

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Д. Б. Букина
«Задачи Монжа и Канторовича в бесконечномерных пространствах»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Представленная работа Д. Б. Букина является исследованием в области теории меры и функционального анализа. Ее цель — изучение задач оптимальной транспортировки мер в формах Монжа и Канторовича в бесконечномерных локально выпуклых пространствах. Тематика диссертации относится к интенсивно развивающемуся сейчас направлению функционального анализа на стыке с теорией меры, теорией экстремальных задач и стохастическим анализом.

Актуальность исследования задач оптимальной транспортировки мер в бесконечномерных пространствах обусловлена расширяющимся применением математических методов анализа распределения ресурсов и транспортных потоков с большим числом параметров и степеней свободы, что во многих ситуациях ведет к целесообразности рассмотрения таких систем как бесконечномерных. Исследования в близких к диссертации направлениях проводятся в ведущих научных центрах мира, по этой тематике регулярно выходят публикации в центральных математических журналах.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 8 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы. Во введении дан обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

Глава 1 носит вспомогательный характер.

В главе 2 исследуются задачи Монжа и Канторовича об оптимальной транспортировке на пространстве функций, непрерывных на отрезке, для распределений диффузионных процессов. При этом рассматривается функция стоимости, заданная нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера. Такая функция стоимости в обеих задачах стала изучаться в последние два десятилетия после первых работ известных парижских математиков Д. Фейеля и А.С. Устюнеля. Основным результатом второй главы состоит в том, что для широкого класса распределений диффузионных процессов с непостоянным коэффициентом диффузии в задаче Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина, отсутствуют решения в случае несовпадающих исходных мер. Значение этого отрицательного результата заключается в том, что он показывает, что в случае распределений диффузионных процессов с непостоянными коэффициентами диффузии естественная функция стоимости должна быть порождена структурой нелинейного риманова многообразия траекторий, а не линейного пространства с нормой.

В главе 3 исследуются так называемые канонические треугольные преобразования гауссовских мер на пространстве \mathbb{R}^n , а задача состоит в сравнении стоимостей соответствующих транспортировок с оптимальными. Основным результатом состоит в количественных оценках, зависящих от размерности и показывающих отличие

стоимостей транспортировки при треугольных отображениях от оптимальных стоимостей. Кроме того, аналогичные вопросы изучаются и в бесконечномерном случае, где для некоторого специального класса гауссовских мер получены, наоборот, не зависящие от размерности сравнения стоимостей.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Для распределений диффузионных процессов в пространстве непрерывных функций получены условия на коэффициент диффузии, необходимые для того, чтобы соответствующая задача Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, была разрешима. Это дает простые и легко проверяемые условия, при которых указанная задача неразрешима.

2. Для задачи Канторовича с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, показано, что она не имеет нетривиальных решений для широкого класса распределений диффузионных процессов. В частности, так обстоит дело для непостоянных аналитических коэффициентов диффузии.

3. Для гауссовских мер на пространстве \mathbb{R}^n проведено сравнение функционалов стоимости в задаче Монжа для треугольных и для оптимальных отображений, показано, что эти значения асимптотически не сравнимы для весьма широкого класса мер. Получены бесконечномерные аналоги этого утверждения. С другой стороны, указаны конструктивные условия, при которых даже в бесконечномерном случае стоимость транспортировки при треугольном отображении оценивается с универсальной постоянной через оптимальную стоимость.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации опубликованы 4 статьи в журналах из баз данных WoS и Scopus.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (2014–2019 г.), на международном научно-исследовательском семинаре “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия (2015 г.), на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ им. М. В. Ломоносова (2016 г.), на международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (Москва, РУДН, 2014 г.), на международной конференции «Бесконечномерный анализ и теория управления» (Москва, МГУ, 2018 г.), на международной конференции «Recent Advances in Mass Transportation» (Москва, 2019 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах функционального анализа, теории меры, бесконечномерного анализа и стохастического анализа. Результаты и методы работы Д. Б. Букина будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, НИУ «Высшая школа экономики», Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете.

Таким образом, в диссертационной работе Д. Б. Букина «Задачи Монжа и Канторовича в бесконечномерных пространствах» решено несколько актуальных и трудных задач функционального анализа и теории меры. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.01.07.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391244, факс +74959392090
email: mmmf@mech.math.msu.su, сайт <http://www.math.msu.su/>)
доктор физико-математических наук, профессор
(тел. +74959393680, email: vibogach@mail.ru)

В. И. Богачев

Подпись профессора В.И. Богачева удостоверяю
Декан механико-математического факультета МГУ,
член-корр. РАН, профессор

А.И. Шафаревич