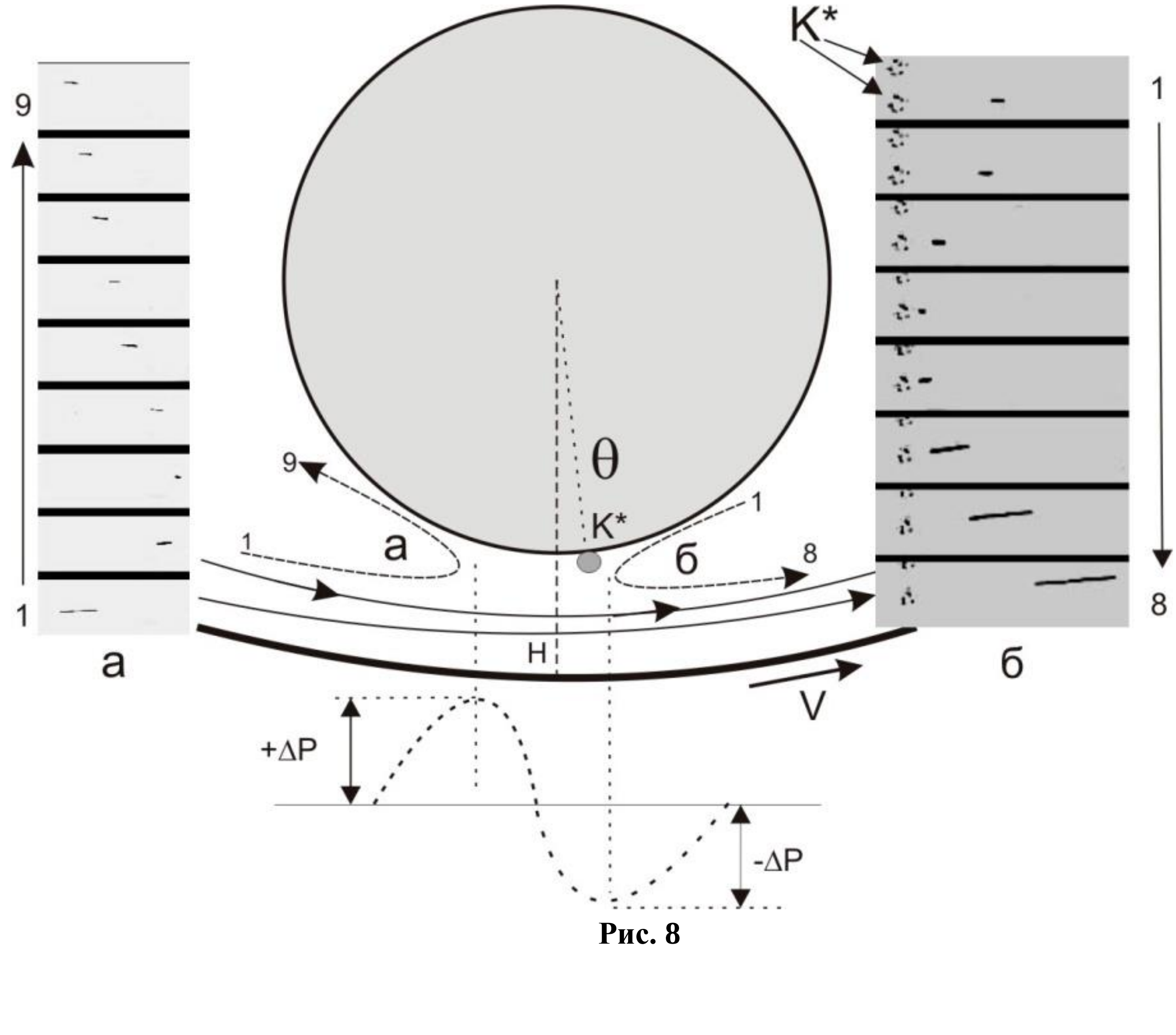


Рис. 8

7. Влияние отношения диаметров цилиндров на форму и размер кавитационных пузырьков

Было установлено, что увеличение диаметра внутреннего цилиндра приводит к существенному увеличению размера кавитационного пузырька. С увеличением диаметра внутреннего цилиндра происходит более плавное расширение потока жидкости за линией минимального зазора. Это позволяет возникшему кавитационному пузырьку занимать все большее пространство за линией минимального расстояния. На Рис. 9 представлены кавитационные каверны для различных отношений r/R (отношение радиуса внутреннего цилиндра к внешнему).

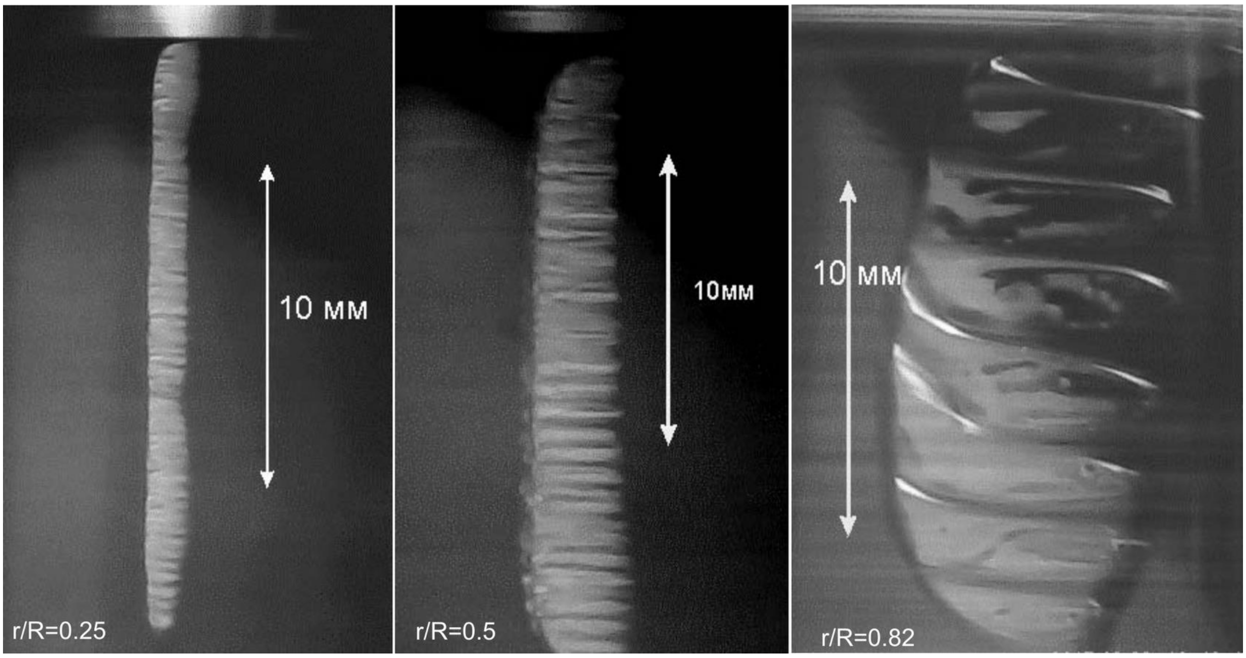


Рис. 9.

С увеличением размера внутреннего цилиндра, кавитационные пузырьки увеличиваются в размере, как вдоль образующей цилиндра, так и в направлении движения потока. Кавитационная цепочка во всех случаях встречает поток заостренной формой.

8. Кавитационное свечение при наличии пульсаций давления

Из явления сонолюменисценции известно, что кавитационный пузырек будет светиться голубоватым светом, если его деформировать периодическим внешним давлением.

Исследовалось течение слабопроводящей жидкости в тонком коаксиальном канале под действием пульсирующего давления. Показано, что в расширяющейся области течения возникают изолированные кавитационные образования. На Рис. 10 представлена фотография свечения таких образований. Слабопроводящая жидкость пропускалась под действием шестеренчатого насоса в тонкий коаксиальный канал толщиной 0.12 мм. При выходе из канала поток слегка расширялся с образованием светящихся дискретных кавитационных пузырьков.

Рис. 10. Свечение кавитационных образований в расширяющейся области тонкого коаксиального канала под действием пульсации давления от шестеренчатого насоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dowson D. Cavitation in lubricating films supporting small loads //. Proc. Inst. Mech. Eng. Conf. Lubr. Wear.1957. P. 93-99.
2. Прокунин. А.Н. Об одном парадоксе при движении твердой частицы вдоль стенки в жидкости // МЖГ, 2003, № 3, с.107.
3. Прокунин А.Н. О микрокавитации при медленном движении твердой сферической частицы вдоль стенки в жидкости. // МЖГ, 2004, № 5, с.110.
4. Ashmore J., C. del Pino, Mullin T. Cavitation in a lubrication flow between a moving sphere and a boundary // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. 124501.
5. J. Bico, J. Ashmore-Chakrabarty, G. H. McKinley, and H. A. Stone, “Rolling stones: The motion of a sphere down an inclined plane coated with a thin liquid film.” Phys. Fluids, 21, 082103 (2009).
6. Monakhov A. A., Chernyavski V. M., Shtemler Yu, Bounds of cavitation inception in a creeping flow between eccentric cylinders rotating with a small minimum gap. //Phys. Fluids 25, 093102 (2013).
7. Монахов А.А. Исследование кавитации при движении цилиндрического тела вдоль стенки. // Известия РАН МЖГ, №3, 2015
8. Ouibrahim A., Fruman D. H., and Gaudemer R. Vapour cavitation in very confined spaces for Newtonian and non-Newtonian fluids. // Phys. Fluids, **8**, 1964, (1996).
9. Joseph D. D., Cavitation in a flowing liquid. //Phys. Rev. E, **51**, R1649 (1995).
10. Монахов А.А., Котелкин В.Д. Гидродинамика течения жидкости в зазоре между цилиндром и движущейся стенкой // Изв.РАН. МЖГ. 2017. No 3. С. 81–87.

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

И. В. Моршнева
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются пересечения элементарных бифуркаций (бифуркации коразмерности 2) в динамических системах, инвариантных относительно линейного ортогонального действия группы $O(2)$. Примеры задач с такого рода круговой симметрией дают задачи о возникновении конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости и жидкости с примесью, расположенной в бесконечном горизонтальном или вертикальном слое. Изучается случай, когда в спектре устойчивости основного течения имеются две пары чисто мнимых собственных значений.

Точке пересечения нейтральных кривых (точке пересечения бифуркаций) в задачах с круговой симметрией отвечает несколько независимых нейтральных мод. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности такой точки, становится возможным сильное взаимодействие всех этих (точнее, слегка измененных) мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Впервые системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора с цилиндрической симметрией были построены в работах В. И. Юдовича (1986), G. Iooss, P. Chossat (1987) с помощью осреднения по быстрому времени и метода сведения на центральное многообразие. Вид амплитудных систем зависит от соотношений между волновыми числами, а также между частотами. Если не выполняется ни одно из резонансных соотношений, то система сильно упрощается, в ней остаются только обязательные резонансные слагаемые, которые присутствуют во всех резонансных системах. Впервые все возможные резонансные системы были получены для задач с цилиндрической симметрией В.И. Юдовичем и С.Н. Овчинниковой (2001).

В данной работе построены и изучены на инвариантных подпространствах резонансные амплитудные системы для задач с круговой симметрией. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн и их нелинейных суперпозиций, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость. Рассмотрено применение теории к задачам конвекции.

НОВЫЕ ДАННЫЕ О МЕХАНИЗМЕ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Н.В. Никитин, В.О. Пиманов
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Движение жидкости и газа в окружающей природе, а также в большом числе технических устройств происходит при больших скоростях, при которых реализуется турбулентный режим течения. Турбулентность характеризуется наличием случайных во времени и в пространстве пульсаций гидродинамических параметров, большим разбросом динамически важных масштабов вовлеченных в движение вихрей. Переход к турбулентности сопровождается, как правило, кардинальным изменением основных характеристик потока. Например, при течении вдоль твердой поверхности происходит многократное повышение сопротивления трения. Существуют оценки, согласно которым до 20% всей вырабатываемой в мире энергии расходуется в конечном итоге на преодоление турбулентного трения в транспортных системах и в магистральных трубопроводах. Нет сомнений, что появление средств снижения турбулентного трения сулило бы в мировом масштабе невероятную по объему экономию энергии, повышение производительности огромного числа технических устройств, улучшение экологической обстановки. Поиск средств снижения турбулентного трения и, что более обще, поиск методов описания, предсказания и прогнозирования свойств турбулентных потоков активно ведется во многих странах.

Серьезный импульс исследование турбулентности получило с появлением мощных компьютеров и, в частности, многопроцессорных вычислительных систем. Появилась возможность численного моделирования турбулентных течений на основе решения основных уравнений движения вязкой жидкости – уравнений Навье–Стокса. Если в конце 20 века основным в численных расчетах было доказательство пригодности детерминированной системы уравнений Навье–Стокса для описания стохастических турбулентных процессов, то в наши дни прямое численное моделирование заслужило статус равноправного и надежного инструмента исследования турбулентности. Оно все шире применяется для расчета конкретных течений, а главное для изучения фундаментальных свойств турбулентности, недоступных для исследования более традиционными экспериментальными методами.

В докладе будут представлены последние результаты численного исследования механизма самоподдержания турбулентного течения вблизи твердой стенки. Удивительно, что, несмотря на почти полуторавековую историю изучения, явление пристенной турбулентности на сегодняшний день в значительной степени остается непонятым. Мы не можем теоретически обосновать даже простейшие, хорошо известные из экспериментов зависимости, такие, например, как турбулентный закон сопротивления в круглой трубе. Основная проблема состоит в том, что среднее течение в пристенных потоках оказывается устойчивым к малым возмущениям. Таким образом, передача энергии пульсационному движению является нелинейным процессом. Со времен первых экспериментов О.Рейнольдса известно, что турбулентность в трубах на пороге своего возникновения проявляется в виде локализованных в пространстве структур, разделенных участками ламинарного потока. Мы называем такие структуры турбулентными порывами. Турбулентный порыв может рассматриваться как своеобразная единица турбулентности, содержащая внутри себя все необходимые элементы для выживания и самоподдержания. В этом отношении турбулентный порыв является уникальным объектом для исследования. Турбулентный порыв адекватно реализуется в численных расчетах. Однако, несмотря на локализованность в пространстве, он все же остается чрезвычайно сложным для исследования из-за стохастичности происходящих внутри него процессов. Нам удалось численно реализовать решения уравнений Навье–Стокса в некотором смысле аппроксимирующие турбулентный порыв, однако обладающие гораздо более простой пространственно-временной структурой [1]. Благодаря этому мы смогли полностью изучить механизмы их самоподдержания, в частности, выявить способ передачи энергии от среднего течения к пульсационному [2]. Мы надеемся, что найденные нами механизмы ответственны за возникновение и поддержание турбулентности в пристенных течениях.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00140-а).

ЛИТЕРАТУРА.

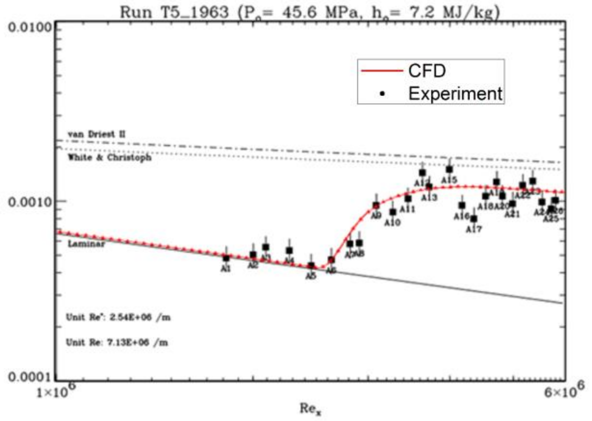
1. Никитин Н.В., Пиманов В.О. Численное исследование локализованных турбулентных структур в трубах. Изв. РАН, МЖГ, №5, с.64-75, 2015.
2. Никитин Н.В., Пиманов В.О. О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах. Изв. РАН, МЖГ, №1, с.68-76, 2018.

ГИБРИДНАЯ LST-RANS МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ.

А.О. Образ[1,2], А.В. Федоров[1,2]
[1]Московский физико-технический интститут
[2]Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

Летные характеристики аэрокосмических систем значительно зависят от состояния пограничного слоя на обтекаемой поверхности. Такие параметры как коэффициенты трения и теплоотдачи существенно различны для ламинарных и турбулентных пограничных слоев. При крейсерском режиме полета на гладких поверхностях обычно реализуется следующая картина течения. Вблизи передней кромки течение ламинарно. В определенном сечении пограничный слой теряет устойчивость и в нем начинают развиваться неустойчивости, которые экспоненциально нарастают вниз по потоку – эта стадия хорошо описывается линейной теорией устойчивости (LST-Linear Stability Theory). Далее вниз по потоку нелинейные процессы приводят к возникновению развитого турбулентного течения. Таким образом, имеется три характерных области течения: ламинарная, переходная и турбулентная. В настоящее время в инженерной практике часто для моделирования таких течений применяются RANS-модели (Reynolds Averaged Navier Stokes). При этом переходная область течения не моделируется или моделируется полуэмпирически на базе корреляций с известными экспериментальными данными. Такой подход не является универсальным и физически обоснованным. В данной работе представлена новая модель расчета перемежаемости переходного пограничного слоя, основанная на линейной теории устойчивости и e-N методе [1]. Для вычисления коэффициента перемежаемости используется функция темпа рождения турбулентных пятен [2]. Данная функция вычисляется на основе характеристик волновых пакетов неустойчивостей, вызывающих ламинарно-турбулентный переход (ЛТП). Эти характеристики наряду с линией начала ЛТП вычисляются на основе линейной теории устойчивости. Полученное распределение коэффициента перемежаемости используется для модификации модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA-модель) в пакете программ HSFlow, разрабатываемого совместно в ЦАГИ и МФТИ. Произведены расчеты ламинарно-турбулентных течений на канонических конфигурациях (плоская пластина и острый круговой конус в потоке под нулевым углом атаки) в широком диапазоне чисел Маха (от 0.04 до 6.93) и температурных факторов модели (отношения температуры стенки к температуре торможения потока в диапазоне от 0.07 до 1). Для всех рассмотренных случаев приводится сравнение расчетов коэффициентов трения и теплоотдачи с имеющимися экспериментальными данными в полетных условиях или малошумных аэродинамических трубах. При этом для большинства рассмотренных случаев ошибка предсказания указанных коэффициентов не превосходит 15%, в то время как для исходной SA-модели величина ошибки может достигать 100%. В качестве примера на рисунке представлено сравнение расчетного числа Стантона на поверхности конуса с экспериментальными данными [3].

Работа выполнена на базе Московского физико-технического института при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-00821).



ЛИТЕРАТУРА.

1. W. O. Criminale, T. L. Jackson, and R. D. Joslin, *Theory and Computation of Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

2. R. Narasimha and S. Dhawan, “Some Properties of Boundary Layer Flow During the Transition from Laminar to Turbulent Motion,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 3, pp. 418–436.

3. A. Rasheed, “Passive Hypervelocity Boundary Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface,” PhD Thesis, CalTech, 2001

О БЕЗМАШИННОМ ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИИ ГАЗОВОГО ПОТОКА

А. Н. Осипцов[1] , Г. М. Азанов[2] , А. И. Алексюк[2]
[1]НИИ механики МГУ, [2]Механико-математический факультет МГУ, Москва

Безмашинным энергоразделением газового потока называется такой процесс, при котором газовый поток, втекающий в некоторое устройство, преобразуется в два потока с заметно различающимися температурами торможения без совершения работы или подвода тепла из внешних источников. Наиболее известным устройством для газодинамического энергоразделения является так называемая вихревая трубка Ранка–Хилша [1]. Такие вихревые трубки могут обеспечить разность температур торможения выходящих потоков в сотни градусов, однако имеют существенный недостаток, связанный с высокими потерями полного давления. Несмотря на большое число приближенных моделей вихревого эффекта Ранка, до сих пор отсутствует полное понимание физических механизмов безмашинного энергоразделения газовых потоков, что затрудняет оптимизацию работы существующих энергоразделяющих устройств и создание более эффективных устройств, основанных на новых схемах течения. Настоящая работа направлена на исследование нескольких перспективных схем организации течения и общих механизмов газодинамического энергоразделения. Для иллюстрации основных механизмов энергоразделения запишем уравнение переноса полной энтальпии для вязкого теплопроводного газа:

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla_j(\tau^{ij}v_i) + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\lambda\nabla T)$$

Здесь τ_{ij} - тензор вязких напряжений, λ - коэффициент теплопроводности, остальные обозначения общепринятые. Видно, что изменение полной энтальпии (а, следовательно, и температуры торможения T_0) в жидкой частице связано с действием диссипативных механизмов (вязкости и теплопроводности), а также с нестационарностью течения. В стационарном течении невязкого нетеплопроводного газа полная энтальпия $i_0 = c_pT + V^2/2 = c_pT_0$ сохраняется вдоль линии тока (интеграл Бернулли) и энергоразделение невозможно. В лекции рассмотрены примеры течений, в которых в процессе энергоразделения существенную роль могут играть как эффекты теплопроводности, так и нестационарность потока. В первой части доклада обсуждаются пути повышения эффективности схемы энергоразделения стационарного газового потока, предложенной в [2]. В этой схеме часть газа, втекающего в энергоразделяющее устройство, проходит через сопло Лаваля и разгоняется до сверхзвуковой скорости. Далее, до- и сверхзвуковой потоки газа, имеющие одинаковые исходные параметры торможения и разделенные тонкой цилиндрической перегородкой, движутся в цилиндрическом канале. Вследствие теплообмена между до- и сверхзвуковым потоками осредненные температуры торможения на выходе из устройства в этих потоках могут различаться на несколько процентов. Основное преимущество такой схемы - малые потери полного давления. Эффект энергоразделения в данном случае обусловлен теплообменом между потоками газа, имеющими существенно различные скорости. В случае теплоизолированной пластины, разделяющей течения в до- и сверхзвуковом пограничных слоях, температура восстановления на различных сторонах пластины может заметно различаться. Соответственно, при замене теплоизолированной пластины теплопроводной перегородкой происходит теплообмен между разделенными течениями, что приводит к появлению разности осредненных температур торможения в газе, прошедшем до- и сверхзвуковой пограничные слои. В докладе представлены результаты параметрических численных расчетов течения в до- и сверхзвуковом ламинарных пограничных слоях, разделенных теплоизолированной, а также теплопроводной плоской стенкой. Показано, что для течений чистого газа эффективность энергоразделения может быть существенно повышена (разность средних температур торможения в потоках по обе стороны пластины, отнесенная к исходной температуре торможения может достигать 7%) при использовании смесей газов с малыми числами Прандтля (Pr ~ 0.2). Исследована возможность резкого повышения эффективности энергоразделения за счет примеси жидких капель в сверхзвуковом пограничном слое. Рассмотрены режимы течения с наличием и отсутствием испарения капель. На основании численных расчетов в рамках модели двухфазного пограничного слоя показано, что для нормальных газов (с числами Прандтля, как у воздуха) присутствие даже очень малых (порядка процентов) массовых концентраций жидкой конденсированной фазы в высокоскоростном пограничном слое может приводить к значительному снижению температуры восстановления на адиабатической стенке и резкой (до 10%) интенсификации процесса энергоразделения в случае теплопроводной стенки [3-4]. Во второй части доклада, на примере задачи поперечного обтекания круглого цилиндра сжимаемым вязким газом в режиме периодического схода вихрей в ближний след, исследуется влияние нестационарности течения на процесс энергоразделения. На основе прямого численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса для чисел Маха ≤ 0.6 и чисел Рейнольдса ≤ 10^3 исследована динамика зон повышенной и пониженной температуры торможения в ближнем следе за цилиндром [5]. Подтвержден и объяснен парадоксальный экспериментальный факт снижения равновесной температуры поверхности адиабатического цилиндра вблизи задней критической точки до температур ниже статической температуры набегающего потока [6]. Проведен детальный анализ роли различных диссипативных механизмов, а также нестационарности течения на распределение осредненной по времени температуры торможения газа в ближнем следе. Сформулированы некоторые идеи о возможности управления процессом энергоразделения в нестационарных газовых потоках.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-19-00699.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eiasma-ard S., Promvonge P. Review of Ranque-Hilsch effects in vortex tubes // Renewable and sustainable energy reviews. 2008. V. 12. N7. P. 1822-1842.
2. Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. №1. С. 157-159.
3. Азанов Г.М., Осипцов А.Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Изв РАН. МЖГ. 2016. №4. С. 67-78.
4. Azanov G.M., Osiptsov A.N. The efficiency of one method of mashineless gasdynamic energy stratification in a gas flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 1125-1133.
5. Aleksyuk A.I., Osiptsov A.N. Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 119. P. 665-677.
6. Eckert E., Weise W., Messungen der Temperaturverteilung auf der Oberfläche schnell angeströmter unbeheizter Körper // Forschung im Ingenieurwesen. 1942. V 13. N6. P. 246-254.

ВЛИЯНИЕ ПОДВОДЯЩЕГО ТРУБОПРОВОДА НА КАВИТАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ, ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ПУЛЬСИРУЮЩИХ СТРУЙ

С.А. Очеретяный, И.И. Козлов, В.В.Прокофьев

Научно исследовательский институт механики МГУ им. Ломоносова,
Москва 119192, Россия

Рассматривается задача о возникновении кавитационных автоколебаний при течении жидкости в магистрали с двумя сопротивлениями: первое сопротивление кавитатор, за которым образована искусственная вентилируемая каверна со средним давлением большим атмосферного, через второе сопротивление происходит истечение жидкости и газа в атмосферу. В экспериментах на выходе использовалась либо щель (течение из-под щита), либо сопло Войцеховского. Исследования показали, что возникновение различных мод колебаний связано с взаимодействием двух колебательных систем различной природы – гидродинамической (каверна) и акустической (подводящая труба), частоты автоколебаний в основном определяются свойствами каверны, а также условиями истечения в атмосферу. Оказалось, что скорость распространения волн вдоль каверны близка к скорости на границе каверны невозмущенного стационарного течения. Приводятся экспериментальные данные, в том числе по частотным характеристикам, подтверждающие этот факт. Резонансное взаимодействие колебательных систем различной природы объясняет сильный масштабный эффект, так как гидродинамические колебания зависят от скорости течения, а акустические практически не зависят (скорость распространения акустических волн много больших скорости течения). Более того, эксперименты показывают, что свойства напорного трубопровода влияют на моду кавитационных автоколебаний (при одинаковых условиях наблюдалось до 4-х частотных мод). Кроме того оказалось, что изменение объема каверны может привести к изменению моды колебаний (ранее было получено, что с ростом объема уменьшается интенсивность автоколебаний).

1. Экспериментальная установка

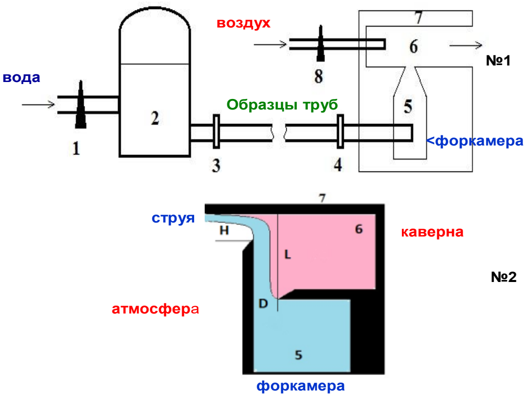


Рис. 1

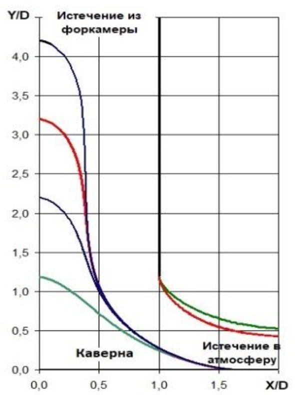


Рис. 2

На рис. 1 показана схема плоской установки, на которой проводились эксперименты. Через регулировочный кран 1 вода поступает в бак–демпфер 2 (пульсации давления выравниваются воздушной подушкой), из форкамеры 5 рабочей части (рабочая часть плоская - все течение происходит в зазоре 9 мм между прозрачными стенками) через сопло истекает в канал 6 закрытый с одного конца и открытый с другой стороны в атмосферу (на рис. 1 (№1) показан вариант истечения струи перпендикулярно в канал). В заглушенную часть канала подается воздух. Параметры эксперимента таковы, что вентиль 8 на воздушной магистрали работает в критическом режиме, таким образом, часть подводящих магистралей, где могут иметь место пульсации давления, ограничена демпфером 2 и краном 8. Для исследования влияния характеристик подводящего воду трубопровода на режимы автоколебаний – в напорной магистрали подачи воды, между фланцами 3 и 4 возможна установка различных образцов труб. На рис. 1. (№2) показана другой вариант рабочей части, где вода из форкамеры 5 истекает через щель вдоль стенки-щита в каверну 6 и затем, взаимодействуя с плоским экраном 7, истекает в атмосферу. На рис. 2 показана теоретическая модель рабочей части №2 – установившееся плоское течение идеальной несжимаемой жидкости с замкнутой каверной. Видно, что длина свеса стенки щита перестает влиять на истечение жидкости, когда расстояние от щели до кромки щита превышает толщину струи. На самом деле такое стационарное течение невозможно даже в условиях отсутствия автоколебаний (см. [1]). Однако оказалось, что некоторые параметры автоколебательных режимов определяются параметрами стационарного течения.

Введем такие обозначения: $\bar{p}_k$, $\bar{p}_0$ - среднее давление в каверне и форкамере, p_a - наружнее – атмосферное давление, коэффициент давления $C_d = \dfrac{\bar{p}_k - p_a}{\bar{p}_0 - p_a} = \dfrac{P_k}{P_0}$, скорость стационарного истечения жидкости в атмосферу $V_\infty = \sqrt{2P_0/\rho_l}$, ρ_l-плотность жидкости, скорость на границе каверны $V_k = V_\infty\sqrt{1-C_d}$, коэффициент поддува газа в каверну $C_q = Q_g/Q_l$, где Q_g и Q_l объемные расходы поддуваемого в каверну газа и жидкости в струе, число Стухаля $St = fV_\infty/D$, где f - частота колебаний, D - ширина щели (сопла), через которую жидкость истекает из форкамеры.

2. Различные моды кавитационных автоколебаний.

Эксперименты показали, что при одинаковых параметрах могут реализовываться различные моды колебаний. На рис. 1 показано влияние на частоту колебаний

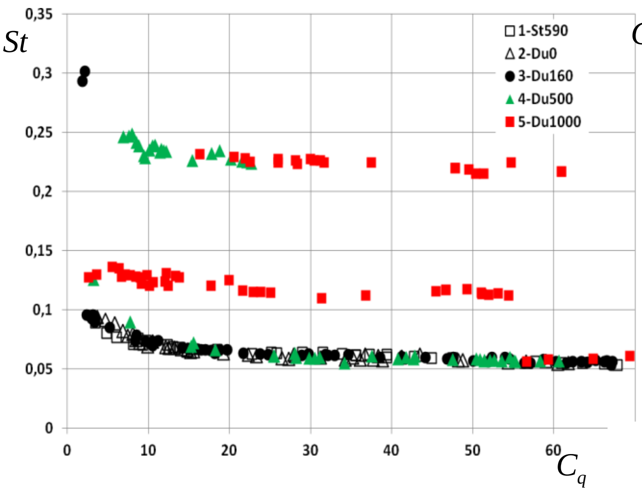


Рис. 1

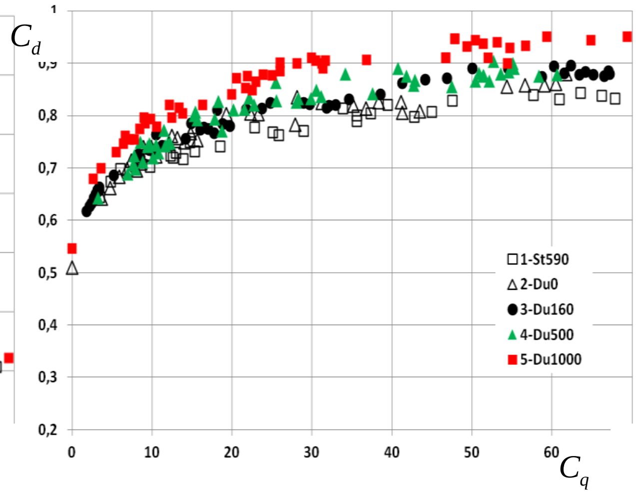


Рис. 2

(число Струхаля) характеристик напорного трубопровода при напоре $P_0 = 0{,}2$ ати. Использовались трубы диаметром 50 мм (толщина стенок 5 мм). Материал труб сталь (скорость распространения волн давления ~ 1400 м/с) и дюрит (поряка 100 м/с и менее). Использовалась рабочая часть №2 – L = 80 мм, H = 30 мм, D = 25 мм. Цифрами обозначены результаты для различных труб-вставок: 1 – стальная труба длиной 590 мм, 2 – отсутствие вставки (фланцы 3 и 4 – рис.1, со стальными подводами общей длиной 150 мм), 3 – 5 дюритовые вставки длиной 160, 500 и 1000 мм, соответственно. Из данных рис. 1 следует, что низкочастотная мода автоколебаний возбуждается для всех испытанных стальных труб, а для дюритовых только длиной меньших 500 мм. Для более длинных дюритовых труб возбуждается вторая мода, причем в некотором диапазоне поддувов.

Здесь же могут существовать при одинаковых поддувах несколько мод колебаний – это может быть связано с явлением гистерезиса, описанным в [2]. Несмотря на сильное отличие режимов течения средние характеристики течения (C_d как функция C_q, на рис. 2) имеют сравнительно небольшой разброс. На рис. 3. и 4 представлены зависимости для чисел Струхаля от коэффициента поддува при различных скоростях течения (1-4, 0,2-0,5 ати, соответственно) при короткой трубе (длина дюритовой вставки 0) и при длине дюритовой вставки 500 мм. В первом случае реализуется первая мода и масштабного эффекта практически нет, во втором случае имеется небольшой разброс, но основное влияние масштаба – зависимость от скорости диапазона поддувов, где реализуется вторая мода.

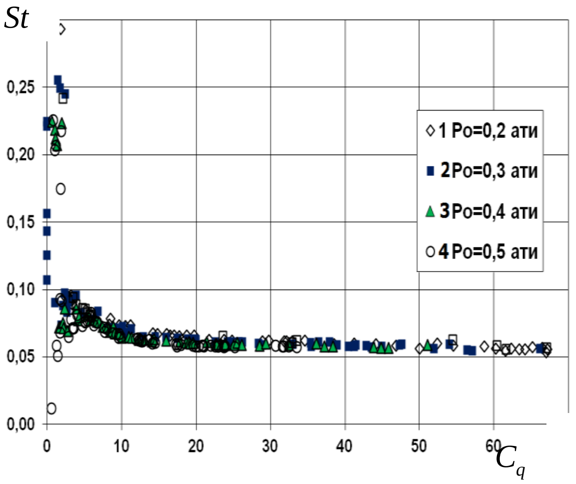


Рис. 3

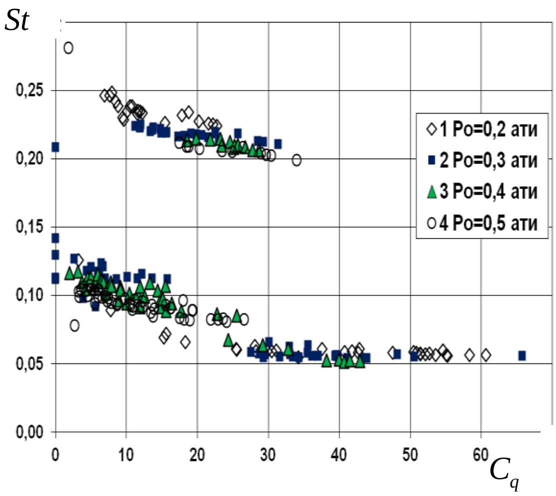


Рис. 4

В приведенного выше примерах при подключении трубы с низкими акустическими частотами возбуждается низкочастотная мода.

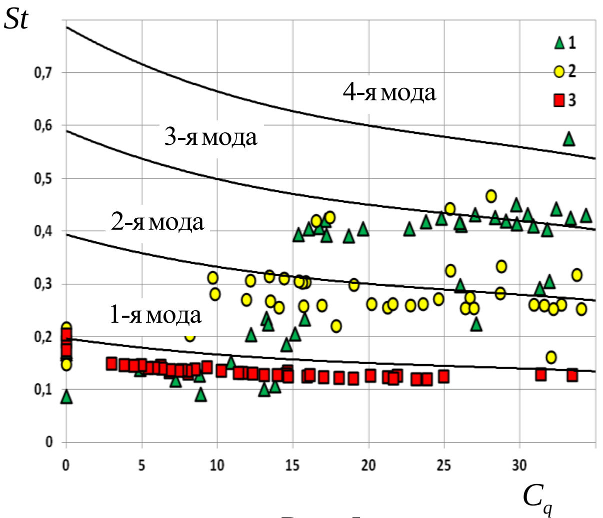


Рис. 5

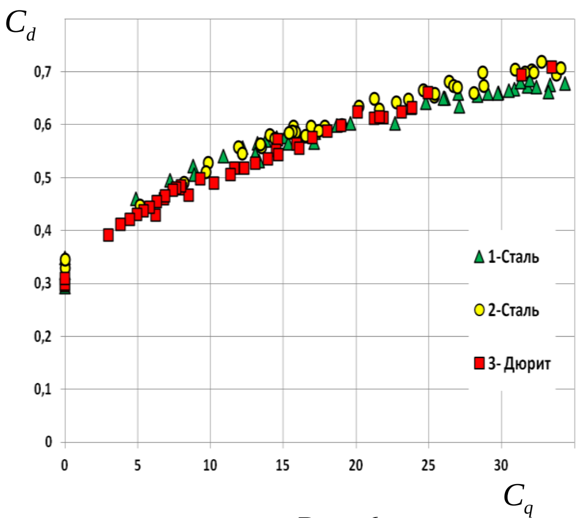


Рис. 6

В примерах на рис. 5: Po=0,2 ати, D=25 мм, H=54 мм, свес 50 мм, L =104 мм, то есть истечение через больший зазор (54 мм), следовательно, при меньших C_d. Цифрами обозначено: 1 - стальная вставка 1230 мм, S_k/DH=11,66; 2 - стальная вставка 1230 мм, S_k / DH =7,69; 3 - дюритовая вставка 1210 мм, S_k / DH =11,66. S_k площадь полости (каверны). Сравнивая 1 и 3-й опыты видим, что первая, низкочастотная мода возбуждается с дюритовой трубой, а с примерно такой же стальной (опыт 3) сразу третья мода (даже иногда и 4-я). При уменьшении площади каверны (с помощью вставки) колебания переходят на 2-ю моду (опыт 2). Ранее [1] было показано, что объем каверны влияет на интенсивность автоколебаний, оказалось он может влиять и на возбуждение различных частотных мод. Как видно из рис. 6 большое различие нестационарных характеристик течения не влияет на зависимости средних характеристик течения.

3. Связь автоколебаний с кавитационными характеристиками.

Было показано [3], что моды колебаний связаны с количеством волн, образующихся на границе каверны. Оказалось, что скорость перемещения этих волн близка стационарной скорости жидкости на границе каверны V_k. Это согласуется с имеющимися теоретическими решениями [4]. В этой работе показано, что при истечении жидкости из пространства через щель при наличии пульсирующего источника, на истекающей струе образуются волны перемещающиеся со средней скоростью истекающей жидкости.

Если период колебаний связать с временем прохождения волны вдоль каверны длиной L, то для числа Струхаля (частоты) таких колебаний можно написать $St = D/L\ \sqrt{1\text{-}C_d}$

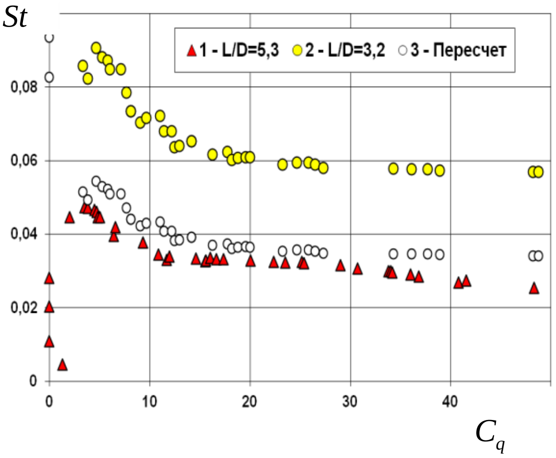


Рис. 7

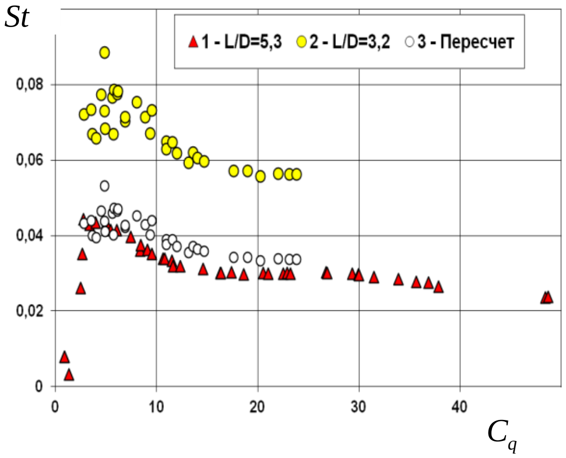


Рис. 8

На рис. 7 и 8 для P_0 = 0,3 и 0,5 ати, соответсвенно, представлены данные для двух различных длин каверн при одинаковых H, а следовательно и при одинаковых C_d. Варианты 1. H/D=1,2, L/D=5,3, дюрит 342 мм, 2. H/D=1,2, L/D=3,2, дюрит 1000 мм. В обоих случаях реализуется первая мода автоколебаний. Частоты для более короткой каверны выше. Кривая 3 получена путем пересчета частот варианта 2 на длинную каверну (вариант 1) с использованием представленной формулы. Близость точек 1 и 3 свидетельствует о том что этой формулой можно пользоваться для оценки автоколебаний в случае, когда период колебаний в основном определянтся временем прохождения волны вдоль каверны. Кривые для мод колебаний на рис. 5 получены путем умножения представленной выше формулы на целые числа. На рис. 9 – 12 представлена обработка эксперименов, проведеннх при P_0 = 0,3 ати при D=25 мм, свес 50 мм и различных H=76, 54, 30, 10 мм (кривые 1-4, соответственно). На рис. 10 показано, как с уменьшением H увеличивается коэффициент давления C_d, соответственно падает частота (число Струхаля на рис. 9). Кривые, посчитанные по формуле расположены выше экспериментальных. Большая часть периода – это время выбрасывания порции жидкости через зазор H.

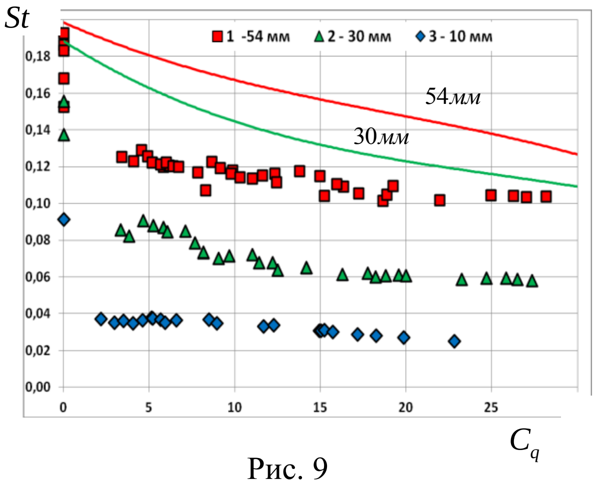


Рис. 9

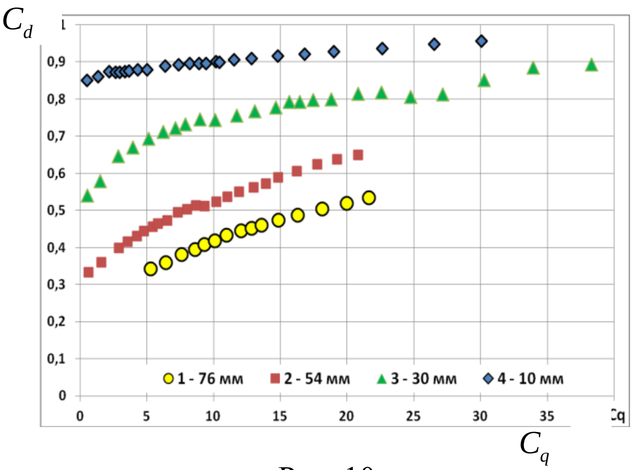


Рис. 10

На рис. 11 показана зависитмость относительного размаха пульсаций давления $A' = A/P_0$ от поддува при различных величинах P_0. Видно, что с уменьшением H растет не только среднее давление в каверне, но и сильно растет интенсивность пульсаций.

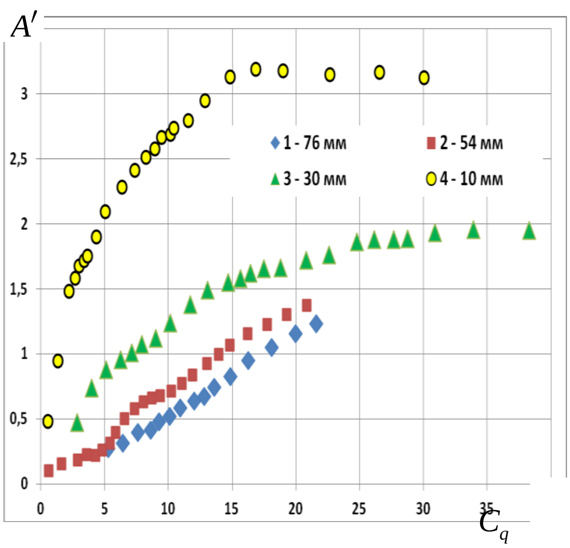


Рис. 11

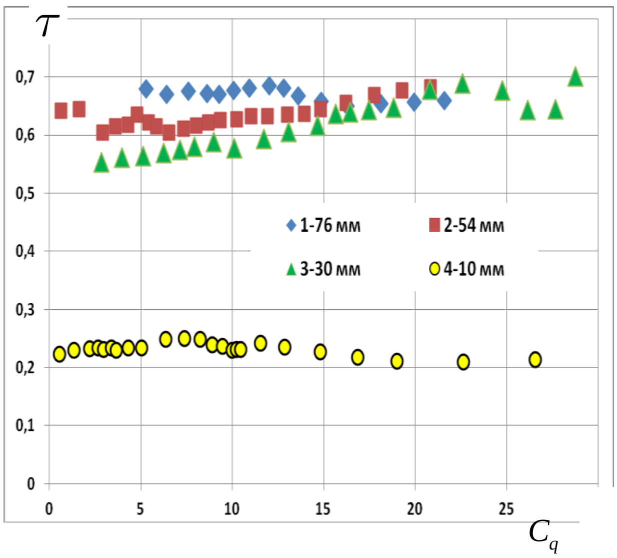


Рис. 12

На рис. 12 показана зависимость отношения времени прохождения волны вдоль каверны к периоду автоколебаний τ от величины H. Видно, что при H = 10 мм время выбрасывания порции становится доминирующим.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №18-01-00040

Литература.

1. Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Автоколебательные режимы в жидкой струйной завесе, разделяющей газовые области с различными давлениями. Изв. РАН МЖГ, 2013, №6, с. 33-43
2. Шкапов П.М., Благовещенский И.Г., Гартиг Е.Б., Дорошенко С.А. //О гистерезисном характере развития автоколебаний в гидролинии с ограниченной искусственной газовой каверной на выходе// Наука и образование// Электронное научно-техническое издание №10, октябрь 2013.
3. Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Влияние свойств подводящего трубопровода на характер кавитационных автоколебаний при наличии в системе

вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации. Изв. РАН МЖГ, 2013,№2, с. 32-43.

4. Толоконников С.Л. Истечение жидкости через щель в плоской стенке при наличии источника переменной интенсивности на плоскости симметрии течения. Вестник МГУ, Сер.1 Математика. Механика, 2017, № 3 с. 40-45.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Г. Петров
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Предлагается единый подход к исследованию задач устойчивости стационарных движений жидкости. Он заключается в выводе динамических уравнений в форме Лагранжа, применение к ним метода игнорирования циклической координаты, определение стационарных течений и построение функции Ляпунова для анализа их устойчивости. В качестве примеров решаются следующие задачи.

1. Определение стационарной формы жидкого цилиндра с поверхностным натяжением в плоскопараллельном потоке жидкости. Исследование ее устойчивости.

2. Определение стационарной формы капиллярных волн и исследование их устойчивости.

3. Определение фигур равновесия вращающейся гравитирующей массы и исследование их устойчивости. Осесимметричные и неосесимметричные формы равновесия и их устойчивость.

4. Определение формы вращающейся жидкой капли и исследование ее устойчивости. Осесимметричные и неосесимметричные формы равновесия и их устойчивость.

5. Развитие неустойчивости свободных и вынужденных нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости при резонансе радиальных и деформационных колебаний. Модель резонансного дробления газовых пузырьков в жидкости при малых энергетических затратах на подачу переменного внешнего поля давления.

6. Решение задачи Капицы об устойчивости цилиндра, вращающегося в ограниченном объеме жидкости.

Решения большинства рассмотренных задач представлены в работах автора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00901).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. Часть 1. Идеальная несжимаемая жидкость. ЛЕНАНД, 2016. 362 с.
2. Петров А.Г. Об устойчивости жидкого цилиндра в плоскопараллельном потоке идеальной жидкости // ПММ. Том 80. Вып. 3, 2016. С. 366-374.
3. Петров А.Г. Об устойчивости капиллярных волн конечной амплитуды // ПММ. Том 81. Вып. 1, 2017. С. 42-47.
4. Вановский В.В., Петров А.Г. Пружинная аналогия свободных и вынужденных нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости при резонансе // ПММ Том 81. Вып. 4, 2017. С. 462-470.

Устойчивость гидродинамико-статистической модели прогноза смерчей и сильных шквалов и технология их прогноза до двух суток по Европейской территории России

Э.В. Переходцева
ФГБУ «Гидрометцентр России, МИРЭА, e-mail: perekhod@mecom.ru

В настоящее время ни в России, ни за рубежом не имеется пока успешных гидродинамических моделей прогноза (даже на 12ч) явлений смерчей и сильных шквалов, в которых скорость ветра V>= 25 м/с. С использованием методов статистической классификации нами были отобраны из множества потенциальных предикторов (n=38 параметров атмосферы) наиболее информативные и слабо зависимые параметры (предикторы) и построена дискриминантная функция распознавания и прогноза этих явлений для выбранной группы предикторов. Первоначально для прогноза в полученной дискриминантной функции использовались прогностические значения этих параметров из первой оперативной гидродинамической модели Гидрометцентра России – полусферной неадиабатической гидродинамической модели краткосрочного прогноза по полным уравнениям. Приводятся примеры прогноза смерчей заблаговременностью 24ч в Москве в июне 1998г, в июле 2001 года, в Дубне в июне 2005г и другие. Независимые оценки прогноза сильных шквалов и смерчей со скоростью ветра 25м/с с заблаговременностью 36ч и выше по этой модели были получены для трех регионов ЕТР. Они оказались успешными: Критерий Пирси-Обухова составил T=0,5-0,68 при достаточно высокой предупрежденности самих явлений (П=80%-90%).

В настоящее время в Гидрометцентре России успешно функционирует новая оперативная региональная гидродинамическая модель краткосрочного прогноза погоды (автор – Лосев В.М.) с горизонтальным разрешением 75х75км. Нами была проведена адаптация статистической модели прогноза к прогностическим полям этой модели. В результате по новой гидродинамико-статистической модели прогноза были успешно предупреждены в 2009г, смерч в Московской области вечером 3 июня, в 2010 году - смерчи в Санкт-Петербурге (в июле и в августе), очень разрушительный смерч в Янаульском районе Башкортостана в августе 2014 года и сильный ураган в Москве 29 мая 2017г,, принесшие огромные экономические потери и даже человеческие жертвы.

Особо стоит отметить удачные прогнозы сильных черноморских смерчей с выходом на сушу, которые также нанесли большой экономический ущерб. Это смерч в Сочи в сентябре 2013 года, поваливший массу деревьев в парке Ривьера и не предсказанный украинскими синоптиками смерч в Одессе в мае 2013 года. Практически все смерчи на акватории Черного моря также были предупреждены.

Приводятся оценки независимых испытаний прогноза по данной модели в сравнении с прогнозами этих явлений по новым мезомасштабным гидродинамическим моделям, использующим в известных шести уравнениях атмосферы моделирование подсеточных явлений – пограничного слоя, вынужденной конвекции и т.д. Однако по ним оценки предупрежденности сильных порывов летнего ветра скоростью V>=25м/с, включая шквалы и смерчи, даже с заблаговременностью 12ч не превышают 30%.

Прогнозы сильных шквалов и смерчей по современной гидродинамико-статистической модели рассчитываются оперативно 2 раза в сутки, выкладываются на сайт ГВЦ в виде карт прогноза и доступны синоптикам всех регионов ЕТР.

Развитие газодинамической неустойчивости. Механизм возникновения завихренности и турбулентности

Л. И. Петрова
МГУ, ф-т ВМК, e-mail: ptr@cs.msu.su

Аннотация

Анализ уравнений законов сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы, проведенный с помощью кососимметричных дифференциальных форм, показывает, что развитие неустойчивости в материальных системах (сплошных средах) связано с некоммутативностью законов сохранения, которая приводит к появлению внутренних сил и возникновению неравновесности. В данной работе такое исследование проведено для газодинамической системы, описываемой уравнениями Эйлера и Навье-Стокса.

Из уравнений законов сохранения, образующих системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса, получается эволюционное соотношение, которое описывает процесс развития газодинамической неустойчивости и возникновения волн, вихрей, турбулентных пульсаций и других образований.

Уравнения законов сохранения. Эволюционное соотношение.

Чтобы изучить развитие неустойчивости необходимо проанализировать уравнения законов сохранения.

Законами сохранения для газодинамической системы являются законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы.

Рассмотрим сначала простейшую газодинамическую систему - течение идеального (невязкого нетеплопроводного) газа.

Предположим, что газ представляет собой термодинамическую систему, которая находится в состоянии локального равновесия (при этом сама газодинамическая система может находится в неравновесном состоянии), то есть выполняется соотношение[1]:

$$Tds = de + pdV \tag{1}$$

где T, p и V - температура, давление и объем газа, s, e - энтропия и внутренняя энергия единицы объема газа.

Введем две системы координат: инерциальную - не связанную с газодинамической системой, и сопутствующую - связанную с многообразием, образованным траекториями элементов газодинамической системы. (Примером могут быть эйлерова и лагранжева системы координат).

В инерциальной системе координат уравнениями законов сохранения (энергии, количества движения, массы) для идеального газа являются уравнения Эйлера [2,3].

Закон сохранения энергии для идеального газа можно записать в виде

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = 0$$

где D/Dt - полная производная по времени, h - энтальпия газа. Выражая энтальпию через внутреннюю энергию e по формуле $h = e + p/\rho$ и используя соотношение (1), уравнение закона сохранения энергии для идеального газа можно привести к виду

$$\frac{Ds}{Dt} = A_1 \tag{2}$$

где $A_1 = 0$.

Для вязкого теплопроводного газа уравнение закона сохранения приводится к такому же виду. Но в этом случае A_1 принимает значение [3]:

$$A_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{q_i}{T}\right) - \frac{q_i}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ki}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{3}$$

Здесь q_i - тепловой поток, τ_{ki} - тензор вязких напряжений.

Полная производная по времени является производной вдоль траектории, поэтому в сопутствующей системе координат уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^1} = A_1 \tag{4}$$

Соответственно, уравнение закона сохранения количества движения можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^\nu} = A_\nu \tag{5}$$

где ξ^ν есть координата в направление, нормальном к траектории. [Для двумерного течения [3] $A_\nu = \frac{\partial h_0}{\partial \nu} + ({u_1}^2 + {u_2}^2)^{1/2}\zeta - F_\nu + \frac{\partial U_\nu}{\partial t}$, где $\zeta = \partial u_2/\partial x - \partial u_1/\partial y$.]

Уравнения (4) и (5) можно свернуть в соотношение

$$ds = \omega \tag{6}$$

где $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ есть дифференциальная форма первой степени (здесь $\mu = 1,\, \nu$). (По повторяющемуся индексу ведется суммирование.)

Соотношение (6) является эволюционным соотношением для газодинамической системы для случая локального термодинамическое равновесия). [Следует подчеркнуть, что в соотношении (1) для термодинамической системы рассматривается зависимость энтропии от термодинамических переменных, а в эволюционном соотношении (6) для газодинамической системы рассматривается зависимость энтропии от пространственно-временных переменных.]

Если соотношение (6) было бы тождественным (если бы кососимметричная форма ω была бы замкнутой формой -

дифференциалом), то из него можно было бы получить дифференциал энтропии s и определить энтропию как функцию пространственно-временных координат. Именно такая энтропия и является газодинамической функцией состояния, наличие которой будет указывать на равновесное состояние газодинамической системы. Однако, для реальных процессов соотношение (6) оказывается нетождественным, и из него нельзя определить дифференциал энтропии s. Это будет указывать на отсутствие газодинамической функции состояния, и неравновесное состояние системы. Такая неравновесность и является причиной развития неустойчивости.

Нетождественность эволюционного соотношения.

Покажем, что полученное из уравнений законов сохранения *эволюционное соотношение оказывается нетождественным.*

Рассмотрим соотношение (6).

В эволюционном соотношении (6) в левой части стоит дифференциал, то есть замкнутая дифференциальная форма. Она является инвариантным объектом. А в правой части соотношения (6) стоит дифференциальная форма ω, которая, как будет показано ниже, для реальных процессов оказывается незамкнутой формой, и поэтому не является дифференциалом, то есть не является инвариантным объектом.

Чтобы дифференциальная форма ω была замкнутой, надо чтобы дифференциал этой формы или ее коммутатор равнялись нулю (элементы дифференциала формы равняются компонентам ее коммутатора).

Дифференциал формы $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ можно записать в виде

$$d\omega = K_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Здесь $K_{\alpha\beta}$ компоненты коммутатора формы, которые имеют вид:

$$K_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi^\beta}\right) \tag{7}$$

(Здесь не учитывается член, связанный с неинтегрируемостью сопутствующего многообразия).

Коэффициенты A_μ формы ω получаются - одни из уравнения закона сохранения энергии, а другие - из уравнений закона сохранения количества движения. А это значит, что первые зависят от энергетических воздействий, а вторые - от силовых. В реальных процессах энергетические и силовые воздействия имеют разную природу и оказываются несогласованными. Коммутатор формы ω, полученный из производных от таких коэффициентов, не будет равен нулю. Это означает, что не равен нулю и дифференциал формы ω. То есть форма оказывается незамкнутой и не является дифференциалом (то есть инвариантом). Получается, что правая часть эволюционного соотношения не является дифференциалом (то есть не является инвариантом). Такое соотношение не может быть тождественным.

Таким образом, даже не зная конкретное выражение формы ω, можно утверждать, что для реальных процессов из-за несогласованности внешних воздействий эволюционное соотношение оказывается нетождественным.

Нетождественность эволюционного соотношения, полученного из уравнений законов сохранения (которые можно назвать балансными), означает, что эти уравнения являются несогласованными. А несогласованность уравнений законов сохранения говорит о том, что законы сохранения являются некоммутативными: результаты действия законов сохранения зависят от порядка их выполнения.

К чему приводит некоммутативность законов сохранения?

Неравновесное состояние газодинамической системы.

Очевидно, что, если бы законы сохранения были коммутативными, то в этом случае эволюционное соотношение было бы тождественным и из него можно было бы получить дифференциал ds, что указывало бы на равновесное состояние газодинамической системы.

Но в реальных процессах, как было показано, законы сохранения оказываются некоммутативными. Эволюционное соотношение не является тождественным и из него нельзя получить дифференциал ds. Это означает, что состояние газодинамической системы оказывается неравновесным.

Такая неравновесность и является причиной развития неустойчивости.

Неравновесность означает, что в газадинамической системе имеется внутренняя сила. Очевидно, что внутренняя сила появляется за счет величины, которая описывается коммутатором формы ω. (Если бы коммутатор этой формы равнялся нулю, то эволюционное соотношение было бы тождественным, а это указывало бы на равновесное состояние, то есть на отсутствие внутренних сил.)

Так как неравновесность вызывают внутренние силы, которые описываются коммутатором формы ω, то очевидно, что причиной газодинамической неустойчивости является то, что вносит вклад в коммутатор формы ω.

Из анализа выражения A_ν для случая, когда $A_1 = 0$, можно увидеть, что в коммутатор (см. (7)) будут вносить вклад члены, связанные с неодносвязностью области течения (второй член выражения A_ν (см. формулу для двумерного течения), с непотенциальностью внешних сил (третий член) и с нестационарностью течения (четвертый член).

Видно, что причинами развития неустойчивости в случае идеального газа являются неодносвязность области течения, непотенциальные внешние (для каждой локальной области газодинамической системы) силы, нестационарность течения. (Можно отметить, что Лагранж [2] вывел для идеального газа условия безвихревого, устойчивого, течения. Это следующие условия: область должна быть одноствязной, силы потенциальные, течение стационарное. Можно увидеть, что при выполнение этих условий нет членов, которые вносят вклад в коммутатор).

В случае вязкого газа к развитию неустойчивости будут приводить процессы переноса (см. формулу (3) для вязкого течения).

(В общем случае на газодинамическую неустойчивость будут влиять термодинамическая, химическая, колебательная, вращательная, поступательная неравновесность).

Все эти факторы приводят к появлению внутренних сил, к неравновесности и развитию различных типов неустойчивости.

В то же время для каждого типа неустойчивости можно найти член коммутатора кососимметричной формы ω, который ответственен за этот тип неустойчивости. То есть имеется однозначная связь между типом неустойчивости и членами, которые вносят вклад в коммутатор дифференциальной формы эволюционного соотношения. (При этом надо рассматривать и эволюционные соотношения, соответствующие законам сохранения момента количества движения и массы).

Переход газодинамической системы в локально-равновесные состояния. Возникновение волн, вихрей, скачков уплотнения.

Эволюционное нетождественное соотношение характеризует и характер изменения состояния газодинамической системы.

Эволюционное нетождественное соотношение оказывается самоизменяющимся соотношением, поскольку, во-первых, оно эволюционное, и поэтому изменение одного объекта в эволюционном процессе приводит к изменению другого объекта, а во-вторых, оно нетождественное, то есть оно связывает два объекта, которые несоизмеримы и не могут сравнится друг с другом, а это значит, что процесс изменения нетождественного эволюционного соотношения не может остановится.

При самоизменении нетождественного соотношения могут реализоваться условия вырожденного преобразования (преобразования, не сохраняющего дифференциал), при котором из незамкнутой эволюционной формы (дифференциал которой не равен нулю) получается замкнутая форма (дифференциал которой равен нулю). При этом из нетождественного соотношения получается тождественное соотношение, из которого определяется дифференциал энтропии и находится функция состояния. Наличие функции состояния указывает на переход газодинамической системы от неравновесного состояния к равновесному состоянию. (Но такой переход осуществляется только локально. Общее состояние газодинамической системы остается неравновесным.)

Таким образом, при реализации дополнительных степеней свободы и вырожденном преобразовании, из нетождественного соотношения получается тождественное соотношение, из которого определяется функция состояния. Наличие функции состояния указывает на переход неравновесного состояния газодинамической системы к локально-равновесному. Это сопровождается возникновением каких либо образований, таких как скачки уплотнения, ударные волны, турбулентные пульсации и т.д.. Интенсивность этих образований определяется значением, которое коммутатор незамкнутой формы принимает в момент перехода к локально-равновесному состоянию.

Таким процессом является и возникновение турбулентности. Турбулентность возникает за счет неодносвязности области течения и за счет процессов переноса (вязкости и теплопроводности).

Дополнительные степени свободы реализуются как условия вырожденного преобразования - обращение в нуль детерминантов, якобианов преобразований и т.д.. Эти условия определяют интегральные поверхности (псевдоструры): характеристики (детерминант при выводящих производных обращается в нуль), особые точки (якобиан равняется нулю), огибающие характеристик уравнений Эйлера и т.д.. При переходе через интегральные поверхности терпят разрыв газодинамические функции или их производные.

Рассмотрим, какие типы неустойчивости и какие газодинамические структуры могут возникать при заданных воздействиях.

1. *Удар, разрыв диафрагмы и т.д..* Неустойчивость возникает из-за нестационарности. В случае идеального газа, течение которого описывается уравнениями гиперболического типа, переход к локально-равновесному состоянию возможен на характеристиках и их огибающих. Соответствующими образованиями являются слабые скачки уплотнения и ударные волны.

2. *Обтекание тел идеальным (невязким, нетеплопроводным) газом.*

Действие непотенциальных массовых сил. Неустойчивость развивается из-за неодносвязности области течения и непотенциальности массовых сил. Так как газ идеальный и $\partial s/\partial \xi^1 = A_1 = 0$, то есть нет вклада в каждую частицу, то развивается неустойчивость конвективного типа. При $U > a$ (где U - скорость частицы газа, a - скорость звука, система уравнений балансных законов сохранения имеет гиперболический тип и поэтому переход к локально-равновесному состоянию возможен также на характеристиках и огибающих характеристик, а структурами являются слабые скачки уплотнения и ударные волны. При $U < a$, когда уравнения эллиптического типа, такой переход возможен в особых точках. Возникающие структуры из-за конвективности носят вихревой характер. При длительных воздействиях могут формироваться крупномасштабные структуры.

3. *Пограничный слой.*

Неустойчивость возникает за счет неодносвязности области течения и за счет процессов переноса (влияние вязкости и теплопроводности). Переход к локально-равновесному состоянию возможен в особых точках. Так как в этом случае $\partial s/\partial \xi^1 = A_1 \neq 0$, то есть воздействие идет на каждую частицу газа отдельно, то развитие неустойчивости и переходы к локально-равновесному состоянию возможны только в отдельной частице. Поэтому возникающие структуры носят характер пульсаций. Это - турбулентные пульсации, которые приводят к возникновению турбулентности.

Исследование неустойчивости на основе анализа поведения энтропии проводилось в работах И. Пригожина и его соавторов[4,5]. В этих работах энтропия рассматривалась как термодинамическая функция состояния (хотя и анализировалось ее поведение вдоль траектории). При помощи такой функции состояния можно проследить за развитием (в газовых потоках) только термодинамической неустойчивости. Для исследования газодинамической неустойчивости нужно рассматривать энтропию как газодинамическую функцию состояния, то есть функцию пространственно-временных координат. Если для исследования термодинамической неустойчивости необходимо анализировать коммутатор, образованный смешанными производными от энтропии по термодинамическим переменным, то для исследования газодинамической неустойчивости необходимо анализировать коммутатор, образованный смешанными производными от энтропии по пространственно-временным координатам.

Заключение

В заключение можно сказать несколько слов о моделировании неустойчивых течений. Как известно, некоторыми авторами делались попытки учесть развитие неустойчивости путем уточнения уравнений, моделирующих балансные законы сохранения (например, введением моментов более высокого порядка), или путем введения дополнительных уравнений. Однако такие попытки не дали удовлетворительных результатов. Чтобы описать неравновесное течение газа и возникновение газодинамических структур (волн, вихрей, турбулентных пульсаций), надо к уравнениям, моделирующим балансные законы сохранения, добавить эволюционное соотношение, полученное из этих уравнений. При численном моделировании течения газа надо следить за переходом от эволюционного нетождественного соотношения к тождественному соотношению (за переходом от эволюционной незамкнутой формы к внешней замкнутой форме), что и будет указывать на возникновение некоторой физической структуры.

Список литературы

1. Хейвуд Р., *Термодинамика равновесных процессов*, Мир, Москва (1983)

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В., *Теоретическая гидромеханика*, том1, ФМ, Москва (1963).

3. Кларк Дж., Макчесни М., *Динамика реальных газов*, Мир, Москва (1967)

4. Пригожин И., *Введение в термодинамику необратимых процессов*, ИЛ., Москва, (1980)

5. Гленсдорф П., Пригожин И., *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации*, Мир, Москва (1973)

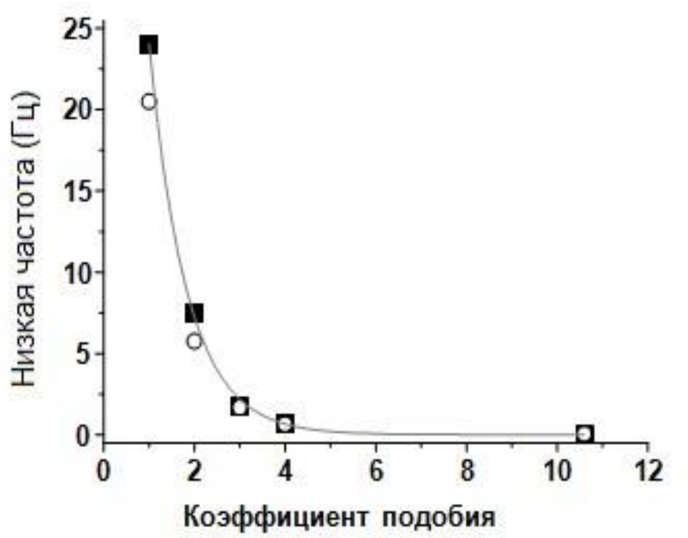
ЭВОЛЮЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИХРЯ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

Т.А. Петрова, Ф.В. Шугаев

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва

Построена и применена новая процедура нахождения осциллирующих решений системы уравнений Навье-Стокса для кругового цилиндра, опирающегося на плоскость в сжимаемом вязком теплопроводном газе в приближении малой начальной завихренности, использующая сетки Коробова для вычисления кратных интегралов [1]. Показано, что благодаря диффузии завихренности возникает генерация звука одиночным цилиндрическим вихрем. Определен акустический спектр и собственные частоты такого акустического излучения для различных параметров вихрей.

Обнаружено, что для плотности и давления имеют место высокочастотные осцилляции, модулированные низкими частотами и что значения собственных частот зависят только от начальных геометрических размеров вихревого цилиндра и не зависят от интенсивности начальной завихренности. Показано также, что собственные частоты экспоненциально уменьшается при увеличении геометрического коэффициента подобия цилиндра (см. рисунок).



Низкочастотные колебания. Зависимость собственных частот
от геометрического коэффициента подобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрова Т.А., Шугаев Ф.В.Частота акустического излучения цилиндрического вихря // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 4. — С.31–35.

О СКОРОСТИ РОСТА ВОЗМУЩЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Д.Е. Пивоваров, Н.В. Никитин
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Проведено численное исследование эволюции возмущений в развитом турбулентном течении Куэтта в плоском канале при числах Рейнольдса от Re=400 до Re=2100. Трехмерные уравнения Навье–Стокса с условиями периодичности в двух однородных пространственных направлениях решаются численно конечно-разностным методом [1]. Результаты расчетов развитых турбулентных течений хорошо согласуются с имеющимися в литературе данными. Рассчитанные установившиеся турбулентные течения используются затем в качестве основных течений для изучения процесса развития на их фоне возмущений. Для этого уравнения Навье–Стокса для возмущений решаются параллельно с уравнениями для основного течения. В согласии с результатами предыдущих исследований [2,3] показано, что амплитуда малых возмущений растет в среднем экспоненциально по времени, что отвечает наличию, по меньшей мере, одного положительного показателя Ляпунова в хаотических системах.

Ляпуновский спектр в турбулентном течении Куэтта рассчитывался ранее в [4]. При этом было рассмотрено минимальное число Рейнольдса Re=400 в минимально возможной расчетной области. Вычисленное в [4] значение старшего показателя Ляпунова λ_1^+=0.007 оказалось в три раза меньшим, чем оценки λ_1^+≈0.021, полученные в [2,3] на основании анализа турбулентных течений Пуазейля в круглой трубе и плоском канале. В качестве возможного объяснения полученного расхождения авторы [4] предполагают особенность течения Куэтта и малость числа Рейнольдса. Оба эти предположения противоречат выводам работ [2,3] об универсальности λ_1^+ (т.е. независимости от числа Рейнольдса и конкретного вида течения) для класса пристенных турбулентных течений.

Предположения работы [4] опровергаются результатами наших расчетов. Малость λ_1^+объясняется малостью размеров расчетной области, использовавшейся в [4]. При увеличении пространственных периодов скорость роста малых возмущений стремится к универсальному значению λ_1^+≈0.021, полученному в [2,3] даже при минимальном Re=400. Близкие значения λ_1^+ получаются и при больших Re. Таким образом нами подтверждены выводы работ [2,3] об универсальности λ_1^+ для пристенных турбулентных течений по крайней мере для рассмотренного диапазона низких чисел Рейнольдса.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00140-а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. J. Comp. Phys., 217(2), 759-781, 2006.
2. Nikitin N. On the rate of spatial predictability in near-wall turbulence. J. Fluid Mech., 614, 495-507, 2008.
3. Никитин Н.В. О скорости роста возмущений в пристенных турбулентных течениях. Изв. РАН, МЖГ, №5, с.27-32, 2009.
4. Inubushi, M., Takehiro, S-I, Yamada, M. Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence. Phys. Rev. E, 92, 023022, 2015.

ЛАБОРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

Р.А. Плавник, И.Н. Завьялов, Е.В.Пляшков
Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

В настоящее время имеются крупные запасы углеводородов, извлечение которых требует развития нетрадиционные методов добычи, одним из которых является метод кислотной обработки пласта. Суть метода заключается в закачке в пласт кислот способных растворять часть скелета и создавать высокопроницаемые каналы. Однако в настоящий момент процесс фильтрации с изменением фазового состава фильтрующихся компонент из-за химических превращений изучен мало.

Ранее было обнаружено, что фильтрационный изотермический процесс с выделением газовой фазы может быть нестабильным [1,2]. При этом фильтрация окислителя происходит волнами, названными «вторичными волнами окисления».

Целью данной работы является лабораторное исследование зависимости частоты и амплитуды вторичных волн окисления от градиента давления вызывающего фильтрацию. Для проведения экспериментальной работы использовалась плоская ячейка, образованная двумя прозрачными пластинами из поликарбоната с внутренним пространством размерами 350x160x15 мм. В верхней части ячейки установлены выходы трубок, соединенных с перистальтическим насосом, и система поддержания постоянного давления из тонких трубочек. Вдоль ячейки располагаются 15 датчиков давления с шагом 20 мм. В начале эксперимента ячейка заполнялась стеклобисером, смешанным с восстановителем (пищевой содой), после чего смесь насыщалась минеральным маслом. Далее через подающую трубку закачивался окислитель (раствор лимонной кислоты). В результате фильтрации окислителя через модель пористой среды, наблюдались вторичные волны окисления, возникающие с некоторым постоянным периодом.

В экспериментах на датчиках давления наблюдались периодические колебания давления, пример показаний датчиков давления представлен на рис.1. Изменение профилей давления при прохождении волны окисления представлено на рис.2 . Спектр колебаний давления представлен на рис. 3. График зависимости периода колебаний от градиента давления представлен на рис. 4.

В результате экспериментальной работы было установлено, что период колебания давления во вторичных волнах окисления не зависит или слабо зависит от градиента давления (рис.4).

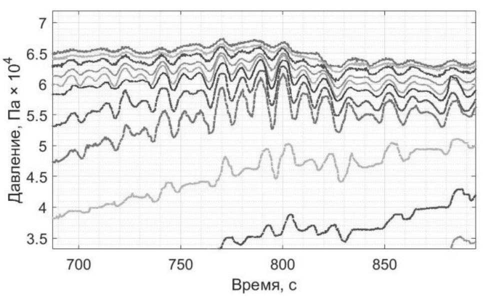


Рис. 1. Показания датчиков давления

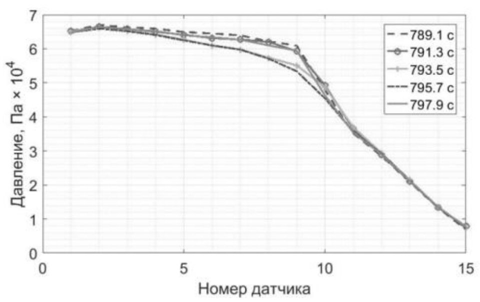


Рис. 2 Профили давлений при прохождении волны окисления

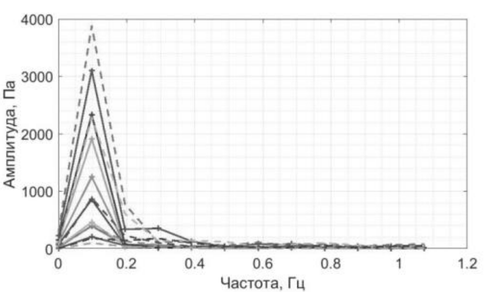


Рис. 3. Спектр колебаний давления

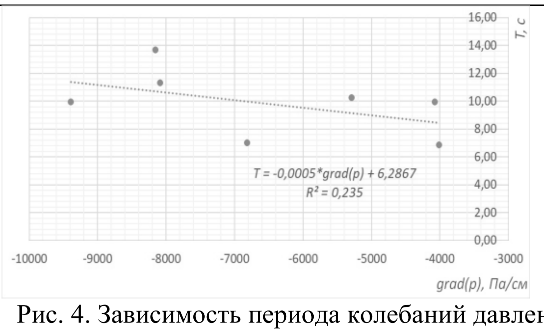


Рис. 4. Зависимость периода колебаний давления от градиента давления

Литература

1. *Konyukhov A.V., Zavialov I.N.* Numerical investigation of oscillatory multiphase flow in porous medium with chemically active skeleton //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2016. – Т. 774. – №. 1. – С. 012059.
2. *Konyukhov A.V., Zavialov I.N.* Influence of time-delayed reaction on stability and transition to self-oscillating mode of multiphase flow in porous medium // Turbulent Mixing and Beyond Sixth International Conference Tenth Anniversary Program, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Italy, 2017, P. 22.

О МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРАНДТЛЯ 2-ОГО РОДА

Н.В. Попеленская, В.О. Пиманов, Н.В. Никитин
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Дискуссия о механизме возникновения вторичных движений в турбулентных течениях в прямых трубах некруглого сечения ведется со времен опытов Никурадзе с трубами прямоугольного и треугольного поперечного сечения. Обнаруженные в этих опытах специфические отклонения в распределениях средней скорости в угловых областях Прандтль объяснил наличием упорядоченного движения в поперечной к направлению основного потока плоскости. Сейчас такие движения именуются вторичными движениями Прандтля 2-ого рода. Они наблюдаются только в турбулентных течениях в отличие от вторичных движений 1-ого рода, возникающих вследствие искривления линий тока (например, в непрямых трубах) как в турбулентных, так и в ламинарных течениях. Турбулентные вторичные движения не велики по интенсивности, редко превышая величину в 3% от максимальной скорости потока, однако они вносят существенный вклад в поперечный перенос импульса, тепла, примеси.

В однородных вдоль направления основного потока установившихся течениях вторичные движения характеризуются распределением средней продольной завихренности Ω_x, удовлетворяющей уравнению

$$V\frac{\partial\Omega x}{\partial y}+W\frac{\partial\Omega x}{\partial z}-\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Omega_x=S,\quad S=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\overline{v'^2}-\overline{w'^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(-\overline{v'w'}\right)$$

Здесь V, W и v', w' – поперечные компоненты скорости осредненного и пульсационного движения, черта означает осреднение. В некруглых трубах каждое из двух слагаемых в выражении для источникового члена S дает ненулевой вклад, благодаря чему уравнение для Ω_x имеет ненулевое решение. В настоящее время отсутствуют надежные экспериментальные данные, позволившие бы оценить вклад тех или иных механизмов в формирование источника S даже в простейших случаях течений в трубах прямоугольного/квадратного сечений. В наибольшей степени это относится к распределению в потоке сдвигового напряжения Рейнольдса $\overline{v'w'}$. Так, например, в экспериментах [1] было получено, что определяющий вклад в формирование S вносит анизотропия нормальных напряжений Рейнольдса (1-ое слагаемое в выражении для S), а в [2] сделан противоположный вывод о доминировании 2-ого слагаемого. Начиная с 90-х годов, прямые расчеты турбулентных течений в трубах квадратного сечения позволили прояснить ситуацию. В [3] рассчитаны оба слагаемых выражения для S и обнаружено, что оба они одинаково важны в определении Ω_x. Более того, обнаружилось, что два слагаемых имеют противоположные знаки и в значительной степени нейтрализуют друг друга. Этот эффект в еще более выраженной форме был выявлен при расчете турбулентных течений в трубах эллиптического сечения [4]. Все это указывает на то, что представление источникового члена в уравнении для средней продольной завихренности в виде градиентов рейнольдсовых напряжений не является продуктивным.

В настоящей работе выполнены расчеты турбулентных течений в трубах прямоугольного сечения. Использовался метод [5]. Проведен анализ альтернативного вида источникового члена:

$$S=\overline{\omega'_x\frac{\partial u'}{dx}}-\overline{u'\frac{\partial\omega'_x}{dx}}+\overline{\omega'_y\frac{\partial u'}{dy}}-\overline{v'\frac{\partial\omega'_x}{dy}}+\overline{\omega'_z\frac{\partial u'}{dz}}-\overline{w'\frac{\partial\omega'_x}{dz}}$$

Обнаружено, что распределение S по сечению трубы в значительной степени определяется первыми двумя слагаемыми последнего выражения, каждое из которых вносит примерно половину общего вклада. Остальные слагаемые значительно уступают по значению и не имеют выраженной формы. Обнаруженное согласуется с механизмом образования продольных вихрей, найденном ранее в локализованных турбулентных структурах [6].

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ (гранты 17-01-00140-а, 16-05-00004-а и 18-08-00074-а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. E. Brundrett and W. D. Baines. The production and diffusion of vorticity in duct flow. J. Fluid Mech., 19, 375-394, 1964.
2. F. B. Gessner. The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner. J. Fluid Mech., 58, 1-25, 1973.
3. S. Gavrilakis. Numerical simulation of low-Reynolds number turbulent flow through a straight square duct. J. Fluid Mech., 244, 101-129, 1992.
4. Воронова Т.В., Никитин Н.В. Результаты прямого расчета турбулентного течения в трубе эллиптического сечения. Изв. РАН МЖГ, 2, 59-70, 2007.
5. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. J. Comp. Phys., 217(2), 759-781, 2006.
6. Никитин Н.В., Пиманов В.О. О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах. Изв. РАН, МЖГ, №1, с.68-76, 2018.

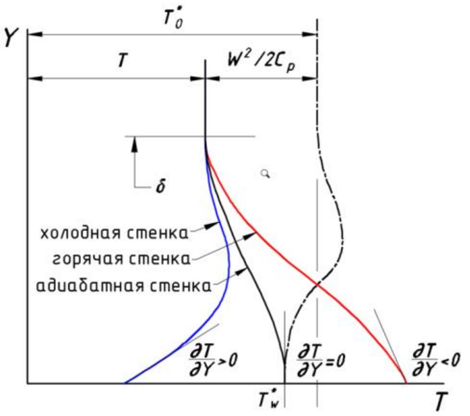
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА В СЛЕДЕ ЗА РЕБРОМ

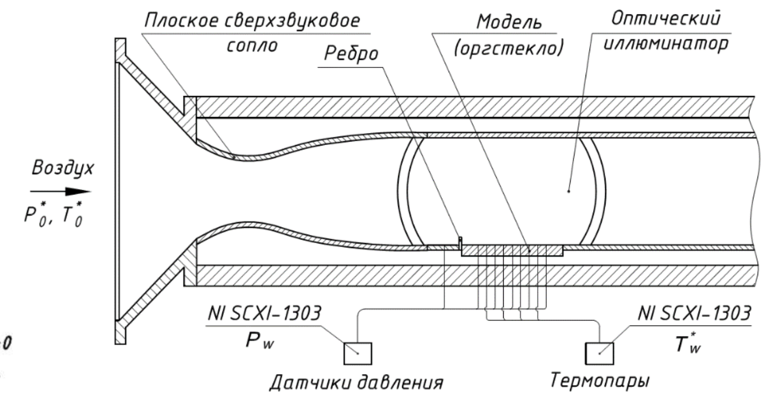
С.С. Попович, Ю.А. Виноградов, М.М. Стронгин
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Интенсивность теплообмена при сверхзвуковых скоростях течения оценивают по коэффициенту теплоотдачи, который с учетом эффектов сжимаемости определяется отношением теплового потока в стенку q_w к разности между температурой стенки T_w и температурой восстановления T_w^* [1]. В практике инженерных и научных расчётов T_w^* определяется через коэффициент восстановления температуры r, показатель адиабаты γ, полную температуру в потоке T_0^* и число Маха M (1). Коэффициент восстановления температуры аппроксимируется для ламинарного и турбулентного безотрывного режима обтекания пластины и тел вращения с гладкими образующими. Данные аппроксимации не работают при наличии градиента давления на стенке, усложнении формы поверхности или воздействии сильных возмущений (скачки уплотнения, отрывные течения):

$$T_w^* = \frac{T_0^* \cdot \left(1 + r \cdot \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \mathrm{M}^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \mathrm{M}^2\right)} = \begin{cases} \approx T_0^* \left(\mathrm{M} << 1\right) \\ \approx r \cdot T_0^* \left(\mathrm{M} >> 1\right) \end{cases}$$

Стенка, обтекаемая сверхзвуковым потоком воздуха, испытывает на себе эффект аэродинамического нагрева в результате возникновения градиента температуры в пограничном слое. На рисунке показаны возможные профили температуры в пограничном слое, определяющиеся локальной температурой стенки (нагретая, охлажденная или теплоизолированная – адиабатная). На рисунке также показана постановка экспериментального исследования.





Температура восстановления в эксперименте определяется с помощью методики обработки, позволяющей уже в процессе запуска установки определить тепловой поток в стенку и затем экстраполировать его до нулевого значения [2]. Температура стенки в этом случае и будет являться температурой восстановления. Число Маха набегающего потока составило 2.3, давление торможения 600 кПа, температура торможения 293 К, расход воздуха – около 4 кг/с. Температура восстановления и коэффициент теплоотдачи определялись при варьировании высоты ребра (от 2 до 12 мм), при толщине пограничного слоя на срезе сопла около 6 мм.

В заключение в докладе дается анализ возможности применения обнаруженного эффекта снижения температуры восстановления в следе за ребром в сверхзвуковом потоке на эффективность процесса безмашинного энергоразделения в потоке сжимаемого газа [3].

Работа выполняется при поддержке гранта РНФ №14-19-00699.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.I. Leontiev, S.S. Popovich, M.M. Strongin, Y.A. Vinogradov. Adiabatic wall temperature and heat transfer coefficient influenced by separated supersonic flow. EPJ Web of Conferences, 2017, 159, 1-5, DOI: 10.1051/epjconf/201715900030.
2. Ю.А. Виноградов, С.С. Попович, М.М. Стронгин. Экспериментальное исследование коэффициента восстановления температуры и интенсификации теплоотдачи при течении на плоской стенке за ребром сверхзвукового потока сжимаемого газа. Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 11, 55-75, DOI: 10.7463/1116.0849557.
3. Y.A. Vinogradov, A.G. Zditovets, A.I. Leontiev, S.S. Popovich, M.M. Strongin. Experimental research of shock wave processes influence on machineless gas flow energy separation effect. Journal of Physics: Conference Series, 2017, 891, 012080, DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012080.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ СУДОВЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖИТЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Прокофьев В.В., Филатов Е.В.
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе даны результаты экспериментальных исследований эффективности судовых волновых движителей (ВД) различных типов на модели судна-катамарана в условиях килевой качки. Ранее был предложен и исследован «прямоточный волновой движитель», работа которого никак не связана с качкой самого судна, чем он принципиально отличается от известных «машущих» ВД судов. В предлагаемой работе исследуется влияние килевой качки на эффективность прямоточного ВД, кроме того при одинаковых условиях проведены сравнительные исследования эффективности ВД различных типов (кроме прямоточного ВД исследовались гибкая пластина (плавник), качающаяся пластина с упругими связями, движитель типа подводный парус). Исследовалось влияние на эффективность размещения ВД на корпусе судна, а также глубины погружения ВД машущего типа.

Показано, что в условиях килевой качки при носовом размещении эффективность прямоточного ВД уменьшается по сравнению с эффективностью при отсутствии качки, но применение пластины стабилизатора на корме судна поднимает эффективность ВД до прежнего уровня. При этом эффективность прямоточного ВД находится на уровне машущих ВД типа плавник или пластины с упругими связями. Наличие кормовой пластины-стабилизатора значительно увеличивает эффективность носовой качающейся пластины или плавника во всем исследованном диапазоне волн, в то время как в случае паруса присутствие стабилизатора приводит к сдвигу зависимости скорости от частоты волн в сторону низких частот. Сравнение между различными ВД машущего типа, показало заметное преимущество движителя типа подводный парус.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00807.

РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ С МАЛЫМИ УГЛАМИ РАСКРЫТИЯ

А.И. Решмин, А.Д. Чичерина, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Проведены экспериментальные и расчетные исследования характеристик течения в коническом диффузоре с малыми углами раскрытия. На вход в диффузор подавалось развитое турбулентное течение. Расчет проводился с использованием трехпараметрической модели турбулентности [1]. Расчеты проводились, при числах Рейнольдса на входе в диффузор от 1000 до 10000 и с углами раскрытия меньше 4°. В зависимости от угла раскрытия в расчетах, течение в диффузоре происходило, при положительном, отрицательном или нулевом продольном градиенте давления. Получены характеристики течения на выходе диффузора, а также в различных сечениях вдоль диффузора. Результаты расчетов сравнивались с ранее полученными экспериментальными данными для диффузоров с углами раскрытия ~0.6° и ~1.2° [2], получено хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных.

Экспериментальные и расчетные данные показали, что диффузоре, после начального участка, формируется турбулентное течение. Параметры турбулентного течения на выходе из диффузора определяются только числом Рейнольдса и не зависят от условий на входе, пока эти условия достаточны для формирования турбулентного течения.

Расчеты показали, что при увеличении длины диффузора турбулентное течение затухает и плавно переходит в ламинарное.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г Лущик, А.А. Павельев, А.Е. Якубенко. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 13 - 25.

2. А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, В.В. Трифонов. Турбулентное течение в круглом безотрывном диффузоре при числах Рейнольдса меньших 2000 // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 121 - 130.

БИГАРМОНИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Д.А. Рязанов, И.Н. Сибгатуллин, МГУ им. М.В. Ломоносова,
Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН
Е.В. Ерманюк, Институт гидродинамики Лаврентьева РАН

С момента открытия аттракторов внутренних волн появилось множество работ, показывающих с помощью натурных и численных экспериментов, что волновые аттракторы являются не просто забавным математическим феноменом, но и играют важную роль в динамике стратифицированных и вращающихся систем, таких как глубоководный океан и астрофизические объекты. Было показано, что возникновение аттракторов является общим положением, а не исключительным случаем. В ряде работ изучалась диссипация и устойчивость аттракторов большой амплитуды [1-4]. В реальности приливные течения на Земле возникают под совместным действием притяжении Луны, Солнца и вращения. Астрофизические объекты также часто являются объектом воздействия нескольких приливных сил. Поэтому с прикладной точки зрения важно рассмотрение бигармонического внешнего воздействие с сопоставимыми и разными амплитудами и определение результирующего течения, которое может быть описано как взаимодействие двух аттракторов, либо как течения с аттрактором и без.

В нашей работе описывается модель бигармонических аттракторов, определены диапазоны частот для их успешного моделирования. Получены установившиеся режимы, демонстрирующие взаимодействие волновых аттракторов, генерируемых от каждой из частот, соответствующих определённому аттрактору. Впервые показано, что при малых амплитудах внешних воздействий взаимодействие аттракторов имеет характер интерференции лишь в зонах пересечения аттракторов по линейной теории. При изменении аспектного соотношения вертикальных и горизонтальных масштабов в несколько раз изменяется характер течения у буковых стенок и при тех же самых амплитудах происходит быстрое развитие малых возмущений и переход к волновой турбулентности.

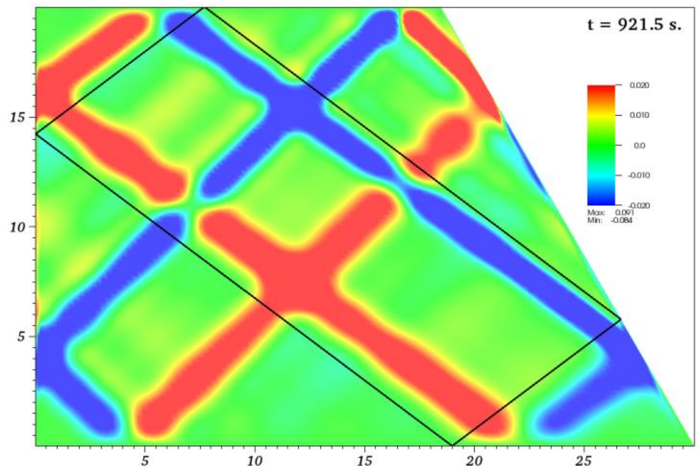


Рис.1 Пример поля вертикальной компоненты скорости при бигармоническом внешнем воздействии.

Публикации:

1. F. Beckebanze, C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, and L. R.M. Maas. Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction. Journal of Fluid Mechanics, 841:614–635, 2018.

2. C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, and T. Dauxois. Scale effects in internal wave attractors. PHYSICAL REVIEW FLUIDS, 2(11):114803, 2017

3. C. Brouzet, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, I. Sibgatullin, and T. Dauxois. Energy cascade in internal-wave attractors. EPL (Europhysics Letters), 113:44001, 2016.

4. C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, H. Scolan, E. V. Ermanyuk, and T. Dauxois. Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3d numerical simulations. Journal of Fluid Mechanics, 793:109–131, 2016.

БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В НАКЛОНЕННОЙ ПОЛОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Сагитов Р.В. [1], Шарифулин А.Н. [2]
[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь
[2]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Рассматриваются стационарные конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости в наклонённой вертикальной прямоугольной полости со свободными границами. Между двумя изотермическими сторонами прямоугольника (длиной L), которые являются горизонтальными при отсутствии наклона, поддерживается постоянный перепад температур Θ. Остальные стороны (высотой H) являются теплоизолированными. Задача характеризуется углом наклона α и безразмерными критериями: числом Грасгофа $\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta\Theta H^3}{\nu^2}$, числом Прандтля $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\chi}$, соотношением сторон $\mathrm{B} = \mathrm{L}/\mathrm{H}$. Исследования проводилось для $\mathrm{Pr} = 10$, $\mathrm{B} = \sqrt{2}$, $0 < \mathrm{Gr} \le 657.5$, $-180^\circ \le \alpha \le 180^\circ$.

Для описания движения жидкости использовались безразмерные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска. Краевая задача для случая малых возмущений состояния механического равновесия сводится к задаче Релея, решение которой дает следующее выражение для критических чисел Грасгофа: $\mathrm{Gr}_c = \left(\dfrac{m^2\pi^2}{\mathrm{B}^2} + n^2\pi^2\right)^3 \Big/ \dfrac{m^2\pi^2}{\mathrm{B}^2}\mathrm{Pr}$.

Первые три критические числа Грасгофа: $\mathrm{Gr}_1 = 65.75$, $\mathrm{Gr}_2 = 131.5$, $\mathrm{Gr}_3 = 360.1$ соответствуют возмущениям с $n = 1,\ m = 1, 2, 3$, представляющих собой одно-, двух- и трехваловые движения, соответственно.

Путем решения многомерным методом Ньютона системы алгебраических уравнений, полученной дискретизацией уравнений тепловой конвекции на прямоугольной сетке 101×101, были построены бифуркационные диаграммы. Для $\alpha = 0^\circ$ при $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_1$, $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_2$ и $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_3$ в результате вилочной бифуркации ответвляются по две ветви, соответствующие одно-, двух- и трехваловым нелинейным режимам стационарной конвекции, соответственно.

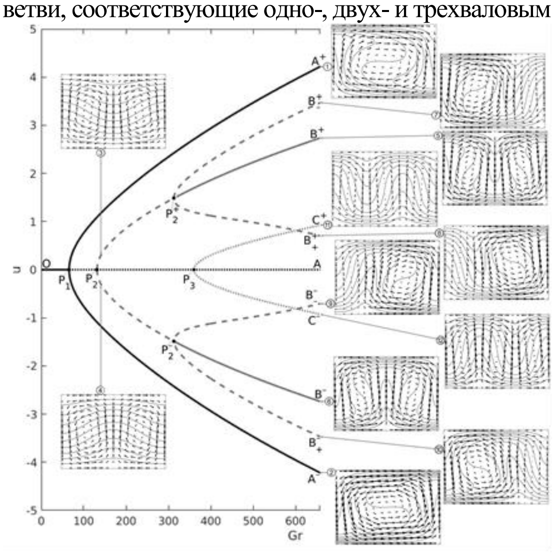


Рис. 1 Бифуркационная диаграмма для $\alpha = 0^\circ$

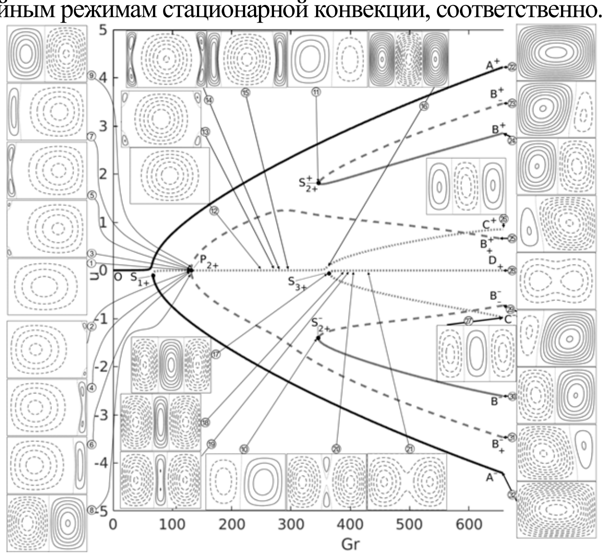


Рис. 2 Бифуркационная диаграмма для $\alpha = 0.1^\circ$

Исследование на устойчивость показало, что одноваловые режимы устойчивы, трехваловые – неустойчивы. Двухваловые режимы неустойчивы до числа Грасгофа $\mathrm{Gr}_2^\pm = 312.9$, при $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_2^\pm$ каждая ветвь, соответствующая двухваловому режиму, посредством вилочной бифуркации разделяется на две неустойчивые и одну устойчивую ветви.

Анализ бифуркационной диаграммы, построенной для малого наклона полости $\alpha = 0.1^\circ$, показал, что все вилочные бифуркации для $\alpha = 0^\circ$, кроме второй бифуркации равновесия, являются структурно неустойчивыми.

Определяя значения параметров, при которых якобиан системы для амплитуд малых возмущений равен нулю, на плоскости параметров (α, Gr) построили четыре бифуркационные кривые, которые разделяют области параметров, где существуют один, три, пять, семь, девять стационарных режимов.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Cliffe K. A., Winters K. H. A numerical study of the cusp catastrophe for Bénard convection in tilted cavities //Journal of Computational Physics. – 1984. – Т. 54. – №. 3. – С. 531-534.
2. Mizushima J., Adachi T. Sequential transitions of the thermal convection in a square cavity //Journal of the Physical Society of Japan. – 1997. – Т. 66. – №. 1. – С. 79-90
3. Mizushima J., Hara Y. Routes to unicellular convection in a titled rectangular cavity // J. Physical Society of Japan. 2000. Vol. 69.№ 8. P. 2371-2374.

ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Д.С. Сбоев[1], С.А. Баранов[1], И.А. Моралев[2], С.Н. Толкачев[1]
[1]Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский
[2]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

Предыдущие экспериментальные исследования ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое скользящего крыла при повышенной степени турбулентности внешнего потока [1-4] в основном ограничивались случаями умеренной интенсивности внешних возмущений до 0.6%. В [4, 5] были изучены некоторые особенности перехода при более высоком уровне внешних пульсаций около 1%, однако использованная модель крыла с ламинаризированным профилем и большим участком практически безградиентного пограничного слоя не позволила получить подробные данные о развитии возмущений в областях с отрицательным градиентом давления достаточной пространственной протяженности. Кроме того, работы [4, 5] в основном посвящены исследованию зоны непосредственного разрушения ламинарного режима течения. Таким образом, экспериментальные данные о переходе в трехмерном пограничном слое при высоком уровне внешней турбулентности неполны. Некоторые вопросы, например, о возможной роли в процессе перехода в таких условиях алгебраической неустойчивости, изучены недостаточно.

В настоящем сообщении описаны эксперименты по переходу в трехмерном пограничном слое, развивавшемся на модели стреловидной плоской пластины с наведенным отрицательным градиентом давления при скорости потока 12-24 м/с. Потенциальное течение во внешнем потоке моделировалось при помощи искривленных фальшстенок в рабочей части малотурбулентной аэродинамической трубы ЦАГИ Т-124. Исследования такого пограничного слоя при невозмущенном внешнем потоке показали, что в области измерений данное течение не зависит от размаха модели и хорошо моделирует пограничный слой скользящего крыла на участке разгона потока в области интенсивной неустойчивости поперечного течения. Повышенная степень турбулентности около 0.9% создавалась с помощью установленной на срезе сопла сетки, ранее использованной в [4, 5]. Эксперименты проведены в естественных условиях без внесения в пограничный слой каких-либо контролируемых возмущений. Однониточным датчиком термоанемометра в пограничном слое исследованы двумерные поля скорости в плоскостях, перпендикулярных поверхности модели. Кроме того, измерялось распределение давления по пластине, а также были выполнены измерения поперечных корреляций продольной компоненты скорости в перпендикулярном внешней линии тока направлении.

Результаты экспериментов показали, что в пограничном слое отсутствовали заметные признаки развития стационарных возмущений неустойчивости поперечного течения. Поле пульсаций скорости также слабо зависело от трансверсальной координаты. Рост интегральной по спектру энергии нестационарных возмущений в зависимости от продольной координаты на начальном участке развития был экспоненциальным, а не линейным, как это наблюдается в двумерных пограничных слоях при повышенной внешней турбулентности. Характерного для алгебраической неустойчивости степенного роста бегущих мод не отмечено. Частотные спектры пульсаций с плоской областью низких частот и спаданием высокочастотной части спектров по степенному закону типичны для неустойчивости поперечного течения. В направлении поперек пограничного слоя заметных отличий в развитии низко- и высокочастотных компонент в спектрах не обнаружено. Наблюдалось интенсивное развитие высокочастотных спектральных компонент в пограничном слое на всей протяженности зоны измерений. Измерения поперечных корреляций показали, что в направлении, близком к направлению распространения наиболее неустойчивых колебаний поперечного течения, типичным видом возмущений в пограничном слое являются волновые пакеты.

Таким образом, полученные результаты позволяют заключить, что в пограничном слое с отрицательным градиентом давления при степени внешней турбулентности около 1% преобладают нестационарные возмущения неустойчивости поперечного течения. Лишь некоторые признаки в развитии низкочастотных компонент могут свидетельствовать о существовании алгебраически растущих полосчатых структур, однако явных свидетельств этого обнаружено не было.

ЛИТЕРАТУРА.

1. H. Deyhle, H. Bippes Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions. J. Fluid Mech., 1996, 316, 73-113.
2. T. Kurian, J.H.M. Fransson, P.H. Alfredsson Boundary layer receptivity to free-stream turbulence and surface roughness over a swept flat plate. Phys. Fluids, 2011, 23 (3), 034107.
3. V.I. Borodulin, A.V. Ivanov, Yu.S. Kachanov, A. Hanifi Laminar-turbulent transition delay on a swept wing. International Conference on Methods of Aerophysical Research, Perm, Russua, Proceedings, Part II, 2016, 36–37.
4. А.Ф. Киселев, Д.С. Сбоев, С.Л. Чернышев Особенности ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном пограничном слое при повышенной внешней турбулентности. ДАН, 2014, 454(6), 665-668.
5. A.Ph. Kiselev, V.A. Kuzminsky, D.S. Sboev The laminar-turbulent transition zone in 2D and 3D boundary layers with emphasis on effect of free stream turbulence. 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2014), 2014, St. Petersburg, Russia.

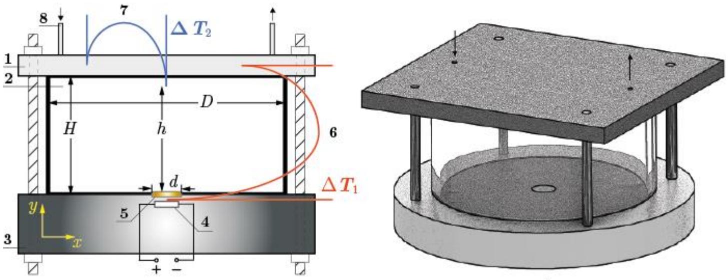
ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ДЕЙСТВИЕМ КОМПАКТНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

И.О. Сбоев
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

Конвективные струи или тепловые плюмы (thermal plume) являются одними из самых распространенных форм движений жидкости. Зачастую даже довольно сложное ламинарное конвективное течение можно представить в виде совокупности одиночных тепловых плюмов, формирующихся под действием локальных неоднородностей температуры, и сложным образом взаимодействующих друг с другом в рассматриваемом объеме [1].

Наряду с тепловыми встречаются также концентрационные плюмы, природа которых заключается, как правило, в том, что внутри некоторой среды распространяется вещество с другим значением плотности. Такие течения (chemical fronts) чаще всего возникают в ходе экзотермических реакций на границе слоя жидкости [2]. В ряде ситуаций структуры и механизмы движения струй различной природы оказываются схожи друг с другом. Однако, ввиду широкой распространенности именно естественной конвекции представляет особый интерес изучение так называемых развивающихся тепловых плюмов (starting thermal plume). В связи с этим, настоящая работа посвящена проблеме формирования и эволюции конвективной струи в слое невозмущенной жидкости под действием локализованного источника тепла и измерению кинематических характеристик движения жидкости как для нестационарного, так и для установившегося течений.

Экспериментальная установка включает в себя цилиндрическую полость ($D = 84.0 \pm 0.2$ мм, $H = 40.2 \pm 0.2$мм), заполненную дистиллированной водой. Снизу слой жидкости ограничен круглой пластиной из оргстекла толщиной 25.0 ± 0.2 мм, а сверху - массивом из алюминия толщиной 7.0 ± 0.1 мм. В центре основания полости располагается медный нагреватель в форме круга диаметром $d = (9.90 \pm 0.05)$ мм, также модель содержит две дифференциальные термопары (рис. *а*). Данные с термопары с периодом 250 мс поступают на микровольтметр, а затем передаются в компьютер. В этом случае их удается преобразовать в определенный сигнал и отправить на подключенный к источнику питания регулятор температуры. Таким образом, необходимую температуру нагревателя можно поддерживать вблизи заданной уставки путем регулирования мощности тока, пропускаемого через резистор сопротивлением (130 ± 3) Ом. Для визуализации течения применяется лазер постоянного действия с длиной волны 532 нм, а съемка проводится с частотой 60 Гц.



а *б*

После включения источника питания тепло от резистора начинает передаваться медному теплообменнику, а спустя некоторое время в жидкости механическое равновесие сменяется струйным течением, и нагретая жидкость начинает всплывать в центре слоя, образуя тепловой плюм. Для измерения температуры жидкости на высоте h над нагревателем находится спай сигнальной термопары. Таким образом, по изменению показаний этой термопары определяется момент достижения температурным возмущением верхней границы. Измерив время, за которое плюм достигает высоты h, можно вычислить среднюю скорость его распространения при различных степенях подогрева.

Для развивающегося вдали от границ конвективного потока в качестве управляющего параметра берется число Рэлея $Ra_L = g\beta\Delta T_1 L^3/\nu\chi$. Параметром длины $L = S/P$ выступает отношение площади поверхности медного нагревателя к его периметру (для круга $L = d/4$), т.к. именно их отношение является определяющим в задачах о неустановившемся течении от компактных источников тепла [3]. Результаты настоящей работы сопоставляются с работами других авторов, в частности обсуждается известный степенной закон, связывающий скорость роста плюма с интенсивностью локализованного подогрева.

Структура установившегося в полости движения жидкости исследована с применением светоотражающих частиц и лазерного ножа в плоскости $z = 0$. При помощи методов PIV были построены средние поля скорости $\mathbf{v}(x,y)$ установившегося движения, и найдена зависимость максимальной скорости течения от степени подогрева, которая характеризуется определенным по высоте слоя числом Рэлея Ra_H. В ходе работы исследовано поведение жидкости вблизи поверхности алюминиевого массива и описана структура течения вблизи твердой боковой границы полости при различных температурах источника.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00165 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Lappa M. Some considerations about the symmetry and evolution of chaotic Rayleigh–Bénard convection: The flywheel mechanism and the “wind” of turbulence. Comptes Rendus Mécanique, 2011, 339(9), 563-572.
2. Almarcha C. et al. Active role of a color indicator in buoyancy-driven instabilities of chemical fronts, The Journal of Physical Chemistry Letters, 2010, 1(4), 752-757.
3. Bergman, T.L., Incropera, F.P. Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons, UK, 2011, 1050 p.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЫХОДА ГИДРОДИОДА НА РАБОЧИЙ РЕЖИМ

Семёнов А.Б. Кураев А.А.
Новосибирский государственный технический университет
kuraev@corp.nstu.ru, n.a.sem@yandex.ru

Аннотация: В статье приводятся результаты оценки времени установки напора на выходе гидродиода на фиксированную величину. Инерционность оценивается по длительности установления давления на выходе гидродиода.

Ключевые слова: гидродиод, инерционный напор, сильфон, осцилляции.

ВВЕДЕНИЕ

Ранее в [1-3] были подробно изложены результаты параметрических экспериментальных исследований эффекта гидродиода.

Под гидродиодом понимается сосуд с одной мембраной, перфорированной коноидальными отверстиями, установленными внутри сосуда по нормали к вектору инерционного ускорения осциллирующей жидкости. В полости сосуда над мембраной и под ней устанавливаются упруго-объёмные элементы (сильфоны), жёсткость которых подбирается в соответствии с действующим инерционным напором, возникающими в жидкости, подверженной осцилляциям (Рис. 1).

Цель данной работы – оценить время необходимое для выхода гидродиода на фиксированное при данной величине инерционного ускорения значение напора на выходе. Инерционность гидродиода – основной параметр, определяющей его возможности применения в технике.

В настоящей статье приводятся результаты количественной оценки времени, в течение которого устанавливается характерное для данного инерционного ускорения давление. В течение времени выхода гидродиода на предельные значения напора инерционное ускорение поддерживается постоянным.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ИНЕРЦИОННОСТИ ГИДРОДИОДА

Методика экспериментальной оценки времени выхода гидродиода на режим отражена в [2], она была основана на фиксации времени пересечения уровня поднимающейся жидкости и лазерного луча, при пересечении поднимающейся жидкости и лазерного луча срабатывал фотодатчик.

Указанная методика позволяла фиксировать мгновенную величину напора в пьезометрической трубке, точность экспериментальной оценки напора была не хуже ± 0,001 м.

Разнорасходность наблюдается вследствие того, что слева направо втекает жидкости больше, чем справа налево, это происходит вследствие зависимости коэффициента расхода от направления (рис. 1) и имеет место при $Re \geq 1*10^5$ [4].

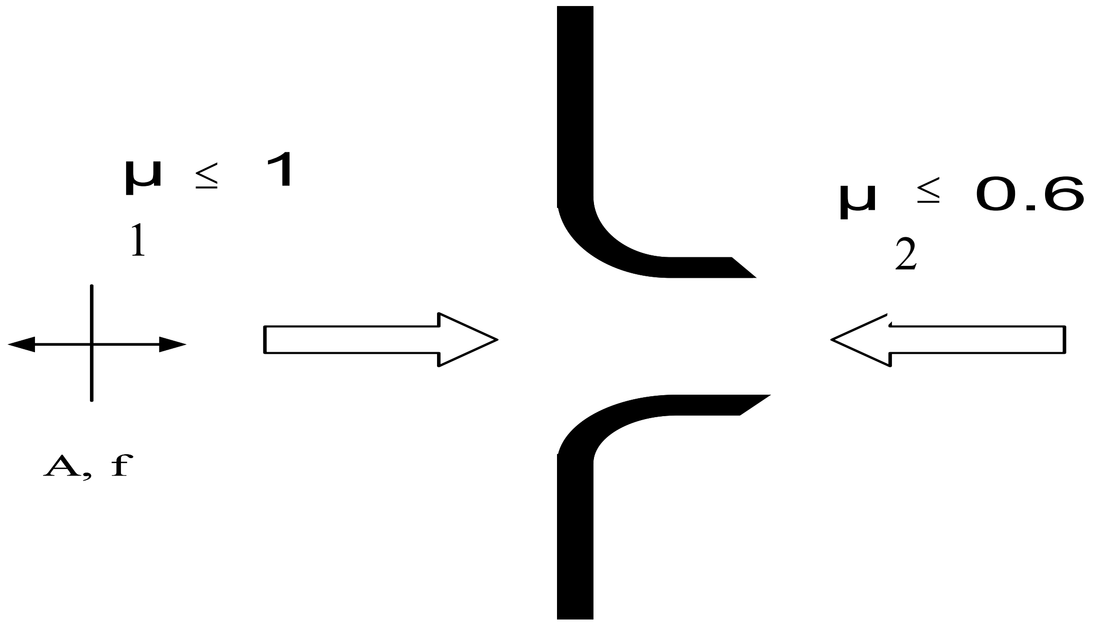


Рис. 1 Направление втекания жидкости в отверстие перфорации в мембране. Здесь А – амплитуда вибрации мембраны, f – частота вибрации мембраны.

Для увеличения расхода жидкости через отверстие в мембране устанавливаются сильфоны (3 на рис 2).

Ниже приводится численное исследование времени установления избыточного напора на выходе гидродиода при фиксированной величине амплитуды и частоты осцилляций и при определённой жёсткости упруго- объёмного элемента.

За основу численного исследования взята система уравнений баланса расходов в полостях физической модели гидродиода (1).

В пьезометре величина $\Delta h_{пьез}$ выйдет на предельный уровень, когда средний за время периода осцилляции расход жидкости через отверстие перфорации станет равна нулю.

Схема одномембранной физической модели гидродиода приведена на рисунке 2.

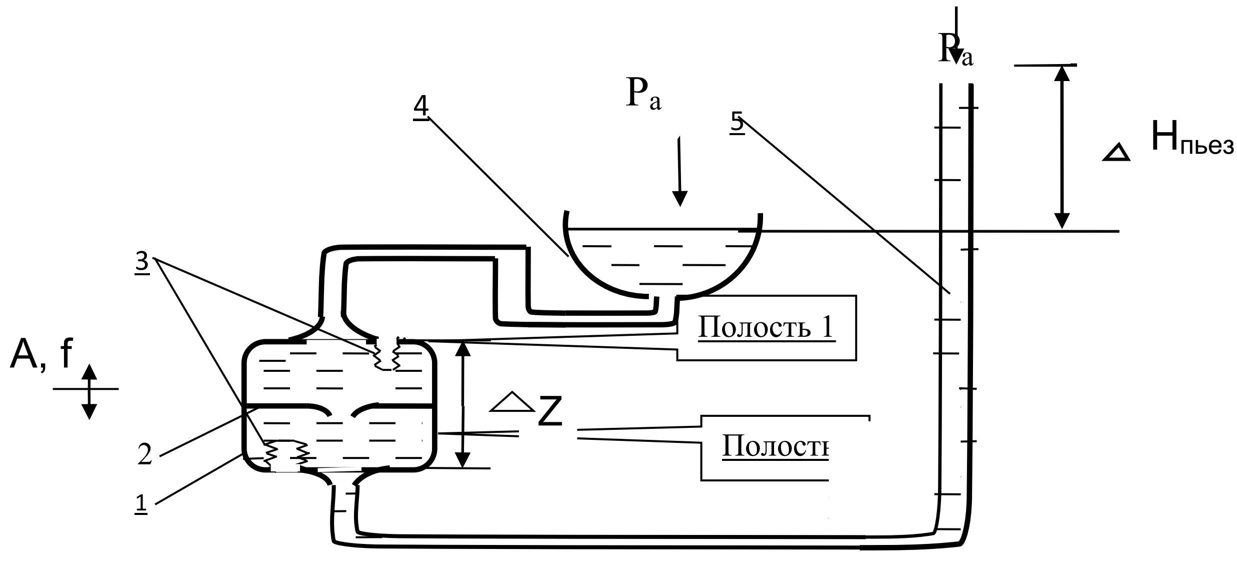


Рис. 2. Физическая модель одномембранного гидродиода. На схеме: 1 – корпус, 2 – мембрана, 3 – упруго-объёмные элементы, 4 – уравнительный сосуд, 5 – пьезометр.

На рисунке 2: ΔZ – высота корпуса гидродиода, половина этой величины используется при подсчёте величины инерционного напора [1]. P_a – атмосферное давление.

ОЦЕНКА ИНЕРЦИОННОСТИ ГИДРОДИОДА ПРИ УЧЁТЕ РАБОТЫ СИЛЬФОНОВ

Для увеличения разнорасходности необходимо увеличить число Рейнольдса (при Re не менее $1*10^5$ [4]) протока жидкости через отверстия перфорации, для чего необходимо использовать упруго-объёмные элементы (сильфоны). Деформация сильфонов происходит под действием инерционной силы, позже, при восстановлении формы, сильфоны выталкивают жидкость из полости, вызывая проток жидкости через отверстие перфорации.

Можно записать уравнение баланса расходов для полостей 1 и 2 (см. Рис. 1), например, для промежутка времени, в течение которого корпус сильфона поднимается вверх в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta W_{сильф1}(t) - \Delta W_{ус}(t) = \Delta W_{01}(t) && \text{Полость 1} \quad (1)\\ &-\Delta W_{сильф2}(t) - \Delta W_{пьез}(t) = -\Delta W_{02}(t) && \text{Полость 2} \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Здесь $\Delta W_{01}(t)$ – объём жидкости, вытекший из полости 1 через отверстие перфорации в мембране за интервал времени 0,01 Т (период); $\Delta W_{02}(t)$ – объём, затёкший в полость 1 снизу за тот же временной интервал; $\Delta W_{ус}$ – объём жидкости, который поступает в уравнивающий сосуд за элементарный промежуток времени ($м^3$); k – коэффициент жёсткости материала сильфона (н/м); $\Delta W_{пьез}$ – объём жидкости, который проходит за элементарный промежуток времени в пьезометрическую трубку ($м^3$).

Ниже рассматривается уравнение баланса расходов в полости 2 (Рис. 1):

$$-\Delta W_{сильф2}(t) - \Delta W_{пьез}(t) = -\Delta \mathbf{W}_{02}(t) \quad (3)$$

Поскольку, согласно результатам эксперимента сумма деформируемого объёма сильфона за малый промежуток времени и изменение объёма жидкости в пьезометрической трубке за тот же промежуток времени равна расходу жидкости через отверстие перфорации, можно записать :

$$(\Delta \mathbf{W}_{сильф2}(t) + \Delta \mathbf{W}_{пьез2}(t)) / \Delta t = Q(t) \quad (4)$$

где Q(t) – расход жидкости через отверстие перфорации за промежуток времени Δt.

При этом $\Delta \mathbf{W}_{сильф2}$ - деформируемый объём сильфона в нижней полости (полость 2 рис. 1),

$$\Delta W_{сильф1} = \frac{S^2_{сильф}\rho g(\Delta h_{ин}\cos(\omega t) - \Delta h_{пьез})}{k}$$

$S_{сильф}$ – площадь основания сильфона ($м^2$); $\Delta h_{пьез}$ – величина напора на выходе гидродиода (меняется непрерывно в течение времени выхода гидродиода на режим) (м); $\Delta W_{02}(t)$ – объём, затёкший в полость 1 снизу за тот же временной интервал;

При составлении данной оценки пренебрегалось присоединённой массой и гидравлическим сопротивлением в пьезометрической трубке. Уравнение (3) можно записать:

$$(S_{сильф}{}^2\rho g(\Delta h_{ин}\cos(\omega t)-\Delta h_{пьез})/k)+\mu_1 S_0\sqrt{2g(\Delta h_{ин}\cos(\omega t)-\Delta h_{пьез})}\Delta t=\Delta W_{пьезn}(t) \quad (5)$$

За всё время установки режима объём жидкости в пьезометрической трубке можно оценить по формуле:

$$\Delta W_{пьез} = \sum_n \Delta W_{пьезn} \quad (6)$$

Величину напора на выходе гидродиода, как и при отсутствии сильфонов можно оценить с помощью формулы:

$$\mathbf{\Delta h_{пьез}=\Delta W_{пьез}/\ S_{пьез}} \quad (7)$$

На рис. 3 представлена зависимость напора на выходе одномембранной модели гидродиода от времени при постоянном ускорении осцилляций скорости потока.

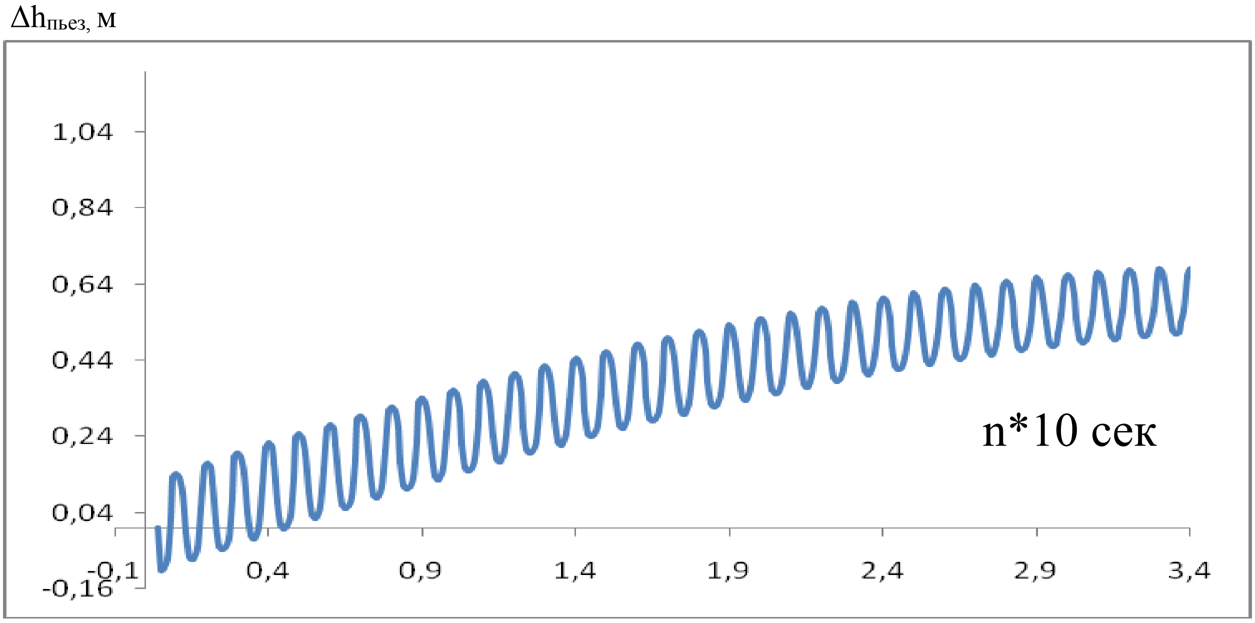


Рис. 3. Зависимость напора на выходе гидродиода от времени при выходе гидродиода на режим насыщения при наличии в рабочих полостях жёстких сильфонов $k=4{,}6*10^6$. (Ускорение осцилляций составило $J=4{,}8$ м/с^2).

Следует учесть, что когда средний расход через отверстие перфорации за период будет равным нулю, рост среднего значения напора в пьезометрической трубке прекращается (рис. 3). Приведённая на рисунке 3 длительность времени выхода гидродиода на стабильный режим работы совпадает с экспериментальными данными – 36 секунд.

ВЫВОД

Таким образом, в настоящей статье, проведена численная оценка времени выхода напора на режим насыщения. Время выхода гидродиода на установившийся режим работы при фиксированном ускорении осцилляций составляет порядка 30 секунд и определяется жёсткостью сильфона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кураев А.А., Семёнов А.Б. Исследование напорных характеристик перфорированной мембраны в осциллирующем потоке жидкости // Теплофизика и Аэромеханика. – 2013. – Т.20, № 3. – С.335-339.
2. Кураев А.А., Семёнов А.Б Расходно-напорные характеристики гидродиода // Теплофизика и Аэромеханика. – 2014. – Т.21, № 2. – С. 273-275.
3. Кураев А.А., Семенов А.Б. Численные исследования эффекта гидродиода // Теплофизика и Аэромеханика. – 2015. – Т.22, № 1. – С.43-48.
4. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. М.: Наука,1970. – 216 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ АТТРАКТОРОВ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ

И.Н. Сибгатуллин, МГУ им. М.В. Ломоносова
Е.В. Ерманюк, Институт гидродинамики Лаврентьева РАН
Leo Maas, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands
Сюй Сюлинь, МГУ им. М.В. Ломоносова
Thierry Dauxois, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France

Инерционные волны во вращающихся жидкостях подчиняются особому дисперсионному соотношению, определяющему лишь направление их распространения по отношению к направлению вращения. В замкнутых геометриях это проводит к новым правилам игры в бильярд при отражении пучков волн от границ: сохраняется угол с направлением вращения, в результате возникают явления фокусировки и расфокусировки при отражении от наклонных границ, причём фокусировка в общем случае превалирует и в результате при наличии монохроматического источника волн возникают замкнутые пути — волновые аттракторы, впервые описанные Лео Маасом. Ранее нами были изучены механизмы развития неустойчивости и диссипации в квазидвумерных постановках для аттракторов внутренних волн [2-4]. Было показано, что возникающая неустойчивость имеет характер триадного резонанса, который при достаточной амплитуде может развиться в каскад триадных резонансов [4].

В настоящей работе мы исследуем трёхмерные режимы, возникающие при монохроматическом воздействии различного типа на вращающиеся слои с наклонными стенками. Воздействия могут соответствовать приливным эффектам, либрации, или полностью аксиально симметричном воздействии.

Мы впервые описали трёхмерную структуру волнового аттрактора во вращающейся системе координат при приливном воздействии, и показали, что аттрактор перекручивается в азимутальном направлении, так что в азимутальном сечении вращающаяся картина «инь-янь» [1]. Это возникает по причине отсутствия осесимметричности аттрактора и наличии угла между распространением волны и радиальным направлением. Также мы описали неустойчивость аттракторов большой амплитуды и показали, что триадный резонанс возникает не в плоскости трапеции, как ранее было нами показано для внутренних волн в квазидвумерной постановке [3-4], а в азимутальном направлении, причём вторичные волны бегут в разных направлениях. Анализ спектра также показал формирование среднего течения на фоне образования аттрактора.

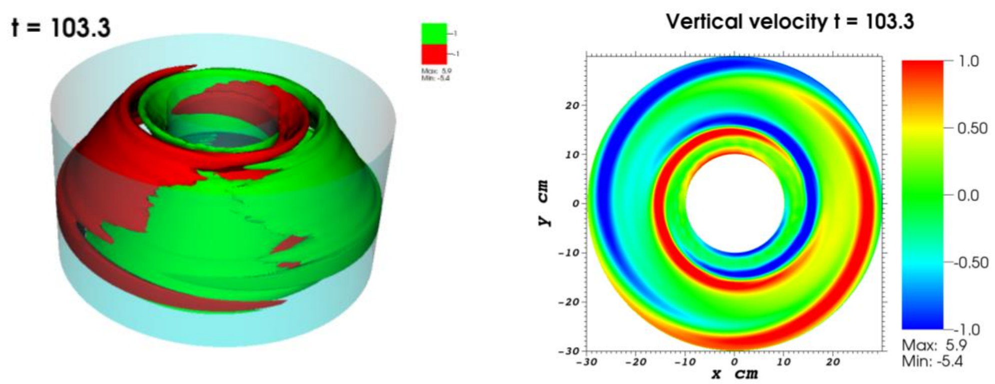


Рис. 1 Линии уровня вертикальной компоненты скорости (слева) и поле вертикальной скорости (справа) в режиме отрицательной прецессии.

Публикации

1. Ilias Sibgatullin, Evgeny Ermanyuk, Leo Maas, Xu Xiulin, and Thierry Dauxois. Direct numerical simulation of three-dimensional inertial wave attractors. In 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). IEEE, 2017.

2. F. Beckebanze, C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, and L. R.M. Maas. Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction. Journal of Fluid Mechanics, 841:614–635, 2018.

3. C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, and T. Dauxois. Scale effects in internal wave attractors. PHYSICAL REVIEW FLUIDS, 2(11):114803, 2017

4. C. Brouzet, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, I. Sibgatullin, and T. Dauxois. Energy cascade in internal-wave attractors. EPL (Europhysics Letters), 113:44001, 2016.

5. C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, H. Scolan, E. V. Ermanyuk, and T. Dauxois. Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3d numerical simulations. Journal of Fluid Mechanics, 793:109–131, 2016.

ОСОБЕННОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВЫСТУПАМИ И ВЫЕМКАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

М.М. Симоненко[1], С.В. Гувернюк[1], А.Ф. Зубков[1], А.Г. Кузьмин[2]

[1]НИИ механики МГУ, Москва

[2]СПбГУ, Санкт-Петербург

Введение. Конструктивные особенности в виде выступов и выемок на поверхности осесимметричных тел широко встречаются во многих технических приложениях. Несмотря на относительно простую геометрию, при сверхзвуковом обтекании таких тел под углом атаки формируется довольно сложное отрывное течение. Результаты исследований сверхзвукового обтекания осесимметричных тел с выступами и выемками на поверхности широко представлены в литературе. Детально изучались режимы сверхзвукового обтекания осесимметричных затупленных тел с головной иглой, в том числе снабженной насадками различной формы [1-3]. Рассматривались особенности трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричного тела с кольцевым выступом в виде прямой ступеньки [4-7] и с кольцевой выемкой в виде прямоугольной каверны [8]. Экспериментально изучалось явление гистерезиса при изменении относительной длины выемки [9] и угла атаки [8]. Экспериментально [6] и численно [7] установлено, что, в зависимости от протяженности тела перед кольцевым выступом, при увеличении угла атаки реализуются режимы сверхзвукового обтекания, на которых происходит повышение давления на подветренной стороне выступа.

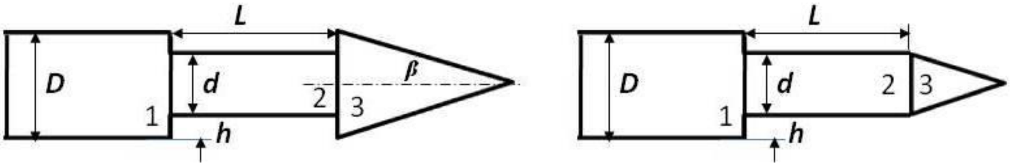
В данной работе представлены результаты экспериментального исследования трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричной модели с кольцевым выступом (в форме прямой кольцевой ступеньки) и с кольцевой выемкой (в форме прямоугольной каверны). Целью работы являлось изучение влияние протяженности тела перед выступом (протяженности выемки) и угла атаки на структуру обтекания таких тел.

Экспериментальная модель и условия испытаний. Экспериментальная модель включала цилиндрический корпус 1 диаметром D, оснащенный соосной выдвижной цилиндрической штангой 2 ($d < D$, рис. 1) переменной длины L, на свободном конце которой монтировались сменные конические наконечники 3 с диаметрами основания D_C и различными углами полураствора β.

В варианте $D_C=D$ элементы модели образовывали кольцевую выемку прямоугольного сечения длиной L с равновеликими высотами $h=(D-d)/2$ переднего и заднего уступов, рис. 1*а*. Для турбулизации пограничного слоя непосредственно перед выемкой в сечении основания наконечника устанавливался кольцевой сетчатый рецептор с геометрической проницаемостью 50%, выступающий над поверхностью модели на высоту 0.75 мм.

В варианте $D_C=d$ вместо выемки оставался прямоугольный кольцевой выступ (прямая ступенька) высотой h, рис. 1*б*.

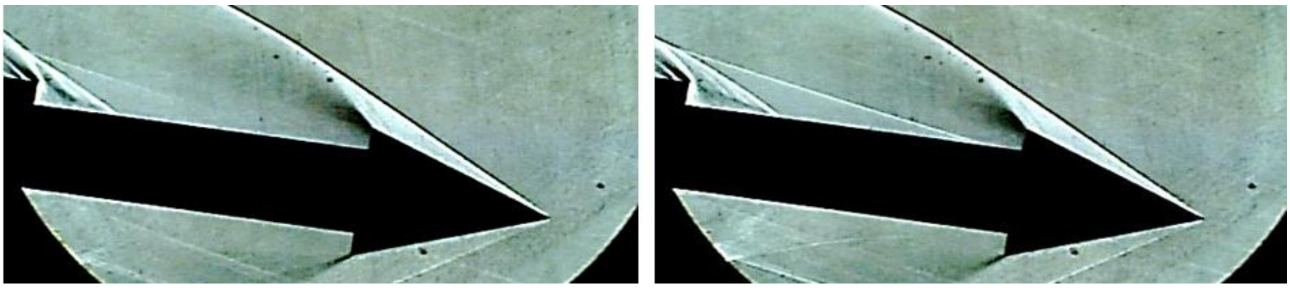
Испытания проведены в аэродинамической трубе А-7 НИИ механики МГУ при M=3, $Re_1=3{,}5\times10^7$ м$^{-1}$. В ходе экспериментов варьировались протяженность цилиндрической части тела перед выступом и угол атаки в диапазонах $7 < L/h < 20$ и $0° < \alpha < 15°$. Измерялось давление на торце корпуса на расстоянии $h/3$ от поверхности штанги и осуществлялась теневая визуализация структуры течения.



а *б*

Рис. 1. Схема вариантов экспериментальной модели ($D=46$ мм, $d=30$ мм, L=56-160 мм):
а – конфигурация «кольцевая выемка»; *б* – конфигурация «кольцевой выступ»

Результаты эксперимента. Для кольцевой выемки (D_C=D) по параметру относительной протяженности *L/h* в зависимости от угла атаки α определены границы области гистерезиса. В области гистерезиса структура течения в выемке неоднозначна. В двумерном (плоском или осесимметричном) случае реализуется либо открытая (единая отрывная область в выемке), либо замкнутая схема обтекания (две изолированные отрывные области за передним и перед задним уступом выемки) [1, 8, 9]. При увеличении угла атаки на наветренной стороне открытой выемки перед задним уступом возникает локальная область отрыва со скачками уплотнения перед ней (рис. 2*а*), как это имеет место в случае замкнутой схемы течения. В случае замкнутой выемки при увеличении угла атаки область отрыва перед задним уступом открывается с подветренной стороны, при этом изолированная область отрыва за передним уступом выемки сохраняется, рис. 2*б*.



а *б*

Рис. 2. Визуализация обтекания кольцевой выемки (*L/h*=13,7, β=20°) под углом атаки α=9° в области гистерезиса: *а* - открытая; *б* - замкнутая схема течения в выемке.

На рис. 3 верхние кривые отвечают верхней, а нижние - нижней границе области гистерезиса. С увеличением угла атаки область гистерезиса вырождается. Принудительная турбулизация потока перед выемкой приводит к сокращению протяженности области гистерезиса, при этом верхняя граница области гистерезиса практически не меняется.

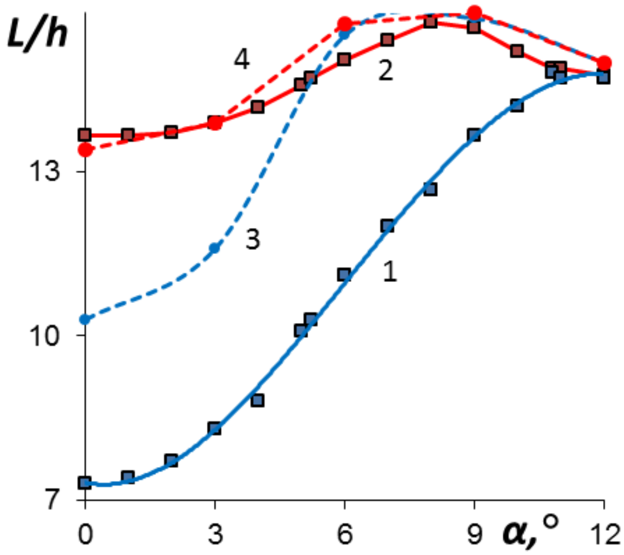
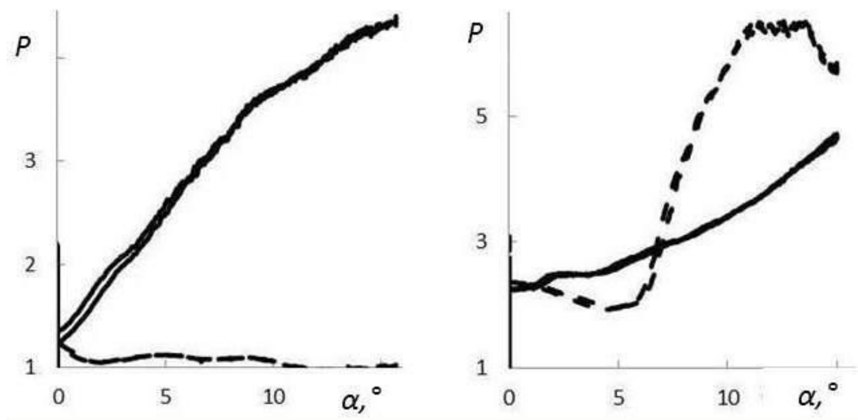


Рис. 3. Изменение границ области гистерезиса выемки в зависимости от угла атаки (β=20°):
1, 2 - нижняя и верхняя граница (без турбулизатора);
3, 4 - нижняя и верхняя граница (с турбулизатором).

Графики изменения давления перед задним уступом выемки ($D_C=D$, β=10°) при L/h=13 и 18 представлены на рис. 4. Здесь и далее на графиках сплошные кривые соответствуют наветренной, штриховые кривые – подветренной стороне модели. Величина давления отнесена к статическому давлению в набегающем потоке. Графики получены при непрерывном изменении угла атаки сначала в сторону увеличения от 0 до 15°, затем в сторону уменьшения до исходного положения модели.

При L/h =13 и α=0 была реализована открытая схема обтекания выемки. В этом случае с увеличением угла атаки давление на наветренной стороне заднего уступа выемки монотонно возрастает, а на подветренной стороне убывает, приближаясь к статическому давлению в набегающем потоке, рис. 4*а*. При L/h=18 и α=0 реализована замкнутая схема обтекания. В этом случае на наветренной стороне заднего уступа выемки с увеличением угла атаки давление также монотонно возрастает, рис. 4*б*. На подветренной стороне с увеличением угла атаки до α=4° давление перед задним уступом выемки уменьшается, затем возрастает и при α>7° превышает по величине давление на наветренной стороне уступа. Максимум давления на подветренной стороне достигается при углах атаки 11-13,5°, в этом диапазоне давление практически не меняется, затем при дальнейшем увеличении угла атаки давление перед задним уступом начинает уменьшаться. Как при *L/h* =13, так и при *L/h*=18 прямые (увеличение угла атаки) и обратные (уменьшение угла атаки) ветви графиков давления практически совпадают, что свидетельствует об отсутствии гистерезиса по углу атаки.

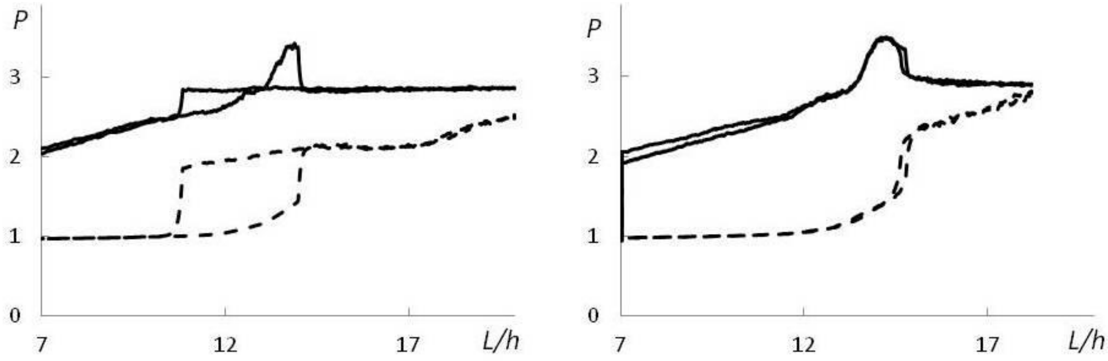


а *б*

Рис. 4. Изменение относительного давления на заднем уступе кольцевой выемки (β=10°) в зависимости от угла атаки: *а* - *L/h*=13; *б* - 18.

На рис. 5а построена зависимость от *L/h* давления на заднем уступе выемки под углом атаки α=6°. Непрерывное увеличение протяженности первоначально открытой выемки до *L/h*=14 приводит к ее замыканию, сопровождающемуся скачкообразным падением давления на наветренной стороне заднего уступа, которое затем остается постоянным при *L/h*>14. В противоположность этому, после замыкания выемки давление на подветренной стороне скачком увеличивается и продолжает возрастать при дальнейшем увеличении *L/h*. На последующей стадии, при уменьшении протяженности выемки, давление на наветренной стороне заднего уступа остается постоянным до момента открытия выемки при L/h=11 с сопутствующим скачкообразным падением давления до величины, соответствующей открытой схеме обтекания.

Турбулизация пограничного слоя на входе в выемку приводит к вырождению области гистерезиса, рис. 5*б*. При этом давление на заднем уступе изменяется по такому же закону, что в первоначально открытой выемке без турбулизатора при увеличение L/h. Вместе с тем, после замыкания выемки давление на подветренной стороне заднего уступа при наличии турбулизатора возрастает с увеличением L/h более интенсивно, так что при L/h=18 давление на подветренной стороне практически совпадает с давлением на наветренной стороне.



а *б*

Рис. 5. Изменение относительного давления на заднем уступе кольцевой выемки (β=10°) при α=6° в зависимости от протяженности L/h: *а* – без турбулизатора; *б* – с турбулизатором.

При достаточно больших L/h график изменения давления на поверхности кольцевого выступа (рис. 6) подобен графику изменения давления на заднем уступе замкнутой выемки (рис. 4*б*). На наветренной стороне давление на поверхности выступа увеличивается при увеличении α. На подветренной стороне давление на поверхности выступа сначала уменьшается по мере увеличения α, затем при α >5° происходит повышение давления. При α=10° давление на подветренной стороне выступа сравнивается с давлением на его наветренной стороне и продолжает увеличиваться при дальнейшем увеличении α. При α=11° давление на подветренной стороне выступа превышает давление на наветренной стороне в 1,5 раза. В диапазоне 13,5<α<14,5° наблюдается скачок давления с последующим уменьшением до исходной величины. Прямые (увеличение α) и обратные (уменьшение α) ветви графиков изменения давления практически совпадают, что свидетельствует об отсутствии гистерезиса по углу атаки.

Для рассмотренных моделей в исследованных диапазонах изменения L/h и α установлены границы изменения варьируемых параметров, при которых наблюдается повышение давления на подветренной стороне поверхности выступа (заднего уступа выемки). Так, в случае кольцевой выемки повышение давления наблюдалось при L/h>15 и α >4°, а в случае кольцевого выступа - при L/h>13 и α >5°.

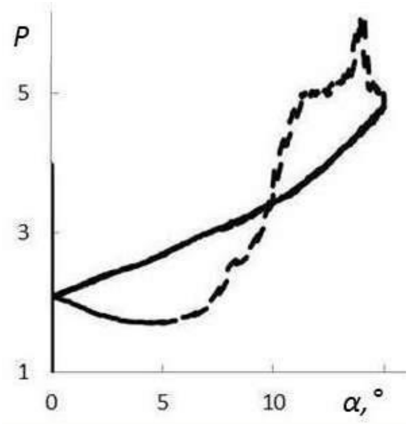


Рис. 6. Изменение относительного давления на кольцевом выступе (L/h=20, β=20°) в зависимости от угла атаки.

Такой характер поведения давления на подветренной стороне поверхности выступа (заднего уступа выемки) можно объяснить развитием на подветренной стороне тела поперечного отрыва и формированием в подветренной области пары продольных вихрей, вследствие чего происходит поперечный отток газа от плоскости симметрии в двух противоположных направлениях с сопутствующим уменьшением толщины пограничного слоя. В результате сверхзвуковой поток на подветренной стороне тела проникает в область отрыва, взаимодействуя с выступом (задним уступом выемки) в условиях, характерных для невязкого взаимодействия. Данное объяснение подтверждается результатами численного моделирования трехмерного сверхзвукового обтекания цилиндрического тела с кольцевым прямоугольным выступом (рис. 1*б*) под углом атаки.

Численное моделирование. Численное исследование было проведено для вышеуказанной модели в конфигурации "кольцевой выступ" (см. рис. 1*б*) в случае L=160 мм (L/h=20). Начало координат находится на оси симметрии в сечении основания конического наконечника, ось X расположена на оси симметрии тела, ось Y – в плоскости изменения угла атаки, ось Z – перпендикулярно плоскости XY. В качестве входной и выходной границ расчетной области были выбраны пересекающиеся осесимметричные конические поверхности. Численные решения системы уравнений Навье-Стокса находились с помощью вычислительной программы ANSYS CFX-15 второго порядка точности на неструктурированных гибридных сетках с числом ячеек $18{,}1\times10^6$. Использовалась модель турбулентности k-ω SST и глобальные шаги по времени для нахождения установившегося течения.

На рис. 7 представлены расчетные поля числа Маха в плоскостях, перпендикулярных оси симметрии тела, на различных расстояниях X от начала координат. На расстоянии X=100 мм у боковой поверхности тела происходит поперечный отрыв потока. Ниже по потоку формируется пара рециркуляционных областей с дозвуковыми скоростями, рис. 7*б,в*. На подветренной стороне между отрывными областями наблюдается узкая область сверхзвукового потока, торможение которого непосредственно перед выступом приводит к локальному повышению давления. Ниже по потоку за выступом наблюдается вторичный поперечный отрыв, рис. 7*г*.

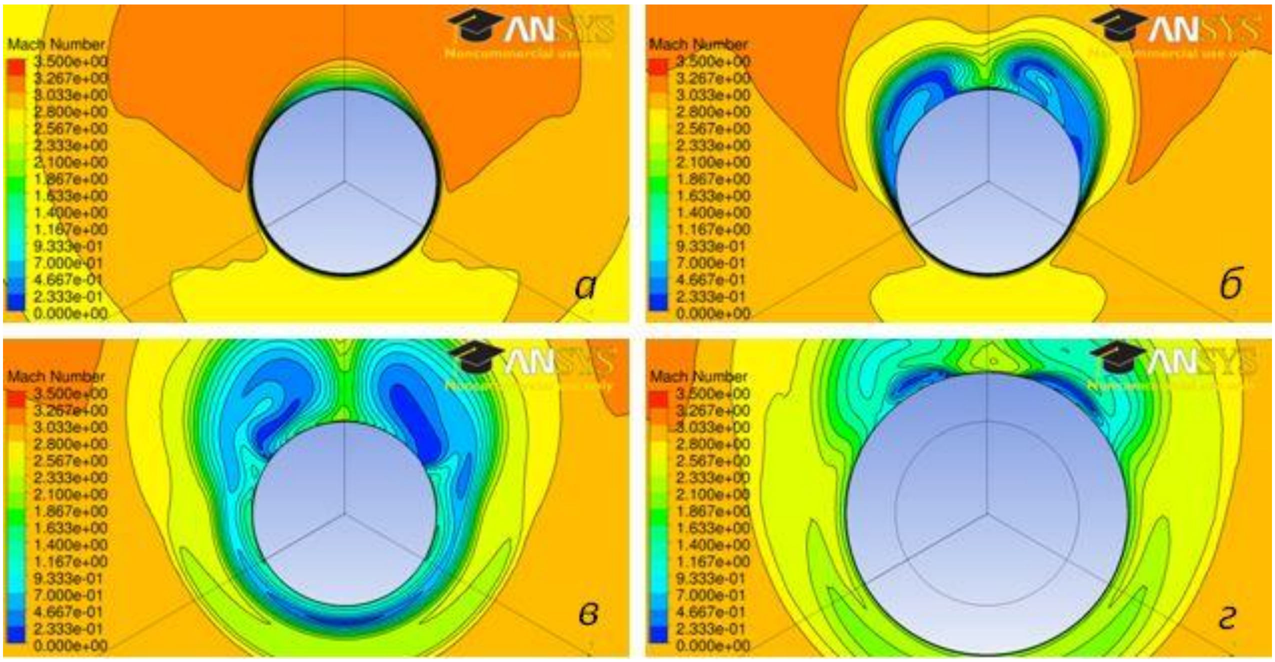


Рис. 7. Поля чисел Маха при обтекании тела с кольцевым выступом (*L* =160 мм) под углом атаки 10° в плоскости, перпендикулярной оси тела, на расстоянии X от основания конического наконечника: *а* –*X*=70; *б* – *X*=120; *в* – *X*=150; *г* – *X*=165 мм

Изменение давления на наветренной и подветренной стороне выступа качественно согласуется с данными экспериментов при *L*/*h*=20. На наветренной стороне давление монотонно возрастает при увеличении угла атаки. На подветренной стороне давление уменьшается до α=6°, при дальнейшем увеличении угла атаки давление начинает возрастать и при α>8° превышает давление на наветренной стороне.

Заключение. Экспериментального и численно исследовано сверхзвуковое обтекание заостренного на конус осесимметричного цилиндрического тела с кольцевыми выемкой и выступом на поверхности при числе Маха 3. Для рассмотренной модели установлены диапазоны изменения варьируемых параметров, при которых наблюдается повышение давления на подветренной стороне поверхности заднего уступа выемки и выступа. При достаточно больших *L* и *α* давление на подветренной стороне может превышать давление на наветренной стороне.

Работа выполнена с использованием ресурсов вычислительного центра СПбГУ (http://cc.spbu.ru) при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-99623).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжен П. Отрывные течения. В 3-х томах. Москва, Мир, 1972-1973.

2. Любимов А. Н., Тюмнев Н. М., Хут Г. И. Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. Москва,. Наука, 1995, 397 с.

3. Хлебников В. С. Аэротермодинамика элементов летательных аппаратов при стационарном и нестационарном сверхзвуковом обтекании. Москва, Физматлит, 2014, 168 с.

4. Ковалев П. И., Михалев А. Н., Подласкин А. Б., Томсон С. Г., Ширяев В. А., Исаев С. А. Исследование аэродинамических свойств и поля обтекания гиперскоростных элементов на баллистической трассе. Журнал технической физики, 1999. Т. 69, вып. 12, с. 6-11.

5. Коронцвит Ю. Ф., Фейнман М. И. Параметры трехмерного отрыва при сверхзвуковых скоростях набегающего потока перед препятствиями на поверхности конуса. Ученые записки ЦАГИ, 1985. Т. XVI, №1, с. 27-37.

6. Гувернюк С. В., Симоненко М. М. О сверхзвуковом обтекании кольцевого выступа на осесимметричном теле под углом атаки. В сборнике "Материалы XXVIII научно-технической конференции по аэродинамике". Издательство ЦАГИ. 2017, с. 107–108.

7. Кузьмин А. Г, Симоненко М. М. Особенности сверхзвукового обтекания осесимметричного тела с выступом под углами атаки. Экспериментальные и теоретические исследования в современной науке: сб. ст. по матер. I междунар. науч.-практ. конф. № 1(1). Новосибирск, СибАК. 2017, с. 84–89.

8. Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Симоненко М.М., Швец А.И. Экспериментальное исследование трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричного тела с кольцевой каверной. Известия РАН. Механика Жидкости и Газа. 2014. № 4, с. 136–142.

9. Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Симоненко М. М. Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания осесимметричной кольцевой каверны. Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 3, с. 670-679.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В ВАКУУМЕ

Г.М. Сисоев, А.Н. Осипцов
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
А.А. Коротеев
Московский Авиационный Институт, Москва

Рассматривается линейная устойчивость течения пленки жидкости в вакууме. При отсутствии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [1,2], связанной с наличием окружающего газа, основным механизмом волнообразования становится охлаждение пленки тепловым излучением с ее поверхности. Это приводит к формированию неравномерного распределения температуры поперек пленки, и, в случае зависимости вязкости жидкости от температуры, к неустойчивости вследствие вязкой стратификации [3]. Вычисления собственных значений задачи Орра-Зоммерфельда показали, что длина волны неустойчивых возмущений близка к толщине пленки, а их скорость немного превышает ее среднюю скорость.

Для жидкости, чей коэффициент поверхностного натяжения увеличивается с уменьшением температуры, также найден диннноволновый механизм неустойчивости. Эта неустойчивость связана с формированием погранслойных профилей продольной скорости жидкости вследствие охлаждения свободных поверхностей пленки при удалении от начального сечения течения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-0100057).

ЛИТЕРАТУРА.

1. H.B. Squire. Investigation of the instability of a moving liquid film. British Journal of Applied Physics, 1953, 4(6), 167-169.
2. W.A. Sirignano, C. Mehring. Review of theory of distortion and disintegration of liquid streams, Progress in Energy and Combustion Science, 2000, 26(4-6), 609-655.
3. R. Govindarajan, K.C. Sahu. Instabilities in viscosity-stratified flow. Annual Review of Fluid Mechanics, 2014, 46, 331-353.

СОЧЕТАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КАНАЛОВ С РЕЗКИМ ПОВОРОТОМ ПОТОКА

Е.М. Смирнов, Д.О. Панов, В.В. Рис
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

В ряде инженерных устройств исходно предписанная стесненность пространства, в котором располагаются каналы с рабочей или охлаждающей средой, обусловливает неизбежное наличие участков с резким поворотом потока. Наглядный пример - это трехмерные каналы с резким поворотом на 180º (U-образные каналы), входящие в системы внутреннего конвективного охлаждения лопаток газовых турбин и статоров мощных электрических турбогенераторов. Резкий поворот потока приводит обычно к возникновению обширного отрыва и, как следствие, к большим потерям давления. Это порождает большой интерес к оптимизации геометрических форм стенки/стенок канала на участке поворота. Сегодня задачи оптимизации проточных частей все чаще решаются с применением методов и средств вычислительной гидродинамики. Результат оптимизации зависит, однако, от подхода к моделированию турбулентности. В случае течений с обширным отрывом RANS-модели часто оказываются недостаточно точными, а использование вихреразрешающих подходов с аккуратным разрешением пристенных слоев сопряжено с чрезмерными вычислительными затратами. Практический выход из этой ситуации сегодня может состоять в сочетании разных подходов, а именно: в использовании RANS-подхода для массовых расчетов поля течения и значений целевой функции, по которой проводится оптимизация, и в последующей уточняющей оценке полученного выигрыша посредством сопоставления значений целевой функции и полей течения, рассчитанных с применением вихреразрешающего подхода только лишь для исходной и найденной условно-оптимальной формы.

В первой части доклада представляются результаты сопоставительных и валидационных расчетов, проведенных с применением конечно-объемного кода второго порядка точности для U-образного канала квадратного сечения, включая случай вращения канала относительно поперечной оси (отношение радиуса поворота внутренней стенки к стороне сечения составляло 0,15). Течение в данном канале, детально изученное экспериментально в [1], характеризуется наличием интенсивных вторичных течений и развитой зоной отрыва в области за поворотом. Сопоставительные расчеты выполнены на основе трех подходов. В первом случае решались нестационарные уравнения Рейнольдса (URANS-подход) при их замыкании по SST-модели турбулентности Ментера с введенной поправкой на кривизну линий тока и вращение. Во втором случае использовался LES-подход с подсеточной моделью турбулентности, известной как WALE [2], без использования пристенных функций. В третьем случае применялся метод IDDES [3], который является гибридным RANS-LES методом и позволяет проводить вихреразрешающие расчеты течений при высоких числах Рейнольдса на ресурсах с существенно меньшей, по сравнению с «чистым» LES, вычислительной производительностью. Расчеты были выполнены и сопоставлены при разных значениях $Re=O(10^4…10^5)$. Установлено, в частности, что LES и IDDES решения, полученные при $Re=(2…4)\bullet10^4$, находятся в очень хорошем согласии [4], в отличие от случая URANS-подхода. Расчеты валидационной направленности для условий экспериментов [1] ($Re = 10^5$) проводились только по методам URANS и IDDES. Рассчитанные по методу IDDES поля течения находятся в хорошем соответствии с опытными данными, и в превосходном согласии по потерям давления [4]. Метод URANS дает на 20% меньшие значения потерь, при этом расчетное поле течения во второй половине поворота и за ним сильно расходится с результатами измерений.

Вторая часть доклада посвящена методике и результатам оптимизации формы внутренней стенки внешне того же U-образного канала (исходно внутренняя стенка до и после поворота была прямолинейной). Использовалась многопараметрическая процедура оптимизации с динамическим построением поверхности целевой функции (потерь давления на участке поворота) на основе URANS-решений. Оптимальные формы внутренней стенки были найдены как для неподвижного, так и вращающегося (в ту или иную сторону) канала; во всех случаях проточная часть приобретала конфузорно-диффузорный характер, а зоны отрывного течения кардинально уменьшались. Уточняющая оценка получаемого выигрыша проводилась посредством сопоставления решений по вихреразрешающим подходам для исходной и оптимальной геометрии. Во всех случаях было достигнуто уменьшение величины потерь давления в два и более раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.C. Cheah, H. Iacovides, D.C. Jackson, H. Ji, B.E. Launder. LDA investigation of the flow development through rotating U-ducts. Journal of Turbomachinery, 1996,118 (3), 590–596.
2. F. Nicoud, F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. Flow, Turbulence and Combustion, 1999, 62 (3), 183–200.
3. M.L. Shur, P.R. Spalart, M.Kh. Strelets, A.K. Travin. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities. Int. Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, 29 (6), 1638-1649.
4. Д.О. Панов, В.В. Рис, Е.М. Смирнов. Вихреразрешающее численное моделирование трехмерного турбулентного течения в канале с резким поворотом на 180 градусов. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2017, т. 10, № 4, с. 21–33.

РАЗВИТИЕ КОНЦЕНТРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Е.Б. Соболева
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Знания о распространении примеси в почвах, грунтах и горных породах актуальны для различных областей жизнедеятельности человека, таких как альтернативная энергетика, экология, эффективное природопользование. Ряд проблем обусловлен наличием областей повышенной концентрации примеси, образующихся как из-за природных условий, так и в результате техногенных факторов. Важной задачей является определение режимов и параметров конвективных течений воды с растворенной примесью, которые развиваются в земных недрах под действием температурных и концентрационных градиентов. Настоящее исследование ориентировано, главным образом, на функционирование геотермальных резервуаров, являющихся возобновляемым источником энергии и использующих глубинное тепло Земли [1]. Оценки показывают, что при содержании в резервуаре концентрированных растворов конвекция, вызванная присутствием примеси может существенно превосходить тепловую конвекцию, обусловленную геотермическим градиентом [2]. В таких условиях влиянием температурных неоднородностей можно пренебречь и рассматривать конвективное движение под действием градиентов концентрации примеси.

Выполняется численное моделирование концентрационно-конвективных течений двухкомпонентной жидкости в прямоугольной пористой области, в которой первоначально содержится чистая вода в неподвижном состоянии. На верхней границе области задается постоянная концентрация примеси, что соответствует различным геологическим условиям, в частности, близкому расположению кристаллической соли, которая растворяется и попадает в резервуар. Примесь от верхней границы диффундирует в объем, образуя концентрационный пограничный слой повышенной плотности. Под действием силы тяжести пограничный слой теряет устойчивость, что ведет к развитию концентрационной конвекции. Задача заключается в исследовании всех этапов конвективного движения и массопереноса от формирования концентрационного пограничного слоя и потери устойчивости до развития стохастического движения.

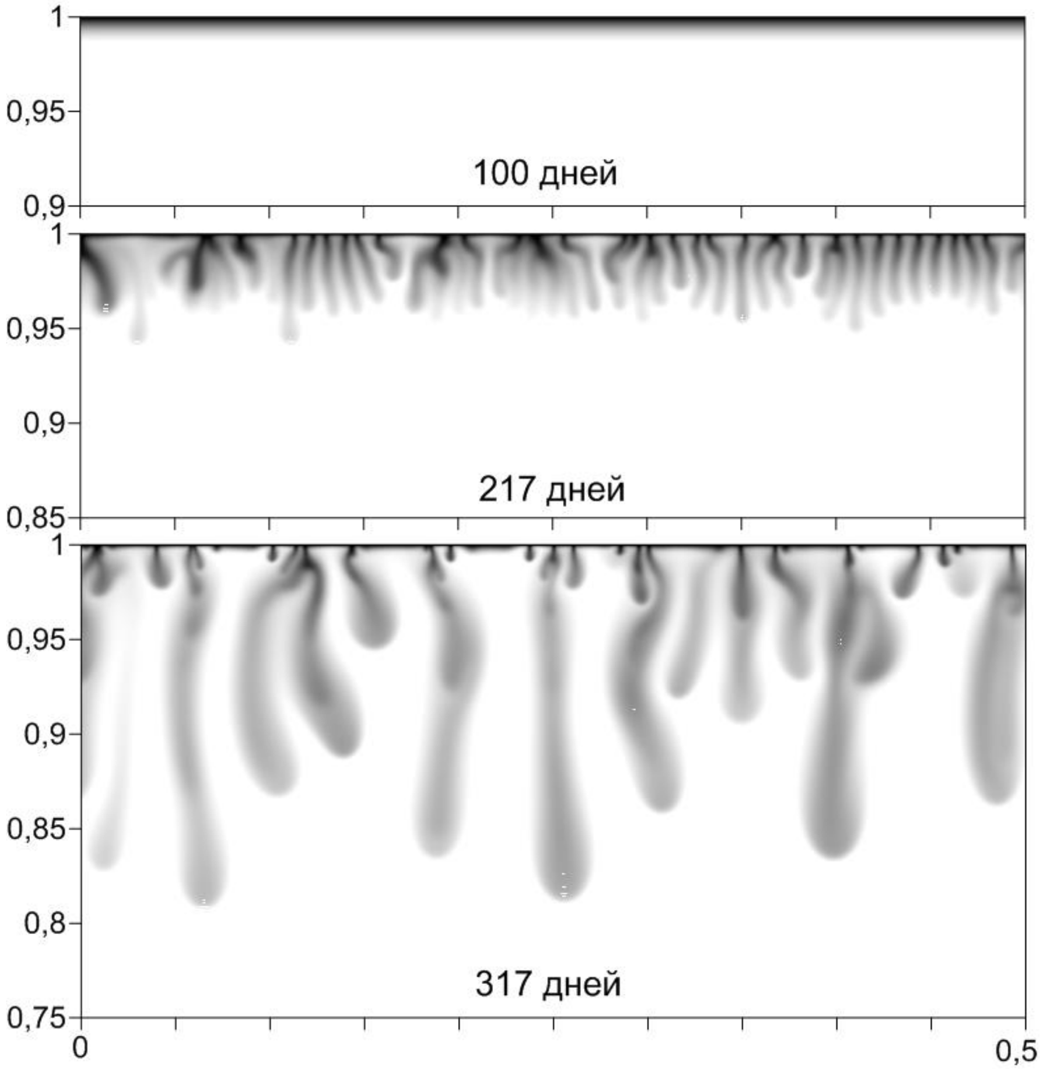
Получено численное решение задачи в рамках математической модели, которая включает уравнения неразрывности, Дарси и переноса примеси с учетом диффузии в пористой среде с переменными свойствами [3]. Модель замыкается линейным уравнением состояния, связывающим плотность раствора с количеством растворенной примеси. Система уравнений имеет вид:

$$\nabla(\vec{W})=0, \quad \vec{W}=-\frac{k}{\mu_s}(\nabla P-\rho g\vec{e}), \quad \phi\frac{\partial\rho_c}{\partial t}+\vec{W}\nabla\rho_c=\nabla(\phi D\nabla\rho_c), \quad \rho=\rho_0+\alpha\rho_c$$

Здесь $\vec{W}$, P, ρ, ρ_c, k, ϕ, D, μ_s, g, $\vec{e}=(0,-1)$ - скорость фильтрации, давление, плотности раствора и растворенной примеси, проницаемость, пористость, коэффициент диффузии, динамическая вязкость, ускорение силы тяжести и единичный вектор; ρ_0 и α - константы. На основе математической модели разработан конечно-разностный численный код, который использовался ранее [2, 4-6].

В качестве примера рассматривается горизонтальный слой высотой $H = 25$ м (отношение длины к высоте $A = 2$) с параметрами $k = 10^{-13}$ м^2, $\phi = 0.2$, $D = 1.5 \cdot 10^{-9}$ м^2/с, $\mu_s = 0.121 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_0 = 842.5$ кг/м^3, $\alpha = 0.815$. Концентрация примеси $c = \rho_c / \rho$ на верхней границе имеет значение $c^* = 0.05$. Расчеты выполнены на подробных пространственных сетках 4000x1400, вертикальный размер ячейки уменьшается около верхней границы в 50 раз по сравнению с размером около нижней границы. Шаг интегрирования по времени τ выбирается таким, что соответствующее ему диффузионное расстояние $\sqrt{D\tau}$ превосходит размер пространственной ячейки − это гарантирует описание диффузионного процесса, ответственного за попадание соли в расчетную область, с высокой точностью. Число Куранта меньше единицы. Оценивается сеточное число Пекле, которое на протяжении всего счета не превосходит 1-2 единиц.

На рисунке дано поле концентрации примеси на начальных этапах; приведена часть расчетной области, размеры нормированы на H. Показано, что исходно образуется узкий пограничный слой, после потери устойчивости формируется структура мелких солевых «пальцев», которая затем становится нерегулярной. Некоторые «пальцы» укрупняются и распространяются вниз, другие (совсем мелкие) рождаются около верхней границы.



Выполнено численное моделирование концентрационной конвекции в неоднородных резервуарах, имеющих горизонтальный низкопроницаемый внутренний слой. На начальных этапах, пока примесь не дойдет до внутреннего слоя, картина течения такая же, как показано на рисунке. При достижении инородного слоя, течение замедляется, содержание соли над слоем увеличивается, что со временем приводит к качественным изменениям в структуре конвекции. Исследовано влияние инородного слоя на глубину проникновения и суммарное количество примеси, скорость конвективного движения.

Автор благодарит Г.Г. Цыпкина за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-11-10195).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В. Алексеенко, В.Ю. Бородулин, Н.А. Гнутась, М.И. Низовцев, Н.Н. Смирнова. Проблемы и перспективы развития петротермальной энергии (обзор). – Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 1. С. 1-16.
2. E. Soboleva. Numerical Simulation of Haline Convection in Geothermal Reservoirs. – Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 891. P. 012105.
3. J. Bear and A. Cheng. Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport (Springer, 2010). 834 p.
4. Е.Б. Соболева. Метод численного исследования динамики соленой воды в почве. – Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 2. С. 50-64.
5. Е.Б. Соболева, Г.Г. Цыпкин. Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворенную примесь. – Известия Академии Наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 88-99.
6. Е.Б. Соболева, Г.Г. Цыпкин. Режимы концентрационной конвекции при испарении грунтовых вод, содержащих растворенную примесь. – Известия Академии Наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 70-78.

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ДИНАМИКУ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И.Н. Солдатов, Н.В. Клюева
Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород

Для описания потенциальных волновых движений свободной поверхности жидкости с частицами твердого вещества, которые, плавая на поверхности, обладают некоторой массой и пренебрежимо мало взаимодействуют друг с другом в процессе колебаний, в работе Petters A.S. была предложена модель жидкости с инерционной поверхностью, иначе называемой флотирующей жидкостью. Позднее потенциальные движения идеальной флотирующей жидкости рассматривались в работах Mandal B.N., Габова С.А. и др. Широкий класс вихревых движений был обойден вниманием исследователей. Между тем, движение жидкости нельзя считать потенциальным в таких технических устройствах как центрифуги и сепараторы, где нередко приходится сталкиваться с всплыванием легких частиц на поверхность жидкости с образованием тонкого слоя.

В работе мы даём вывод неклассических граничных условий на свободной поверхности вязкой флотирующей жидкости в поле гироскопической и центробежной сил. Динамическое граничное условие на свободной поверхности в равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат в пренебрежении малой силой тяжести имеет вид

$$\frac{\rho_s}{\sqrt{q}}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla(\Omega\times\mathbf{r})^2-2\mathbf{v}\times\Omega\right)\left|\nabla F\right|=(p_a-p)\nabla F+2\mu(\nabla F\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mu\nabla F\times\operatorname{curl}\mathbf{v}$$

где ρ_s – погонная плотность инерционной поверхности, q – детерминант метрического тензора, $F=0$ – уравнение свободной поверхности. Найдено решение линеаризованной задачи о распространении гироскопических волн $\mathbf{v}=\hat{\mathbf{v}}_m(r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ($\hat{\mathbf{v}}_m=(u_m,v_m,w_m)^T$) во флотирующей жидкости, находящейся в полости равномерно вращающегося цилиндра:

$$w_m=\sum_{j=1}^{3}w_{m,j},\quad w_{m,j}=C_{2j-1}H_m^{(1)}(\lambda_j r)+C_{2j}H_m^{(2)}(\lambda_j r),\quad u_m=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{im(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2 r}w_{m,j}+\frac{ik}{\lambda_j}w_{m-1,j}\right)$$

$$v_m=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{m(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2 r}w_{m,j}-\frac{\kappa_j}{\lambda_j}w_{m-1,j}\right),\quad p_m=-\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{2}{\kappa_j}w_{m,j}\right),$$

где $H_m^{(1)}(\lambda_j r)$, $H_m^{(2)}(\lambda_j r)$ – функции Ганкеля, $\lambda_j^2=\kappa_j^2-k^2$, k – аксиальное волновое число, κ_j – корень уравнения $-i\kappa\omega-2i\Omega k+\nu\kappa^3=0$. Проанализировано влияние плотности инерционной поверхности, вязкости и толщины центрифугированного слоя жидкости, а также отношения частоты волны к угловой скорости вращения цилиндра на действительную и мнимую часть волнового числа распространяющихся мод. На рис. 2 показаны зависимости действительных частей безразмерных аксиальных волновых чисел $k_r=\operatorname{Re}(k)$ нескольких низших мод от отношения частот $\tau=\omega/\Omega$ при $m=1$, $\delta=b/a=0.7$, $E=\nu/(\Omega a^2)=10^{-6}$ и двух различных $\mathrm{P}=\rho_s/(\rho a)$: $\mathrm{P}=0$ (сплошные кривые) и $\mathrm{P}=0.5$ (пунктирные кривые).

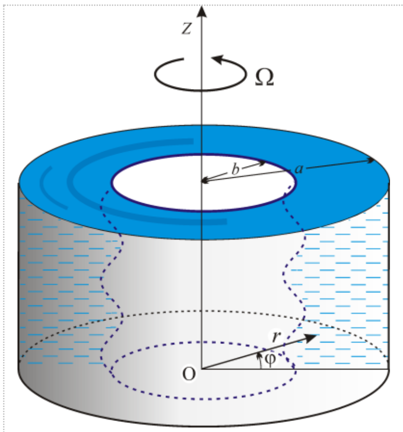


Рис. 1

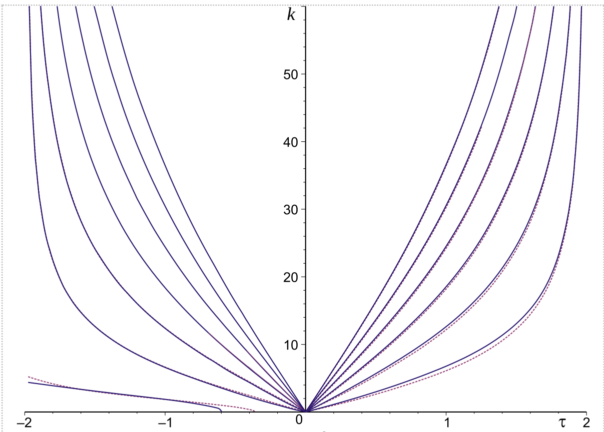


Рис. 2

Используя уравнение

$$\tau_i\left\{\left[\int_V \mathbf{v}_{mn}\mathbf{v}_{mn}^* dV+2\pi\delta\left((\delta+3\mathrm{P})h_{mn}h_{mn}^*+\mathrm{P}\mathbf{v}_{mn}\mathbf{v}_{mn}^*\right)_{r=\delta}\right]+2\pi\mathrm{P}\frac{\delta^2}{|\tau|^2}\left[u_{mn}\frac{\partial u_{mn}^*}{\partial r}\right]_{r=\delta}\right\}=-2E\int_V \mathbf{e}\mathbf{e}^* dV$$

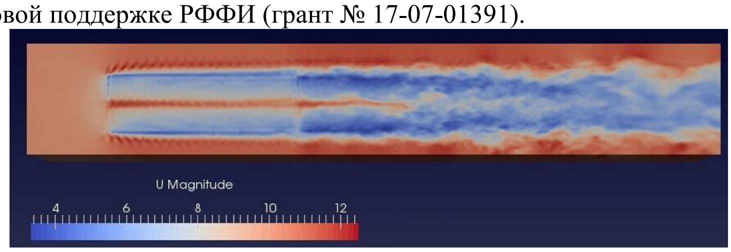
(где $\tau_i=\operatorname{Im}\tau$, $\mathbf{e}$ – тензор скоростей деформаций) определены границы изменения τ_i и условия возникновения неустойчивости.

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ МОДЕЛЬНЫХ ВЕТРОУСТАНОВОК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

С.В. Стрижак, М.Д. Калугин, К.Б. Кошелев, А.С. Крючкова,
Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва

Методы, используемые для расчётов работы ветроустановок в атмосферном пограничном слое, находятся на стадии активного развития. На базе решателей для несжимаемой жидкости в составе открытого пакета OpenFOAM коллективом авторов из NREL была разработана тематическая библиотека SOWFA, в составе которой имеется несколько решателей, в том числе для расчёта атмосферного пограничного слоя методом крупных вихрей. Модель Actuator Line Model, присутствующая в библиотеке SOFWA, может быть использована для расчёта течения вблизи вращающихся лопастных турбин на фиксированной расчётной сетке, что значительно экономит вычислительные ресурсы и упрощает процесс счёта. Инженерная методика, используемая в модели, основана на представлении вращающихся лопастей в виде набора профилей с табулированными коэффициентами аэродинамических сил, в то время как их действие на поток моделируется посредством добавления в уравнение движения аэродинамической силы, спроецированной на расчётную сетку. В настоящей работе с использованием решателя pisoFoamTurbine, проводилось численное моделирование задач на базе экспериментов, организованных группами в Университете NTNU (Норвегия) [1]. В трубных экспериментах исследовались режимы работы двух модельных ветроустановок для случая Re=10^5. Ветроустановки располагались на разных расстояниях друг от друга: x/D =2.77; 5.18; 9.00. Характерная скорость на оси ротора на высоте Hhub = 0.827 м задавалась Uref = 11.5 м/с. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых при помощи полуэмпирической модели турбулентности, оказывается неэффективным при моделировании течений с нестационарными крупномасштабными вихревыми структурами. Для моделирования течения целесообразно использовать модель крупных вихрей. Крупномасштабные вихревые структуры рассчитывались при помощи интегрирования фильтрованных уравнений Навье-Стокса [3]. Для получения фильтрованных уравнений использовался коробочный фильтр. Мелкие вихри, размер которых не превышал шага расчетной сетки, моделировались с помощью динамической модели Смагоринского. Для дискретизации уравнений использовался метод конечных объемов. Полученные уравнения для связи скорости и давления решались итерационным алгоритмом PIMPLE. На входе расчетной области на средние значения накладывались случайные возмущения. На стенке задавалось условия непротекания. На выходе задавались условия продолжения потока. Расчетная схема имела второй порядок точности по времени и пространству. При расчёте использовались неструктурированные расчётные сетки в 4-8 миллионов ячеек. На рисунке показано поле скорости для двух ветроустановок в момент времени t=2 секунды.

Известно, что метод главных компонент (Proper Orthogonal Decomposition – POD) успешно используется для анализа динамики турбулентных вихревых следов для тел простой формы. Метод оценки динамики вихревых структур, их энергии основан на использовании метода главных компонент, предложенного в работе [3], в форме разработанной библиотеки в Apache Spark в ИСП РАН [4]. Фреймворк Apache Spark предназначен для распределенной отказоустойчивой обработки данных в оперативной памяти вычислительного кластера. Полученные поля скорости были обработаны в программе ScalaPOD с целью оценки вклада главных мод в общую кинетическую энергию турбулентных структур в следе ветроустановок в различные моменты времени. Была сформирована корреляционная матрица для значения скорости с размерностью 21x21, 51x51. В результате расчета получено, что первые 4 главные моды содержат 90% общей энергии. Расчеты проводились на вычислительном кластере ИСП РАН на 24-96 ядрах. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-07-01391).



ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bartl, L. Sætran. Blind test comparison of the performance and wake flow between two in-line wind turbines exposed to different turbulent inflow conditions. Wind Energ. Sci., 2017. v. 2, 55–76.
2. К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: Физматлит. 2008. – 368 с.
3. L. Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I: coherent structures. // Q. Appl. Math. 1987. XLV, 561–571.
4. M.D. Kalugin, S.V. Strijhak. Implementation of POD and DMD methods in apache spark framework for simulation of unsteady turbulent flow in the model combustor. ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2016, 857-864.

ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

С.В. Субботин[1], А.С. Кропачева[1], В.В. Дьякова[2]
[1]Лаборатория вибрационной гидромеханики,
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь
[2]Кафедра прикладной физики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Экспериментально исследуется динамика жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре, скорость вращения которого в лабораторной системе отсчета изменяется по закону $\Omega(t) = \Omega_{rot}\left[1+\varepsilon\sin\left(\Omega_{lib}t\right)\right]$, где Ω_{rot} – средняя скорость вращения, Ω_{lib} – частота либраций, ε – амплитуда либраций. Либрации приводят к возникновению осциллирующего движения в пограничных слоях, в результате чего местах соединения боковой и торцевых стенок цилиндра рождаются инерционные волны (рис. 1*а*). Последние распространяются в объем жидкости вдоль характеристических поверхностей, расположенных под углом $\theta = \arcsin\left(\Omega_{lib} / 2\Omega_{rot}\right)$ к оси вращения [1]. Обнаружено, что вблизи мест отражения инерционной волны от боковой стенки полости в пограничном слое Стокса возникает осредненное течение в виде осесимметричных тороидальных вихрей (рис. 1*б*). Скорость осредненного движения в вихрях пропорциональна квадрату амплитуды либраций. При определенных частотах инерционные волны испытывают пространственный резонанс, в результате чего в некоторые фазы либраций возбуждаются инерционные моды, которые являются собственными модами колебаний жидкости для данной геометрии полости [1]. Резонансное возбуждение инерционных мод приводит не только к интенсификации осредненного движения, но и модифицирует структуру течения в пограничном слое.

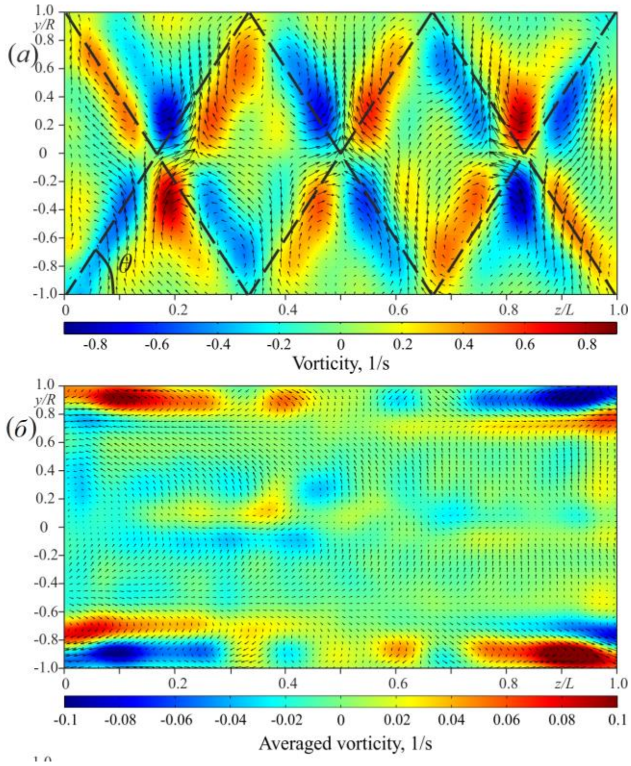


Рис. 1. Структура мгновенного (в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$) и осредненного течения в осевом сечении полости при $\Omega_{lib} / \Omega_{rot} = 1.68$ и $\varepsilon = 0.1$. Цветом показана завихренность. Штриховыми линиями на фрагменте *а* показаны траектории распространения инерционных волн, рассчитанные по формуле $\theta = \arcsin\left(\Omega_{lib} / 2\Omega_{rot}\right)$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1994.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат. 1975. С. 304.

ОСРЕДНЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСТИ С ЭЛАСТИЧНОЙ СТЕНКОЙ, ЗАЖАТОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

С.В. Субботин[1], В.Г. Козлов[1], Р.Р. Сабиров[2]
[1]Лаборатория вибрационной гидромеханики,
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь
[2]Кафедра прикладной физики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Экспериментально исследуются осредненные потоки, возбуждаемые в сфероидальной полости с эластичной упругой стенкой, зажатой между двумя колеблющимися границами. Периодические деформации приводят к возникновению осциллирующего движения в вязком пограничном слое Стокса. Последнее является источником осредненного течения, структура которого зависит от типа колебаний.

При поперечных колебаниях границ полость периодически сжимается и восстанавливается форму, при этом осредненное течение имеет вид двух пар тороидальных вихрей, ориентированных поперек оси вибраций (рис. 1) [1]. При тангенциальных колебаниях полость совершает вращательные вибрации, а ее форма в лабораторной системе отсчета остается неизменной. В этом случае генерируются осредненные потоки в виде вихрей, вытянутых вдоль оси поворота полости. Для обоих типов вибрационного воздействия характерна трансформация осредненного течения с безразмерной частотой $\omega = \Omega R^2 / \nu$ (здесь Ω – частота вибраций, R – радиус полости в недеформированном состоянии, ν – кинематическая вязкость жидкости), которая определяет отношение толщины пограничного слоя к размеру полости. С уменьшением безразмерной частоты толщина пограничного слоя возрастает, при этом в пределе низких ω направление движения жидкости в вихрях противоположно тому, что наблюдается в пределе высоких частот [1].

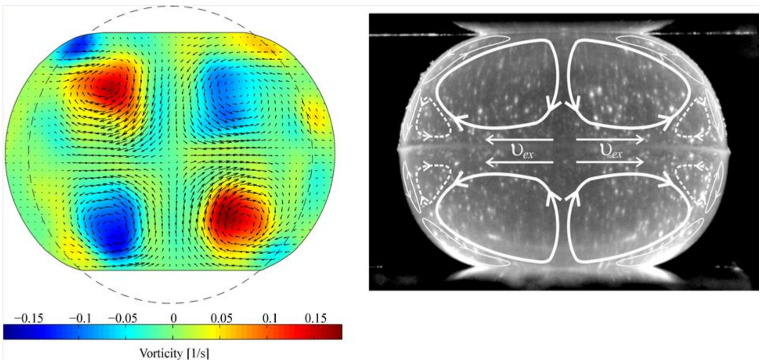


Рис. 1. Структура осредненного течения при поперечных колебаниях границ в осевом сечении (слева – поле завихренности, справа – схема потоков). Штриховой линией на левом фрагменте показана граница недеформированной полости; на правом фрагменте сплошные толстые линии показывают вторичные потоки жидкости в объеме полости, штриховые линии – приэкваториальные вихри, тонкие линии – потоки в пограничных слоях

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 16-31-60099 мол_а_дк).

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В.Г., Сабиров Р.Р., Субботин С.В. Осредненные течения в осциллирующей сфероидальной полости с эластичной стенкой // Изв. РАН. МЖГ. 2018. №2 (*в печати*).

TURBULENCE ANISOTROPIZATION UNDER THE ACTION OF EXTERNAL BODY FORCES

Semion Sukoriansky
Department of Mechanical Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel

Most of practically important turbulent flows are exposed to external factors, such as density stratification, solid body rotation, external magnetic fields, etc. Some of these extra strains support wave solutions in linearized problems (e.g. gravity waves in stably stratified flows, inertial waves in rotating flows, Alfven waves in MHD turbulence) that lead to complex wave-turbulence interactions in fully non-linear formulation. In addition, the extra strains may render the large-scale flows strongly anisotropic. We present an investigation of turbulence anisotropization by external body forces (gravity, rotation and magnetic friction) using the quasi-normal scale elimination (QNSE) theory of turbulence. This theory uses a recursive procedure of averaging over infinitesimal bands of modes starting from the smallest turbulent scales. The approximation of quasi-normality is used in a weak sense for the modes been eliminated and is complemented by the “renormalization” of eddy viscosity. Thus, the QNSE theory belongs in the class of the quasi-normal eddy-damped theories of turbulence. In the limit of weak extra strain, the theory becomes completely analytical and yields simple expressions for anisotropic eddy viscosities and eddy diffusivities. In addition, the theory provides expressions for various one-dimensional spectra that quantify turbulence anisotropization.

Tendency to two-dimensionalization is clearly seen in flows with solid body rotation and magnetic friction. Four different eddy viscosities emerge in rotating case, reflecting both directional and componental anisotropization. Three of them decrease relative to the eddy viscosity in non-rotating flows while one increases; the horizontal (normal to the vector of rotation) viscosity decreases at the fastest rate. This behavior is indicative of the increasing redirection of the energy flux to larger scales, the phenomenon that can be associated with the energy backscatter or inverse energy cascade. Anizotropization of stably stratified flow is different; in this flow the effective viscosity in the vertical direction decreases but remains finite while the vertical diffusivity diminishes on large scales where stratification is strong. On the other hand, both horizontal viscosity and diffusivity increase on large scales compared with the case of neutral stratification.

On largest, planetary scales, quasi-two-dimensional turbulence undergoes additional anizotropization due to latitudinal variation of Coriolis parameter and ensuing generation of Rossby waves. In certain range of parameters, typical to giant planets, the flow attains some quasi-one-dimensional features with strong zonal east-west jets dominating the largest scales. The concentration of energy in the zonal components and breaking of isotropy are caused by the strongly anisotropic spectral energy transfer and the stabilization of zonal mean flow by meridional gradient of the planetary vorticity. This regime is a subset of geostrophic turbulence and has been coined *zonostrophic* turbulence.

ЛИТЕРАТУРА.

1. S. Sukoriansky and B. Galperin. QNSE theory of turbulence anisotropization and onset of the inverse energy cascade by solid body rotation. *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 805, pp. 384-421.
2. S. Sukoriansky and E. Zemach. Theoretical study of anisotropic MHD turbulence with low magnetic Reynolds number. *Physica Scripta*, 2016, vol. 91(3), pp. 034001(14 pp).
3. S. Sukoriansky and B. Galperin. An analytical theory of the buoyancy-Kolmogorov subrange transition in turbulent flows with stable stratification. *Phil. Transactions of the Royal Society* A, 2013, vol. 371, pp. 1-35.
4. S. Sukoriansky, B. Galperin, and I. Staroselsky, A quasinormal scale elimination model of turbulent flows with stable stratification. *Physics of Fluids*, 2005, vol. 17 (8), 085107-1-28.
5. B. Galperin, S. Sukoriansky, and N. Dikovskaya. Zonostrophic turbulence. *Physica Scripta*, 2008, T132 014034 (7pp).
6. B. Galperin, R.M.B.Young, S. Sukoriansky, N. Dikovskaya, P. L. Read, A. J. Lancaster, and D. Armstrong. Cassini observations reveal a regime of zonostrophic macroturbulence on Jupiter. *Icarus*, February 2014, vol. 229, pp. 295–320.

УТОЧНЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Л.В. Талалушкина, П.В. Лобовиков
Нижегородский Государственный Технический Университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород

Внутренние гравитационные волны – вид волновых движений в слоистой (стратифицированной) жидкости (газе). Внутренние волны могут существовать не только при скачкообразном изменении плотности, но и при ее непрерывном распределении по глубине. Простейший устойчивый случай – внутренние волны на границе раздела двух однородных несжимаемых жидкостей, из которых нижняя имеет большую плотность. Внутренние волны являются типичным явлением в атмосфере и гидросфере Земли, оказывают существенное влияние на процессы, происходящие внутри жидкости, практически никак не проявляясь на поверхности воды. Динамика таких волн крайне сложна из-за их нелинейности. Особенный интерес представляют локализованные возмущения, описываемые в слабонелинейном пределе фундаментальными неизлучающими решениями упрощенных моделей (эволюционных уравнений). Для моделирования внутренних волн обычно используются уравнения семейства Кортвега–де Вриза (КдВ), имеющие переменные коэффициенты в случае неоднородной среды[1].

В настоящей работе получено эволюционное уравнение Кортевега – де Вриза второго порядка с переменными коэффициентами(пКдВ2) для двухслойной жидкости с неровным дном, аналогично уравнению для поверхностных волн в однородной жидкости представленному в работе [2]. Для решения поставленной в работе задачи была выбрана система компьютерной алгебры Maple, в которой был написан программный комплекс, содержащий в себе процедуру асимптотического вывода уравнения пКдВ2.

Рассматриваем систему уравнений невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости с неровным дном, которая сводится в нашем случае к системе двух уравнений Лапласа с граничными условиями. Имеем дело с двумя слоями разной плотности и толщины. Вся жидкость в каждом слое однородна. На границах раздела слоев запишем кинематические и динамические граничные условия, выполняющие роль условий «сшивки» для рассматриваемых функций, также записывается условие не протекания на дне, с учетом переменного дна. В предположении малости амплитуд распространяющихся возмущений граничные условия могут быть сведены к более простому виду путем разложения всех неизвестных функций, в них входящих, в ряды Тейлора по малым отклонениям от невозмущенного уровня. Используя слабонелинейную теорию, все члены результирующих рядов будем раскладывать в степенные ряды по малому параметру. Для того чтобы получить уравнение пКдВ2 необходимо выписывать уравнения при каждом порядке малости для ε. Таким образом, получаем уравнение пКдВ2 для внутренних волн на границе раздела в двухслойной жидкости с переменным дном.

Коэффициенты для этого уравнения, с учетом переменной глубиныдна до второго порядка малости включительно были получены впервые. Проведено численное моделирование в рамках полученного уравнения и уравнений Гарднера и пКдВ, проведено сравнение поведения их решений в случае неровного дна, имеющего углубление и/или возвышение, при различной амплитуде изменения формы дна. Для исследования внутренних волн выбраны масштабы близкие к реальным условиям в океане. Моделирование производилось с помощью адаптированной неявной псевдо-спектральной схемы [3] с контролем сохранения интегралов массы и энергии. Подобный код неоднократно использовался для моделирования волновых процессов различной природы [4,5].

Показано, что, 1) в отличие от поверхностных волн, для слабонелинейных внутренних волн в горизонтально-неоднородной двухслойной жидкости в рамках пКдВ возможно явление конкуренции нелинейности и неоднородности, 2) изменения амплитуды солитона в рамках полученного уравнения происходит по классическому сценарию.

Литература

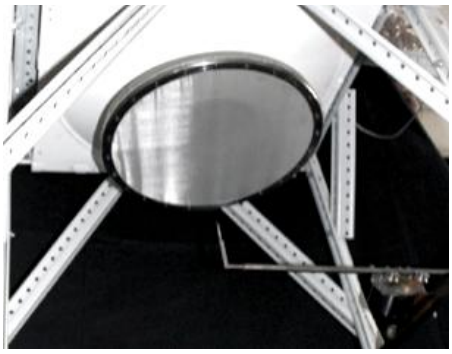
1. X. Zhou, R. Grimshaw The effect of variable currents on internal solitary waves // Dynamics of Atmospheres and Oceans, 1989, V.14, p.17–39.
2. A. Karczewska, P.Rozmej, E. InfeldShallow-water soliton dynamics beyond the Korteweg–de Vries equation //Phys. Rev. E. 90, p.012907-1-8, 2014
3. B. Fornberg A practical guide to pseudospectral methods // Cambridge University Press 1998, 231 p.
4. E. Pelinovsky, O. Polukhina, A. Slunyaev&T. TalipovaInternal solitary waves // Chapter 4 in the book “Solitary Waves in Fluids”. WIT Press. Southampton, Boston. 2007. P. 85 – 110.
5. O. E. Kurkina, A. A. Kurkin A, T. Soomere, E. N. Pelinovsky, E.A. Rouvinskaya Higher-order (2+4) Korteweg–de Vries–like equation for interfacial waves in a symmetric three-layer fluid // Phys. Fluids. 2011. Vol. 23. No. 11. P. 116602-1 – 13.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АРХИМЕДОВОЙ СИЛЫ

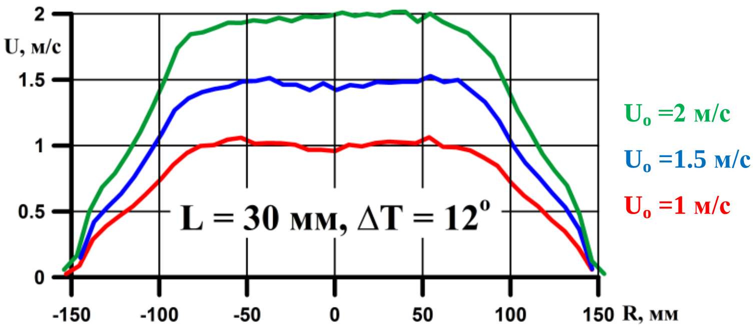
С.Х. Тепловодский, Ю.С. Зайко, А.И. Решмин, В.В. Трифонов, А.Д. Чичерина
Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Проведено экспериментальное исследование воздушной затопленной струи с низкой интенсивностью турбулентности диаметром 300 мм при воздействии на нее выталкивающей силы, возникающей при нагреве поступающего на вход формирующего устройства воздуха. Изучено влияние архимедовых сил на течение начального участка струи, где скорость в ядре потока сохраняется.

Для формирования струи использована специально разработанная технология. Основным элементом формирующего струю устройства являлся сверхкороткий диффузор - круглый короткий диффузор с проницаемой перегородкой в выходном сечении [1].

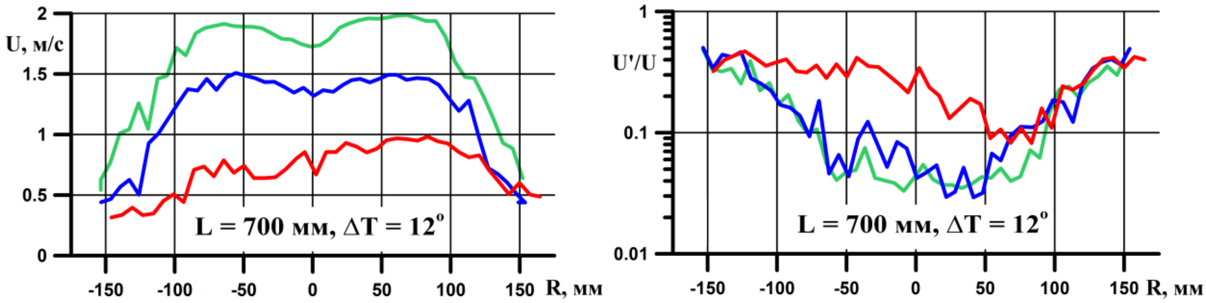


Устройство формирования ламинарной затопленной струи диаметром 300 мм.



Распределение осевой скорости по диаметру струи при $\Delta T = 12°$.
Минимальная скорость для преодоления сил Архимеда
при L=0.8 м, ΔT=15° - U = 0.9 м/с

Проведены подробные измерения характеристик формируемой затопленной струи на различных удалениях от еѐ начала, на различных скоростных режимах, при различных подогревах воздуха, как для свободной струи, так и в условиях натекания струи на горизонтальную плоскую поверхность. Измерения скорости потока делались с помощью проволочного термоанемометра. Использовались датчики скорости с термокомпенсацией 55P81. Датчики располагались на устройстве перемещения, допускающем позиционирование с точностью 0.2 мм.



Параметры течения перед натеканием нагретой струи на горизонтальную поверхность

Результаты измерений параметров потока нагретого до 30° С воздуха на расстоянии меньше 1 диаметра струи от поверхности показывают, что если начальная скорость на оси струи больше 1.0 м/с, то профиль скорости в струе почти не отличается от начального. При начальной скорости потока в центре струи 1 м/с всплывание струи становится заметным, симметрия потока нарушается.

Показана возможность применения разработанной технологии в газодинамической установке для организации локальной абактериальной зоны в мобильной установке медицинского назначения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Reshmin A., Sudarikova A., Teplovodskii S., Zayko J. Technology for formation of axisymmetric jet with long laminar region. Journal of Physics: Conference Series, 2017, 894, 012080.

ПОДАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ КРЫЛЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ БАРЬЕРНЫМ РАЗРЯДОМ

С.Н. Толкачев[1], С.А. Баранов[1], Д.С. Сбоев[1], И.А. Моралев[2], М.В. Устинов[1]
1. Центральный аэрогидродинамический институт; 140180, Жуковский, Россия
2. Институт высоких температур РАН; 125412, Москва, Россия

Ламинаризация несущих поверхностей в настоящее время рассматривается в качестве одной из основных возможностей для снижения аэродинамического сопротивления самолета. На стреловидном крыле доминирующим механизмом перехода является развитие неустойчивости поперечного течения. В условиях низкой степени турбулентности набегающего потока переход определяется стационарными возмущениями.

Методика подавления наиболее неустойчивых мод путем модификации структуры пограничного слоя с помощью менее усиливающейся моды (так называемая «мода-защитник») была предложена и успешно испытана Сариком [1]. Продолжением этой идеи является использование диэлектрического барьерного разряда (ДБР) для возбуждения «моды-защитника».

Исследование влияния ДБР на структуру пограничного слоя проводилось в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-124 ЦАГИ. Трехмерный пограничный слой был организован над верхней плоскостью модели скользящей плоской пластины с криволинейными верхними и боковыми стенками, имитирующими распределение градиента давления, характерное для стреловидного крыла. Модель с углом скольжения 35°, размахом 998 мм, хордой 2100 мм, толщиной 20 мм была изготовлена из органического стекла. Передняя кромка модели эллиптическая с длиной большой полуоси 80 мм. Ось X ортогональна передней кромке и отсчитывается от неё.

Эксперименты проводились при скорости набегающего потока U_{fs} = 30 м/с. Исследование структуры пограничного слоя проводилось с помощью термоанемометрии. ДБР актуатор общей длиной 390 мм размещался параллельно передней кромке в 110 мм от неё. Конструктив был рассчитан для зажигания микроразрядов (подробное описание дано в [2]) с шагом 5 мм в положении $X = 125$ мм для возбуждения «моды-защитника». На актуатор подавалось синусоидальное напряжение амплитудой 2.5 кВ и частотой 65 кГц. Для возбуждения наиболее неустойчивой стационарной моды («целевая») с длиной волны 7.62 мм на переднюю кромку в положение X = 75 мм размещался набор цилиндрических элементов шероховатости 20 мкм × 1 мм.

Анализ термоанемометрических измерений в нескольких положениях по X показал эффективность ДБР для возбуждения «защитника». Одновременное развитие «целевой» моды и «защитника» исследовалось в области X = 280–650 мм. Показано (Рис. 1, слева), что «мода-защитник» амплитудой 3% подавляет развитие «целевой моды» в области X = 580–600 мм. Ниже по течению амплитуда «целевой моды» для режима с ДБР равна естественному режиму без ДБР.

Обнаружено увеличение пульсаций скорости во всех позициях, в которых проводились измерения. Спектральный анализ показал, что увеличение пульсаций происходит из-за возбуждения бегущей моды неустойчивости поперечного течения в диапазоне 100–600 Гц. Включение актуатора приводит к ускорению процесса перехода, что иллюстрируется увеличением высокочастотной области спектра вдали от передней кромки (см. Рис. 1, справа).

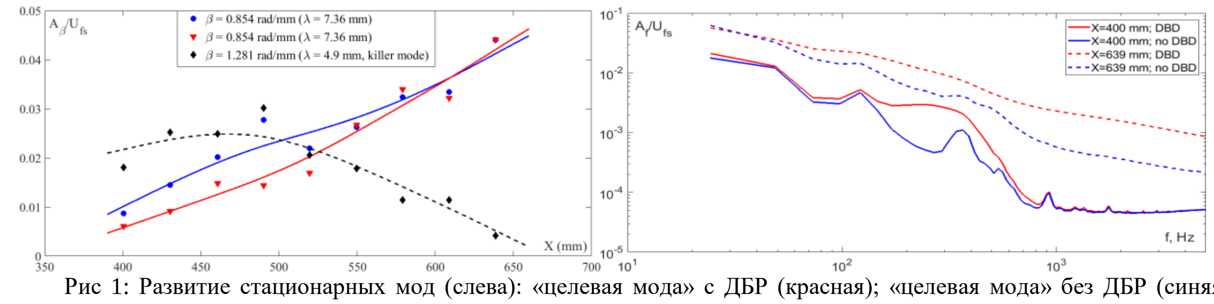


Рис 1: Развитие стационарных мод (слева): «целевая мода» с ДБР (красная); «целевая мода» без ДБР (синяя); «мода-защитник» (черная). Осредненные по размаху амплитудные спектры (справа) для режимов с ДБР (красный) и без (синий) в двух положениях по X: 400 мм (сплошные линии); 639 мм (пунктирные линии).

Эксперименты показали потенциал использования ДБР для управления ламинарно-турбулентным переходом за передней кромкой. Однако ключевой проблемой, которую при этом предстоит решить в будущих исследованиях – возбуждение бегущих возмущений актуатором.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Saric, W., Carrillo, R.B., Reibert, M.S.: Leading-edge roughness as a transition control mechanism. AIAA 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 12-15, 1998, Reno, Nevada, AIAA-98-0781.
2. Moralev I, Bityurin V, Firsov A, Sherbakova V., Selivonin I., Ustinov M. Localized micro-discharges group DBD vortex generators - disturbances source for active transition control. In: Proc. 7th EUCASS - European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS). Milan, Italy, 2017, p.266.

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ЛАМИНАРНО - ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕХОДЕ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Р.Я. Тугазаков, И.И. Липатов
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

Интерес многих исследователей к процессу перехода объясняется как прикладной стороной вопроса, в частности, определением аэродинамических характеристик обтекаемых тел, так и желанием дополнить теоретические познания о природе данного сложного явления. В монографии [1] подробно изложены теоретические подходы на решение данной проблемы с точки зрения неустойчивости пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа. Современные экспериментальные результаты по относительной восприимчивости трёхмерного сверхзвукового пограничного слоя к контролируемым возмущениям приведены в [2]. В статьях авторов [3, 4] описаны механизмы образования когерентных структур в задачах, когда на плоскую пластину, обтекаемую сверхзвуковым потоком газа, набегает сильная или акустическая волна. Задачи решались прямым численным моделированием течения газа в рамках уравнений Навье - Стокса без привлечения моделей турбулентности. В [4] при анализе обтекания гармонической волной пластины короткой длины найдены максимальные коэффициенты усиления амплитуды набегающей волны в зависимости от соотношений длины волны с толщиной пограничного слоя и шириной обтекаемой пластины. В настоящей работе продолжены исследования, проведённые в [4], для чисел Рейнольдса больше критического значения, чтобы получить численно картину перехода ламинарного режима в турбулентный.

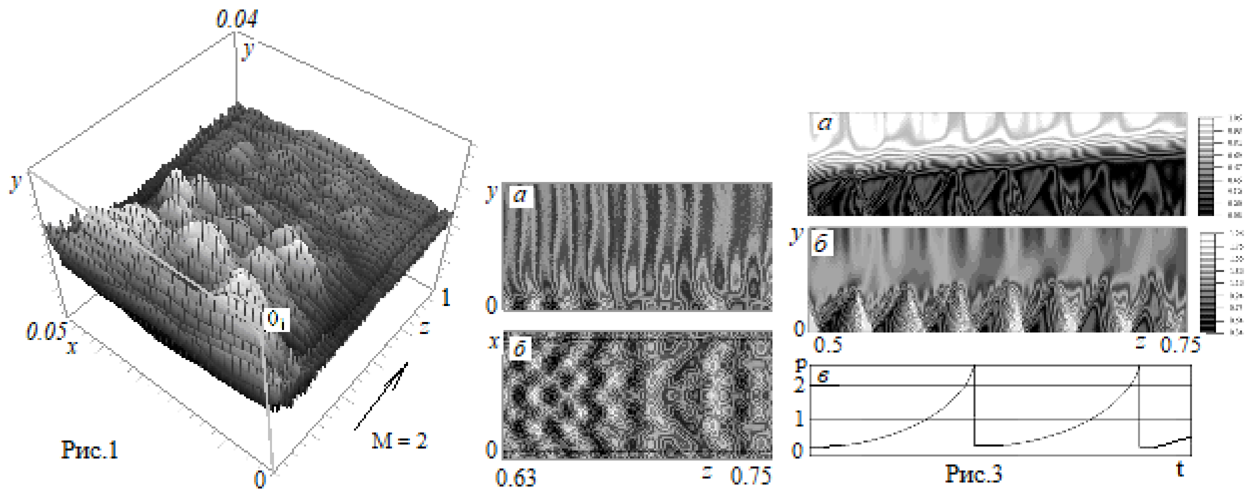


Рис.1

Рис.3

На рис. 1 представлена мгновенная картина пульсаций давления при пространственном обтекании пластины с M =2 и наложенными внешними возмущениями. Картина распада волны Толлмина-Шлихтинга (M=2) и последующая турбулизация потока с всплытием вихрей с поверхности пластины дана на рис.2 в поперечном центральном сечении и на поверхности пластины. На рис. 3 приведены картины наклонных интенсивных акустических волн, образованных из-за нелинейного усиления внешних возмущений (поля плотности и давления, M =4). Здесь же приведено поведение по времени величины давления на поверхности пластины в области максимального усиления внешних возмущений. В работе показано, что области максимального усиления возрастают температура и энтропия. Волны, образующиеся внутри пограничного слоя, порождают на его границе вихри, диаметры которых в 4-5 раз меньше длины набегающей волны. При $z \geq 0.8$ интенсивность волн падает, происходит интенсивное распространение пульсаций в поперечном направлении, что соответствует турбулизации потока.

Работа поддержана грантом Министерством образования и науки РФ (договор №14.G39.31.0001 от 13.02.2017 г.) и грантом РФФИ (№ 17-01-00129 а).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980, с. 143.
2. Kosinov A.D., Kolosov G.L., Panina A.V., et al. Experiments on relative receptivity of three-dimensional supersonic boundary layer to controlled disturbances and its development//Progress in Flight Physics, 2013, vol. 5, p. 69-80.
3. Липатов И.И.,Тугазаков Р.Я. Механизм образования пульсаций давления при падении ударной волны на пограничный слой// Ученые записки ЦАГИ, 2013, Т.XLIV, № 1, с. 62-74.
4. Lipatov I. I. and Tugazakov R. Ya. Generation of Coherent Structures in Supersonic Flow past a Finite-Span Flat Plate// Fluid Dynamics, 2015, vol. 50, No. 6, p. 793– 799.

УПРАВЛЕНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕХОДОМ НА СТРЕЛОВИДНОМ КРЫЛЕ С ПОМОЩЬЮ МИКРОРЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ

М.В. Устинов

Центральный Аэрогидродинамический институт им. Н.Е.Жуковского

E-mail:Ustinov@tsagi.ru

Теоретически исследована возможность ламинаризации обтекания стреловидного крыла с помощью микрорельефа поверхности - риблетов и отдельных пластинок (крылышек), установленных под углом к внешним линиям тока. Показано, что такой рельеф снижает скорость поперечного течения в пограничном слое за счет изменения направления пристеночных линий тока. На основе простейших моделей основанных на анализе осредненного по периоду рельефа течения в пограничном слое получены оценки увеличения числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода с помощью микрорельефа. Найдены рациональные параметры рельефа поверхности для исследования в эксперименте эффективности предложенного способа управления ламинарно-турбулентным переходом.

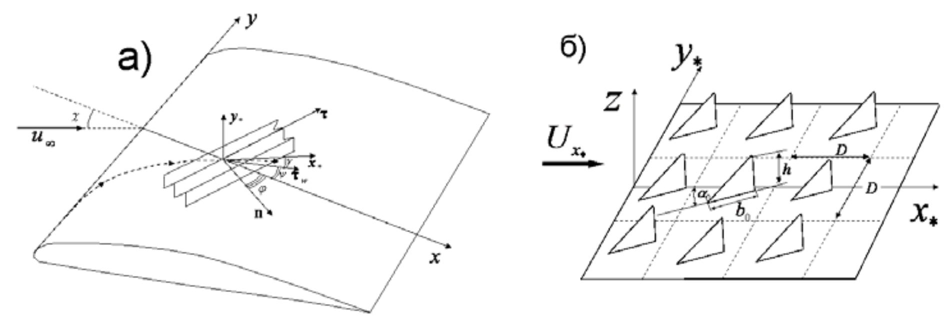
Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, неустойчивость поперечного течения, стреловидное крыло, микрорельеф, риблеты.

Основной причиной препятствующей ламинаризации обтекания крыла с углом стреловидности превышающем 25-30^0 является неустойчивость поперечного течения в пограничном слое. Этот вид неустойчивости вызван несовпадением направлений скорости и градиента давления, что приводит к появлению в пограничном слое составляющей скорости нормальной к внешней линии тока. Профиль скорости такого поперечного течения имеет точку перегиба, что вызывает быстрый рост возмущений в виде вихрей ориентированных вдоль внешних линий тока. Неустойчивость поперечного течения вызвана разгоном потока на передней части крыла и, поэтому, не может быть устранена с помощью ламинарных профилей. Единственным эффективным способом предотвращения ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле является отсос пограничного слоя, реализация которого в области сильного градиента давления вблизи передней кромки весьма затруднительна.

По этой причине поиск альтернативных способов предотвращения ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле остается актуальной задачей. В последнее время для этого предложено использовать микроскопические неровности вблизи передней кромки [1] и диэлектрический барьерный разряд [2,3]. Механизм действия последнего связан с устранением поперечного течения с помощью пристеночной струи индуцированной ионным ветром. Однако аналогичный эффект – поворот вектора скорости вблизи стенки – можно получить за счет микрорельефа поверхности в виде ребер наклоненных по отношению к внешней линии тока. В отличие от отсоса пограничного слоя и барьерного разряда микрорельеф является пассивным способом управления не требующим затрат энергии и изменений в конструкции самолета. Применение риблетов – треугольных или прямоугольных ребер – для управления ламинарно-турбулентным переходом вызванным волнами Толлмина-Шлихтинга исследовалось в экспериментах [4-6]. В них показано, что, как продольные, так и поперечные риблеты, покрывающие всю поверхность пластины, смещают точку перехода вверх по потоку. Однако продольные риблеты размещенные в месте появления λ - образных вихревых структур на нелинейной стадии перехода сдвигает его вниз по потоку. Уменьшение интенсивности искусственно созданного вихря в пограничном слое на стреловидном крыле покрытом продольными риблетами и замедление развития его вторичной неустойчивости наблюдалось в [7]. Механизм воздействия риблетов на пограничный слой объяснен в [8], где показано, что при продольном и поперечном их обтекании граничные условия прилипания реализуются на эффективных плоских поверхностях, расположенных на разной высоте. При этом эффективная поверхность для поперечной составляющей скорости расположена выше, чем для продольной. В пограничном слое на пластине на линейной стадии перехода основное течение и возмущения имеют только одну продольную составляющую скорости. В этом случае, наличие продольных или поперечных риблетов лишь переносит эффективную плоскую поверхность для основного течения и возмущений на одинаковую высоту, и риблеты не должны влиять на развитие возмущений. На заключительной стадии перехода основное течение имеет продольную, а возмущения, в основном, поперечную составляющие скорости на стенке. При наличии продольных риблетов, на эффективной поверхности для основного течения для возмущений реализуются граничные условия с отрицательной скоростью скольжения. Это приводит к демпфированию λ-образных вихрей, как и любых других возмущений имеющих поперечную компоненту скорости на стенке, что и наблюдалось в эксперименте.

В пограничном слое на скользящем крыле, как основное течение, так и возмущения, имеют две компоненты скорости. Поэтому риблеты могут влиять на ламинарно-турбулентный переход за счет изменения граничных условий, как для основного течения, так и для возмущений. Целью данной работы является нахождение оптимальной ориентации риблетов и оценка их влияния на скорость нарастания стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения, которые вызывают переход к турбулентности на стреловидном крыле при низком уровне турбулентности потока. Эти исследования проводятся в рамках концепции эффективной высоты риблетов [8]. Также анализируется влияние на ламинарно-турбулентный переход другой более эффективной формы микрорельефа в виде крылышек, установленных под углом атаки к внешним линиям тока.

1. Влияние риблетов на поперечное течение и его устойчивость. Рассмотрим течение в пограничном слое на верхней поверхности стреловидного крыла бесконечного размаха с углом стреловидности χ обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости. Введем криволинейную систему координат x, y, z, связанную с его поверхностью. Начало координат поместим в произвольной точке на линии присоединения потока, оси абцисс и ординат направим по нормали к передней кромки и вдоль нее. За аппликату z примем расстояние от произвольной точки до поверхности крыла. Схема течения и система координат показаны на фиг.1, а. Для описания течения также будем использовать локальную систему координат x_*, y_*, z связанную с направлением скорости внешнего потока над пограничным слоем. Обозначим L' длину верхней поверхности крыла вдоль оси x. Введем безразмерные переменные, используя в качестве масштабов толщину пограничного слоя $\delta' = \left(\nu L'/u_\infty\right)^{1/2}$ и скорость набегающего потока u_∞. Часть поверхности крыла покрыта риблетами гребни которых наклонены на угол φ по отношению к передней кромки. Высота h_g и период риблетов предполагаются малыми по сравнению с толщиной пограничного слоя.



Фиг.1. Схема течения и обозначения, применяемые при анализе воздействия риблетов (а) и крылышек (б) на пограничный слой

В [8] показано, что при обтекании риблетов сдвиговым потоком в параллельном ребрам направлении их воздействие на течение при $z >> h_g$ можно описать условиями прилипания на эффективной плоской поверхности расположенной на высоте $z_{\parallel}$. Если скорость направлена перпендикулярно гребням это условие имеет место на большей высоте $z_{\perp}$. Разность $h_e = z_{\perp} - z_{\parallel}$ называется высотой проникновения риблетов. При анализе течения в трехмерном пограничном слое будем задавать граничные условия для параллельной ребрам U_τ и нормальной к ним U_n составляющих скорости на контрольной поверхности расположенной на высоте h над плоскостью, на которой имеют место условия прилипания при продольном обтекании риблетов. Исходя из линейной аппроксимации зависимостей составляющих скорости от вертикальной координаты они имеют вид

$$U_n(0) = (h - h_e)\frac{\partial U_n}{\partial z}(0)\,; \quad U_\tau(0) = h\frac{\partial U_\tau}{\partial z}(0) \qquad (1.1)$$

Здесь за начало отчета вертикальной координаты принимается расстояние до контрольной поверхности $z = h$. Вертикальная составляющая скорости W на контрольной поверхности полагается равной нулю. Параметр h, определяющий высоту контрольной поверхности, остается неопределенным. Решения для разных его значений описывают одно и то же физическое явление и должны отличаться на величину порядка h^2 (при перенормировке вертикальной координаты). Это различие мало, по сравнению с исследуемым здесь влиянием риблетов, которое линейно зависит от их высоты проникновения. Приведенные ниже результаты, если это специально не оговаривается, соответствуют $h = h_e/2$.

Справедливость граничных условий (1.1) обоснована в [8] для малого числа Рейнольдса $R_h = h_g{}^2 (u_\infty L'/\nu)^{1/2}$, характеризующего обтекание риблетов. Ниже будет показано, что существенное влияние риблетов на неустойчивость поперечного течения имеет место при $R_h \sim 10$. В этом случае их обтекание описывается полными уравнениями Навье-Стокса, а не уравнениями Стокса, использовавшимися в [8] для вывода (1.1). Можно показать, что общий вид граничных условий скольжения на поверхности с микрорельефом связан не с уравнениями, описывающими течение, а с линейной зависимостью профиля скорости в пристеночной области от вертикальной координаты в диапазоне $h_g << z << 1$. Это условие выполняется для малой по сравнению с толщиной пограничного слоя высоте микрорельефа. Однако, при конечных R_h высота проникновения риблетов не постоянна, а зависит от угла наклона пристеночной скорости к их гребням. Несмотря на это, в дальнейшем будем использовать (1.1) с постоянной высотой проникновения h_e.

Решение для составляющих скорости U,V,W вдоль осей *x,y,z* в пограничном слое будем искать в виде

$$\{U,V,W\} = \left\{U_0, V_0, \frac{1}{R}W_0\right\}(X,z) + \varepsilon\{u,v,w,p\}(z)e^{i(\alpha x+\beta y)} \tag{1.2}$$

Здесь первое слагаемое соответствует однородному по *y* основному течению в пограничном слое, а второе – малым периодическим стационарным возмущениям. Основное течение изменяется на длине порядка хорды профиля L', поэтому оно зависит от медленной продольной координаты $X = x'/L' = x/R$, где $R = u_\infty \delta'/\nu$ - число Рейнольдса, вычисленное по характерной толщине пограничного слоя.

Подстановка (1.2) в уравнения Навье-Стокса и отбрасывание членов порядка ε приводит к уравнениям пограничного слоя для основного течения

$$\begin{gathered} U_0\frac{\partial U_0}{\partial X} + W_0\frac{\partial U_0}{\partial z} = U_e\frac{dU_e}{dX} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} \\ U_0\frac{\partial V_0}{\partial X} + W_0\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \\ \frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &U_0(X,0) = (h_e - h)\frac{\partial U_n}{\partial z}(X,0)\cos\varphi + h\frac{\partial U_\tau}{\partial z}(X,0)\sin\varphi \\ &V_0(X,0) = (h_e - h)\frac{\partial U_n}{\partial z}(X,0)\sin\varphi - h\frac{\partial U_\tau}{\partial z}(X,0)\cos\varphi; \quad W(X,0) = 0 \\ &U_0(X,\infty) = U_e(X); \quad V_0(X,\infty) = \sin\chi \end{aligned}$$

Граничные условия на стенке получаются из (1.1). В них U_τ и U_n параллельная к гребням и нормальная к ним составляющие скорости основного течения. Для простоты в дальнейшем предполагается, что скорость на внешней границе пограничного слоя зависит от продольной координаты по степенному закону $U_e = X^m$ с показателем степени $m = 0.3$. Такая простая зависимость достаточно хорошо моделирует распределение скорости, как на передней части поверхности крыла самолета, так и в экспериментах [1,11]. Далее предполагается, что поверхность до расстояния X_1 от передней кромки гладкая, а далее покрыта микрорельефом. На гладкой стенке пограничный слой описывается автомодельным решением Фолкнера-Скэна-Кука

$$U_0 = X^m \cos\chi\, f'(\zeta)\,; \quad V_0 = \sin\chi\, g'(\zeta); \quad \zeta = \sqrt{\frac{m}{\beta_H}\cos\chi}\, zX^{\frac{m-1}{2}}\,; \quad \beta_H = \frac{2m}{m+1}$$

в котором функции f и g, определяющие профили продольной и трансверсальной составляющих скорости находятся из решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''' + ff'' + \beta_H(1 - f'^2) = 0\,; \quad g''' + fg'' = 0$$
$$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0\,; \quad f'(\infty) = g'(\infty) = 1$$

Это решение для гладкой поверхности использовалось в качестве начальных условий для расчета пограничного слоя на поверхности с микрорельефом.

Возмущения пограничного слоя описываются линеаризованными уравнениями Навье-Стокса. В плоскопараллельном приближении, обычно применяемом для анализа гидродинамической устойчивости, они сводятся к системе уравнений для амплитуд возмущений вертикальных составляющих скорости w и завихренности η

$$(\alpha U_0 + \beta V_0 - \omega)(w'' - \gamma^2 w) - (\alpha U''_0 + \beta V''_0)w = \frac{1}{iR}(w^{IV} - 2\gamma^2 w'' + \gamma^4 w) \qquad (1.5)$$

$$(\alpha U_0 + \beta V_0 - \omega)\eta + (\alpha V'_0 - \beta U'_0)w = \frac{1}{iR}(\eta'' - \gamma^2 \eta) \qquad (1.6)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2\,; \quad \eta = i\alpha v - i\beta u$$

На поверхности покрытой риблетами для возмущений скорости выполняются условия скольжения аналогичные (1.1). Используя уравнение неразрывности и определение вертикальной завихрености их можно представить в виде

$$w(0) = 0\,; \quad w'(0) = cw''(0) + b\eta'(0)\,; \quad \eta(0) = bw''(0) + a\eta'(0)$$

$$\begin{aligned} &a = h - \frac{h_e}{\gamma^2}(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)^2\,; \quad b = \frac{h_e}{\gamma^2}(\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi)(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi); \\ &c = h - \frac{h_e}{\gamma^2}(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)^2 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Как обычно, предполагается, что возмущения затухают при $z \to \infty$.

При заданном вещественном β система уравнений Орра-Зоммерфельда (1.5) и Сквайра (1.6) с граничными условиями (1.7) определяют задачу на собственные значения для комплексного продольного волнового числа α. Его мнимая часть, взятая с обратным знаком, определяет скорость нарастания возмущений вдоль оси абцисс. Отметим, что на поверхности с риблетами нахождение собственного значения α не сводится к решению только уравнения Орра-Зоммерфельда, так как в граничные условия для вертикальной скорости входит вертикальная завихренность.

Влияние микрорельефа на ламинарно-турбулентный переход оценивалось с помощью e^N- метода. Для этого вычислялись коэффициенты усиления $k(\beta)$ возмущений с фиксированным поперечным волновым числом

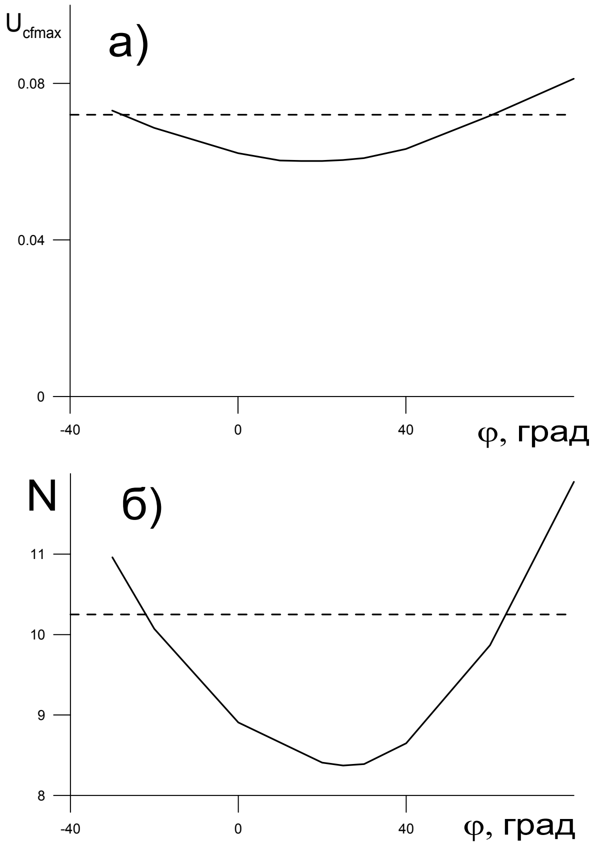
$$k(\beta) = e^{n(\beta,X)}\,; \quad n(\beta,X) = -\int_{X_0}^{X} \mathrm{Im}(\alpha(\beta,X))dx$$

Интегрирование начиналось в нейтральной точке X_0. Затем при каждом X находился максимальный по β коэффициент усиления K. Его логарифм, называемый N-фактором определяемый как

$$N(X) = \max_{\beta} n(\beta,X)$$

служил мерой усиления возмущений. Из эксперимента известно, что при низкой турбулентности потока ламинарно-турбулентный переход, вызванный неустойчивостью поперечного течения, происходит при критическом значении N-фактора $N_* = 7 \div 9$, в зависимости от шероховатости поверхности [12].

Нахождение N-фактора требует численного решения уравнений пограничного слоя (1.3) и задачи на собственные значения (1.5)-(1.7). Уравнения пограничного слоя решались маршевым методом с помощью неявной схемы второго порядка по x. Для их аппроксимации по z применялся метод коллокаций с использованием в качестве базисных функций полиномов Лаггера. Число узлов коллокации было равным 51, шаг по продольной координате H изменялся по закону $H=0.01X$. Такой же способ дискретизации по z использовался для анализа устойчивости пограничного слоя. Получавшаяся после дискретизации (1.5)-(1.7) задача на собственные значения для матрицы не линейна относительно α. Вместо нее решалась линейная задача для частоты ω при заданных вещественном β и комплексном α. Собственное значение α с минимальной мнимой частью находилось итерациями из условия $\omega = 0$. Описанные численные методы нахождения основного течения и инкрементов нарастания возмущений хорошо апробированы при решении задач предсказания ламинарно-турбулентного перехода и управления им [9,10]. Они обеспечивают вычисление инкрементов нарастания и N- фактора с точностью 1%.



Фиг. 2. Зависимости максимальной скорости поперечного течения (а) и N-фактора стационарных мод (б) при X=1 от угла наклона риблетов с $h_e = 0.1$.

Влияние риблетов на основное течение в пограничном слое и его устойчивость исследовалось при угле стреловидности $\chi = 35^0$ и числе Рейнольдса R=1000. Эти параметры примерно соответствуют эксперименту в аэродинамической трубе [11]. На гладкой поверхности рассчитанный N-фактор в конце расчетной области превышал 10, а ламинарно-турбулентный переход при $N_* = 7$ происходит при *X=0.62*. Риблеты располагались на участке от *X=0.2* до конца расчетной области. Зависимости максимальной скорости поперечного течения в пограничном слое и N-фактора стационарных мод от угла наклона риблетов при их высоте проникновения $h_e = 0.1$ показаны на фиг. 2. Из них видно, что оптимальный угол наклона риблетов, обеспечивающий наибольшее снижение скорости поперечного течения составляет около 20^0. Их благоприятное влияние на скорость поперечного течения наблюдается в интервале приблизительно $\pm \pi / 4$ от этого оптимального угла. Такой характер зависимости $U_{cf\max}(\varphi)$ можно объяснить, предположив, что изменение вектора скорости, индуцированное риблетами, пропорционально скорости скольжения на эффективной стенке (при *z=0*). Составляющие последней вдоль и поперек гребней $U_{\tau w}$ и U_{nw}, согласно (1.1) определяются углом $\varphi+\psi$ между направлением напряжения трения на стенке τ_w и гребнями риблетов (см. фиг. 1, а)

$$U_{\tau w} = hV_{zw}\sin(\varphi+\psi)\,; \quad U_{nw} = (h-h_e)V_{zw}\cos(\varphi+\psi); \quad V_{zw} = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)^2}\right|_{z=0}$$

Проекция скорости скольжения на направление оси y_* перпендикулярной внешней линии тока U_{y_*w} легко находится из фиг. 1, а. После элементарных преобразований она принимает вид

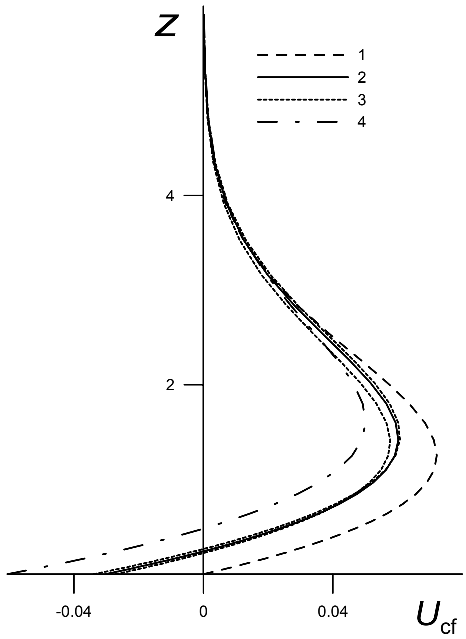
$$U_{y_*w} = (h-h_e)V_{zw}\sin\delta + h_eV_{zw}\sin(2(\varphi+\psi)-\delta) \qquad (1.8)$$

Так как скорость поперечного течения противоположна оси y_*, то ее уменьшение за счет воздействия риблетов приблизительно пропорционально U_{y_*w}. Эта проекция скорости скольжения на стенке максимальна при угле наклона риблетов

$$\varphi_{opt} = \frac{\pi}{4} - \psi + \delta/2 \qquad (1.9)$$

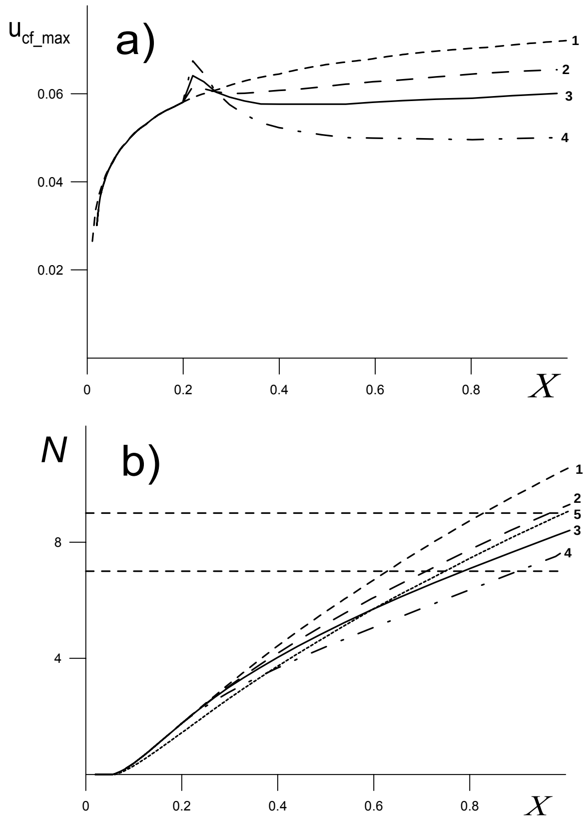
а положительный эффект риблетов, при пренебрежении относительно малым первым слагаемым в (1.9), сохраняется для углов $\varphi_{opt} \pm \pi/4$. При *X=1* угол наклона линии тока к оси *x* совпадает с углом стреловидности $\chi = 35^0$, а угол отклонения направления напряжения трения от скорости внешнего потока $\delta \approx 10^0$. Найденное из (1.9) значение оптимального угла риблетов $\varphi_{opt} = 15^0$ лишь незначительно отличается от полученного в расчете. Зависимости N- фактора от угла наклона риблетов практически полностью повторяет форму аналогичной зависимости для скорости поперечного течения, только немного сдвинута в сторону больших значений φ.

Изменение профиля скорости поперечного течения риблетами с оптимальным углом наклона $\varphi = 20^0$ и разной высоты проникновения h_e показывает фиг. 3. Как и следовало ожидать, наибольшее уменьшение этой скорости имеет место на стенке и оно постепенно убывает при удалении от нее. Для высоты проникновения $h_e = 0.1$ на фиг. 3 показаны результаты, полученные при трех значениях высоты эффективной стенки h=0, 0.5 и 1 h_e. Эти данные показывают, что получаемое решение для основного течения действительно слабо зависит от неопределенного параметра h. Фигура 3 также показывает, что снижение скорости поперечного течения практически линейно зависит от высоты проникновении риблетов. При больших h_e риблеты индуцируют значительную отрицательную скорость поперечного течения на стенке, в результате разница между максимальной и минимальной скоростью поперечного течения становится большей, чем на гладкой стенке. Однако, как показал анализ устойчивости пограничного слоя, это не оказывает негативного влияния на ламинарно-турбулентный переход.



Фиг. 3. Профиль скорости поперечного течения при X=1 на гладкой поверхности (1) и над риблетами с высотой проникновения $h_e = 0.1$ (2) и 0.2 (4). Решения для $h_e = 0.1$ и других высот эффективной поверхности h=0 и h_e (3).

Зависимости от продольной координаты максимальной скорости поперечного течения и N-фактора стационарных возмущений на поверхностях с риблетами разной высоты и оптимальным углом наклона 20^0 построены на фиг. 4. Из них видно, что риблеты с высотой проникновения 0.1 устраняют нарастание скорости поперечного течения вниз по потоку, которое имеет место на гладкой поверхности. При наибольшей высоте риблетов $h_e = 0.2$ она даже уменьшается вниз по потоку. К сожалению, этого оказывается недостаточно для радикального уменьшения скорости роста возмущений. Даже при максимальной высоте проникновения $h_e = 0.2$ длина ламинарно обтекаемого участка поверхности, при N*=7, увеличивается только на 40%.



Фиг. 4. Зависимость максимальной скорости поперечного течения (а) и N-фактора стационарных мод (б) от продольной координаты. 1 – гладкая поверхность, 2-4 – риблеты с $h_e = 0.05, 0.1, 0.2$. Кривая 5 - N-фактор на гладкой поверхности для $\chi = 30^0$.

В рамках используемой здесь модели, эффективность затягивания ламинарно-турбулентного перехода с помощью риблетов увеличивается с ростом их высоты. На практике она ограничена возможным появлением автоколебательных режимов обтекания рельефа большой высоты. В качестве оценки допустимой высоты микрорельефа можно использовать данные экспериментального изучения влияния шероховатости поверхности на ламинарно-турбулентный переход на плоской пластине [13]. Согласно им, снижение числа Рейнольдса перехода в два раза происходит при высоте неровностей равной 0.4-0.5 толщины вытеснения пограничного слоя δ^*. Учитывая, что для наиболее употребимых треугольных риблетов с углом при вершине 60^0 высота проникновения составляет около 20% полной высоты профиля [8], а толщина вытеснения пограничного слоя в начале оребренной поверхности $\delta^* \sim 0.8$, получим оценку максимальной высоты проникновения $h_{e\max} \sim 0.06 \div 0.08$. Такие риблеты дают увеличение длины ламинарного участка поверхности примерно на 12%. На первый взгляд, стабилизирующий эффект риблетов кажется незначительным. Однако, он примерно эквивалентен сдвигу точки перехода при уменьшении угла стреловидности до *30^0*, что видно из зависимости N-фактора от *X* на гладкой стенке для этого угла стреловидности приведенной на фиг.4, б. Таким образом, применение риблетов позволяет увеличить угол стреловидности крыла с естественным ламинарным обтеканием примерно на 5^0, что может быть полезным при проектировании самолетов с ламинарным крылом.

2. Влияние микрорельефа в виде крылышек на неустойчивость поперечного течения. Снижение скорости поперечного течения риблетами недостаточно эффективно из-за того, что они воздействуют на пристеночную часть пограничного слоя. Чтобы полностью устранить поперечное течение требуется микрорельеф изменяющий направление скорости в центральной его части. В технике для изменения направления потока с минимальными потерями применяются решетки профилей, установленных под углом к набегающему потоку. Они создают необходимую для этого поперечную силу при минимальном сопротивлении. По аналогии, оптимальный рельеф для поворота вектора скорости в пограничном слое должен представлять собой равномерно распределенные по поверхности крылышки установленные под углом атаки α_0 к направлению внешних линий тока. Вывод уравнений, описывающих осредненное течение в пограничном слое на поверхности с крылышками выполним в размерных переменных, которые будем обозначать штрихом. Для определенности рассмотрим плоские крылышки треугольной формы с размерными высотой h' и корневой хордой b' изображенные на фиг. 1, б. Воздействие такого микрорельефа на поток будем моделировать добавлением в правую часть продольного и поперечного уравнений импульса слоя объемных сил $F_x'(x',z')$ и $F_y'(x',z')$. Эти силы считаются постоянными по размаху и медленно и изменяются по продольной координате на масштабе хорды крыла L'. Они равны по величине и противоположны по знаку осредненным по участку площади поверхности $\Delta S'$ аэродинамическим силам, действующим на сечения крылышек, расположенные на данной высоте от стенки

$$F_x'(x',z') = -\frac{n}{\Delta S'} F_{x1}'(z'); \quad F_y'(x',z') = -\frac{n}{\Delta S'} F_{y1}'(z') \qquad (2.1)$$

Здесь *n* – число крылышек расположенных на участке поверхности $\Delta S'$, F_{x1}' и F_{y1}' - составляющие силы действующей на сечение одного крылышка. Они выражаются через его подъемную силу Y_1' и сопротивление X_1'

$$F_{x1}' = -X_1'(z')\cos\psi - Y_1'\sin\psi\,; \quad F_{e1}' = X_1'(z')\sin\psi + Y_1'\cos\psi \qquad (2.2)$$

Пренебрегая индуктивным скосом, будем считать, что аэродинамические силы в каждом сечении крылышка определяются осредненной по площадке $\Delta S'$ скоростью в пограничном слое $V'(z')$ и ее наклоном к плоскости крыла - углом атаки сечения $\alpha(z')$

$$X_1'(z') = C_x(\alpha)\frac{\rho' V'^2}{2}b'\,; \quad Y_1'(z') = C_y(\alpha)\frac{\rho' V'^2}{2}b'$$
$$V' = \sqrt{U_{x'}'^2(z') + U_{y'}'^2(z')}\,; \quad \alpha(z') = \alpha_0 - arctg\left(\frac{U'_{y'}(z')}{U'_{x'}(z')}\right) \qquad (2.3)$$

Здесь $U'_{x_*}(z')$ и $U'_{y_*}(z')$ - составляющие скорости вдоль и поперек внешней линии тока, C_x и C_y - коэффициенты сопротивления и подъемной силы сечений крылышка.

Переходя в уравнениях Навье-Стокса с объемными силами (2.1)-(2.3) к безразмерным переменным, введенным в п.1, и сделав обычные предположения о малости вертикальных составляющих скорости и градиента давления получим уравнения пограничного слоя (1.3) с условиями прилипания на стенке и объемными силами Φ_x, Φ_y в правых частях продольного и поперечного уравнений импульса. Входящие в них безразмерные объемные силы имеют вид

$$\Phi_x = \frac{RS^+}{h}b^+(z)\frac{U_0^{\,2} + V_0^{\,2}}{2}\left(-C_y(z)\sin\psi + C_x(z)\cos\psi\right)$$
$$\Phi_y = \frac{RS^+}{h}b^+(z)\frac{U_0^{\,2} + V_0^{\,2}}{2}\left(C_y(z)\cos\psi + C_x(z)\sin\psi\right) \qquad (2.4)$$
$$S^+ = \frac{S_W'}{\Delta S'}\,; \quad b^+(z) = \frac{b'(z')h'}{S_w'}\,; \quad h = h'/\delta$$

Аэродинамические коэффициенты сечений крыла C_x , C_y зависят от *z* из-за изменения местного угла атаки $\alpha(z)$ (см. 2.3).

В рамках применяемой здесь простой модели, амплитуда объемных сил, описывающих воздействие крылышек на пограничный слой, определяется двумя безразмерными параметрами – их относительной площадью S^+ высотой *h*. Зависимость этих сил от вертикальной координаты определяется также формой крылышек в плане, задаваемой зависимостью от z их относительной хорды b^+. Из (2.4) также следует, что объемные силы, описывающие воздействие крылышек на пограничный слой, есть величины порядка единицы при $S^+ \sim R^{-1}$. Это означает, что для заметного воздействия на поперечное течение достаточно крылышек с суммарной площадью много меньшей площади обтекаемой поверхности.

Размер хорды крылышек предполагается порядка толщины пограничного слоя и характерное число Рейнольдса Re, вычисленное по их хорде, при ламинарном режиме течения не превышает 2000. Поэтому для оценки аэродинамических коэффициентов сечений крылышек использовались результаты расчета обтекания крыла в виде прямоугольной пластины с удлинением 2 при Re=500 выполненных в [14]. Аппроксимация зависимостей C_x и C_y такого крыла от угла атаки измеряемого в градусах взятых из этой работы полиномами

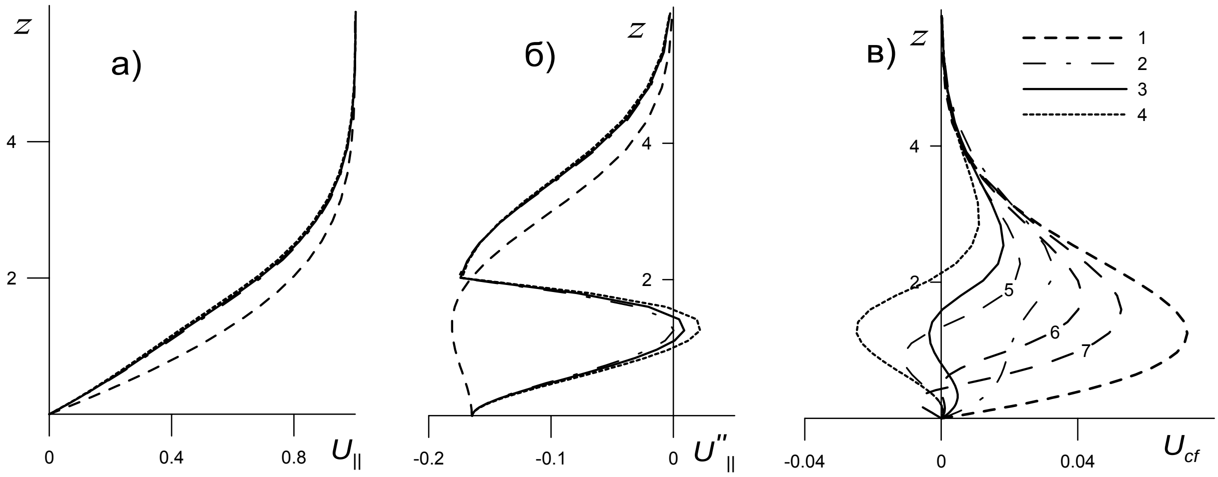
$$C_x = 0.21 + 0.038\alpha + 2.24\times10^{-4}\alpha^2\ ;\quad C_y = 0.0498\alpha - 0.00176\alpha^2 + 2.36\times10^{-5}\alpha^3$$

применялась для описания аэродинамических коэффициентов сечений крылышек в последующих расчетах. Обтекание крыла при таких малых числах Рейнольдса характеризуется большим коэффициентом сопротивления, малыми коэффициентом подъемной силы и качеством близким к единице. Важной особенностью аэродинамики крыла при этом является сохранение его несущих свойств при углах атаки до 30^0.

Расчетные исследования воздействия микрорельефа в виде крылышек на пограничный слой выполнялись для того же внешнего течения с $m=0.3$ и $\chi = 35^0$, которое использовалось в п. 1. Влияние этого типа микрорельефа непосредственно на неустойчивые возмущения не учитывалось, то есть их нарастание описывалось решением задачей на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда с условиями прилипания на стенке. Из-за выявленной большой эффективности управления ламинарно-турбулентным переходом с помощью крылышек, N-факторы для этого типа микрорельфа рассчитывались при вдвое большем числе Рейнольдса по длине пластины R_L=2x10^6, соответствующему R=1410. Начало участка с рельефом поверхности было перенесено ближе к передней кромке и соответствовало $X_1 = 0.1$. Крылышки имели треугольную форму в плане, соответствующую линейной зависимости относительной хорды от высоты

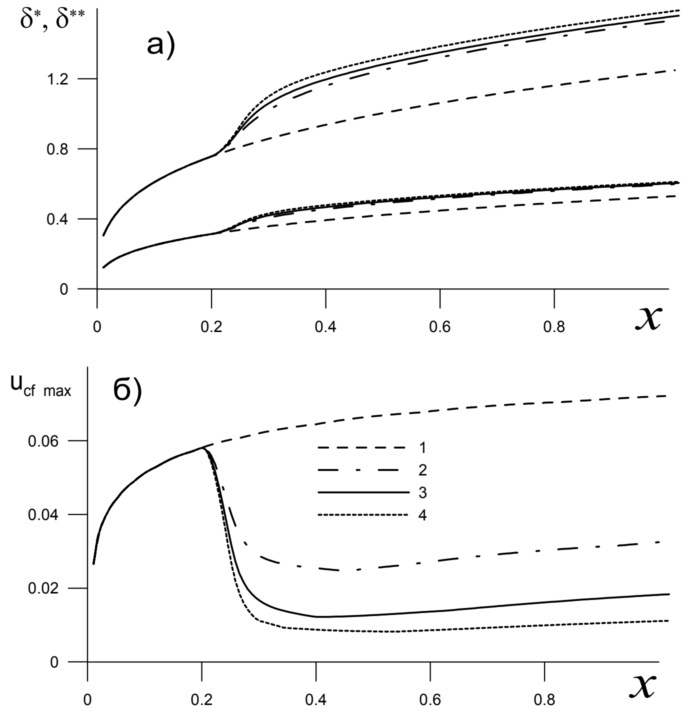
$$b^{+}(z) = 2(1 - z/h)$$

Относительная площадь крылышек $S^{+} = 0.015$ была одинаковой во всех расчетах и изучалась зависимость решения для течения в пограничном слое от высоты крылышек h и их угла атаки α_0.



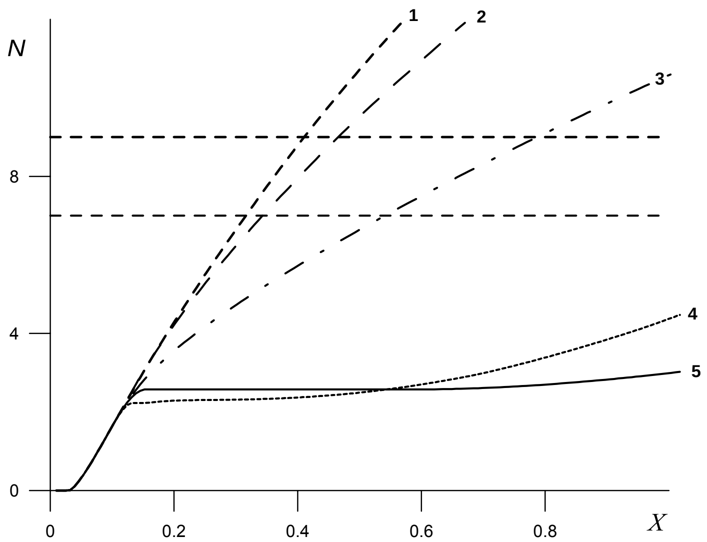
Фиг. 5. Влияние крылышек высотой *h=2* на профили тангенциальной скорости (а), ее второй производной (б) и скорости поперечного течения (в) при X=1. 1 – гладкая поверхность, (2-4) – крылышки с $\alpha_0 = 0, 5, 10^0$. Кривые 5,6,7 соответствуют крылышкам высотой h=1.5, 1, 0.5 установленным под оптимальными углами атаки.

Влияние крылышек высоты $h = 2$ на профили продольной и поперечной к внешней линии тока составляющих скорости в пограничном слое при *X=1* иллюстрирует фиг. 5. Даже при нулевом угле атаке такой микрорельеф уменьшает скорость поперечного течения более чем вдвое. Такой большой эффект крылышек ориентированных вдоль внешних линий тока, объясняется тем, что, из-за поворота вектора скорости внутри пограничного слоя, угол атаки сечений крылышек не так уж мал и доходит до 10^0. Дальнейшее увеличение угла атаки до 5^0 приводит к уменьшению скорости поперечного течения на высоте ее максимума в исходном пограничном слое до нуля, а при $\alpha_0 = 10^0$ его скорость на этой высоте становится отрицательной. Наряду с положительным влиянием на поперечное течение, крылышки вызывают заметное уменьшение продольной составляющей скорости в пристеночной части пограничного слоя, которое обусловлено их сопротивлением. Влияние крылышек этой же высоты на зависимости основных характеристик пограничного слоя от продольной координаты показывает фиг. 6. Из нее видно, что снижение скорости поперечного течения достигается очень быстро, а затем она поддерживается практически постоянной по длине. Платой за радикальное снижение скорости поперечного течения является заметное возрастание толщин вытеснения и потери импульса пограничного слоя, определяемых по продольной скорости. Если снижение скорости поперечного течения крылышками усиливается с увеличением их угла атаки, то утолщение пограничного слоя почти не зависит от него. Это объясняется относительно слабым ростом коэффициента сопротивления сечений крыла при увеличении угла атаки при малых числах Рейнольдса. Относительная роль сопротивления трения в этих условиях заметно больше, а индуктивного сопротивления существенно меньше, чем при обтекании крыла при больших числах Рейнольдса.



Фиг. 6. Влияние крылышек высотой *h=2* на толщину вытеснения и потери импульса пограничного слоя (а) и максимальную скорость поперечного течения (б). Обозначения аналогичны фиг. 5.

Торможение потока крылышками приводит к тому, что профиль тангенциальной скорости в пограничном слое при $\alpha_0 = 0$ и 5^0 становится близким к перегибному: вторая производная скорости в одной точке практически обращается в нуль. При увеличении угла атаки до 10^0 появляется участок положительной второй производной в средней части пограничного слоя с двумя точками перегиба, что может инициировать неустойчивость по отношению к волнам Толлмина-Шлихтинга. Появление перегибных профилей скорости в пограничном слое ограничивает максимально допустимый угол атаки крылышек. Для крылышек с высотой $h = 2$ этот максимальный угол атаки близок к 5^0. Параметрические расчеты для крылышек других высот $h = 1.5, 1$ и 0.5 дали для них значения максимального угла атаки близкие к 10, 15 и 20^0 соответственно. Профили скорости поперечного течения для крылышек этих высот, установленных под максимальными углами атаки, также приведены на фиг. 5. Эти данные показывают, что эффективность снижения скорости поперечного течения крылышками сильно падает по мере уменьшения их высоты.



Фиг. 7. Влияние высоты крылышек, установленных под оптимальным углом атаки на зависимости N-фактора стационарных мод от X. 1 – гладкая поверхность, (2-5) – *h=0.5, 1, 1.5, 2.*

Влияние крылышек разной высоты установленных под максимальными углами атаки на N – фактор стационарных мод показывает фиг. 7. Из нее видно, что эффективность управления ламинарно-турбулентным переходом резко повышается при увеличении высоты микрорельефа. С другой стороны, увеличение высоты крылышек, при фиксированной их относительной площади S^+ означает, либо уменьшение их хорды, либо увеличение расстояния между ними. Редко расположенные крупные элементы микрорельефа могут создавать сильную неоднородность пограничного слоя, а крылышки с малой хордой и большой высотой трудны в изготовлении и не достаточно прочны. Поэтому предпочтительнее микрорельеф умеренной высоты $h = 1$, который представляет собой компромисс между эффективностью и практичностью. Такой микрорельеф обеспечивает увеличение числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода более чем в два раза. Для этой высоты микрорельефа оценим его геометрические характеристики. Если считать, что каждое крылышко установлено в центре квадратной площадки, то сторона этой площадки D связана с его корневой хордой b_0 соотношением

$$D = \sqrt{\frac{b_0 h}{2S^+}}$$

Допустимые размеры хорды крылышка определяются числом Рейнольдса R_b характеризующим его обтекание. Максимальное его значение $R_{b\max}$ ограничено возникновением автоколебательных режимов обтекания, а минимальное $R_{b\min}$ - резким ухудшением аэродинамических характеристик крыла при очень малых числах Рейнольдса. Точные значения этих границ не известны, однако из результатов численного моделирования и данных эксперимента, представленных в [14] их можно оценить как $R_{b\min} = 10 \div 100, R_{b\max} = 500 \div 1000$. При предположении о линейной зависимости скорости в пограничном слое от вертикальной координаты, число Рейнольдса по хорде в среднем сечении крылышка связано с его корневой хордой и высотой соотношением

$$R_b = Rb_0 \frac{h}{4} \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} |_{z=0}$$

Можно показать, что в этом сечении достигается его максимальное значение по высоте. Консервативным оценкам $R_{b\min} = 100, R_{b\max} = 500$ при производной скорости на стенке близкой к единице соответствуют размеры корневой хорды $b_0 = 0.3$ и 1.4. Расстояние между крылышками при этом составляет D=3 и 6 соответственно. Ему соответствуют поперечные волновые числа $\beta = 2$ и 1 лежащие вне диапазона неустойчивости к стационарным модам. Размерные параметры микрорельефа для эксперимента в аэродинамической трубе малых скоростей, при длине хорды профиля L'=1м, составляют $h' = 0.7$ мм, $b_0' = 0.2 \div 1$ мм, $D' = 2 \div 4$ мм. Для натурных условий при характерной длине участка интенсивного разгона потока на профиле крыла L'=0.3м эти размеры примерно в три раза меньше. Теоретически предпочтителен микрорельеф с меньшей хордой крылышек, так как он создает более слабую и короткопериодическую модуляцию пограничного слоя. Однако для практики удобней крылышки с максимальной хордой, которые проще в изготовлении и обладают большей прочностью. Модуляцию пограничного слоя можно существенно уменьшить, расположив крылышки в шахматном порядке.

Заключение. Исследована возможность затягивания ламинарно-турбулентного перехода, вызванного неустойчивостью поперечного течения на стреловидном крыле с помощью микрорельефа поверхности. Основной механизм его действия связан со снижением скорости поперечного течения за счет изменения направления потока в пристеночной части пограничного слоя. Для наиболее простой в изготовлении формы рельефа – риблетов – найден оптимальный угол их установки составляющий около 45^0 по отношению к направлению поверхностного трения. Снижение скорости поперечного течения и затягивание перехода риблетами пропорционально их высоте проникновения. Максимальный сдвиг точки перехода с помощью этой формы микрорельефа составляет 10-12%, что примерно соответствует уменьшению угла стреловидности на 5^0. Также предложена более эффективная форма микрорельефа в виде пластинок (крылышек) установленных на поверхности под углом атаки к внешним линиям тока. На основе простой модели осредненной объемной силы, создаваемой крылышками, показано, что такой микрорельеф может увеличить число Рейнольдса перехода более чем в два раза. Побочным эффектом при этом является утолщение пограничного слоя и снижение его устойчивости по отношению к волнам Толммина-Шлихтинга. Эффективность управления переходом с помощью крылышек критически зависит от их высоты и резко снижается если она меньше характерной толщины пограничного слоя $\delta = (\nu L'/u_\infty)^{1/2}$. Микрорельеф поверхности может рассматриваться в качестве перспективного пассивного способа управления ламинарно-турбулентным переходом на стреловидном крыле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saric W.S., Carillo R.B.J., Reibert M.S. Leading edge roughness as a transition control mechanism// AIAA paper №98-0781, 1998.
2. Курячий А.П., Мануйлович С.В. Ослабление неустойчивости поперечного течения в трехмерном пограничном слое с помощью объемного силового воздействия// Ученые. Зап. ЦАГИ, 2011, т. 42, с.41-52.
3. Chernyshev S.L., Kiselev A.P., Kuriachi A.P. Laminar flow control research in TsAGI: Past and present// Progress in Aerospace Sciences, 2010, V.47, №3, p. 169-185.
4. Белов И.А., Енютин Г.В., Литвинов В.М. Влияние продольного и поперечного оребрения плоской пластины на ламинарно-турбулентный переход// Ученые Зап. ЦАГИ, 1990, т. 21, №6, с. 107-111.
5. Грек Г.Р., Козлов В.В., Титаренко С.В. Исследование влияния оребрения поверхности (риблет) на процесс развития двумерных возмущений (волн Толлмина-Шлихтинга) в ламинарном пограничном слое// Сиб. физ-техн. журнал, 1993, вып. 6, с.26-30.
6. Грек Г.Р., Козлов В.В., Титаренко С.В. Исследование влияния оребрения поверхности на процесс развития уединенного волнового пакета (λ-вихря) в ламинарном пограничном слое// Сиб. физ-техн. журнал, 1993, вып. 2, с.29-36.
7. Бойко А.В., Козлов В.В., Сызранцев В.В., Щербаков В.А. Управление при помощи риблет ламинарно-турбулентным переходом в стационарном вихре на скользящем крыле// Теплофизика и аэромеханика, 1996, т. 3, №1, с. 82-94.
8. Luchini P., Manzo M., Pozzi A. Resistance of a grooved surface to parallel and cross-flow// J. Fluid Mech., 1991, v. 228, p. 87-109.
9. М.В. Устинов Амплитудный метод предсказания ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле// Изв. РАН. МЖГ., 2017, №1, с. 74-89.
10. М.В. Устинов Численное моделирование управления ламинарно-турбулентным переходом с помощью диэлектрического барьерного разряда// Изв. РАН. МЖГ., 2016, №6, с. 76-89.
11. Deyhle H., Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on initial conditions// J. Fluid Mech. 1996. v. 316. p. 73-113.
12. Crouch J.D., Ng L.L. Variable N-factor method for transition prediction in three-dimensional boundary layers// AIAA Journal. 2000. V. 38, № 2, p. 211-215.

13. Х.Л. Драйден Переход ламинарного течения в турбулентное.: в. сборнике «Турбулентные течения и теплопередача», М: И.Л., 1963.

2. 14. Taira K., Colonis T. Three-dimensional flows around low-aspect-ratio flat-plate wings at low Reynolds numbers// J. Fluid Mech., 2009, V. 623, p. 187-207

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВЫХ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ И НА ЗЕМЛЕ

А.И. Федюшкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
НИЦ «Курчатовский институт»

В работе приводятся результаты численного моделирования гидродинамики и тепломассопереноса ламинарных (стационарных и квазистационарных) течений, но при высоких определяющих параметрах, обсуждаются некоторые нелинейные особенности ламинарных течений, которые нельзя получить, решая данные задачи аналитическими методами.

Одним из проявлений нелинейности ламинарных течений от определяющих параметров является существование максимума расслоения (температурного или концентрационного) в зависимости от безразмерных чисел, характеризующих интенсивность перемешивания жидкости в замкнутом объёме.

Кроме эффекта максимума температурного (концентрационного) расслоения в данной работе рассмотрены результаты численного моделирования гидродинамики и тепломассопереноса и обсуждаются особенности ламинарных течений следующих задач:

1) Рассмотрена задача о нарушении симметрии и стационарности течения в плоском диффузоре/конфузоре в невесомости.
2) Показано влияние нелинейного характера зависимости скорости естественно-конвективного течения от приложенного горизонтального градиента температуры на образование различных стационарных структур течения и появление противотоков основному течению в длинных горизонтальных слоях при пониженной и нормальной гравитации.
3) Приводятся результаты управления конвективным тепломассопереносом при выращивании монокристаллов. Показано влияние управляемых вибраций на тепломассоперенос в расплаве, на форму фронта кристаллизации и на толщины пограничных слоев.
4) Задача об изменении формы и положения границы раздела при термокапиллярной конвекции и влиянии ускорения силы тяжести на положение границы раздела двухслойной системы «вода-воздух».

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВИХРЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ НА ПЛОСКОСТИ В ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

А.М.Филимонова, В.Н.Говорухин
Институт математики, механики и компьютерных наук им.И.И.Воровича, ЮФУ, Ростов-на-Дону

Математические модели динамики невязкой несжимаемой жидкости в геофизических приближениях широко используются в исследованиях, в частности, для изучения вихревых конфигураций в атмосфере. В настоящей работе представлены результаты вычислительных экспериментов анализа динамики вихревых конфигураций в присутствии силы Кориолиса (на γ-плоскости).

Математически такая задача формулируется в виде системы уравнений в терминах завихренности и функции тока вида:

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = 0, \qquad \omega + f = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi, \qquad (1)$$

где t– время, x, y – координаты на плоскости, γ, Λ – параметры, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $f = f(r) = f_0 + \frac{1}{2}\gamma r^2$ – планетарная завихренность, $\omega = \omega(x, y)$ – абсолютная завихренность, а индексы означают дифференцирование по переменной. В случае, когда $\gamma = f_0 = \Lambda = 0$, задача (**1**) является уравнениями Эйлера динамики идеальной, несжимаемой жидкости на плоскости. Из первого уравнения (**1**) следует, что абсолютная завихренность ω пассивно переносится жидкими частицами. Второе уравнение связывает абсолютную завихренность ω и функцию тока ψ. Задача рассматривается на всей плоскости.

Для анализа динамики и взаимодействия вихревых конфигураций разработан вариант метода вихрей-в-ячейках, основанный на подходах работ [1-4]. В основе метода лежат следующие положения:

- Абсолютная завихренность ω в начальный момент времени задается дискретно в N частицах и переносится пассивно вектором скорости $v = (-\psi_y, \psi_x)$.
- Поле абсолютной завихренности $\omega(x, y)$ на каждом временном шаге аппроксимируется кусочно-непрерывным набором кубических полиномов, коэффициенты которых находятся методом наименьших квадратов, а поле планетарной завихренности пересчитывается по явным формулам.
- Функция тока ψ в каждый момент времени приближается отрезком ряда Фурье $\sum_{i=1}^{k_x}\sum_{j=1}^{k_y}\psi_{ij}(t)g_{ij}(x, y)$, где $g_{ij}(x, y)$ – базисные тригонометрические функции, а $\psi_{ij}(t)$ – неизвестные коэффициенты функции тока, которые находятся проекционным методом Бубнова-Галеркина.
- Динамика жидких частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений: $\dot{x} = -\psi_y, \dot{y} = \psi_x$, которая решается при помощи псевдосимплектического метода Рунге-Кутты.
- Расчетной областью является прямоугольник $D = \{-a \le x \le a, -b \le y \le b\}$, на границах которого заданы периодические краевые условия для ψ. Результаты расчетов рассматриваются в области $D_1 = \left\{-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}\right\}$.
- Для исследования интенсивности взаимодействия вихревых пятен реализован алгоритм вычисления локальных показателей Ляпунова.

В докладе представлены результаты тестовых расчетов по проверке адекватности численной схемы. С помощью численных экспериментов изучены динамика мультипольных вихревых конфигураций в отсутствие силы Кориолиса, а также влияние параметра γ на взаимодействие вихревых пятен и порождаемые процессы перемешивания. С помощью расчетов на больших временах исследована зависимость вида финальных конфигураций от начальных вихревых структур и величины параметра γ. Показано, что наличие силы Кориолиса может как интенсифицировать процессы взаимодействия вихревых пятен, так и тормозить их.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Govorukhin V.N., Il'in K.I. Numerical study of an inviscid incompressible flow through a channel of finite length. // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2008, pp.1-19.
2. Говорухин В.Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т.51 №6. С. 1133-1147.
3. Govorukhin V. A meshfree method for the analysis of planar flows of inviscid fluids // Lecture Notes in Computational Science and Engineering Vol. 89, 2013, pp. 171-180.
4. Говорухин В.Н. Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016. т.56, N8, с.1491-1505.

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ДВИЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ В ЭЛЕКТРОЛИТЕ МИКРОЧАСТИЦ

Е.А. Франц[1], Г.С. Ганченко[1], В.С. Шелистов[1], Н.В. Никитин[2], Е.А. Демёхин[1,2]
[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Краснодарский филиал)
[2]Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Настоящая работа посвящена изучению влияния электроосмотических эффектов на электрофорез – движение частиц в растворе электролита под воздействием приложенного электрического поля. Классическим случаем является рассмотрение заряженных диэлектрических частиц, которому посвящено множество работ – от исследований Гельмгольца и Смолуховского при слабых полях до обобщений Ярива и Шнитцера [1]. Существуют также работы, рассматривающие проводящие частицы; например, в [2] показано, что проводимость поверхности существенно снижает мобильность частицы (под которой обычно понимается отношение установившейся скорости движения к напряжённости поля). Особый случай представляют частицы с «полупроводящей» поверхностью, которая избирательно пропускает ионы раствора. Модель идеально селективной поверхности сформулирована в [3], но последующие работы до сих пор оставляют открытыми ряд вопросов, включая самый главный – вычисление мобильности частицы для всего диапазона напряжённостей поля. Рассмотрение же более сложных типов поверхностей (локально проводящие, мозаичные, поверхности с частичной селективностью) до сих пор не проводилось.

Особенности электрофореза частицы с ионоселективной поверхностью связаны с проявлением эффектов, характерных для электроосмотического движения электролита около ионообменных мембран. Поведение электролита при этом качественно соответствует мембранной системе: при малой напряжённости поля около частицы образуется практически однородный двойной слой (электроосмос 1 рода); при увеличении напряжённости с одной стороны частицы формируется зона пространственного заряда (электроосмос 2 рода); при очень сильных полях движение электролита становится хаотическим. В отличие от проводящей частицы, мобильность здесь не снижается, а, наоборот, повышается с увеличением напряжённости.

В настоящей работе электрофорез моделируется численно, а в предельных случаях делаются аналитические оценки. Используется упрощённая модель, пренебрегающая распределением заряда внутри частицы (аналогично работе [3]), однако она качественно воспроизводит наблюдаемые в экспериментах эффекты и довольно точно оценивает мобильность частицы в слабых и умеренных полях. Отмечается, что мобильность полупроницаемой частицы не подчиняется формуле Гельмгольца-Смолуховского. В работе приводятся характерные распределения концентраций ионов электролита и его скорости, а также электрического потенциала. Кроме того, применённая модель качественно воспроизводит резкое локальное повышение концентрации электролита, наблюдаемое в некоторых экспериментах [4]. В работе делается оценка границ применимости используемой модели, и даются прогнозы по её совершенствованию.

Работа выполнена в рамках проектов Российского фонда фундаментальных исследований (№ 16-08-00643) и Российского научного фонда (№ 17-79-10343).

ЛИТЕРАТУРА.

1. O. Schnitzer, E. Yariv. Macroscale description of electrokinetic flows at large zeta potentials: Nonlinear surface conduction. Physical Review E, 2012, 86, 021503.
2. B. Figliuzzi, W.H.R. Chan, J.L. Moran, C.R. Buie. Nonlinear electrophoresis of ideally polarizable particles. Physics of Fluids, 2014, 26, 102002.
3. I. Rubinstein, L. Shtilman. Voltage against current curves of cation-exchange membranes. J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1979, 75, 231.
4. S.-C. Wang, H.-H. Wei, H.-P. Chen, M.-H. Tsai, C.-C. Yu, H.-C. Chang. Dynamic superconcentration at critical-point double-layer gates of conducting nanoporous granules due to asymmetric tangential fluxes. Biomicrofluidics, 2008, 2(1), 014101.

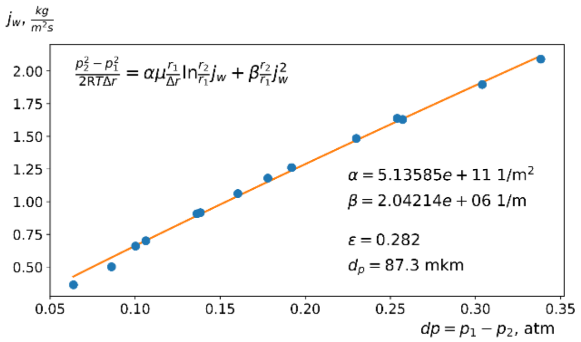
Моделирование безмашинного энергоразделения в пористой трубке

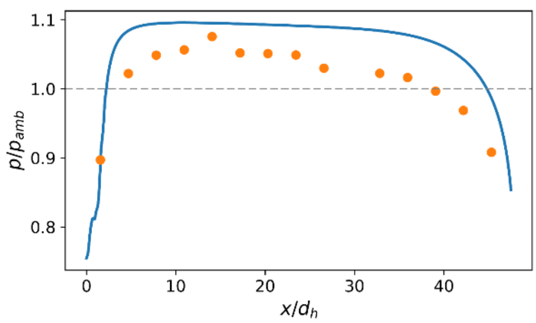
Д.Е. Хазов
НИИ механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва

Энергоразделение представляет собой перераспределение полной энергии потока без совершения им технической работы и теплообмена с окружающей средой, в результате которого в потоке возникают горячие и холодные области. Если подобные процессы протекают в устройстве, не имеющем подвижных частей, приводимых в движение газом то речь идёт о безмашинном энергоразделении.

Эккерт [1] предложил два основных физических механизма, вызывающих энергоразделение. Первый — это дисбаланс между потоками тепла, выделившимися в результате работы сил вязкости в газе и тепла отведённого за счёт механизма теплопроводности. Второй — вихревые течения и связанные с ними пульсации давления. В работах [2] и [3] проведено экспериментальное исследование безмашинного энергоразделения, основанного на первом механизме. Как известно дисбаланс между процессами выделения тепла в результате вязкой диссипации и отвода тепла теплопроводностью из пристенных областей приводит к искривлению профиля температуры торможения. В зависимости от значения молекулярного числа Прандтля, которое, в зависимости от вида рабочего тела может принимать значения меньше, равное или больше единицы, температура торможения пристенных слоев будет меньше, равна или больше начальной температуры торможения, соответственно. Для воздуха Pr = 0,7, следовательно, если организовать отсос пристенных «охлажденных» слоев, то среднемассовая температура оставшегося потока возрастет.

В настоящей работе проведено численное моделирование устройства, аналогичного исследованному в [2] и [3]. Устройство представляет собой профилированное сверхзвуковое сопло ($d_{cr} = 3$ мм, $A_{exit}/A_{cr} = 1.14$) сопряженное с цилиндрической пористой трубкой ($d_{in} = 3.5$ мм; $d_{out} = 10.5$ мм; $L = 150$ мм).





На базе уравнений Навье-Стокса, осреднённых по Рейнольдсу, с привлечением уравнений $k-\omega$ sst модели турбулентности была построена математическая модель рассматриваемого устройства. Величина потока массы j_w через пористую стенку определялась из модифицированного уравнения Дарси (уравнение Дарси-Форхгеймера). Значения коэффициентов уравнения α и β получены из обработки экспериментальных данных (см. рисунок (справа)).

В работе проводится валидация предложенной математической модели в широком диапазоне изменения параметров (на основе данных [2] и [3]). В качестве примера на рисунке (справа) приведено сопоставление экспериментального (символы) и расчётного (сплошная кривая) распределения давления по длине пористой трубки для случая полного давления на входе $p_0^* = 1.97$ атм. Как видно из рисунка, для рассматриваемых условий в пористой трубке наблюдаются как режимы вдува ($p < p_{amb}$), так и режимы отсоса из трубки ($p > p_{amb}$).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда проект № 14-19-00699.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Eckert E.R.G. Cross transport of energy in fluid streams // Warme-und Stoffubertranung.— 1987. — No. 21. — P. 73–81.
2. Yu A. Vinogradov, A. G. Zditovets, and M. M. Strongin. Experimental investigation of the temperature stratification of an air flow through a supersonic channel with a central body in the form of a porous permeable tube. Fluid Dynamics, 48(5):687–696, 2013.
3. А. И. Леонтьев, А. Г. Здитовец, Ю. А. Виноградов, М. М. Стронгин, Н. А. Киселёв, Д. Е. Хазов. ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЕ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В КОМБИНИРОВАННОМ КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ. Всероссийская конференция с элементами научной школы для молодых ученых "XXXIII Сибирский теплофизический семинар", посвященный 60-летию Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Тезисы докладов, ISBN 978-5-89017-049-1, стр. 46–46. Институт теплофизики СО РАН Новосибирск, 2017.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, ЗАПИСАННЫХ С УЧЕТОМ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ, В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КУЭТТА

О.Н. Хатунцева

Публичное акционерное общество «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва», Россия, Королев, 141070, Ленина 4а
Московский физико-технический институт (государственный университет)
olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация

Учет производства энтропии в уравнениях Навье-Стокса, обусловленной возбуждением стохастических пульсаций в потоке жидкости, позволил теоретически найти два решения задачи течения жидкости в плоской задаче Куэтта. Одно из них соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение реализуется при любых значениях числа Рейнольдса и характеризуется линейным профилем скорости во всей области течения жидкости, второе – реализуется только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса и характеризуется профилем скорости, пропорциональным гиперболическому синусу с параметром, зависящим от значения числа Рейнольдса. Найдено критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Приведено сравнение результатов с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: стохастические системы, плотность вероятности, турбулентность.

1. Введение

Уравнения Навье-Стокса (УНС) являются законом сохранения импульса (или вторым законом Ньютона) для выделенного достаточно малого, но конечного объема изотермической жидкости и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления и внешних сил, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако, при переходе к стохастическому – турбулентному режиму течения жидкости - вопрос о возможности описания такой системы с помощью уравнений НС, несмотря на свою многолетнюю историю, остается открытым, и по сей день.

В силу своей сложности УНС имеют аналитические решения в ограниченном круге задач – для очень простых геометрий. Одной из таких задач является описание течения несжимаемой жидкости расположенной между двумя параллельными плоскими пластинами, движущимися с постоянными скоростями в противоположных относительно друг друга направлениях в собственных плоскостях (см. рис.1). Течение происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость, и сдвигового напряжения параллельного стенкам. Этот тип течений назван в честь Мориса Мари Альфреда Куэтта.

Единственным аналитическим решением этой задачи в стационарном случае является выражение, при любых значениях числа Рейнольдса соответствующее ламинарному режиму течения. Оно описывает линейный профиль скорости [1]. Решение этой задачи является устойчивым в линейном приближении (для бесконечно малых возмущений) [2]. Данный вывод плохо соотносится с огромным количеством экспериментов, в которых при достаточно больших значениях числа Рейнольдса практически невозможно “удержать” жидкость в ламинарном состоянии - происходит потеря устойчивости и переход к турбулентному режиму течения. В качестве попыток разрешения возникающих противоречий в вопросах устойчивости обычно выдвигаются предположения о неустойчивости течений к конечным возмущениям. Однако в такой постановке не вполне понятным остается отсутствие других (помимо ламинарных) квазистационарных аналитических решений УНС, к переходу к которым и должны стремиться режимы течения при потере устойчивости.

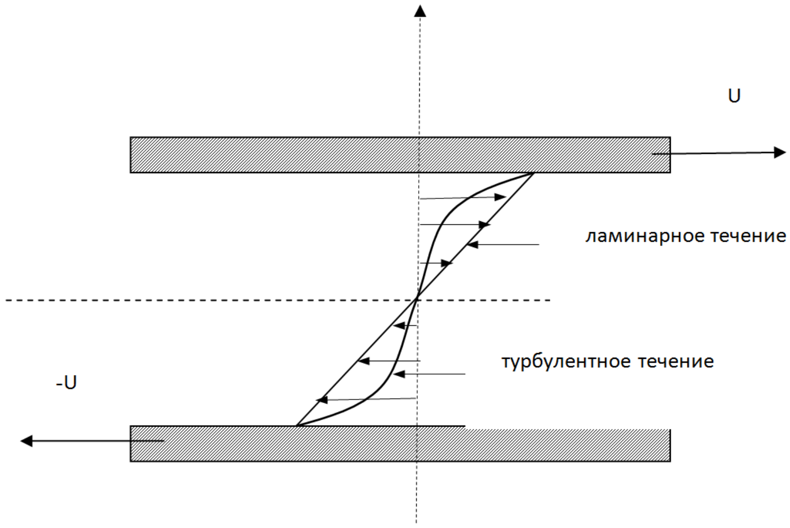


Рис. 1. Схематичное изображение течения Куэтта

2. Применение метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для описания турбулентности.

Зададимся вопросом, какие аспекты не учитываются при моделировании турбулентности с помощью УНС?

В настоящее время построены решения для уравнений Эйлера, в которых выполняется предположение Онзагера (Onsager conjecture) [3] об отсутствии сохранения энергии для достаточно нерегулярных решений, характерных для турбулентности. В инерциальном интервале уравнения Эйлера и Навье-Стокса эквивалентны. Вполне естественно, что нарушение закона сохранения энергии для выделенного участка жидкости сопровождается нарушением закона сохранения импульса (один из выводов закона сохранения импульса основан на предположении сохранения кинетической энергии в замкнутой системе для двух сталкивающихся тел и свойства однородности пространства).

Турбулентный режим, также как и другие стохастические процессы, обладает важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом закон сохранения импульса для выделенного объема жидкости (в форме уравнений Навье-Стокса), записанный без учета такого процесса, нарушается, поскольку, не все суммарное воздействие, направленное на выделенный объем, идет на его ускорение: часть такого воздействия должно пойти на возбуждение дополнительных - внутренних - степеней свободы, обладающих (следуя предположению Колмогорова для мелкомасштабной развитой турбулентности) свойством изотропного распределения.

Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами является энтропия [4] и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть производство энтропии выделенного объема жидкости. Исходя из этого рассуждения, можно переписать уравнения Навье-Стокса, включив в их левую часть – полную производную по времени – дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при изменении энтропии S выделенного объема:

$$S(t,\vec{r}) = -\int \varphi[p(t,\vec{r})] \ln \varphi[p(t,\vec{r})] d[p(t,\vec{r})].$$

В выражении для энтропии функция $\varphi[p(t,\vec{r})]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t,\vec{r})$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства $\vec{r}$.

Расширяя фазовое пространство дополнительной переменной, характеризующей энтропию S: $(t,\vec{r})\to(t,\vec{r};S)$, ускорение выделенного объема жидкости, на который действуют силы, стоящее в правой части УНС, можно записать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}(t+\Delta t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)-\vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая векторы в это выражение, его можно переписать в виде:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\vec{V}(t+\Delta t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)-\vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t}+\right.$$
$$\left.+\frac{\vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)-\vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t}+\frac{\vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S)-\vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t}\right]\cdot$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta\vec{r}\underset{\Delta t\to 0}{\to}0$, $\Delta S\underset{\Delta t\to 0}{\to}0$, в полученном выражение для ускорения выделенного объема жидкости первое слагаемое равно: $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}$; второе слагаемое: $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{r}}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(\vec{V}\nabla)\vec{V}$; третье слагаемое: $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial S}\cdot\dfrac{dS}{dt}$.

Таким образом, учет влияния производства энтропии в выделенном объеме жидкости на его ускорение, приведет к изменению левых частей уравнений Навье-Стокса, характеризующих ускорение выделенного объема жидкости и представляющих собой полные производные по времени. В расширенном фазовом пространстве их можно записать, включив дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при производстве энтропии S в выделенном объеме:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial S}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}.$$

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий в расширенном пространстве переменных к полученному уравнению. Чтобы этого избежать, представим модифицированное уравнение Навье-Стокса через переменную, характеризующую плотность вероятности реализации возмущения скорости:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial\varphi}\frac{1}{\delta S/\delta\varphi}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\ . \qquad (1)$$

Производная $\delta S/\delta\varphi$, входящая в уравнение (1), может быть определена как функциональная производная. Найдем ее значение:

$$\left\langle\frac{\delta S}{\delta\varphi},h\right\rangle=-\frac{d}{d\,э}\int(\varphi(p)+э\,h(p))\ln(\varphi(p)+э\,h(p))dp\Big|_{э=0}=$$
$$=-\int(\ln\varphi(p)+1)h(p)dp=\langle-(\ln\varphi(p)+1),h\rangle.$$

Откуда следует, что $\delta S/\delta\varphi=-\ln\varphi(p)-1$. Поскольку, $-(\ln\varphi+1)\delta\varphi=\delta(-\varphi\ln\varphi)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p)=-\varphi(p)\ln\varphi(p)$, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}.$$

Производство энтропии: dS/dt можно охарактеризовать временным масштабом τ, на котором происходит изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, полученное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\,. \tag{2}$$

Решением уравнения (2) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости $\vec{V}=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s};\tau)=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s}(\varphi);\tau)$, реализующейся с вероятностью φ, в системе, в которой производство энтропии характеризуется временным интервалом τ, в момент времени t, в точке $\vec{r}(x,y,z)$.

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного уравнения Навье – Стокса, необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [5-6]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной (в данном случае $\tilde{s}$), можно обойтись без построения такой модели. Исследование показало, что описание плоского течения Куэтта относится именно к такому классу задач.

Для этой задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и модифицированных УНС:

$$\begin{cases}\nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0\\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}\end{cases}.$$

Задачу будем решать в классической постановке [1], а именно, в предположении постоянства давления. Тогда уравнение сохранения импульса с учетом уравнения неразрывности, а также добавочного члена для описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда $\partial V/\partial t=0$) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial \tilde{s}}=\nu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,.$$

Или, по-другому,

$$\frac{h^2}{4\tau\nu}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}}=\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2}\,,$$

где $\tilde{y}=\dfrac{y}{h/2}$, h - ширина канала, $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})=V/U$ - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной $\tilde{s}$, U - модуль скорости стенок относительно неподвижной системы координат, ν - вязкость жидкости.

Полученное уравнение должно описывать течение жидкости, как в ламинарном, так и в турбулентном случае. В турбулентном случае течение будет, безусловно, трехмерным, однако ненулевым квазистационарным будет только продольная составляющая скорости в зависимости от поперечной координаты. Остальные компоненты скорости будут иметь стохастический квазиоднородный, квазиизотропный характер.

Полученное уравнение будем решать, используя граничные условия – «прилипание» жидкости на стенках в отсутствии пульсаций: $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1\\ \tilde{s}=0}} = \pm 1$, и условие симметрии на оси канала: $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\Big|_{\substack{\tilde{y}=0\\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Уравнение можно упростить, введя вместо временного масштаба τ безразмерный коэффициент γ ($0<\gamma\le 1$) - параметр, характеризующий пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением: $\tau = \frac{\gamma h}{U} = \frac{\gamma h^2}{\nu \operatorname{Re}}$, где $\operatorname{Re} = \frac{Uh}{\nu}$ - число Рейнольдса. Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ в уравнение, приходим к соотношению:

$$\frac{\operatorname{Re}}{4\gamma}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{s}} = \frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial\tilde{y}^2}.$$

Решая его методом разделения переменных: $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{y})$, получим два уравнения:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\tilde{s}} = \frac{4a\gamma}{\operatorname{Re}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2F}{d\tilde{y}^2} = aF, \tag{3}$$

где $a = a(\gamma,\operatorname{Re})$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re. Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a соответствует решению уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта. Это решение будет также являться первым решением плоской задачи Куэтта с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае $a\neq 0$, решением первого уравнения (3) являются функции $N(\tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a\gamma}{\operatorname{Re}}\tilde{s}}$, где $N_0 = const$. Решения второго уравнения (3) в неявном виде можно записать:

$$\left|F+\sqrt{F^2 \pm c^2}\right| = ke^{\sqrt{a}\tilde{y}}, \quad \text{где } c \text{ и } k \text{ - константы интегрирования.} \tag{4}$$

Из условия симметрии на оси канала для скорости $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a}{\operatorname{Re}}\gamma\tilde{s}}F(\tilde{y})$, следуют соотношения: $F(\tilde{y})\big|_{\tilde{y}=0} = 0$, которое при подстановке в уравнение (4) позволяет выразить константу интегрирования c через k : $\pm c^2 = k^2$. Подставляя это соотношение в зависимость (4), получим уравнение: $\left|F+\sqrt{F^2+k^2}\right| = ke^{\sqrt{a}\tilde{y}}$, из которого для положительных значений F следует соотношение: $F = k\left(e^{\sqrt{a}\tilde{y}} - e^{-\sqrt{a}\tilde{y}}\right)/2$. Или

$$F = k\cdot sh\left(\sqrt{a}\tilde{y}\right).$$

Подставляя его в выражение для скорости, находим

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = be^{\frac{4a}{\operatorname{Re}}\gamma\tilde{s}}sh\left(\sqrt{a}\tilde{y}\right), \quad \text{где } b = N_0 k.$$

Из условия «прилипания» в отсутствии пульсаций на стенках: $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1\\ \tilde{s}=0}} = \pm 1$, можно найти значение константы b : $b = 1/sh\sqrt{a}$. И, следовательно, выражение для скорости можно переписать в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = \frac{sh\left(\sqrt{a}\tilde{y}\right)}{sh\sqrt{a}}e^{\frac{4a}{\operatorname{Re}}\gamma\tilde{s}}, \quad a\neq 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (2) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Для того чтобы определить условия, накладываемые на постоянную a, используем формулу (5) для нахождения безразмерной динамической скорости $\widetilde{V}_*$, которая реализуется на безразмерной длине вязкого слоя:

$$\widetilde{y}_* = \frac{y_*}{h/2} = \frac{y_* V_*}{\nu} \frac{\nu}{U\, h/2} \frac{U}{V_*} \sim \frac{2}{\mathrm{Re}} \frac{1}{\widetilde{V}_*}, \quad (y_* V_* / \nu \sim 1)$$

вблизи точки перегиба: $\widetilde{y} = 0$, при нулевом значении стохастического возмущения ($\widetilde{s} = 0$):

$$\widetilde{V}_* = \frac{sh\left(\sqrt{a}\,\widetilde{y}_*\right)}{sh\sqrt{a}}. \tag{6}$$

Безразмерную динамическую скорость можно записать в виде:

$$\widetilde{V}_* = \frac{1}{U}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U}\sqrt{\nu \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\ \widetilde{s}=0}}} \sim \frac{1}{U}\sqrt{\nu \frac{U}{h/2} \left.\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \widetilde{y}}\right|_{\substack{\widetilde{y}=0\\ \widetilde{s}=0}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{sh\sqrt{a}}},$$

здесь σ - отнесенная к единице площади сила трения.

Подставляя в выражение (6) формулы для $\widetilde{V}_*$ и $\widetilde{y}_*$, получим зависимость:

$$\sqrt{2\frac{\sqrt{a}\,sh\sqrt{a}}{\mathrm{Re}}} \sim sh\left(\sqrt{2\frac{\sqrt{a}\,sh\sqrt{a}}{\mathrm{Re}}}\right), \quad a \neq 0.$$

Это соотношение выполняется с высокой точностью, если $k = 2\sqrt{a}\,sh\sqrt{a}/\mathrm{Re} < 1$. В этом случае точность выполнения этого соотношения равна $O\left(k^3/27\right)$. При выполнении условия $k < 1$ экспоненту, стоящую в соотношении (5), можно разложить в ряд Тейлора с точностью до $O\left((a/\mathrm{Re})^2\right)$:

$$\widetilde{V}(\widetilde{y}, \widetilde{s}) = \frac{sh\left(\sqrt{a}\,\widetilde{y}\right)}{sh\sqrt{a}}\left(1 + 4\gamma\widetilde{s}\,\frac{a}{\mathrm{Re}}\right) + O\left(\left(\frac{a}{\mathrm{Re}}\right)^2\right).$$

Второе слагаемое в скобках этого выражения характеризует возмущение безразмерной скорости, реализующейся с вероятностью, характеризуемой стохастической переменной $\widetilde{s}$.

Возмущение безразмерной скорости, с одной стороны, не должно превышать величины безразмерной динамической скорости. Такое ограничение позволит возмущению скорости «затухать» на длине вязкого масштаба. С другой стороны, это возмущение не должно быть существенно меньше динамической скорости, иначе течение станет ламинарным. Учитывая это, можно записать:

$$\frac{a}{\mathrm{Re}} \sim \widetilde{V}_* \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{sh\sqrt{a}}}$$

или

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 sh\sqrt{a} \sim \mathrm{Re}. \tag{7}$$

Соотношение (7) и уравнение (5) позволят при совместном использовании определять профиль скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для различных значений числа Рейнольдса.

Во второй главе будут рассмотрены вопросы, связанные с определением критического значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения жидкости. Однако здесь хотелось бы подчеркнуть, что переход от одного режима к другому при достижении критического значения числа Рейнольдса не является однозначным, поскольку ниже критического значения может существовать только ламинарный режим течения, а выше этого значения может быть как турбулентный, так и ламинарный режимы течения. Об этом свидетельствует наличие двух решений уравнений (3). Одно из которых (для нулевого значения константы a) соответствует ламинарному режиму течения для любых значений числа Рейнольдса, а второе (для которого значение константы a, связано с конкретным значением числа Рейнольдса и определяется соотношением (7)), соответствует турбулентному режиму течения.

Сравним полученный результат с экспериментальными данными, приведенными в [7], со ссылкой на работы тридцатых годов прошлого века на немецком языке Райхардта. На рисунке 2 показано сравнение теоретических и экспериментальных данных для профиля скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для следующих значений числа Рейнольдса: $\mathrm{Re}=1200$, $\mathrm{Re}=2900$ и $\mathrm{Re}=34000$.

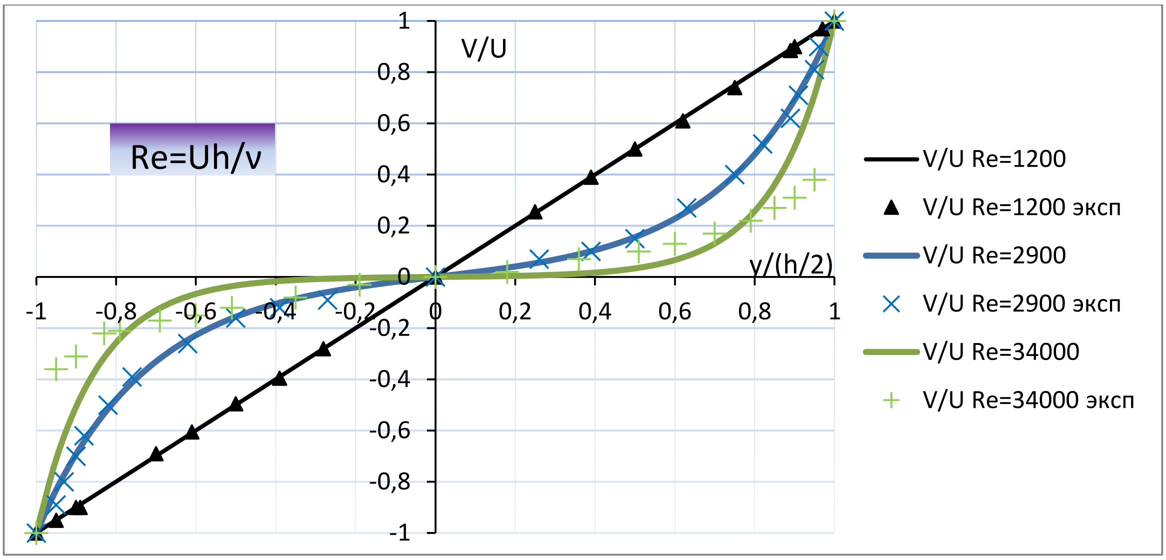


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических значений профиля скорости течения Куэтта при различных числах Рейнольдса

Для значения $\mathrm{Re}=1200$ в эксперименте получен ламинарный режим течения. Одно из найденных теоретических решений соответствует ламинарному режиму течения и, поэтому, на рисунке для этого режима течения нанесен теоретический профиль скорости, соответствующий ламинарному режиму.

Для значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=2900$ и $\mathrm{Re}=34000$ экспериментально получены турбулентные режимы течения и, поэтому они сравниваются с теоретическими решениями, соответствующими турбулентному режиму.

Значения $\sqrt{a}$, найденные из уравнения (7) для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=2900$ и $\mathrm{Re}=34000$, соответственно равны: $\sqrt{a}\approx 3{,}9$ и $\sqrt{a}\approx 5{,}5$. Профили находятся при подстановке этих значений в уравнение (5) при значении $\tilde{s}=0$.

Из рисунка 2 видно довольно хорошее совпадение теоретического и экспериментальных профилей для значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=2900$.

Для значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 34000$ совпадение профилей можно считать удовлетворительным. Небольшое отличие профилей при таком – довольно большом числе Рейнольдса и, следовательно, малом размере вязкого слоя – может быть обусловлено нарушением условия прилипания жидкости из-за влияния шероховатости и/или смачиваемости стенок, краевыми эффектами (поскольку в эксперименте стенки не бесконечные). К сожалению, в работе [7] не приведено значение точности экспериментальных данных, что затрудняет их анализ.

3. Метод теоретического определения минимального значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

В этой главе рассматривается метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [8], и на основе этого метода в задаче о течении жидкости в плоской задаче Куэтта делается попытка определения критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы (см. рис. 3), применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями $\widetilde{m}(\alpha)$ на всей области определения α, кроме малых подобластей, в которых эти функции изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции $\widetilde{m}(\alpha) = \widetilde{m}(\alpha(t))$ могут вести себя случайным образом (если следить за процессом изменения аргумента много раз). Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей изменения параметров с размерами и положением этих подобластей относительно, рассматриваемых областей определения значений α. Остановимся на этом подробнее.

3.1. Операторный метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.

Предположим, существует физический процесс, описываемый функцией $\widetilde{m}(\alpha(t))$, такой, что до точки α_0 функция $\widetilde{m}(\alpha(t))$, определена однозначно, как функция аргумента α: $\widetilde{m}(\alpha(t)) = \widetilde{m}_1(\alpha)$. В области $\alpha \geq \alpha_0$ может реализовываться один из двух возможных квазистационарных режимов рассматриваемого физического процесса. Эти два режима могут быть описаны двумя ветвями функции $\widetilde{m}(\alpha(t))$: либо $\widetilde{m}(\alpha(t)) = \widetilde{m}_1(\alpha)$ (состояние «1»), либо $\widetilde{m}(\alpha(t)) = \widetilde{m}_2(\alpha)$ (состояние «2»). Причем, с увеличением аргумента α устойчивость состояния «2» возрастает, а состояния «1» - падает.

В качестве модели поведения системы в области $\alpha \geq \alpha_0$, при $\dot{\alpha} > 0$, примем следующее правило: если система находится в состоянии «1», то при увеличении значения $\alpha(t)$ она может либо продолжать в нем оставаться, либо в точке $\alpha_1 > \alpha_0$ выйти из него и оказаться в точке $\alpha_2 > \alpha_0$ в состоянии «2». При этом если система в какой-либо точке α_2 окажется в состоянии «2», то при дальнейшем увеличении аргумента α в области $\alpha > \alpha_2$ она будет продолжать оставаться только в состоянии «2». Причем значение α_2 может быть как больше, так и меньше значения α_1. Переходы между двумя состояниями в области $[\alpha_1, \alpha_2]$, если следить за процессом изменения функции $\widetilde{m}$ от аргумента $\alpha(t)$ (при $\dot{\alpha} > 0$) много раз, носят случайный характер. Точки перехода из состояния «1» в состояние «2» - α_1 и α_2 - однозначно не определены.

Рассмотрим однократное изменение функции $\widetilde{m}(\alpha)$ при изменении $\alpha(t)$ в одном направлении по времени: $\dot{\alpha} > 0$. Для этого процесса определим точки α_1 и α_2. Будем считать, что для функции $\tilde{m}(\alpha)$ характерна лишь слабая нелинейность ее ветвей: $\tilde{m}_1(\alpha)$ и $\tilde{m}_2(\alpha)$ в окрестностях точек α_1 и α_2, соответственно. Интерполируем ветвь функции $\tilde{m}_1(\alpha)$, расположенную на плоскости $(\alpha,\tilde{m})$ до точки α_1: $\alpha \le \alpha_1$, линейной функцией в область $[\alpha_1,\alpha_2]$. Полученную таким образом функцию обозначим, как $m_1(\alpha)$. Ветвь функции $\tilde{m}_2(\alpha)$ за точкой α_2: $\alpha \ge \alpha_2$, интерполируем в область $[\alpha_1,\alpha_2]$ и обозначим, как $m_2(\alpha)$. В результате в области $[\alpha_1,\alpha_2]$ определим две ветви функции $m(\alpha)$: $m(\alpha)=\begin{cases} m_1(\alpha) \\ m_2(\alpha) \end{cases}$. Область, лежащую между точками α_1 и α_2 и ограниченную функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, можно характеризовать, как область неопределенности рассматриваемого процесса. Внутри этой области лежат возможные траектории перехода из состояния «1» в состояние «2». Среднее значение функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1,\alpha_2]$ будет определяться выражением:

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha)d\alpha . \tag{8}$$

Учитывая, что среднее значение от функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1,\alpha_2]$ является числом, выражение (8) может быть записано в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi)d\varphi = 1, \quad \text{где } M^2 = m^2(\varphi)\big/\left\langle m^2 \right\rangle,\ \varphi=\alpha/\Delta\alpha,\ \Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1 .$$

Расширим пространство (α,m) дополнительным параметром η: $(\alpha,m)\to(\alpha,m;\eta)$, $0\le\eta\le 1$ (см. рис. 3), и определим в этом пространстве функцию $m(\alpha;\eta)$ так, чтобы проекция функции $m(\alpha;\eta)$ на плоскость (α,m) совпадала с функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ в областях: $\alpha<\alpha_2$ и $\alpha\ge\alpha_2$, соответственно. Удовлетворяя этим требованиям, в качестве функции $m(\alpha;\eta)$ можно выбрать соотношение:

$$m(\alpha;\eta) = m_2(\alpha)+\eta(m_1(\alpha)-m_2(\alpha)), \quad \text{где } \eta = \begin{cases} 1, & при \quad x<\alpha_2 \\ 0, & при \quad x\ge\alpha_2 \end{cases}.$$

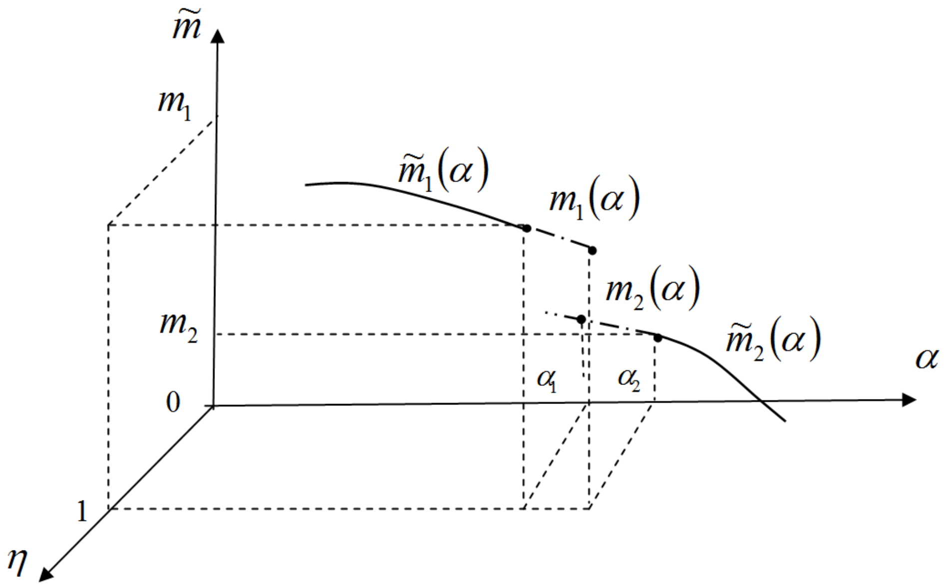


Рис. 3. Схематичное изображение функции с разрывом первого рода в расширенном пространстве переменных.

Аналогичное соотношение выполняется для производных:

$$\partial m(\alpha;\eta)/\partial\alpha = \partial m_2(\alpha)/\partial\alpha + \eta(\partial m_1(\alpha)/\partial\alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial\alpha).$$

Такое представление функции $m(\alpha;\eta)$ позволит (как будет показано ниже) специальным образом определить свойство переходной области. А именно, отметить, что для заданных точек перехода из состояния «1» в состояние «2»: α_1 и α_2, в силу принципа причинности, статистические свойства системы в точке α_1 описывается только функцией m_1, а в точке α_2 состояние системы не является точно определенным, поскольку в эту точку могут приводить различные траектории из точки α_1.

Параметр η будет характеризовать состояние системы (описываемой функцией m и ее производной), принимая значение равное единице везде до точки $\alpha = \alpha_2$ и, равное нулю в этой точке и за ней:

$$\eta = \frac{m(\alpha) - m_2(\alpha)}{m_1(\alpha) - m_2(\alpha)} \equiv \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{\partial m(\alpha)/\partial\alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial\alpha}{\partial m_1(\alpha)/\partial\alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial\alpha} \equiv \frac{\partial M/\partial\varphi - \partial M_2/\partial\varphi}{\partial M_1/\partial\varphi - \partial M_2/\partial\varphi}.$$

Производные величины η по α, а также η по φ будут равны:

$$\partial\eta/\partial\alpha = -\partial\eta/\partial(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(\alpha - \alpha_2),$$

$$\partial\eta/\partial\varphi = -\partial\eta/\partial(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(\varphi - \varphi_2),$$

где $\delta(\alpha - \alpha_2)$ и $\delta(\varphi - \varphi_2)$ - дельта-функции.

Найдем среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ (см. (8)) в области скачкообразного перехода $[\alpha_1, \alpha_2]$ в расширенном пространстве $(\alpha, m; \eta)$.

Проинтегрировав по частям выражение для среднего значения квадрата функции $m(\alpha)$:

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha)d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} m^2(\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta\alpha}\int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm,$$

и сделав замену: $dm = \dfrac{\partial m}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\alpha}d\alpha = -(m_1(\alpha) - m_2(\alpha))\delta(\alpha - \alpha_2)d\alpha$, получим соотношение:

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2\left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial\alpha}\Delta\alpha\right) - \frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2. \qquad (9)$$

Для краткости в этом выражении опущены обозначения показывающие, что значение функции m_2 берется в точке $\alpha = \alpha_2$: $m_2 = m_2(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2}$, а значение функции m_1 - в точке $\alpha = \alpha_1$: $m_1 = m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}$.

При выводе соотношения (9) значение функции $m_1(\alpha)$ - в точке $\alpha = \alpha_2$, в силу условия линейной экстраполяции, определялось как

$$m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_1}\Delta\alpha = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial\alpha}\Delta\alpha, \qquad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из выражения (9) видно, что среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$ определяется ее значениями в двух крайних точках: α_1 и α_2, а также значением производной функции в точке α_1. Причем, член выражения $\dfrac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2$ определен значениями безразмерной координаты и квадрата функции в точке α_1 только на ветви m_1.

А произведение $\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right)$ описывает «смешанное» состояние системы в точке α_2 сразу для двух ветвей функции. Этот член пропорционален среднегеометрическому между значением функции на ветви m_2 и интерполированным значением функции на ветви m_1. Несимметричность выражения в отношении двух ветвей среднего квадрата функции $m(\alpha)$ в переходной области характеризует поведение этой функции в окрестностях точек α_1 и α_2 в соответствии с принципом причинности: для рассматриваемого процесса (с заданными точками «ухода» из состояния «1» - α_1 и «прихода» в состояние «2» - α_2). До достижения точки α_1 единственно возможным состоянием системы является состояние «1», а область: $[\alpha_1, \alpha_2]$ является переходной («смешанной»).

Вернемся к вероятностному представлению функции $m(\alpha)$ в области перехода: $[\alpha_1, \alpha_2]$ на плоскости (α, m). Квадрат функции $M(\varphi)$: $M^2 = m^2 / \langle m^2 \rangle$, $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1$, играет роль плотности вероятности перехода с одной ветви функции на другую в точке $\varphi = \alpha / \Delta\alpha$, принадлежащей области $\varphi \times M(\varphi)$, где $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$.

Самопроизвольный переход неравновесного физического процесса с одного режима на другой возможен в том случае, если в переходной области $\varphi \times M(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$, ветви функции $M_1(\varphi)$ и $M_2(\varphi)$ - такие, что область неопределенности, возникающая при переходе от пространства $(\varphi, M; \eta)$ к пространству (φ, M), не меньше, чем переходная область. То есть когда выполняется дисперсионное соотношение для области перехода. Чтобы найти такое дисперсионное соотношение, рассмотрим коммутационное соотношение двух операторов $\hat{k} = i\,\partial/\partial\varphi$ и $\hat{\eta} = i\eta$: $\left[\hat{k}; \hat{\eta}\right] M = M\delta(\varphi - \varphi_2)$. Используя соотношение Робертсона — Шрёдингера и непосредственно следующее из него соотношение неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left[\left(\hat{k}^2 M, M \right) - \left(\hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^{\hat{\eta}} = \left[\left(\hat{\eta}^2 M, M \right) - \left(\hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta_M^{\hat{k}} \Delta_M^{\hat{\eta}} \geq \frac{1}{2} \left| \left(\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, получим следующие выражения в пространстве $(\varphi, M; \eta)$:

$$\left(\hat{k} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \varphi} d\varphi = -i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \eta} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -\frac{i}{2} M_2 \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - M_2 \right),$$

$$\left(\hat{k}^2 M, M \right) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \eta \partial \varphi} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right),$$

$$\left(\hat{\eta} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i\varphi\eta M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi +$$

$$+ 2i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -iM_1^2 \varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2,$$

$$\left(\overset{\wedge}{\eta^2} M, M\right) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2\eta^2 d\varphi = -\varphi\eta^2 M^2\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta M^2 \delta(\varphi-\varphi_2)d\varphi -$$

$$-2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta^2 M(M_1 - M_2)\delta(\varphi-\varphi_2)d\varphi = M_1^2\varphi_1,$$

$$\left|\left(\left[\hat{k};\hat{\eta}\right]M, M\right)\right| = \left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2\delta(\varphi-\varphi_2)d\varphi\right| = \frac{1}{2}M^2(\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{2}M_2^2.$$

При выводе этих соотношений, в области перехода $[\varphi_1, \varphi_2]$ принималась линейная интерполяция функции $M_1(\varphi)$ из области $\varphi \le \varphi_1$. Поэтому, значение разности $M_1(\varphi) - M_2(\varphi)$ и производной этой разности в точке $\varphi = \varphi_2$ равны, соответственно

$$M_1(\varphi_1) + \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_1} - M_2(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_1} - \frac{\partial M_2(\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_2}.$$

Значение функции $M(\varphi)$ в точке $\varphi = \varphi_2$ равно значению функции на второй ветви в этой точке, то есть $M(\varphi)|_{\varphi=\varphi_2} = M_2(\varphi_2)$.

Из приведенных выражений, следует,

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left(\frac{1}{2}M_2\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{4}M_2^2\left(M_1 - M_2 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_M^{\hat{\eta}} = \left(M_1^2\varphi_1 + \left(\frac{1}{2}M_2^2\varphi_2 - M_1^2\varphi_1\right)^2\right)^{1/2}.$$

Параметр $\Delta_M^{\hat{\eta}}$ определяет среднеквадратичное отклонение величины η в переходной области $[\varphi_1, \varphi_2]$ в пространстве $(\varphi, M; \eta)$. Поскольку в рассматриваемой области осуществляется переход с ветви $M_1(\varphi)$ (то есть при $\eta = 1$) на ветвь $M_2(\varphi)$ функции $M(\varphi)$ (то есть при $\eta = 0$), необходимо, чтобы среднеквадратичное отклонение величины η было равно половине интервала между ее значениями в начальном и конечном состояниях. То есть $\Delta_M^{\hat{\eta}} = 1/2$.

Накладывая это условие, получим соотношение, связывающее безразмерные величины φ_1, φ_2, M_1, M_2: $4M_1^2\varphi_1 + \left(M_2^2\varphi_2 - 2M_1^2\varphi_1\right)^2 = 1$.

Используя зависимость (9) для определения среднего значения $\left\langle m^2 \right\rangle$ перейдем к соответствующей зависимости с размерными величинами: $\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha$, α_2, m_1, m_2:

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)m_1^2 m_2\left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha}\Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}\Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2. \tag{10}$$

Дисперсионное соотношение для безразмерных параметров имеет вид:

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{2}M_2\left(M_1^2 - 2M_1 M_2 + 2\frac{\partial M_1}{\partial \varphi}(M_1 - M_2) + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi}\right)^2\right) \ge 0.$$

А для соответствующих им размерных величин его можно записать в виде:

$$(\Delta\alpha)^2\left(\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}\right)^2+2\Delta\alpha\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}\left(m_1-m_2+\left(\frac{m_1^2}{m_2}\frac{1}{\partial m_1/\partial\alpha}+\alpha_2\right)\left(\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial m_2}{\partial\alpha}\right)\right)+$$

$$+2\alpha_2 m_1\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial m_2}{\partial\alpha}\right)+m_1(m_1-2m_2)\ge 0. \quad (11)$$

Выражения (10)-(11) являются алгебраическими. Они связывают значения функций $m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}=m_1$, $m_2(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2}=m_2$ и значения их производных $\partial m_1(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_1}=\partial m_1/\partial\alpha$, $\partial m_2(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_2}=\partial m_2/\partial\alpha$ в точках $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$, соответственно, с протяженностью области перехода $\Delta\alpha$, которая отделяет точку α_2 от точки α_1.

Выражение (9) накладывает естественные ограничения на его применение для исследования процессов, описываемых преобразованными функциями и координатами: они должны быть такими, чтобы значение $\langle m^2\rangle$ не равнялось нулю. В противном случае не возможно «отнормировать» на единицу базис скалярного произведения, то есть задать алгебру, в которой есть и ноль, и единица. В частности, с помощью предлагаемого метода не могут быть описаны процессы, в которых значения m_1 и $\partial m_1/\partial\alpha$ одновременно равны нулю.

Необходимо напомнить, что соотношения (10)-(11) находились в предположении, что скачкообразный переход с ветви функции “1” на ветвь функции “2” происходит из точки α_1 в точку α_2 при однократном изменении по времени функции $\alpha(t)$. Если в другом процессе реализуются другие координаты точек α_1 и α_2, то это не приведет к изменениям вида соотношений (10)-(11). Это связано с тем, что система уравнений определяет лишь возможные комбинации параметров: $m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}=m_1$, $m_2(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2}=m_2$, $\partial m_1(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_1}=\partial m_1/\partial\alpha$, $\partial m_2(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_2}=\partial m_2/\partial\alpha$, α_2, $\Delta\alpha$ (или α_1) для физического процесса с двумя (или несколькими) состояниями, описываемыми ветвями функции $m(\alpha(t))$, со скачкообразными изменениями ее значений в какой либо области аргумента. В общем случае, полученная система (10)-(11) является недоопределенной. В результате, комбинация точек перехода, как правило, является неединственной. И поэтому, при изменении функции $m(\alpha)$ (где $\alpha=\alpha(t)$) с течением времени сначала в одном, а затем в другом направлении по α, переход может происходить (и обычно происходит) в разных точках.

Из-за инертности физических систем, в нестационарных процессах происходит “затягивание” существования текущего процесса. Другими словами, если вероятность нахождения системы в двух состояниях, описываемых двумя ветвями функции, одна и та же, то система продолжает оставаться в том состоянии, в котором уже пребывает, до тех пор, пока в результате случайной флуктуации или возмущающего воздействия (для возникновения, которых требуется некоторое время) не перейдет в другое состояние. В этом случае на плоскости с координатами (α, m) будет изображена не однопараметрическая, а разрывная гистерезисная кривая.

Необходимо также отметить, что соотношения (10)-(11) не являются инвариантным по отношению к выбору начала отсчета оси α. В предложенном методе это происходит из-за несимметричности (в силу принципа причинности) относительно параметра η состояний, характеризуемых функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, а также из-за “привязки” процесса перехода из одного состояния системы в другое к масштабу этого перехода: $\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$. В описываемых этим методом физических процессах это свойство “переходных” состояний определяется конкретными диапазонами параметров, а также наличием собственных масштабов таких процессов. Например, при описании зависимости силы сопротивления шара в потоке жидкости от числа Рейнольдса, возникает скачкообразный переход с одной ветви функции на другую при изменения режима течения жидкости от ламинарного к турбулентному. Этот переход не может происходить при малых значениях числа Рейнольдса. Минимальное - критическое значение этого числа, а также диапазон значений чисел Рейнольдса при которых возможен такой переход, можно считать масштабами переходного процесса.

Практически все процессы в природе, совершающие скачкообразные переходы между различными состояниями, могут быть описаны непрерывными функциями, имеющими в области перехода разрыв производных в одной или нескольких точках. Однако эти функции имеют, как правило, вероятностную – стохастическую природу либо во всей переходной области, либо в какой-то ее части. Принятое математическое приближение описания зависимости $m(\alpha)$ в виде функции с разрывом первого рода, позволяет в некоторых задачах определить размер и/или положение этой области, используя информацию о значениях функции и ее производных только на ее границах. Рассмотрим применение этого метода на примере ламинарно-турбулентного перехода в задаче Куэтта из главы 2.

3.2. Описание переходных режимов течения вязкой несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта.

В главе 2 процедура расширения фазового пространства за счет введения «стохастической» переменной была применена к описанию течения вязкой несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта. В результате, были обнаружены два решения, одно из которых соответствует ламинарному, а второе (5) – турбулентному режиму течения жидкости.

По-видимому, определение критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения, непосредственно из предложенного метода расширения фазового пространства с помощью «стохастической» переменной, вряд ли возможно. Поэтому вернемся к рассмотренному выше методу описания «разрывных» функций и попробуем использовать для этой цели его.

Ламинарный режим течения жидкости, характеризуется линейным профилем скорости: $\widetilde{V} = \widetilde{y}$. Турбулентный режим описывается соотношением (5).

Таким образом, ламинарный и турбулентный режимы течения можно характеризовать различными функциями скорости или градиентами скорости, например, вблизи точки перегиба профиля скорости:

$$\widetilde{V} = \begin{cases} \widetilde{y}, & \textit{ламинарный} \\ \dfrac{sh\left(\sqrt{a}\,\widetilde{y}\right)}{sh\sqrt{a}} e^{\frac{4a}{\mathrm{Re}}\widetilde{y}\widetilde{s}}, & \textit{турбулентный} \end{cases}, \quad \text{где} \quad a = a(\mathrm{Re}) .$$

или

$$\left.\frac{d\widetilde{V}}{d\widetilde{y}}\right|_{\substack{\widetilde{y}=0 \\ \widetilde{s}=0}} = \begin{cases} 1, & \textit{ламинарный} \\ \dfrac{\sqrt{a}}{sh\sqrt{a}}, & \textit{турбулентный} \end{cases}. \tag{12}$$

Продифференцировав второе уравнение в соотношении (12) по $\sqrt{a}$, можно показать, что функция $f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}/sh\sqrt{a}$ является монотонной в области определения $a > 0$, поэтому можно обозначить: $m = d\widetilde{V}/d\widetilde{y}\Big|_{\widetilde{y}=0,\widetilde{s}=0}$ и $\alpha = \sqrt{a}/sh\sqrt{a}$, и перейти к функции и переменной, используемых в соотношениях (10)-(11):

$$m(\alpha)=\begin{cases}1, & ламинарный\\ \alpha, & турбулентный\end{cases}.$$

Из экспериментов известно, что при малых числах Рейнольдса может быть только ламинарный режим течения, а при больших – как ламинарный, так и турбулентный, поэтому ветвью решения: $m_1(\alpha)=1$, следует обозначить решение, соответствующее ламинарному режиму, а ветвью решения: $m_2(\alpha)=\alpha$, следует обозначить решение, соответствующее турбулентному (стохастическому) режиму течения жидкости.

Обозначим $\alpha_2=\alpha_2\left(a_{кр}(\mathrm{Re}_{кр})\right)$ - значение α, определяемое критическим числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$, при котором становится возможен «приход» на ветвь «2», тогда

$$m_1 \overset{def}{=} m_1(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}=1,\quad \partial m_1/\partial\alpha \overset{def}{=} \partial m_1(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_1}=0,$$
$$m_2 \overset{def}{=} m_2(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2}=\alpha_2,\quad \partial m_2/\partial\alpha \overset{def}{=} \partial m_2(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_2}=1.$$

Подставляя значения функций и их производных в соответствующих точках в уравнение (10), получим зависимость:

$$\frac{\alpha_2^6}{\Delta\alpha^2}-5\frac{\alpha_2^4}{\Delta\alpha^2}+6\frac{\alpha_2^3}{\Delta\alpha^2}-\frac{\alpha_2^2}{\Delta\alpha^2}+4\frac{\alpha_2^3}{\Delta\alpha}-6\frac{\alpha_2^2}{\Delta\alpha}+2\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}-1=0.$$

Анализируя уравнение (7) можно заметить, что с увеличением числа Рейнольдса растет значение параметра $\sqrt{a}$. При этом, значение переменной $\alpha=\sqrt{a}/sh\sqrt{a}$ уменьшается и стремится к нулю при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Кроме того, в главе 2 было показано, что нулевое значение переменной α соответствует ламинарному режиму течения. Поэтому, в том случае, если ламинарно-турбулентный переход происходит при достаточно больших значениях числа Рейнольдса, то ему будет соответствовать значение $\Delta\alpha \ll 1$. И, следовательно, полученное выражение можно записать в виде: $\alpha_2^2\left(\alpha_2^4-5\alpha_2^2+6\alpha_2-1\right)\approx 0$. Откуда следуют два действительных неотрицательных решения: $\alpha_2\approx 0$ и $\alpha_2\approx 0{,}1996$.

Первое решение: $\alpha_2=\sqrt{a}/sh\sqrt{a}\approx 0$, соответствует случаю $a\to\infty$ или $\mathrm{Re}_{кр}\to\infty$ (см. (7)). Выполнение этого условия означает устойчивость ламинарного течения Куэтта при любом сколь угодно большом значении числа Рейнольдса, что вряд ли можно считать физически реализуемым при достаточно больших значениях числа Рейнольдса.

Второе решение: $\alpha_2=\sqrt{a}/sh\sqrt{a}\approx 0{,}1996$, соответствует значению $\sqrt{a}\approx 3{,}6$ или $\mathrm{Re}_{кр}\sim 900$ (см. (7)). Достижение этого значения числа Рейнольдса означает возможность (но необязательность) перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения. При числах Рейнольдса меньше этого значения турбулентный режим течения существовать не может.

В работе [7] упоминается, что для плоской задачи Куэтта при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}<1500$ характерен ламинарный режим течения, а при $\mathrm{Re}>1500$ - турбулентный. Однако подробно вопрос определения критического числа Рейнольдса для этой задачи не рассмотрен.

Вероятно, наиболее правильной экспериментальной проверкой определения критического значения числа Рейнольдса в задаче Куэтта было бы получение такого значения числа Рейнольдса, ниже которого не возможно существование турбулентного режима, как это делается, например, в работе [9] при определении критического числа Рейнольдса в течении Пуазейля.

В задаче Куэтта-Телора (при движении жидкости, расположенной между стенок двух соосных цилиндров, вращающихся в противоположны направлениях) [10] турбулентный режим течения обнаруживают при значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 950$. Такое течение в пределе больших значений радиусов цилиндров, можно, в какой-то мере, соотнести с плоской задачей Куэтта. Экспериментальное значение числа Рейнольдса, соответствующее турбулентному режиму течения в этой задаче очень близко к теоретически определенному выше значению критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} \sim 900$.

4. Заключение

Разработан метод описания стохастических режимов течения, с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса. В таком подходе уравнения Навье-Стокса записываются в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии при возбуждении стохастических возмущений.

Такой подход позволяет найти два решения плоской задачи Куэтта: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному.

Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется линейным профилем скорости, второе характеризуется профилем скорости пропорциональным гиперболическому синусу с параметром, зависящим от значения числа Рейнольдса.

Найдено критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в плоской задаче Куэтта.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 731 с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физмалит, 2005. 288 с.
3. C. De Lellis and L. Szekelyhidi Jr. Dissipative continuous Euler flows. arXiv:1202.1751, 2012. 1202.1751.pdf.
4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.X. Физическая кинетика. М.: Наука, 2002. 536 с.
5. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса // Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. 2012. www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf.
6. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Ученые записки ЦАГИ. 2011 г. Т. XLII №1 С. 62-85.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
8. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сибирский журнал вычислительной математики 2009 г, Т12, N2, стр.231-241.
9. Павельев А.А., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Федосеев С.Г. О нижнем критическом числе Рейнольдса для течения в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ.2003 г., №4 С.35-43.
10. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ., 1955. 519 с.

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ НАД ТЯЖЕЛОЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г.Г. Цыпкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Движения воды и пара, перенос примесей в почвах и грунтах во многом определяют экологическое состояние регионов [1]. Натурные наблюдения выпадения солей в осадок свидетельствуют о неустойчивости уровня грунтовых вод, на котором происходит испарение воды или конденсация пара.

Формулируется задача об устойчивости поверхности фазового перехода, разделяющей области грунта, насыщенные водой и влажным воздухом соответственно. Предполагается, что область влажного воздуха (легкая жидкость), контактирующая с атмосферой, располагается над областью, насыщенной водой. В нижней области происходит фильтрация воды, а в верхней – диффузионный перенос пара. Система основных уравнений включает законы сохранения, закон Дарси и уравнения состояния. На поверхности раздела выполняется условие баланса массы H_2O. Течение рассматривается в полосе, ограниченной сверху атмосферой, а снизу – водоносным горизонтом. Предполагается наличие градиента капиллярного давления [2]. При постоянных граничных значениях давления и влажности задача допускает стационарное решение [3]. В зависимости от физических условий реализуются два случая, соответствующие испарению воды и конденсации пара. В режиме испарения реализуется только одно стационарное решение, а в режиме конденсации существуют два решения, соответствующие двум положениям уровня грунтовых вод.

Методом нормальных мод исследована устойчивость поверхности раздела. Показано, что поверхность испарения может быть неустойчивой только при существовании градиента капиллярного давления. В этом случае реализуется единственный тип перехода к неустойчивости, когда дестабилизация происходит одновременно при всех волновых числах (рис.1). Результаты расчетов показывают, что незначительные градиенты и абсолютные величины капиллярного давления вызывают неустойчивость конфигурации, когда легкая жидкость находится над тяжелой.

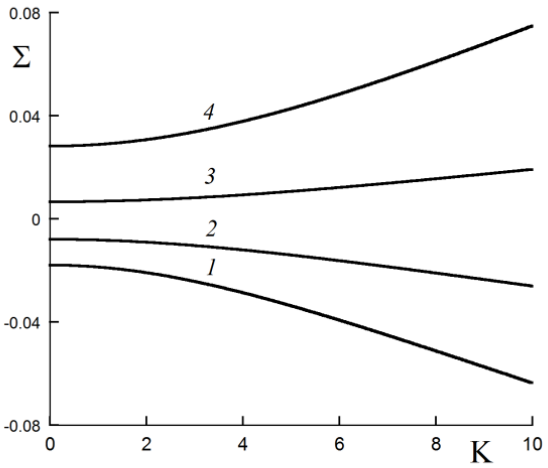


Рис.1

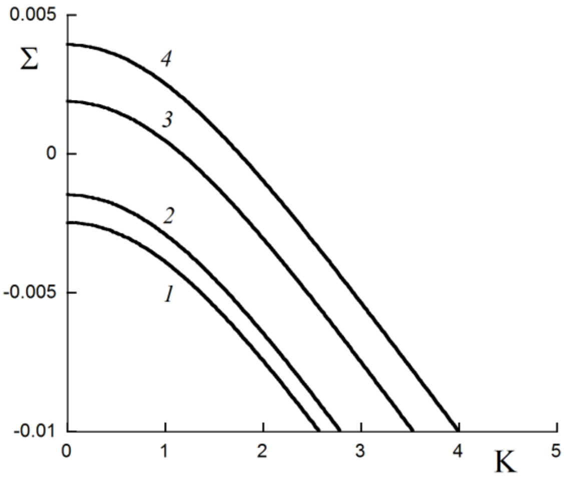


Рис. 2

Найдено, что в режиме конденсации одно решение, соответствующее меньшей глубине, всегда неустойчиво. Другое решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Найдены два сценария развития неустойчивости. Первый сценарий качественно аналогичен переходу к неустойчивости при испарении. При реализации второго сценария происходит сближение и слияние двух решений и в сверхкритической области решение стационарной задачи перестает существовать. При слиянии решений дисперсионная кривая устойчивого решения касается оси $\Sigma=0$ и потеря устойчивости происходит при нулевом волновом числе (рис. 2). Этот сценарий реализуется также в нейтральной среде с нулевым капиллярным давлением. За порогом неустойчивости рассматриваемые течения исчезают, быстро развиваясь в некоторый нестационарный режим.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №~16-11-10195.

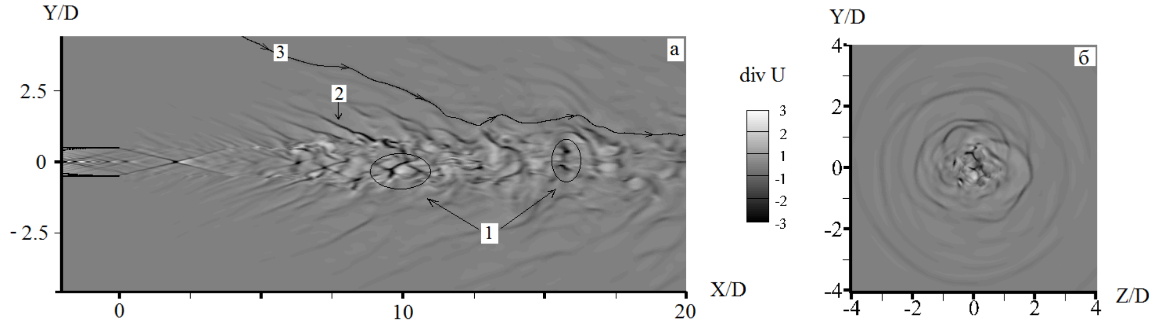
ЛИТЕРАТУРА.

1. D.A. Rose, F. Konukcu1, J.W. Gowing. Effect of watertable depth on evaporation and salt accumulation from saline groundwater // Aust. J. Soil Res., 2005, 43, 565--573.
2. В.А. Шаргатов. О неустойчивости фронта фазового перехода жидкость – пар в неоднородных пористых смачиваемых средах // Изв.РАН. МЖГ, 2017, № 1, 148-159.
3. A.T Il'ichev, G.G. Tsypkin, D.T. Pritchard, C.N. Richardson. Instability of the salinity profile during the evaporation of saline groundwater // J. Fluid Mech., 2008, 614, 87 – 104.

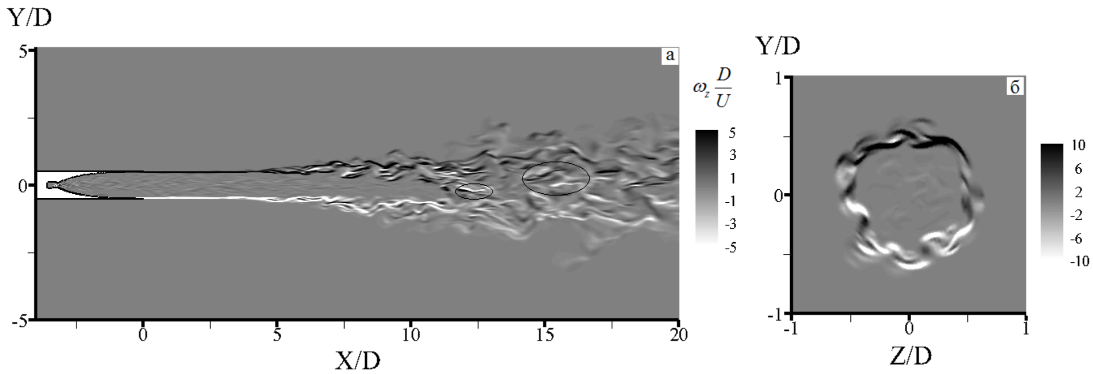
ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

С.А. Чепрасов
Центральный Институт Авиационного Моторостроения им. П.И. Баранова, Москва

По мере увеличения числа Маха влияние сжимаемости на турбулентность в струе начинает возрастать. Анализ литературы показывает, что большинство работ по струйным течениям со сверхзвуковыми скоростями ограничиваются числами Маха 3 - 4. В данной работе представлены результаты моделирования методом крупных вихрей (LES) круглой затопленной струи при числе Маха M = 5. Оцениваются возможности метода крупных вихрей при описании турбулентности и эффектов сжимаемости в случае высоких значений числа Маха. Анализируются структурные особенности турбулентности, возникающие в этом течении.



Проявление эффектов сжимаемости можно увидеть на данном рисунке, где изображено пространственное распределение значений дивергенции скорости в продольном и поперечном сечении (X=10D) струи. Это распределение обладает свойством ассиметрии, т.е. содержит области с отрицательными значениями, в несколько раз превосходящими положительные. Области, обозначенные цифрой 1, с отрицательными выбросами дивергенции являются локальными скачками уплотнения или «shocklets». Вблизи струи, так же видны скачки уплотнения. Один из таких скачков уплотнения обозначен цифрой 2. Эти скачки уплотнения являются фронтом волн Маха. Угол наклона этих возмущений к оси струи составляет $\alpha \approx 25^0$, что соответствует углу Маха для рассмотренной струи, т.е. $\sin\alpha \approx 1/Mco$, где $Mco \approx 2.4$ конвективное число Маха. В поперечном сечении эти возмущения представляют собой дуги окружности. Таким образом, возникающие вблизи поверхности струи скачки уплотнения располагаются на боковой поверхности конуса Маха. При этом траектории эжжекционного течения вблизи струи так же направлены под углом Маха. Такая картина течения вблизи струи связана с тем, что волны Маха имеют N – образную структуру и к скачкам уплотнения примыкает область с пониженным давлением, которая и направляет эжжекционное течение. Таким образом, в представленном расчете методом крупных вихрей удалось воспроизвести такие особенности течения и шума сверхзвуковой турбулентной струи, как «локальные скачки уплотнения» и волны Маха.



Важной особенностью турбулентности, которая была установлена в ходе анализа результатов моделирования, состоит в том, что в распределении завихренности наблюдаются анизатропные турбулентные структуры. На представленном рисунке эти вихри выделены овалом. Такие структуры не характерны для свободной турбулентности в дозвуковых струях, где продольный масштаб не более чем в два раза превышает поперечный. В случае больших скоростей истечения продольная компонента скорости значительно превышает поперечную и окружную, - $u_1 >> u_2 \approx u_3$. Поэтому и в уравнении переноса завихренности преобладают конвективные слагаемые вида $u_1\partial\omega_1/\partial x_1 >> u_1\partial\omega_1/\partial x_1 \approx u_3\partial\omega_3/\partial x_3$. Такое неоднородное распределение компонент конвективного слагаемого в уравнении для переноса завихренности и приводит к вытягиванию вихрей в направлении движения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00035).

О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИМЕСИ В КОЛЛОИДНОЙ СМЕСИ

Черепанов И. Н.
Пермский национальный исследовательский университет, Пермь

Коллоидные смеси состоят из жидкости носителя и примеси твердых частиц размером порядка 10-100 нм. Тепловое движение молекул поддерживает наночастицы во взвешенном состоянии, препятствуя их оседанию на дно. С течением времени в смеси формируется барометрическое распределение тяжелой компоненты, характеризующееся седиментационной длина l_s –высотой на которой концентрация примеси уменьшается в e раз [1].

Характерное время гравитационной стратификации зависит от высоты сосуда [1], в котором находится жидкость. Так при исследовании конвекции в сосудах с большим вертикальным размером возникает необходимость получить экспоненциальное распределение концентрации за меньшее время. Рассмотрим два подхода: первый - отстаивание плоского канала в горизонтальном положении, а затем приведение его в вертикальное (рис. 1), второй – отстаивание жидкости в сосуде с меньшей высотой, а затем переливание его в экспериментальную ячейку (рис.2). При обоих сценариях остается не ясным конечный профиль концентрации.

В данной работе проведено математическое моделирование процессов перераспределения примеси в коллоиде при повороте плоского канала из горизонтального состояния в вертикальное, а также при заполнении канала из емкости меньшей высоты. В основе математической модели лежат уравнения тепловой конвекции бинарной смеси в приближении Буссинеска [2]. Решение нелинейной системы уравнений, характеризующей течения смеси, производилось методом конечных объемов на базе пакета OpenFOAM.

В ходе работы исследовано влияние параметров системы на степень перемешивания коллоида и конечный профиль концентрации. Показано, что случае слабой стратификации при повороте канала перетекание происходит ламинарно, однако, даже при ламинарном течении происходит перемешивание смеси и ослабление конечного градиента плотности примерно на 10%.

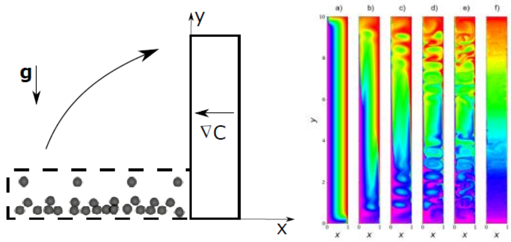


Рис. 1

На рисунке 1 приведены геометрия задачи, для первого случая, а также распределение концентрации при турбулентном течении.

В случае заполнения плоского канала (рис. 2) необходимо решать более сложную задачу, рассматривая воздух как отдельную среду. В первом приближении рассмотрим случай, когда плоский канал (1) заполнен однородной по концентрации коллоидной смесью соединен с емкостью (2) содержащую стратифицированную смесь (см. рис. 2). Моделирование показало, что в этом случае неоднородность смеси после затухания макроскопического течение в значительной мере сохраняется.

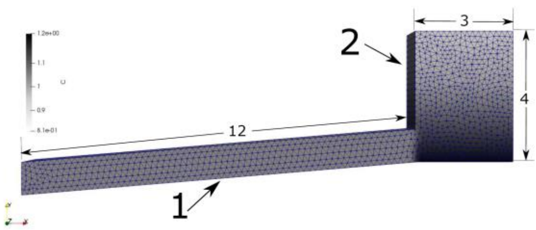


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-31-60074).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension // Journal of Magnetism and Magnetic Materials.– 1993.– Vol 122.– pp. 93-97
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений // М.: Наука.– 1989.– Вып. 0.– с. 320

АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРИ БОКОВОМ ОБОГРЕВЕ

Черепанов И. Н., Сидоров А.С., Смородин Б. Л.
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

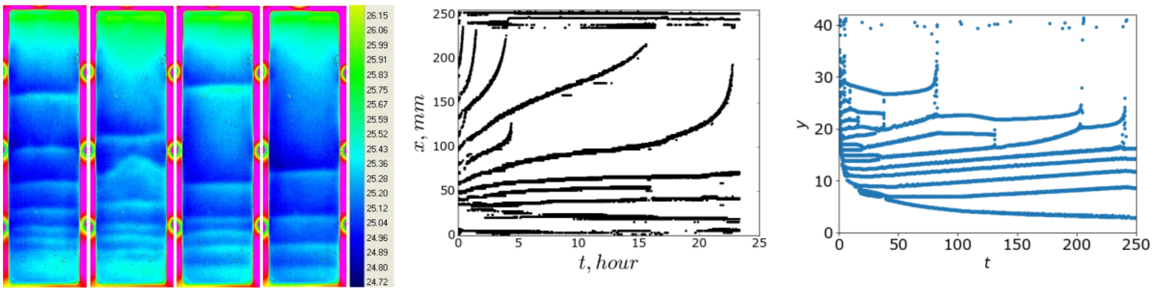
Смеси, содержащие твердые примеси, подвержены разделению в поле тяжести земли. В случае грубодисперсных сред тяжелая примесь выпадает в осадок. Если размер частиц порядка 10-100нм, то примесь способна оставаться во взвешенном состоянии за счет теплового движения молекул. Величиной, характеризующей степень гравитационной стратификации жидкости, является седиментационная длина l_s, определяющая высоту, на которой концентрация примеси уменьшается в e раз [1].

Если в неоднородно нагретой жидкости градиент температуры отклоняется от вертикали, равновесие невозможно и возникает конвективное течение [2]. При боковом обогреве ячейки с вертикально стратифицированной коллоидной суспензией могут возникать течения, отличающиеся по интенсивности и структуре от течений однородной смеси [3,4].

В работе проведено экспериментальное исследование конвекции магнитной жидкости (коллоидной суспензии) в вертикальном канале при боковом обогреве. При помощи инфракрасной камеры были получены поля распределения температуры на вертикальной границе слоя (Рис. 1а), свидетельствующие о существовании асимметричных течений: вертикальный размер ячеек растет по мере удаления от дна слоя. Обработка полученных данных позволила определить эволюцию конвективных валов во времени, определить их размер и время жизни (Рис. 1 б).

Для объяснения сложной картины пространственно-временной эволюции течений проведено численное моделирование системы в рамках приближения Буссиненска, в котором полагается линейная зависимость плотности от концентрации и температуры [2]. Показано, что начальное распределение концентрации примеси по высоте, характеризующееся экспоненциальным градиентом, может в результате эволюции приводить к образованию асимметричных слоистых течений, наблюдаемых в эксперименте.

Однако, только учет начальной гравитационной стратификации отдельных наночастиц не дает даже качественного соответствия эволюции результатов моделирования с экспериментальными. Для достижения соответствия расчетных и экспериментальных данных, необходимо учитывать возможность образования агрегатов, имеющих меньшую седиментационную длину, чем для отдельных наночастиц, а тек же сложный состав жидкости носителя. Оба этих фактора создают первоначальный профиль концентрации, характеризующийся эффективной длиной седиментации. Качественно похожая картина экспериментальных данных и результатов моделирования течения наблюдалась при выборе эффективной длины седиментации в четыре раза меньшей, чем дает оценка параметров для наножидкости.



а б в

Рис. 1

а) экспериментальные термограммы течения; б) треки границ конвективных вылов, полученные в эксперименте; в) при численном моделировании.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-31-60074).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension // Journal of Magnetism and Magnetic Materials.– 1993.– Vol 122.– pp. 93-97
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений // М.: Наука.– 1989.– Вып. 0.– с. 320
3. Черепанов И. Н. Течение коллоида в горизонтальной ячейке при подогреве сбоку // Вычислительная Механика сплошных сред.– 2016.– Вып. Т. 9, No 2.– с. 135 -144
4. Cherepanov, I.N., Smorodin, B.L. Convective Flow of a Colloidal Suspension in a Vertical Slot Heated from Side Wall// Microgravity Sci. Technol. (2017). https://doi.org/10.1007/s12217-017-9575-4

Эволюция акустического излучения ансамбля вихревых колец в воздухе

Черкасов Д.Ю., Шугаев Ф.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля.

Исследована эволюция акустического излучения от ансамбля вихревых колец в воздухе на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. Вихревые структуры (вихревые кольца и цилиндрические вихри) играют важную роль в излучении звука в газовых потоках. Исследована эволюция акустического излучения, испускаемого ансамблем вихревых колец в воздухе. Анализ основан на нестационарных уравнениях Навье-Стокса. Система уравнений Навье-Стокса сводится к параболической системе с постоянными коэффициентами при старших производных. Используются разложения искомых функций в ряд по степеням малого параметра. Завихренность определена внутри тороида при $t = 0$. Остальные параметры газа полагаются постоянными во всем пространстве в начальный момент времени. Решение выражается через кратные интегралы, которые рассчитываются с помощью сеток Коробова [1]. В результате получается решение в виде степенного ряда с кратными интегралами при постоянных коэффициентах. Первый член ряда определяет свойства акустического излучения при малой начальной завихренности, которая служит малым параметром [2]. Проанализирована эволюция осцилляции плотности воздуха вблизи ансамбля вихревых колец излучения с течением времени. Получен спектр частот колебаний плотности воздуха вблизи ансамбля вихревых колец на разных стадиях. На рисунках 1 и 2 представлены осцилляции и их спектр на ранней стадии после возмущения.

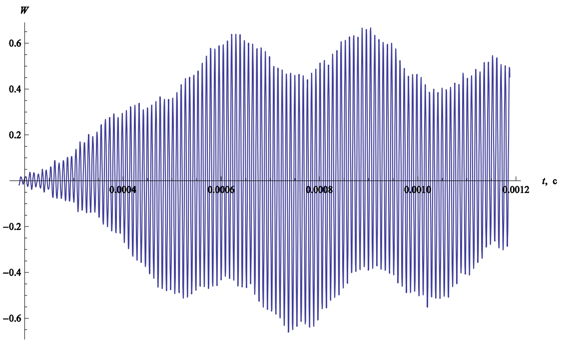


Рис. 1

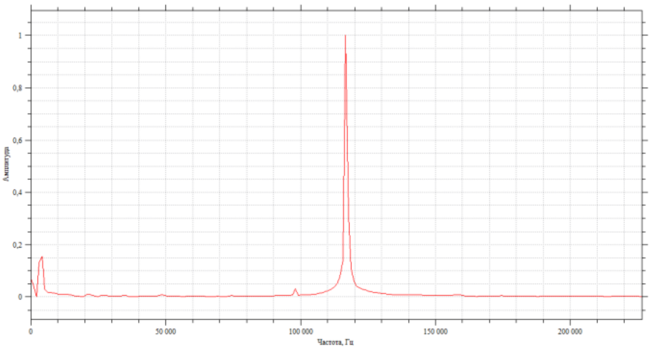


Рис. 2

На рисунках 3 и 4 представлены осцилляции и их спектр на поздней стадии после возмущения.

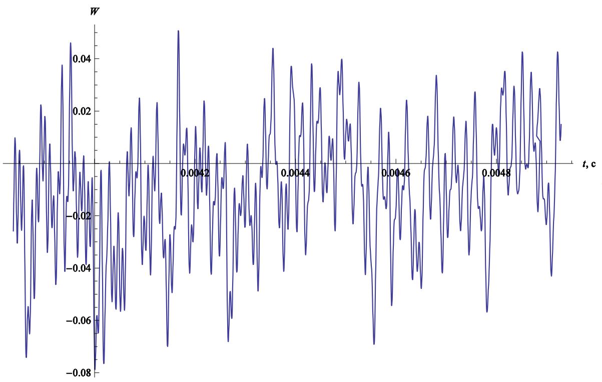


Рис. 3

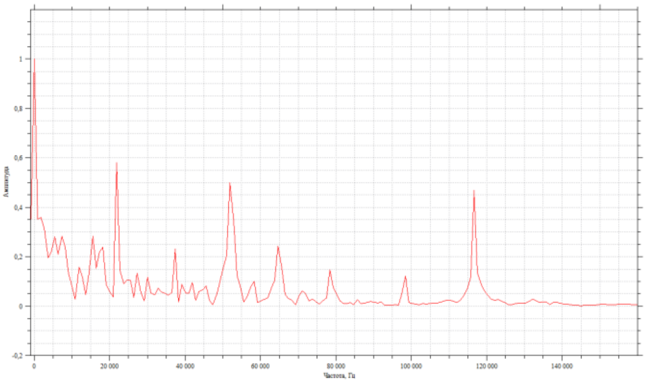


Рис. 4

Решение системы нестационарных уравнений Навье-Стокса при малой начальной завихренности использовано для исследования эволюции ансамбля. Показано, что имеет место передача энергии от высокочастотных осцилляций к низкочастотным. Одновременно происходит хаотизация течения. Сравнение осцилляций плотности в случае одиночного кольца [2] и ансамбля показывает, что во втором случае частотный спектр имеет более сложный характер, а хаотизация наступает быстрее.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Коробов, Н.М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. Shugaev, F.V.; Cherkasov, D.Y.; Solenaya, O.A. Acoustic radiation by 3D vortex rings in air. Aerospace 2015, 2, 627-636.

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ВЫСОКИЕ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА НА ОСНОВЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР И ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Sergei Chernyshenko, Chi Zhang, Hamza Butt, and Mohammad Beit-Sadi
Imperial College London, London SW7 2AZ, UK.

(С.И.Чернышенко, Ч.Жанг, Х.Бутт, М.Бейт-Сади.
Имперский Колледж, Лондон)

По известным причинам прямое численное моделирование турбулентных течений и эксперименты в аэродинамических трубах проводятся при значениях числа Рейнольдса *Re* значительно меньших, чем те, которые реализуются во многих практических приложениях. В областях вблизи твердых поверхностей такие результаты обычно экстраполируют на более высокие числа Рейнольдса используя классическую гипотезу универсальности пристенной турбулентности, согласно которой вблизи стенки статистические характеристики течения не зависят от числа Рейнольдса, если они выражены в единицах стенки, то есть обезразмерены на основе осредненного трения на стенке и свойств жидкости. В последние годы, однако, стало известно, что крупномасштабные структуры, существующие вдали от стенки, влияют на пристенную область, и так как их статистические характеристики, выраженные в единицах стенки, зависят от числа Рейнольдса, то и характеристики пристенных течений зависят от числа Рейнольдса. Это означает, что классическая гипотеза универсальности пристенной турбулентности неверна, и требуется альтернативный метод экстраполяции статистических характеристик пристенных турбулентных течений на высокие числа Рейнольдса.

Такой альтернативный метод может быть построен на основе теории квазистационарного квазиоднородного взаимодействия крупномасштабных структур и пристенной турбулентности [1-3]. В этой теории все величины обезразмериваются аналогично введению классических единиц стенки, но вместо осредненного трения на стенке используется крупномасштабная составляющая трения. Соответственно, классическая гипотеза универсальности пристенной турбулентности модифицируется путем замены осредненного трения на стенке на крупномасштабную составляющую этого трения. Пример предсказания на основе этой теории показан на Рис. 1, на котором проводится сравнение хорошо известного коэффициента суперпозиции $\alpha(y,y_o)$, полученного из результатов прямого численного моделирования, с выражением для этого коэффициента через осредненный профиль скорости $U(y)$, полученным теоретически в предположении о малости амплитуды крупномасштабных флуктуаций: $\alpha(y) = (U(y) + y\mathrm{d}U(y)/\mathrm{d}y) / (U(y_o) + y_o\mathrm{d}U(y_o)/\mathrm{d}y_o)$.

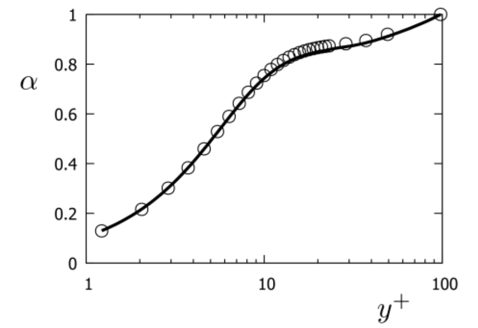


Рис.1. Коэффициент суперпозиции [2]. Теория [3] (кривая) и численный расчет (символы).

Поскольку теория [1-3] заменяет классическую гипотезу универсальности пристенной турбулентности, она может быть использована для экстраполяции результатов, полученных для одного числа Рейнольдса, на другие значения числа Рейнольдса. На Рис. 2 показано сравнение действительного изменения двухточечной автокорреляции скорости $\langle u'(y_1)u'(y_2)\rangle$ при изменении числа Рейнольдса от $Re_\tau = 2003$ до $Re_\tau = 4179$ с изменением, предсказанным теоретически на основе полной базы данных для $Re_\tau = 2003$ и данных только о крупномасштабной составляющей при $Re_\tau = 4179$.

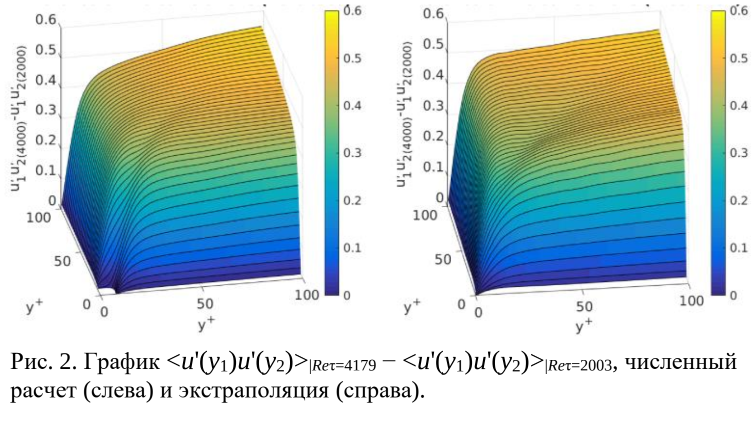


Рис. 2. График $\langle u'(y_1)u'(y_2)\rangle_{|Re\tau=4179} - \langle u'(y_1)u'(y_2)\rangle_{|Re\tau=2003}$, численный расчет (слева) и экстраполяция (справа).

Экстраполяция требует знания параметров крупномасштабной составляющей поля скорости течения, которая в реальных условиях должны быть измерена в эксперименте при числе Рейнольдса, на которое производится экстраполяция. Для такого измерения можно использовать несколько датчиков, установленных поперек потока. Такая конструкция было оптимизирована на основе базы данных о турбулентном течении, полученной численно. Сравнение действительного распределения мгновенного поля крупномасштабной составляющей скорости течения с полученным оптимизированным набором из 9 датчиков показано на Рис. 3.

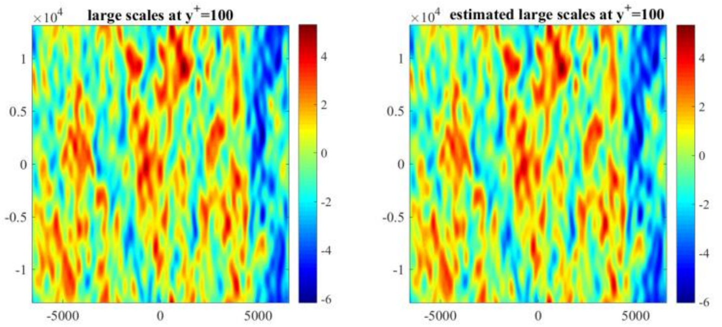


Рис. 3. Действительное (слева) и полученное с помощью датчиков мгновенно поле крупномасштабной составляющей скорости.

ЛИТЕРАТУРА.

1. S. Chernyshenko, I. Marusic, and R. Mathis. Quasi-steady description of modulation effects in wall turbulence. arXiv:1203.3714, 2012.

2. R. Mathis, N. Hutchins, and I. Marusic. A predictive inner–outer model for streamwise turbulence statistics in wall-bounded flows. J. Fluid Mech., 681:537–566, 2011.

3. C. Zhang and S.I. Chernyshenko. Quasisteady quasihomogeneous description of the scale interactions in near-wall turbulence. Phys. Rev. Fluids, 1:014401, May 2016.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ УСТАНОВКИ ПО СОЗДАНИЮ ЛОКАЛЬНОЙ ЧИСТОЙ ЗОНЫ

А.Д. Чичерина, А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский, Ю.С. Зайко, В.В. Трифонов
Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Введение. Одним из эффективных способов снижения затрат при создании комплексов чистых помещений является зонирование чистого помещения на локальные участки, которые могут отличаться друг от друга как классом чистоты воздушной среды, так и функциональным назначением. Таким образом, внутри помещения низкого класса чистоты над критичными местами технологического процесса могут быть созданы зоны более высокого класса чистоты. Устройства по созданию локальных чистых зон и обеспечению газодинамической защиты объектов применяются во всех сферах, где существуют повышенные требования к чистоте воздушной среды, например, на высокоточном производстве и в медицине.

На основе технологии формирования затопленных струй большого диаметра с увеличенной длиной начального ламинарного участка [1] разработана экспериментальная установка для создания локальной чистой зоны, которая представляет собой воздушный цилиндр высотой 800 мм и диаметром 300 мм. Данная технология заключается в следующем: в начальном потоке воздуха снижают турбулентные пульсации скорости посредством использования различных детурбулизаторов; далее поток поступает на устройство формирования профиля скорости струи, центральным элементом которого является короткий диффузор; и после прохождения диффузора полученная струя истекает в окружающее пространство. Для того чтобы предотвратить отрыв потока от стенок диффузора, на выходе из него установлена мелкопористая тканая металлическая сетка. Основной особенностью технологии является компактность формирующего струю устройства — длина формирующего устройства составляет не более полутора диаметров струи. Установка представляет собой устройство, очищающее окружающий воздух и создающее локальную чистую зону посредством формирования ламинарной струи.

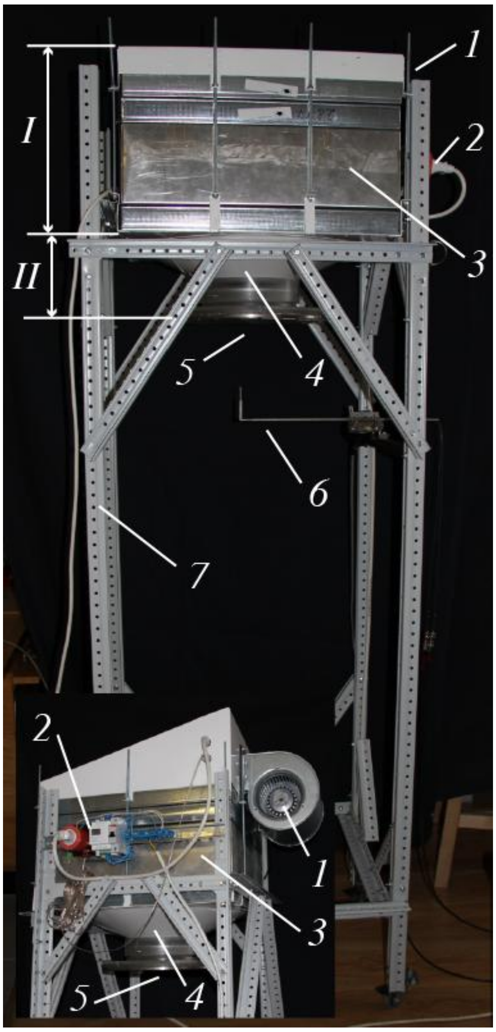
Целью данной работы является исследование течения внутри формирующего устройства, изучение полученной с помощью экспериментальной установки затопленной воздушной струи, а также оценка эффективности работы установки в смысле сохранения стерильности защищаемой зоны.

В ходе исследований проведены измерения профилей скорости и турбулентных пульсаций скорости сформированной затопленной струи на двух скоростных режимах, определена длина ламинарного участка струи. В пакете ANSYS CFX проведены численные расчёты течения в части формирующего устройства, расчёты верифицированы экспериментальными данными. Биологическое исследование установки выполнено с целью подтверждения ожидаемых свойств установки по созданию локальной чистой зоны и оценки её эффективности.

Экспериментальная установка. Установка состоит из двух блоков: блок подготовки воздуха и блок формирования и исследования струи. Первый блок включает в себя регулируемую систему подачи воздуха, нагреватель воздуха (для нагрева потока в случае необходимости) и воздушные фильтры. Второй блок состоит из устройства ламинаризации потока и устройства, формирующего затопленную струю и системы измерений. Система измерений включает в себя термоанемометрический комплекс DISA, служащий для измерения скорости и пульсаций скорости воздуха.

Фото экспериментальной установки (моноблок) представлено на фиг. 1.

Подача воздуха осуществляется с помощью электрического центробежного вентилятора (*1*), скорость вращения которого может регулироваться автотрансформатором. Вентилятор крепится на внешней поверхности входного кожуха блока подготовки воздуха. Из вентилятора воздух поступает в модуль электронагрева, расположенный внутри входного кожуха блока фильтров. Нагреватель - U-образный оребрённый ТЭН. Для регулировки температуры выходящего из установки воздушного потока используется электронное автоматическое устройство, снабженное двумя датчиками температуры (*2*). Один из датчиков служит для поддержания заданной температуры с точностью ±1 градус, а другой отключает ТЭН при случайной остановке вентилятора. В данных исследованиях нагреватель не использовался. Далее в пакете фильтров (*3*) поступающий на установку воздух проходит очистку. Используются два префильтра, обеспечивающие очистку до 5-го и 7-го классов чистоты по классификации ISO, и один HEPA-фильтр «Фильтр воздушный абсолютный высокоэффективной очистки атмосферного воздуха» с эффективностью фильтрации не менее 99.95% (класс очистки H13). Устройство ламинаризации является первой секцией формирующего устройства. Для формирования ламинарной струи необходимо выровнять поступающий поток и подавить в нём турбулентные пульсации. Сразу за HEPA-фильтром установлена равномерно перфорированная пластина с гексагональной системой круглых отверстий диаметром 3 мм и шагом 5 мм, после которой скорость потока выравнивается. После этого воздух поступает в круглый конфузор (*4*), где из-за значительного сужения канала поток ускоряется более чем в 10 раз, при этом уровень пульсаций скорости, снижается с десятков до ~2 процентов. Число Рейнольдса в узкой части канала при этом могло меняться в диапазоне 10000-80000 в зависимости от расхода воздуха.



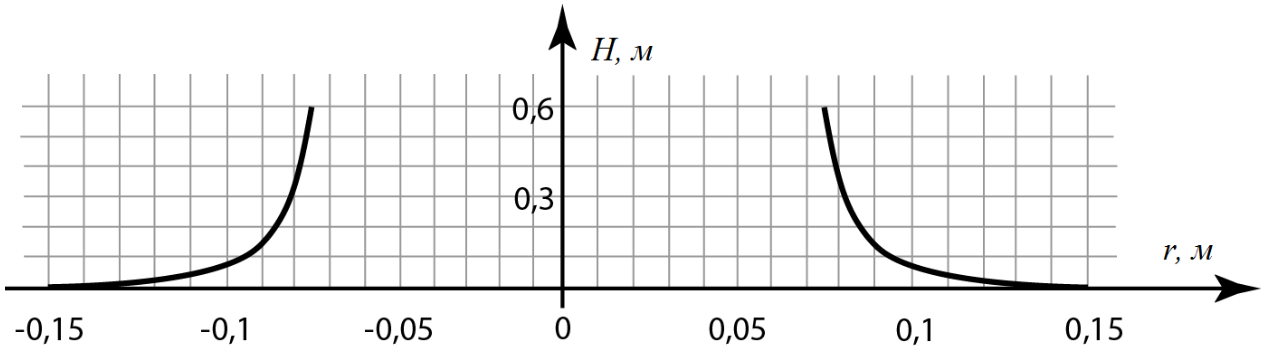
Фиг. 1. Фото экспериментальной установки: I - блок подготовки воздуха, II - формирующее устройство; 1 - вентилятор, 2 - нагреватель, 3 -фильтры, 4 - конфузор, 5 - диффузор, 6 -датчик термоанемометра, 7 - опора.

Выходной участок конфузора заканчивается профилем Витошинского, переходящим в короткий цилиндрический канал. Затем выровненный и ламинаризованный поток поступает в круглый короткий диффузор (*5*) с проницаемой перегородкой в выходном сечении, после которого формируется необходимый профиль скорости потока воздуха.

Вторая часть формирующего устройства – это круглый короткий диффузор с отношением выходного и входного диаметров равным двум, на выходе из которого установлена мелкопористая тканая металлическая сетка. Профиль канала диффузора представлен на фиг. 2. Сетка соответствует ГОСТ 6613-86, размер ячейки - 40 мкм, толщина нити из нержавеющей стали - 30 мкм. Измерения показали, что зависимость коэффициента сопротивления сетки ζ от нормальной к поверхности сетки скорости хорошо аппроксимируется выражением $\zeta = 37.84/u + 5.94$, где скорость выражена в м/с.

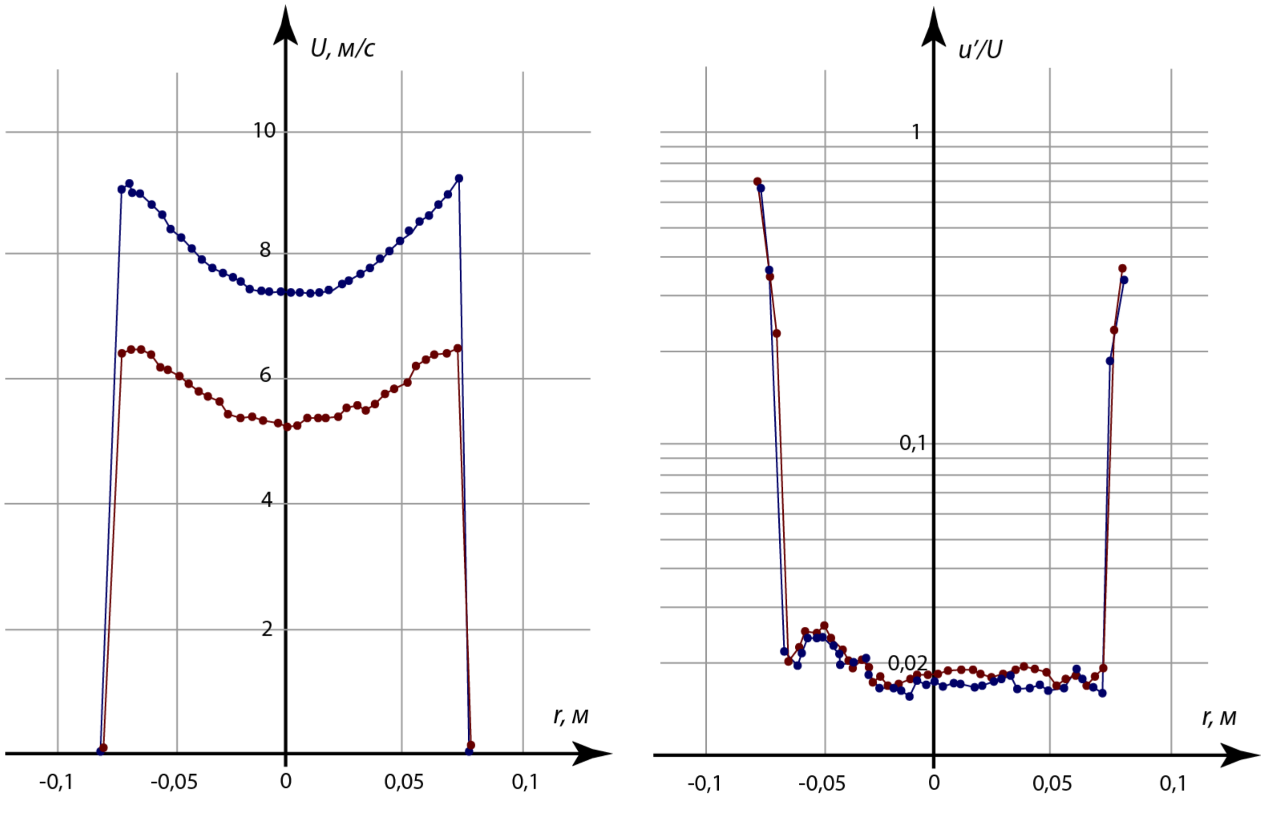
При числе Рейнольдса на уровне 20000 и при интенсивности турбулентности 2 % участок формирования профиля скорости внутри диффузора не может быть протяженным, из-за возможности интенсивного роста турбулентных пульсаций. препятствует возможности интенсивного роста пульсаций внутри диффузора.

В разработанном устройстве длина канала диффузора не превышает половины входного диаметра, что обеспечивает минимальное время формирования профиля скорости в струе и



Фиг.2. Профиль канала диффузора

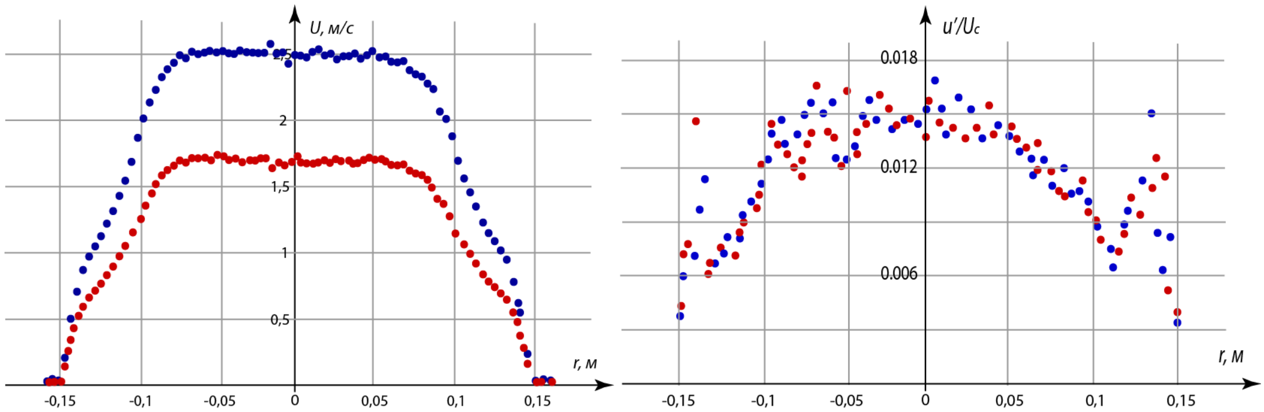
На фиг. 3 представлены профили скорости и относительных пульсаций скорости потока после прохождения сопла с каналом в форме профиля Витошинского, т.е. характеристики на входе в диффузор.



Фиг. 3. Профили скорости и относительных пульсаций скорости на входе в диффузор

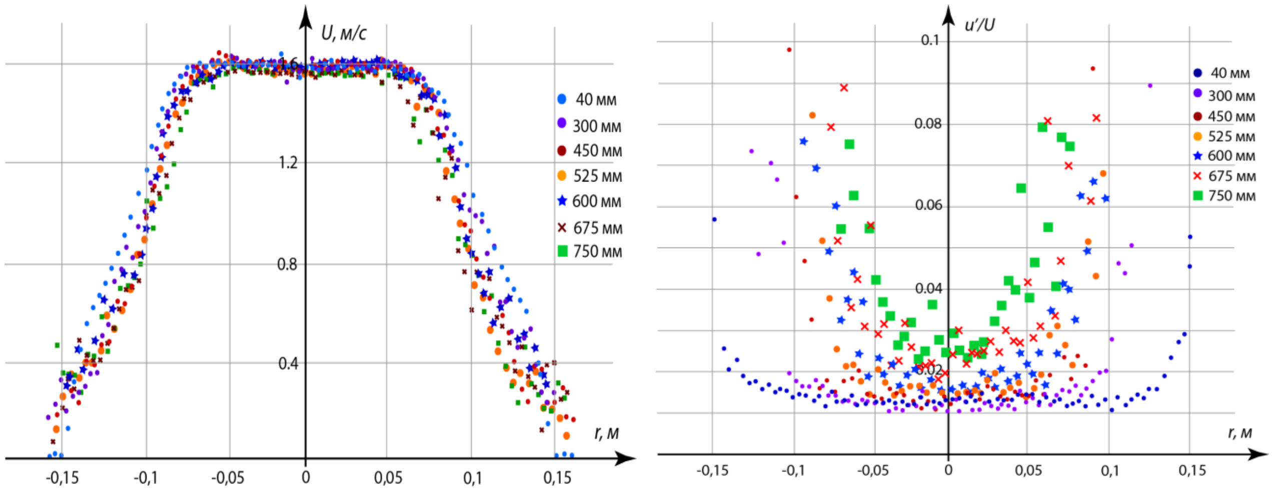
Экспериментальное исследование затопленной струи. Для измерения поля скорости использовался термоанемометр DISA 56C01 CTA с измерительным мостом 56C17. Датчик термоанемометра помещался на устройство перемещения, что позволяло измерять скорость потока вдоль радиальной координаты. Сигнал с термоанемометра передавался на аналого-цифровой преобразователь, дискретизировался и обрабатывался. Скорость измерялась проволочным датчиком малого размера Dantec Dynamics 55P11. Длина вольфрамовой нити датчика скорости составляла 1.25 мм, а толщина - 5 мкм. Датчик скорости откалиброван стандартными методами [2].

Измерения профиля скорости вдоль диаметра диффузора по различным направлениям показали, что распределение скорости на выходе из формирующего устройства практически симметрично относительно оси канала и зависит только от радиальной координаты *r*. На фиг. 4 представлены соответственно профили скорости (*а*) и относительные пульсации скорости (*б*) на расстоянии $l = 0.04$ м от выхода из формирующего устройства для различных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v_{av} D/\mu$, где $\rho = 1.2$ кг/м^3 — плотность воздуха, v_{av} — осредненная по площади поперечного сечения скорость, которая в данных экспериментах составляет 1.05 и 1.64 м/с, $d = 0.15$ м – входной и $D = 0.3$ м — выходной диаметры диффузора, $\mu = 1.79 \cdot 10^{-5}$ Па·с — динамический коэффициент вязкости воздуха. Средний расход воздуха при указанных скоростных режимах составляет 267.2 и 417.3 м^3/ч соответственно.

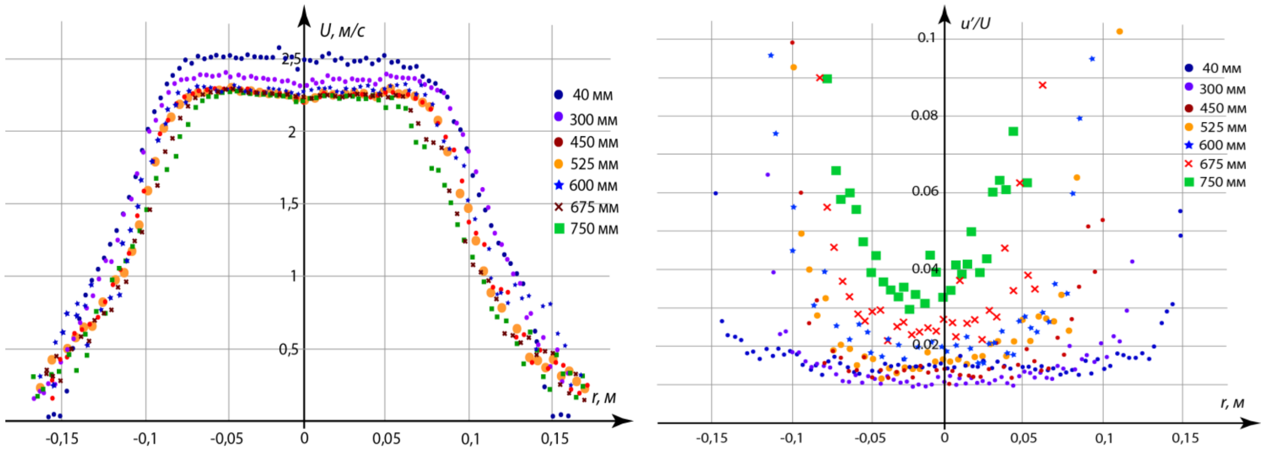


Фиг. 4. Профили скорости и относительные пульсации скорости на расстоянии 0,04 м от выхода из установки при различных Re

Эксперименты посвящены подробному измерению характеристик течения и определению длины ламинарного участка струи при числах Рейнольдса Re, равных 17700 и 33000 (скорости в центре струи U_c равны 1.6 и 2.5 м/с соответственно). Такие скоростные режимы выбраны на основе медицинских требований к установкам подобного типа для создания стерильных зон, в поле которых позволено проводить различные операции. Профили скорости и турбулентных пульсаций в поперечном сечении струи измерялись с шагом, равным одному выходному радиусу диффузора *D/2* и его половине *D/4* вдоль оси струи. Для каждого скоростного режима найдено максимальное расстояние, отсчитываемое от выходного сечения установки, на котором скорость и турбулентные пульсации меняются незначительно (профиль скорости сохраняется, а относительные турбулентные пульсации скорости остаются меньше 2 %). В работе такое расстояние называется длиной ламинарного участка струи. На фиг. 5 и 6 представлены профили скорости (а) и относительных турбулентных пульсаций скорости (б) на различных расстояниях l от выхода из диффузора при Re = 21120 и 33000 Показано, что длина ламинарного участка L_{lam} струи одинакова при заданных скоростных режимах и равна $1.75D$.



Фиг. 5. Профили скорости и относительных пульсаций скорости при Re=17700 на различных расстояниях от выхода из установки



Фиг. 6. Профили скорости и относительных пульсаций скорости приRe=33000 на различных расстояниях от выхода из установки

Измерения при фиксированном скоростном режиме показали, что скорость и начальная интенсивность турбулентных пульсаций сохраняются на оси струи на расстоянии нескольких калибров, а на определенном расстоянии, для данных скоростных режимов почти одинаковом, от выхода из установки начинают изменяться (скорость падает, турбулентные пульсации — растут). Обнаружено, что характеристики затопленной струи при меньшем числе Re изменяются медленнее.

Численное моделирование течения внутри формирующего устройства. Для иллюстрации картины течения в диффузоре и детального исследования получающегося на выходе из установки профиля скорости проведён расчёт течения внутри второго блока установки — в конфузоре, сопле и диффузоре.

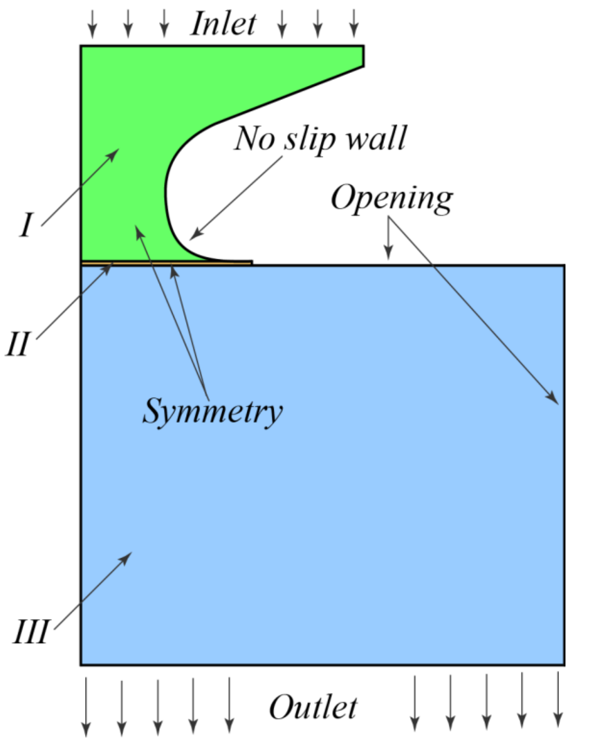
Методом контрольных объёмов в пакете ANSYS CFX решены уравнения Навье-Стокса и смоделировано установившееся ламинарное течение внутри экспериментальной установки (т.к. эксперименты показали невысокий уровень интенсивности турбулентности в формирующем устройстве после прохождения потоком фильтров). Вычислительная область включала в себя часть, соответствующую второму блоку установки (конфузор, сопло, короткий круглый диффузор, комбинация сеток на выходе из диффузора), и открытую часть, соответствующую окружающей среде.

Течение в формирующем устройстве — осесимметричное. Расчетная область – сектор с полярным углом 5° рабочей части установки, на обеих вертикальных стенках поставлено условие симметрии. Решена плоская задача течения внутри установки. Расчетная область разделена на три домена: первый домен соответствует течению в формирующем устройстве, второй — течению сквозь комбинацию сеток, установленных на выходе из диффузора, третий — окружающему пространству (фиг. 7).

Первый и третий домены являются жидкими доменами, течение описывается уравнениями Навье-Стокса, жидкостью в данном случае является воздух с динамическим коэффициентом вязкости $\mu = 1.79 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Второй домен, соответствующий проницаемой перегородке на выходе из диффузора, моделируется изотропной пористой средой, для описания которой используется дополнительный источниковый член $\vec{S}_M$ в правой части уравнения движения. Потеря количества движения задается с помощью коэффициента проницаемости K_{perm} и коэффициента сопротивления K_{loss} следующим образом:

$$\vec{S}_M = -\frac{\mu}{K_{perm}}\vec{U} - K_{loss}\frac{\rho}{2}\left|\vec{U}\right|U,$$

где μ и ρ — динамический коэффициент вязкости и плотность жидкости соответственно, $\vec{U}$ — скорость потока. Экспериментально исследовано сопротивление используемых сеток. Показано, что перепад давления на пакете сеток хорошо аппроксимируется формулой



Фиг. 7. Расчетная область и граничные условия

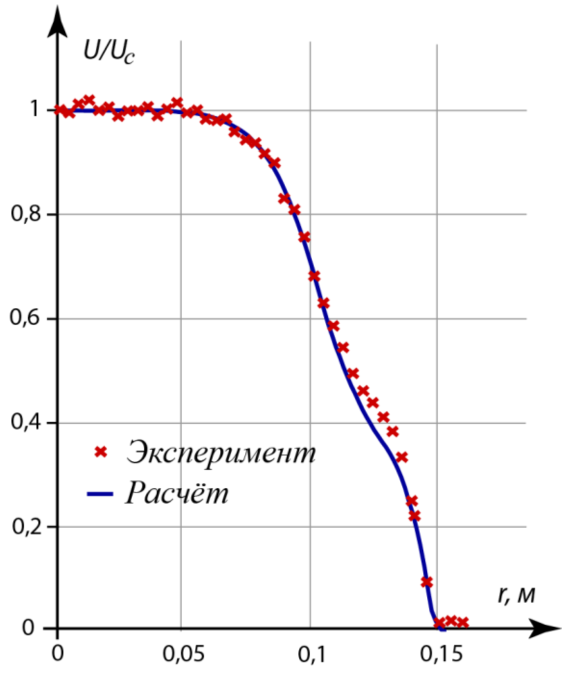
$$\Delta p = K_1 U^2 + K_2 U\,, \qquad (1)$$

где U — осевая компонента скорости набегающего потока $\vec{U}$, Δp — перепад давления, измеренный экспериментально, K_1 = 4.3 *кг/м*, K_2 = 35.7 *кг/м·с*^{2}. Значения коэффициентов проницаемости и сопротивления выбраны так, чтобы обеспечить перепад давления в пористом домене равным полученному экспериментально при выборе соответствующего пакета сеток. Значения K_{perm} = 1,2388·10^{-10} м^2 и K_{loss} = 39606,67 м$^{-1}$ заданы согласно формуле (1).

Поставлены следующие граничные условия (фиг. 7):
1) на входном сечении расчетной области задана нормальная скорость;
2) на стенке трубы и диффузора задано условие прилипания $\vec{U} = 0$;
3) на стыке доменов, соответствующих диффузору и пористой среде, ставится условие сохранения массы и импульса потока; то же условие — на стыке пористого домена и домена, соответствующего окружающему пространству;
4) на открытых границах давление задано равным атмосферному; градиент скорости в проекции на перпендикуляр к открытым границам равен нулю;
5) на вертикальной границе расчетной области, соответствующей открытому пространству, задано статическое давление, равное атмосферному.

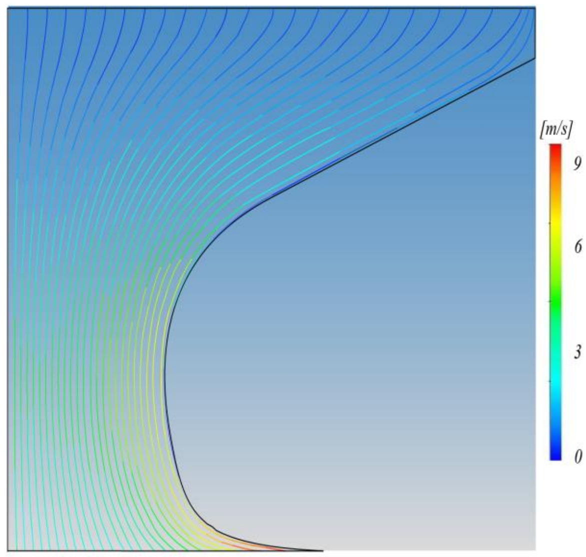
Течение смоделировано для режима, соответствующего экспериментальному скоростному режиму U_0 = 2.5 м/с, U_0 – скорость в центре струи. С целью проверки расчета проведено сравнение расчетного профиля скорости и коэффициентов, отвечающих потере давления на металлической сетке, с экспериментальными данными.

Относительная погрешность между измеренным в эксперименте $C_f^{\exp}$ и полученным в расчете C_f^{calc} коэффициентами сопротивления сеток составляет менее 2% (Таблица 1), где $C_f = \Delta p / 0.5 \rho U_c^2$, Δp — перепад давления на сетке. Из фиг. 8 видно, что профили скорости на расстоянии 0.02 м от пористого домена и профили скорости, полученные экспериментально на расстоянии 0.02 м от выхода из установки, хорошо совпадают.

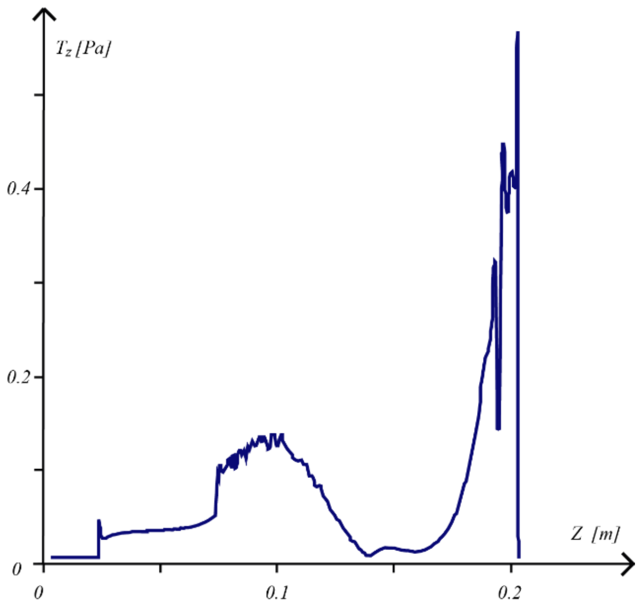


Фиг. 3.2. Сравнение расчетного и экспериментального профилей скорости.

Расчет показал, что течение при заданной входной скорости безотрывно: благодаря пакету сеток, моделируемому пористой средой, поток замедляется и расширяется. На фиг. 9 подробно показаны линии тока внутри блока формирования струи. На фиг. 10 приведен график зависимости x-компоненты касательного напряжения на стенке T_x канала от координаты x, отсчитываемой вдоль стенок конфузора и диффузора, для рассмотренного режима течения (б). Касательное напряжение всюду неотрицательно, что подтверждает отсутствие отрывных зон внутри формирующего устройства.



Фиг. 9.. Линии тока внутри формирующего устройства



Фиг. 10. Касательное напряжение на стенке формирующего устройства

Таблица 1.

Относительная погрешность в C_f

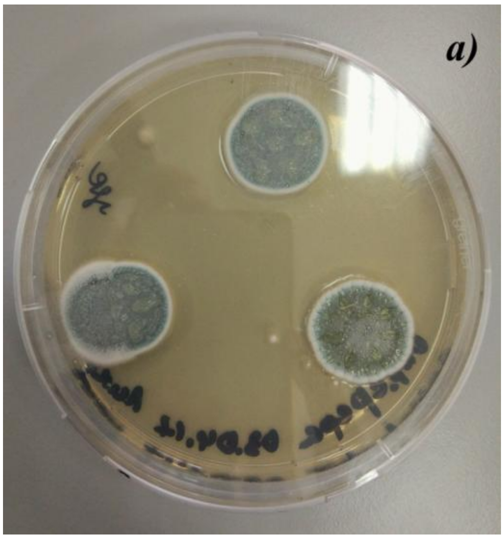
C_f^{exp}	C_f^{calc}	Относительная погрешность
21,13	21,51	1,80 %

Микробиологическое исследование установки. Микробиологические эксперименты призваны не только оценить эффективность установки по снижению микробной обсемененности воздуха и обеспечению чистоты в заданной зоне посредством создаваемой ламинарной струи, но и подтвердить результаты термоанемометрических измерений, наглядно визуализируя чистую зону и её границы отсутствием или наличием микробного роста на поверхности питательной среды в чашках Петри, в зависимости от их расположения: внутри, вне или на границе исследуемой струи (чистой зоны), соответственно.

Для оценки обсеменённости струи и окружающего воздуха использован модифицированный седиментационный метод. Седиментационный метод (чашечный метод) является наиболее простым методом для изучения микрофлоры воздуха, хотя и не обладает большой точностью [3]. Открытые чашки Петри с питательной средой находятся в исследуемой зоне в течение заданного срока экспозиции. Затем они должны быть герметично закрыты и помещены в термостат для культивирования. После этого проводят подсчет колониеобразующих единиц (КОЕ), которые видны глазом. Если применять чашки одного диаметра при одном сроке экспозиции, то этот метод может быть использован для получения сравнительных данных по бактериальному загрязнению воздуха. Модификация метода заключается в искусственном обсеменении воздуха, объяснение необходимости которого дано ниже.

В данной работе в качестве питательной среды был выбран Plate Count Agar, который не содержит ингибиторов и индикаторов и используется для определения общего числа микроорганизмов. Его состав: K_2HPO_4 (1,5 г/л), KH_2PO_4 (0,75 г/л), $MgSO_4$ (1,0 г/л), $(NH_4)_2SO_4$ (4,0 г/л), NaCl (1,0 г/л), дрожжевой экстракт (2,5 г/л), гидролизат казеина (5,0 г/л), глюкоза (1,0 г/л).

На экспериментальной установке непрерывно проводилась исследовательская работа, вследствие чего воздух в комнате стал очищенным. Это подтверждается экспериментально: после экспозиции в течение 2 часов открытых чашек Петри с питательной средой, находившейся в комнате вне зоны действия установки, с последующим культивированием в комнате вне зоны действия установки, с последующим культивированием в термостате было зафиксировано не более 3 КОЕ/чашку (фиг. 10).



Фиг. 10. Фото результата эксперимента без искусственного обсеменения окружающей среды: чашка Петри находилась вне струи.

Поскольку во время микробиологических экспериментов установка в час пропускает через фильтр в среднем 200-250 м^3 воздуха, то количества загрязняющих частиц в воздухе оказалось недостаточно для оценки эффективности работы установки.

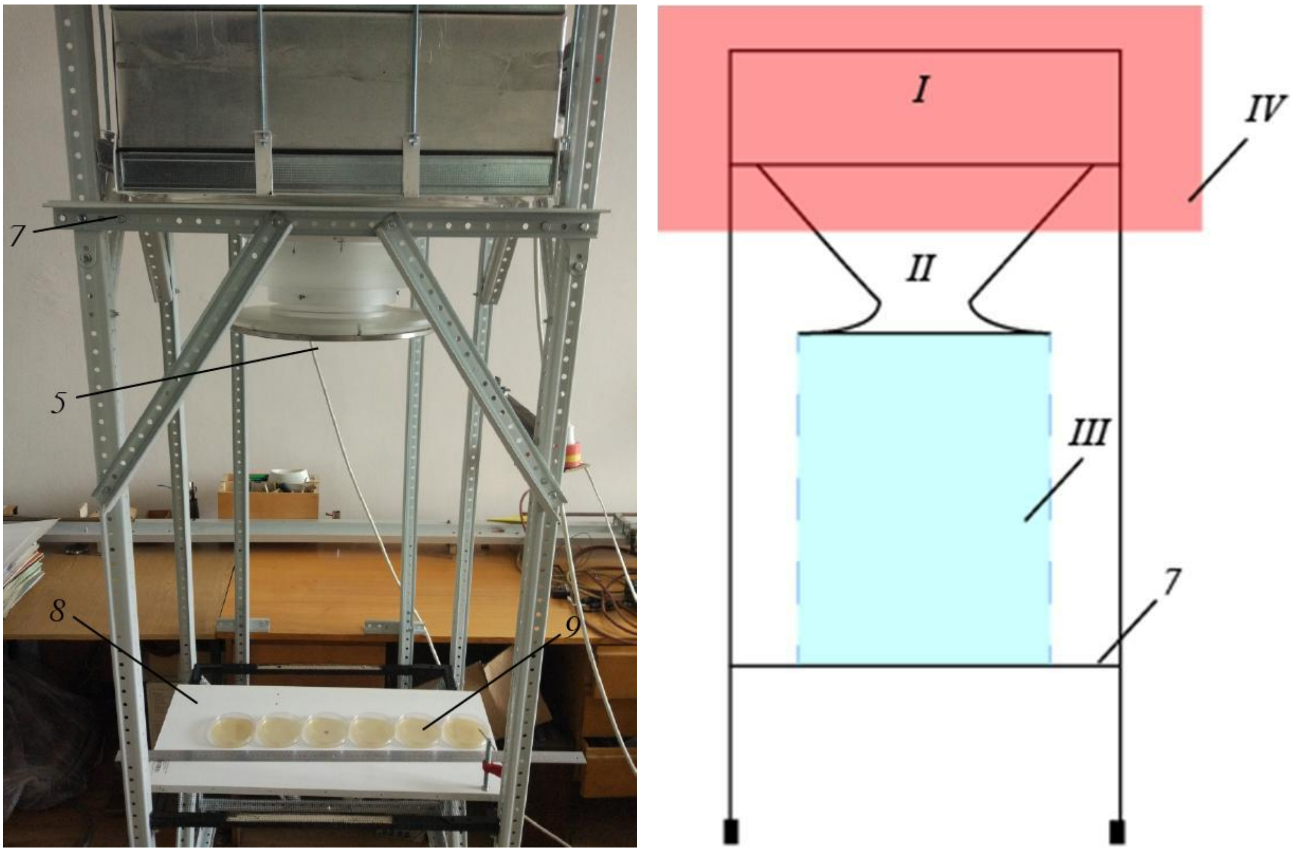
В дальнейшем были проведены исследования при искусственном обсеменение воздуха. Для этих целей был использован водный раствор спор нескольких представителей рода *Bacillus* в дистиллированной воде (*Bacillus subtilis, Bacillus amyloliquefaciens, Bacillus megaterium*). Данный вид микроорганизмов используется как пробиотики, клинически доказана его безопасность для людей и животных. Используемый раствор содержит 10^8 КОЕ/мл.

Распыление раствора производилось в непосредственной близости от установки – в зоне IV: на уровне ее верхней части по периметру блока I подготовки воздуха (схема на Фиг. 1), что позволило использовать предложенный метод оценки эффективности работы установки. Общий объем раствора, использованного в одном эксперименте, составил 36 мл. Для исследований использовались чашки Петри диаметром 90 мм, если не оговорено иное. Распыление раствора происходило каждые 10 минут в течение 1 часа.

Экспериментальная установка представлена на фиг. 11, а также на фиг. 1. Рабочее место (стол) представлено в виде закрепленной на опоре *7* твердой поверхности *8*. На этой поверхности были установлены чашки Петри с питательной средой *9* (фиг. 11). При необходимости расстояние *l* между выходом из диффузора и рабочим местом изменялось путем перемещения по вертикали поверхности *8.* Расстояние l=800 мм является рабочим расстоянием, т.е. таким расстоянием между выходом из диффузора и столом, на котором необходимо обеспечить желаемый класс чистоты круглой зоны диаметром 300 мм на столе. Поэтому в случае исследований при l=800 мм поверхность *8* непроницаема (выполнена из дсп). При других значениях *l* поверхность *8* проницаема – выполнена в виде металлической сетки с целью предотвращения разрушения струи до достижения ею рабочего расстояния при натекании на поверхность и исследования обсемененности воздуха в струе на нерабочих расстояниях.

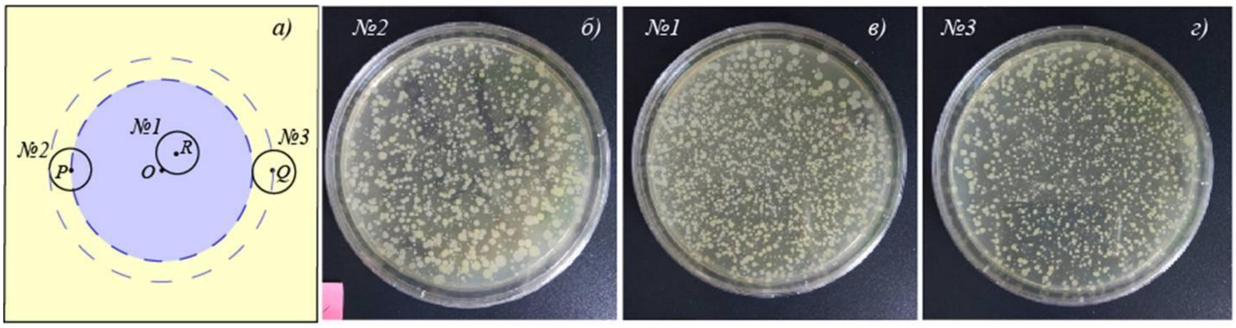
Было проведено несколько серий экспериментов: на различных расстояниях от установки до поверхности, на которой устанавливались чашки Петри, и при нагреве воздуха в струе. Температура окружающей среды была постоянной и составляла 17-19˚С.

При сохранении ламинарности струи сохраняются ее геометрические свойства, а именно, ее начальный диаметр, равный 300 мм, не изменяется. Следовательно, при сохранении ламинарности струи на чашках Петри, находившихся внутри круга диаметром по крайней мере равным 300 мм под формирующим устройством на заданном расстоянии от диффузора, не должно быть обнаружено роста колоний микроорганизмов; а на чашках, находившихся вне зоны струи, рост должен соответствовать контрольному.



Фиг. 11. Экспериментальная установка, фото и схема: I–блок подготовки воздуха, II–формирующее струю устройство, III–ламинарная струя, IV–зона искусственного обсеменения; 5–диффузор, 7–опора, 8–рабочая поверхность (стол), 9–чашки Петри с питательной средой

В ходе микробиологического исследования подтверждено, что при выбранном методе обсеменения в зоне IV (фиг. 11) распределение аэрозоля непосредственно над рабочей областью (*8*), которая должна быть расположена под струей, равномерно. Результат соответствующего эксперимента представлен на фиг. 12.



Фиг. 12. Эксперимент, подтверждающий равномерное распределение аэрозоля, когда установка выключена: а) – схема расположения чаш Петри на рабочем месте (фиолетовым выделена желаемая чистая зона диаметром 300 мм, создаваемая при включении установки),б-г) – фото результатов эксперимента. Точка О – центр струи, OP = 150 мм (б) , OR = 45 мм (в) , OQ = 200 мм (г).

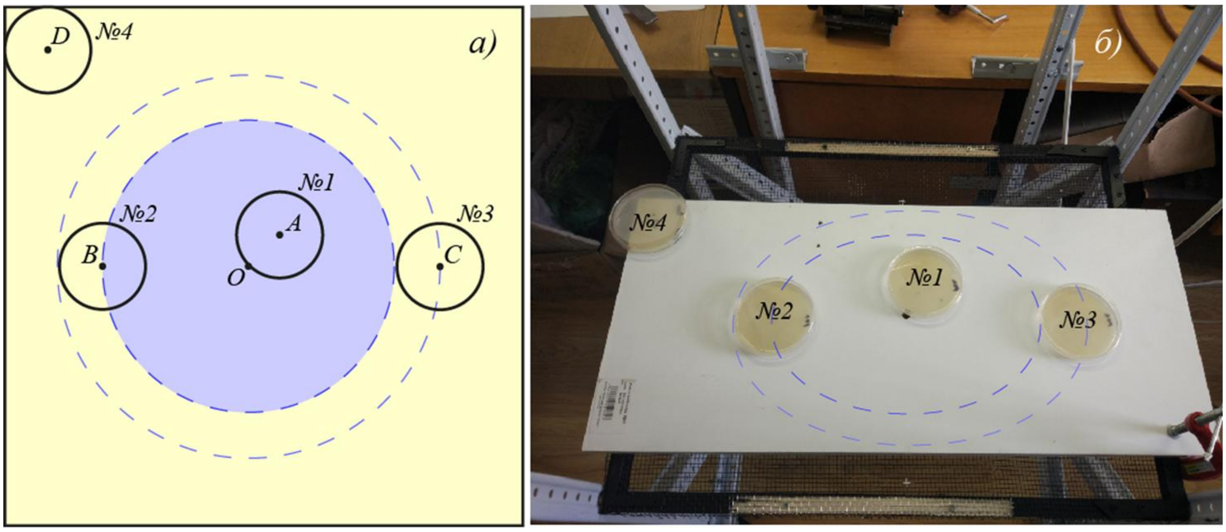
Исходя из полученных данных, вычислено приблизительно среднее число КОЕ, приходящихся на 1 см^2 поверхности, расположенной на удалении 800 мм от установки. Оно приблизительно равно 57 КОЕ/см^2 и далее использовано в качестве контрольных измерений, относительно которых была определена эффективность созданной струи при l=800 мм.

Также определена эффективность работы фильтров, входящих в состав экспериментальной установки, проверена ламинарность струи на расстоянии 150 мм от выхода из формирующего устройства.

Исследована возможность проникновения микроорганизмов в струю при l = 400 мм. Обнаружено незначительное проникновение микроорганизмов в защищаемую зону, причем содержание КОЕ в чашах Петри возрастает с увеличением расстояния от центра струи до чашки. Эффективность работы установки по созданию локальной чистой зоны диаметром 300 мм на расстоянии l = 400 мм от установки достаточна высока и составляет 99,8%.

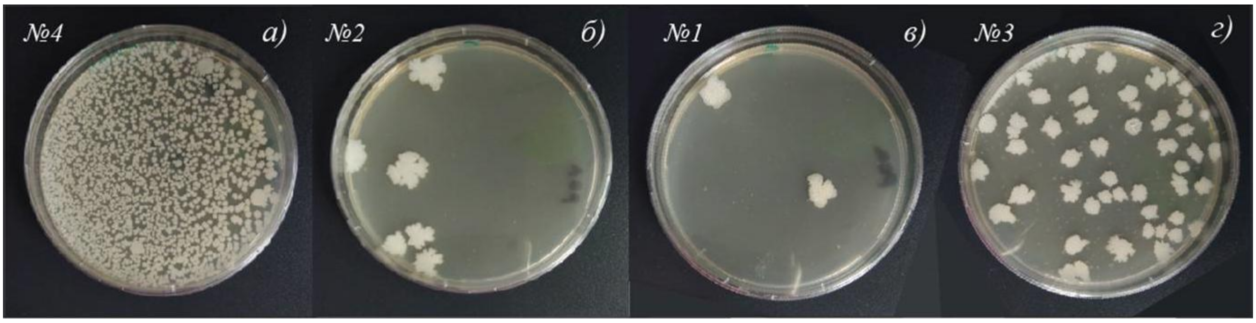
Исследована эффективность работы экспериментальной установки на рабочем расстоянии l=800 мм от выхода струи из формирующего устройства. В эксперименте было использовано 25 чашек Петри. Они покрывали всю рабочую поверхность. Результаты приведены на фиг. 13. При проведении экспериментов на повторяемость было использовано меньшее количество чашек Петри, центры чаш находились на различных расстояниях от центра струи. Расположение чаш Петри выбиралось таким образом, чтобы минимизировать их вклад в изменение характера течения при натекании струи на непроницаемую поверхность. Схема и фото расстановки чаш представлена на фиг. 14.

Фиг.13. Фото результатов эксперимента на расстоянии 800 мм от установки. Голубым выделена предполагаемая стерильная зона, точка О – ее центр.



Фиг.14. Расположение чаш Петри во время эксперимента: схема (а) и фото (б). Фиолетовым цветом выделена локальная чистая зона, созданная струей диаметра 300 мм, точка О – центр струи, OD = 330 мм, OC = 200 мм, OB = 150 мм, OA = 45 мм

Фото результатов эксперимента с сохранением ориентации чаш в пространстве представлено на фиг. 15. После обработки проб данные, характеризующие эффективность работы установки, были внесены в Таблицу 2.



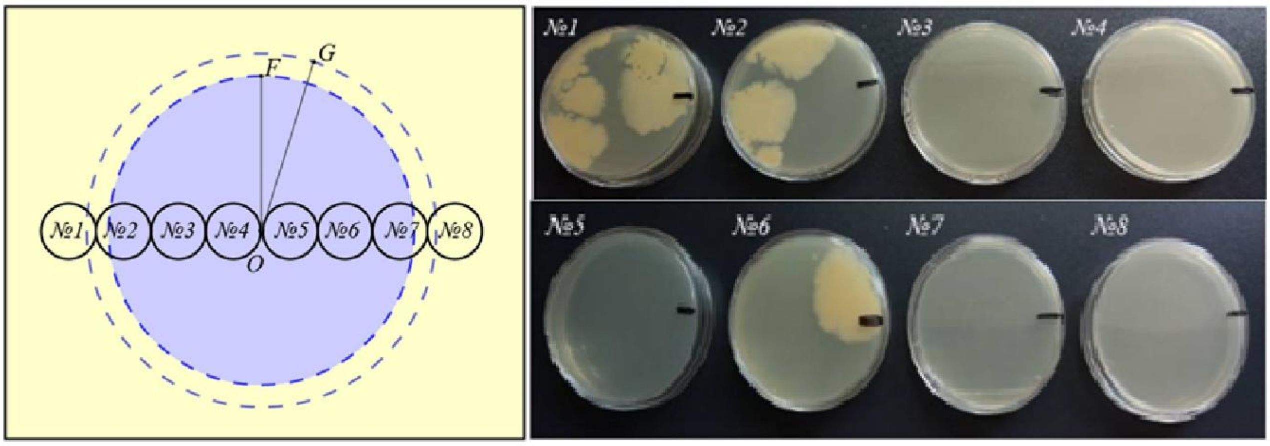
фиг.15. Фото результатов эксперимента на расстоянии 800 мм от установки без нагрева струи: а) – 56 КОЕ/см^2; б) – 6, в) – 2, г) – 53 КОЕ на чаше.

Таблица 2

Сравнительная оценка бактериальной обсемененности воздуха в различных точках на рабочей поверхности во время работы установки

Положение чаши	Номер	№1	№2	№3	№4
	Расстояние от центра чаши до центра струи	45 мм	150 мм	200 мм	330 мм
Эксперимент	КОЕ/см^2	0±0,05	0±0,15	0±1	56
	Среднее значение КОЕ на чашке	2	6	53	3521
Контроль	КОЕ/см^2	57	57	57	57
	Среднее значение КОЕ на чашке	3562	3562	3562	3562
Эффективность работы установки		99,9%	99,8%	98,2%	1,7%

С целью детального изучения распределения микроорганизмов внутри зоны, защищаемой созданной струей, был проведен эксперимент с использованием чашек Петри диаметром 55 мм. Параметры эксперимента (температура окружающей среды и воздуха в струе, расстояние между выходом струи из установки и чашами и т.п.) были сохранены. Схема расположения чаш Петри и фото результатов эксперимента приведены на фиг. 16.



Фиг. 16. Схема расположения чашек Петри диаметром 55 мм на рабочем расстоянии. OF=150 мм, OG=200 мм. Фото результатов экспериментов.

Представленные данные свидетельствуют об эффективности работы фильтров экспериментальной установки и о резком снижении содержания бактерий в воздухе на расстояниях 400 и 800 мм от работающей экспериментальной установки. Эти данные указывают на высокую эффективность изучаемой установки на рабочем расстоянии.

Заключение. На основе технологии создания затопленных струй с увеличенным начальным ламинарным участком сконструирована и собрана экспериментальная установка для создания локальной чистой зоны. Она включает в себя устройства подачи воздуха и очистки воздуха, устройство для ламинаризации потока, формирующий профиль скорости струи элемент – короткий круглый диффузор с выходным диаметром 300 мм.

Проведены экспериментальные исследования затопленных струй, сформированных на экспериментальной установке. Определена длина ламинарного участка таких струй при числах Рейнольдса Re порядка 20000-35000.

Проведено численное моделирование течения внутри формирующего устройства, результат которого хорошо согласуется с экспериментальными данными. Описано течение внутри экспериментальной установки.

Проведено микробиологическое исследование полученной чистой зоны. Для оценки обсеменённости струи и окружающего воздуха использован модифицированный седиментационный метод, для искусственного обсеменения окружающего воздуха выбран физиологический раствор, содержащий микроорганизм Bacillus subtilis. Биологические испытания установки подтверждают термоанемометрические измерения характеристик сформированных затопленных струй, визуализируя чистую зону и её границы отсутствием микробного роста на поверхности питательной среды в чашках Петри. Продемонстрирована высокая эффективность снижения микробной обсемененности воздуха при помощи экспериментальной установки, а именно более 98.2%.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Reshmin A., Sudarikova A., Teplovodskii S., Zayko J. Technology for formation of axisymmetric jet with long laminar region. Journal of Physics: Conference Series, 2017, 894, 012080.
2. Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Трифонов В.В. Турбулентное течение в круглом безотрывном диффузоре при числах Рейнольдса меньших 2000 // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 121-130.
3. Нетрусов А.И., М.А. Егорова, Л.М. Захарчук и др. Практикум по микробиологии: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. Заведений // М.: Издательский центр «Академия». 2005. 608с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ К ТВЁРДЫМ МИКРОЧАСТИЦАМ

П.В. Чувахов[1,2], А.В. Фёдоров[2,1]
[1] Центральный аэродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, г. Жуковский
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный

Частицы в атмосфере могут быть основным источником неустойчивых возмущений в пограничном слое (ПС), способных привести к ламинарно-турбулентному переходу на аэродинамически гладких телах, летящих со сверхзвуковой скоростью. Проникая в пограничный слой, частицы возбуждают волновые пакеты неустойчивых мод, которые растут вниз по потоку, достигают критических амплитуд и распадаются в турбулентные пятна. Последние сливаются друг с другом, образуя турбулентный пограничный слой.

В [1] на базе линейной теории устойчивости (ЛТУ) построена теоретическая модель восприимчивости сверхзвукового ПС к частицам, которые моделировались точечными источниками в линеаризованных уравнениях Навье–Стокса. Цель настоящей работы — проверить и расширить применимость этого подхода с помощью численного моделирования процесса восприимчивости в рамках полных уравнений Навье–Стокса. Численная модель включает три этапа: 1) расчет невозмущённого поля течения (используется собственный код HSFlow); 2) расчёт динамики движения сферической частицы в невозмущённом поле течения с использованием корреляции для коэффициента сопротивления [2]; 3) расчёт поля возмущения, порождённого частицей (собственно, трёхмерное численное моделирование). На этапе 3 точечный источник, математически пропорциональный дельта-функции Дирака, $\delta(\vec{r})$, аппроксимируется функцией Гаусса, $\delta_h(\vec{r}) = A\exp(-0.5|\vec{r}-\vec{r}_p|^2/\sigma^2)$, где $\vec{r}_p$ — вектор декартовых координат частицы, σ — определяет характерный диаметр частицы-источника, равный $2\sigma\sqrt{2}$.

Рассматривается ламинарное обтекание острого клина с полууглом раскрытия 14°, летящего в стандартной атмосфере на высоте 20 км под нулевым углом атаки, число Маха $M_\infty = 4$ (рис. а). Параметры набегающего потока: $T_\infty^* = 216.7$ К, $p_\infty = 5530$ Па, $\rho_\infty^* \approx 0.0889$ кг/м^3, $Re_1 = 7.381\times10^6$ м$^{-1}$. Поток за скачком остаётся сверхзвуковым: $M_2 \approx 3.0$. Сферическая частица с радиусом $R_p^* = 10$ мкм и плотностью $\rho_p^* = 1$ г/см^3 движется за скачком практически прямолинейно с относительным числом Маха $M_p \approx 0.8$ и числом Рейнольдса $Re_p = 2R_p^*\cdot\rho u/\mu \approx 60$. Непосредственно перед столкновением с поверхностью клина относительная скорость частицы становится сверхзвуковой, $M_p \approx 2$. Звёздочкой отмечены размерные величины; характерный масштаб длины составляет $L^* = 1$ м. Расчёты показали, что:

а) Точечный источник в уравнениях Навье–Стокса можно моделировать с помощью функции Гаусса. Он остаётся «точечным» по отношению к толщине пограничного слоя $\delta_{0.99}$ в области столкновения частицы с поверхностью клина уже при $\sigma \lesssim 5\times10^{-5}$, когда $2\sigma\sqrt{2}/\delta_{0.99} \lesssim 0.22$.

б) Сеточное разрешение частицы-источника в 3 точки по каждому направлению на длину 6σ, где $\delta_h(\vec{r})$ заметно отлична от нуля, приводит к завышению амплитуды сформировавшегося волнового пакета за областью столкновения на ≈ 3%. При разрешении в 6 точек на 6σ превышение составляет не более 1%.

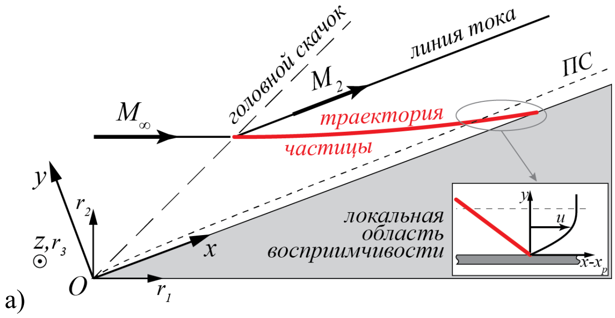
в) Наиболее важной частью полёта частицы является область пограничного слоя, в которой возбуждается до 99% интенсивности волнового пакета.

г) Выстрел частицы с поверхности клина порождает волновой пакет, интенсивность которого на 5% слабее, чем в случае полета частицы к поверхности клина. Это говорит о возможности постановки эксперимента по восприимчивости сверхзвукового ПС к частицам путём их выстрела в поток.

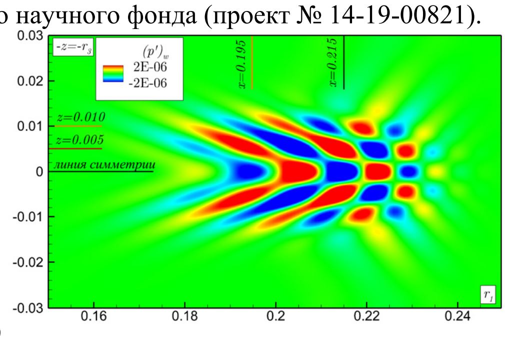
д) Эволюция формы волнового пакета (рис. б), положение максимума возмущений и углы наклона фронтов волн хорошо согласуются с результатами [1]: амплитуда волнового пакета в численном моделировании превышает соответствующее теоретическое значение не более чем на 30%.

Данные выводы подтверждают корректность теории [1] и применимость численной модели, построенной в настоящей работе.

Работа выполнена в МФТИ при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-00821).



а)



б)

ЛИТЕРАТУРА.

1. A.V. Fedorov. Receptivity of a supersonic boundary layer to solid particulates. JFM, 737, 2013, p. 105–131.
2. Crowe, C. T. Drag coefficient on particles in a rocket nozzle. AIAA J., 5(5), 1967, p. 1021–1022.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА СИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

В.И. Шалаев

Московский физико-технический институт, Центральный аэрогидродинамический институт
140182, Жуковский, МО, Россия

Абстракт

На основе анализа глобальной устойчивости структуры течения путем исследования стационарной точки в плоскости симметрии, как предполагает теория катастроф или общая теория устойчивости и бифуркаций, предложен критерий возникновения асимметрии отрывного обтекания удлиненных тел под углом атаки. Задача сведена к анализу стационарных точек нелинейной динамической системы, которая описывается уравнениями для линий тока симметричного течения. Строгие математические результаты имеются только для автономных градиентных систем, которые соответствует коническим течениям. Результаты расчетов для таких течений с использованием простой модели точечных вихрей для отрывного обтекания согласуются с имеющимися экспериментальными данными в аэродинамических трубах с очень низкой степенью турбулентности набегающего потока. Наличие критерия перехода к асимметрии позволило рассмотреть сценарии управления этим явлением. В рамках теории пограничного слоя исследованы возможности управления отрывным обтеканием тонкого конуса с помощью предложенной модели электрического разряда и нагрева поверхности.

Введение

Задача устойчивости симметричной вихревой структуры при отрывном обтекании тел при больших углах атаки имеет важные приложения и в течение последних шестидесяти лет является предметом интенсивных экспериментальных [1 – 14], численных [15 – 24] и теоретических [25 – 30] исследований. Однако причины и механизм перехода к асимметричному течению до сих пор не были определены.

Экспериментально установлено, что это явление может быть инициировано различными неоднородностями течения: малыми деформациями поверхности [1, 2, 3, 7], перемещением точки торможения [10], вдувом-отсосом газа через отверстия [11], акустическими волнами и турбулентностью набегающего потока [1, 4– 7]. Высокая чувствительность рассматриваемого явления к различного рода возмущениям порождает проблемы численного моделирования. В рамках численного уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Рейнольдса обнаружено, что на развитие асимметрии существенно влияют выбор модели среды (полные или укороченные уравнения), характеристики конечно-разностной аппроксимации, несовершенство расчетной сетки, ошибки округления чисел в компьютере [15 – 24] величина искусственной вязкости [22], которая используется, например, для сохранения устойчивости расчетов в потенциальной модели с разрывом тангенциальной скорости на вихревой пелене [24]. Для низкодиссипативных схем расчеты сильно неустойчивы, что приводит к раннему возникновению асимметрии, а для схем с большой диссипацией асимметрия может не возникнуть вообще. Существуют внешние физические причины возникновения асимметрии, которые связаны с ламинарно-турбулентным переходом [6, 8, 16] или разрушением вихря [9], однако в настоящей работе они не рассматриваются.

Имеются различные точки зрения на возникновение асимметрии: конвективное усиление генерируемых в окрестности вершины возмущений [2, 7, 11, 15 – 18, 24], либо абсолютная (бифуркационная) неустойчивость возмущений [3, 8, 16, 19, 21 – 30], которая фиксируется в укороченных моделях. Конвективная неустойчивость обнаруживалась в расчетах при использовании полных, трехмерных уравнений и объясняла развитие вниз по потоку несимметричного течения из возмущений (стационарных или нестационарных), вносимых в окрестности носка. Абсолютная неустойчивость возмущений, фиксируется в укороченных расчетных моделях и определяется характеристиками течения в отдельном поперечном сечении.

Развитие конвективной устойчивости на основе анализа решений линеаризованных уравнений Эйлера в несжимаемой жидкости для возмущений было исследовано в работе [17]. Получен, что все решения этого уравнения нейтральны и нет усиления возмущений в продольном направлении и по времени. Сравнение с результатами расчетов течений около острого и затупленного круговых конусов показало, что возникновение асимметрии обусловлено развитием нелинейной неустойчивости для возмущений малой, но конечной амплитуды.

Первые теоретические исследования возникновения асимметрии были связаны с анализом бифуркаций решений уравнений модели «вихрь-разрез» [25, 26, 28, 29]. Оказалось, что точка бифуркации решений располагается при больших углах отрыва θ_s, которые превышают углы турбулентного отрыва ($\theta_s \approx 35°$) и не согласуются с экспериментальными данными. Область ламинарного отрыва и переходный участок ($0 \leq \theta_s \leq 39°$) этой моделью не описывается.

В работе [27] анализ устойчивости симметричного решения проведен на основе анализа линеаризованных уравнений движения вихрей модели [25]. В этом случае появление бифуркации к асимметричному состоянию обусловлено обращением в ноль детерминанта линеаризованных уравнений. Однако никаких конкретных расчетов в работе не было представлено, как и сравнений с имеющимися экспериментальными данными и расчетами. Этот же метод независимо был развит в работе [28], где были получены кривые нейтральной устойчивости (бифуркации) для симметричных и несимметричных возмущений положения вихрей. Сравнение с экспериментальными данными показало, что эти кривые расположены существенно выше экспериментальных данных и результатов расчетов.

В работе [3] было предложено определять возникновение асимметрии по появлению критической точки в плоскости симметрии течения. Этот подход был реализован в работе [8] с использованием аналитической модели течения [25] и показал хорошее согласие с данными экспериментов в АДТ с низким уровнем внешних возмущений, однако никаких теоретических оснований для метода предложено не было.

В работе [28] этот критерий был уточнен - как выяснилось, появление не простой, а вырожденной критической точки в поле течения знаменует переход к асимметрии.Задача решена на основе анализа стационарных точек нелинейной динамической системы, которая описывает линии тока симметричного течения. Строгие математические результаты имеются только для автономных градиентных систем [8], которые соответствуют коническим течениям. Применение в этом случае теории катастроф [31] или теории устойчивости и бифуркаций [32], позволяет получить критерий устойчивости симметричного течения, который удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [8, 12, 33], несмотря на достаточно грубую модель течения[25]. Это указывает на то, что наряду с конвективным усилением возмущений возникновение асимметрии является внутренним свойством симметричного течения и связано с его нелинейной, структурной (или глобальной) неустойчивостью, условия для которой достигаются в определенном поперечном сечении, при повышении возмущений до определенного уровня.

Наличие критерия позволяет предложить метод управления, связанный с уменьшением угла отрыва, и оценить его возможности. Для установления нужного угла отрыва был использован электрический разряд. Трудности численного моделирования такого течения обусловлены отсутствием динамической модели влияния разряда на течение сплошной среды. Такая модель была развита [28 – 30] на основе предположения, что это воздействие описывается объемным источником потока тепла, параметры которого контролируются несколькими параметрами. К сожалению, правильность такого подхода не удается оценить по имеющимся в литературе данным, но качественно результаты расчетов совпадают с результатами экспериментов, что позволяет надеяться на адекватность предложенной модели.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим отрывное обтекание тонкого заостренного конического тела (рис. 1) с профилем поперечного сечения $Y^* = \delta lXF(Z)$, где X^*, Y^*, Z^* – декартовы координаты (рис. 1а), l – длина тела, δ – его относительная толщина, т.е. половина максимального угла раствора конуса. Предполагается, что тело и течение симметричны относительно плоскости $Z^* = 0$. Для анализа задачи используются следующие безразмерные координаты и предположения

$$X = \frac{X^*}{l}, \quad Y = \frac{Y^*}{\delta l}, \quad Z = \frac{Z^*}{\delta l}, \quad r = \frac{r^*}{\delta l}$$

$$\delta << 1, \quad \mathrm{Re} = \frac{U_\infty l \delta}{\nu_\infty} >> 1, \quad \alpha = \frac{\alpha^*}{\delta} = O(1), \tag{1.1}$$

где Re – число Рейнольдса, U_∞ – скорость набегающего потока, ν_∞ – кинематическая вязкость, α^* - угол атаки, r^* - радиус цилиндрической системы координат (r^*, θ), где угол θ измеряется от горизонтальной оси Z^*.

При условиях (1.1) решение уравнений Навье-Стокса можно искать в виде асимптотических разложений

$$u^* = U_\infty \left[1 + \delta^2 u(X,Y,Z) + \ldots\right], \quad v^* = U_\infty \delta v(X,Y,Z) + \ldots, \quad w^* = U_\infty \delta w(X,Y,Z) + \ldots$$

$$p^* - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 \delta^2 p(X,Y,Z) + \ldots, \quad \rho^* = \rho_\infty \left[1 + \delta^2 \rho(X,Y,Z) + \ldots\right]. \tag{1.2}$$

Здесь u^*, v^* и w^* есть проекции вектора скорости на оси X^*, Y^* и Z^*, p^* и ρ^* - давление и плотность, p_∞ и ρ_∞ – их невозмущенные значения.

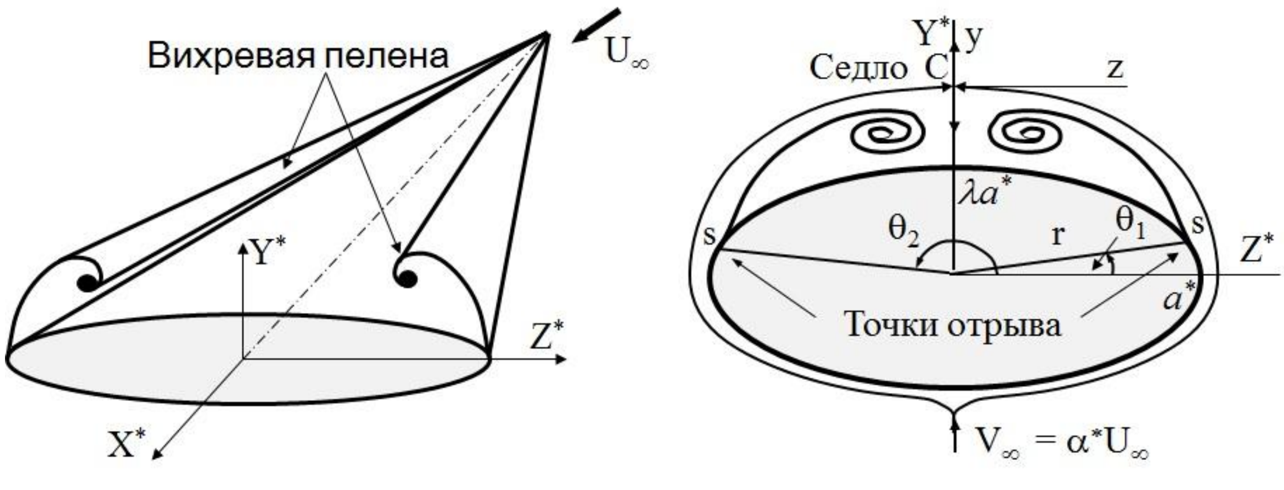


Рис.1. Схема течения

Подставив разложения (1.2) в уравнения Навье-Стокса, в главном приближении получим, что течение в плоскостях поперечного сечения описывается двумерными нестационарными уравнениями Эйлера для несжимаемой жидкости с краевым условием непротекания

$$\frac{\partial v}{\partial X} + v\frac{\partial v}{\partial Y} + w\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \; \frac{\partial w}{\partial X} + v\frac{\partial w}{\partial Y} + w\frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{\partial p}{\partial Z} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z} = 0,$$

$$\left\lfloor v - wB\frac{dF}{dZ}\right\rfloor_{Y=BF} = F\frac{dB}{dX}, \tag{1.3}$$

в которых продольная координата X подобна времени. В таком приближении углы отрыва, $\theta_1 = \theta_s(X)$ и $\theta_2 = \pi - \theta_s$ (рис. 1b), являются параметрами задачи, которые можно определить из расчетов пограничного слоя или экспериментальных данных.

Введем новые переменные:

$$x = \ln X, \quad \eta = \frac{Y}{X}, \quad z = \frac{Z}{X}. \tag{1.4}$$

Уравнение поверхности конуса можно представить как $\eta = F(z)$. Решение уравнений Эйлера (1.3) можно искать в классе разрывных потенциальных течений. Для этого введем потенциал возмущений с помощью соотношений:

$$\begin{gathered}\Phi^* = U_\infty l\left[X + \delta^2\Phi(X,Y,Z) + \ldots\right] = U_\infty lX\left[+\delta^2\varphi(\eta,z)\right],\\ u = 1 + \delta^2\left(\varphi - \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad w(\eta,z) = \frac{\partial\Phi}{\partial Z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

В этом случае задача обтекания сводится к решению уравнения Лапласа в плоскости поперечного сечения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0; \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{\eta=F(z)} = F. \tag{1.6}$$

2. Модель точечных вихрей для отрывного обтекания тел

Для проведения расчетов симметричное вихревое обтекание тонкого тела моделировалось с помощью модели [14]. В плоскости поперечного сечения, введем комплексную переменную $\zeta = z + i\eta$. Сходящая с тела вихревая пелена моделируется точечными вихрями и плоскими разрезами, связывающими их с точками отрыва S_1 и S_2 (Рис. 2). Вихри расположены в точках $\zeta_1 = z_1 + i\eta_1$ и $\zeta_2 = z_2 + i\eta_2$; их интенсивности определяются соотношениями $\Gamma_1 = 2\pi U_\infty l\delta X\gamma_1$ и $\Gamma_2 = -2\pi U_\infty l\delta X\gamma_2$. Положительное значение γ_1 соответствует вращению вихря против часовой стрелки. Точки отрыва задаются углами θ_1 и θ_2 цилиндрической системы координат (r,θ) (Рис. 2). Для симметричного решения положения вихрей связаны соотношением $\zeta_2 = -z_1 + i\eta_1 = -\bar{\zeta}_1$, углы отрыва $\theta_1 = \theta_s(\alpha)$ и $\theta_2 = \pi - \theta_s$, а интенсивности есть $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma > 0$. Для конуса с произвольной формой поперечного сечения решение находится ее отображением на круг.

Рассмотрим структуру модели [14] для кругового конуса единичного радиуса. Комплексный потенциал $\Pi(\zeta) = \varphi + i\psi$, где $\psi(z,\eta)$ - функция тока, имеет вид:

$$\Pi = -i\alpha\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{A'(X)}{2\pi X}\log(\zeta) - i\gamma_1\log\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_1}\right) + i\gamma_2\log\left(\frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_2}\right) \tag{2.1}$$

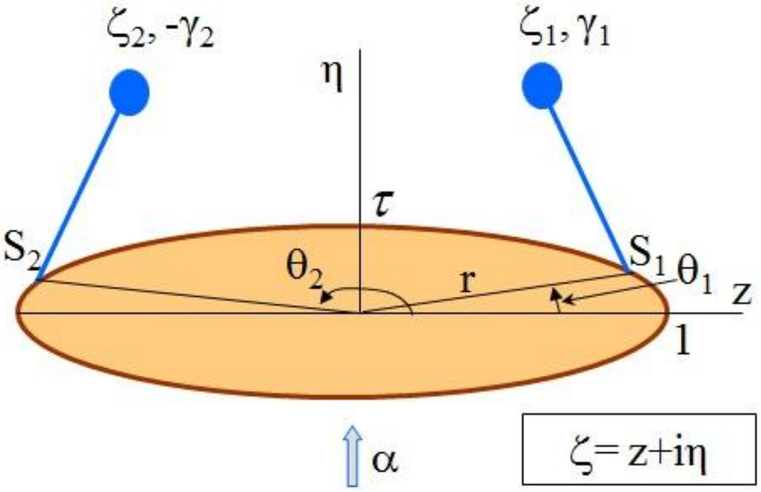


Рис. 2 Модель точечных вихрей

Для вывода уравнений, описывающих положения вихрей и их интенсивности, используются два условия: а) линия отрыва является линией тока, и вектор скорости направлен вдоль нее; б) сила, действующая на систему двух вихрей и разрезы равна нулю. Условия Кутта-Жуковского в точках отрыва (тангенциальная скорость $w_\theta = 0$) и условие равновесия вихревой системы приводят к системе шести нелинейных алгебраических уравнений [14]:

$$P_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0, \quad i = 1,..,6,$$
$$x_1 \equiv \gamma_1, x_2 \equiv \gamma_2, x_3 \equiv z_1, x_4 \equiv \eta_1, x_5 \equiv z_2, x_6 \equiv \eta_2. \tag{2.2}$$

Функции $P_i(\mathrm{x})$ имеют вид

$$P_1 \equiv \frac{\left(\zeta_1\bar{\zeta}_1 - 1\right)\gamma_1}{\left(e^{i\theta_1} - \zeta_1\right)\left(e^{-i\theta_1} - \bar{\zeta}_1\right)} - \frac{\left(\zeta_2\bar{\zeta}_2 - 1\right)\gamma_2}{\left(e^{i\theta_1} - \zeta_2\right)\left(e^{-i\theta_1} - \bar{\zeta}_2\right)} - 2\alpha\cos\theta_1, \tag{2.3a}$$

$$P_2 \equiv \frac{(\zeta_1\bar{\zeta}_1 - 1)\gamma_1}{(e^{i\theta_1} - \zeta_1)(e^{-i\theta_1} - \bar{\zeta}_1)} - \frac{(\zeta_2\bar{\zeta}_2 - 1)\gamma_2}{(e^{i\theta_1} - \zeta_2)(e^{-i\theta_1} - \bar{\zeta}_2)} - 2\alpha\cos\theta_2, \tag{2.3b}$$

$$P_3 + iP_4 \equiv \frac{i\gamma_2\left(\zeta_2\bar{\zeta}_2 - 1\right)}{\left(\zeta_1 - \zeta_2\right)\left(\zeta_1\bar{\zeta}_2 - 1\right)} + e^{-i\theta_1} - i\alpha\left(1 + \frac{1}{\zeta_1^2}\right) + \frac{i\gamma_1\bar{\zeta}_1}{\zeta_1\bar{\zeta}_1 - 1} - 2\bar{\zeta}_1 + \frac{1}{\bar{\zeta}_1}, \tag{2.3c}$$

$$P_5 + iP_6 \equiv \frac{i\gamma_1\left(\zeta_1\bar{\zeta}_1 - 1\right)}{\left(\zeta_1 - \zeta_2\right)\left(\zeta_2\bar{\zeta}_1 - 1\right)} + e^{-i\theta_2} - i\frac{\alpha}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\zeta_2^2}\right) + \frac{i\gamma_2\bar{\zeta}_2}{\zeta_2\bar{\zeta}_2 - 1} - 2\bar{\zeta}_2 + \frac{1}{\bar{\zeta}_2}. \tag{2.3d}$$

Параметрами уравнений (2.2) являются углы отрыва и угол атаки.

Уравнения (2.2) – (2.3) решались с помощью пакета “Mathematica” (Wolfram Research) для симметричного случая в диапазоне параметров $\alpha = 1.5 - 10$, $\theta_1 = \theta_s = 30^\circ - 70^\circ$. На Рис. 3 представлены зависимости от угла атаки α интенсивности вихря γ для различных углов отрыва θ_s. Из расчетов следует, что интенсивность вихря $\gamma = 0$, если $\alpha \le \alpha_v(\theta_s)$. Кривая $\alpha = \alpha_v(\theta_s)$ является границей, ниже которой решение уравнений (2.2) с двумя вихрями отсутствует. Эта кривая представлена на Рис. 4а красной линией. Следует отметить, что в этой области имеются несимметричные решения с одним вихрем.

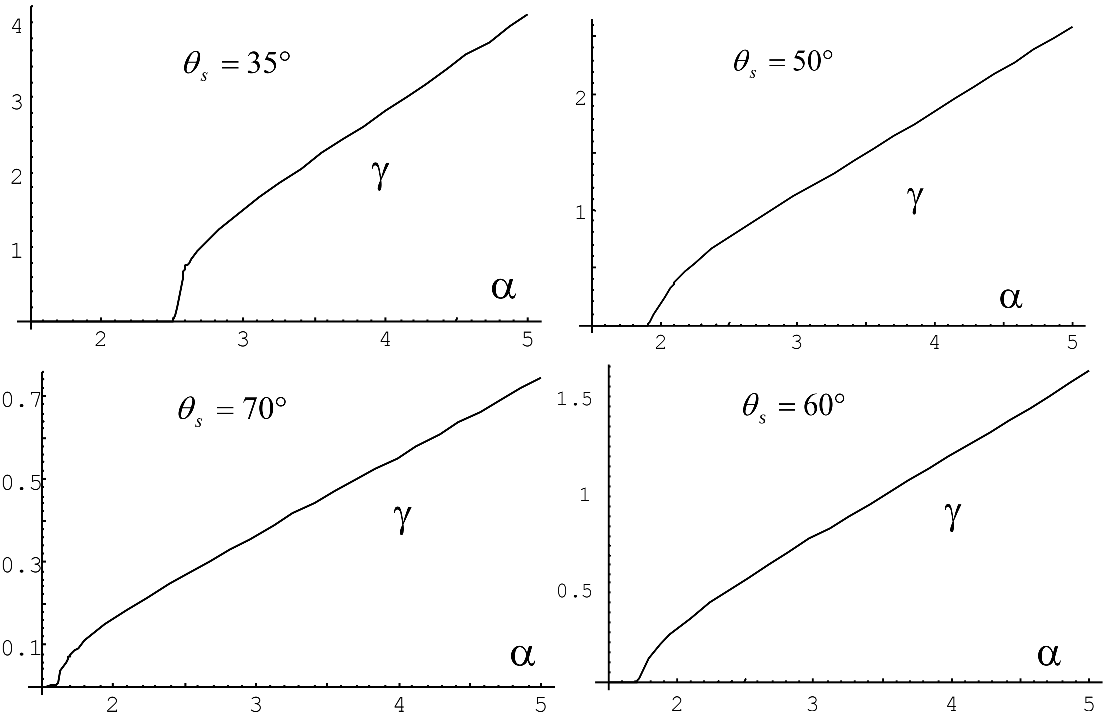
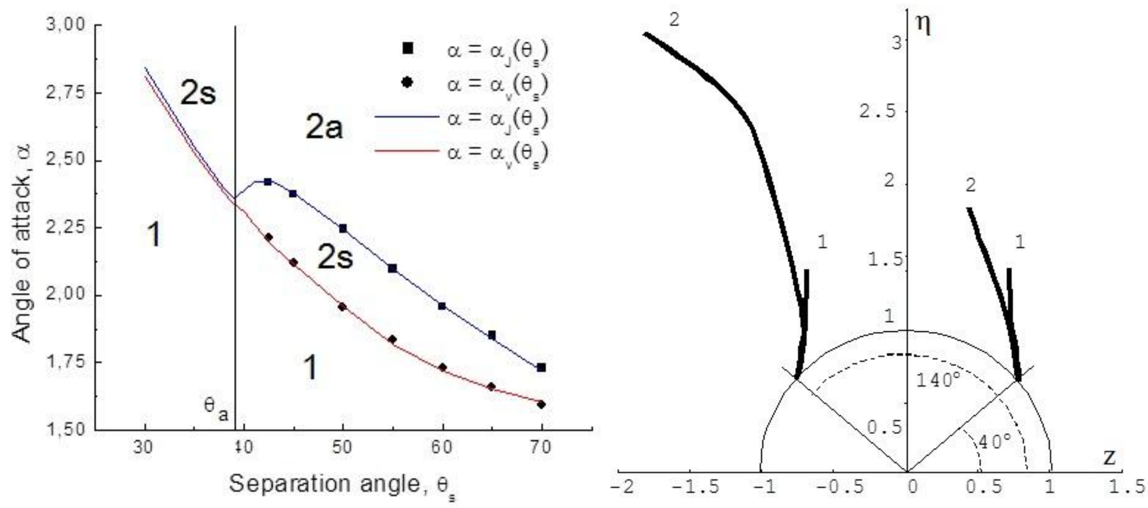


Рис. 3 Интенсивность вихря γ как функция угла атаки α для разных углов отрыва θ_s.

Для $\alpha_v(\theta_s) < \alpha < \alpha_J(\theta_s)$ имеются только симметричные решения уравнений (2.2). Верхняя граница этого диапазона, $\alpha = \alpha_J(\theta_s)$, определяется условие

$$J = \det\|P_{ik}\| = 0;\ P_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x_k}, \tag{2.4}$$

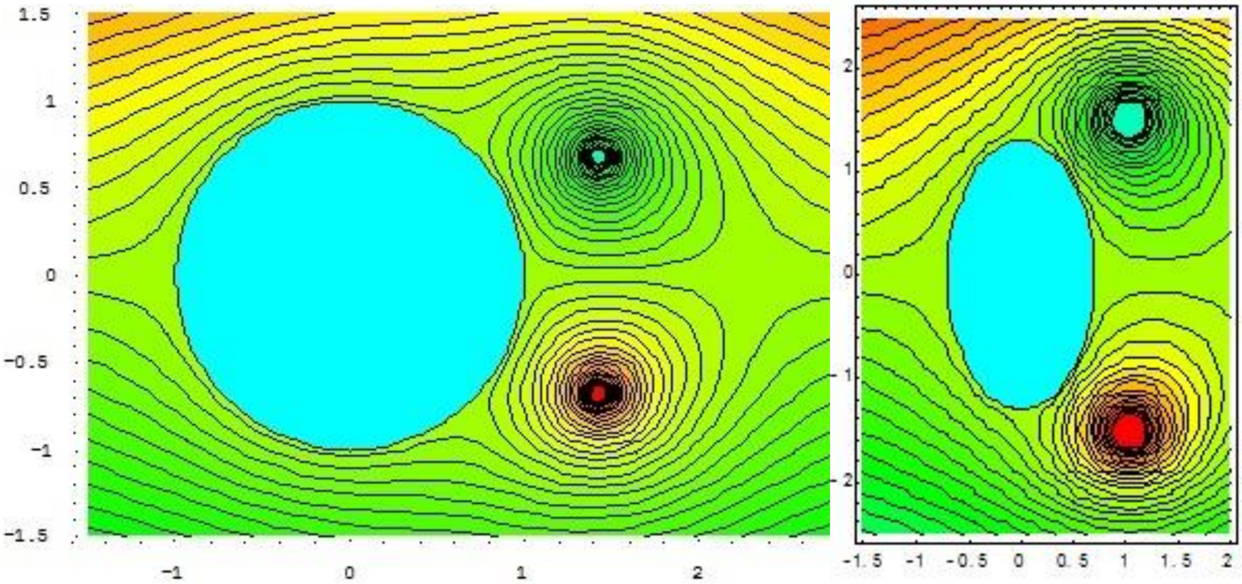
J – Якобиан системы уравнений (2.2). Кривая $\alpha = \alpha_J(\theta_s)$ показана на Рис. 4а голубой линией. Символы соответствуют расчетам [25].



а) б)

Рис. 4 Границы существования симметричных и несимметричных решений модели точечных вихрей.

При пересечении кривой $\alpha = \alpha_J(\theta_s)$, якобиан изменяет знак. Точка $\alpha = \alpha_v(\theta_a) = \alpha_J(\theta_a)$, $\theta_a \approx 39°$ соответствует бифуркации решения уравнений (2.2). В областях 2s на Рис. 4а, $\theta_s < \theta_a$, $\alpha \geq \alpha_v(\theta_s) = \alpha_J(\theta_s)$ и $\theta_s \geq \theta_a$ и $\alpha_v(\theta_s) < \alpha < \alpha_J(\theta_s)$, существуют только симметричные решения уравнений (2.2) с двумя вихрями. В области 2а на Рис. 4а, $\theta_S \geq \theta_a$ и $\alpha \geq \alpha_J(\theta_S)$, существуют симметричные и несимметричные решения, но первые неустойчивы [25].

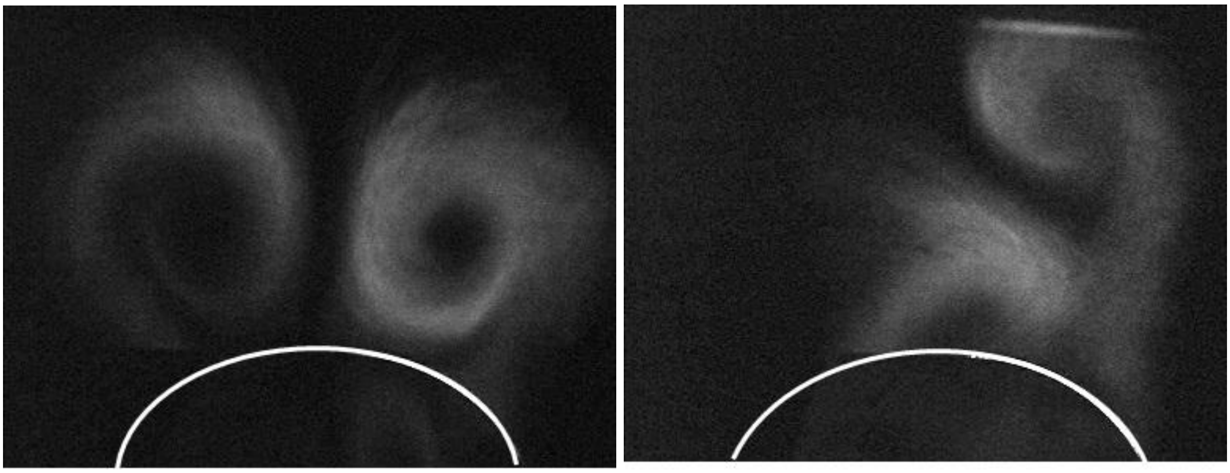


а) τ = 1, θ_s = 40° б) τ = 0,7, θ_s = 10°

Рис. 5. Структура линий тока для симметричных решений

На Рис. 4б показаны положения вихрей при разных углах атаки $\alpha = 1.5 - 10$ для симметричного (кривые 1) и несимметричного решений (кривые 2). Расчеты проведены при фиксированном положении точек отрыва $\theta_1 = 40^\circ$ и $\theta_2 = 140^\circ$, примерно соответствующие отрыву турбулентного пограничного слоя. При $\alpha = 1.5$ вихри расположены около точек отрыва, затем они отходят от поверхности конуса при увеличении угла атаки. Аналогичные результаты получены для конусов с эллиптическим поперечным сечением, при 0,01 < τ < 1.

Переход к асимметрии в этой модели начинается при достаточно больших углах отрыва, которые превышают углы турбулентного отрыва ($\theta_s \approx 35° - 40°$) и не очень хорошо согласуются с экспериментальными данными. Область ламинарного отрыва ($\theta_s \approx 0°$) и переходный участок ($0 \leq \theta_s \leq 39°$) этой моделью не описываются.



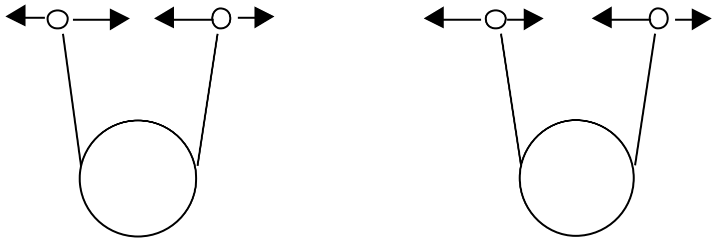
а) б)

Рис. 6 Визуальные картины течения для симметричного (а) и несимметричного (б) обтекания

Примеры структуры течения – линий тока – на основе решений модели точечных вихрей представлены на Рис. 5 для кругового конуса с τ = 1 и θ_s = 40° (Рис. 5а) и эллиптического конуса с τ = 0,7, θ_s = 10° (Рис. 5б). Визуализация линий тока в поперечном сечении около кругового конуса в аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН с помощью лазерного ножа для ламинарного течения при $U_\infty = 20$ м/с, τ = 1, θ_s = 0°, $\alpha^* = 30^o$, δ = 5° представлена на Рис. 6 для симметричного и несимметричного обтекания [17, 18]. Имеется качественное согласие расчетов с визуальными картинами течения, полученными методом лазерного ножа.

3. Устойчивость структуры течения относительно малых смещений вихрей

Рассмотрим задачу устойчивости вихревой системы (2.2 – 2.3) относительно смещения положения вихрей, которую иллюстрирует Рис. 7. Проанализируем устойчивость относительно симметричных (Рис. 7б) и несимметричных (Рис. 7а) горизонтальных возмущений центров вихрей. Если течение находится в устойчивом симметричном положении равновесия, возникающая при смещении сила возвращает вихрь в первоначальное положение. Для неустойчивого состояния сила при возмущении увеличивает смещение вихря.



а) асимметричное смещение; б) симметричное смещение

Fig. 7. Возмущение центров вихрей

Силу, действующая на возмущенную систему «вихрь+разрез», можно определить из уравнений (2.2) -2.3), рассматривая их линеаризованные возмущения:

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^{6} P_{ik}(\mathbf{x}_0)\Delta x_k, \quad i = 3,...,6, \tag{3.1а}$$

$$P_{ik}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial P_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k}, \quad \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}, x_{06}), \tag{3.1б}$$

Здесь вектор $\mathbf{x}_0$ есть некоторое решение уравнений (2.2). Углы отрыва θ_1 и θ_2 можно рассматривать как изменяемые параметры.

Для симметричных решений рассмотрим горизонтальные смещения вихрей в качестве возмущений, как показано на Рис 7, т.е $\Delta x_3 = \pm\Delta x_5 = \Delta z > 0$ и $\Delta x_4 = \Delta x_6 = 0$. В случае симметричного смещения, $\Delta x_3 = -\Delta x_5 = \Delta z > 0$, получим:

$$\Delta p_3 = (P_{31} - P_{32})\Delta z = f_s \Delta z. \tag{3. 2}$$

В случае асимметричного смещения, $\Delta x_3 = \Delta x_5 = \Delta Z$, и

$$\Delta p_3 = (P_{31} + P_{32})\Delta z = f_a \Delta z. \tag{3. 3}$$

Следует отметить, что такой подход полностью соответствует анализу движения вихрей в работе [27], но расчеты ограничены только горизонтальным смещением вихрей.

Знаки функций $f_s(\mathbf{x_0})$ и $f_a(\mathbf{x_0})$ определяют поведение вихревой системы. На Рис 8 желтая кривая соответствует рассчитанной нейтральной кривой для симметричных возмущениям $f_s(\mathbf{x_0}) = 0$: выше этой неё (область 5) система неустойчива относительно симметричных возмущений, ниже (область 4) -устойчива. Черный квадрат на ней соответствует экстраполяции экспериментальных данных [8] для δ → 0 для появления вторичной неустойчивости двухвихревой системы, т.е. возможному возникновению третьего вихря.

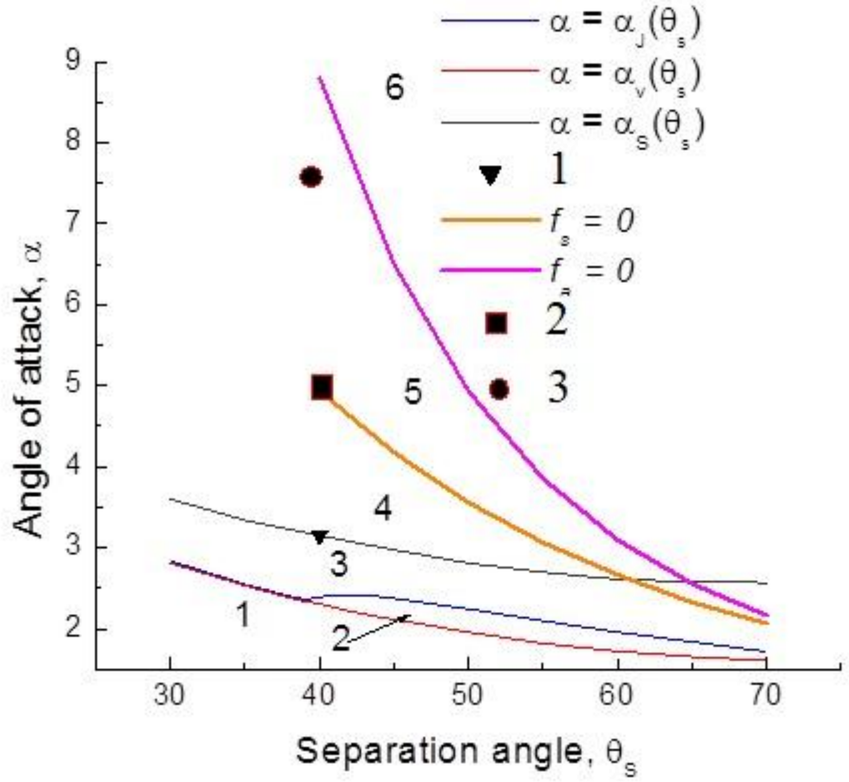


Рис. 8. Кривые нейтральной устойчивости симметричного решения для кругового конуса в разных подходах. Экспериментальные данные [8]: ▼ – переход к асимметрии; ■ – вторичная неустойчивость (3 вихря); ● - третичная неустойчивость (4 вихря).

Фиолетовая кривая соответствует нейтральным несимметричным возмущениям $f_a(\mathbf{x_0}) = 0$: ниже нее (область 5) вихревая система устойчива относительно несимметричных возмущений, выше (область 6) – неустойчива. Черный кружок рядом с этой кривой соответствует возникновению в экспериментах третичной неустойчивости в пределе δ → 0, т.е. появлению четвертого вихря [8]. Все эти результаты получены для отрыва турбулентного пограничного слоя; предполагается, что $\theta_s \approx 40°$, в работе [8] этот параметр не указан. Две нижние кривые на Рис. 8 соответствуют кривым на Рис. 4а: красная – нижней границе существования решения системы (2.2) с двумя вихрями, синяя нижней границе существования несимметричных решений (2.2). Как видно, вторая кривая располагается существенно ниже символа, черного перевернутого треугольника, который соответствует пределу δ → 0 возникновения несимметричного обтекания в экспериментах [8].

4. Критерий глобальной устойчивости структуры линий тока при отрывном обтекании

В настоящем разделе рассмотрим критерий развития нелинейной неустойчивости системы двух вихрей на основе анализа устойчивости структуры линий тока. Следуя [29 – 31], рассмотрим систему характеристик уравнений (1.3) или (1.6) – линий тока, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dX = \frac{dZ}{w(X,Z,Y)} = \frac{dY}{v(X,Z,Y)}. \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) в автомодельных переменных (1.4) приводятся к виду:

$$\frac{dz}{dx}=w(z,\eta)-z,\quad \frac{d\eta}{dx}=v(z,\eta)-\eta\,. \tag{4.2}$$

Эти уравнения соответствуют автономной динамической системе, качественное поведение которой определяется свойствами стационарных точек, в которых $v=w=0$, а бифуркация решения возникает при появлении вырожденной критической точки, в которой детерминант гессиана системы (4.2) G,

$$G=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{pmatrix},$$

обращается в ноль [34, 35], т.е.

$$\det G=\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}-1\right)-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \eta}=0\,. \tag{4.3}$$

Вихри также являются стационарными точками, их устойчивость изучена в предыдущем разделе и в работе [26].

При увеличении угла таки возникает последовательность картин поперечного течения около конуса, которая представлена на Рис. 9. Сразу после отрыва, при $\alpha < \alpha_C$ вихри не взаимодействуют друг с другом непосредственно и третья критическая точка в плоскости симметрии отсутствует (Рис. 9а). При $\alpha = \alpha_C$ в плоскости симметрии образуется обыкновенная седловая точка C с координатами $\eta=\eta_C(\alpha,\theta_S)$, $z=0$, в которой $v(0,\eta_C)=w(0,\eta_C)=0$, но гессиан $G(0,\eta_C)\neq 0$. Такое состояние существует в диапазоне $\alpha_C \le \alpha < \alpha_{Cd}$ (Рис. 9б). При угле атаки $\alpha = \alpha_{Cd}$ критическая точка становится вырожденной, в этом случае $G(0,\eta_{Cd})=0$ (Рис. 9в). В симметричном состоянии при $\alpha > \alpha_{Cd}$ в плоскости симметрии возникает вторая критическая седловая точка C_1 или, согласно теории катастроф или теории устойчивости и бифуркаций [31, 32], возможен переход к асимметричному состоянию под действием возмущений, как показано на Рис. 9г.

В окрестности критической точки C разложим скорости в ряд Тэйлора:

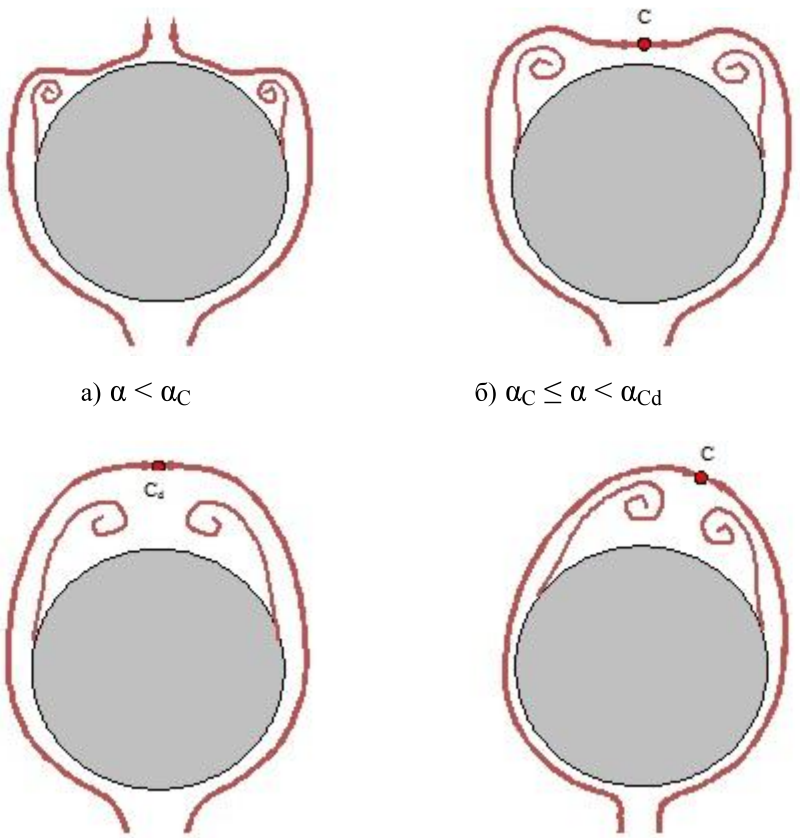
$$\begin{gathered} y=\eta-\eta_C,\quad v=\eta_C-ay+by^3-3bz^2y,\\ w=az+bz^3-3by^2z\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Коэффициенты уравнений при учете условий симметрии и потенциальности течения коэффициенты разложений представляются в виде:

$$a(\alpha,\theta_s)=-\frac{\partial v(\eta_C,0)}{\partial \eta}=\frac{\partial w(\eta_C,0)}{\partial z},\quad b(\alpha,\theta_s)=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 v(\eta_C,0)}{\partial \eta^3}=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 w(\eta_C,0)}{\partial z^3}=-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 v(\eta_C,0)}{\partial \eta\partial z^2},$$

$$\frac{\partial v(\eta_C,0)}{\partial z}=\frac{\partial w(\eta_C,0)}{\partial \eta}=0,\quad \frac{\partial^2 v(\eta_C,0)}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 w(\eta_C,0)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v(\eta_C,0)}{\partial z\partial \eta}=\frac{\partial^2 w(\eta_C,0)}{\partial z\partial \eta}.$$

Последние соотношения являются следствием условий симметрии.



а) $\alpha < \alpha_C$ б) $\alpha_C \le \alpha < \alpha_{Cd}$

в) $\alpha = \alpha_{Cd}$ г) $\alpha > \alpha_{Cd}$

Рис 9. Возможные картины отрывного обтекания тела при увеличении угла атаки

Таким образом, уравнения (4.2) в окрестности критической точки можно представить в виде:

$$\frac{dz}{dx} = -cz + bz^3 - 3by^2 z,$$

$$\frac{dy}{dx} = -c_1 y + by^3 - 3bz^2 y,$$

$$c(\alpha,\theta_s) = 1 - a(\alpha,\theta_s), \quad c_1(\alpha,\theta_s) = 1 + a(\alpha,\theta_s). \tag{4.5}$$

При учете полученных соотношений критерий устойчивости симметричного решения (4.3) сводится к равенству:

$$c(\alpha,\theta_s)c_1(\alpha,\theta_s) = 1 - a^2 = 0, \tag{4.6}$$

Из (1.10) следует, что в точке бифуркации один из коэффициентов $c_1 = 0$ или $c = 0$, что в соответствии с (1.10) эквивалентно $a = -1$ или $a = 1$.

Коэффициенты уравнений (4.5) были рассчитаны с использованием модели (2.2) – (2.3) для симметричного обтекания эллиптических конусов с относительной толщиной 0.01 $\le \tau \le 1$. На Рис. 10 представлены примеры расчетов для кругового конуса, $\tau = 1$. Видно, что область течения $\alpha_C \le \alpha < \alpha_{Cd}$ достаточно короткая, этим объясняется небольшая разница расчетов и экспериментов в работе [8].

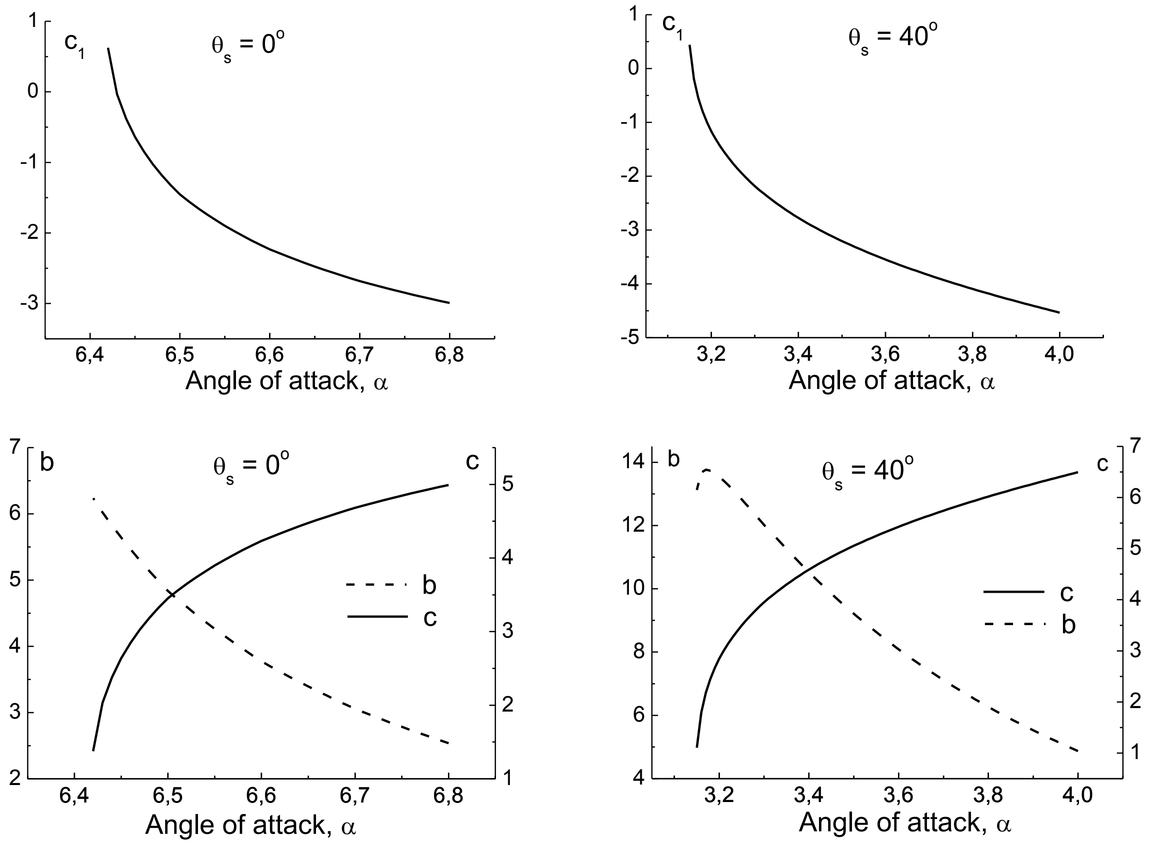


Рис. 10. Коэффициенты уравнений устойчивости для кругового конуса, $\tau = 1$.

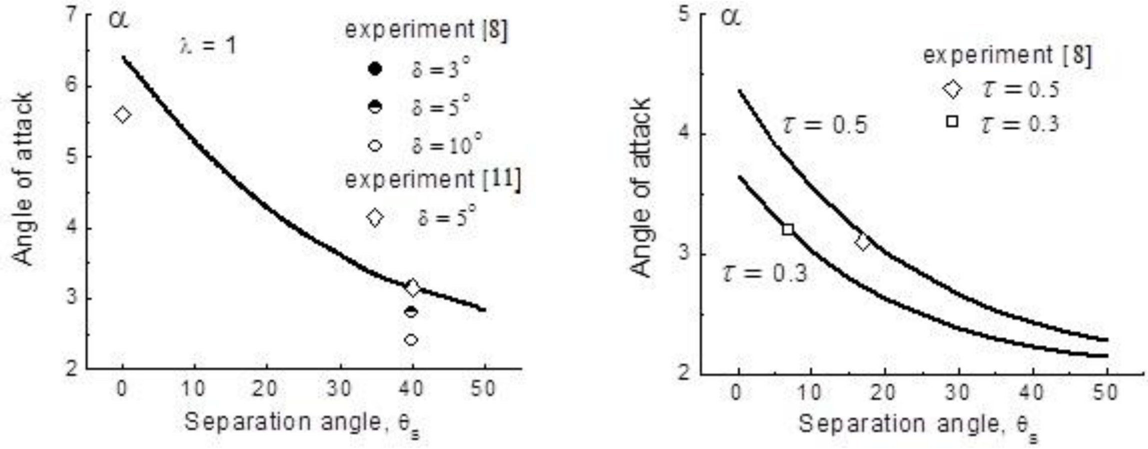
Угол $\theta_s \approx 0^o$ соответствует отрыву ламинарного пограничного слоя, $\theta_s \approx 40^o$ – отрыву турбулентного пограничного слоя. Параметрические исследования показали, что коэффициенты $c(\alpha, \theta_s)$ и $b(\alpha, \theta_s)$ всегда положительны, а $c_1(\alpha, \theta_s)$ изменяет знак при изменении угла атаки для каждого угла отрыва. Таким образом, критерий бифуркации (4.6) соответствует $c_1(\alpha, \theta_s) = 0$.

На Рис. 11 сплошными линиями представлены рассчитанные кривые $c_1(\alpha, \theta_s) = 0$ - критерий перехода к асимметрии – для кругового ($\tau = 1$, Рис. 11а) и эллиптических конусов ($\tau = 0.5$ и 0.3, рис 11б). Символами приведены экспериментальные данные перехода к асимметричному состоянию [8, 11].

Используемая модель отрывного обтекания [25] описывает течение в пределе $\delta \to 0$. Экспериментальные данные для кругового конуса (кружки) [8] демонстрируют сходимость теории и измерений при уменьшении угла раствора конуса для отрыва турбулентного пограничного слоя ($\theta_s \approx 40^o$). Для наиболее тонкого конуса ($\delta = 3^o$) экспериментальное и теоретическое значения критического угла атаки практически совпадают. На Рис. 8 для сравнения всех критериев перехода к асимметрии эта кривая приведена черным цветом. Обратный треугольник на ней соответствует экстраполяции при $\delta \to 0$ экспериментальных данных [8] для турбулентного отрыва ($\theta_s \approx 40^o$). Не трудно видеть, что расчеты совпадают с этим пределом.

Следует отметить, что в отличие от кривой бифуркации решений (2.2) (синяя кривая на Рис 4.а и 8) этот критерий описывает всю область углов отрыва, от $\theta_s \approx 0^o$ до $\theta_s = 90^o$, включая области ламинарного, переходного и турбулентного течений, а сходимость к нему экспериментальных данных при уменьшении угла раствора конуса указывает на его достоверность. Расчеты также достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными

[11, 12] (ромбы) для конуса с углом полураствора $\delta = 5^{\circ}$, как для турбулентного ($\theta_s \approx 40^{\circ}$), так и ламинарного ($\theta_s \approx 0^{\circ}$) течений.



а) б)

Рис. 11. Критерий устойчивости симметричной вихревой структуры $c_1(\alpha, \theta_S) = 0$ для кругового конуса ($\tau = 1$) и эллиптических конусов ($\tau = 0.3, 0.5$)

Сплошными линиями на рис. 11б представлены критерии устойчивости для эллиптических конусов с $\tau = 0.5$ и 0.3, рассчитанные как $c_1(\alpha, \theta_s) = 0$. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [8], несмотря на достаточно грубую модель течения и большую величину угла раствора ($\delta = 10^{\circ}$). Это подтверждает достоверность полученного критерия.

5. Модель взаимодействия пограничного слоя с электрическим разрядом и его влияние на характеристики течения

Идея управления отрывным обтеканием тел с помощью электрического разряда или локального нагрева поверхности была предложена Н. Малмутом [27, 28]. В настоящем разделе представлены теоретические обоснования этой идеи на основе расчетов трехмерного турбулентного пограничного слоя на тонком круговом конусе в дозвуковом потоке газа под углом атаки с использованием новой модели взаимодействия разряда с пограничным слоем. Для анализа применялось локально-автомодельное приближение, которое достаточно хорошо согласуется с численными решениями полных уравнений и может использоваться как главное приближение для оценок физических эффектов. Разряд моделировался как объемный источник тепла, эффекты ионизации воздуха и вязко-невязкого взаимодействия в области локального нагрева не рассматривались, поскольку целью работы было продемонстрировать принципиальную возможность воздействия этого эффекта на течение.

Схема течения и используемая система координат приведены на Рис. 1. В локально-автомодельном приближении уравнения трехмерного турбулентного пограничного слоя для тонкого конуса с теплоизолированной поверхностью при наличии источника тепла представляются в следующей форме:

$$(mf'')' = -\left(\frac{3}{2} f + 2\alpha g \cos\varphi\right) f'' + 2\alpha \sin\varphi \left(g' \frac{\partial f'}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} f'' \right),$$

$$(mg'')' = -\left(\frac{3}{2} f + 2\alpha g \cos\varphi\right) g'' + 2\alpha \sin\varphi \left(g' \frac{\partial g'}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} g'' \right) +$$

$$+ f'g' - h + 2\alpha \cos\varphi \left(g'^2 - h \right),$$

$$
\left(kh'\right)' = -\left(\frac{3}{2}f + 2\alpha g\cos\varphi\right)h' + 2\alpha\sin\varphi\left(g'\frac{\partial h}{\partial\varphi} - \frac{\partial g}{\partial\varphi}h'\right) - Q,\ \ \rho h = 1,
$$

$$
\eta = 0:\ f' = g' = f = g = 0,\quad h'' = 0;\quad \eta = \eta_e:\ f' = g' = h' = 1. \tag{5.1}
$$

Здесь $h(\eta,\varphi)$ и $\rho(\eta,\varphi)$ – энтальпия и плотность, отнесенные к своим значениям в набегающем потоке, h_∞ и ρ_∞, $f(\eta,\varphi)$ и $g(\eta,\varphi)$ – функции тока продольного и поперечного течения, штрихи обозначают дифференцирование по переменной А.А. Дородницына η, η_e – граница расчетной области, $\varphi = \pi/2 + \theta$. Для турбулентного течения коэффициенты k и m определялись по модели Себечи–Смита [32]:

$$
d\eta = \sqrt{\frac{U_\infty}{\rho_\infty\mu_\infty X^*}}\rho^* dn^*,\quad m = \rho\mu(1+\varepsilon^+),\quad k = \frac{\rho\mu}{\Pr}\left(1 + \frac{\Pr}{\Pr_t}\varepsilon^+\right),\quad \mu = h^{\frac{3}{2}}\frac{1+h_S}{h+h_S},\quad h_S = \frac{110.4}{T_\infty},
$$

$$
0 \le \eta \le \eta_c:\quad \varepsilon^+ = \varepsilon_1 f''^2,\ \varepsilon_1 = 0.16D_1\frac{\sqrt{\operatorname{Re}x}}{\mu}\left(\frac{eD}{h}\right)^2,\quad e = \int_0^\eta h\,d\eta,
$$

$$
\eta > \eta_c:\quad \varepsilon^+ = 0.0168\sqrt{\operatorname{Re}x}\,D_1\frac{\delta_u}{h\mu},\ \delta_u = \int_0^{\eta_e}(1-f')\,d\eta,
$$

$$
D = 1 - \exp(-d),\ D_1 = \left[1 + \left(\frac{e}{e_e}\right)^6\right],\ d = \left(\operatorname{Re}x\right)^{\frac{1}{4}}\frac{e}{26h_w}\sqrt{\frac{f''}{\mu_w}}, \tag{5.2}
$$

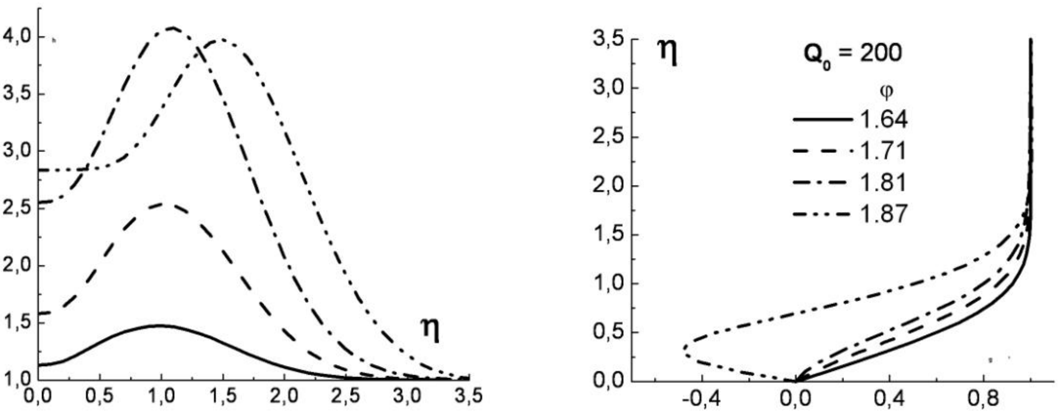
где n^* – нормаль к конусу, η_c – граница перехода от области закона стенки к области закона следа в турбулентном пограничном слое.

Интенсивность источника тепла $Q(\eta,\varphi)$, моделирующего электрический разряд в пограничном слое, задавалась соотношениями

$$
Q(\eta,\varphi) = \frac{Q^* xl}{h_\infty U_\infty} = Q_0\eta^2\exp\left[-\frac{\left(\eta-\eta_Q\right)^2}{\sigma}\right],\ \ \eta_Q(\varphi) = 2\eta_0\sqrt{\left|(\varphi-\varphi_b)(\varphi_e-\varphi)\right|}. \tag{5.3}
$$

Здесь Q^* – размерная интенсивность источника тепла, Q_0 – максимальная величина безразмерной интенсивности источника тепла, $\eta_Q(\varphi_1)$ – нормальная координата середины разряда, параметр σ характеризует ширину разряда в нормальном к стенке направлении. Второе соотношение (5.2) моделирует среднюю линию разряда $\eta_Q(\varphi_1)$ как параболу. Здесь η_0 – максимальное расстояние от средней линии до стенки, углы φ_b и φ_e – начало и конец области нагрева.

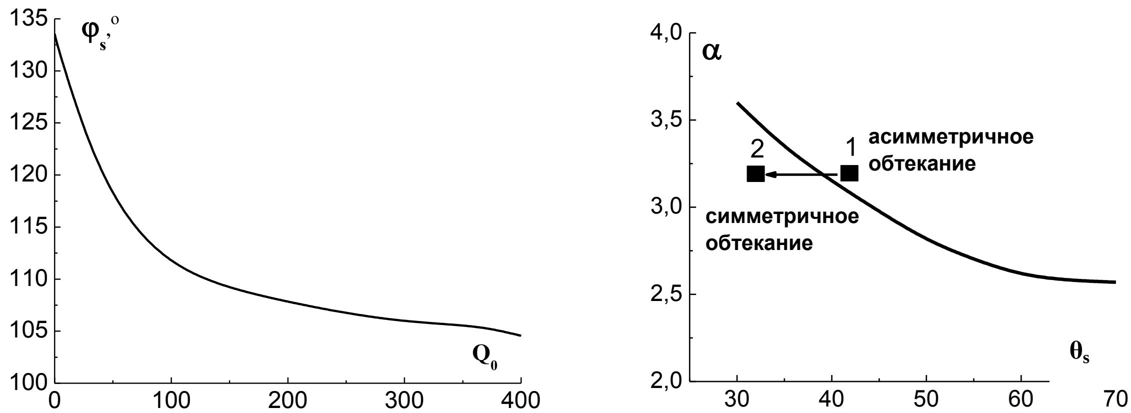
Рассматриваемая задача является многопараметрической, и с целью определения рационального набора параметров, позволяющих эффективно управлять положением отрыва, были проведены многочисленные расчеты. В настоящей работе представлены некоторые их результаты, соответствующие следующим значениям параметров: относительный угол атаки $\alpha = 3.15$, половина угла раствора конуса $\delta = 5^\circ$, длина $l = 1$ м, $T_\infty = 288.15$ K, $U_\infty = 10$ м/с, $\sigma = 1$, $\eta_0 = 1$. Середина области нагрева соответствовала $\varphi_0 = 0.5(\varphi_b + \varphi_e) = 1.714$ рад (98.25°); $\varphi_b = \varphi_0 - 3\Delta\varphi$ и $\varphi_e = \varphi_0 + 3\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 0.0314159$.



а) б)

Рис. 12. Профили энтальпии (а) и окружной скорости (б) около области тепловыделения

Профили безразмерной энтальпии и окружной скорости в пограничном слое в области тепловыделения при $Q_0 = 200$ представлены на рис. 12а и 12б для $\varphi = 1.64,\ 1.71,\ 1.81,\ 1.87$. Энтальпия имеет максимум, величина которого в области разряда растет вниз по потоку, а положение совпадает с положением максимума тепловыделения (рис. 12а, $\varphi < 1.87$). Температура достигает наибольшего значения около сечения $\varphi = \varphi_e = 1.809$. За областью разряда максимальная температура снижается, и положение максимума сдвигается к внешней границе пограничного слоя вследствие диффузии (рис. 12а, $\varphi = 1.87$). Из расчетов следует, что плоскость $\varphi = 1.81$ расположена непосредственно перед плоскостью отрыва пограничного слоя, позади нее образуется область возвратного поперечного течения. Положение отрыва контролировалось изменением толщины вытеснения поперечного течения $\delta_2 = \eta_e - g(\eta_e, \varphi_1)$.



а) б)

Рис. 13. Влияние тепловыделения на положение отрыва (а) и характер обтекания (б)

На рис. 13а представлена зависимость угла отрыва потока φ_s от интенсивности разряда Q_0. При увеличении Q_0 от 0 до 400 угол отрыва φ_s уменьшается от 133° до 105°, а максимальная температура возрастала до 2000 °С. Управление отрывом с помощью объемного нагрева наиболее эффективно в диапазоне $Q_0 < 100$, где темп изменения угла отрыва с ростом Q_0 максимален: при увеличении Q_0 до 100 угол отрыва уменьшается до величины $\varphi_s \approx 112°$, максимальная температура возрастает всего до 400 °С.

На рис. 13б сплошной кривой представлена граница области симметричного и несимметричного течения полученная выше. Стрелкой показан переход из асимметричного состояния 1 (угол отрыва $\varphi_s = 133^\circ$) в симметричное состояние 2 ($\varphi_s = 122^\circ$) под воздействием смещения линии отрыва в результате нагрева газа при $Q_0 = 100$. Суммарная мощность тепловой энергии определяется интегралом

$$P = \iiint\limits_{V_h} \rho^* Q^* a^* (X^*) dX^* d\varphi dn^* = \frac{\delta^* \rho_\infty h_\infty U_\infty l^2}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{x} dx \int\limits_{\varphi_b}^{\varphi_e} d\varphi \int\limits_0^\infty Q dy \, .$$

Здесь звездочка обозначает размерные величины, δ^* – толщина пограничного слоя перед фронтом разряда. При $Q_0 = 100$ происходит изменение угла отрыва на $\Delta\varphi_s = 21^\circ$, что требует мощности $P = 1600$ Вт. Однако минимальная мощность, необходимая для пересечения границы состояний, составляет всего $P = 160\,W$, что соответствует $Q_0 = 10$ и $\Delta\varphi_s = 4^\circ$. Представленные результаты подтверждены экспериментальными данными [11, 12] по управлению отрывом с помощью электрического разряда.

Результаты расчетов трехмерного турбулентного пограничного слоя с объемным тепловыделением, показывают, что этот способ может быть эффективно использован для управления положением отрыва и глобальной структурой обтекания.

Другой способ управления отрывом турбулентного пограничного слоя – локальный нагрев поверхности – был также изучен для случая тонкого конуса под углом атаки при малых дозвуковых скоростях набегающего потока. Для расчетов пограничного слоя использовались уравнения (5.1), в которых $Q = 0$, а краевое условие теплоизолированности поверхности конуса заменялось условием $h(0,\varphi) = h_w$ – отношение температур стенки T_w и набегающего потока T_∞. На всей поверхности конуса, за исключением узкой полосы шириной $\Delta\varphi$, поддерживалась температура $T_w = T_\infty$ ($h_w = 1$). Полоса нагревалась до температуры $T_w = T_n > T_\infty$. Влияние локального нагрева поверхности на положение отрыва оценивалось для конуса длиной 1 м, $\delta = 5^\circ$ при $U_\infty = 20$ м/с и относительных углах атаки $\alpha = 2 - 4$. Температура набегающего потока $T_\infty =$ 0 ºС, температура полосы варьировалась в диапазоне $T_n = 100 - 800$ºС, ширина полосы $\Delta\varphi = 12^\circ$, середина ее была расположена при $\varphi = 110$ ºС.

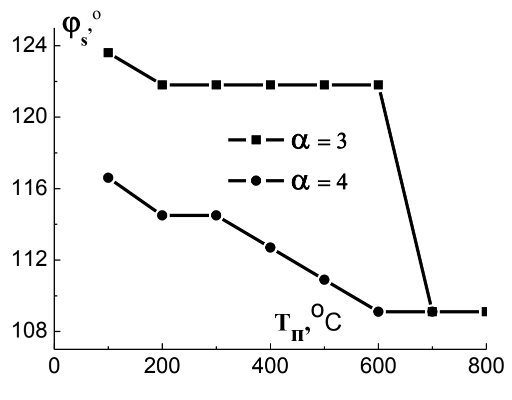


Рис. 14. Зависимость угла отрыва от температуры полосы

На рис. 14 представлены зависимости угла отрыва φ_s от температуры полосы для углов атаки $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$. Для $\alpha = 2$ нагрев полосы не влияет на положение отрыва. При $\alpha = 3$ увеличение нагрева до 200 ºС уменьшает угол отрыва с 133º до 122º, далее он остается постоянным до температуры 600 ºС, и затем, при увеличении T_n на 100 ºС, изменяется до $\varphi_s \approx$ 109º и стабилизируется на этом значении при последующем повышении температуры. Для $\alpha = 4$ положение отрыва практически монотонно уменьшается при нагреве полосы от 100 ºC до 600 ºC, а затем сохраняется постоянным $\varphi_s \approx$ 109º.

Представленные результаты показывают, что локальный нагрев поверхности может быть использован для управления отрывом турбулентного пограничного слоя, но эффективность этого способа управления меньше, чем в случае объемного нагрева.

Заключение

В настоящей работе в рамках модели «вихрь-разрез» рассмотрены различные подходы к анализу устойчивости симметричного отрывного обтекания тонких тел: 1) бифуркационная диаграмма решений модели; 2) анализ устойчивости системы к смещениям центров вихрей; 3) исследование устойчивости стационарных точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений для линий тока. Сравнение проведенных расчетов с экспериментальными данными показало, что третий подход позволяет получить достоверный критерий перехода к асимметричному отрывному обтеканию. Механизм возникновения асимметрии является нелинейным, она инициируется конечными возмущениями, размер которых стремится к нулю при смещении области генерации возмущений к вершине тела. С помощью численных расчетов показано, что объемный и поверхностный нагрев газа в пограничном слое может быть использован для управления структурой вихревого обтекания.

Литература

1. *B.L. Hunt*. Asymmetric Vortex Forces and Wakes on Slender Bodies // AIAA Paper No. 82-1336, 1982.
2. *C.A. Moskovitz, R.M. Hall, F.R. DeJarnette.* Effects on of Nose Bluntness, Roughness and Surface Perturbations on the Asymmetric Flow past Slender Bodies at Large Angles of Attack // AIAA Paper. 1989. № 2236.
3. *D.J. Peake, F.K. Owen, D.A. Johnson.* Control of Forebody Vortex Orientation to Alleviate Side Forces // AIAA Paper. 1980. № 0183.
4. *P.C. Dexter.* A Study of Asymmetric Flow over Slender Bodies at High Angles of Attack in Low Turbulence Environment // AIAA Paper. 1984. № 0505.
5. *P. Champigny*. Influence du nombre de Reynolds sur les caracteristiques aerodynamics d'une configuration ogive-cylindre a grand incidence // *Recherche Aerospatiale?* 1984. N. 6/ P. 417-425,
6. *P.J. Lamont*. The Effect of Reynolds Number on Normal and Side Forces on Ogive Cylinder at High Incidence // AIAA Paper No. 85-1799, 1985.
7. *D. Degani, M. Tobak.* Numerical, Experimental, and Theoretical Study of Convective Instability of Flows over Pointed Bodies at Incidence.// AIAA Paper. 1991. № 0291.
8. *M.V. Lowson, A.J.C. Ponton.* Symmetric Breaking in Vortex Flows on Conical Bodies // AIAA J. 1992. V. 30. № 6. Pp. 1576-1583.
9. *L. A. Darden, N. M. Komerath.* Relationship Between Stagnation Point Deflection and Forebody Vortex Asymmetry // *AIAA J.*, 1997. V. 35. N. 12. P. 1892-1894.
10. *J.E. Bernhard*, *D.R. Williams.* Proportional Control of Asymmetric Forebody Vortices // AIAA J. 1998. V. 36. № 11. P. 2087–2093.
11. *Фомин В.М., Маслов А.А., Сидоренко А.А., Занин Б.Ю., Фомичев В.П., Постников Б.В., Malmuth N.* Управление вихревым обтеканием тел вращения при помощи электрического разряда // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 5. С. 1–4.
12. *Маслов А. А., Сидоренко А. А., Будовский А. Д., Занин Б. Ю., Козлов В. В., Постников Б. В., Фомичев В. П.* Управление вихревым обтеканием конуса с помощью электрического искрового разряда // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 2. С. 81-89.
13. *X. Meng, J. Wang, J. Cai, F. Liu, S. Luo*. Effect of plasma actuation on asymmetric vortex flow over a slender conical forebody // AIAA Paper, 2012. № 0287.
14. *P. Hartwich, R. Hall, M. Hemsch*. Navier-Stokes Computations of Vortex Asymmetries Controlled by Small Surface Imperfections // AIAA Paper, 1990..N 0385.
15. *J.L. Thomas*. Reynolds number effect on supersonic asymmetrical flows over a cone // J. Aircraft, 1991.V. 30. N 4. P. 488-494.
16. *P. Hartwich*. Symmetry breaking in vortical flows over cones – theory and numerical experiments // AIAA J., 1994. V. 32. N 5. P. 1013-1020
17. D. Degani. Numerical Investigation of the Origin of Vortex Asymmetry // AIAA Paper, 1990. N 0593.
18. M.J. Siclari. Asymmetric Separated Flows at Supersonic Speeds // AIAA Paper, 1990. N 0595,

19. G.G. Ziliac, D. Degani, M. Tobak. Asymmetric Vortices on a Slender Body of Revolution // *AIAA J.,* 1991. V. 29**.** N 5. P. 667–675.
20. *D.W Dusing., P.D. Orkwis*. Numerical issues affecting vortex asymmetries computed with conical Navier-Stokes equations // Computers and Fluids? 1996. N 25. P 319-334.
21. *Ю.П. Головачев, Р.В. Леонтьева.* Численное моделирование сверхзвукового асимметричного обтекания острого кругового конуса // ЖВМ и МФ, 2000. Т.40. № 4. С. 638-646.
22. *Ю.П. Головачев, Р.В. Леонтьева.* Численное моделирование асимметричного и нестационарного турбулентного обтекания острых конусов сверхзвуковым потоком
23. *М.Г. Гоман, А.Н. Храбров, С.Б. Захаров.* К возникновению несимметричного отрывного обтекания тонктих тел вращения при больших углах // Ученые Записки ЦАГИ, 1984. Т. 15. № 6. С. 1-9.
24. *Dyer D.E., Fiddes S.P., Smith J.H.B.* Asymmetric Vortex Formation from Cone at Incidence – A Simple Inviscid Model // Aeronautical Quarterly. 1982. V. 33. № 6. P. 293-312.
25. *Крайко А.Н*., *Реент К.С*. Невязкая природа несимметрии отрывного обтекания симметричных тел равномерным потоком // ПММ. 1999. Т. 63. № 1. С. 63–70.
26. *Cai J*., *Liu F.*, *Luo S*. Stability of Symmetric Vortices in Two Dimensions and over Three-Dimensional Slender Conical Bodies // J. Fluid Mechanics. 2003. V. 480. P. 65–94.
27. *V. Shalaev, A. Fedorov, N. Malmuth, I. Shalaev, V. Zharov*. Plasma Control of Forebody Nose Symmetry Breaking // AIAA Paper. 2003. № 0034.
28. *V. Shalaev, A. Fedorov, N. Malmuth, I. Shalaev.* Mechanism of Forebody Nose Vortex Symmetry Breaking Relevant to Plasma Flow Control // AIAA Paper. 2004. № 0842.
29. *V. Shalaev, I. Shalaev.* A stability of symmetric vortex flow over slender bodies and control possibility by local gas heating // EUCASS book series. Progress in Flight Physics. Eds: P. Reijasse, D. Knight, M. Ivanov and I. Lipatov.. 2013. V. 5. P. 155 -168.
30. *R. Gilmore* Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. N. Y.: Wiley Interscience Publication, 1981. (Р. Гилмор Прикладная теория катастроф // М.: Мир, 1984. 635 с.)
31. *G. Iooss, D.D. Joseph.* Elementary stability and bifurcation theory // N.Y.: Springer-Vtrlag? 1980. (*Ж.* Йосс, Д. Джозеф. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций // М.: Мир, 1983. 301 с.)
32. *В.И. Шалаев*. Применение аналитических методов в аэромеханике. Часть 1 Теория пограничного слоя // М.: МФТИ, 2010. 300 с.

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

ЖИДКОСТЬ ПАР В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В.А. Шаргатов

[1]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Доклад посвящен задаче о фильтрации и испарении воды на поверхности фазового перехода, а также о диффузии пара, возникающего в результате испарения. Рассматриваются горизонтально-протяженные течения. Такая задача соответствует, например, случаю фильтрации воды из водоносных горизонтов вниз в направлении подземного сооружения, в котором поддерживается искусственная вентиляция. В пространстве, расположенном между водоносным горизонтом и кровлей, находятся вода и смесь воздуха с парами воды. Вода и влажный воздух разделены поверхностью фазового перехода. Такая задача рассматривалась в работах [1–3], где были обнаружены и описаны новые механизмы перехода к неустойчивости.

Анализ устойчивости в [1–3], выполнен в линейном приближении для бесконечно малых гармонических возмущений. Показано, что, если данная задача имеет стационарное решение, соответствующее плоской покоящейся поверхности фазового перехода, то для несмачиваемой среды с постоянным капиллярным давлением это решение может быть как линейно устойчиво, так и неустойчиво.

В [4] исследована устойчивость аналогичных течений по отношению к локализованным возмущениям конечной амплитуды и определены границы применимости выполненного в [1–3] анализа линейной устойчивости. Дестабилизация поверхности движущегося фронта фазового перехода бесконечно малыми возмущениями и локализованными возмущениями конечной амплитуды изучена в [5]. Установлено, что в однородных пористых средах рост возмущений поверхности фазового перехода может происходить, только если среда несмачиваема.

В данной работе показано, что необходимым условием существования нескольких положений равновесия в смачиваемой среде является наличие слоя, в котором капиллярное давление уменьшается (возрастает по абсолютной величине) с глубиной. Построен пример, когда в смачиваемой среде существуют три положения равновесия. Исследована устойчивость плоской поверхности фазового перехода по отношению к бесконечно малым возмущениям и получено дисперсионное соотношение, а также определены условия роста амплитуды возмущений движущейся поверхности фазового перехода.

Показано, что смачиваемой среде в присутствии капиллярных сил дестабилизация плоской поверхности фазового перехода может происходить как при бесконечном волновом числе, так и при нулевом волновом числе, при этом коротковолновая неустойчивость может иметь место даже в том случае, если положение равновесия единственно. Для случая, когда среда состоит из двух слоев, различающихся капиллярным давлением, построена бифуркационная диаграмма, имеющая две точки поворота, и определена устойчивость решений, соответствующих различным ветвям бифуркационной диаграммы.

Аналитически и численно изучены закономерности деформации ограниченной водонасыщенной области в пористой среде с капиллярным давлением, зависящим от одной пространственной координаты. Изменения формы ограниченной водонасыщенной области не происходит, если градиент капиллярного давления одинаков во всех точках ее границы. В этом случае водонасыщенная области перемещается с постоянной скоростью. Если градиент капиллярного давления изменяется вдоль границы жидкости и воздуха, то контактная поверхность деформируется. Показано, что в этом случае деформация контактной поверхности жидкость-газ может приводить к изменению связности водонасыщенной области. Водонасыщенная область может разделиться на две области (дробление или каплеотделение). Две несвязанные водонасыщенные области могут объединиться (слияние). Внутри водонасыщенной области может образоваться замкнутая подобласть, занятая воздухом (образование пузыря).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 16-11-10195.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А.Т. Ильичев, Г.Г. Цыпкин. Неустойчивости однородных фильтрационных течений с фазовым переходом. ЖЭТФ, 2008, т.134. № 4. с. 815–830.
2. A.T. Il'ichev, G.G. Tsypkin. Catastrophic transition to instability of evaporation front in a porous medium. Eur. J. Mech. B Fluids, 2008., v. 27. № 6. p. 665–677.
3. G.G. Tsypkin, A.T. Il'ichev. Gravitational stability of the interface in water over steam geothermal reservoirs. Transp. Porous Media, 2004, v. 55, № 2, p. 183–199.
4. A.T. Il'ichev, V.A. Shargatov. Dynamics of Water Evaporation Fronts. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013, v. 53, № 9, p. 1350–1370.
5. V.A. Shargatov, A.T. Il'Ichev, G.G. Tsypkin. Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium . Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015, v. 83, c. 552–561.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУКТУРЫ УДАРНЫХ ВОЛН И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОПФА

В.А. Шаргатов[1], А.П. Чугайнова[2]
[1]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» , Москва
[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Нестационарные структуры разрывов типичны, например, для теории детонации, а неустойчивость газодинамических ударных волн может приводить к их распаду на систему волн той же ориентации. Обобщенное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}=0$$

является одним из самых простых уравнений, которое может иметь решения, содержащее разрывы. Далее будем рассматривать $\varphi(u) = (u\text{-}1)^4\text{-}(u\text{-}1)^2$. Функция $\varphi(u)$ имеет две точки перегиба, поэтому для нее можно построить пример, когда одной и той же скорости «ударной волны» соответствуют три различных состояния за разрывом. Задача Римана о распаде разрыва в этом случае имеет бесконечное несчетное множество автомодельных решений. В работе [1], посвященной исследованию уравнения Хопфа со сложной нелинейностью, для отбора разрывов, использовавшихся для построения решений, выставлялось требование существования стационарной или периодической структуры разрывов. Структура разрывов описывалась обобщенным (в смысле нелинейности) уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргерса.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-m\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad \mu>0,\quad m>0$$

В [1] показано, что при m>0 множество разрывов, обладающих стационарной структурой оказывается более сложным. Оно состоит из классических и особых разрывов. Особым называется разрыв, структура которого представляет гетероклиническую фазовую кривую, соединяющие две особые точки типа седла (одна из этих точек - состояние пред разрывом, другая за разрывом). Число особых разрывов растет с увеличением дисперсии. Их количество конечно для заданного значения коэффициента дисперсии, но может быть сколь угодно большим. Нами в [2] и [3] методом функции Эванса была изучена спектральная (линейная) устойчивость стационарных структур, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргерса. Показано, что среди множества особых разрывов устойчив только разрыв, распространяющийся с наименьшей скоростью. Этот разрыв обладает монотонной структурой. Численное моделирование процесса развития возмущений показывает распад такого разрыва и невозможность его осуществления. Исследована также устойчивость неособых допустимых разрывов и выявлено множество устойчивых и неустойчивых структур.

Полученные результаты по исследованию устойчивости классических и особых разрывов дают основание выдвинуть следующие гипотезы. Спектрально устойчив только один особый разрыв, имеющий наименьшую скорость. Он является допустимым. Неособые разрывы, которые нельзя заменить последовательностью спектрально устойчивых разрывов и неопрокидывающихся простых волн, устойчивы и являются допустимыми, даже если не имеют стационарной структуры и спектрально неустойчивы. Неособые разрывы, которые могут быть заменены последовательностью спектрально устойчивых разрывов и неопрокидывающихся простых волн, всегда спектрально неустойчивы и всегда обладают распадной неустойчивостью.

В докладе сделано и обосновано заключение, что допустимыми разрывами следует считать разрывы со стационарной или нестационарной устойчивой структурой. Введение требования устойчивости структуры в понятие допустимости разрывов привело к существенному сокращению множества допустимых разрывов и ликвидировало неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва, обнаруженную в предыдущих исследованиях.

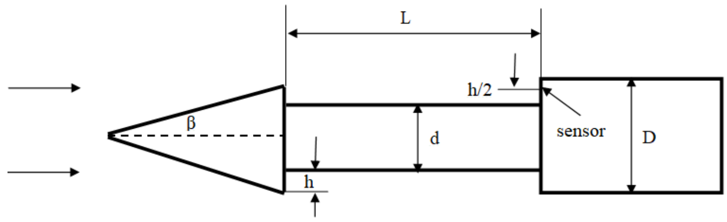
ЛИТЕРАТУРА.

1. А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова. Классические и неклассические разрывы в решениях уравнений нелинейной теории упругости. Успехи матем. наук, 2008, , т.63, №2. с. 85–152.
2. А.Т. Ильичев, А.П. Чугайнова, В.А. Шаргатов. Спектральная устойчивость особых разрывов. Докл. РАН. Матем. 2015. т. 462. № 5. т. 512–516.
3. А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова, В.А. Шаргатов. Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва уравнения Хопфа со сложной нелинейностью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016, т. 56, № 7. с. 1363–1370.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА С КОЛЬЦЕВОЙ КАВЕРНОЙ

А. С. Шишаева[1,2], М. М. Симоненко[1], А.А. Синявин[1], А. А. Аксенов[2]
[1] Научно-исследовательский институт механики МГУ
[2] ООО «ТЕСИС»

Течение в кольцевой каверне осесимметричного тела при сверхзвуковом обтекании может быть двух видов: с открытым и замкнутым типами взаимодействия [1-3]. Когда отношение длины каверны к глубине велико, реализуется замкнутое течение. В этом случае внешний сверхзвуковой поток заходит в каверну и присоединяется к поверхности дна каверны, а около переднего и заднего уступов каверны формируются две изолированные области отрыва потока. Когда соотношение между длиной и глубиной мало, реализуется открытое течение, в котором всю каверну от передней до задней стенки занимает дозвуковое отрывное течение, отделенное от внешнего потока турбулентным слоем смешения. На определенном интервале соотношений между длиной и глубиной каверны реализуется аэродинамический гистерезис. В этом случае в зависимости от предыстории течения может реализовываться как открытый, так и замкнутый режим обтекания каверны. Сопротивление обтекаемого тела с замкнутым режимом течения в каверне может существенно превышать сопротивление аналогичного тела с открытым режимом течения. Поэтому важной практической задачей является поиск энергоэффективных способов управления режимами течения в каверне с целью затягивания перехода от открытой каверны к замкнутой. Идея такого управления с помощью теплового источника на дне каверны была предложена в [4], где на примере плоской каверны было показано, что переход от замкнутого к открытому типу сверхзвукового обтекания каверны в области гистерезиса можно осуществить за счет кратковременного теплового импульса.



В данной работе численно исследуется осесимметричное сверхзвуковое обтекание поперечной кольцевой каверны на цилиндрическом теле с коническим наконечником (см. рис). Моделирование выполняется в программном комплексе FlowVision. Проведено исследование сходимости по расчетной области и расчетной сетке, выбрана оптимальная модель турбулентности, получено хорошее совпадение расчета с различными экспериментами для тела с постоянной длиной каверны.

Воспроизведен и исследован наблюдавшийся ранее в эксперименте [5] аэродинамический гистерезис при перестройке схем обтекания кольцевой каверны по мере непрерывного изменения ее длины. Впервые получена оценка диапазонов скоростей изменения длины каверны, при которых реализуются гистерезисные режимы первого или второго рода. Выявлены детали механизмов прямой и обратной перестройки режимов течения в каверне. Проведено исследование влияния теплового источника на течение в области гистерезиса и вне ее. Определены параметры теплового импульса, способного обеспечить перестройку течения в осесимметричной каверне.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-99623).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Чжен П. Отрывные течения. Том II. М.: Мир, 1973. 280 с.
2. Гаур, И.А., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Численное моделирование обтекания каверн сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа. ИФЖ. 1991. Т. 61. № 4. С. 570-577.
3. Швец А.И. Исследование течения в цилиндрическом вырезе на осесимметричном теле при сверхзвуковом обтекании. Изв. РАН. МЖГ. 2002. №1. С. 123-131.
4. Гувернюк С.В., Синявин А.А. Об управлении гистерезисом сверхзвукового обтекания прямоугольной каверны с помощью теплового импульса . Успехи механики сплошных сред: к 70-летию академика В. А. Левина: сб. науч. тр. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 196-203.
5. Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Симоненко М. М. Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания осесимметричной кольцевой каверны. Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 3. С. 670–679.

О НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Шапакидзе Л.Д.
Тбилисский Государственный Университет им. И.Джавахишвили,
Институт Математики им. А.Размадзе, Грузия
luiza@rmi.ge, luiza.shapakidze@ tsu.ge

Представлены некоторые результаты исследований нелинейной устойчивости течений теплопроводной жидкости между проницаемыми цилиндрами. Предполагается, что цилиндры нагреты до разных температур и на течение действует радиальный поток. Получены условия неустойчивости, бифуркации и переходы к более сложным режимам течений между вертикальными вращающимися и горизонтальными неподвижными цилиндрами с накачиванием жидкости вдоль кольцевого кольца.

TURBULENCE IN A LOCALIZED PUFF IN A PIPE

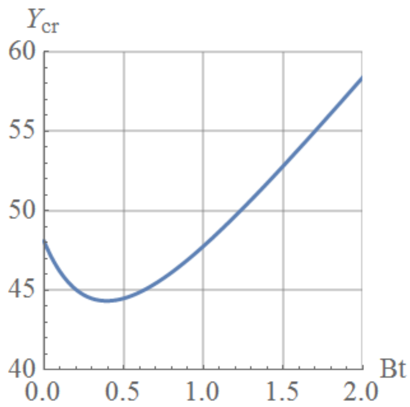
Alexander Yakhot
Department of Mechanical Engineering, Ben-Gurion University, Beersheva, Israel

We have performed direct numerical simulations of transient turbulence in a pipe flow for Re=2,250 which has been recognized as a threshold for an equilibrium puff. We investigated the structure of an individual puff by considering three-dimensional snapshots over a long time period. To assimilate the velocity data, we applied a conditional sampling based on the location of the maximum energy of the transverse (turbulent) motion. Specifically, at each time instance, we followed a turbulent puff by a three-dimensional moving-window centered at that location. We collected a snapshot-ensemble of the velocity fields acquired over 10,000 time instances (snapshots) inside the moving-window. The considered flow is intermittent and transitional. The velocity field inside the puff shows the dynamics of a developing turbulence. The localized puff is about 12-15 pipe diameters long and the flow regime upstream of its trailing edge and downstream of its leading edge is almost laminar. In the puff core, despite the low Reynolds number, the turbulence statistics becomes similar to a fully-developed turbulent pipe flow and the velocity profile becomes flat in the pipe core and logarithmic near the wall. It is shown that this “fully-developed turbulent gap” is very narrow being about two pipe diameters long.

БИФУРКАЦИЯ ВРАЩЕНИЯ В ТОЧНОМ РЕШЕНИИ МГД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕПОДВИЖНЫМИ НЕПРОНИЦАЕМЫМИ ДИСКАМИ

Н.И. Яворский
Новосибирский государственный университет, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН

Рассматривается магнитогидродинамическое (МГД) течение вязкой электропроводящей несжимаемой жидкости между двумя неподвижными непроницаемыми дисками. На верхнем диске задан вектор однородной плотности электрического тока, направленный по нормали к поверхности, нижний является диск непроводящим. Исследуется точное решение полной системы МГД-уравнений, принадлежащее к классу течений Кармана, в котором осевая скорость и магнитное поле зависит только от осевой координаты. Задача имеет два безразмерных параметра: величину плотности электрического тока на верхней пластине Y и число Бэтчелора Bt (магнитное число Прандтля). Предполагается, что в задаче нет внешнего источника магнитного поля, который создает осевое магнитное поле. Получено решение для числа Бэтчелора, изменяющегося в диапазоне 0÷2, который охватывает все возможные практические приложения. Течение жидкости создается электрическим током. Показано, что при малых значениях Y вектор скорости жидкости имеет только осевую и радиальную компоненты. С увеличением Y интенсивность движения увеличивается, и при критическом значении Y происходит бифуркация нового устойчивого режима течения с вращением жидкости, при этом течение без вращения теряет устойчивость. Нетривиальной особенностью полученного нового точного решения является отсутствие осевого магнитного поля, которое необходимо для появления азимутальной компоненты пондеромоторной силы, как это имеет место в обычном МГД динамо. Ниже на рисунке приведена кривая кривая зависимости величины безразмерной плотности критического тока от числа Бэтчелора, при которой имеет место бифуркации вращения.



На рисунке видно, что бифуркация вращения имеет место вплоть до числа Bt=0 (Y_{cr}=48.1), это соответствует случаю, когда магнитное число Рейнольдса при любом способе его определения равно нулю. Во всем диапазоне чисел Бэтчелора пондеромоторная магнитная сила является источником движения и приводит к бифуркации вращения, в том числе и для случая жидких металлов, для которых число Бэтчелора обычно очень мало. Это свидетельствует о том, что обнаруженное явление спонтанного возникновения вращения можно наблюдать экспериментально. Подавая электрический ток равномерно на плоскую крышку кюветы с электропроводящей жидкостью и диэлектрическим дном, при достижении определённой величины тока можно ожидать спонтанного возникновения вращения жидкости, при этом с одинаковой вероятностью вращения как по часовой стрелке, так и против нее. Согласно рисунку при увеличении числа Бэтчелора от нуля критическая плотность тока сначала уменьшается до Y_{cr} =44,3425 при Bt=0,394 за счет влияния скорости движения жидкости на распределение и величину магнитного поля. Затем критическая плотность тока начинает увеличиваться, приближаясь к линейной зависимости от числа Бэтчелора. Соответственно, область существования устойчивого вращательного движения сначала увеличивается, а за тем уменьшается. Характерная особенность исследованной бифуркации вращения – отсутствие в объеме течения осевого магнитного поля и азимутальной компоненты пондеромоторной силы, появление которой обычно становится причиной возникновения вращения в МГД-динамо. Таким образом, обнаружен новый тип бифуркации вращения в МГД-течении. Основные результаты работы опубликованы в [1].

ЛИТЕРАТУРА.

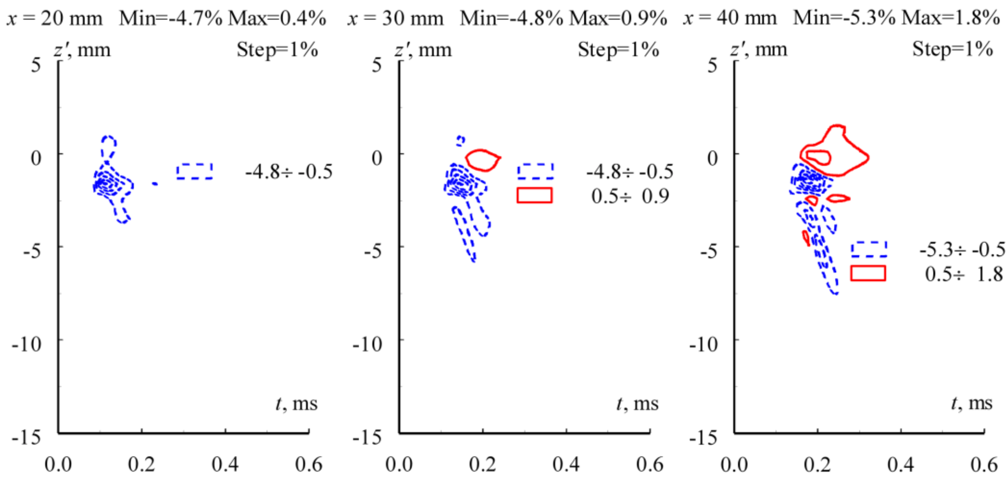
1. Н.И. Яворский. Спонтанное возникновение вращения в точном решении магнитогидродинамических уравнений для течения между двумя неподвижными непроницаемыми дисками // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, N◦5. С.72-79.

ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ТРЕХМЕРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А.А. Яцких, Ю.Г. Ермолаев, А.Д. Косинов, Н.В. Семенов
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Для исследования процессов ламинарно-турбулентного перехода целесообразным является изучение контролируемых возмущений, обладающих широкополосным частотным и пространственным спектральным составом (волновые пакеты). Контролируемые волновые пакеты могут быть получены с помощью локализованного во времени и в пространстве воздействия на пограничный слой. Первые экспериментальные исследования развития волновых пакетов в пограничном слое были проведены для случая малых скоростей набегающего потока в работе [1]. Последующее развитие подхода локализованных контролируемых возмущений привело к значительному прогрессу в изучении процессов поздних стадий ламинарно-турбулентного перехода дозвуковых пограничных слоев [2,3]. В исследованиях ламинарно-турбулентного перехода дозвуковых пограничных слоев локализованные контролируемые возмущения генерируются как с помощью метода «вдув-отсос», так и вибрирующей поверхностью. Метод возбуждения волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое с помощью поверхностного импульсного тлеющего разряда был предложен и опробован в работах [4,5].

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию эволюции локализованных волновых пакетов в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое. Эксперименты выполнены в сверхзвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН при числах Маха М=2 и 2,5. В экспериментах использовалась модель крыла с углом скольжения передней кромки 40° и чечевицеобразным профилем. Локализованные возмущения генерировались с помощью импульсного электрического разряда на поверхности экспериментальной модели. Измерения пульсаций в пограничном слое проводились с помощью термоанемометра постоянного сопротивления. Контролируемое возбуждение волновых пакетов производилось синхронно с измерениями, что позволило выделить искусственные возмущения из фона естественных пульсаций пограничного слоя.



На рисунке представлены изолинии пульсаций массового расхода волнового пакета при различных значениях продольной координаты для случая числа Маха набегающего потока М=2. В пограничном слое скользящего крыла волновой пакет несимметричен, что объясняется наличием поперечного течения. Проведен спектральный анализ развития волнового пакета. Определены наиболее неустойчивые значения поперечных волновых чисел и частот.

Работа выполнена в рамках базового государственного задания (номер гос. регистрации: АААА-А17-117030610125-7).

ЛИТЕРАТУРА.

1. M. Gaster, I. Grant. An experimental investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer. Proc. R Soc. Lond., A. 1975, 347, 253-269.
2. А.В. Бойко, Г.Р. Грек, А.В. Довгаль, В.В. Козлов. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.; Ижевск: РХД, 2006, 304 с.
3. М.М. Катасонов, В.В. Козлов, Н.В. Никитин, Д.С. Сбоев. Возникновение и развитие локализованных возмущений в круглой трубе и пограничном слое. Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2014, 222 с.
4. А.А. Яцких, Ю.Г Ермолаев., А.Д. Косинов, Н.В. Семенов. Эволюция волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое плоской пластины. Теплофизика и аэромеханика, 2015, т. 22, №1, с. 17-28
5. A.A. Yatskikh, Y.G. Ermolaev, A.D. Kosinov, N.V. Semionov. Hot-wire visualization of the evolution of localized wave packets in a supersonic flat-plate boundary layer. Journal of Visualization, 2017, 20(3), 549-557.

ПРИМЕНЕНИЕ СКАНИРУЕЩЕГО ТЕРМОАНЕМОМЕТРА ПОСТОЯННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ

Яцких А.А., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Смородский Б.В., Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л.
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Изучение закономерностей ламинарно–турбулентного перехода в условиях сверхзвуковых скоростей газовых потоков относится к числу важнейших фундаментальных задач механики жидкости и газа. Положение ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя существенно влияет на аэротермодинамические характеристики и эффективность органов управления сверхзвуковых летательных аппаратов. Экспериментальные и расчетные исследования турбулизации в пристенных сдвиговых течениях продолжают оставаться предметом пристального внимания ученых ведущих научных центров мира. Отсутствие глубоких знаний о закономерностях ламинарно-турбулентного перехода и его чувствительности к изменению различных условий полета затрудняет развитие инженерных методов определения положения ламинарно-турбулентного перехода.

На сегодняшний день активно развиваются численные методы изучения процессов ламинарно-турбулентного перехода. Для прикладного применения прямого численного моделирования и модельных подходов требуются их тщательная верификация. Для корректного сравнения теоретических расчетов и результатов экспериментальных исследований развития как естественных, так и контролируемых возмущений, необходимо разрешить задачу о начальных данных. Необходимы детальные знания о пульсациях пограничного слоя в зависимости от параметров потока.

Наиболее полные данные о течении дают измерения с помощью термоанемометра. Ниточный датчик термоанемометра обладает необходимым высокочастотным откликом и достаточным пространственным разрешением. Известно, что термоанемометр чувствителен к пульсациям массового расхода и температуры торможения [1-7]. Чувствительность к изменению этих величин различна и зависит от относительной температуры нити датчика термоанемометра (температурного напора). Изменением температурного напора возможно разделить пульсации и получить данные об уровне возмущений каждого типа. Такой подход к изучению высокоскоростных потоков хорошо себя зарекомендовал в исследованиях поля возмущений свободного потока в аэродинамических установках. Применительно к экспериментальным исследованиям пульсаций пограничного слоя подобная техника измерений так же используется, однако эти работы в основном посвящены измерениям в турбулентных пограничных слоях. Для изучения ламинарно-турбулентного перехода в высокоскоростных пограничных слоях перспективными являются исследования развития пульсаций скорости, плотности и температуры вниз по потоку в сверхзвуковых пограничных слоях. Исследования влияния таких параметров, как число Маха набегающего потока и геометрии обтекаемой модели могут создать базу для развития теоретических и расчетных методов предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода.

В данной работе представлены результаты измерений с помощью термоанемометра постоянного сопротивления в режиме автоматического сканирования по перегревам нити датчика. Описаны технология измерений и процесс обработки экспериментальных данных. Детально изложена процедура калибровки и представлены данные по изучению полей пульсаций в потоке рабочей части аэродинамической трубы Т-325 и в пограничном слое плоской пластины при числах Маха набегающего потока М = 2 и 2,5. По результатам калибровки сканирующего термоанемометра показано, что коэффициенты чувствительности практически не зависят от числа Маха набегающего потока. Для свободного потока в рабочей части Т-325 определены уровни пульсаций температуры торможения и пульсаций массового расхода. Проведено разделение возмущений пограничного слоя на пульсации массового расхода и температуры торможения. Показано, что в процессе ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя на плоской пластине отношение амплитуд пульсаций массового расхода к пульсациям температуры торможения остается постоянным.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-19-01289).

ЛИТЕРАТУРА.

1. L.S. Kovasznay. The hot-wire anemometer in supersonic flow. J. Aeronaut. Sci. 1950, 17(9), 565 - 584
2. В.А. Лебига, А.Н. Зиновьев, А.Ю. Пак. Применение термоанемометра для измерения характеристик произвольного акустического поля в сжимаемых потоках. ПМТФ, 2002, т. 43, №3, с. 176-181.
3. J. Weiss, H. Knauss, S. Wagner, A.D. Kosinov. Constant temperature hot-wire measurements in a short duration supersonic wind tunnel. The Aeronautical Journal, 2001, 105(1050), 435-450.
4. A.L. Kistler. Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer. Phys.Fluids, 1959, 2, 290-296.
5. A.J. Smits, K. Hayakava, K.C. Muck. Constant temperature hot-wire anemometer practice in supersonic flows. Experiments in Fluids, 1983, 1(1), 83-92.
6. M.V. Morkovin. Fluctuations and hot-wire anemometry in compressible flows. AGARD Rept 24. 1956. 102 p.
7. A.D. Kosinov, Yu.G. Yermolaev, N.V. Semionov, G.L. Kolosov, A.V. Panina. To the analysis of the natural pulsation development during laminar-turbulent transition in supersonic boundary layer. AIP Conference Proceedings, 2017, 1893, 030073.

Научное электронное издание

Материалы XXIII Международной конференции
«Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность»

25 февраля – 4 марта 2018 г.
Московская область, г. Звенигород,
пансионат «Звенигородский» РАН.

Ответственные редакторы Н.В. Никитин, Н.В. Попеленская

Публикуется в авторской редакции.

Подписано в печать 05.04.2018 г.

Издательство МАКС Пресс,
105066, г. Москва, Елоховский проезд, д. 3, строение 2.
Тел.: (495) 939-38-93. E-mail: info@makspress.ru

http://hit-conf.imec.msu.ru/books/NeZaTeGiUs_2018.pdf