МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Горелов Василий Александрович

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Москва – 2020

Оглавление

Введение 4
§ 1. Обозначения и исходные определения 4
§ 2. Актуальность темы и степень её разработанности 7
§ 3. Общая характеристика работы 18
§ 4. Основные результаты диссертации 20
Глава 1. Общие теоремы об алгебраической независимости значений E-функций 51
§ 1. Вспомогательные утверждения 51
§ 2. Доказательство теоремы 1 64
§ 3. Доказательство теоремы 2 67
Глава 2. Свойства дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют E-функции 71
§ 1. Вспомогательные утверждения 71
§ 2. Доказательство теорем 3 и 4 76
§ 3. Доказательство теоремы 5 84
Глава 3. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 1-го и 2-го порядков 88
§ 1. Доказательство теоремы 6 88
§ 2. Доказательство теорем 7 и 8 91
§ 3. Доказательство теорем 9, 10 и 11 100
§ 4. Доказательство теоремы 13 115
Глава 4. Алгебраические свойства решений гипергеометрических уравнений 121
§ 1. Доказательство теорем 14 и 15 121
§ 2. О коградиентности и контрградиентности дифференциальных уравнений и систем 129
§ 3. Вспомогательные утверждения 146
§ 4. Доказательство теорем 19, 20 и 21 158
Глава 5. Алгебраические свойства гипергеометрических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям 2-го порядка 168

§ 1. Об алгебраических соотношениях между рассматриваемыми гипергеометрическими функциями 168
§ 2. Вспомогательные утверждения 169
§ 3. Доказательство теоремы 23 177
§ 4. Доказательство теоремы 22 180
§ 5. Доказательство теорем 24 и 25 187

Глава 6. Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций 195
§ 1. Вспомогательные утверждения 195
§ 2. Доказательство теорем 26, $26'$, 27, $27'$ 199
§ 3. Доказательство теорем 28 и $28'$ 208
§ 4. О неприводимости произведений степеней решений систем линейных дифференциальных уравнений 221
§ 5. Доказательство теоремы 29 229

Заключение 232

Литература 233

Введение

§1. Обозначения и исходные определения

$A \setminus B$ — разность множеств A и B.
A^n — декартова степень множества A.
δ_i^j — символ Кронекера.
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел.
$\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел.
$\mathbb{Z}^-$ — множество неположительных целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.
$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.
$\mathbb{A}$ — поле всех алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле над $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел.
$\mathbb{K}$ — алгебраическое поле конечной степени над $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ — кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{K}$.
$[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$ — степень алгебраического поля $\mathbb{K}$ над $\mathbb{Q}$.
$\deg \alpha$ — степень алгебраического числа α над $\mathbb{Q}$.
$\Re e\ \alpha, \Im m\ \alpha$ — действительная и мнимая части числа α.
$\operatorname{den} \alpha$ — знаменатель алгебраического числа α.
$\overline{|\alpha|}$ — размер числа $\alpha \in \mathbb{A}$ (максимум модулей чисел, алгебраически сопряжённых с α).
$\mathbb{K}_{[j]}$ — поле, сопряжённое с $\mathbb{K}$ (см. стр. 71).
$\alpha_{[j]}$ — число, сопряжённое с $\alpha \in \mathbb{K}$ в поле $\mathbb{K}$.
$\operatorname{Norm} \alpha$ — норма числа $\alpha \in \mathbb{K}$ (произведение всех чисел, сопряжённых с α в поле $\mathbb{K}$).
$[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее действительное число x.
$\mathbb{W}[z_1, \ldots, z_n]$ — кольцо многочленов от n переменных $z_1, \ldots, z_n$ над полем (кольцом) $\mathbb{W}$.
$\mathbb{W}(z_1, \ldots, z_n)$ — поле рациональных функций от n переменных $z_1, \ldots, z_n$ над полем $\mathbb{W}$.
$\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ — кольцо $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$.
$\deg_{z_i} P$ — степень многочлена $P \in \mathbb{W}[z_1, \ldots, z_n]$ по z_i.

$\deg_{\bar z} P$ — степень многочлена $P \in \mathbb{W}[z_1, \ldots, z_n]$ по совокупности переменных $z_1, \ldots, z_n$.

$H(P)$ — высота многочлена $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ (максимум модулей всех его коэффициентов).

$\overline{|P|}$ — размер многочлена $P \in \mathbb{A}[z_1, \ldots, z_n]$ (максимум размеров всех его коэффициентов).

(P, Q) — наибольший общий делитель многочленов P и Q.

$P_{[j]}$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены с коэффициентами многочлена $P \in \mathbb{K}[z_1, \ldots, z_n]$ (см. стр. 71).

$f_{[j]}(z)$ — формальный степенной ряд, коэффициенты которого сопряжены с коэффициентами ряда $f(z)$ (см. стр. 71).

$\deg tr_{\mathbb{V}}\{u_1, \ldots, u_n\}$ — степень трансцендентности множества элементов $u_1, \ldots, u_n$ над полем $\mathbb{V}$.

$\deg tr^{\circ}_{\mathbb{V}}\{u_1, \ldots, u_n\}$ — степень однородной трансцендентности множества элементов $u_1, \ldots, u_n$ над полем $\mathbb{V}$.

$\Phi_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_n; s; H)$ — мера алгебраической независимости чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ относительно поля $\mathbb{K}$ (см. стр. 16).

$\Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_n; s; H)$ — мера однородной алгебраической независимости чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ относительно поля $\mathbb{K}$.

$\mathbb{F}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ — дифференциальное поле, полученное присоединением к полю $\mathbb{F}$ дифференциальных переменных $v_1, \ldots, v_n$.

$\|\alpha_{i,k}\|_{i,k}$ — матрица с элементами $\alpha_{i,k}$.

$|\alpha_{i,k}|_{i,k}$ — определитель с элементами $\alpha_{i,k}$.

$M(m, \mathbb{W})$ — множество всех матриц размера $m \times m$ с элементами из кольца $\mathbb{W}$.

$GL(m, \mathbb{W})$ — полная линейная группа (множество всех обратимых матриц размера $m \times m$ с элементами из кольца $\mathbb{W}$).

$SL(m, \mathbb{W})$ — специальная линейная группа (подгруппа $GL(m, \mathbb{W})$ из матриц с определителем, равным 1).

$Sp(m, \mathbb{C})$ — симплектическая группа (подгруппа $GL(m, \mathbb{C})$, где m — чётное число, из симплектических матриц).

$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$ — диагональная матрица с элементами $a_1, \ldots, a_m$.

A^T — матрица, транспонированная с матрицей A.

(A) — система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с матрицей коэффициентов A.

$\dim \mathbb{L}$ — размерность линейного пространства $\mathbb{L}$.

$\operatorname{ord} f(z)$ — порядок нуля функции $f(z)$ в точке $z=0$.
$f\hat{}(z)$ — преобразование Лапласа функции $f(z)$.
$F \circ G$ — композиция операторов F и G.
$L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)$ — дифференциальный гипергеометрический оператор (см. стр. 10 и 29).
$\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$ — эквивалентность векторов $\vec{\mu},\vec{\eta} \in \mathbb{C}^n$ по $\mod \mathbb{Z}$ (см. стр. 29).

Комплексное (в частности, действительное) число α называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad p(x) \not\equiv 0,$$

с рациональными коэффициентами, и трансцендентным в противном случае. Без ограничения общности можно считать, что многочлен $p(x)$ неприводим в поле $\mathbb{Q}(x)$, а его коэффициенты — взаимно простые целые числа. В этом случае степень и высоту многочлена $p(x)$ называют, соответственно, степенью и высотой числа α, а корни многочлена $p(x)$ — числами, алгебраически сопряжёнными с α. Если $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $a_n = 1$, то число α называют целым алгебраическим. Знаменатель алгебраического числа α — это такое натуральное число q, что $q\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{A}$, $\deg\theta = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = h$, $\theta_1,\ldots,\theta_h$ — числа, сопряжённые с θ. Если $\alpha \in \mathbb{K}$, то $\alpha = P(\theta)$, $P \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg P \leqslant h-1$. Числа $\alpha_{[j]} = P(\theta_j)$, $j = 1,\ldots,h$, называются числами, сопряжёнными с α в поле $\mathbb{K}$. Они совпадают с числами, сопряжёнными с α, быть может, повторёнными несколько раз (см. [36:12, гл. 1, §4]). Будем считать, что $\alpha_{[1]} = \alpha$. Числа $\alpha_{[2]},\ldots,\alpha_{[h]}$ могут не принадлежать полю $\mathbb{K}$.

Пусть $\mathbb{V}$ — поле, а $\mathbb{W}$ — поле или кольцо, содержащее $\mathbb{V}$. Элементы $u_1,\ldots,u_n$ из $\mathbb{W}$ называются алгебраически зависимыми над $\mathbb{V}$, если существует многочлен

$$P = P(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{V}[z_1,\ldots,z_n], \quad P \not\equiv 0,$$

такой, что $P(u_1,\ldots,u_n) = 0$. В противном случае элементы $u_1,\ldots,u_n$ называются алгебраически независимыми над $\mathbb{V}$.

Аналогично определяются понятия однородной алгебраической зависимости и независимости элементов $\mathbb{W}$ над $\mathbb{V}$ с той лишь разницей, что многочлен P, входящий в определение, является однородным.

Наибольшее число алгебраически независимых над $\mathbb{V}$ среди множества элементов $u_1, \ldots, u_n$ из $\mathbb{W}$ называется степенью трансцендентности этого множества. Аналогично определяется степень однородной трансцендентности множества $u_1, \ldots, u_n$.

Если $\mathbb{V} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{W} = \mathbb{C}$, то говорят короче об алгебраической независимости или зависимости комплексных чисел.

Нетрудно доказать, что числа, алгебраически независимые над $\mathbb{Q}$, являются алгебраически независимыми над $\mathbb{A}$.

Понятие алгебраической независимости обобщает понятие трансцендентности числа. Если некоторые числа алгебраически независимы, то каждое из них трансцендентно.

Во введении и в каждой главе леммы и формулы имеют свою нумерацию. При ссылках на леммы и формулы из другой главы перед их номерами указывается номер главы, в которой они содержатся. Например, (1.6) обозначает формулу (6) из главы 1. При ссылках на формулы введения перед номером формулы ставится 0.

При ссылках на литературу указываются номер фамилии автора и номер его работы согласно нумерации в списке литературы. Эти номера разделяются двоеточием и заключаются в квадратные скобки.

§2. Актуальность темы и степень её разработанности

Существование трансцендентных чисел впервые было доказано Ж. Лиувиллем [55:1] в 1844 г. Он выяснил, что алгебраические числа не могут "слишком хорошо" приближаться рациональными дробями. Это позволило построить первые примеры трансцендентных чисел, принадлежащих классу так называемых Лиувиллевых чисел. Но результат Лиувилля не давал возможности устанавливать трансцендентность многих чисел, имеющих значение в математике, например, e, π, e^{π} и других. Для решения этого вопроса потребовалось создание методов доказательства трансцендентности значений различных аналитических функций.

Первый аналитический метод в теории трансцендентных чисел был опубликован в 1873 г. Ш. Эрмитом [49:1]. С помощью этого метода, основанного на использовании свойств показательной функции e^z, ему удалось установить трансцендентность числа e.

В 1882 г. Ф. Линдеман [54:1], развивая метод Эрмита, доказал трансцендентность значений функции e^z в ненулевых алгебраических точках и, как следствие, трансцендентность числа π и значений функции $\ln z$ при $z \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$. Из доказанной Линдеманом трансцендентности числа π вытекало отрицательное решение проблемы квадратуры круга.

В своей работе Линдеман также доказал теорему о линейной независимости над полем $\mathbb{A}$ чисел $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — различные алгебраические числа, что равносильно утверждению об алгебраической независимости чисел $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ при линейно независимых над $\mathbb{Q}$ алгебраических числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В 1929 г. и 1934 г. А.О. Гельфонд [11:1–3] опубликовал аналитические методы доказательства трансцендентности чисел, с помощью которых ему удалось решить седьмую проблему Гильберта о трансцендентности чисел вида α^β, где $\alpha, \beta \in \mathbb{A},\ \alpha \notin \{0;1\},\ \beta \notin \mathbb{Q}$. Из его результатов следовало, например, что число $e^\pi = i^{-2i}$ трансцендентно. Трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$ доказал в 1930 г. Р.О. Кузьмин [20:1].

В 1934 г., несколько позже Гельфонда, Т. Шнейдер [60:1] получил решение седьмой проблемы Гильберта другим методом. В 1934 – 41 гг. Т. Шнейдер [60:2–5] доказал трансцендентность многих чисел, связанных с эллиптическими функциями, модулярными функциями и абелевыми интегралами.

В 1929 – 30 гг. К. Малер [56:1–3] опубликовал метод, позволяющий устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в точках $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ аналитических функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям вида

$$f(z^p) = \frac{A_1(z, f(z))}{A_2(z, f(z))}, \quad A_j(z,y) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z,y],\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2,$$

если коэффициенты разложения этих функций по степеням z принадлежат полю $\mathbb{K}$.

В 1929 г. К. Зигель [61:1] создал новый аналитический метод. Этим методом он исследовал арифметические свойства значений функций

$$K_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots,$$

удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}y' + y = 0 \tag{1}$$

и только множителем $(z/2)^{\lambda}(\Gamma(\lambda+1))^{-1}$ отличающихся от функций Бесселя $J_\lambda(z)$ с индексом λ.

К. Зигель доказал, что если $\alpha \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$, $-\lambda \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, то числа $K_\lambda(\alpha)$, $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы. В той же работе он нашёл необходимые и достаточные условия для алгебраической независимости $2nm$ чисел $K_{\lambda_i}(\alpha_k)$, $K'_{\lambda_i}(\alpha_k)$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,m$.

Метод Зигеля можно применить к исследованию арифметической природы значений одного класса целых функций, названных им E-функциями, при условии, что они удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Методы Гельфонда, Малера и Зигеля, получившие дальнейшее обобщение и развитие, до сих пор остаются основными методами теории трансцендентных чисел.

Настоящая диссертация связана с методом Зигеля. История и современное состояние методов Гельфонда и Малера подробно изложены в монографиях [11:4; 33:2; 39:1; 57:1], см. также [36:12, стр. 15 – 17].

Определение 1. *Аналитическая функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}, \quad c_n \in \mathbb{K}, \tag{2}$$

называется E-функцией, если при любом $\varepsilon > 0$*:*

1°. $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n}), \quad n \to \infty.$

2°. *Существует последовательность* $\{d_n\}$ *общих знаменателей чисел* $c_1,\ldots,c_n$*, такая, что* $d_n = O(n^{\varepsilon n}), \quad n\to\infty.$

Множество E-функций является дифференциальным кольцом, замкнутым относительно интегрирования в пределах от 0 до z, а также замены аргумента z на αz, где $\alpha \in \mathbb{A}$. Нетрудно проверить, что всякая E-функция, отличная от многочлена, должна быть целой функцией 1-го порядка.

Простейшими E-функциями являются многочлены из $\mathbb{A}[z]$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, функция Бесселя $J_0(z)$. Более сложные примеры E-функций получаются из (обобщённых) гипергеометрических функций

$$ {}_l\varphi_q(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = {}_{l+1}F_q\left(\left.\begin{matrix} 1,\nu_1,\ldots,\nu_l \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n, $$

где $0 \leqslant l \leqslant q$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)$, $\vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_l) \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^q$.

Функция ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)$ удовлетворяет (обобщённому) гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$ L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)\,y = (\lambda_1-1)\ldots(\lambda_q-1), \qquad (3) $$

где

$$ L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = \left(\prod_{j=1}^{q}(\delta+\lambda_j-1) - z\prod_{k=1}^{l}(\delta+\nu_k)\right), \quad \delta = z\frac{d}{dz}. $$

Гипергеометрические функции известны уже несколько столетий (см. [62:1; 22:1; 19:1; 4:1; 3:1]). Наиболее подробно изучались свойства функций

$$ {}_lF_q\left(\left.\begin{matrix} \nu_1,\ldots,\nu_l \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{n!(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n, $$

удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям.

В статье [61:1] К. Зигель доказал, что функции ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$ при $l<q$, $\nu_1,\ldots,\lambda_q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{A}$ являются E-функциями.

Вопрос о том, при каких условиях функция ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z^{q-l})$ с произвольными комплексными параметрами будет E-функцией, исследовался в работах В.Г. Спринджука [30:1] и А.И. Галочкина [10:2]. Выяснилось, что за исключением одного простого случая, все параметры ν_i,λ_j должны быть рациональными.

К. Зигель [61:1, §2; 61:2, стр. 58] сформулировал гипотезу, что всякая E-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, представляется в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E-функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$. До появления статей автора в направлении решения этой задачи не было получено никаких результатов (см. стр. 189 книги [36:12]).

В 1949 г. К. Зигель [61:2] изложил свой метод в виде общей теоремы об алгебраической независимости значений E-функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), \tag{4}$$

удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\, y_i, \qquad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m, \quad m \geqslant 2 \tag{5}$$

в точке $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, неособой для коэффициентов этой системы.

В общей теореме Зигеля требовалось выполнение некоторого аналитического условия нормальности произведений степеней рассматриваемых функций. Ввиду сложности проверки этого условия новых результатов о конкретных E-функциях, отличных от рассмотренных в [61:1], работа [61:2] не содержала. Для гипергеометрических функций, удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям выше 2-го порядка, условие нормальности удалось проверить лишь в 1988 г. [43:1].

Метод Зигеля может быть применён также к исследованию некоторых арифметических свойств значений аналитических функций с конечным радиусом сходимости, т. н. G-функциям. Определение G-функций отличается от определения E-функций только отсутствием множителя $n!$ в знаменателях коэффициентов ряда Тейлора (первоначальные сведения о G-функциях см. в [36:12, стр. 430–435]).

Начиная с середины 50-х годов метод Зигеля получил дальнейшее развитие и обобщение в работах А.Б. Шидловского.

В 1954 г. А.Б. Шидловский [36:1,4] опубликовал теорему, аналогичную общей теореме Зигеля, в которой условие нормальности было заменено на менее стеснительное условие неприводимости произведений степеней рассматриваемых функций. С помощью этой теоремы была доказана трансцендентность и алгебраическая независимость значений некоторых E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го, 3-го и 4-го порядков, в т. ч. неоднородным.

Определение 2. *Совокупность аналитических функций (4), являющаяся решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений (5), называется неприводимой системой функцией, если ни одна из этих функций не равна тождественно нулю и ненулевые компоненты любого решения $y_1, \ldots, y_m$ системы (5) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Из определения 2 следует, что функции, составляющие неприводимую систему функций, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

В 1955 г. А.Б. Шидловский [36:2,5] установил следующий критерий алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках.

Теорема I. *Пусть E-функции (4) составляют решение системы (5) либо системы*

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\, y_i, \qquad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m, \quad m \geqslant 1, \tag{6}$$

а $T(z)$ – наименьшее общее кратное знаменателей функций $Q_{k,i}$. Тогда однородная алгебраическая независимость (соответственно алгебраическая независимость) чисел

$$f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha) \tag{7}$$

при $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$ равносильна однородной алгебраической независимости (соответственно алгебраической независимости) функций (4) над $\mathbb{C}(z)$.

Заметим, что если E-функции связаны каким-либо дифференциальным или алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$, то коэффициенты этого уравнения можно выбрать из $\mathbb{A}(z)$ (см. [36:12, гл. 3, § 2, леммы 2 и 3] либо лемму 2.1).

В 1955 г. А.Б. Шидловским [36:3,7] была также доказана ещё более общая

Теорема II. *Пусть E-функции (4), $m \geqslant 2$ ($m \geqslant 1$), составляют решение системы (5) (системы (6)), степень однородной трансцендентности (соответственно степень трансцендентности) функций (4) над $\mathbb{C}(z)$ равна l, $0 \leqslant l \leqslant m$, а $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел (7) также равна l.*

В случае $\alpha = 0$ числа (7) являются алгебраическими (это следует из определения E-функций), а в случае, когда α совпадает с особой точкой рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (т. е. когда $T(\alpha) = 0$), никаких общих утверждений доказано не было.

При $l < m$ теорема II неэффективна (не позволяет указывать примеры алгебраически независимых чисел). А.Б. Шидловский ([36:9, §4], [36:12, гл. 4]) неоднократно пытался её эффективизировать. Им было доказано, что если при условиях теоремы II $\alpha \notin \Lambda$, где Λ – некоторое конечное множество, то из однородной алгебраической независимости (алгебраической независимости) над $\mathbb{C}(z)$ любых l функций

$$f_1(z), \dots, f_l(z) \tag{8}$$

следует однородная алгебраическая независимость (алгебраическая независимость) чисел

$$f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha) \tag{9}$$

(см. §§ 5, 6 гл. 4 книги [36:12]). Но применяемый метод позволял давать эффективное описание множества Λ лишь в некоторых специальных случаях. Результаты такого типа имеются также в работе В.Г. Чирского [35:1].

А.Б. Шидловский рассмотрел гипергеометрические функции

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y' = \left(1 - \frac{\lambda}{z}\right) y + \frac{\lambda}{z}.$$

Они могут пониматься как "неоднородный аналог" функции e^z. О значениях этих функций А.Б. Шидловским [36:6] была доказана

Теорема III. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$; *числа* $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{A}$ *и линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$. *Тогда* $(m+1)n$ *чисел*

$$\varphi_{\lambda_0}(\beta_i), \varphi_{\lambda_j}(\alpha_i), \quad j = 1, \dots, m, \ i = 1, \dots, n$$

алгебраически независимы.

С учётом равенств

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{z^l}{(\lambda+1)\dots(\lambda+l)}\varphi_{\lambda+l}(z) + 1 + \sum_{n=1}^{l-1}\frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}, \quad (10)$$

где $l \in \mathbb{N}$, и $\varphi_0(z) = e^z$ условия теоремы III являются необходимыми и достаточными.

Общие теоремы К. Зигеля и А.Б. Шидловского послужили мощным стимулом для разработки методов доказательства алгебраической независимости решений дифференциальных уравнений над $\mathbb{C}(z)$. В случае дифференциальных уравнений 1-го, 2-го, 3-го порядков и отдельных типов уравнений более высоких порядков такие методы были созданы в упомянутых выше работах К. Зигеля и А.Б. Шидловского, а также И.И. Белогривова [5:1–4] и В.А. Олейникова [27:1,2]. Кроме того, имеется большое число публикаций многих авторов, результаты которых относились к конкретным совокупностям E-функций — А.А. Шмелёв [37:1], К. Ваананен [63:1,2], К. Малер [56:5], В.Х. Салихов [28:1] и другие — подробную библиографию и историю вопроса см. в книге [36:12]. Для дифференциальных уравнений произвольных порядков, а также совокупностей систем дифференциальных уравнений наиболее сильные и общие результаты получили Е. Колчин [52:1,2], Ю.В. Нестеренко [26:1], Д. Бертран [40:1], В.Х. Салихов [28:3–6], Ф. Бейкерс, В. Браунвелл и Г. Хекман [43:1], Н. Кац [51:1]. Дальнейшее развитие некоторых из этих результатов получено в работах В.А. Кулагина [21:1,2] и М.А. Черепнёва [34:1,2].

Поиск необходимых и достаточных условий алгебраической независимости различных совокупностей функций тесно связан с нахождением всех алгебраических тождеств между этими функциями, что представляет интерес также для теории специальных функций и математического анализа в широком смысле слова.

К новым ярким результатам, относящимся к методу Зигеля, принадлежит доказанная Ф. Бейкерсом [42:2] теорема о линейной независимости значений E-функций, обобщающая на произвольные E-функции соответствующую теорему Линдемана. Также отметим статью И. Андрэ [38:1] о свойствах функций, имеющих алгебраические коэффициенты разложений Тейлора.

Необходимо указать, что в теоремах Ф. Бейкерса из статьи [42:2], опубликованной в 2006 г., а также в части результатов из [38:1] для Е-функций использовано не определение 1, а более узкое

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется Е-функцией в узком смысле, если в определении 1 для величин $\overline{|c_n|}$, d_n справедливы оценки*

$$\overline{|c_n|} \leqslant c^n, \qquad d_n \leqslant c^n$$

при некотором $c \geqslant 1$.

Все известные Е-функции, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, являются Е-функциями в смысле определения 3. Заметим, что из справедливости вышесформулированной гипотезы Зигеля следовала бы эквивалентность определений Е-функции.

В статье [42:2] Ф. Бейкерса доказана также теорема "об устранении ненулевых особенностей":

Теорема IV [42:2, теорема 1.5]. *Пусть Е-функции (4) в смысле определения 3 удовлетворяют системе (5) с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$ и линейно независимы над $\mathbb{A}(z)$. Тогда существуют Е-функции $g_1(z), \ldots, g_m(z)$, составляющие решение системы вида (5) с коэффициентами из $\mathbb{A}[z, 1/z]$, и матрица M размера $m \times m$ с элементами из $\mathbb{A}[z]$, такие, что*

$$(f_1(z), \ldots, f_m(z))^T = M \cdot (g_1(z), \ldots, g_m(z))^T. \qquad (11)$$

Следует отметить, что в последние годы появились работы (см. [38:2] и G. Lepetit, *G-opérateurs au sens large et application à un théorème d'André sur les E-fonctions au sens large*, 23 pages, arxiv:math. NT/ 1902.07049 v3 7 Jun 2019), в которых теоремы Ф. Бейкерса из статьи [42:2] (в том числе теорема IV) переносятся на случай Е-функций в смысле определения 1.

Методы Зигеля, Гельфонда и Малера позволяют получать не только результаты качественного характера об алгебраической независимости значений функций, но и их количественные аналоги в виде оценок снизу мер трансцендентности и алгебраической независимости таких чисел.

Мерой алгебраической независимости чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ называют функцию

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_m; s; H) = \min |P(\xi_1, \ldots, \xi_m)|,$$

$$P = P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m],\ P \not\equiv 0,\ \deg_{\bar{x}} P \leqslant s, H(P) \leqslant H,$$

где $s \in \mathbb{N}$, а минимум берётся по всем многочленам, удовлетворяющим указанным условиям.

При $m = 1$ функция $\Phi(\xi; s; H)$ называется мерой трансцендентности числа ξ.

Если в определении меры алгебраической независимости потребовать, чтобы многочлен P был однородным по переменным $x_1, \dots, x_m$, то соответствующая функция $\Phi^{\circ}(\xi_1, \dots, \xi_m; s; H)$ называется мерой однородной алгебраической независимости чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$.

Иногда рассматривается также мера алгебраической независимости вида

$$\Phi(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,m_1}; \dots; \xi_{t,1}, \dots, \xi_{t,m_t}; s_1 \dots, s_t; H)$$

совокупности чисел, состоящей из t подсовокупностей, причём степени многочлена P по соответствующим подсовокупностям переменных не превосходят $s_1, \dots, s_t$.

В некоторых работах рассматриваются меры алгебраической независимости относительно поля $\mathbb{K}$, определяемые как и выше с той лишь разницей, что коэффициенты соответствующих многочленов P принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, а их размеры не превосходят H. Меры относительно поля $\mathbb{K}$ обозначаются $\Phi_{\mathbb{K}}$ и $\Phi_{\mathbb{K}}^{\circ}$.

Впервые оценка снизу меры трансцендентности была получена в 1899 г. Э. Борелем [45:1] для числа e. С помощью метода Эрмита-Линдемана он доказал, что при ограниченном s и растущем H

$$\Phi(e; s; H) > H^{-\sigma \ln\ln H}, \quad \sigma = \sigma(s) > 0.$$

В 1932 г. К. Малер [56:4] получил более сильный результат:

$$\Phi(e; s; H) > H^{-s - \frac{cs^2 \ln(s+1)}{\ln\ln H}}, \quad H \geqslant H_0(s),$$

где с > 0 — абсолютная постоянная.

В статье [61:1] К. Зигель получил оценку

$$\Phi(J_0(\alpha), J_0'(\alpha); s; H) > CH^{-123h^3s^2},$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $h = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от H.

Постоянная, входящая в оценку меры алгебраической независимости, называется эффективной, если её можно вычислить с помощью конечного числа арифметических и других элементарных операций через характеристики рассматриваемого набора функций, точек и другие известные величины. Оценка меры, содержащая только эффективные постоянные, называется эффективной. Если все входящие в оценку меры постоянные не зависят от степени меры, то такая оценка называется эффективной по степени меры. Аналогично определяются постоянные, эффективные по какой-либо другой величине.

При получении эффективных оценок многочленов от значений E-функций вместо определения 1 обычно используют определение 3.

E-функции, у которых $c_n \in \mathbb{K}$, называют $\mathbb{K}$E-функциями.

В работах [36:5,6] А.Б. Шидловский указал, что применяя полученные в них результаты и рассуждая как в статье Зигеля [61:1], можно получать общие оценки мер алгебраической независимости значений E-функций.

В 1968 г. А.И. Галочкин [10:1] опубликовал теорему, из которой, как частный случай, следует

Теорема V. *Пусть $\mathbb{K}$E-функции (4) составляют решение системы (6) и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$. Тогда*

$$\Phi(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha); s; H) > CH^{-\rho s^m}, \tag{12}$$

где $\rho = 2^{m+1} m^m h^{m+1}/m!$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от H.

Впервые оценка типа (12) была получена в 1962 г. С. Ленгом [53:1].

В 1977 г. Ю.В. Нестеренко [26:2] опубликовал оценку, аналогичную (12), в которой $\rho = 4^m h^m (mh^2 + h + 1)$, $C = (\exp\exp(\sigma s^{2m} \ln(s + 1)))^{-1}$ — постоянная, эффективная по s.

В 1967 г. А.Б. Шидловский [36:8] в случае, когда коэффициенты степенных рядов рассматриваемых E-функций и точки, в которых берутся их значения, принадлежат $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{I}$ (мнимому квадратичному полю над $\mathbb{Q}$), получил оценки мер алгебраической независимости с точными главными членами в показателях.

В 1980 г. А.Б. Шидловским [36:11] (см. также §§ 3, 4 гл. 12 книги [36:12]) был установлен ряд оценок мер алгебраической независимости относительно поля $\mathbb{K}$ значений подсовокупности $\mathbb{K}$E-функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность функций алгебраически зависима над $\mathbb{C}(z)$. С учётом работы А.И. Галочкина [10:3] эти оценки могут быть сформулированы как

Теорема VI. *Пусть* $\mathbb{K}E$*-функции (4),* $m \geqslant 2$*, составляют решение системы (6),* $\deg tr_{\mathbb{C}(z)}\{f_1(z), \ldots, f_m(z)\} = l$*,* $\alpha \in \mathbb{A}$*,* $\alpha T(\alpha) \neq 0$*,* $P \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_m]$*,* $\deg P \leqslant s$*,* $H(P) \leqslant H$*,* $h = [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{Q}]$*. Тогда либо* $P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = 0$*, либо*

$$|P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > CH^{-\rho h^{l+1} s^l},$$

где ρ*,* C *— положительные постоянные, не зависящие от* H*. Если* $l = m - 1$*, то* $\rho = k(2m)^m/m!$*, где* k *— степень неприводимого уравнения, связывающего функции (4).*

Отметим, что алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ рассматриваемой совокупности Е-функций недостаточно для получения эффективных оценок мер алгебраической независимости значений этих функций. Для этого требуется выполнение дополнительных условий — таких как условие нормальности К. Зигеля, условие неприводимости А.Б. Шидловского или условие Ю.В. Нестеренко из статьи [26:3] (условие неприводимости влечёт за собой выполнение условия из [26:3]). Вопросы получения эффективных оценок отражены в работах А.Б. Шидловского [36:10,12], Ю.В. Нестеренко [26:2,3], В.Х. Салихова [28:2], Нгуен Тьен Тая [25:1], Ю.Н. Макарова [23:1,2], Д. Бертрана и Ф. Бейкерса [41:1], В. Браунвелла [46:1], Ф. Бейкерса, В. Браунвелла и Г. Хекмана [43:1], П. Хендрикса [50:1] и других.

§3. Общая характеристика работы

Цели и задачи работы. Главными целями диссертации являются:

1. Дальнейшая разработка метода Зигеля для получения возможности его применения к исследованию значений Е-функций в особых точках систем дифференциальных уравнений.

2. Получение эффективного аналога теоремы II А.Б. Шидловского.

3. Исследование гипотезы Зигеля о представимости Е-функций многочленами от гипергеометрических функций.

4. Дальнейшая разработка методов доказательства алгебраической независимости гипергеометрических функций над $\mathbb{C}(z)$. Применение полученных результатов к исследованию арифметической природы значений аналитических функций.

5. Получение новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

6. Получение новых оценок многочленов от значений E-функций.

Методы исследования. В диссертации развиваются и совершенствуются классические методы, берущие начало в работах К. Зигеля и А.Б. Шидловского, в которые вносится ряд новых идей. Доказательство некоторых теорем использует методы аналитической теории дифференциальных уравнений, дифференциальной алгебры, преобразования Лапласа, а также отдельные результаты, полученные другими математиками в этой области.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и полученными автором самостоятельно. Их описание приведено в §4 Введения и в Заключении.

Некоторые вспомогательные результаты о свойствах дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют E-функции, были получены независимо и примерно в одно и то же время И. Андрэ [38:1] и Ф. Бейкерсом [42:2]. При этом Андрэ и Бейкерс использовали значительно более сложные методы.

Положения, выносимые на защиту.

1. Обобщение и уточнение общих теорем А.Б. Шидловского об алгебраической независимости значений E-функций.

2. Доказательство гипотезы Зигеля для случая линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка и некоторых видов линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

3. Решение вопроса об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ множества всех гипергеометрических E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка, а также о возможных алгебраических связях между ними.

4. Доказательство теорем общего характера с необходимыми и достаточными условиями об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ ре-

шений произвольных совокупностей гипергеометрических уравнений различных порядков.

5. Получение новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

6. Получение новых оценок многочленов от значений E-функций.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории трансцендентных чисел, теории диофантовых приближений, теории специальных функций, дифференциальной алгебре, аналитической теории дифференциальных уравнений.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации многократно докладывались на научно-исследовательском семинаре по теории чисел механико-математического факультета МГУ, на научно-исследовательском семинаре по теории дифференциальных уравнений МЭИ, на Всесоюзных конференциях "Теория трансцендентных чисел и её приложения" в Москве в 1983 г., "Теория чисел и её приложения" в Тбилиси в 1985 г., на конференциях по теории чисел в Минске в 1989 г., в Ташкенте в 1990 г., в Туле в 1993, 1996 и 2001 гг., в Воронеже в 1995 г., в Саратове в 2004 г., на международных конференциях "Трансцендентные числа" в Москве в 2000 г., "Diophantine and analytic problems in number theory" в Москве в 2007 г., "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории" в Туле в 2019 г., "Transcendence and diophantine problems" в Москве в 2019 г.

§4. Основные результаты диссертации

Первая глава диссертации содержит теоремы об алгебраической независимости произвольных E-функций. Теорема 1 обобщает теорему II А.Б. Шидловского на случай, когда значения E-функций берутся в особых точках системы, а теорема 2 представляет собой эффективный аналог теоремы II. Формулировки теорем имеют двойной характер — для однородного и общего случаев.

Теорема 1 [64:8,9]. *Пусть E-функции (4), $m \geqslant 2$ ($m \geqslant 1$), составляют решение системы (5) (системы (6)), степень однородной* *трансцендентности (степень трансцендентности) функций (4) над* $\mathbb{C}(z)$ *равна* l, $\quad 0 \leqslant l \leqslant m$, *а* $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. *Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел*

$$f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_m'(\alpha), \ldots, f_1^{(k)}(\alpha), \ldots, f_m^{(k)}(\alpha), \ldots \qquad (13)$$

также равна l.

Замечание. Зная коэффициенты системы (5) (системы (6)), можно указать такое $k_0 \in \mathbb{Z}^+$, что утверждение теоремы 1 останется справедливым, если порядок производных во множестве (13) ограничить числом k_0.

Как показали дальнейшие исследования, областью приложений теоремы 1 является не нахождение новых примеров трансцендентных чисел, а получение различных теоретико-функциональных утверждений о E-функциях и о дифференциальных уравнениях, которым они удовлетворяют (см. об этом гл. 2 и 3).

Доказательство теоремы 1 близко к классическому варианту метода Зигеля-Шидловского, не опирается на результаты и методы статей [42:2] и [38:1], получено раньше теоремы IV Ф. Бейкерса и, кроме того, справедливо для E-функций в более широком смысле, чем в теореме IV. В главе 1 также доказывается, что для E-функций в смысле определения 3 теорема 1 следует из теоремы IV.

Вопрос об эффективизации теоремы II сводится к эффективному описанию конечного множества исключительных значений Λ из алгебраических чисел, определённого после формулировки теоремы II.

В 1998 г. автором была опубликована статья [64:7], где в общем случае эффективно оценивалось число элементов множества Λ и их алгебраические характеристики.

Выберем из множества (4) какие-либо l однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций

$$f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_l}(z). \qquad (14)$$

Тогда любая функция $f(z) \not\equiv 0$ из (4), не вошедшая в набор (14), связана с функциями рассматриваемого набора уравнением

$$P = P(z, f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_l}(z), f(z)) = 0, \qquad (15)$$

где P — неприводимый многочлен от $l+2$ переменных, однородный по $f_{i_1}(z),\dots,f_{i_l}(z),f(z)$, содержащий $f(z)$ и хотя бы одну из функций (14). Без ограничения общности можно считать, что коэффициенты многочлена P принадлежат $\mathbb{Z}$. Обозначим

$$s=\max\deg_{\bar f}P,\quad t=\max\deg_z P,\quad h=\max H(P),$$

где максимум берётся по всем многочленам P, соответствующим всевозможным наборам однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций (14) и всевозможным функциям $f(z)\not\equiv 0$ из (4).

Теорема 2 [64:7]. *Множество исключительных значений* Λ *состоит из не более чем* $2^m st$ *(в неоднородном случае —* $2^{m+1}st$*) чисел, причём их степень не превосходит* $2st$*, а размер и знаменатель не превосходят* $(h(t+1)2^{s+l-2})^{2s}$ *(соответственно* $(h(t+1)2^{s+l-1})^{2s}$*).*

Вопрос о точном нахождении множества Λ является достаточно трудным. В последнее время появилась работа (S. Fischler, T. Rivoal. *Effective algebraic independence of values of E-functions*, 20 pages, arxiv: math. NT/ 1906.05589 v1 13 Jun 2019), где предложен вычислительный алгоритм для нахождения Λ.

В главе 2 рассматриваются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют E-функции.

Пусть E-функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$Q_m y^{(m)}+Q_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+Q_0 y=Q,\qquad Q_m,\dots,Q_0,Q\in\mathbb{C}[z],\quad m\geqslant 1, \tag{16}$$

с коэффициентами, взаимно простыми в совокупности. Из теоремы 1 можно выводить различные утверждения о свойствах уравнения (16).

Напомним, что особая точка ξ однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (16), называется регулярной особой точкой, если порядок полюса функции Q_k/Q_m в точке ξ не превосходит $m-k$, $k=0,\dots,m-1$.

Показателями однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (16), в точке $z=\xi$ называются корни т. н. определяющего уравнения $F(r)=0$. В случае регулярной особой точки, умножая дифференциальное уравнение (16) на нужную степень $(z-\xi)$, можно представить его коэффициенты в виде $Q_k^*=(z-\xi)^k h_k$, $h_k\in\mathbb{A}[z-\xi]$, $k=0,1,\dots,m$, $h_m(\xi)\neq 0$, а определяющее уравнение

— в виде

$$F(r) = r(r-1)\dots(r-m+1)h_m(\xi) + \dots + rh_1(\xi) + h_0(\xi) = 0 \quad (17)$$

(см., например, [16:1, п. 18.1]). Таким образом, регулярной особой точке соответствует ровно m показателей (возможно, совпадающих). Если функция

$$y = (z-\xi)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-\xi)^\nu, \qquad a_0 \neq 0,\ r \in \mathbb{C},$$

есть решение линейного однородного дифференциального уравнения, то r — корень его определяющего уравнения в точке ξ (см. там же).

Теорема 3 (см. [64:10], [64:11, леммы 4, 5, 7]). *Пусть E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения (16), где m — наименьшее из возможных. Тогда всякая особая точка $\xi \neq 0$ уравнения (16) есть особая точка функции Q_{m-1}/Q_m и регулярная особая точка с показателями, являющимися попарно различными целыми неотрицательными числами, соответствующего (16) однородного уравнения, а также, при $Q \not\equiv 0$, линейного однородного уравнения порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$.*

Если точка $z = \xi$ является регулярной особой точкой дифференциального уравнения, то отсюда, вообще говоря, не следует, что его решения в этой точке также имеют особенности. Как оказывается, в нашем случае реализуется именно эта возможность, т. е. всякая особая точка $\xi \neq 0$ является т. н. кажущейся особенностью.

Теорема 4 (см. [64:10], [64:11, лемма 6]). *Пусть E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения (16), где m — наименьшее из возможных. Тогда всякое решение уравнения (16), а также соответствующего ему однородного дифференциального уравнения и, при $Q \not\equiv 0$, линейного однородного уравнения порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$, голоморфно в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Следствие 1. *Пусть E-функции (4), $m \geqslant 2$, составляют решение системы (5) и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда всякое решение системы (5) состоит из функций, голоморфных в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Следствие 2. *Пусть E-функции (4), $m \geqslant 2$, составляют решение системы (5) и однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Тогда существуют E-функции $g_1(z), \ldots, g_m(z)$, составляющие решение системы вида (5) без ненулевых особых точек, и невырожденная матрица $S \in M(m, \mathbb{A}[z])$, такие, что $(f_1(z), \ldots, f_m(z))^T = S \cdot (g_1(z), \ldots, g_m(z))^T$.

Однородные случаи теорем 3 и 4, когда $Q \equiv 0$, следуют также из результатов И. Андрэ [38:1] (кроме утверждения, что всякая ненулевая особая точка уравнения (5) есть полюс функции Q_{m-1}/Q_m), полученных более сложными методами. Необходимо отметить, что в статье Ф. Бейкерса [42:2], где, в частности, доказывается линейная независимость значений E-функций, из результатов И. Андрэ используется только однородный случай теоремы 4 ([42:2, теорема 2.1]), причём она характеризуется как "beautiful theorem".

Утверждение следствия 2 по сравнению с теоремой IV Ф. Бейкерса доказывается при дополнительном условии однородной алгебраической независимости, но для E-функций в смысле определения 1 и без использования результатов статей [38:1], [42:2].

Теорема 5 (см. [64:13, леммы 6, 7]). *Пусть E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения (16), где m — наименьшее из возможных. Тогда справедливо равенство*

$$\deg Q_m = \max_{0 \leqslant i < m} \deg Q_i.$$

Если $Q \not\equiv 0$, то аналогичное равенство справедливо для линейного однородного уравнения порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$.

Заметим, что без условия минимальности числа m утверждение теоремы 5 становится неверным. Например, E-функция $\varphi_\lambda(z)$ удовлетворяет уравнению $zy'' + (z^2 - z + \lambda + 1)y' + (-z^2 + \lambda z - 1)y = \lambda z$.

При доказательстве теоремы 5 используются некоторые утверждения о G-функциях из статьи И. Андрэ [38:1].

В формулировках теорем главы 3 участвуют гипергеометрические функции $\varphi_\lambda(z)$ и функции Куммера (они же конфлюентные, или вырожденные гипергеометрические функции)

$$A_{\mu,\nu}(z) = {}_1\varphi_2(\nu; 1, \mu; z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}\nu \\ \mu\end{matrix}\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!(\mu)_n} z^n, \quad \mu \notin \mathbb{Z}^-,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y'' + \left(-1 + \frac{\mu}{z}\right) y' - \frac{\nu}{z}\, y = 0. \tag{18}$$

Теорема 6 [64:8,9]. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = P\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1,$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Теорема 7 [64:10,11]. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = (P\,A_{\mu,\nu}(\alpha z) + P_1\,A'_{\mu,\nu}(\alpha z))e^{\alpha_1 z}, \tag{19}$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

Замечания. 1. Если E-функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка, то каждая из них также имеет вид (19).

2. Так как $A'_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\nu/\mu)A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)$, то для рассматриваемого в теореме случая гипотеза Зигеля справедлива.

3. Поскольку $A_{\lambda+1,1}(\alpha z) = \varphi_\lambda(\alpha z)$, а $\varphi'_\lambda(\alpha z) = (1-\lambda/(\alpha z))\varphi_\lambda(\alpha z)+\lambda/(\alpha z)$, то при $\mu = \lambda+1,\ \nu = 1,\ P = P_2+(1-\alpha z/\lambda)P_3,\ P_1 = (\alpha z/\lambda)P_3$, где $P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z]$, равенство (19) принимает вид

$$f(z) = (P_2\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_3)e^{\alpha_1 z}, \tag{20}$$

где $P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. В этом виде могут быть представлены функции $P(z) \in \mathbb{A}[z]$, $\varphi_\lambda(z)$, e^z, $\sin z = (e^{iz}-e^{-iz})/2i$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, всякая "неполная" гамма-функция $F_p(z) = \int_0^z t^{p-1}e^{-t}\,dt = z^p e^{-z}\varphi_p(z)/p$, являющаяся целой, т. е. при $p \in \mathbb{N}$ (см. [36:12, стр. 195, 197]). В виде (19) представляются также функции Куммера $A_{\mu,\nu}(z)$, функции Зигеля $K_\lambda(z)$ и все целые функции Бесселя $J_p(z)$ (при $p \in \mathbb{Z}^+$), так как

$$K_\lambda(z) = e^{\mp iz} A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(\pm 2iz), \tag{21}$$

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda K_\lambda(z),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция (см. [19:1, п. 7.1], [36:12, стр. 212]). Кроме того, в виде (19) могут быть представлены все целые функции Уиттекера (см. [19:1, стр. 272]).

Теорема 8 [64:11]. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически зависимой (однородно алгебраически зависимой) с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, когда $f(z) = (P\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1)e^{\sigma\alpha z}$ (соответственно $f(z) = P\,e^{\alpha z}$), где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda, \sigma \in \mathbb{Q}$, причём если $\sigma \neq 0$, то $\lambda \in \mathbb{Z}^+$.*

Замечания. 1. При $\sigma \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ функция $f(z)$ есть линейная комбинация показательных функций с коэффициентами из $\mathbb{A}[z^{\pm 1}]$. Например, E-функция $(\sin z)/z$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y''+(2/z)y'+y=0$, представляется в виде $(e^{iz}-e^{-iz})/2iz = e^{iz}\varphi_1(-2iz) = K_{1/2}(z)$.

2. Утверждение теоремы 8 справедливо также для алгебраически зависимых над $\mathbb{C}(z)$ E-функций $f_1(z), f_2(z)$, составляющих решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Теорема 8 дополняет результаты статей [36:13,14].

Для доказательства теорем 7 и 8 используются теоремы 1, 3 и 4, а также результат И. Андрэ о том, что в точке $z = 0$ особенность уравнения (16), где $Q \equiv 0$, может быть только регулярной.

Теорема 9 [64:13]. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = P_0\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1\varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P, \tag{22}$$

либо

$$f(z) = P_0 f_1(z) + P_1 f_1'(z) + P, \tag{23}$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $f_1(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right)y' + \left(b + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}\right)y = c + \frac{c_1}{z}, \tag{24}$$

$a, a_1, b, b_1, b_2, c, c_1 \in \mathbb{A}$.

Теорема 10 [64:13]. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически зависимой с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, когда*

$$f(z) = P_0\varphi_k(\alpha z) + P_1\varphi_k(\sigma\alpha z) + P, \tag{25}$$

либо

$$f(z) = P_0\varphi_\lambda^2(\alpha z) + P_1\varphi_\lambda(\alpha z) + P, \tag{26}$$

где $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z],\ k \in \mathbb{Z}^+,\ \lambda, \sigma \in \mathbb{Q},\ \alpha \in \mathbb{A}$.

Следствие. *Если алгебраически зависимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то обе они имеют вид (25) либо (26).*

Теорема 11 [64:13]. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению*

$$Q_2y'' + Q_1y' + Q_0y = Q, \qquad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z] \tag{27}$$

и линейно независима с $f'(z)$ и 1 над $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{A}$ при любом $\alpha \in \mathbb{A},\ \alpha Q_2(\alpha) \neq 0$.

Теорема 11 обобщается (см. [64:12]) на случай двух линейно независимых с числом 1 E-функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, что является частным случаем утверждения, высказанного А.Б. Шидловским (см. [36:15, гипотеза A]) для произвольного количества функций и доказанного Ф. Бейкерсом [42:2] (в случае E-функций в смысле определения 3). Из теоремы 11 следует

Теорема 12 [64:13]. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (27) и не удовлетворяет никакому линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то числа $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$ трансцендентны при любом $\alpha \in \mathbb{A},\ \alpha Q_2(\alpha) \neq 0$.*

Ранее теорема 12 в виде гипотезы также высказывалась А.Б. Шидловским [36:12, гл. 6, §1]. Заметим, что условие $Q_2(\alpha) \neq 0$ в теореме 12 не является необходимым. Например, E-функция $f(z) = e^{2z} + ze^z + 1$ удовлетворяет уравнениям $y' = 2y - (z-1)e^z - 2$ и $(z-1)y'' - (3z-2)y' + 2zy = 2z$. Числа $f(1)$ и $f'(1)$ трансцендентны, хотя $Q_2(1) = 0$.

Теоремы 6, 7 и 9 доказывают гипотезу Зигеля в случае линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка, а случай неоднородных уравнений 2-го порядка сводят к уравнениям вида (24). Автор считает гипотезу Зигеля в общем случае (в том числе для уравнений (24)) неверной, что обосновывается следующими соображениями. Рассмотрим E-функцию

$$V(z) = e^{\alpha z} \int_0^z e^{-\alpha t} \varphi_\lambda(t) dt = z + \left(\frac{1}{\lambda + 1} + \alpha \right) \frac{z^2}{2} + \dots ,$$

удовлетворяющую уравнению

$$y'' + (-\alpha - 1 + \lambda/z)y' + (\alpha - \lambda\alpha/z)y = \lambda/z.$$

По всей вероятности, функция $V(z)$ (как и бесконечное множество аналогичных интегралов) не выражается в виде многочлена от гипергеометрических функций. Строгое обоснование данного утверждения требует описания всех алгебраических связей в множестве всех гипергеометрических функций. Последняя задача представляет самостоятельный интерес и является очень трудной. Её частными случаями занимались многие математики, начиная с Эйлера и Гаусса. Результаты глав 4 и 5 можно рассматривать как существенное продвижение в решении этой задачи, хотя на полное решение в ближайшем будущем вряд ли можно рассчитывать.

Как уже говорилось, при получении оценок мер алгебраической независимости E-функции рассматривают в более узком смысле — когда величины $\overline{|c_n|}$ и d_n не превосходят c^n (см. определение 3). Нетрудно доказать, что неравенство $\overline{|c_n|} \leqslant c^n$ справедливо для любой E-функции, удовлетворяющей уравнению (16). В связи с тем, что гипотеза Зигеля не доказана (и, возможно, не верна), возникает необходимость рассмотреть более слабый её вариант, из которого по-прежнему следовала бы эквивалентность определений 1 и 3. А именно, к допустимым операциям над рассматриваемыми E-функциями можно добавить умножение n-го члена разложения E-функции на $(a)_n/(b)_n$, где $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-$. Эта операция, очевидно, не выводит за пределы множества E-функций. Она позволяет включить в число допустимых преобразований интегрирование, дифференцирование и замену E-функции (2) на

$$z^{-\lambda} \int z^{\lambda-1} f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!(n+\lambda)} z^n, \qquad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-$$

(см. [36:12, гл. 5, §2]). Следует отметить, что в статье [61:1] К. Зигель включал интегрирование и дифференцирование в число допустимых операций для своей гипотезы.

Теорема 13 [64:14]. *Всякая E-функция, удовлетворяющая уравнению (27), может быть получена из функций Куммера с рациональными параметрами и алгебраических констант при помощи операций сложения, умножения, замены аргумента z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, а также умножения n-го члена степенного разложения по степеням z получающихся функций на $(a)_n/(b)_n$, где $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-$.*

Следствие. *Для любой E-функции (2), удовлетворяющей уравнению (27), справедливы оценки $\overline{|c_n|} \leqslant c^n$, $d_n \leqslant c^n$, где d_n — общий знаменатель коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$, $c > 0$ — некоторая постоянная.*

Глава 4 содержит общие теоремы об алгебраической независимости решений гипергеометрических уравнений произвольных порядков, а также об алгебраических тождествах между этими решениями. Условия большинства теорем об алгебраической независимости являются необходимыми и достаточными.

Ранее уже были рассмотрены функции

$$ {}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_lF_{q-1}\left(\begin{matrix} \nu_1, \ldots, \nu_l \\ \lambda_2, \ldots, \lambda_q \end{matrix} \middle| \, z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \ldots (\nu_l)_n}{n!(\lambda_2)_n \ldots (\lambda_q)_n} z^n, $$

где $0 \leqslant l \leqslant q$, $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathbb{C}$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Будем считать, что в вектор $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, относящийся к функции ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, входит компонента, равная 1, которая автоматически переставляется на первое место. Функция ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет однородному гипергеометрическому уравнению

$$ L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)\, y = 0, \tag{28} $$

где $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ — дифференциальный оператор, определённый на стр. 10.

При $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \ldots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \ldots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. Запись $(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) \sim \gamma(\vec{\mu}; \vec{\eta}) + \beta$ означает, что $\vec{\nu} \sim \gamma\vec{\mu} + \beta$, $\vec{\lambda} \sim \gamma\vec{\eta} + \beta$.

Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z},\ i \neq k$, то (см., например, [22:1, п. 5.7.1]) функции

$$z^{1-\lambda_k}{}_lF_{q-1}(\vec{\nu}+1-\lambda_k;\vec{\lambda}+1-\lambda_k;z),\quad k=1,\ldots,q \tag{29}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (28). Это верно также при $\lambda_1 \neq 1$ (см. следствие 2 леммы 4.1).

Явный вид уравнения $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\ y = 0$, получаемого из (28) или (3) подстановкой $z \to \alpha z^p$, где $\alpha \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{N}$, приведён в лемме 4.1 и формуле (4.1). Фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\ y = 0$ при $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z},\ i \neq k$ образуют, например, функции

$$z^{(1-\lambda_k)p}{}_lF_{q-1}(\vec{\nu}+1-\lambda_k;\vec{\lambda}+1-\lambda_k;\alpha z^p),\quad k=1,\ldots,q \tag{30}$$

(см. следствие 4 леммы 4.1).

Определение 4. *Уравнение (16) называется приводимым (линейно приводимым) (линейно однородно приводимым), если оно имеет решение $y \not\equiv 0$ такое, что $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ алгебраически зависимы (линейно зависимы с 1) (линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$, и неприводимым (линейно неприводимым) (линейно однородно неприводимым) в противном случае.*

Аналогично определяются эти понятия для системы дифференциальных уравнений.

Необходимые и достаточные условия неприводимости уравнений $L(\vec{\nu};\ \vec{\lambda};z^{q-l})\ y = 0$, кроме случая $q-l = 6,\ l \leqslant 3$, получены В.Х. Салиховым [28:4]. Критерий линейной однородной неприводимости найден в результате исследований В.Х. Салихова [28:3] и В.В. Казакова [15:1] (см. также [36:12, гл. 10]).

В статье [43:1] Ф. Бейкерса, В. Браунвелла и Г. Хекмана, а фактически ещё ранее в статье [52:2] Е. Колчина были введены важные для установления алгебраической зависимости и независимости функций понятия кoградиентности и контргградиентности систем дифференциальных уравнений.

Определение 5. *Если Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы двух систем вида (5) и выполняется одно из равенств*

$$\Phi_1 = gB\Phi_2C,\qquad \Phi_1(\Phi_2C)^T = gB, \tag{31}$$

где $C \in GL(m,\mathbb{C}),\ \ B \in GL(m,\mathbb{C}(z)),\ \ g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$, то исходные системы называются когградиентными (соответственно контргградиентными).

Аналогично определяются эти понятия для линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Простейшие алгебраические тождества, связывающие гипергеометрические функции, обнаружили ещё Эйлер и Гаусс. В частности, Гаусс (см., например, [22:1, п. 6.2.2]) для своей гипергеометрической функции ${}_2F_1(\nu, \mu; \lambda; z)$ нашёл линейные уравнения, связывающие эту функцию с т. н. смежными функциями. Если φ — гипергеометрическая функция, то функции $\varphi(\nu_k\pm) = \varphi(\nu_1, \ldots, \nu_k \pm 1, \ldots, \nu_l; \lambda_1, \ldots, \lambda_q; z)$ и аналогично определяемые $\varphi(\lambda_k\pm)$ называются смежными с φ. Функции, у которых значения параметров могут отличаться от исходных на произвольные целые числа, называются ассоциированными с φ. Можно заметить, что смежные функции и их производные выражаются в виде линейных комбинаций (в общем случае неоднородных) с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ от функций $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(q-1)}$ (частные случаи см., например, в [3:1, §§2.5, 3.7], [22:1, пп. 5.2.2, 7.3.2], [36:12, гл. 10, формула (47)], [8:1, формула (12)]). Коэффициент при $\varphi(\nu_k\pm)$ (или $\varphi(\lambda_k\pm)$) для некоторых допустимых значений параметров функций может тождественно по z равняться нулю. В таких случаях соответствующие дифференциальные уравнения линейно приводимы. Необходимым и достаточным для линейной однородной приводимости при $\nu_i \notin \mathbb{Z}^-$ является найденное В.Х. Салиховым [28:3, теорема 8] условие $\nu_i - \lambda_j \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant j \leqslant q$ или существование делителя $d > 1$ чисел l и q такого, что $(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) + 1/d \sim (\vec{\nu}; \vec{\lambda})$.

Соотношения смежности можно записать в виде $\vec{\varphi}_1 = \Omega\vec{\varphi} + \vec{c}$, где $\vec{f} = (f, f', \ldots, f^{(q-1)})^T,\ \ \Omega \in M(q, \mathbb{C}(z)),\ \ \vec{c} \in (\mathbb{C}(z))^q,\ \ \varphi = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, φ_1 — функция $\varphi(\nu_k\pm)$ или $\varphi(\lambda_k\pm)$. Если

$$\vec{\varphi}(\nu\pm) = \Omega_{\nu\pm}\vec{\varphi} + \vec{c}_{\nu\pm}, \qquad \vec{\varphi}(\lambda\pm) = \Omega_{\lambda\pm}\vec{\varphi} + \vec{c}_{\lambda\pm},$$

то легко видеть, что $\Omega_{\nu-} = \Omega_{\nu+}^{-1}(\nu-)$, $\vec{c}_{\nu-} = -\Omega_{\nu-}\vec{c}_{\nu+}(\nu-)$, $\Omega_{\lambda+} = \Omega_{\lambda-}^{-1}(\lambda+)$, $\vec{c}_{\lambda+} = -\Omega_{\lambda+}\vec{c}_{\lambda-}(\lambda+)$. Здесь ν (а также λ) — параметр, произвольно выбранный из $\{\nu_1, \ldots, \nu_l\}$ (соответственно $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$). Символ $\Omega_{\nu+}(\nu-)$ означает матрицу, полученную из $\Omega_{\nu+}$ подстановкой $\nu \to \nu - 1$ во всех её элементах, где ν — выбранный параметр. Символы $\Omega_{\lambda-}(\lambda+)$, $\vec{c}_{\nu+}(\nu-)$, $\vec{c}_{\lambda-}(\lambda+)$ определяются аналогично.

В следующей теореме решается вопрос о коградиентности уравнений, параметры которых различаются на целые числа, а её доказательство содержит алгоритм для нахождения соотношений смежности.

Теорема 14 [64:23; 21, лемма 12]. *Пусть* $\vec{\nu}_i \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $q \geqslant \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_i = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha z^p)$, *уравнение* $L(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha z^p) y = 0$ *линейно однородно неприводимо,* Φ_i — *произвольная фундаментальная матрица этого уравнения,* $i = 1, 2$, $(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1) \sim (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2)$. *Тогда существуют матрицы* $\Omega \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])$, $C \in GL(q, \mathbb{C})$ *и вектор* $\vec{c} \in (\mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])^q$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, *такие, что*

$$\vec{\varphi}_1 = \Omega \vec{\varphi}_2 + \vec{c}, \qquad \Phi_1 = \Omega \Phi_2 C. \tag{32}$$

Примеры. 1. Используя введённые обозначения, для функций Куммера $A_{\lambda,\nu}(z)$ имеем

$$\Omega_{\nu+} = \frac{1}{\nu} \begin{pmatrix} \nu & z \\ \nu & \nu - \lambda + 1 + z \end{pmatrix}, \quad \Omega_{\lambda-} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & z \\ \nu & z \end{pmatrix}.$$

Если второе из равенств (32) имеет вид $\Phi(\nu\pm) = \Omega_{\nu\pm} \Phi C_{\nu\pm}$ или $\Phi(\lambda\pm) = \Omega_{\lambda\pm} \Phi C_{\lambda\pm}$, а матрицы Φ отвечают функциям (29), то

$$C_{\nu+} = \operatorname{diag}(1, \nu/(\nu - \lambda + 1)), \quad C_{\lambda-} = \operatorname{diag}(1, (\lambda - 1)(2 - \lambda)/(\nu - \lambda + 1)).$$

2. Для гипергеометрической функции Гаусса

$${}_2\varphi_2(\nu, \mu; 1, \lambda; z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu, \mu \\ \lambda\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n (\mu)_n}{n! (\lambda)_n} z^n$$

аналогично получаем

$$\Omega_{\nu+} = \frac{1}{\nu(1 - z)} \begin{pmatrix} \nu(1 - z) & z(1 - z) \\ \nu\mu & \nu - \lambda + 1 + \mu z \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{\lambda-} = \frac{1}{(\lambda - 1)(1 - z)} \begin{pmatrix} (\lambda - 1)(1 - z) & z(1 - z) \\ \nu\mu & (\nu + \mu - \lambda + 1) z \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu+} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{\nu}{\nu - \lambda + 1}\right), \quad C_{\lambda-} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{(\lambda - 1)(2 - \lambda)}{(\nu - \lambda + 1)(\mu - \lambda + 1)}\right).$$

3. Для функции

$$K_{\lambda,\mu}(z) = {}_0\varphi_2(\lambda + 1, \mu + 1; -z^2/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda + 1)_n (\mu + 1)_n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

введённой А.Б. Шидловским (см. [36:12, гл. 6, §5]), имеем

$$\Omega_{\lambda-} = \frac{1}{2\lambda z}\begin{pmatrix} 2\lambda z & z^2 \\ -z^2-4\lambda\mu & -2\mu z \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_{\lambda-} = \frac{2\mu}{z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а если матрицы Φ отвечают функциям (30), то

$$C_{\lambda-} = \mathrm{diag}(-4\lambda(\mu-\lambda+1), \lambda/(\lambda-\mu)).$$

Теорема 15 [64:16,18,25]. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geqslant \max(2,l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 *— произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ *и* $L(1-\vec{\nu}; 2-\vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p)$. *Тогда:*

1°. *Существует матрица* $C \in GL(q, \mathbb{C})$ *такая, что*

$$\Phi_1(\Phi_2 C)^T = B, \tag{33}$$

где $B = \|b_{i,j}\|_{i,j} \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1-\alpha z^p)^\varepsilon])$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, *причём*

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^k c_0 z^{1-q}(1-\alpha z^p)^\varepsilon, \quad c_0 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \ldots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули.

2°. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i,k = 1, \ldots, q$, *а* Φ_1, Φ_2 *отвечают, соответственно, множествам функций (30) и*

$$f_k = z^{(\lambda_k-1)p}\,{}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}\alpha z^p), \ k = 1, \ldots, q, \tag{34}$$

то в равенстве (33) $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_q)$,

$$c_k = (-1)^k \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant q;\ i,j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j); \qquad c_0 = p^{q-1} \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant q} (\lambda_i - \lambda_j),$$

пустое произведение скобок равно 1.

Следствие 1. *Пусть* $q \geqslant \max(2,l)$, $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i,k = 1, \ldots, q$, *числа* c_k *определены в теореме 15. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\, {}_lF_{q-1}(\vec{\nu}+1-\lambda_k; \vec{\lambda}+1-\lambda_k; z)\, {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k+1-\vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z) = 0. \tag{35}$$

Следствие 2. *Справедливы тождества*

$${}_1F_1(\nu;\lambda;z)\,{}_1F_1(1-\nu;2-\lambda;-z) - {}_1F_1(\nu-\lambda+1;2-\lambda;z)\,{}_1F_1(\lambda-\nu;\lambda;-z) = 0;$$

$$
\begin{gathered}
{}_2F_1(\nu,\mu;\lambda;z)\,{}_2F_1(1-\nu,1-\mu;2-\lambda;z)- \\
-{}_2F_1(\nu-\lambda+1,\mu-\lambda+1;2-\lambda;z)\,{}_2F_1(\lambda-\nu,\lambda-\mu;\lambda;z)=0; \\
(\lambda-\mu)\,{}_0F_2(\lambda,\mu;z)\,{}_0F_2(2-\lambda,2-\mu;-z)+ \\
+(\mu-1)\,{}_0F_2(\mu-\lambda+1,2-\lambda;z)\,{}_0F_2(\lambda-\mu+1,\lambda;-z)+ \\
+(1-\lambda)\,{}_0F_2(\lambda-\mu+1,2-\mu;z)\,{}_0F_2(\mu-\lambda+1,\mu;-z)=0.
\end{gathered}
$$

Заметим, что первые два тождества в следствии 2 можно вывести, соответственно, из тождеств Куммера и Эйлера (см. [4:1, §6.3, формула (7), §2.1, формула (22)]). Частный случай тождества (35) при $q = l = 3$ доказал Дарлинг (см. [4:1, §4.3, формула (10)]). Гаусс получил тождество

$$
\begin{gathered}
{}_2F_1(\nu,\mu;\lambda;z)\,{}_2F_1(-\nu,-\mu;-\lambda;z)- \\
-\frac{\nu\mu(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)z^2}{\lambda^2(\lambda^2-1)}\,{}_2F_1(\nu+1,\mu+1;\lambda+2;z)\,{}_2F_1(1-\nu,1-\mu;2-\lambda;z)=1
\end{gathered}
$$

(см. [26:4, формула (6)]). Обобщение этого результата на произвольные функции ${}_lF_q(z)$ получено Ю.В. Нестеренко [26:4, §4]. Тождества второй степени между гипергеометрическими функциями и их производными изучались также В.Х. Салиховым (библиографию см. в [8:1]).

Следствия из теоремы 15 и её первоначальный вариант при $\alpha = p = 1$ были опубликованы автором в 2008 – 2010 гг. В 2015 г. Ф. Бейкерс и Ф. Жуэ [44:1], а в 2016 г. Р. Фенг, А. Кузнецов и Ф. Янг [48:1] опубликовали результаты, часть из которых вытекает из формул (33) и (35).

Теорема 15 даёт нетривиальные примеры контрградиентности дифференциальных уравнений. Из статей [43:1], [52:2], где введено это понятие, не было ясно, существует ли контрградиентность вообще и насколько она характерна для случая гипергеометрических уравнений.

Ф. Бейкерс, В. Браунвелл и Г. Хекман [43:1] при естественных ограничениях, не являющихся, тем не менее, необходимыми условиями, установили алгебраическую независимость решений совокупности уравнений вида (28). М.А. Черепнёв [34:2] распространил результаты статьи [43:1] на случай неоднородных уравнений. Следует отметить,

что в статьях [43:1], [34:2] и в статье автора [64:21] выпал из рассмотрения случай алгебраической зависимости между элементами фундаментальных матриц уравнений (1) и (18), а также некоторых их обобщений. Именно, если $2\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, а Φ_1, Φ_2, Φ_3 — фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций
$\{K_\lambda(\alpha z^p), z^{-2p\lambda} K_{-\lambda}(\alpha z^p)\}$, $\{A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2i\alpha z^p), z^{-2p\lambda} A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2i\alpha z^p)\}$,
$\{A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(-2i\alpha z^p), -z^{2p\lambda} A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(-2i\alpha z^p)\}$
соответственно, то имеют место тождества (см. [64:24, теорема 1])

$$\Phi_1 = e^{-i\alpha z^p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ip\alpha z^{p-1} & 1 \end{pmatrix} \Phi_2, \tag{36}$$

$$\Phi_1 \Phi_3^T = 2p\lambda z^{-1} e^{-i\alpha z^p} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -ip\alpha z^{p-1} + 2p\lambda z^{-1} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

доказательство которых будет дано в главе 4. Тождества (36), (37) можно обобщить (см. [64:25, теорема 2]) на произвольные фундаментальные матрицы уравнений $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})\ y = 0$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $p_k \in \mathbb{N}$, $\vec{\nu}_k = (\nu_{k,1}, \ldots, \nu_{k,l_k}) \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k = (\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,q_k}) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $k = 1, 2$, с условием

$$\begin{gathered} q_1 = q_2 = 2,\ l_1 = 1,\ l_2 = 0,\ p_2 = 2p_1,\ \alpha_1^2 = 16\alpha_2, \\ \vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,j} \sim \pm 2(\vec{\lambda}_2 - \lambda_{2,1}),\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 2\nu_{1,1} - \lambda_{1,1} - \lambda_{1,2} \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{38}$$

Из тождества (37), заменяя α на $-\alpha$, ввиду чётности функции $K_\lambda(z)$ получаем, что если Φ_3 — фундаментальная матрица, отвечающая функциям $\{A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2i\alpha z^p), -z^{2p\lambda} A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2i\alpha z^p)\}$, то

$$\Phi_1 \Phi_3^T = 2p\lambda z^{-1} e^{i\alpha z^p} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & ip\alpha z^{p-1} + 2p\lambda z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что тождество (36) остаётся справедливым для фундаментальных матриц Φ_1 и Φ_2, отвечающих наборам функций $\{K_\lambda(\alpha z^p)$, $K_{-\lambda}(\alpha z^p)\}$ и $\{A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2i\alpha z^p)$, $A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2i\alpha z^p)\}$.

Основное утверждение статьи [43:1] противоречит уже тождеству (21). Ошибка в [43:1], позже повторённая в [34:2] и [64:21], вызвана тем, что при доказательстве теоремы 4.5 из [43:1] не рассмотрена возможность коградиентности и контрградиентности гипергеометрических уравнений с одинаковыми q, но разными l.

Теорема 16 [64:20,21]. *Пусть* $\vec{\nu}_k = (\nu_{k,1}, \ldots, \nu_{k,l_k}) \in \mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k = (\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,q_k}) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $\lambda_{k,1} = 1$, $q_k > \max(1, l_k)$, $F_k(z) = {}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z)$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, *дифференциальные уравнения* $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z^{q_k-l_k})\, y = 0$ *неприводимы*, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, *а числа* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{A}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Пусть условие (38), из которого исключено* $p_1 = 2p_2$, *не выполнено ни для какой пары индексов* $1 \leqslant k < t \leqslant n$, *и если* $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (-1)^r((\vec{\nu}_t; \vec{\lambda}_t) - \lambda_{t,j})$, *где* $1 \leqslant j \leqslant q_t$, $r \in \{0, 1\}$, *то* $\alpha_k \neq (-1)^{(q_k-l_k)r}\alpha_t$. *Тогда* $q_1 + \cdots + q_n + m$ *чисел*

$$F_1(\alpha_1), F_1'(\alpha_1), \ldots, F_1^{(q_1-1)}(\alpha_1), \ldots, F_n(\alpha_n), \ldots, F_n^{(q_n-1)}(\alpha_n), e^{\gamma_1}, \ldots, e^{\gamma_m} \tag{39}$$

алгебраически независимы.

С учётом упомянутых результатов В.Х. Салихова теорема 16 усиливает аналогичную теорему статьи [43:1]. Заметим, что неприводимость системы дифференциальных уравнений равносильна тому, что её группа Галуа содержит $SL(q, \mathbb{C})$ или $Sp(q, \mathbb{C})$ (см. [43:1, стр. 280 и теорема 2.2]). Конкретный вид группы Галуа гипергеометрического уравнения найден Н. Кацем [51:1]. Как оказалось, в преобладающем большинстве случаев она содержит $SL(q, \mathbb{C})$. Исключение составляет относительно небольшое множество случаев, для которых, среди прочих условий, $q - l$ чётно, а $\vec{\nu} \sim \nu - \vec{\nu}$, $\vec{\lambda} \sim \lambda - \vec{\lambda}$ при некоторых $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$ (см. [42:1, стр. 59, 60]). Так как размерность группы $SL(q, \mathbb{C})$ равна $q^2 - 1$, то степень трансцендентности множества элементов любой фундаментальной матрицы соответствующего уравнения над $\mathbb{C}(z, W)$, где W — вронскиан, также равна $q^2 - 1$ (см. [17:1, лемма 6.2], или [52:1, §20]). Это, очевидно, обеспечивает неприводимость уравнения и делает естественными условия четырёх следующих теорем.

Дифференциальное поле, получаемое присоединением к полю $\mathbb{F}$ дифференциальных переменных $v_1, \ldots, v_n$, обозначим $\mathbb{F}\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Теорема 17 [64:20,21]. *Пусть* $\vec{\nu}_k \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k > \max(1, l_k)$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\|v_{k,s}^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q_k-1;\, s=1,\ldots,q_k}$ — *фундаментальная матрица оператора* $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})$, $p_k \in \mathbb{N}$, $W_k = |v_{k,s}^{(i)}|_{i,s}$,

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W_k)} \mathbb{C}\langle z, v_{k,1}, \ldots, v_{k,q_k} \rangle = q_k^2 - 1, \tag{40}$$

$k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$. *Пусть числа* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, *а также* $\beta_1, \ldots, \beta_p$, *принадлежат* $\mathbb{C}$ *и линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $\beta_1 \in \mathbb{Q}$. *Тогда для* *алгебраической независимости* $q_1^2 + \cdots + q_n^2 - n + m + p$ *функций*

$$\left\{ v_{k,s}^{(i)} \Big|_{k=1,\ldots,n;\, i=0,\ldots,q_k-1;\, s=1,\ldots,q_k;\, (i,s)\neq(q_k-1,q_k)} \right\}, e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_m z}, z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p}$$

над $\mathbb{C}$ *необходимо и достаточно, чтобы условие (38) не выполнялось ни для какой пары индексов* $1 \leqslant k < t \leqslant n$ *и если* $p_k = p_t$, $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) - \lambda_{k,1} \sim (-1)^r((\vec{\nu}_t;\, \vec{\lambda}_t) - \lambda_{t,j})$, *где* $1 \leqslant j \leqslant q_t$, $r \in \{0; 1\}$, *то* $\alpha_k \neq (-1)^{(q_k - l_k)r}\alpha_t$.

Замечание. Утверждение теоремы 17 останется справедливым, если функции $e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_m z}$ заменить на $e^{P_1}, \ldots, e^{P_m}$, где $P_1, \ldots, P_m$ — многочлены из $\mathbb{C}[z]$, линейно независимые над $\mathbb{Q}$.

Условие (40), рассмотренное в случае $q_k = 2$ К. Зигелем [61:1], а в общем случае — Е. Колчиным [52:2, стр. 1157, 1158], равносильно тому, что группа Галуа оператора $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ содержит $SL(q, \mathbb{C})$. Из сказанного перед теоремой 17 следует, что оно выполнено для "почти всех" гипергеометрических уравнений за исключением тех, наборы параметров которых могут быть представлены точками некоторых определённых алгебраических подмногообразий малых размерностей.

Согласно [43:1] (см. также леммы 4.13 и 4.14), условие (40) достаточно проверить для оператора $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z)$.

Теорема 18 [64:20,21]. *Пусть при условиях теоремы 17* $\vec{\nu}_k \in \mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in \mathbb{Q}^{q_k}$, $\lambda_{k,1} = 1$, $\alpha_k, \gamma_i \in \mathbb{A}$, $F_k(z) = {}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z)$. *Тогда для алгебраической независимости чисел (39) необходимо и достаточно выполнение четырёх следующих условий:*

1°. *Если* $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (\vec{\nu}_t; \vec{\lambda}_t)$, *где* $1 \leqslant k < t \leqslant n$, *то* $\alpha_k \neq \alpha_t$.

2°. *Если* $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim \lambda_{t,j} - (\vec{\nu}_t; \vec{\lambda}_t)$, *где* $1 \leqslant k < t \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant q_t$, *то* $\alpha_k \neq (-1)^{(q_k - l_k)}\alpha_t$.

3°. *Если для некоторого* $t \in \{1, \ldots, n\}$ *и всех* $j = 1, \ldots, q_t$ *имеем* $(\vec{\nu}_t; \vec{\lambda}_t) - \lambda_{t,j} \sim (\vec{\nu}_{k(j)}; \vec{\lambda}_{k(j)})$, *где* $k(j_1) \neq k(j_2)$ *при* $j_1 \neq j_2$, *то* $\alpha_t \neq \alpha_{k(j)}$ *хотя бы при одном* j.

4°. *Условие (38), из которого исключено* $p_1 = 2p_2$, *не выполнено ни для какой пары индексов* $1 \leqslant k < t \leqslant n$.

Для установления алгебраической независимости функций ${}_l\varphi_q(z)$ и ${}_lF_{q-1}(z)$ достаточно, с учётом теорем 16 – 18, доказывать алгебраическую независимость решений уравнений (3) над полем, порождённым решениями однородных гипергеометрических уравнений.

Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $q > l$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^{q-l})$, $\|v_s^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q}$ — фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^{q-l})$, $W = |v_s^{(i)}|_{i,s}$, $\mathbb{L} = \mathbb{C}\,\langle z, v_1, \ldots, v_q\rangle$,

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)}\mathbb{C}\,\langle z, v_1, \ldots, v_q\rangle = q^2 - 1. \tag{41}$$

Теорема 19 [64:22]. *Для алгебраической зависимости функций*

$$f(z), f'(z), \ldots, f^{(q-1)}(z)$$

над $\mathbb{L}$ необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vec{\lambda}$ содержал компоненту из $\mathbb{N}$.

Теорема 19 допускает обобщение на случай нескольких дифференциальных уравнений.

Пусть $\vec{\nu}_k \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k > l_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f_k(z) = {}_{l_k}\varphi_{q_k}(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{q_k - l_k})$, фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{q_k - l_k})$ удовлетворяет условию (40), $k = 1, \ldots, n$. Поле, порождённое над $\mathbb{C}(z)$ компонентами фундаментальных матриц всех операторов $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^{q-l})$, удовлетворяющих условию (41), обозначим $\mathbb{L}_1$.

Теорема 20 [64:20,22]. *Для алгебраической зависимости функций*

$$f_1(z), f_1'(z), \ldots, f_1^{(q_1-1)}(z), \ldots, f_n(z), f_n'(z), \ldots, f_n^{(q_n-1)}(z)$$

над $\mathbb{L}_1$ необходимо и достаточно, чтобы один из векторов $\vec{\lambda}_k$ содержал компоненту из $\mathbb{N}$ или же $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (\vec{\nu}_t; \vec{\lambda}_t)$, $\alpha_k = \alpha_t$ при каких-либо $1 \leqslant k < t \leqslant n$.

Заметим, что в поле $\mathbb{L}_1$ входят компоненты решений уравнений $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$, где $p \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию (41), даже если они (в случае $\lambda_1 = 1$) не получаются из неоднородных уравнений (3), примером чего является уравнение (1).

Аналоги теоремы 19 имеются в работах [34:1], [28:6]. Произвольные линейные неоднородные дифференциальные уравнения и системы рассматривались Ю.В. Нестеренко [26:1] и Д. Бертраном [40:1]. В теоремах указанных статей речь идёт об алгебраической независимости не над $\mathbb{L}$ или $\mathbb{L}_1$, а над полем, порождённым коэффициентами уравнений. Их условия не всегда необходимы — например, в статье [26:1] требуется алгебраическая независимость компонент решений всех однородных систем, соответствующих рассматриваемым. Поэтому теорема 20 позволяет в ряде случаев получать более сильные утверждения.

Теорема 21 [64:20,22]. *Пусть* $\alpha_k, \beta_i \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k \geqslant 3$ *и нечётно,* $\vec{\lambda}_k + 1/d \not\sim \vec{\lambda}_k$ *ни для какого делителя* $d > 1$ *числа* q_k, $\varphi_{\vec{\lambda}_k}(z) = {}_0\varphi_{q_k}(\vec{\lambda}_k; z)$, $\lambda_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\varphi_{\lambda_i}(z) = {}_0\varphi_1(\lambda_i; z)$, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, \varkappa$, *числа* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{A}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $n+m+\varkappa \geqslant 1$. *Тогда для алгебраической независимости* $q_1 + \cdots + q_n + \varkappa + m$ *чисел*

$$\varphi_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \varphi'_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \ldots, \varphi^{(q_1-1)}_{\vec{\lambda}_1}(\alpha_1), \ldots, \varphi_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n), \varphi'_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n), \ldots, \varphi^{(q_n-1)}_{\vec{\lambda}_n}(\alpha_n),$$
$$\varphi_{\lambda_1}(\beta_1), \ldots, \varphi_{\lambda_\varkappa}(\beta_\varkappa), e^{\gamma_1}, \ldots, e^{\gamma_m}$$

необходимо и достаточно выполнение четырёх следующих условий:

1°. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i < k \leqslant \varkappa$, *то* $\beta_i \neq \beta_k$.

2°. *Если* $\vec{\lambda}_k \sim \vec{\lambda}_t$, $1 \leqslant k < t \leqslant n$, *то* $\alpha_k \neq \alpha_t$.

3°. *Если для некоторых* $1 \leqslant k < t \leqslant n$, $i, u \in \{1, \ldots, q_k\}$ *имеем* $\lambda_{t,i} \in \mathbb{N}$, $\vec{\lambda}_k \sim \lambda_{t,u} - \vec{\lambda}_t$, *то* $\alpha_k \neq -\alpha_t$.

4°. *Если для некоторого* $t \in \{1, \ldots, n\}$ *и всех* $j = 1, \ldots, q_t$ *имеем* $\vec{\lambda}_t - \lambda_{t,j} \sim \vec{\lambda}_{k(j)}$, *где* $k(j_1) \neq k(j_2)$ *при* $j_1 \neq j_2$, *то* $\alpha_t \neq \alpha_{k(j)}$ *хотя бы при одном* j.

Следствие. *Пусть* q — *нечётное число,* $\vec{\lambda} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, *числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ *и попарно различны. Тогда для алгебраической независимости* nq *чисел*

$$\varphi_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \varphi'_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \ldots, \varphi^{(q-1)}_{\vec{\lambda}}(\alpha_1), \ldots, \varphi_{\vec{\lambda}}(\alpha_n), \varphi'_{\vec{\lambda}}(\alpha_n), \ldots, \varphi^{(q-1)}_{\vec{\lambda}}(\alpha_n)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\vec{\lambda} \not\sim (0, 1/q, \ldots, (q-1)/q)$ *и если* $\vec{\lambda} \sim \lambda_i - \vec{\lambda}$ *при некотором* $i \in \{1, \ldots, q\}$, *то* $\alpha_k \neq -\alpha_t$ *при всех* $1 \leqslant k < t \leqslant n$.

Условие 1°, необходимое и достаточное для алгебраической независимости чисел $\varphi_{\lambda_1}(\beta_1), \ldots, \varphi_{\lambda_\varkappa}(\beta_\varkappa)$, получено А.Б. Шидловским (см. теорему III). Условия 2° и 4° гарантируют отсутствие алгебраических связей в случае коградиентности рассматриваемых уравнений, а условие 3° — в случае контргградиентности (см. [43:1] или конец §2 главы 4).

Теорема 21 обобщает и усиливает результат В.Х. Салихова [28:5, теорема 2]. Условие теоремы $\vec{\lambda}_k + 1/d \not\sim \vec{\lambda}_k$, равносильное линейной неприводимости, не является большим ограничением, так как при его нарушении функция $\varphi_{\vec{\lambda}_k}(z)$ представляется в виде линейной комбинации решений неприводимых уравнений (см. [28:5, §5]), к которым теорема 21 уже применима. В случае $l > 0$ для функций ${}_l\varphi_q(z)$ с помощью теорем 16 – 20 аналогично получается усиление результатов М.А. Черепнёва [34:2].

В главе 5 выясняется структура алгебраических связей во множестве гипергеометрических E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше второго порядка. К этому множеству функций, помимо $K_\lambda(z)$, $A_{\mu,\nu}(z)$, $K_{\lambda,\mu}(z)$, $\varphi_\lambda(z)$ и e^z, относятся функции

$$A_{\theta,\eta,\zeta}(z) = {}_1\varphi_2(\zeta+1;\theta+1,\eta+1;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta+1)_n}{(\theta+1)_n(\eta+1)_n} z^n,$$

где $-\theta, -\eta, -\zeta \notin \mathbb{N}$.

Простейшими алгебраическими тождествами, связывающими эти функции, являются соотношения смежности, алгоритм для нахождения которых изложен при доказательстве теоремы 14. В примерах, приведённых после формулировки теоремы 14, выписаны соотношения смежности для функций $A_{\mu,\nu}(z)$ и $K_{\lambda,\mu}(z)$. Для функций $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ аналогично получаем

$$\Omega_{\zeta+} = \frac{1}{(\zeta+1)z} \begin{pmatrix} (\zeta+1)z & z^2 \\ (\zeta+1)z - \theta\eta & z^2 + (\zeta-\theta-\eta+1)z \end{pmatrix};$$

$$\Omega_{\theta-} = \frac{1}{\theta z} \begin{pmatrix} \theta z & z^2 \\ (\zeta+1)z - \theta\eta & z^2 - \eta z \end{pmatrix};$$

$$\vec{c}_{\zeta+} = \frac{\theta\eta}{(\zeta+1)z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_{\theta-} = \frac{\eta}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соотношения смежности для $K_\lambda(z)$ и $A_{\mu,\nu}(z)$ являются частными случаями соотношений для $K_{\lambda,\mu}(z)$ и $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ соответственно. Наконец, для функции $\varphi = \varphi_\lambda(z)$ справедливы тождества

$$\lambda\varphi_{\lambda-} = z\varphi + \lambda; \quad z\varphi_{\lambda+} = (\lambda+1)\varphi - \lambda - 1.$$

Как следует из статьи Зигеля [61:1], для алгебраической независимости $2nm$ чисел $K_{\lambda_i}(\alpha_k)$, $K'_{\lambda_i}(\alpha_k)$, где $-\lambda_i \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$, $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,m$, необходимо и достаточно выполнение условий $\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2$, $\lambda_i + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, $\lambda_i \pm \lambda_j \notin \mathbb{Z}$. Окончательный результат такого типа приведён в [36:12, гл. 9, теорема 9].

В 1954 г. А.Б. Шидловский (см. [36:12, гл. 6, §5]) исследовал функции $K_{\lambda,\mu}(z)$ и доказал алгебраическую независимость над $\mathbb{C}(z)$ двух функций $K_{\lambda,\mu}(\alpha z)$, $K'_{\lambda,\mu}(\alpha z)$, где $-\lambda, -\mu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, при условии $\lambda - \mu + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Это условие являлось только достаточным. Необходимое и достаточное условие $(\lambda, \mu) \not\sim (0, 1/2)$ было получено в 1970 г. И.И. Белогривовым и В.А. Олейниковым (см. там же). В 1969 г. А.А. Шмелёв (см. [36:12, §6 гл. 9]) доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $K_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_k z)$, $K'_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_k z)$, где $-\lambda_i, -\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, при условиях

$$\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2, \;\; \lambda_i - \mu_i + 1/2 \notin \mathbb{Z}, \; (\lambda_i - \mu_i) \pm (\lambda_j - \mu_j) \notin \mathbb{Z}.$$

Завершением этих исследований является

Теорема 22 [64:17]. *Пусть $-\lambda_i, -\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, и если $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ или $\mu_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то считаем, что $\mu_j \in \mathbb{Z}$. Тогда для алгебраической независимости $2n$ функций $K_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_i z)$, $K'_{\lambda_i,\mu_i}(\alpha_i z)$ над $\mathbb{C}(z)$ необходимо и достаточно выполнение следующих трёх условий:*

1°. $(\lambda_i, \mu_i) \not\sim (0, 1/2)$, $i = 1, \ldots, n$.

2°. *Если $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $i \neq j$, то $(\lambda_i, \mu_i) \not\sim (\lambda_j, \mu_j)$.*

3°. *Если $\mu_i, \mu_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $i \neq j$, то $\lambda_i + \lambda_j \notin \mathbb{Z}$.*

Наличие трудностей при рассмотрении случая $\lambda - \mu + 1/2 \in \mathbb{Z}$ можно объяснить существованием тождества

$$K_{\lambda,\lambda+1/2}(z) = \frac{2\lambda + 1}{2iz}(\varphi_{2\lambda}(iz) - \varphi_{2\lambda}(-iz)), \tag{42}$$

вытекающего, например, из [22:1, п. 5.2.1, формула (19)] (если положить в этой формуле $n = 2$, $k = 1$, $\omega = -1$, $F_r = 1/(2\lambda{+}1)_n$, $z \to iz$), и, по-видимому, не известного вышеупомянутым авторам.

Покажем, что нарушение любого условия в теореме 22 действительно порождает алгебраические тождества между рассматриваемыми функциями.

Если $(\lambda, \mu) \sim (0, 1/2)$, то заметим, что функции $K_{0,-1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \cos z$ и $K'_{0,-1/2}(z) = -\sin z$ алгебраически зависимы.

Если $(\lambda_i, \mu_i) \sim (\lambda_j, \mu_j)$, то имеют место соотношения смежности.

Если $\mu_i, \mu_j \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i + \lambda_j \in \mathbb{Z}$, то можно рассмотреть функции $K_{0,\lambda}(z) = K_\lambda(z)$, $K_{0,-\lambda}(z) = K_{-\lambda}(z)$, связанные алгебраическим уравнением

$$K_\lambda(z)K'_{-\lambda}(z) - K'_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) - 2\lambda K_\lambda(z)K_{-\lambda}(z)/z + 2\lambda/z = 0$$

(см. [36:12, гл. 9, равенство (73)]).

В 1962 г. В.А. Олейников (см. [36:12, §4 гл. 6]) доказал, что две функции $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$, $A'_{\mu,\nu}(\alpha z)$, где $\mu,\nu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда $\nu\notin\mathbb{N}$, $\nu-\mu\notin\mathbb{Z}^+$. В 1971 г. И.И. Белогривов (см. [36:12, §6 гл. 9]) доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_k z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_k z)$, где $\mu_i,\nu_i\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-$, $\alpha_k\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,m$, при условиях

$$\nu_i\notin\mathbb{N},\ \nu_i-\mu_i\notin\mathbb{Z},\ ((2\nu_i-\mu_i)-(2\nu_j-\mu_j)\pm(\mu_i\pm\mu_j))/2\notin\mathbb{Z},$$

и линейной независимости чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ над $\mathbb{Q}$.

Окончательным результатом этого типа является

Теорема 23 [64:15]. *Пусть $\mu_i,\nu_i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, $\alpha_i\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $i=1,\ldots,n$, $n\geqslant 1$. Тогда для алгебраической независимости $2n$ функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$ над $\mathbb{C}(z)$ необходимо и достаточно выполнение следующих четырёх условий:*

1°. $\nu_i\notin\mathbb{N}$, $\nu_i-\mu_i\notin\mathbb{Z}^+$, $i=1,\ldots,n$.

2°. Если $\alpha_i=\alpha_j$, $i\neq j$, то $(\nu_i;\mu_i)\not\sim(\nu_j;\mu_j)$.

3°. Если $\alpha_i=-\alpha_j$, $i\neq j$, то $(\nu_i;\mu_i)\not\sim-(\nu_j;\mu_j)$, $(\nu_i;\mu_i)\not\sim\mu_j-(\nu_j;0)$.

4°. Если $\mathbb{J}_1$ — множество всех индексов i, таких, что $\alpha_i=\alpha_j$, $(\nu_i;\mu_i)\sim(\nu_j;0)-\mu_j$, $\mu_j\notin\mathbb{N}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, а $\mathbb{J}_2$ — таких, что $\mu_i-\nu_i\in\mathbb{N}$, то числа α_i, $i\in\mathbb{J}_1\cup\mathbb{J}_2$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Необходимость условий теоремы 23 вытекает из следующих причин.

При $s\in\mathbb{Z}^+$, $k\in\mathbb{N}$ имеют место тождества

$$A_{\mu,\mu+s}(\alpha z)=P\,e^{\alpha z}+P_1,\quad A_{\nu+k,\nu}(\alpha z)=P\,e^{\alpha z}\varphi_\nu(-\alpha z)+P_1e^{\alpha z},\quad(43)$$

$$A_{\mu,k}(\alpha z)=P\,\varphi_\mu(\alpha z)+P_1,\quad \varphi_k(\alpha z)=P\,e^{\alpha z}+P_1,\quad \varphi_0(\alpha z)=e^{\alpha z},$$

где $P,P_1\in\mathbb{C}[z^{\pm1}]$ (см. [36:12, §4 гл. 6 и §2 гл. 5]).

Отсюда при $\nu\in\mathbb{N}$ и при $\nu-\mu\in\mathbb{Z}^+$ получается алгебраическая зависимость функций $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$ и $A'_{\mu,\nu}(\alpha z)$ над $\mathbb{C}(z)$.

Если $\alpha_i=\alpha_j$, $(\nu_i;\mu_i)\sim(\nu_j;\mu_j)$, то алгебраические соотношения получаются из соотношений смежности.

Если $\alpha_i = \alpha_j$, $(\nu_i; \mu_i) \sim (\nu_j; 0) - \mu_j$, $\mu_j \notin \mathbb{Z}$, то заметим, что функции $A_{\mu,\nu}(z)$ и $z^{1-\mu} A_{2-\mu,\nu-\mu+1}(z)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (18) с вронскианом

$$W(A_{\mu,\nu}(z), z^{1-\mu} A_{2-\mu,\nu-\mu+1}(z)) = (1-\mu) z^{-\mu} e^z.$$

Отсюда, вновь воспользовавшись соотношениями смежности, получаем алгебраические соотношения между рассматриваемыми функциями.

Если $\alpha_i = -\alpha_j$, $(\nu_i; \mu_i) \sim \mu_j - (\nu_j; 0)$, то алгебраические связи появляются в силу соотношений Куммера $A_{\mu,\nu}(z) = e^z A_{\mu,\mu-\nu}(-z)$ (см. [4:1, §6.3, формула (7)]).

Если $\alpha_i = -\alpha_j$, $(\nu_i; \mu_i) \sim -(\nu_j; \mu_j)$, то при $\mu_j \in \mathbb{Z}$ получаем предыдущий случай, а при $\mu_j \notin \mathbb{Z}$, как следует из рассуждений двух предыдущих случаев, алгебраические соотношения возникают из-за того, что $W(A_{\mu,\nu}(z), z^{1-\mu} e^z A_{2-\mu,1-\nu}(-z)) = (1-\mu) z^{-\mu} e^z$.

В 1966 г. А.Б. Шидловский рассмотрел функции $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ и доказал алгебраическую независимость двух функций $A_{\theta,\eta,\zeta}(\alpha z)$, $A'_{\theta,\eta,\zeta}(\alpha z)$, где $-\theta, -\eta, -\zeta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, при условии $\zeta - \theta, \zeta - \eta \notin \mathbb{Z}^+$ (см. [36:12, §5 гл. 6]). В 1969 г. Ю.В. Нестеренко [26:1] доказал алгебраическую независимость $2nm$ функций $A_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_k z)$, $A'_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_k z)$, где $-\theta_i, -\eta_i, -\zeta_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, при условиях

$$\alpha_k^2 \neq \alpha_l^2, \;\; \zeta_i - \theta_i, \zeta_i - \eta_i \notin \mathbb{Z},$$

$$((2\zeta_i - \theta_i - \eta_i) - (2\zeta_j - \theta_j - \eta_j) \pm ((\theta_i \pm \theta_j) - (\eta_i \pm \eta_j)))/2 \notin \mathbb{Z}.$$

Эти условия являлись только достаточными, так как были получены методом, требующим алгебраической независимости решений соответствующих однородных уравнений.

Окончательный результат выглядит следующим образом.

Теорема 24 [64:19]. *Пусть* $-\theta_i, -\eta_i, -\zeta_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, *и если* $\zeta_j - \theta_j \in \mathbb{Z}$ *или* $\zeta_j - \eta_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *то считаем, что* $\zeta_j - \eta_j \in \mathbb{Z}$. *Пусть* $\mathbb{J}$ *— множество всех индексов* i, *таких, что* $\eta_i - \zeta_i \in \mathbb{N}$. *Тогда для алгебраической независимости* $2n$ *функций* $A_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\theta_i,\eta_i,\zeta_i}(\alpha_i z)$ *над* $\mathbb{C}(z)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих четырёх условий:*

1°. $\zeta_i - \theta_i, \zeta_i - \eta_i \notin \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, n$.

2°. *Если* $\alpha_i = \alpha_j,\ i \neq j,$ *то* $(\zeta_i; \theta_i, \eta_i) \not\sim (\zeta_j; \theta_j, \eta_j)$.

3°. *Если* $\theta_i \in \mathbb{Z}$ *или* $\eta_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant i \leqslant n,$ *то выполняются условия* 1°, 3°, 4° *теоремы 23, где* μ *заменяется соответственно на* $\eta+1$ *или* $\theta+1$, *а* ν *на* $\zeta+1$.

4°. *Если* $\alpha_i = \alpha_j,\ i,j \in \mathbb{J},\ i \neq j,$ *то* $\theta_i - \theta_j \notin \mathbb{Z}$, *а если* $\alpha_i = -\alpha_j,\ i,j \in \mathbb{J},$ *то* $\eta_i - \theta_i - \theta_j \notin \mathbb{Z}$.

Для обоснования необходимости условий теоремы 24 заметим, что, как следует из соотношений смежности, при $s \in \mathbb{Z}^+$

$$A_{\theta,\eta,\eta+s}(\alpha z) = P\,\varphi_\theta(\alpha z) + P_1, \quad P, P_1 \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}].$$

Поэтому при $\zeta - \eta \in \mathbb{Z}^+$ имеет место алгебраическая зависимость функций $A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ и $A'_{\theta,\eta,\zeta}(z)$.

Если $\theta \in \mathbb{Z}$ или $\eta \in \mathbb{Z}$, то функции $A_{\theta,\eta,\zeta}(z), A'_{\theta,\eta,\zeta}(z)$ алгебраически эквивалентны над $\mathbb{C}(z)$ соответствующей функции Куммера и её производной.

Необходимость первого условия в 4° теоремы 24 следует из тождества

$$\eta\varphi_\theta(z) = zA'_{\theta,\eta,\eta-1}(z) + \eta A_{\theta,\eta,\eta-1}(z). \tag{44}$$

Необходимость второго условия в 4° следует из тождеств (44) и

$$(\theta_1+\theta_2)\varphi_{\theta_1}(z)\varphi_{\theta_2}(-z) = \theta_2 A_{\theta_1,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(z) + \theta_1 A_{\theta_2,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(-z), \tag{45}$$

а при $\theta_i = 0$ также из тождеств (44) и

$$\theta A_{0,\theta,\theta-1}(-z) = (z(A_{0,\theta,\theta-1}(-z))' + \theta A_{0,\theta,\theta-1}(-z))\varphi_\theta(z). \tag{46}$$

Тождества (44) – (46) будут доказаны в §1 главы 5 с использованием тождества (см. [36:12, гл. 5, формулы (45), (46)])

$$A_{0,\theta,\theta-1}(-z) = e^{-z}\varphi_\theta(z). \tag{47}$$

Следующая теорема, являющаяся максимальным обобщением теорем 22 – 24 и теоремы 9 из [36:12, гл. 9], позволяет определять алгебраическую независимость или зависимость любой совокупности гипергеометрических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка.

Теорема 25. *Пусть числа* $\mu_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-,\ \nu_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \alpha_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \nu_i - \mu_i \notin \mathbb{Z},\ i = 1,\ldots,n_1+n_2,\ n_1,n_2 \geqslant 0,\ \mu_i \notin \mathbb{N},\ i = 1,\ldots,n_1,$

$\mu_i = m_i \in \mathbb{N}$, $i = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$; если $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $1 \leqslant i < j \leqslant n_1+n_2$, то $(\nu_i;\mu_i)\alpha_i/\alpha_j \not\sim (\nu_j;\mu_j)$, $(\nu_i;\mu_i)\alpha_i/\alpha_j \not\sim (\nu_j;0) - \mu_j$;

числа $-\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_j + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, n_3 + n_4$, $n_3, n_4 \geqslant 0$, $\lambda_j \notin \mathbb{Z}^+$, $j = 1, \ldots, n_3$, $\lambda_j = q_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = n_3 + 1, \ldots, n_3 + n_4$; если $\beta_i^2 = \beta_j^2$, $1 \leqslant i < j \leqslant n_3 + n_4$, то $\lambda_i \pm \lambda_j \notin \mathbb{Z}$; если $4\beta_j^2 = -\alpha_i^2$, $1 \leqslant j \leqslant n_3 + n_4$, $1 \leqslant i \leqslant n_1 + n_2$, то $(\nu_i;\mu_i) \not\sim \pm(\lambda_j + 1/2; 2\lambda_j)$;

числа $\delta_l, \rho_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\xi_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\delta_l - \rho_l + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, $l = 1, \ldots, n_5$, $n_5 \geqslant 0$; если $\xi_l^2 = \xi_k^2$, $1 \leqslant l < k \leqslant n_5$, то $(\delta_l, \rho_l) \not\sim (\delta_k, \rho_k)$;

числа $\theta_s, \eta_s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $-\zeta_s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, $\omega_s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $s = 1, \ldots, n_6$, $n_6 \geqslant 0$, удовлетворяют условиям 1°, 2°, 4° теоремы 24, где α заменяется на ω с соответствующими индексами;

числа $\sigma_r \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\varepsilon_r \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $r = 1, \ldots, n_7$, $n_7 \geqslant 0$; если $\varepsilon_r = \varepsilon_t$, $1 \leqslant r < t \leqslant n_7$, то $\sigma_r - \sigma_t \notin \mathbb{Z}$; если $\varepsilon_r = \omega_s$, $1 \leqslant r \leqslant n_7$, $1 \leqslant s \leqslant n_6$, $\eta_s - \zeta_s \in \mathbb{N}$ или $\theta_s - \zeta_s \in \mathbb{N}$, то, соответственно, $\sigma_r - \theta_s \notin \mathbb{Z}$ или $\sigma_r - \eta_s \notin \mathbb{Z}$;

числа $\gamma_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t = 1, \ldots, n_8$, $n_8 \geqslant 0$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Тогда $3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 2n_6 + n_7 + n_8$ функций

$$\begin{gathered}A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z), A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z), A_{-\mu_i,\nu_i-\mu_i}(\alpha_i z), A_{m_k,\nu_k}(\alpha_k z), A'_{m_k,\nu_k}(\alpha_k z),\\ K_{\lambda_j}(\beta_j z), K'_{\lambda_j}(\beta_j z), K_{-\lambda_j}(\beta_j), K_{q_p}(\beta_p z), K'_{q_p}(\beta_p z), \qquad (48)\\ K_{\delta_l,\rho_l}(\xi_l z), K'_{\delta_l,\rho_l}(\xi_l z), A_{\theta_s,\eta_s,\zeta_s}(\omega_s z), A'_{\theta_s,\eta_s,\zeta_s}(\omega_s z), \varphi_{\sigma_r}(\varepsilon_r z), e^{\gamma_t z},\end{gathered}$$

где $i = 1, \ldots, n_1$, $k = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, $j = 1, \ldots, n_3$, $p = n_3 + 1, \ldots, n_3 + n_4$, $l = 1, \ldots, n_5$, $s = 1, \ldots, n_6$, $r = 1, \ldots, n_7$, $t = 1, \ldots, n_8$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, причём в множестве (48) параметры функций $A_{-\mu_i,\nu_i-\mu_i}(\alpha_i z)$, $K_{-\lambda_j}(\beta_j z)$ можно изменять на целые величины.

Необходимость условий теоремы 25 следует из тождеств (21), (42) и замечаний, приведённых после формулировок каждой из теорем 22 – 24.

Значительно менее полные варианты теоремы 25 доказываются в работах [64:1,2].

В главе 6 устанавливаются оценки мер алгебраической независимости значений E-функций. Полученные оценки эффективны по степени меры, а при некоторых дополнительных условиях полностью эффективны.

Теорема 26 (см. [64:4,5]). *Пусть $\mathbb{K}E$-функции (4) в смысле определения 3 составляют решение системы (5) (системы (6)) и однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha); s; H) > CH^{-\rho s^{m-1}},$$

где $\rho = m^m h^m/(m-1)!$, $C = (\exp\exp(\sigma s^{2m-2}\ln(s+1)))^{-1}$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, а в общем случае — неравенство

$$\Phi_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha); s; H) > C_1 H^{-\rho_1 s^m},$$

где C_1 и ρ_1 получаются из C и ρ заменой числа m на $m+1$, σ — постоянная, зависящая только от функций (4) и m.

Теорема 26′ (см. [64:4,5]). *Если при условиях теоремы 26 каждое решение системы (5) (системы (6)) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых (алгебраически независимых) над $\mathbb{C}(z)$ функций, то в утверждении теоремы 26 $\sigma = (\gamma m)^m$.*

Теорема 26 допускает обобщение на случай совокупностей систем (5) и (6).

Теорема 27 (см. [64:4,5]). *Пусть $r, p \in \mathbb{Z}^+, r + p \geqslant 1$, и каждая из r совокупностей $\mathbb{K}E$-функций в смысле определения 3*

$$\varphi_{l,1}(z), \ldots, \varphi_{l,m_l}(z), \quad m_l \geqslant 2, \quad l = 1, \ldots, r, \tag{49}$$

составляет решение соответствующей системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_{l,k} = \sum_{t=1}^{m_l} Q_{l,k,t}\, y_{l,t}, \qquad Q_{l,k,t} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m_l, \quad l = 1, \ldots, r, \tag{50}$$

а каждая из p совокупностей $\mathbb{K}E$-функций

$$\psi_{j,1}(z), \ldots, \psi_{j,\mu_j}(z), \quad \mu_j \geqslant 1, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{51}$$

— решение соответствующей системы линейных дифференциальных

уравнений

$$u'_{j,i} = q_{j,i,0} + \sum_{s=1}^{\mu_j} q_{j,i,s}\, u_{j,s}, \qquad q_{j,i,s} \in \mathbb{C}(z), \quad i = 1, \dots, \mu_j, \quad j = 1, \dots, p, \tag{52}$$

и $m = m_1 + \dots + m_r + \mu_1 + \dots + \mu_p$ *функций (49) и (51) не связаны алгебраическим уравнением над* $\mathbb{C}(z)$, *однородным по каждой из* r *совокупностей функций (49). Пусть, далее,* α *принадлежит* $\mathbb{A} \setminus \{0\}$ *и не является особой точкой систем (50) и (52), а*

$$P = P(x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}; \dots; x_{r,1}, \dots, x_{r,m_r}; y_{1,1}, \dots, y_{1,\mu_1}; \dots; y_{p,1}, \dots, y_{p,\mu_p}) -$$

многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $P \not\equiv 0$, $\overline{|P|} \leqslant H$, *однородный по каждой из* r *совокупностей переменных* $x_{l,1}, \dots, x_{l,m_l}$, $l = 1, \dots, r$, *степеней соответственно* $s_1, \dots, s_r$ *и* $\nu_1, \dots, \nu_p$ *по переменным* $x_{l,1}, \dots, x_{l,m_l}$, $l = 1, \dots, r$ *и* $y_{j,1}, \dots, y_{j,\mu_j}$, $j = 1, \dots, p$. *Тогда*

$$|P(\varphi_{1,1}(\alpha), \dots, \varphi_{r,m_r}(\alpha); \psi_{1,1}(\alpha), \dots, \psi_{p,\mu_p}(\alpha))| > CH^{-\rho},$$

где

$$\rho = m_0 (r+p)^{m-r} h^{m-r+1} \left(\prod_{l=1}^{r} \frac{(m_l s_l)^{m_l - 1}}{(m_l - 1)!} \right) \prod_{j=1}^{p} \frac{((\mu_j + 1)\nu_j)^{\mu_j}}{\mu_j!},$$

$m_0 = \max(\max m_l, \max(\mu_j + 1))$, $h = [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $C = (\exp\exp\theta)^{-1}$,

$$\theta = \sigma (r+p)^{2m} \left(\prod_{l=1}^{r} s_l^{2m_l - 2} \right) \left(\prod_{j=1}^{p} \nu_j^{2\mu_j} \right) \ln \left(\sum_{l=1}^{r} s_l + \sum_{j=1}^{p} \nu_j + 1 \right).$$

Теорема 27′ (см. [64:4,5]). *Если при условиях теоремы 27 произвольные решения систем (50) и (52) с ненулевыми компонентами состоят из функций, не связанных алгебраическим уравнением над* $\mathbb{C}(z)$, *однородным по совокупности решений систем (50), то в утверждении теоремы 27* $\sigma = (\gamma m)^m$.

Теорема 27′ уточняет, обобщает и делает эффективной теорему А.И. Галочкина из [10:1].

Пусть $\mathbb{K}$E-функции (4) однородно алгебраически зависимы (соответственно алгебраически зависимы) над $\mathbb{C}(z)$. Рассмотрим совокупность однородных (произвольных) минимальных уравнений этих функций над $\mathbb{C}(z)$ (определение см. в [36:12]). Как легко показать, совокупность минимальных уравнений совпадает с т. н. базисом Грёбнера (см., например, [32:1, §8.14]) идеала, состоящего из всех многочленов, связывающих функции (4). Для вычисления базиса Грёбнера имеются эффективные алгоритмы (см., например, [14:1], [32:1, §8.15]). Минимальные уравнения можно записать в виде

$$P_i(f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad i = 1, \dots, \tau, \tag{53}$$

где P_i — примитивные многочлены с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ от m переменных. Обозначим

$$\lambda_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant \tau} \deg_z P_i, \quad \tau_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant \tau} \overline{|P_i|}, \quad \Omega_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant \tau} \deg_{\bar{f}} P_i.$$

В статье [47:1] доказано, что

$$\ln \Omega_0 < 2^{m-1} \ln(\Omega^2/2 + \Omega) + \ln 2,$$

где Ω — максимум степеней многочленов какой-либо системы порождающих идеала всех многочленов, связывающих функции (4).

Теорема 28 (см. [64:5,6]). *Пусть $\mathbb{K}E$-функции (4) в смысле определения 3, $m \geqslant 3$ (соответственно $m \geqslant 2$) составляют решение системы (5) (системы (6)), степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) множества этих функций над $\mathbb{C}(z)$ равна l, $2 \leqslant l \leqslant m-1$ ($1 \leqslant l \leqslant m-1$), а функции (8) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$. Пусть совокупность старших членов однородных (произвольных) минимальных уравнений (53) имеет вид*

$$A_j(z) f_m^{\varkappa_{j,m}}(z) \dots f_1^{\varkappa_{j,1}}(z), \quad A_j(z) \in \mathbb{K}[z], \ j = 1, \dots, \tau, \tag{54}$$

$\varkappa_0 = \max(\varkappa_{1,1}, \dots, \varkappa_{\tau,m})$, *$\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) A_1(\alpha) \dots A_\tau(\alpha) \neq 0$. Тогда, если числа (9) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы), то справедливо неравенство*

$$\Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha); s; H) > C H^{-\rho h^l s^{l-1}},$$

где $\rho = (2\varkappa_0)^{m-1} m^{l-1} l/(l-1)!$, $C = (\exp\exp(\sigma s^{4l-4} \ln(s+1)))^{-1}$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, а в общем случае — неравенство

$$\Phi_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha); s; H) > C_1 H^{-\rho_1 h^{l+1} s^l}, \tag{55}$$

где C_1 и ρ_1 получаются из C и ρ заменой числа l на $l+1$, а m на $m+1$. Если $l=m-1$, то $\rho = k(m-1)^{2m-2}(m-2)^{2-m}/(m-1)!$, где k — степень неприводимого уравнения, связывающего функции (4).

Теорема 28$'$ (см. [64:5,6]). *Если при условиях теоремы 28 для любого $N \in \mathbb{N}$ совокупность произведений степеней*

$$\begin{gathered} f_m^{k_m}(z)\dots f_1^{k_1}(z), \quad k_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=1}^m k_i = N, \\ \forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant \tau,\ \exists i,\ 1 \leqslant i \leqslant m:\ k_i < \varkappa_{j,i}, \end{gathered} \tag{56}$$

образует неприводимую систему функций, то в однородном случае утверждения теоремы 28 $\sigma = \gamma^m m^{4l}\Omega_0^{2m}\varkappa_0^{4m-4}\ln(\varkappa_0+1)\max(1,\lambda_0, \ln\tau_0)$. Если к совокупности функций (4) добавить функцию $f_0(z)\equiv 1$ и заменить число m на $m+1$, то тогда получим, что аналогичное утверждение справедливо и в неоднородном случае.

Числа α для оценки (55) можно выбирать, например, пользуясь теоремой 2.

Величина ρ в теореме 28 как функция от l и m при произвольном h вычислена впервые. В случае $l=m-1$ менее асимптотически точное значение ρ было найдено А.Б. Шидловским (см. теорему VI).

В статье [61:1] К. Зигель, в частности, высказал без доказательства следующее утверждение, обобщающее теорему Линдемана:

Пусть $\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{A},\ \xi \neq 0,\ \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j,$

$$P_i(x_1,x_2) \in \mathbb{A}[x_1,x_2], \quad i=1,\dots,r, \quad \sum_{i=1}^r P_i^2(x_1,x_2) \not\equiv 0.$$

Тогда число

$$P_1(J_0(\xi),J_0'(\xi))e^{\alpha_1} + \dots + P_r(J_0(\xi),J_0'(\xi))e^{\alpha_r} \neq 0. \tag{57}$$

Поскольку $K_0(z)=J_0(z)$, то утверждение Зигеля (57) вытекает из следующей более общей теоремы, иллюстрирующей также полученные в главе 6 оценки мер алгебраической независимости.

Теорема 29. *Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathbb{A},\ \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j;\ -\lambda_j \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N},\ \xi_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \lambda_j + 1/2 \notin \mathbb{Z},\ j=1,\dots,n;$ если $\xi_i^2 = \xi_j^2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\lambda_i \pm \lambda_j \notin \mathbb{Z};\ n,r \in \mathbb{N},\ h = [\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_r,\xi_1,\dots,\xi_n):\mathbb{Q}]$.*

Тогда существует эффективная постоянная γ, зависящая только от чисел $\alpha_i, \xi_j, \lambda_j, h$ такая, что выполняется неравенство

$$|P_1(K_{\lambda_1}(\xi_1), K'_{\lambda_1}(\xi_1), \ldots, K_{\lambda_n}(\xi_n), K'_{\lambda_n}(\xi_n))e^{\alpha_1} + \cdots +$$

$$+P_r(K_{\lambda_1}(\xi_1), K'_{\lambda_1}(\xi_1), \ldots, K_{\lambda_n}(\xi_n), K'_{\lambda_n}(\xi_n))e^{\alpha_r}| > CH^{-\rho},$$

где

$$\rho = \frac{m_0(2r)^{r-1}((4n+2)s)^{2n}h^{2n+r}}{(r-1)!(2n)!},$$

$$P_i = P_i(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_{2n}], \quad \deg_{\bar{x}} P_i \leqslant s,$$

$$\overline{|P_i|} \leqslant H, \ i = 1, \ldots, r, \quad \sum_{i=1}^{r} P_i^2 \not\equiv 0, \quad m_0 = \max(r, 2n+1),$$

$$C = (\exp\exp(\gamma^{n+r}s^{4n}\ln(s+1)))^{-1}.$$

С помощью теорем 26 – 28$'$ можно получать и другие оценки мер алгебраической независимости совокупностей значений E-функций, алгебраическая независимость которых доказана в главах 4 и 5.

Глава 1. Общие теоремы об алгебраической независимости значений E-функций

Доказательство теоремы 1 укладывается в традиционную схему метода Зигеля. При этом ряд лемм необходимо заменять на их более общие аналоги и добавлять новые.

§1. Вспомогательные утверждения

Функциональная часть метода Зигеля остаётся неизменной. Как и в §§ 2–6 гл. 3 книги [36:12], сначала предположим, что функции (0.4), $m \geqslant 2$, являются аналитическими в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляют решение системы (0.5) и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$,

$$p = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{ord} f_i(z), \qquad q = \max(\deg T, \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} \deg TQ_{k,i}). \tag{1}$$

Далее, при $n \in \mathbb{N}$ строится линейная форма

$$R_1 = P_{1,1}y_1 + \cdots + P_{1,m}y_m, \qquad R_1 \not\equiv 0, \tag{2}$$

$$P_{1,i} \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P_{1,i} \leqslant n, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Из линейной формы R_1 рекуррентным путём получается последовательность линейных форм

$$R_k = TDR_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$R_k = P_{k,1}y_1 + \cdots + P_{k,m}y_m, \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z], \quad i = 1, \ldots, m,$$

где D — дифференциальный оператор, имеющий вид

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Если $y_1, \ldots, y_m$ — произвольное решение системы (0.5), то, как легко убедиться,

$$DR_k = \frac{d}{dz} R_k.$$

Пусть

$$s \in \mathbb{Z}^+, \qquad s < \left[\frac{n}{2}\right], \qquad t = \frac{m}{2}(m-1)q + p + s. \tag{4}$$

Лемма 1 (см. [36:12, гл. 3, леммы 8 и 9]). *Пусть совокупность функций (0.4), $m \geqslant 2$, аналитических в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляет решение системы (0.5) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, а линейная форма (2) при $y_i = f_i(z)$, $i = 1, \ldots, m$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{ord} R_1(z) \geqslant m(n+1) - s - 1. \tag{5}$$

Тогда существует постоянная n_0, зависящая только от функций (0.4) и m, такая, что при $n \geqslant n_0$ линейные формы

$$R_k = P_{k,1}y_1 + \cdots + P_{k,m}y_m, \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z], \quad k, i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

получающиеся из формы R_1 с помощью равенств (3), линейно независимы и определитель

$$\Delta = \Delta(z) = |P_{k,i}|_{k,i=1,\ldots,m} \tag{7}$$

форм (6) имеет вид

$$\Delta(z) = z^{mn-s-p}\Delta_1(z), \qquad \Delta_1(z) \not\equiv 0, \tag{8}$$
$$\Delta_1(z) \in \mathbb{C}[z], \ \deg \Delta_1(z) \leqslant t.$$

В главе 1 настоящей работы символом $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ будет обозначаться производная j-го порядка от линейной формы R_k по z, т. е. линейная форма от переменных $y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(j)}, \ldots, y_m^{(j)}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$:

$$R_k^{(j)}(z, \bar{y}) = P_{k,1}^{(j)}y_1 + \cdots + P_{k,m}^{(j)}y_m + \binom{j}{1} P_{k,1}^{(j-1)}y_1' + \cdots + \binom{j}{1} P_{k,m}^{(j-1)}y_m' +$$
$$+ \cdots + P_{k,1}y_1^{(j)} + \cdots + P_{k,m}y_m^{(j)}.$$

Как оказывается, для таких форм справедлив следующий аналог леммы 10 гл. 3 книги [36:12].

Лемма 2. *Пусть совокупность функций (0.4), $m \geqslant 2$, аналитических в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляет решение системы (0.5) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, числа p, q, s, t задаются формулами (1) и (4), а число n_0 определяется в лемме 1. Далее, пусть линейная форма (2) такова, что $n \geqslant n_0$, и при $y_i = f_i(z)$, $i = 1, \ldots, m$ выполняется условие (5), а $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Тогда: 1) среди $m(t+1)$ линейных форм

$$R_1(\alpha,\bar y), R_1'(\alpha,\bar y),\dots, R_1^{(t)}(\alpha,\bar y),\dots, R_m(\alpha,\bar y), R_m'(\alpha,\bar y),\dots, R_m^{(t)}(\alpha,\bar y)$$

от переменных

$$y_1,\dots,y_m, y_1',\dots,y_m',\dots,y_1^{(t)},\dots,y_m^{(t)}, \tag{9}$$

где

$$R_k^{(j)}(\alpha,\bar y) = P_{k,1}^{(j)}(\alpha)y_1+\dots+P_{k,m}^{(j)}(\alpha)y_m+\dots+ \tag{10}$$

$$+P_{k,1}(\alpha)y_1^{(j)}+\dots+P_{k,m}(\alpha)y_m^{(j)}, \qquad k=1,\dots,m,\ j=0,1,\dots,t$$

можно выбрать m линейно независимых форм;
2) если в линейные формы (10) вместо переменных

$$y_1',\dots,y_m',\dots,y_1^{(t)},\dots,y_m^{(t)}, \tag{11}$$

подставить произвольные линейные формы от переменных (9) и привести подобные члены, то среди вновь полученных $m(t+1)$ линейных форм от переменных (9) можно выбрать m линейно независимых форм.

Доказательство. Ввиду того, что выполняются все условия леммы 1, справедливо равенство (8). Поскольку число $\alpha\neq 0$, то, если оно является корнем многочлена $\Delta(z)$, кратность τ этого корня удовлетворяет неравенству $0\leqslant\tau\leqslant t$. Линейные формы $R_1,\dots,R_m$, определитель $\Delta(z)$ (7) и алгебраические дополнения $\Delta_{k,i}(z)$ элементов $P_{k,i}$ в этом определителе связаны соотношениями

$$\Delta(z)y_j=\sum_{k=1}^m \Delta_{k,j}(z)R_k, \qquad j=1,\dots,m,$$

тождественно по $y_1,\dots,y_m$ и z. Продифференцировав каждое из этих равенств τ раз (при дифференцировании линейных форм тождественность по переменным (9) и z сохраняется согласно определению дифференциального кольца), получим

$$\Delta^{(\tau)}(z)y_j+\sum_{\lambda=0}^{\tau-1}\binom{\tau}{\lambda}\Delta^{(\lambda)}(z)y_j^{(\tau-\lambda)}=\sum_{\lambda=0}^{\tau}\sum_{k=1}^m\binom{\tau}{\lambda}\Delta_{k,j}^{(\tau-\lambda)}(z)R_k^{(\lambda)}(z,\bar y), \tag{12}$$

$$j = 1, \dots, m.$$

Поскольку $\Delta^{(\lambda)}(\alpha) = 0,\ \lambda = 0, 1, \dots, \tau - 1;\ \Delta^{(\tau)}(\alpha) = \beta \neq 0$, то, положив в тождествах (12) $z = \alpha$ и обозначив $\binom{\tau}{\lambda} \Delta_{k,j}^{(\tau-\lambda)}(\alpha) = \beta_{k,j,\lambda}$, получим

$$\beta y_j = \sum_{\lambda=0}^{\tau} \sum_{k=1}^{m} \beta_{k,j,\lambda} R_k^{(\lambda)}(\alpha, \bar{y}) = \sum_{\lambda=0}^{\tau} \sum_{k=1}^{m} \beta_{k,j,\lambda} (P_{k,1}^{(\lambda)}(\alpha) y_1 + \dots +$$

$$+ P_{k,m}^{(\lambda)}(\alpha) y_m + \dots + P_{k,1}(\alpha) y_1^{(\lambda)} + \dots + P_{k,m}(\alpha) y_m^{(\lambda)}), \qquad j = 1, \dots, m. \tag{13}$$

Так как $y_1, \dots, y_m$ как линейные формы от переменных (9) имеют ранг m, то и ранг линейных форм (10) не меньше, чем m. Поскольку равенства (13) выполняются тождественно по переменным (11), то они сохранятся, если в них вместо переменных (11) подставить любые линейные формы от переменных (9). Лемма 2 доказана.

Линейную форму R_1, удовлетворяющую условиям лемм 1 и 2 (в предположении, что функции (0.4) являются $\mathbb{K}$E-функциями, $s = [\varepsilon n]$, $\varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon < 1/2$,

$$t = \frac{m}{2}(m-1)q + [\varepsilon n] + p), \tag{14}$$

строим точно также, как в §§ 8 и 9 гл. 3 книги [36:12]. При этом можно считать, что в системе (0.5) коэффициенты $Q_{k,i} \in \mathbb{K}(z)$, а многочлены $T, TQ_{k,i}$ и коэффициенты $P_{1,i}$ линейной формы R_1 принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ (см. там же, §§ 2 и 9).

Лемма 3 (см. [36:12, гл. 3, лемма 14]). *Пусть функции (0.4), $m \geqslant 2$, являются $\mathbb{K}$E-функциями, $n \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда существует m многочленов*

$$P_{1,k} = P_{1,k}(z) = \sum_{l=0}^{n} b_{1,k,l} z^l, \qquad k = 1, \dots, m,$$

со следующими свойствами:
1) все $b_{1,k,l} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, в совокупности отличны от нуля и

$$\overline{|b_{1,k,l}|} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \qquad k = 1, \dots, m,\ l = 0, 1, \dots, n,$$

при $n \to \infty$ *равномерно по* k *и* l*;*
2) линейная форма

$$R_1 \;=\; P_{1,1}(z)f_1(z) + \cdots + P_{1,m}(z)f_m(z) \;=\; \sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!} \tag{15}$$

такова, что

$$\operatorname{ord} R_1 \geqslant \tau, \quad \tau = m(n+1) - [\varepsilon n] - 1;$$

3) коэффициенты ряда (15) при всех достаточно больших n *удовлетворяют условию*

$$\overline{|a_\nu|} = \nu^{\varepsilon\nu} O(n^n), \quad \nu \geqslant \tau,$$

равномерно по ν*.*

Теперь оценим модули значений числовых линейных форм $R_k^{(j)}(\alpha, \bar{f}(\alpha))$ и размеры коэффициентов $P_{k,j,i}(\alpha)$ этих форм в точке $\alpha \in \mathbb{A}$.

Лемма 4. *Пусть совокупность* $\mathbb{K}E$*-функций (0.4),* $m \geqslant 2$*, составляет решение системы (0.5) и линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$*,* $\alpha \in \mathbb{K}$*,* $h = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$*. Пусть линейная форма* R_1 *сконструирована по лемме 3 при каком-либо значении* n*,* $n \geqslant n_0$ *с заменой* ε *на* $\varepsilon_1 = \varepsilon/(3m^2h)$ *при некотором* ε*,* $0 < \varepsilon < 1$*, а число* t_1 *получается из* t *заменой в равенстве (14)* ε *на* ε_1*. Тогда для линейных форм* $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ *и их коэффициентов* $P_{k,j,i}(z)$ *с ростом* n *выполняются оценки*

$$|R_k^{(j)}(\alpha, \bar{f}(\alpha))| = O(n^{-(m-1-\varepsilon/2)n}), \qquad k = 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, t_1; \tag{16}$$

$$\overline{|P_{k,j,i}(\alpha)|} = O(n^{(1+\varepsilon/4)n}), \tag{17}$$

$$k = 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, t_1;\ i = 1, \ldots, m(t_1+1).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что коэффициенты линейных форм $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ совпадают с производными многочленов $P_{k,i}(z)$, умноженными на биномиальные коэффициенты вида $\binom{j}{r} \leqslant 2^j \leqslant c^n$, где $c > 0$ и не зависит от n, поэтому оценки (17) можно получить из соответствующих оценок для величин $\overline{\left|P_{k,i}^{(j)}(\alpha)\right|}$, $k, i = 1, \ldots, m$; $j = 0, 1, \ldots, t_1$. Как и при доказательстве леммы 15 гл. 3 книги [36:12], для двух произвольных степенных рядов

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu,\qquad \psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu,$$

условимся писать $\varphi(z)\ll\psi(z)$, если $|a_\nu|\leqslant b_\nu,\ \nu=0,1,2,\dots$. Будем использовать также обозначение

$$\varphi^*(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|z^\nu.$$

Очевидно, что $\varphi(z)\ll\varphi^*(z)$ и что из соотношения $\varphi(z)\ll\psi(z)$ следуют соотношения $\varphi'(z)\ll\psi'(z)$ и $|\varphi(\alpha)|\leqslant|\psi(|\alpha|)|$. При доказательстве леммы 15 гл. 3 книги [36:12] было установлено, что

$$P_{k+1,i}(z)\ll c_1^k(1+z)^{kq+n}\left(\prod_{\nu=0}^{k-1}(\nu q+n+m)\right)O(n^{(1+\varepsilon_1)n}),\tag{18}$$

$$i=1,\dots,m,\ k=0,1,\dots,$$

$$R_{k+1}(z)\ll c_1^k(1+z)^{kq}\prod_{\nu=0}^{k-1}\left(\nu q+\frac{d}{dz}\right)R_1^*(z),\quad k=0,1,\dots,\tag{19}$$

$$R_1^*=\sum_{\nu=\tau}^{\infty}\nu^{\varepsilon_1\nu}\frac{z^\nu}{\nu!}O(n^n),\quad \tau=m(n+1)-[\varepsilon_1 n]-1,$$

где c_1 — положительная постоянная, не зависящая от n. При этом соотношение (19) остаётся справедливым, если коэффициенты многочленов $P_{k+1,i}(z)$ заменить их сопряжёнными в поле $\mathbb{K}_{[j]}$ с любым номером.

Из соотношений (18), (19) для $k\leqslant m$ получаем

$$P_{k,i}(z)\ll n^m(1+z)^{mq+n}O(n^{(1+\varepsilon_1)n}),\quad i=1,\dots,m,$$

$$R_k(z)\ll c_2(1+z)^{mq}\left(1+\frac{d}{dz}\right)^k R_1^*(z).$$

Дифференцируя эти соотношения j раз, $0\leqslant j\leqslant t_1=qm(m-1)/2+[\varepsilon_1 n]+p$, получим

$$P_{k,i}^{(j)}(z)\ll n^m(mq+n)^j(1+z)^{mq+n-j}O(n^{(1+\varepsilon_1)n})\ll$$

$$\ll c_3^n n^{\varepsilon_1 n}(1+z)^{mq+n} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}),$$

$$R_k^{(j)}(z, \bar{f}(z)) \ll c_4^n (mq)^j (1+z)^{mq} \left(1+\frac{d}{dz}\right)^{k+j} R_1^*(z) \ll$$

$$\ll c_5^n (1+z)^{mq} \left(1+\frac{d}{dz}\right)^{k+j} \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \nu^{\varepsilon_1 \nu} \frac{z^\nu}{\nu!} O(n^n) \ll$$

$$\ll c_5^n (1+z)^{mq} \sum_{\rho=0}^{k+j} \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \binom{k+j}{\rho} \nu^{\varepsilon_1 \nu} \frac{z^{\nu-\rho}}{(\nu-\rho)!} O(n^n) \ll$$

$$\ll c_6^n (1+z)^{mq} \sum_{\nu=\tau-k-j}^{\infty} (\nu+k+j)^{\varepsilon_1(\nu+k+j)} \frac{z^\nu}{\nu!} O(n^n).$$

Подставив в эти соотношения $z=\alpha$ и оценив сумму ряда в правой части последнего соотношения по порядку его первым членом, получим

$$\overline{\left|P_{k,i}^{(j)}(\alpha)\right|} \leqslant c_7^n n^{\varepsilon_1 n} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}) = c^{-n} O(n^{(1+3\varepsilon_1)n}),$$

$$|R_k^{(j)}(\alpha, \bar{f}(\alpha))| \leqslant c_6^n \tau^{\varepsilon_1 \tau} \frac{|\alpha|^{\tau-k-j}}{(\tau-k-j)!} O(n^n) \leqslant$$

$$\leqslant c_8^n n^{\varepsilon_1 mn} \frac{|\alpha|^{mn}}{(mn-2\varepsilon_1 n - q(m-1)m/2 - p - 1)!} O(n^n) \leqslant$$

$$\leqslant c_9^n n^{\varepsilon_1 mn} (mn - 2\varepsilon_1 n - c_{10})^{-(mn-2\varepsilon_1 n - c_{10})} O(n^n) \leqslant c_{11}^n O(n^{n+\varepsilon_1 mn - mn + 2\varepsilon_1 n}) \leqslant$$

$$\leqslant O(n^{-(m-1-\varepsilon_1(m+3))n}).$$

Из полученных неравенств следуют оценки (16) и (17). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть совокупность $\mathbb{K}E$-функций (0.4), $m \geqslant 2$, составляет решение системы (0.5) и имеет ранг $r \geqslant 1$ над полем $\mathbb{C}(z)$, а $\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда ρ — ранг совокупности чисел (0.13) над полем $\mathbb{K}$ — удовлетворяет неравенству $1 \leqslant \rho \leqslant r$.*

Действительно, если $\rho = 0$, то все функции (0.4) были бы тождественно равны нулю. Далее, ранг ρ не может превышать ранга совокупности функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), f_1'(z), \ldots, f_m'(z), \ldots, f_1^{(k)}(z), \ldots, f_m^{(k)}(z), \ldots \qquad (20)$$

над полем $\mathbb{C}(z)$ — в противном случае всякие ρ функций из (20) будут связаны линейным уравнением над $\mathbb{K}(z)$, и полагая в этих уравнениях $z = \alpha$, придём к противоречию. Но поскольку функции (0.4) удовлетворяют системе (0.5), то все функции из совокупности (20) линейно выражаются через функции (0.4), откуда $\rho \leqslant r$. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим какие-нибудь ρ линейно независимых над $\mathbb{K}$ чисел из множества (0.13) и обозначим их $g_1(\alpha), \ldots, g_\rho(\alpha)$. Соответствующие им функции $g_1(z), \ldots, g_\rho(z)$ будут, очевидно, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Дополним множество этих функций до базиса в линейном пространстве, порождаемом над $\mathbb{C}(z)$ функциями (20). Элементы этого базиса

$$g_1(z), \ldots, g_r(z) \tag{21}$$

также будем брать из совокупности (20). Производные $g_1'(z), \ldots,\ g_r'(z)$ функций (21) с помощью уравнений (0.5) можно выразить в виде линейных комбинаций функций (0.4), а поскольку функции (0.4), в свою очередь, представляются как линейные комбинации функций (21) с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, то совокупность функций (21) составляет решение системы

$$y_k' = \sum_{i=1}^{r} q_{k,i}\, y_i, \qquad q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Очевидна следующая

Лемма 6. *Пусть $\mathbb{V}$ — произвольное поле, $\mathbb{W}$ — содержащее его кольцо, а множества A и B таковы, что $A \subset B \subset \mathbb{W}$ и каждый элемент множества B можно представить как конечную линейную комбинацию элементов множества A с коэффициентами из $\mathbb{V}$. Тогда:*
1) $rang_{\mathbb{V}} B = rang_{\mathbb{V}} A$;
2) $deg\, tr^0_{\mathbb{V}} B = deg\, tr^0_{\mathbb{V}} A$.

Из леммы 6 и сказанного перед ней следует, что условия и утверждение теоремы 1 для функций (0.4) выполняются тогда и только тогда, когда они выполняются для функций (21), за исключением тривиальных случаев $r = \rho = 0$ и $r = \rho = 1$. Поэтому при доказательстве теоремы 1 без уменьшения общности можно ограничиться рассмотрением случая, когда функции (0.4) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, числа

$$f_1(\alpha), \ldots, f_\rho(\alpha) \tag{22}$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$, а $deg\, tr^0_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha),\ldots,f_\rho(\alpha)\} = l'$, где l' — степень однородной трансцендентности совокупности чисел (0.13).

При этих предположениях для произвольного $t \in \mathbb{N}$ каждое число из совокупности $f_k^{(j)}(\alpha)$, $k = 1,\ldots,m$; $j = 0,1,\ldots,t$ единственным образом можно представить в виде

$$f_k^{(j)}(\alpha) = c_{k,j,1}f_1(\alpha) + \cdots + c_{k,j,\rho}f_\rho(\alpha), \quad c_{k,j,i} \in \mathbb{K}, \tag{23}$$

$$k = 1,\ldots,m;\ j = 0,1,\ldots,t.$$

Для дальнейшего необходимо оценить размеры коэффициентов линейных комбинаций (23), а также величину их общих знаменателей, т. е. чисел $d_t \in \mathbb{N}$, таких что $d_t\, c_{k,j,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $k = 1,\ldots,m$; $\lambda = 1,\ldots,\rho$; $j = 0,1,\ldots,t$.

Лемма 7. *Пусть совокупность $\mathbb{K}E$-функций (0.4), $m \geqslant 2$, составляет решение системы (0.5), $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, $h = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$, ранг совокупности чисел (0.13) над полем $\mathbb{K}$ равен ρ, а числа (22) линейно независимы над $\mathbb{K}$. Тогда при любом $t \in \mathbb{N}$ для размеров коэффициентов линейных комбинаций (23) и наименьшего общего знаменателя d_t этих коэффициентов справедливы оценки*

$$\overline{|c_{k,j,\lambda}|} = O(c^t t^{(m+1)t}), \quad k = 1,\ldots,m;\ \lambda = 1,\ldots,\rho;\ j = 0,1,\ldots,t; \tag{24}$$

$$d_t = O(c^t t^{hm^2t}), \tag{25}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от t.

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом фиксированном k, $1 \leqslant k \leqslant m$ числа $f_k^{(j)}(\alpha)$, $j = 0,1,\ldots,t$ можно представить в виде линейных комбинаций чисел $f_k^{(j)}(\alpha)$, $j = 0,1,\ldots,j_0$, с коэффициентами из $\mathbb{K}$, так, что для размеров этих коэффициентов также выполняется оценка (24), наименьший общий знаменатель этих коэффициентов не превосходит $O(c^t t^{hmt})$, а j_0 не зависит от t. Для доказательства последнего утверждения заметим, что при условиях леммы всякая функция $f_k(z)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$p_m(z)y^{(m)} + p_{m-1}(z)y^{(m-1)} + \cdots + p_0(z)y = 0, \tag{26}$$

$$p_i(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad i = 0,1,\ldots,m.$$

Многими математиками (см., например, [59:1, стр. 142, 143], [1:1, гл. 16]) использовался тот факт, что если аналитическая функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, то её коэффициенты степенного разложения удовлетворяют линейному разностному уравнению. Для получения такого уравнения разложим функцию $f_k(z)$, а также многочлены $p_i(z)$ в степенные ряды по степеням $z-\alpha=\zeta$:

$$f_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\zeta^\nu;\qquad p_i(z)=p_{i,0}+p_{i,1}\zeta+\cdots+p_{i,\mu}\zeta^\mu;$$

$$\mu=\max\deg p_i,\quad p_{i,\lambda}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\quad \Omega_1=\max_{i,\lambda}\overline{|p_{i,\lambda}|},\quad \Omega_2=\min_{p_{i,\lambda}\neq 0}\overline{|p_{i,\lambda}|}.$$

При подстановке этих разложений в равенство (26) получим линейные уравнения над $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, связывающие числа $a_\nu=f_k^{(\nu)}(\alpha)/\nu!$. Рассмотрим эти уравнения более подробно. Приравняем в равенстве (26) коэффициенты при степенях $\zeta^{\nu-m}$, записав, для большей наглядности, в отдельные столбцы коэффициенты, получающиеся из произведений $p_i(z)f_k^{(i)}(z)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
p_{m,0}\nu\ldots(\nu-m+1)a_\nu & & p_{m-1,0}(\nu-1)\ldots(\nu-m+1)a_{\nu-1} & & & & p_{0,0}\ a_{\nu-m} \\
p_{m,1}(\nu-1)\ldots(\nu-m)a_{\nu-1} & + & p_{m-1,1}(\nu-2)\ldots(\nu-m)a_{\nu-2} & + & \ldots & + & p_{0,1}\ a_{\nu-m-1} \\
\ldots & & \ldots & & & & \ldots \\
p_{m,\mu}(\nu-\mu)\ldots(\nu-\mu-m+1)a_{\nu-\mu} & & p_{m-1,\mu}(\nu-\mu-1)\ldots(\nu-\mu-m+1)a_{\nu-\mu-1} & & & & p_{0,\mu}\ a_{\nu-m-\mu}
\end{array} = 0. \qquad (27)$$

При этом можно считать, что $a_\nu=0$ для всех $\nu<0$. В левой части равенства (27) приведём подобные члены и обозначим $q_s=q_s(\nu)$ коэффициенты при величинах $a_{\nu-s}$, $s=0,1,\ldots,m+\mu$. Очевидно, что $q_s\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[\nu]$, $\deg_\nu q_s\leqslant m$. Докажем, что найдётся $q_s(\nu)\not\equiv 0$. Выберем индекс i наибольшим из возможных так, чтобы $p_i(z) \not\equiv 0$ и обозначим его i_0. Пусть p_{i_0,λ_0} — коэффициент при наименьшей степени при разложении многочлена $p_{i_0}(z)$ по степеням $\zeta = z - \alpha$, отличный от нуля. Тогда $p_{i_0,\lambda_0}\nu^{i_0}$ будет одночленом старшей степени по ν в многочлене $q_{m-i_0+\lambda_0}(\nu)$ и, следовательно, $q_{m-i_0+\lambda_0}(\nu) \not\equiv 0$. Таким образом, не все многочлены $q_s(\nu)$ тождественно равны нулю. Возьмём значение s наименьшим из возможных так, чтобы $q_s(\nu) \not\equiv 0$, и обозначим его s_0. Тогда $s_0 \leqslant m$, а $q_{s_0}(\nu) \neq 0$ при всех $\nu \geqslant \nu_0 = m + s_0 + m\Omega_1/\Omega_2$. Уравнение (27) запишется в виде

$$q_{s_0}(\nu)a_{\nu-s_0} + q_{s_0+1}(\nu)a_{\nu-s_0-1} + \cdots + q_{m+\mu}(\nu)a_{\nu-m-\mu} = 0. \tag{28}$$

Степень многочлена $q_{s_0}(\nu)$ может быть меньше, чем степень многочлена $q_{s_0+i}(\nu),\ i \geqslant 1$, но не более, чем на m. Поэтому

$$\left|\frac{q_{s_0+i}(\nu)}{q_{s_0}(\nu)}\right| \leqslant c_1\nu^m. \tag{29}$$

Из уравнения (28) можно последовательно выразить величины $a_{\nu_0-s_0}$, $a_{\nu_0-s_0+1}, \ldots$ в виде линейных комбинаций чисел $a_{\nu_0-s_0-1}, \ldots, a_0$ (вообще говоря, линейно зависимых над $\mathbb{K}$):

$$a_\nu = A_{\nu,\nu_0-s_0-1}a_{\nu_0-s_0-1} + \cdots + A_{\nu,0}a_0, \quad \nu = \nu_0 - s_0, \ldots, t. \tag{30}$$

Для коэффициентов $A_{\nu,i}$, как следует из неравенства (29), будут справедливы оценки

$$A_{\nu,i} \leqslant c_2^\nu(\nu!)^m.$$

Кроме того, из уравнения (28) получаем, что коэффициенты $A_{\nu,i},\ i = 0, \ldots, \nu_0 - s_0 - 1;\ \nu = \nu_0 - s_0, \ldots, t$ станут целыми алгебраическими, если их умножить на целое алгебраическое число

$$\omega(t) = \prod_{\nu=\nu_0-s_0}^{t} q_{s_0}(\nu).$$

Следовательно, наименьший общий знаменатель d_t^* коэффициентов $A_{\nu,i}$ линейных комбинаций (30) является делителем $\mathrm{Norm}(\omega(t))$ и поэтому

$$d_t^* \leqslant \mathrm{Norm}(\omega(t)) \leqslant c_3^t t^{hmt}.$$

Учитывая замечание в начале доказательства леммы и то, что $a_\nu = f_k^{(\nu)}(\alpha)/\nu!$, отсюда получаем оценки (24) и (25). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть совокупность $\mathbb{K}E$-функций (0.4), $m \geqslant 2$, составляет решение системы (0.5) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$, $h = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$. Тогда ранг ρ над полем $\mathbb{K}$ совокупности чисел (0.13) удовлетворяет неравенству $\rho \geqslant m/h$, а если $\theta \notin \mathbb{R}$, то неравенству $\rho \geqslant 2m/h$. В частности, если $\mathbb{K}$ — мнимое квадратичное поле, то $\rho = m$.*

Доказательство. Согласно лемме 5, $1 \leqslant \rho \leqslant m$. Если $\rho = m$, то всё доказано. Пусть $1 \leqslant \rho < m$, а числа (22) линейно независимы над $\mathbb{K}$.

Заменив в лемме 3 ε на $\varepsilon_1 = \varepsilon/(3m^2h)$, сконструируем линейную форму R_1. Рассмотрим, как это сделано перед формулировкой леммы 2, $m(t_1+1)$ линейных форм $R_k^{(j)}(z,\bar{y})$, где $t_1 = q(m-1)m/2 + [\varepsilon_1 n] + p$. Подставив в эти формы вместо z число α, получим $m(t_1+1)$ числовых линейных форм $R_k^{(j)}(\alpha, \bar{f}(\alpha))$ (10) от чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_m^{(t_1)}(\alpha)$, для которых справедливы оценки (16) и (17). Подставим в линейные числовые формы (10) вместо чисел $f_1'(\alpha), \ldots, f_m^{(t_1)}(\alpha)$ их выражения в виде линейных комбинаций чисел (22) с коэффициентами из $\mathbb{K}$:

$$f_k^{(j)}(\alpha) = c_{k,j,1} f_1(\alpha) + \cdots + c_{k,j,\rho} f_\rho(\alpha), \quad k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, t_1. \tag{31}$$

Согласно второму утверждению леммы 2, из полученных таким образом $m(t_1+1)$ числовых линейных форм от чисел (0.7) можно выбрать m линейно независимых. Обозначим эти линейные формы

$$\hat{L}_k = \hat{a}_{k,1}\, f_1(\alpha) + \cdots + \hat{a}_{k,m}\, f_m(\alpha), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, что формы $\hat{L}_i$ численно совпадают с соответствующими формами $R_k^{(j)}(\alpha, \bar{f}(\alpha))$, а размеры коэффициентов $\hat{a}_{k,\lambda}$ не превосходят произведения максимума размеров коэффициентов линейных форм $R_k^{(j)}(\alpha, \bar{y})$ на t_1 и на максимум величин (24), где $t = t_1$, т. е.

$$\overline{|\hat{a}_{k,\lambda}|} = O(n^{(1+\varepsilon/4)n}) c_1^n n^{\varepsilon_1(m+1)n} = O(c_1^n n^{(1+\varepsilon/4+\varepsilon(m+1)/(3m^2))n}) =$$
$$= O(c_1^n n^{(1+\varepsilon/2)n}).$$

Наименьший общий знаменатель коэффициентов $\hat{a}_{k,\lambda}$ не превосходит произведения общего знаменателя d_{t_1} чисел $c_{k,j,i}$ из равенства (31) на a^{σ_0}, где $a = \operatorname{den}\alpha$, а σ_0 — наибольшая степень многочленов $P_{k,i}^{(j)}(z)$, $\sigma_0 \leqslant$

$n+q(m-1)=O(n)$. Из оценок (25), положив в них $t=t_1$, найдём, что коэффициенты линейных форм $\hat{L}_k$ можно сделать целыми алгебраическими, если умножить эти формы на число, не превосходящее

$$O(c_2^n n^{\varepsilon_1 m^2 hn}) = O(c_2^n n^{\varepsilon n/3)}).$$

Обозначим полученные таким образом линейные формы

$$L_k = \sum_{\lambda=1}^{m} a_{k,\lambda} f_\lambda(\alpha), \quad a_{k,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k=1,\ldots,m.$$

Тогда из найденных оценок и (16) следуют оценки

$$L_k = O(n^{-(m-1-\varepsilon)n}), \qquad k=1,\ldots,m,$$
$$\overline{|a_{k,\lambda}|} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \qquad k,\lambda=1,\ldots,m,$$

причём они сохранятся, если все коэффициенты степенного ряда $L_k(z)$ и число α заменить на сопряжённые числа из поля $\mathbb{K}_{[j]}$, сопряжённого полю $\mathbb{K}$, $j=1,\ldots,h$.

Далее дословно повторяем соответствующие рассуждения леммы 17 гл. 3 книги [36:12]. Лемма 8 доказана.

Пусть $\mathbb{W}$ — произвольное кольцо, A — произвольное множество из $\mathbb{W}$. Для любого $N\in\mathbb{N}$ обозначим $L_N^0(A)$ совокупность произведений степеней

$$u_1^{k_1}\ldots u_n^{k_n}, \qquad n\leqslant N, \quad k_1+\cdots+k_n=N,$$

где при каждом возможном n числа $(k_1,\ldots,k_n)$ пробегают всевозможные наборы из n натуральных чисел, удовлетворяющих указанному равенству, а $(u_1,\ldots,u_n)$ пробегают всевозможные наборы из n элементов, принадлежащих множеству A.

Лемма 9. *При условиях леммы 6*

$$rang_{\mathbb{V}} L_N^0(B) = rang_{\mathbb{V}} L_N^0(A),$$

а если множество A конечно, $deg\, tr_{\mathbb{V}}^0 A = l$, $l\geqslant 1$, то существуют положительные постоянные c_1 и c_2, зависящие только от множества A и поля $\mathbb{V}$, такие, что выполняются неравенства

$$c_1 N^{l-1} \leqslant rang_{\mathbb{V}} L_N^0(B) \leqslant c_2 N^{l-1}.$$

Лемма 9 следует из леммы 6 настоящей работы и леммы 6 гл. 4 книги [36:12].

§2. Доказательство теоремы 1

Достаточно рассмотреть лишь однородный случай, так как общий сводится к однородному добавлением функции $f_0(z) \equiv 1$. При этом, как уже установлено ранее, без уменьшения общности можно ограничиться случаем, когда числа (22) линейно независимы над $\mathbb{K}$, функции (0.4) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, а $deg\ tr^0_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \ldots, f_\rho(\alpha)\} = l'$, где l' — степень однородной трансцендентности совокупности чисел (0.13). Докажем, что $l' \leqslant l$. При $l' = 0$ это неравенство справедливо. Если же $l' \geqslant 1$, то выберем среди чисел (22) l' однородно алгебраически независимых. По лемме 19 гл. 3 книги [36:12] соответствующие им функции из множества (0.4) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Следовательно, $l' \leqslant l$.

Теперь докажем, что $l \leqslant l'$. Если $l = 0$, то неравенство справедливо. Допустим, что $l \geqslant 1$. Возьмём в леммах 6 и 9 в качестве $\mathbb{V}$, A и B, соответственно, поле $\mathbb{C}(z)$, множество функций (0.4) и множество функций (20). Тогда ввиду наличия системы (0.5) условия этих лемм выполняются и, следовательно, число

$$r^0_N = rang_{\mathbb{C}(z)} L^0_N(\{f_1(z), \ldots, f_m(z)\}) =$$

$$= rang_{\mathbb{C}(z)} L^0_N(\{f_1(z), \ldots, f_m(z), \ldots, f_1^{(k)}(z), \ldots, f_m^{(k)}(z), \ldots\})$$

удовлетворяет неравенству

$$c_1 N^{l-1} \leqslant r^0_N \leqslant c_2 N^{l-1}, \tag{32}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, не зависящие от N. Теперь возьмем в леммах 6 и 9 в качестве $\mathbb{V}$, A, B и l, соответственно, поле $\mathbb{K}$, множество чисел (0.7), множество чисел (0.13) и l'. Поскольку всякое число из (0.13) является линейной комбинацией чисел (0.7), то условия этих лемм выполняются и, следовательно, для числа

$$\rho^0_N = rang_{\mathbb{K}} L^0_N(\{f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\}) =$$

$$= rang_{\mathbb{K}} L^0_N(\{f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha), \ldots, f_1^{(k)}(\alpha), \ldots, f_m^{(k)}(\alpha), \ldots\})$$

справедливы оценки

$$c_3 N^{l'-1} \leqslant \rho^0_N \leqslant c_4 N^{l'-1}, \tag{33}$$

где c_3 и c_4 — положительные постоянные, не зависящие от N. Согласно лемме 18 гл. 3 книги [36:12], совокупность функций $L_N^0(\{f_1(z), \ldots, f_m(z)\})$ составляет решение системы вида (0.5). Отсюда, учитывая леммы 6, 9 и лемму 8, в которой положим $m = r_N^0$, имеем

$$\rho_N^0 \geqslant \frac{r_N^0}{h}. \tag{34}$$

Из неравенств (32), (33) и (34) следует, что

$$\frac{c_1}{h} N^{l-1} \leqslant \rho_N^0 \leqslant c_4 N^{l'-1}$$

при всех достаточно больших N, откуда $l \leqslant l'$. Теорема 1 доказана.

Следует отметить, что если теорему 1 переформулировать для случая E-функции $f(z)$, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению порядка m, то число k_0 из замечания к теореме 1 явно выражается через характеристики коэффициентов этого уравнения. Как следует из равенства (30) в доказательстве леммы 7, $k_0 \leqslant m - 1 + m\Omega_1/\Omega_2$. Эта оценка точна, например, для функций $(z-1)^n e^z$, удовлетворяющих уравнениям $(z-1)y_n' = (z-1+n)y_n$, где $n \in \mathbb{Z}^+, \alpha = m = \Omega_2 = 1$, $k_0 = \Omega_1 = n$.

Теперь докажем, что для E-функций в смысле определения 3 теорема 1 также следует из теоремы IV. Для этого понадобятся две леммы.

Лемма 10 [36:12, гл. 4, лемма 1]. *Пусть аналитические функции (0.4), $m \geqslant 2$, имеют ранг r, $1 \leqslant r \leqslant m-1$, над $\mathbb{C}(z)$, а $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда, изменив при необходимости нумерацию функций (0.4), имеем*

$$f_j(z) = \sum_{i=1}^{r} B_{j,i}\, f_i(z), \qquad B_{j,i} \in \mathbb{C}(z), \quad j = r+1, \ldots, m,$$

причём точка $z = \alpha$ не является полюсом ни для одной из функций $B_{j,i}$.

Лемма 11. *Если функции (0.4) и $F(z)$ — аналитические, причём*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m} A_i\, f_i(z), \qquad A_i \in \mathbb{A}[z], \tag{35}$$

то для любых $\alpha \in \mathbb{A}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ значение $F^{(k)}(\alpha)$ есть конечная линейная комбинация с коэффициентами из $\mathbb{A}$ чисел (0.13).

Доказательство следует из разложения левой и правой частей равенства (35) в ряд Тейлора с центром в точке $z = \alpha$.

Ввиду леммы 10 функции (0.4) в теореме 1 можно считать линейно независимыми над $\mathbb{C}(z)$. Из равенства (0.11) следует, что значения функций (0.4) в точке $z = \alpha$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbb{A}$ чисел $g_1(\alpha), \dots, g_m(\alpha)$. Дифференцируя нужное число раз равенство (0.11) и учитывая, что функции $g_1(z), \dots, g_m(z)$ удовлетворяют системе вида (0.5) без ненулевых особых точек, аналогично получаем, что все числа $f_i^{(k)}(\alpha)$ также являются линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbb{A}$ чисел $g_1(\alpha), \dots, g_m(\alpha)$. Следовательно,

$$\deg tr^{\circ}_{\mathbb{Q}}\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha), \dots, f_1^{(k)}(\alpha), \dots, f_m^{(k)}(\alpha), \dots\} \leqslant$$

$$\leqslant \deg tr^{\circ}_{\mathbb{Q}}\{g_1(\alpha), \dots, g_m(\alpha)\} = \deg tr_{\mathbb{C}(z)}\{g_1(z), \dots, g_m(z)\} = l.$$

Так как функции (0.4) можно считать линейно независимыми, то в (0.11) матрица M невырождена. Следовательно,

$$(g_1(z), \dots, g_m(z))^T = M^{-1} \cdot (f_1(z), \dots, f_m(z))^T. \tag{36}$$

Отсюда

$$l = \deg tr_{\mathbb{C}(z)}\{g_1(z), \dots, g_m(z)\} = \deg tr_{\mathbb{C}(z)}\{f_1(z), \dots, f_m(z)\}.$$

Запишем (36) как

$$(g_1(z), \dots, g_m(z))^T = \frac{1}{|M|} M^* \cdot (f_1(z), \dots, f_m(z))^T, \tag{37}$$

где $M^* \in \mathbb{A}[z]$ — матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы M. Если α — нуль кратности s определителя $|M|$, то ввиду (37) все компоненты вектора $M^* \cdot (f_1(z), \dots, f_m(z))^T$ должны иметь равные нулю в точке $z = \alpha$ производные вплоть до порядка s. Остальные производные согласно лемме 11 в точке $z = \alpha$ являются конечными линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbb{A}$ чисел (0.13). Поэтому

$$l \leqslant \deg tr^{\circ}_{\mathbb{Q}}\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha), \dots, f_1^{(k)}(\alpha), \dots, f_m^{(k)}(\alpha), \dots\},$$

что и доказывает утверждение теоремы 1.

§3. Доказательство теоремы 2

Достаточно рассмотреть лишь однородный случай, так как неоднородный сводится к однородному добавлением функции $f_0(z) \equiv 1$. Допустим, что $deg\ tr^0\{f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha)\} = l'$, $0 \leqslant l' < l$. Возьмем любые l' однородно алгебраически независимых числа из (0.9) и присоединим к ним $l - l'$ чисел из множества (0.7) так, чтобы получился набор l однородно алгебраически независимых чисел. Обозначим этот набор

$$f_{i_1}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha). \tag{38}$$

Тогда соответствующие ему функции (0.14) будут однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из множества (0.8), не входящая во множество (0.14). Тогда $f(z)$ должна однородно алгебраически зависеть от функций (0.14). Рассмотрим связывающее их неприводимое алгебраическое уравнение (0.15), где P содержит хотя бы одну из функций (0.14), не принадлежащую (0.8) (без ограничения общности можно считать, что это есть $f_{i_1}(z)$).

Если в этом уравнении положить $z = \alpha$, то мы получим уравнение, связывающее $f(\alpha)$ и числа (38). Представим P как многочлен от переменной $f_{i_1}(z)$ с коэффициентами $Q_j \in \mathbb{Z}[z, f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z), f(z)]$, однородными по $f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z), f(z)$:

$$P = Q_s\, f_{i_1}^s(z) + \dots + Q_1\, f_{i_1}(z) + Q_0,$$

$$deg_{\bar{f}} Q_j \leqslant s - j,\ deg_z Q_j \leqslant t,\ H(Q_j) \leqslant h,\ j = 0, 1, \dots, s.$$

Если не все Q_j при подстановке $z = \alpha$ обращаются в нуль, то $f_{i_1}(\alpha)$ однородно алгебраически зависит от $f(\alpha), f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha)$ и, следовательно, $deg\ tr^0\{f(\alpha), f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha)\} = deg\ tr^0\{f_{i_1}(\alpha), f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha)\} = l$. Но тогда числа $f(\alpha), f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha)$ однородно алгебраически независимы и $deg\ tr^0\{f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha)\} > l'$, что противоречит допущению. Следовательно,

$$Q_j(\alpha, f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha), f(\alpha)) = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, s.$$

Многочлены $Q_j(z, f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z), f(z))$ взаимно просты в совокупности и среди них по крайней мере два не равны тождественно нулю. Если хотя бы один из них не зависит от $f(z)$, получаем противоречие с однородной алгебраической независимостью чисел (38), так как коэффициентами при различных произведениях степеней переменных $f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)$ в Q_j будут многочлены из $\mathbb{Z}[z]$ степени и высоты, не превосходящих, соответственно, s и h, и они не могут обратиться в нуль при подстановке $z = \alpha$.

Если $l = 1$, то доказательство теоремы уже завершено, так как в этом случае $Q_j = A_j f^{k_j}(z)$, $A_j \in \mathbb{Z}[z]$, и при некотором j $k_j = 0$ в силу взаимной простоты многочленов Q_j.

Пусть теперь $l \geqslant 2$ и все (тождественно не равные нулю) многочлены Q_j зависят от $f(z)$. Увеличим для удобства индекс j на 1 и будем рассматривать Q_j как многочлены от $f(z)$ с коэффициентами $A_{j,k} \in \mathbb{Z}[z, f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)]$:

$$Q_j = A_{j,s} f^s(z) + \dots + A_{j,1} f(z) + A_{j,0},$$

$$deg_{\bar{f}} A_{j,k} \leqslant deg_{\bar{f}} Q_j - k,\ deg_z A_{j,k} \leqslant t,\ H(A_{j,k}) \leqslant h,$$

$$j = 1, \dots, r, \quad r \leqslant s + 1.$$

Построим систему результантов многочленов Q_j. Результанты $D_1, \dots,$ D_n представляют из себя однородные многочлены (см. [7:1, ч. II, стр. 15]), принадлежащие $\mathbb{Z}[z, f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)]$. Поскольку $(D_1, \dots, D_n) \equiv 0(Q_1, \dots, Q_r)$ (см. [7:1, ч. II, стр. 8]), то многочлены Q_j могут иметь общий корень $(\alpha, f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha), f(\alpha))$ лишь в случае, если $(\alpha, f_{i_2}(\alpha),$ $\dots, f_{i_l}(\alpha))$ — общий корень многочленов $D_1, \dots, D_n$. Ввиду того, что многочлены Q_j взаимно просты в совокупности, не все результанты тождественно равны нулю как многочлены от переменных $z, f_{i_2}(z), \dots,$ $f_{i_l}(z)$ и можно считать, что $D_1 \not\equiv 0, \dots, D_n \not\equiv 0$ $n \geqslant 1$. Представим $D_1, \dots, D_n$ как многочлены от переменных $f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[z]$. Поскольку числа $f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha)$ однородно алгебраически независимы, то $(\alpha, f_{i_2}(\alpha), \dots, f_{i_l}(\alpha))$ может быть корнем многочленов $D_1, \dots, D_n$ лишь в случае, если все их коэффициенты при различных произведениях степеней переменных $f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)$ имеют α своим корнем.

Для завершения доказательства теоремы осталось оценить сверху минимальные высоту и степень по z этих коэффициентов. Без ограничения общности можно считать, что $deg_{f(z)} Q_1 = \max\ deg_{f(z)} Q_i =$ $= s^* \leqslant s$. Тогда, согласно [7:1, § 77, замечание 1], для построения системы результантов $D_1, \dots, D_n$ надо рассмотреть два многочлена от

$f(z)$:

$$Q_1 = A_{1,s^*}f(z)^{s^*} + \dots + A_{1,1}f(z) + A_{1,0},$$

$$G_v = v_2Q_2 + \dots + v_rQ_r = (v_2A_{2,s^*} + \dots + v_rA_{r,s^*})f(z)^{s^*} + \dots +$$

$$+(v_2A_{2,1} + \dots + v_rA_{r,1})f(z) + (v_2A_{2,0} + \dots + v_rA_{r,0}),$$

$$A_{j,k} \in \mathbb{Z}[z, f_{i_2}(z), \dots, f_{i_l}(z)], \quad j = 1, \dots, r,\ k = 0, 1, \dots, s^*$$

с неопределёнными $v_2, \dots, v_r$. Результант R многочленов Q_1 и G_v есть линейная комбинация произведений степеней переменных $v_2, \dots, v_r$. Коэффициенты при этих произведениях и есть многочлены $D_1, \dots, D_n$. Легко видеть, что $deg_z D_i \leqslant 2s^*t \leqslant 2st$. Высоту многочленов $D_1, \dots, D_n$ оценим следующим образом. Введём обозначения $z_1 = f_1(z), \dots, z_m = f_m(z)$. Если $A = \|a_{ij}\|$ — матрица, определитель которой равен R, то $a_{ij}, R \in \mathbb{Z}[z, z_{i_2}, \dots, z_{i_l}, v_2, \dots, v_r]$. Пусть $Cz^k z_{i_2}^{k_2} \dots z_{i_l}^{k_l} v_2^{n_2} \dots v_r^{n_r}$ — произвольный одночлен многочлена R, такой, что $|C| = H(R)$. Тогда

$$H(D_i) \leqslant |C| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{l+r-1}} \Big| \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|z_{i_2}|=1} \dots \oint\limits_{|v_r|=1} \frac{R(z, z_{i_2}, \dots, v_r)}{z^{k+1} z_{i_2}^{k_2+1} \dots v_r^{n_r+1}} dz dz_{i_2} \dots dv_r \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|z|=1, \dots, |v_r|=1} |R(z, z_{i_2}, \dots, v_r)|.$$

Пользуясь неравенством Адамара (см. [24:1, стр. 155]), отсюда получим

$$H(D_i) \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{2s^*} \sum_{j=1}^{2s^*} \max_{|z|=1, \dots, |v_r|=1} |a_{ij}|^2}.$$

Модуль многочлена a_{ij} при $|z| = 1, |z_{i_2}| = 1, \dots, |v_r| = 1$ оценим числом одночленов в a_{ij}, умноженным на h. Пусть $\varepsilon = 1 - \delta^s_{\varkappa}$, $\varkappa = deg_{\bar{f}} Q_1$, $\varepsilon \in \{0; 1\}$. Тогда, если $1 \leqslant i \leqslant s^*$, то ввиду свойств биномиальных коэффициентов (см., например, [18:1, п. 21.5-1])

$$\sum_{j=1}^{2s^*} \max_{|z|=1, \dots, |v_r|=1} |a_{ij}|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s-\varepsilon} h^2 (t+1)^2 \binom{k+l-2}{l-2}^2 <$$

$$< h^2(t+1)^2 \Big(\sum_{k=0}^{s-\varepsilon} \binom{k+l-2}{l-2} \Big)^2 = h^2(t+1)^2 \binom{s-\varepsilon+l-1}{l-1}^2 <$$

$$< h^2(t+1)^2 4^{s-\varepsilon+l-2}.$$

Если $s^*+1 \leqslant i \leqslant 2s^*$, то, так как можно считать, что $deg_{\bar{f}} A_{j,k} \leqslant s-j-k$,

$$\sum_{j=1}^{2s^*} \max_{|z|=1,\dots,|v_r|=1} |a_{ij}|^2 \leqslant h^2(t+1)^2 \sum_{p=0}^{s+\varepsilon-1} \Big(\sum_{\nu=0}^{p} \binom{\nu+l-2}{l-2} \Big)^2 =$$

$$= h^2(t+1)^2 \sum_{p=0}^{s+\varepsilon-1} \binom{p+l-1}{l-1}^2 < h^2(t+1)^2 \Big(\sum_{p=0}^{s+\varepsilon-1} \binom{p+l-1}{l-1} \Big)^2 =$$

$$= h^2(t+1)^2 \binom{s+\varepsilon+l-1}{l}^2 < h^2(t+1)^2 4^{s+\varepsilon+l-2}.$$

Таким образом, $H(D_i) < (h(t+1)2^{s+l-2})^{2s}$.

В силу полученных оценок $deg\ \alpha \leqslant 2st$, а размер и знаменатель числа α не превосходят величины $H(D_i)+1 \leqslant (h(t+1)2^{s+l-2})^{2s}$.

Количество элементов α множества Λ оценим, воспользовавшись тем, что число всевозможных уравнений (0.15) не превосходит $\binom{m}{l+1} \leqslant 2^{m-1}$, каждое уравнение однозначно определяет систему результантов $D_1, \dots, D_n$, а всякой такой системе соответствует не более чем $2st$ различных значений α. Теорема 2 доказана.

Глава 2. Свойства дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют E-функции

§1. Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле алгебраических чисел, $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = h$. Поля, сопряжённые с $\mathbb{K}$, будем обозначать $\mathbb{K}_{[j]}$, $j = 1, \ldots, h$, $\mathbb{K}_{[1]} = \mathbb{K}$. Если α, $L(z_1, \ldots, z_m)$, $P(z_1, \ldots, z_m)$, $f(z)$ есть, соответственно, число из $\mathbb{K}$, линейная форма, многочлен и формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{K}$, то через $\alpha_{[j]}$, $L_{[j]}(z_1, \ldots, z_m)$, $P_{[j]}(z_1, \ldots, z_m)$, $f_{[j]}(z)$, соответственно, будем обозначать число, линейную форму, многочлен и формальный степенной ряд, сопряжённые с ними относительно поля $\mathbb{K}_{[j]}$ (см. [36:12, гл. 11, §2]). Если $z_{m+1} = 1$, то линейную форму $L(z_1, \ldots, z_{m+1})$ будем называть линейной неоднородной формой от переменных $z_1, \ldots, z_m$.

Лемма 1. *Пусть совокупность формальных степенных рядов*

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} z^n, \quad a_{k,n} \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, m,\ m \geqslant 1,$$

связана алгебраическим уравнением

$$P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) = 0,$$

$$P = P(z, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}[z, z_1, \ldots, z_m],\ P \not\equiv 0.$$

Тогда: 1) ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ связаны также алгебраическим уравнением

$$P^*(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) = 0,$$

$$P^* = P^*(z, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z, z_1, \ldots, z_m],\ P^* \not\equiv 0,$$

причём если некоторый числовой коэффициент в многочлене P^* отличен от нуля, то соответствующий коэффициент в P также отличен от нуля;

2) для любого такого многочлена P^* и для любого j, $1 \leqslant j \leqslant h$,

$$P^*_{[j]}(z, (f_1)_{[j]}(z), \ldots, (f_m)_{[j]}(z)) = 0.$$

Доказательство. Будем рассматривать все ненулевые числовые коэффициенты многочлена P как неопределённые. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2 §2 гл. 3 книги [36:12], получим, что эти неопределённые коэффициенты удовлетворяют системе из конечного числа линейных однородных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Поэтому искомые коэффициенты могут быть выбраны из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, и первое утверждение леммы доказано. Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что при повторении прежних рассуждений для сопряжённых рядов $(f_1)_{[j]}(z), \ldots, (f_m)_{[j]}(z)$ мы получим систему линейных уравнений с коэффициентами, сопряжёнными с прежними. Следовательно, каждое её решение также будет сопряжённым с прежним. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{K}E$-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (0.16) с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$, взаимно простыми в совокупности, и не удовлетворяет никакому линейному дифференциальному уравнению меньшего порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ (или, при $Q \equiv 0$, — никакому линейному однородному дифференциальному уравнению меньшего порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$). Тогда:*

1) коэффициенты уравнения (0.16) определены однозначно с точностью до множителя из $\mathbb{C}$ и могут быть выбраны из $\mathbb{K}[z]$;

2) при выборе коэффициентов уравнения (0.16) из $\mathbb{K}[z]$ всякая сопряжённая функция $f_{[j]}(z)$, $1 \leqslant j \leqslant h$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(Q_m)_{[j]}y^{(m)} + (Q_{m-1})_{[j]}y^{(m-1)} + \cdots + (Q_0)_{[j]}y = (Q)_{[j]}. \qquad (1)$$

Доказательство. При условиях леммы функция $f(z)$, очевидно, линейно независима над $\mathbb{C}[z]$ с $f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$ и 1, а в однородном случае — с $f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$. Поэтому рациональные функции Q_k/Q_m определяются однозначно, а многочлены $Q, Q_0, \ldots, Q_m$ — с точностью до множителя из $\mathbb{C}$. Отсюда, применяя лемму 1, получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2, а $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Тогда существуют числа $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}^+$, такие, что для произвольной линейной неоднородной (в однородном случае — линейной) формы $L(z_1, \ldots, z_m) \not\equiv 0$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ размера H и произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |L_{[j]}(f_{[j]}^{(r_1)}(\xi_{[j]}), \ldots, f_{[j]}^{(r_m)}(\xi_{[j]}))| > bH^{\delta}, \qquad (2)$$

где $\delta = -m - \varepsilon$ (в однородном случае $\delta = 1 - m - \varepsilon$), $b > 0$ — постоянная, не зависящая от H.

Доказательство. Начало рассуждений является альтернативным и более формальным вариантом соответствующих рассуждений при доказательстве леммы 1.7. Разложим функцию $f(z)$, а также многочлены Q_k в степенные ряды по степеням $\zeta = z - \xi$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu; \qquad Q_k = q_{k,0} + q_{k,1}\zeta + \dots + q_{k,\mu}\zeta^\mu;$$

$$Q = q_0 + q_1\zeta + \dots + q_\omega \zeta^\omega,\ q_j, q_{k,l} \in \mathbb{K},\ \mu = \max \deg Q_k.$$

При подстановке этих разложений в уравнение (0.16) и приравнивании в нём коэффициентов при степенях $\zeta^{\nu-m}$ получается линейное рекуррентное соотношение для Тейлоровских коэффициентов a_ν функции $f(z)$. Чтобы найти явный вид этого соотношения, заметим, что применение дифференциального оператора $q_{k,l}\zeta^l(d/d\zeta)^k$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant \mu$, к члену ряда $a_{\nu-s}\zeta^{\nu-s}$, $s \in \mathbb{Z}$, даёт одночлен степени $\nu-s-k+l$. Ввиду очевидных оценок $\nu-s-m \leqslant \nu-s-k+l \leqslant \nu-s+\mu$, для получения одночлена, содержащего $\zeta^{\nu-m}$, необходимо условие $0 \leqslant s \leqslant m+\mu$. При выполнении этого условия одночлен степени $\nu-m$ можно получить из члена ряда $a_{\nu-s}\zeta^{\nu-s}$, применяя любой дифференциальный оператор $q_{m-j,s-j}\zeta^{s-j}(d/d\zeta)^{m-j}$, где ввиду $s-j \geqslant 0$, $m-j \geqslant 0$ $0 \leqslant j \leqslant \min(s,m)$. Коэффициент у полученного одночлена будет равен $a_{\nu-s}q_{m-j,s-j}(\nu-s)\dots(\nu-s-m+j+1)$, если $j \leqslant m-1$, и $a_{\nu-s}q_{0,s-m}$, если $j = m$ (в этом случае $s \geqslant m$). Складывая эти коэффициенты, находим искомое рекуррентное соотношение:

$$\sum_{s=0}^{m-1} a_{\nu-s} \sum_{j=0}^{s} q_{m-j,s-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (\nu-s-i) +$$

$$+ \sum_{s=m}^{m+\mu} a_{\nu-s} \left(\sum_{j=0}^{m-1} q_{m-j,s-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (\nu-s-i) + q_{0,s-m} \right) = q_{\nu-m}. \tag{3}$$

Если положить $a_\nu = 0$ при $\nu < 0$, $\quad q_{k,l} = 0$ при $l < 0$ и $l > \mu$, $\quad q_\nu = 0$ при $\nu < 0$ и $\nu > \omega$, то равенство (3) справедливо для всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Пусть s_0 — наименьшее из s, таких, что $\sum_{j=0}^{s} |q_{m-j,s-j}| \neq 0$. Поскольку $Q_m \not\equiv 0$, то $0 \leqslant s_0 \leqslant \min(m,\mu)$. Запишем равенство (3) в виде

$$p_{s_0}(\nu-s_0)a_{\nu-s_0} + p_{s_0+1}(\nu-s_0)a_{\nu-s_0-1} + \dots + p_{m+\mu}(\nu-s_0)a_{\nu-m-\mu} = q_{\nu-m},$$

что равносильно

$$p_{s_0}(r)a_r + p_{s_0+1}(r)a_{r-1} + \dots + p_{m+\mu}(r)a_{r-m-\mu+s_0} = q_{r-m+s_0}, \qquad (4)$$

где $p_s(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg p_s(x) \leqslant m$. Как следует из равенства (3),

$$p_{s_0}(x) = \sum_{j=0}^{\min(s_0,m-1)} q_{m-j,s_0-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (x-i) + q_{0,s_0-m}.$$

При условиях леммы E-функция $f(z)$ не является многочленом (в однородном случае $f(z) \not\equiv 0$). Поэтому степень трансцендентности (соответственно, однородной трансцендентности) множества функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$ не меньше 1. Для любого $r \in \mathbb{Z}^+$ обозначим $\mathbb{P}_r$ линейное пространство над $\mathbb{A}$, порождённое числами $a_0, a_1, \dots, a_r$ и 1 (соответственно, $a_0, a_1, \dots, a_r$), и пусть $\mathbb{P}_{-1} = \mathbb{A}$ (соответственно, $\mathbb{P}_{-1} = \{0\}$). Если $m_1 = \max \dim \mathbb{P}_r$, то, как следует из теоремы 1 или соотношения (4), $1 \leqslant m_1 < \infty$. Обозначим $r_{1,1}$ наименьший из индексов $r \in \mathbb{Z}^+$ со свойством $a_r \notin \mathbb{P}_{r-1}$, $r_{1,2}$ — второй по величине индекс с таким свойством, и так далее до r_{1,m_1}. Подставляя в равенство (4) любое $r = r_{1,t}$, $1 \leqslant t \leqslant m_1$, получим, что $p_{s_0}(r_{1,t}) = 0$ — иначе число $a_{r_{1,t}}$ линейно зависело бы от чисел a_r с $r < r_{1,t}$ и, следовательно, принадлежало бы $\mathbb{P}_{r_{1,t}-1}$. Вообще, поскольку всякая функция $f_{[j]}(z)$, $1 \leqslant j \leqslant h$, является E-функцией, удовлетворяющей уравнению (1), то коэффициенты $a_{j,r}$ её степенного разложения по степеням $z - \xi_{[j]}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(p_{s_0})_{[j]}(r)a_{j,r} + (p_{s_0+1})_{[j]}(r)a_{j,r-1} + \dots + (p_{m+\mu})_{[j]}(r)a_{j,r-m-\mu+s_0} = (q_{r-m+s_0})_{[j]},$$

а многочлен $(p_{s_0})_{[j]}(r)$ имеет не менее $m_j \geqslant 1$ попарно различных целых неотрицательных корней $r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}$. Положим $\{x_1, \dots, x_{m_0}\} = \bigcup_{j=1}^{h} \{r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}\}$. Поскольку рациональные корни многочлена не меняются при алгебраическом сопряжении и $\deg p_{s_0}(x) \leqslant m$, то все числа $x_1 < x_2 < \dots < x_{m_0}$ являются корнями многочлена $p_{s_0}(r)$, а $1 \leqslant m_0 \leqslant m$. При этом не исключается, что многочлен $p_{s_0}(r)$ может иметь и другие корни из $\mathbb{Z}^+$. Очевидно, что для любого j, $1 \leqslant j \leqslant h$, среди чисел $f_{[j]}^{(x_1)}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(x_{m_0})}(\xi_{[j]})$ имеются линейно независимые и потому отличные от нуля.

Если функции

$$f^{(x_1)}(z), \dots, f^{(x_{m_0})}(z) \qquad (5)$$

линейно зависимы с 1 (соответственно, линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$, то согласно лемме 1 найдутся многочлены $A_1(z), \dots, A_{m_0}(z), A(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, взаимно простые в совокупности и не все тождественно равные нулю (в однородном случае $A(z) \equiv 0$), такие, что

$$(A_{m_0})_{[j]}(z) f_{[j]}^{(x_{m_0})}(z) + \dots + (A_1)_{[j]}(z) f_{[j]}^{(x_1)}(z) + A_{[j]}(z) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Пусть l — наибольший из индексов, для которых $A_l(\xi) \neq 0$. Так как $(A_l)_{[j]}(\xi_{[j]}) \neq 0$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant h$, то отсюда следует, что число a_{j,r_l} линейно зависимо с $a_{j,r_l-1}, \dots, a_{j,0}$ и 1 (соответственно, с $a_{j,r_l-1}, \dots, a_{j,0}$). Но при некотором j это противоречит выбору $r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}$. Следовательно, функции (5) линейно независимы с 1 (соответственно, линейно независимы) над $\mathbb{C}(z)$.

Пусть кроме корней $x_1, \dots, x_{m_0}$, многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет и другие целые неотрицательные корни. Обозначим их $d_1, \dots, d_n$. Тогда $m_0 + n \leqslant \deg p_{s_0}(r) \leqslant m$. Если функции

$$f^{(d_1)}(z), \dots, f^{(d_n)}(z), f^{(x_{m_0})}(z), \dots, f^{(x_1)}(z) \tag{6}$$

линейно независимы с 1 (соответственно, линейно независимы) над $\mathbb{C}(z)$, то в однородном случае дополним множество этих функций до базиса в линейном пространстве над $\mathbb{C}(z)$, порождённом функциями

$$f(z), f'(z), \dots, f^{(k)}(z), \dots. \tag{7}$$

Элементы этого базиса также выберем из множества (7) и обозначим $g_1(z), \dots, g_m(z)$. Неоднородный случай сводится к однородному введением функции $g_0(z) \equiv 1$. Если функции (6) линейно зависимы с 1 (соответственно, линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$, то рассмотрим все подмножества совокупности функций (6), содержащие множество (5) и связанные только одним линейным уравнением вида

$$B_1(z) f^{(d_{i_1})}(z) + \dots + B_k(z) f^{(d_{i_k})}(z) + B_{k+1}(z) f^{(x_{m_0})}(z) + \dots$$
$$+ B_{k+m_0}(z) f^{(x_1)}(z) + B(z) \equiv 0,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$, $d_{i_1} > d_{i_2} > \dots > d_{i_k}$, а $B_1(z), \dots, B_{k+m_0}(z), B(z)$ — взаимно простые в совокупности многочлены из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, не все тождественно равные нулю (в однородном случае $B(z) \equiv 0$). Пусть l — наименьший из индексов, для которых $B_l(\xi) \neq 0$. Тогда $(B_l)_{[j]}(\xi_{[j]}) \neq 0$

для любого $j,\ 1 \leqslant j \leqslant h$. Следовательно, $l \leqslant k$, а

$$f_{[j]}^{(d_{i_l})}(\xi_{[j]}) = L_{[j]}(f_{[j]}^{(d_{i_{l+1}})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(d_{i_k})}(\xi_{[j]}), f_{[j]}^{(x_{m_0})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(x_1)}(\xi_{[j]})), \tag{8}$$

где $L(z_1, \dots, z_{m_0+k-l})$ — некоторая линейная неоднородная (соответственно, линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Если d — максимум (по всем рассматриваемым подмножествам совокупности (6)) величин d_{i_l}, стоящих в левых частях уравнений (8), то рассмотрим функции

$$f^{(d_{k_1})}(z), \dots, f^{(d_{k_{n-1}})}(z), f^{(x_{m_0})}(z), \dots, f^{(x_1)}(z), \tag{9}$$

получаемые из множества (6) исключением функции $f^{(d)}(z)$. Если функции (9) линейно зависимы с 1 (соответственно, линейно зависимы), то, повторяя предыдущие рассуждения с функциями (9) вместо (6), получим множество из $m_0 + n - 2$ функций. Вновь повторяя, при необходимости, эти рассуждения, неизбежно придём к множеству линейно независимых функций, включающему в себя функции (5) и достроим его до базиса $g_1(z), \dots, g_m(z)$ произвольным образом.

Далее, как и при доказательстве леммы 1.8, для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ построим m линейно независимых линейных форм

$$L_k = b_{k,1}g_1(\xi) + \dots + b_{k,m}g_m(\xi), \quad b_{k,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad k, \lambda = 1, \dots, m,$$

с условием

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |(b_{k,1})_{[j]}(g_1)_{[j]}(\xi_{[j]}) + \dots + (b_{k,m})_{[j]}(g_m)_{[j]}(\xi_{[j]})| = O(n^{-(m-1-\varepsilon)n}),$$

$$\overline{|b_{k,\lambda}|} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \qquad k, \lambda = 1, \dots, m.$$

Среди этих линейных форм можно выбрать $m - 1$ форм, линейно независимых с формой $L(g_1(\xi), \dots, g_m(\xi))$. Кроме того, согласно доказанному выше, для любого $j,\ 1 \leqslant j \leqslant h$, среди чисел $(g_1)_{[j]}(\xi_{[j]}), \dots, (g_m)_{[j]}(\xi_{[j]})$ найдутся отличные от нуля. Далее дословно повторяем рассуждения доказательства теоремы 1 гл. 11 книги [36:12].

§2. Доказательство теорем 3 и 4

Лемма 4. *При условиях леммы 2 всякая особая точка $\xi \neq 0$ дифференциального уравнения (0.16) есть регулярная особая точка соответствующего однородного уравнения.*

Доказательство. Можно считать, что $\xi \in \mathbb{K}$. Пусть в базисе $g_1(z), \ldots, g_m(z)$, построенном в лемме 3, одна из функций, положим, для определённости, $g_m(z) = f^{(M)}(z)$, не принадлежит множеству (6). Запишем равенство (4) при $r = M$ в виде $L^* = L^*(g_m(\xi), f^{(M-1)}(\xi), \ldots, f(\xi)) = 0$, где $L^*(z_1, \ldots, z_{M+1})$ — линейная неоднородная (соответственно, линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причём её коэффициент при $g_m(\xi)$ есть $p_{s_0}(M) \neq 0$, так как $M \notin \{x_1, \ldots, x_{m_0}, d_1, \ldots, d_n\}$. Поскольку те из чисел $f^{(M-1)}(\xi), \ldots, f(\xi)$, которые не являются значениями функций (6), можно представить как линейные комбинации значений функций (6), и эти представления сохраняются при алгебраическом сопряжении, то

$$L^* = L^{**}(g_1(\xi), \ldots, g_m(\xi)) = 0,$$

где $L^{**}(z_1, \ldots, z_m) \not\equiv 0$ — линейная неоднородная (соответственно, линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причём

$$L^{**}_{[j]}((g_1)_{[j]}(\xi_{[j]}), \ldots, (g_m)_{[j]}(\xi_{[j]})) = 0, \qquad j = 1, \ldots, h.$$

Но, как следует из доказательства леммы 3, для L^{**} должно выполняться неравенство (2). Полученное противоречие показывает, что функции (6) линейно независимы с 1 (соответственно, линейно независимы), а $m_0 + n = m = \deg p_{s_0}(r)$. Поэтому $q_{m,s_0} \neq 0$, $\operatorname{ord}_{z=\xi} Q_m = s_0$, а многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет m попарно различных целых неотрицательных корней. Из определения s_0 получаем, что $q_{k,l} = 0$ при $l < k - m + s_0$, и, следовательно, $\operatorname{ord}_{z=\xi} Q_k \geqslant k - m + s_0$. Тогда для любого k, $0 \leqslant k < m$, порядок полюса функции Q_k/Q_m в точке ξ равен $\operatorname{ord}_{z=\xi} Q_m - \operatorname{ord}_{z=\xi} Q_k \leqslant s_0 - (k - m + s_0) = m - k$. Лемма 4 доказана.

Рассматривая определяющее уравнение (0.17), легко видеть, что при условиях леммы 3 $h_m(\xi) = q_{m,s_0}$, $h_{m-1}(\xi) = q_{m-1,s_0-1}, \ldots$, а $F(r) \equiv p_{s_0}(r)$. В конце доказательства леммы 4 установлено, что многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет ровно m попарно различных корней из $\mathbb{Z}^+$. Тем самым доказана

Лемма 5. *При условиях леммы 2 показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (0.16), в любой точке $\xi \neq 0$ есть m попарно различных целых неотрицательных чисел $r_1 < \cdots < r_m$.*

Лемма 6. *При условиях леммы 2 всякое решение уравнения (0.16), а также соответствующего ему однородного дифференциального уравнения, голоморфно в любой точке $\xi \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $r_1 < \cdots < r_m$ — показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего (0.16), в точке ξ. Докажем, что оно имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида

$$y = \sum_{\nu=r}^{\infty} a_\nu (z-\xi)^\nu, \qquad a_r \neq 0, \tag{10}$$

где r пробегает множество $\{r_1, \ldots, r_m\}$. Коэффициенты a_ν для i-го ряда, $1 \leqslant i \leqslant m$, выберем следующим образом. В качестве $a_{r_i}, \ldots, a_{r_m}$ возьмём произвольные величины, а для $\nu \notin \{r_i, \ldots, r_m\}$, поскольку $p_{s_0}(\nu) \neq 0$, a_ν найдём из рекуррентного соотношения (4), положив в нём $q_j = 0$ ввиду однородности уравнения. Докажем, что при условиях леммы равенство (4), где считаем $q_j = 0$, справедливо и для $r = r_k$, $i \leqslant k \leqslant m$. Действительно, равенству (4) удовлетворяют Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$. При $r = r_k$ оно будет иметь вид $L = L(f^{(r_k-1)}(\xi)/(r_k-1)!, \ldots, f(\xi)) = 0$, где $L(z_1, \ldots, z_{r_k})$ — линейная неоднородная (соответственно, линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Те числа $f^{(r)}(\xi)/r!$, у которых $r \notin \{r_{k-1}, \ldots, r_1\}$, с помощью равенства (4) линейно выражаются через $f^{(r_{k-1})}(\xi)/(r_{k-1})!$, $\ldots$, $f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!$. Таким образом, $L = L^*(f^{(r_{k-1})}(\xi)/(r_{k-1})!, \ldots, f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!)$, где $L^*(z_1, \ldots, z_{k-1})$ — линейная неоднородная (соответственно, линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причём

$$L^*_{[j]}(f_{[j]}^{(r_{k-1})}(\xi_{[j]})/(r_{k-1})!, \ldots, f_{[j]}^{(r_1)}(\xi_{[j]})/(r_1)!) = 0, \quad j = 1, \ldots, h.$$

Согласно доказательству леммы 3, $L^*(z_1, \ldots, z_{k-1}) \equiv 0$. Для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (0.16), построенная линейная форма будет совпадать с однородной частью линейной формы $L^*(z_1, \ldots, z_{k-1})$ и также тождественно равна нулю. Но тогда, очевидно, при замене чисел $f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!, \ldots, f^{(r_m)}(\xi)/(r_m)!$ на произвольные величины $a_{r_1}, \ldots, a_{r_m}$ равенства $L = 0$ и (4) останутся справедливыми. Следовательно, ряды (10) формально удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (0.16) и в силу сходимости таких рядов в окрестности регулярной особой точки (см. [1:1, п. 16.2]) и их линейной независимости мы получаем искомую фундаментальную систему решений. А так как общее решение уравнения (0.16) есть сумма E-функции $f(z)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения, то оно также голоморфно в точке ξ. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если при условиях и обозначениях лемм 2 и 5* $Q_m(\xi) = 0$*, то*

$$\frac{Q_k}{Q_m} = \frac{c_k}{(z-\xi)^{m-k}} + \frac{\psi_k(z)}{(z-\xi)^{m-k-1}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $c_k \in \mathbb{Z}$, $-c_{m-1} \in \mathbb{N}$, $(-1)^m c_0 = r_1 \ldots r_m \in \mathbb{Z}^+$, $\psi_k(z) \in \mathbb{A}(z)$, $\psi_k(\xi) \neq \infty$.

Доказательство. Преобразуем определяющее уравнение (0.17), учитывая, что при условиях леммы $Q_k/Q_m = Q_k^*/Q_m^* = (z-\xi)^{-(m-k)} h_k/h_m$ и $c_k = h_k(\xi)/h_m(\xi)$, к виду

$$\frac{F(r)}{h_m(\xi)} = r(r-1)\ldots(r-m+1) + r(r-1)\ldots(r-m+2)c_{m-1} + \cdots + rc_1 + c_0 = 0.$$

Рассматривая в этом уравнении одночлены, содержащие r^k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, убеждаемся, что каждое число c_k выражается в виде линейной комбинации коэффициентов многочлена $F(r)/h_m(\xi)$ и чисел $c_{k+1}, \ldots, c_{m-1}$ с целыми коэффициентами. Так как многочлен $F(r)/h_m(\xi)$ имеет целые неотрицательные корни $r_1, \ldots, r_m$, то все его коэффициенты и, следовательно, $c_0, \ldots, c_{m-1}$ являются целыми числами. Кроме того, $(-1)^m c_0 = r_1 \ldots r_m \geqslant 0$, а $c_{m-1} = 1 + 2 + \cdots + (m-1) - (r_1 + \cdots + r_m) \leqslant 0$. Предположим, что $c_{m-1} = 0$. Тогда $r_1 = 0$, $r_2 = 1, \ldots, r_m = m-1$. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (0.16). Согласно доказательству леммы 6, фундаментальную систему решений этого уравнения можно составить из функций $y_j = (z-\xi)^{j-1}\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$, где ω_j — функции, голоморфные и не равные нулю в точке $z = \xi$. Пусть наибольший порядок полюсов функций $Q_{m-1}/Q_m, \ldots, Q_0/Q_m$ в точке $z = \xi$ равен p, $0 \leqslant p \leqslant m$, а l — наибольший из индексов, таких, что функция Q_l/Q_m имеет в точке $z = \xi$ полюс порядка p. Тогда, разделив однородное уравнение, соответствующее (0.16), на Q_m и подставив в него функцию y_{l+1}, получим, что порядок полюса $(Q_l/Q_m)y_{l+1}^{(l)}$ равен p, а порядок полюсов предыдущих и последующих слагаемых меньше p. Полученное противоречие показывает, что в случае $c_{m-1}=0$ точка $z=\xi$ не является особой точкой однородного уравнения, соответствующего (0.16), и, следовательно, самого уравнения (0.16). Лемма 7 доказана.

Ввиду лемм 4–7 для завершения доказательства теорем 3 и 4 остаётся выяснить, как связано уравнение (0.16) в случае $Q\not\equiv 0$ с линейным однородным уравнением порядка $m+1$, которому удовлетворяет функция $f(z)$.

Продифференцировав уравнение (0.16), получим равенство

$$Q_m y^{(m+1)}+(Q_m'+Q_{m-1})y^{(m)}+\cdots+(Q_1'+Q_0)y'+Q_0'y=Q'.$$

Умножив это равенство на Q и вычитая из него равенство (0.16), умноженное на Q', получаем

$$Q_mQy^{(m+1)}+(Q(Q_m'+Q_{m-1})-Q_mQ')y^{(m)}+\cdots+(QQ_0'-Q_0Q')y=0, \tag{11}$$

что равносильно

$$y^{(m+1)}+\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_m}+\frac{Q_m'}{Q_m}-\frac{Q'}{Q}\right)y^{(m)}+\left(\frac{Q_{m-2}}{Q_m}+\frac{Q_{m-1}'}{Q_m}-\frac{Q_{m-1}}{Q_m}\frac{Q'}{Q}\right)y^{(m-1)}+$$
$$+\cdots+\left(\frac{Q_0}{Q_m}+\frac{Q_1'}{Q_m}-\frac{Q_1}{Q_m}\frac{Q'}{Q}\right)y'+\left(\frac{Q_0'}{Q_m}-\frac{Q_0}{Q_m}\frac{Q'}{Q}\right)y=0. \tag{12}$$

Полученное уравнение является однородным дифференциальным уравнением наименьшего порядка, которому удовлетворяет Е-функция $f(z)$. Фундаментальную систему решений уравнения (12) можно составить из функции $f(z)$ и фундаментальной системы решений соответствующего (0.16) однородного уравнения, что завершает доказательство теоремы 4.

Рассматривая порядки полюсов коэффициентов уравнения (12) в произвольной точке $z=\xi$, нетрудно видеть, что $z=\xi$ одновременно является или не является регулярной особой точкой уравнения (12) и соответствующего (0.16) однородного уравнения. Далее, из голоморфности общего решения уравнения (12) в точке $z=\xi$ следует существование фундаментальной системы решений из $m+1$ функций, имеющих в точке $z=\xi$ различные неотрицательные порядки нуля. Эти порядки являются показателями уравнения (12) в точке $z=\xi$. Наконец, для доказательства того, что особая точка $z=\xi$ уравнения (12) будет также особой точкой коэффициента при $y^{(m)}$, достаточно повторить соответствующие рассуждения доказательства леммы 7. Теорема 3 доказана.

Запишем систему (0.5) в виде $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, где $A = \|Q_{k,i}\|_{k,i}$. Можно считать, что все $Q_{k,i} \in \mathbb{A}(z)$. Пусть Φ — фундаментальная матрица системы (0.5), первый столбец которой совпадает с $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$. Из равенств (0.5) и условий следствия 1 вытекает, что для любого $1 \leqslant k \leqslant m$ функция f_k и её последовательные производные однозначно представляются в виде линейных комбинаций функций $f_1, \ldots, f_m$ с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$. Пусть s — наименьшее число из $\mathbb{N}$, такое, что линейные комбинации, выражающие $f_k, f_k', \ldots, f_k^{(s)}$, линейно зависимы, $s \leqslant m$. Тогда функция f_k удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению s-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$. Легко видеть, что этому же дифференциальному уравнению удовлетворяет любой элемент $\phi_{k,i}$ матрицы Φ, стоящий в k-й строке. Но тогда согласно теореме 4 функции $\phi_{k,i}$, и, следовательно, вся матрица Φ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следствие 1 доказано.

Для доказательства следствия 2 и использования в главе 3 понадобятся ещё три леммы.

Лемма 8. *Пусть при условиях леммы 2 функции $f(z), f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$ алгебраически (соответственно, однородно алгебраически) независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда в однородном случае наименьший показатель дифференциального уравнения (0.16) в точке $z = \xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ совпадает с $\operatorname{ord}_{z=\xi} f(z)$, а в общем случае наименьший показатель однородного дифференциального уравнения, соответствующего (0.16), равен $\max \operatorname{ord}_{z=\xi}(f(z) - P)$, где максимум берётся по всем многочленам $P \in \mathbb{A}[z]$.*

Доказательство. Пусть $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$ — показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего (0.16), в точке ξ. В случае $Q \equiv 0$ порядок нуля функции $f(z)$ в точке ξ равен одному из r_k. Но поскольку производные функции $f(z)$ порядков $r_1, \ldots, r_m$ в точке ξ однородно алгебраически независимы, то $f^{(r_1)}(\xi) \neq 0$ и $\operatorname{ord}_{z=\xi} f(z) = r_1$. В случае $Q \not\equiv 0$ из рекуррентного соотношения (4) получаем, что значения в точке ξ производных функции $f(z)$ до порядка $r_1 - 1$ включительно есть алгебраические числа, а значение производной порядка r_1 трансцендентно. Следовательно, разность функции $f(z)$ и произвольного многочлена с алгебраическими коэффициентами может иметь порядок нуля, не превосходящий r_1. Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 вытекает, что если при её условиях $Q \equiv 0$ и $f(\xi) = 0$, то все решения уравнения (0.16) в точке $z = \xi$ также равны нулю.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 8, а $P \in \mathbb{A}[z]$ — многочлен, все корни которого с учётом кратности являются нулями функции $f(z)$. Тогда $g(z) = f(z)/P$ есть E-функция.*

Доказательство. Очевидно, что функция $g(z)$ — целая, а лемму достаточно доказать для случая $P = z - \xi,\ \xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\},\ Q_m(\xi) = 0$. Пусть разложения функций $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Тейлора имеют вид

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + \frac{a_n}{n!} z^n + \dots; \quad g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + \frac{b_n}{n!} z^n + \dots.$$

Тогда из равенства

$$f(z) = (z - \xi) g(z) \tag{13}$$

следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = -\xi b_0,\ a_1 = b_0 - \xi b_1,\ \dots\ , a_n/n! = b_{n-1}/(n-1)! - \xi b_n/n!.$$

Умножая эти равенства, соответственно, на $1, \xi, \dots, \xi^n$ и складывая, получим

$$\frac{b_n}{n!} \xi^{n+1} = -(a_0 + a_1 \xi + \dots + \frac{a_n}{n!} \xi^n), \quad n = 0, 1, \dots. \tag{14}$$

Пусть $\{d_n\}$ — последовательность натуральных чисел, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}},\quad k = 0, 1, \dots, n,\ n = 1, 2, \dots,$ и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \to \infty$. Тогда, умножая равенства (14) на $n!$, получим, что существует последовательность $\varkappa_n = d_n\ (\mathrm{den}(1/\xi))^{n+1}$ со свойствами $\varkappa_n \in \mathbb{N}$, $\varkappa_n b_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}},\quad k = 0, 1, \dots, n,\ \varkappa_n = O(n^{\varepsilon n}),\ n = 1, 2, \dots.$

Докажем теперь, что $\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |(b_n)_{[j]}| = O(n^{\varepsilon n})$, где $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, $\mathbb{K}$ — наименьшее поле алгебраических чисел, содержащее ξ и коэффициенты $a_n/n!$ разложения функции $f(z)$. Согласно второму утверждению леммы 1, из равенства (13) получаем

$$f_{[j]}(z) = (z - \xi_{[j]}) g_{[j]}(z), \qquad j = 1, \dots, h. \tag{15}$$

Заметим, что $f_{[j]}(z)$ является E-функцией. Согласно лемме 2 она удовлетворяет уравнению (1). Так как $f(\xi) = 0$, то ввиду леммы 8 все показатели однородного уравнения, соответствующего (0.16), в точке

$z = \xi$ больше нуля. Показатели однородного уравнения, соответствующего (1), в точке $z = \xi_{[j]}$ являются корнями определяющего уравнения, коэффициенты которого сопряжены с коэффициентами уравнения (0.17). Поэтому, будучи целыми числами, они не меняются при алгебраическом сопряжении и также больше нуля. Отсюда в однородном случае согласно лемме 8 получаем $f_{[j]}(\xi_{[j]}) = 0$. В общем случае из равенства (4) имеем $p_{s_0}(0)f(\xi) = q_{s_0-m} = 0$, откуда также получаем $f_{[j]}(\xi_{[j]}) = (q_{s_0-m}/p_{s_0}(0))_{[j]} = 0$. Из определения E-функций и условий доказываемой леммы следует, что $f_{[j]}(z)$, как и $f(z)$, является целой функцией 1-го порядка. Тогда ввиду равенства (15) $g_{[j]}(z)$ также является целой функцией 1-го порядка. Отсюда следуют оценки $|(b_n)_{[j]}| = O(n^{\varepsilon n})$, $j = 1, \dots, h$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если при условиях леммы 7* $c_0 \neq 0$, *то для некоторого* $P \in \mathbb{A}[z]$ *функция* $g(z) = (f(z) - P)/(z - \xi)^{r_1}$ *является E-функцией.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9, с той лишь разницей, что ввиду отсутствия утверждения $\operatorname{ord}_{z=\xi}(f(z) - P) = r_1$ использование леммы 8 и условия алгебраической независимости функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$ уже не требуется.

Перейдём непосредственно к доказательству следствия 2.

При доказательстве следствия 1 выяснено, что для любого $1 \leqslant k \leqslant m$ функция f_k удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению s-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$, причём функции $f_k, f_k', \dots, f_k^{(s-1)}$ однозначно представляются в виде линейно независимых линейных комбинаций функций $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$. Приводя эти линейные комбинации к ступенчатому виду, заключаем, что при условиях следствия 2 функции $f_k, f_k', \dots, f_k^{(s-1)}$ однородно алгебраически независимы. Если Φ — фундаментальная матрица системы (0.5), первый столбец которой совпадает с $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$, то, как было выяснено, полученному дифференциальному уравнению удовлетворяет любой элемент $\phi_{k,i}$ матрицы Φ, стоящий в k-й строке, а сама матрица Φ и, следовательно, её определитель $|\Phi|$ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пусть ξ — особая точка системы (0.5). Если l — наибольший порядок полюсов элементов $Q_{k,i}$ матрицы $A = \|Q_{k,i}\|_{k,i}$ в точке $z = \xi$, то рассмотрим равенство $(z - \xi)^l \vec{y}\,' = (z - \xi)^l A\vec{y}$. В матрице $(z -$

$\xi)^l A$ хотя бы одна из строк при подстановке $z = \xi$ останется ненулевой. Поэтому существует нетривиальная линейная комбинация чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$, равная нулю. Следовательно, найдётся такая матрица $C \in GL(m, \mathbb{A})$, что $\vec{g} = C\vec{f}$ есть столбец E-функций, причём $g_1(\xi) = 0$. Поскольку $\Phi' = A\Phi$, то ввиду предыдущих рассуждений и леммы 8 получим, что $\Psi = C\Phi$ является матрицей, первый столбец которой совпадает с $\vec{g}$, а элементы первой строки в точке $z = \xi$ равны нулю. Таким образом, из допущения, что ξ — особая точка системы (0.5), следует, что $\operatorname{ord}_{z=\xi} |\Phi| = \operatorname{ord}_{z=\xi} |\Psi| \geqslant 1$. Сумма порядков нуля функции $|\Phi|$ во всех конечных точках должна быть конечной, так как определитель Вронского может быть равен нулю лишь в особых точках системы (0.5). Рассмотрим матрицу $\Phi_1 = B^{-1}\Psi = B^{-1}C\Phi$, где $B = \operatorname{diag}(z - \xi, 1, \dots, 1)$. Согласно леммам 8 и 9 матрица Φ_1 голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а её первый столбец состоит из E-функций. Несложные вычисления показывают, что Φ_1 — фундаментальная матрица системы $\vec{y}\,' = A_1\vec{y}$, где $A_1 = B^{-1}CAC^{-1}B - B^{-1}B' \in M(m, \mathbb{A}(z))$. Кроме того, $|\Phi_1| = |\Phi|/(z - \xi)$. Повторяя, при необходимости, описанные действия, получим систему вида (0.5) с фундаментальной матрицей, первый столбец которой состоит из E-функций, а определитель не обращается в 0 ни в одной точке из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Эта система не может иметь ненулевых особых точек. Следствие 2 доказано.

§3. Доказательство теоремы 5

Лемма 11 [38:1, §3]. *Если G-функция $F(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$Q_m y^{(m)} + Q_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + Q_0 y = 0, \qquad Q_m, \dots, Q_0 \in \mathbb{A}[z], \quad (16)$$

где m — наименьшее из возможных, то уравнение (16) — фуксово, т. е. все его особые точки, включая $z = \infty$, являются регулярными особыми точками.

Напомним, что точка $z = \infty$ называется регулярной особой точкой, если $\deg Q_m - \deg Q_k \geqslant m - k$ (см. [16:1, п. 18.3]).

Лемма 12. *Пусть дифференциальные операторы $F_1, F_2 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ таковы, что*

$$F_1 = P_n \left(\frac{d}{dz}\right)^n + \dots + P_1 \frac{d}{dz} + P_0, \quad P_j \in \mathbb{A}[z], \qquad j = 0, \dots, n,$$

$$F_2 = Q_m \left(\frac{d}{dz}\right)^m + \cdots + Q_1 \frac{d}{dz} + Q_0, \quad Q_i \in \mathbb{A}[z], \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$F_1 F_2 = R_{n+m} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+m} + \cdots + R_1 \frac{d}{dz} + R_0, \qquad P_n Q_m \not\equiv 0,$$

$\deg R_{n+m} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n+m} \deg R_k$.
Тогда $\deg Q_m = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \deg Q_i$.

Доказательство. Пусть лемма неверна, а θ — наибольший индекс, для которого

$$\deg Q_\theta = \max_{0 \leqslant i < m} \deg Q_i > \deg Q_m.$$

Обозначим σ наибольший из индексов, таких, что

$$\deg P_\sigma = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \deg P_j, \ 0 \leqslant \sigma \leqslant n.$$

Тогда $R_{n+m} = P_n Q_m$, а

$$R_{\sigma+\theta} = P_\sigma Q_\theta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-\sigma} \binom{\sigma + j}{j} P_{\sigma+j} Q_\theta^{(j)} + \sum_{\substack{-\theta \leqslant i \leqslant m-\theta \\ i \neq 0}} \sum_{j=0}^{n-\sigma+i} \binom{\sigma - i + j}{j} P_{\sigma-i+j} Q_{\theta+i}^{(j)}.$$

Следовательно, $\deg R_{\sigma+\theta} = \deg P_\sigma Q_\theta > \deg R_{n+m}$. Ввиду полученного противоречия лемма 12 доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 5 выполняется или не выполняется для коэффициентов уравнений (0.16) и (11) одновременно.

Известно, что функция $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, голоморфная в точке $z = 0$, удовлетворяет уравнению (16) тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_\nu\}$ удовлетворяет линейному разностному уравнению

$$p_0 a_\nu + p_1 a_{\nu-1} + \cdots + p_n a_{\nu-n} = 0, \quad p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{A}[\nu], \ \nu = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

причём $\max_{0 \leqslant i \leqslant n} \deg p_i = m$ (см. [59:1, стр. 142, 143] либо доказательство леммы 3 или 1.7). Рассуждая аналогично доказательству леммы 3, положим в уравнении (16)

$$Q_k = q_{k,0} + q_{k,1} z + \cdots + q_{k,\mu} z^\mu, \qquad q_{k,i} \in \mathbb{A}, \quad \mu = \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \deg Q_k.$$

Пусть s_0 и s_1 — наименьшее (соответственно, наибольшее) из чисел s, таких, что $\sum_{j=0}^{m} |q_{m-j,s-j}| \neq 0$. Можно считать, что $0 \leqslant s_0 \leqslant$

$\min(m,\mu) \leqslant s_1 \leqslant m+\mu$. Как установлено при доказательстве леммы 3, в уравнении (17) $n = s_1 - s_0$,

$$p_0 = \sum_{j=0}^{\min(s_0,m-1)} q_{m-j,s_0-j}\nu(\nu-1)\dots(\nu-m+j+1) + q_{0,s_0-m},$$

$$p_n = \sum_{j=0}^{\min(s_1,m-1)} q_{m-j,s_1-j}(\nu-n)\dots(\nu-n-m+j+1) + q_{0,s_1-m},$$

$$\deg p_i = \max_j\{m-j \mid q_{m-j,s_0+i-j} \neq 0\}, \quad i = 0,1,\dots,n. \qquad (18)$$

Всякой G-функции $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ можно взаимно однозначно сопоставить E-функцию $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu/\nu!)z^\nu$. Если последовательность $\{a_\nu\}$ удовлетворяет уравнению (17), то последовательность $\{a_\nu/\nu!\}$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\omega_0\frac{a_\nu}{\nu!} + \omega_1\frac{a_{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \dots + \omega_n\frac{a_{\nu-n}}{(\nu-n)!} = 0, \qquad (19)$$

где $\omega_0 = \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)p_0, \dots, \omega_n = p_n,$ $\deg\omega_i = \deg p_i + n - i \leqslant m+n-i,$ $i = 0,1,\dots,n.$

Следовательно, G-функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению (16) тогда и только тогда, когда соответствующая ей E-функция $f(z)$ удовлетворяет аналогичному дифференциальному уравнению, причём порядки этих уравнений отличаются не более чем на n.

Согласно лемме 11, точка $z = \infty$ является регулярной особой точкой уравнения (16). Это равносильно условию $\deg Q_k \leqslant \deg Q_m - m + k,$ $k = 0,1,\dots,m-1$, откуда $s_1 = \deg Q_m = \mu,$ $q_{m,s_1} \neq 0$.

Кроме того, если точка $z = 0$ — неособая, то $q_{m,0} \neq 0,$ $s_0 = 0$, а если особая, то ввиду её регулярности имеем $s_0 = \operatorname{ord} Q_m,$ $q_{m,s_0} \neq 0$.

Поскольку $q_{m,s_0} \neq 0,$ $q_{m,s_1} \neq 0$, то $\deg\omega_0 = m+n,$ $\deg\omega_n = m$, а разностному уравнению (19) соответствует дифференциальное уравнение

$$R_{m+n}y^{(m+n)} + \dots + R_1y' + R_0y = 0, \qquad R_{m+n},\dots,R_0 \in \mathbb{A}[z]. \qquad (20)$$

Из неравенств $\deg\omega_i \leqslant m+n-i$, равенств $\deg\omega_0 = m+n$, $s_0+n = s_1$ и (18) следует, что

$$R_{m+n} = q_{m,s_0}z^{s_1},\ \deg R_i \leqslant s_1,\ i = 0,1,\dots,m+n.$$

Уравнение (20), которому удовлетворяет E-функция $f(z)$, можно представить в виде $F_3 y = 0$, где $F_3 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$. Пусть $F_2 \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ — дифференциальный оператор наименьшего порядка, аннулирующий функцию $f(z)$. Тогда $F_3 = F_1 F_2$, где F_1 — дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$ (см. [1:1, п. 5.4]). Согласно лемме 12 степень многочлена, являющегося старшим коэффициентом в F_2, больше или равна максимуму степеней остальных коэффициентов. Из теории Вимана – Валирона следует (см., например, [6:1, §75]), что это неравенство не может быть строгим, иначе среди решений уравнения не будет целой функции 1-го порядка. Отсюда ввиду замечания после доказательства леммы 12 получаем утверждение теоремы 5.

Теорему 5 дополняет используемая в главе 3

Лемма 13 (см. [16:1, п. 18.6], [1:1, п. 15.5]). *Пусть в уравнении (0.16)* $Q \equiv 0$, $\deg Q_m \geqslant \max_{0 \leqslant i < m} \deg Q_i$, *всякая конечная особая точка регулярна, а общее решение уравнения однозначно. Тогда существует фундаментальная система решений этого уравнения, состоящая из функций вида* $Re^{\lambda x}$, *где* $\lambda \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{C}(z)$.

Некоторые свойства дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют E-функции, сформулированы и доказаны также в главе 3 (леммы 3.1, 3.5, 3.11, 3.13).

Глава 3. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 1-го и 2-го порядков

§1. Доказательство теоремы 6

Из определения 1 следует, что всякая E-функция является целой трансцендентной функцией 1-го порядка либо многочленом.

Пусть E-функция $f(z)$ трансцендентна и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$Q_1 y' + Q_0 y = Q, \qquad Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z]. \tag{1}$$

Как уже отмечалось ранее, можно считать, что многочлены Q_1, Q_0, Q принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ и взаимно просты в совокупности. Из общих результатов теории Вимана–Валирона следует (см. [36:12, стр. 208]), что $\deg Q_1 = \deg Q_0$ (данный факт можно доказать и непосредственно элементарными методами теории функций комплексного переменного либо просто сослаться на теорему 5). Кроме этого, уравнение (1) должно удовлетворять и другим ограничениям, часть из которых установлена в главе 2.

Лемма 1. *Пусть произвольная E-функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Тогда если число 0 является корнем многочлена Q_1 кратности k, то $k = 1$.*

Доказательство. При условиях леммы $Q_0(0) \neq 0$, иначе многочлены Q_1, Q_0, Q можно было бы сократить на z. Допустим, что $k \geqslant 2$. Разложим функцию $f(z)$ и многочлены Q_1, Q_0, Q в степенные ряды по степеням z:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \qquad Q_1(z) = q_{1,k} z^k + \cdots + q_{1,m} z^m;$$

$$Q_0(z) = q_{0,0} + q_{0,1} z + \cdots + q_{0,m} z^m; \; Q(z) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_\mu z^\mu;$$

$$m = \deg Q_1 = \deg Q_0, \qquad q_{0,0} \neq 0.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $a_n \in \mathbb{K}$, $q_i, q_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Подставив эти разложения в уравнение (1), приравняем в нём коэффициенты при степенях z^n. Как и при доказательстве леммы 1.7, запишем, для большей наглядности, в отдельные столбцы коэффициенты, получающиеся из произведений $Q_i(z) f^{(i)}(z)$:

$$\begin{matrix} 0 & & q_{0,0}a_n & & \\ 0 & & q_{0,1}a_{n-1} & & \\ \dots & + & \dots & = & q_n. \\ q_{1,m}(n-m+1)a_{n-m+1} & & q_{0,m}a_{n-m} & & \end{matrix} \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем

$$a_n = -(q_{0,0})^{-1}((q_{1,2}(n-1)+q_{0,1})a_{n-1}+\dots+ \qquad (3)$$

$$+(q_{1,m}(n-m+1)+q_{0,m-1})a_{n-m+1}+q_{0,m}a_{n-m}-q_n).$$

Если положить $a_n = 0$ при $n < 0$, $q_n = 0$ при $n > \mu$ и при $n < 0$, то равенство (3) справедливо при всех целых n. Знаменатель алгебраического числа $(q_{0,0})^{-1}$ обозначим q. Тогда из равенства (3) следует, что наименьший общий знаменатель чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ (а также алгебраически сопряжённых с ними) не превосходит q^n. Обозначив $(a_n)_{[1]}, \dots, (a_n)_{[h]}$ числа, сопряжённые с числом $a_n = (a_n)_{[1]} \neq 0$ в поле $\mathbb{K}$, отсюда получим, что $|(a_n)_{[1]} \dots (a_n)_{[h]}| \geqslant q^{-nh}$. Но из определения E-функций следует

$$|(a_n)_{[1]} \dots (a_n)_{[h]}| = O\left(\frac{n^{\varepsilon n}}{n!}\right)^h.$$

Полученные оценки противоречат друг другу, что и завершает доказательство леммы 1.

Следующие две леммы являются частными случаями леммы 2.7. Их непосредственное доказательство проведено в [64:8,9].

Лемма 2. *Пусть при условиях леммы 1 число $\xi \neq 0$ является корнем многочлена Q_1 кратности k. Тогда $k = 1$.*

Лемма 3. *Пусть при условиях леммы 1 число $\xi \neq 0$ является корнем многочлена Q_1. Тогда $-Q_0(\xi)/Q_1'(\xi) \in \mathbb{N}$.*

Лемма 4. *Пусть f, R_1, R, P_1, P_2 — произвольные аналитические функции, причём $P_1 \not\equiv 0$, а функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y' = R_1 y + R.$$

Тогда функция $g = P_1 f + P_2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right) y - \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right) P_2 + P_1 R + P_2'.$$

Действительно,

$$g' = P_1 f' + P_1' f + P_2' = P_1(R_1 f + R) + P_1' f + P_2' =$$
$$= (P_1 R_1 + P_1')f + P_1 R + P_2' = (P_1 R_1 + P_1')(g - P_2)/P_1 + P_1 R + P_2' =$$
$$= \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right) g - \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right) P_2 + P_1 R + P_2',$$

что и требовалось доказать.

Из лемм 1–3 следует, что для частного Q_0/Q_1 коэффициентов уравнения (1) разложение в сумму простейших дробей имеет вид $-a_0 + a/z - k_1/(z-\alpha_1) - \cdots - k_m/(z-\alpha_m)$, где $k_i = -Q_0(\alpha_i)/Q_1'(\alpha_i) \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, m$, а само уравнение (1) равносильно уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z} + \frac{k_1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{k_m}{z - \alpha_m}\right) y + Q_2,$$

где $a_0, a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k_i \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{A},\ i = 1, \ldots, m,\ Q_2 \in \mathbb{K}(z)$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m}} - \frac{P}{(z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m}}, \qquad (4)$$

где P — многочлен из $\mathbb{C}[z]$, подобранный так, чтобы функция $g(z)$ была целой (равенство (4) можно получить, например, из представления мероморфной функции $f(z)/((z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m})$ в виде суммы главных частей её Лорановских разложений во всех конечных особых точках и целой функции $g(z)$). Применяя к функции $g(z)$ лемму 4, получим, что она удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z}\right) y + Q_3, \qquad (5)$$

где Q_3 — некоторая рациональная функция. Рассматривая возможные особые точки функции Q_3, делаем вывод, что $Q_3 = Q_4 + q/z,\ Q_4 \in \mathbb{C}[z],\ q \in \mathbb{C}$. Многочлен P можно подобрать так, чтобы $Q_4 \equiv 0$. Действительно, согласно лемме 4, если к $g(z)$ прибавить многочлен Q_4/a_0 (что равносильно изменению многочлена P), то эта новая функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению вида (5) с неоднородной частью $Q_5 + q/z,\ Q_5 \in \mathbb{C}[z],\ q \in \mathbb{C},\ \deg Q_5 < \deg Q_4$. Повторяя эту процедуру не более $\deg Q_4$ раз, получим, что целая функция $g(z)$ (4) удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z}\right) y + \frac{q}{z}, \quad a_0, a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ q \in \mathbb{C},\ q = ag(0).$$

Но тогда при $g(0) \neq 0$ функция $g(z/a_0)/g(0)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(1 - \frac{a}{z}\right) y + \frac{a}{z}$$

и, кроме того, её разложение в ряд Тейлора начинается с 1. Следовательно, $g(z/a_0)/g(0) = \varphi_a(z)$, откуда

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} g(z) + P =$$

$$= (z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} g(0)\varphi_a(a_0 z) + P = P_1 \varphi_a(a_0 z) + P.$$

Если же $g(0) = 0$, то $q = 0,\ -a = k \in \mathbb{N},\ g(z/a_0)/z^k = ce^z$ и

$$f(z) = cz^k (z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{a_0 z} + P = P_2\, \varphi_0(a_0 z) + P.$$

Из полученных равенств следует, что $g(0), c \in \mathbb{A},\ P, P_1, P_2 \in \mathbb{A}[z]$. Далее, коэффициенты $b_n/n!$ разложения функции $\varphi_a(a_0 z)$ по степеням z можно последовательно выразить в виде линейных комбинаций коэффициентов $d_0, d_1/1!, \ldots, d_n/n!$ степенного разложения по степеням z функции $f(z) - P$. Рассматривая коэффициенты этих линейных комбинаций, легко заметить, что они являются алгебраическими числами, знаменатели которых растут не быстрее, чем c_1^n, где $c_1 > 0$ — постоянная, зависящая только от коэффициентов многочлена P_1. Поскольку разность $f(z) - P$ является E-функцией, отсюда следует, что наименьший общий знаменатель алгебраических чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$ не превосходит $O(n^{\varepsilon n})$, т. е. что $\varphi_a(a_0 z)$ также есть E-функция. Но последнее возможно лишь в случае $a \in \mathbb{Q}$ (см. [10:2]). Теорема 6 доказана.

§2. Доказательство теорем 7 и 8

Если $f(z) \in \mathbb{A}[z]$, то утверждения теорем справедливы. Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $f(z)$ — трансцендентная функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + R_1 y' + R_0 y = 0, \qquad R_1, R_0 \in \mathbb{A}(z). \tag{6}$$

Наличие среди решений уравнения (6) целой функции 1-го порядка накладывает ограничения на рост коэффициентов R_1 и R_0. Они могут быть установлены с помощью теоремы 5 либо с помощью следующего утверждения, доказанного в более сильном варианте Ш.И. Стрелицом [31:1] (см. также [9:1, гл. 5, п. 2]).

Лемма 5. *Пусть $g(z)$ — функция, имеющая однозначный модуль в некоторой окрестности бесконечности, удовлетворяет уравнению (6), а её порядок, определяемый так же, как и порядок целой функции, равен ρ. Пусть Лорановскими разложениями коэффициентов уравнения (6) являются*

$$R_1 = z^{q_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}, \qquad R_0 = z^{q_0}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{z^\nu}, \qquad q_0, q_1 \in \mathbb{Z}, \quad a_0 b_0 \neq 0,$$

причём не имеет место случай $q_1 \leqslant -1$, $q_0 \leqslant -2$ (т. е. случай регулярной особой точки в бесконечности, когда, очевидно, всякое целое решение есть многочлен). Тогда:
1) если $q_0 \geqslant 2q_1$, то $\rho = 1 + q_0/2$;
2) если $q_0 < q_1 + 1$, то: а) возможно решение $g(z) = z^\mu \psi(z)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, $\psi(z)$ голоморфна в бесконечности; б) для всех остальных решений $\rho = 1 + q_1$;
3) если $q_1 - 1 < q_0 < 2q_1$, то: а) возможно решение $g(z) = z^\mu \exp(-\lambda_0 z^{q_0-q_1+1} + \cdots + \lambda)\psi(z)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, $\psi(z)$ голоморфна в бесконечности; б) для всех остальных решений $\rho = 1 + q_1$.

Поскольку для E-функции, отличной от многочлена, $\rho = 1$, то случай 3) возможен лишь при $q_0 = q_1 > 0$. Тогда $f(z) = P(z)e^{\alpha z}$, где $P(z) \in \mathbb{A}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, и утверждение теоремы выполняется. То, что случай 3) действительно может иметь место, показывает пример уравнения $y'' + zy' + (z - 2 + 2/z)y = 0$, которому удовлетворяет E-функция ze^{-z}. Случаи 1) и 2) возможны лишь при $q_0 q_1 = 0$, $q_0, q_1 \in \mathbb{Z}^-$. Приведём пример к случаям 1) и 2): уравнению $(z-1)y'' - (3z-2)y' + 2zy = 0$ удовлетворяет E-функция $e^{2z} + ze^z$.

Следовательно, при доказательстве теорем 7 и 8 можно ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения (6) вида

$$y'' + \left(a + \frac{Q_1}{Q}\right)y' + \left(b + \frac{Q_0}{Q}\right)y = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0), \tag{7}$$

где $a, b \in \mathbb{A}$, $Q_0, Q_1, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_0) < \deg Q$.

Следующие две леммы доказываются, как и лемма 4, непосредственным вычислением.

Лемма 6. *Пусть f, R_0, R_1, R, P, P_1 — произвольные аналитические функции, причём $P \not\equiv 0$, а функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y'' + R_1 y' + R_0 y = R.$$

Тогда функция $g = Pf$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(R_1 - \frac{2P'}{P}\right) y' + \left(R_0 - \frac{P''}{P} - \left(R_1 - \frac{2P'}{P}\right)\frac{P'}{P}\right) y = PR,$$

а функция $g_1 = f + P_1$ — уравнению

$$y'' + R_1 y' + R_0 y = R + P_1'' + P_1' R_1 + P_1 R_0.$$

Следствие. *При условиях леммы 6 функция $g = e^{\alpha z} f$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y'' + (R_1 - 2\alpha) y' + (R_0 - \alpha R_1 + \alpha^2) y = e^{\alpha z} R.$$

Лемма 7. *Пусть f, Q_0, Q_1, Q_2, Q — произвольные аналитические функции, причём $Q_0 Q_2 \not\equiv 0$, а функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y'' + \frac{Q_1}{Q_2} y' + \frac{Q_0}{Q_2} y = \frac{Q}{Q_2}.$$

Тогда функция $g = f'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0}\right) y' + \left(\frac{Q_0}{Q_2} + \frac{Q_1'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0}\frac{Q_1}{Q_2}\right) y = \frac{Q'}{Q_2} - \frac{Q_0'}{Q_0}\frac{Q}{Q_2}.$$

Лемма 8 (см. [36:12, гл. 6, лемма 2]). *Пусть функция $y_0 \not\equiv 0$ удовлетворяет уравнению (6) и алгебраически зависима с y_0' над $\mathbb{C}(z)$. Тогда существует решение y_* уравнения (6), однородно алгебраически зависимое с y_*' над $\mathbb{C}(z)$.*

Лемма 9. *При условиях теоремы 8 существует решение $v_* \not\equiv 0$ уравнения (7), линейно зависимое с v_*' над $\mathbb{C}(z)$.*

Доказательство. Если Е-функции $f = f(z)$ и f' однородно алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$, то $f'/f \in \mathbb{C}(z)$ и утверждение леммы выполняется. Если f и f' однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то рассмотрим функцию $g = \exp(az/2)y_*$, где y_* — решение уравнения (7), о котором говорится в лемме 8. Функции g и $\exp(az/2)f$ согласно следствию из леммы 6 удовлетворяют уравнению $y'' + (Q_1/Q)y' + (b^* + Q_2/Q)y = 0$, где $b^* \in \mathbb{A}$, $Q_1, Q_2, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_2) < \deg Q$. Если $b^* = 0$, то, как следует из леммы 5, $\exp(az/2)f \in \mathbb{A}[z]$ и всё доказано. Пусть $b^* \neq 0$. Рассмотрим функцию $u = g'/g = y_*'/y_* + a/2$. Она, как легко видеть, является алгебраической и удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{Q_1}{Q}u + b^* + \frac{Q_2}{Q} = 0, \qquad Q, Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}[z], \tag{8}$$

где $b^* \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_2) < \deg Q$. Докажем, что $z = \infty$ не является точкой ветвления функции u. Отсюда и из теоремы 4 будет следовать, что эта функция не имеет точек ветвления вообще.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = \infty$ в степенной ряд с рациональными показателями:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{r_k}, \qquad c_0 \neq 0, \qquad r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \tag{9}$$

Подставив разложение (9) в уравнение (8), убеждаемся, что $r_0 = 0$, $c_0^2 = -b^*$. Если не все показатели r_k в ряду (9) целые, то пусть r_{k_1} — наибольший дробный показатель такой, что $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставляя разложение (9) в уравнение (8) и рассматривая коэффициент при наибольшей дробной степени z, получаем $c_0 c_{k_1} = 0$, что противоречит нашим допущениям. Следовательно, $u \in \mathbb{C}(z)$ и лемма 9 доказана.

Представим Е-функцию $f(z)$ в виде

$$f = v_* \int w\, dz, \tag{10}$$

где v_* — функция, о которой говорится в лемме 9, $v_*'/v_* = P/S$, $P, S \in \mathbb{C}[z]$. Тогда функция w должна удовлетворять дифференциальному уравнению $w' + (a + Q_1/Q + 2P/S)w = 0$ (см., например, [1:1, п. 5.22]). Дифференцируя равенство (10), получаем

$$f' = \frac{P}{S} f + v_* w, \tag{11}$$

откуда следует, что $v_* w S$ есть целая функция. Она удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$y' = \left(\frac{S'}{S} - a - \frac{Q_1}{Q} - \frac{P}{S}\right) y$$

и, следовательно, $v_* w S = Re^{\alpha z}$, где $R \in \mathbb{C}[z],\ \alpha \in \mathbb{A}$ (см. [36:12, стр. 189, 201]). Тогда $v_* w = e^{\alpha z} R/S$ и, подставляя эту функцию в уравнение (11), находим, что Е-функция $e^{-\alpha z} f$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(\frac{P}{S} - \alpha\right) y + \frac{R}{S}.$$

Но тогда согласно теореме 6 $e^{-\alpha z} f = P_1\, \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_2$, откуда

$$f = (P_1\, \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_2) e^{\alpha z},\ f' = (P_3\, \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_4) e^{\alpha z}/z,$$

где $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{A}[z],\ \alpha_1 \in \mathbb{A}$. Рассмотрим функцию

$$F = P_1\, f' - P_3\, f/z = e^{\alpha z}(P_1 P_4 - P_2 P_3)/z.$$

В случае $F \equiv 0$ или $P_1 \equiv 0$ имеем $f'/f \in \mathbb{C}(z)$ и теорема 8 справедлива. Если же $F \not\equiv 0,\ P_1 \not\equiv 0$, то из условий теоремы 8 получаем, что функции f и F алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$, а отсюда следует алгебраическая зависимость функций $e^{\alpha z}$ и $\varphi_\lambda(\alpha_1 z)$. Согласно лемме 6 гл. 5 книги [36:12] это возможно лишь в случаях $\alpha\alpha_1 = 0$ и $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. Но если $\lambda = k \in \mathbb{Z}^+$, то, как следует из (0.10), $\varphi_\lambda(z) = k!(e^z - \sum_{n=0}^{k-1} z^n/n!)/z^k$, откуда

$$f = R_1\, e^{\alpha_1 z} + R_2 e^{\alpha_2 z},\ f' = R_3\, e^{\alpha_1 z} + R_4 e^{\alpha_2 z},$$

где $R_1, \ldots, R_4 \in \mathbb{C}(z),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что функции $e^{\alpha_1 z}$ и $e^{\alpha_2 z}$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$ и, следовательно, числа α_1, α_2 линейно зависимы. Теорема 8 доказана.

Для доказательства теоремы 7 понадобятся ещё три леммы.

Лемма 10 (см., например, [1:1, п. 15.92]). *Пусть в дифференциальном уравнении (6)*

$$R_1 = \frac{c_1}{(z-\xi)} + \psi_1(z), \quad R_0 = \frac{c_0}{(z-\xi)^2} + \frac{\psi_0(z)}{(z-\xi)},$$

где $\xi \in \mathbb{C}$, $\psi_1(z), \psi_0(z)$ — функции, голоморфные в точке $z = \xi$. Тогда сумма и произведение показателей дифференциального уравнения (6) в точке ξ равны, соответственно, $1 - c_1$ и c_0.

Лемма 11. *Пусть f есть E-функция, а $\theta \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ — дифференциальный оператор минимального порядка, аннулирующий f. Тогда если $z = 0$ — особая точка дифференциального уравнения $\theta f = 0$, то она является регулярной особой точкой.*

Лемма 11 следует из более сильных утверждений, полученных И. Андрэ (см. [38:1, стр. 724 и 746]), которые, в свою очередь, выводятся из результатов, доказанных ранее Чудновским, Кацем и самим Андрэ для G-функций. Отметим, что этим же путём можно получить аналоги лемм 1, 2.4 и 2.6 для однородного случая.

Лемма 12. *Пусть E-функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right) y' + \left(b + \frac{b_1}{z}\right) y = 0, \qquad a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{A}. \tag{12}$$

Тогда $f(z)$ либо имеет вид (0.20), либо $f(z) = cz^l e^{-\alpha z} A_{\beta,\gamma}((2\alpha - a)z)$, $a_1, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{A}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$, причём $l = 0$ при $a_1 \notin \mathbb{Z}^-$.

Доказательство. Если $b \neq 0$, рассмотрим функцию $g(z) = e^{\alpha z} f(z)$. Согласно следствию из леммы 6, эта функция удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha + \frac{a_1}{z}\right) y' + \frac{b_1 - \alpha a_1}{z} y = 0,$$

аналогичному (12), но уже с $b = 0$. Если $a = 2\alpha$, то, как следует из леммы 5, $g(z)$ есть многочлен и всё доказано. Если $a \neq 2\alpha$, то рассмотрим функцию $g_1(z) = g(z/(2\alpha - a))$. Она удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(-1 + \frac{a_1}{z}\right) y' - \frac{\gamma}{z} y = 0, \qquad \gamma = \frac{\alpha a_1 - b_1}{2\alpha - a}. \tag{13}$$

Предположим, что уравнение (13) имеет два целых решения, линейно независимых над $\mathbb{C}$. Тогда общее решение уравнения (13) является однозначным и согласно лемме 2.13 $g_1(z)$ представляется в виде $R_1 e^{\alpha_1 z} + R_2 e^{\alpha_2 z} = (R_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)z} + R_2) e^{\alpha_2 z}$, где $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(z)$. Но тогда E-функция $g_1(z) e^{-\alpha_2 z} = R_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)z} + R_2$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из

$\mathbb{C}(z)$. Согласно теореме 6, $g_1(z)e^{-\alpha_2 z} = P\,\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, и лемма справедлива. Предположим теперь, что уравнение (13) имеет, с точностью до множителя из $\mathbb{C}$, только одно целое решение. Тогда при $a_1 \notin \mathbb{Z}^-$ это решение есть функция Куммера и, следовательно, $g(z/(2\alpha - a)) = c\,A_{a_1,\gamma}(z)$, $c \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что $f(z) = c\,e^{-\alpha z}A_{a_1,\gamma}((2\alpha - a)z)$, $c \in \mathbb{A}$ и $A_{a_1,\gamma}((2\alpha - a)z)$ есть E-функция. Но тогда $a_1, \gamma \in \mathbb{Q}$ или выполняется равенство (0.20) (см. [10:2] и [36:12, стр. 228]). Если же $a_1 \in \mathbb{Z}^-$, то согласно лемме 6 $g(z/(2\alpha - a)) = c\,z^{1-a_1}A_{2-a_1,\gamma-a_1+1}(z)$ и лемма 12 также справедлива.

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы 7. Достаточность её условий следует из того, что функция $f(z)$, заданная равенством (0.19), линейно зависима с $f'(z)$ и $f''(z)$ над $\mathbb{C}(z)$. Для доказательства необходимости, как уже было установлено, можно ограничиться рассмотрением случая, когда функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7) и алгебраически независима с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$. Обозначим $\xi_0 = 0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ все конечные особые точки уравнения (7). Пусть функция $f(z)$ имеет в точке ξ_j, $0 \leqslant j \leqslant m$, нуль кратности $n_j \geqslant 0$. Рассмотрим многочлен $P = z^{n_0}(z-\xi_1)^{n_1}\ldots(z-\xi_m)^{n_m}$ и функцию $g(z) = f(z)/P$. Согласно леммам 2.4, 2.9, 6 и 11 $g(z)$ является E-функцией и удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (7), не имеющему особых точек, отличных от $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$, причём всякая особая точка является регулярной. Поскольку $g(\xi_j) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$, то один из показателей дифференциального уравнения в каждой точке ξ_j равен нулю. Отсюда ввиду леммы 10 получаем, что функция Q_0/Q может иметь полюса не более чем 1-го порядка. Тогда из леммы 2.7 следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет либо уравнению (12), либо уравнению

$$y'' + \left(a - \frac{a_0}{z} - \frac{k_1}{z-\xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z-\xi_m}\right)y' + \\ + \left(b + \frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z-\xi_1} + \cdots + \frac{b_m}{z-\xi_m}\right)y = 0, \qquad (14)$$

где $a, a_0, b, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{A}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $k = k_1 + \cdots + k_m$. Индукцией по k докажем, что все E-функции, удовлетворяющие уравнениям вида (14) и, следовательно,

$g(z)$ представляются в виде

$$(R\,A_{\mu,\nu}(\alpha z) + R_1\,A'_{\mu,\nu}(\alpha z))e^{\alpha_1 z}, \tag{15}$$

где $R, R_1 \in \mathbb{A}(z)$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$. Если $k = 0$, то уравнение (14) совпадает с (12) и доказываемое утверждение выполняется согласно лемме 12. Предположим, что утверждение справедливо для всех E-функций, удовлетворяющих произвольным дифференциальным уравнениям вида (14) при любых $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \leqslant n-1$, $n \geqslant 1$, и докажем его для $k = n$. Если $b_m \neq 0$, рассмотрим функцию $g_1(z) = \exp(-b_m z/k_m)g(z)$. Согласно следствию из леммы 6, $g_1(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a^* - \frac{a_0}{z} - \frac{k_1}{z-\xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z-\xi_m}\right)y' +$$

$$+\left(b^* + \frac{b_0^*}{z} + \frac{b_1^*}{z-\xi_1} + \cdots + \frac{b_{m-1}^*}{z-\xi_{m-1}}\right)y = 0,$$

где $a^*, b^*, b_0^*, \ldots, b_{m-1}^* \in \mathbb{A}$, которое можно записать в виде

$$y'' + \frac{Q_2}{z(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_m)}\,y' + \frac{Q_3}{z(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_m)}\,y = 0, \tag{16}$$

где $Q_2, Q_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_2, \deg Q_3) \leqslant m+1$. Если $Q_3 \equiv 0$, то из (16) получаем, что $g_1'(z)$ и, следовательно, $g_1(z)$ имеют вид $Re^{\alpha z}$, где $R \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$ и доказываемое утверждение справедливо. Если $Q_3 \not\equiv 0$, то $Q_3 = z^{l_0}(z-\xi_1)^{l_1}\ldots(z-\xi_m)^{l_m}Q_4$, $l_j \geqslant 0$, $l_m \geqslant 1$, $Q_4 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg Q_4 = t \leqslant m+1-(l_0+l_1+\cdots+l_m)$, $Q_4 = c(z-\beta_1)^{t_1}\ldots(z-\beta_s)^{t_s}$, $t_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \neq \beta_j$, $\beta_i \neq \xi_j$, $c \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$. Согласно лемме 7 функция $g_1'(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a^* + \frac{1-a_0-l_0}{z} - \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j-1+l_j}{z-\xi_j} - \sum_{i=1}^{s}\frac{t_i}{z-\beta_i}\right)y' + \left(\frac{a_0 l_0}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j l_j}{(z-\xi_j)^2} + \frac{Q_5}{z(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_m)(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_s)}\right)y = 0, \tag{17}$$

где $Q_5 \in \mathbb{A}[z]$. Показатели дифференциального уравнения (17) в точке $\xi_j \neq 0$ согласно лемме 10 равны l_j и k_j (в точке ξ_0 — соответственно

l_0 и a_0). Ввиду леммы 2.8 порядок нуля функции $g_1'(z)$ в точке $\xi_j \neq 0$ равен $l_j^* = \min(l_j, k_j)$, $l_m^* \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $g_2(z) = g_1'(z)/P_1$, где $P_1 = z^{l_0^*}(z-\xi_1)^{l_1^*}\dots(z-\xi_m)^{l_m^*}$, $l_0^* = \operatorname{ord} g_1'(z)$. Согласно леммам 2.9, 6 и 10 $g_2(z)$ является E-функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, коэффициент которого при y имеет полюса не более чем 1-го порядка, а коэффициент при y' равен

$$a^* + \frac{1-a_0-l_0+2l_0^*}{z} - \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j-1+l_j-2l_j^*}{z-\xi_j} - \sum_{i=1}^{s}\frac{t_i}{z-\beta_i}.$$

Величина k у полученного дифференциального уравнения равна

$$n+t-m+(l_1+\dots+l_m)-2(l_1^*+\dots+l_m^*) \leqslant n+1-2(l_1^*+\dots+l_m^*) \leqslant n-1.$$

Согласно индуктивному предположению функция $g_2(z)$ и, следовательно, $g_1'(z)$, имеет вид (15). Но тогда из уравнения (16), которому удовлетворяет функция $g_1(z)$, получаем, что $g_1(z)$ и $g(z)$ также имеют вид (15). Поскольку $g(z) = f(z)/P$, то тем самым доказана представимость функции $f(z)$ в виде (15) или, что равносильно, в виде

$$f(z) = \left(\frac{P_2\,A_{\mu,\nu}(\alpha z) + P_3\,A'_{\mu,\nu}(\alpha z)}{P_4}\right)e^{\alpha_1 z}, \tag{18}$$

где P_2, P_3, P_4 — многочлены с алгебраическими коэффициентами, взаимно простые в совокупности. Предположим, что многочлен P_4 имеет корень $\xi \neq 0$. Тогда из равенства (18) следует однородная алгебраическая зависимость чисел $A_{\mu,\nu}(\alpha\xi)$, $A'_{\mu,\nu}(\alpha\xi)$. Согласно теореме I А.Б. Шидловского, отсюда получаем, что функции $A_{\mu,\nu}(z)$, $A'_{\mu,\nu}(z)$ должны быть однородно алгебраически зависимыми над $\mathbb{C}(z)$. Но тогда функция $A_{\mu,\nu}(z)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению 1-го порядка и поэтому $A_{\mu,\nu}(z) = P_5\,e^{\alpha_2 z}$, $P_5 \in \mathbb{A}[z]$. Из равенства (18) $f(z) = R_2\,e^{\alpha_3 z}$, где $R_2 \in \mathbb{A}(z)$. Но поскольку $f(z)$ есть E-функция, то $R_2 \in \mathbb{A}[z]$ и утверждение теоремы выполняется. Осталось разобрать случай, когда $P_4 = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда равенство (18) имеет вид

$$f(z) = \left(\left(\frac{p_{-n}}{z^n} + \dots + p_0 + \dots + p_t z^t\right)A_{\mu,\nu}(\alpha z) + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \left(\frac{q_{-n}}{z^n} + \dots + q_0 + \dots + q_t z^t\right)A'_{\mu,\nu}(\alpha z)\right)e^{\alpha_1 z},$$

где $t \in \mathbb{Z}^+$, $p_j, q_j \in \mathbb{A}$, $j = -n, \dots, t$, $(p_{-n}, q_{-n}) \neq (0,0)$. Так как правая часть равенства (19) должна быть целой функцией, то $p_{-n} + q_{-n}\nu/\mu = 0$. Из уравнения (0.18) получаем $A_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\mu/\nu - \alpha z/\nu)A'_{\mu,\nu}(\alpha z) + (\alpha z/\nu)A''_{\mu,\nu}(\alpha z)$. Подставив это выражение в равенство (19) и учитывая, что $A'_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\nu/\mu)A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)$, получим

$$f(z) = \left(\left(\frac{p^*_{-n+1}}{z^{n-1}} + \dots + p^*_0 + \dots + p^*_{t+1}z^{t+1}\right)A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{q^*_{-n+1}}{z^{n-1}} + \dots + q^*_0 + \dots + q^*_{t+1}z^{t+1}\right)A'_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)\right)e^{\alpha_1 z},$$

где $p^*_j, q^*_j \in \mathbb{A}$, $j = -n+1, \dots, t+1$. Повторив эту процедуру не более чем n раз, приходим к равенству

$$f(z) = (P_6\, A_{\mu+m,\nu+m}(\alpha z) + P_7\, A'_{\mu+m,\nu+m}(\alpha z))e^{\alpha_1 z},$$

где $P_6, P_7 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. Следовательно, $f(z)$ имеет вид (0.19). Теорема 7 доказана.

§3. Доказательство теорем 9, 10 и 11

Лемма 13. *Если при условиях леммы 2.2 точка $\xi = 0$ есть особая точка уравнения (0.16), то она является регулярной особой точкой соответствующего ему однородного дифференциального уравнения.*

Доказательство. В случае $m = 1$ доказываемое утверждение совпадает с леммой 1. В случае $Q \equiv 0$ лемма совпадает с леммой 11, доказанной И. Андрэ. Пусть $Q \not\equiv 0$. Тогда, как установлено в §2 главы 2, однородным дифференциальным уравнением наименьшего порядка, которому удовлетворяет E-функция $f(z)$, является уравнение (2.12). Точка $z = 0$ согласно лемме 11 является его регулярной особой точкой. Но это возможно только в случае, когда порядки полюсов функций Q_{m-1}/Q_m, $Q_{m-2}/Q_m, \dots, Q_0/Q_m$ в точке $z = 0$ не превосходят, соответственно, $1, 2, \dots, m$. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Пусть E-функция $f = f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right)y + a_2 z^k \varphi_\lambda(\alpha z) + R, \tag{20}$$

$a_0, a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{A},\ \lambda \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z},\ R \in \mathbb{A}(z)$.

Тогда $f = z^n f_1 + P$, *где* $P \in \mathbb{A}[z]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *а* f_1 *— E-функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению вида (0.24).*

Доказательство. Продифференцировав равенство (20), получим

$$y'' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right) y' - \frac{a_1}{z^2} y + a_2 z^k \left(\alpha + \frac{k-\lambda}{z}\right) \varphi_\lambda(\alpha z) + R' + a_2 \lambda z^{k-1}.$$

Вычитая из этого равенства равенство (20), умноженное на $\alpha + (k - \lambda)/z$, получим

$$y'' + \left(a_3 + \frac{a_4}{z}\right) y' + \left(a_5 + \frac{a_6}{z} + \frac{a_7}{z^2}\right) y = P_1 + \frac{a_8}{z} + \frac{a_9}{z^2},$$

где $a_3, \ldots, a_9 \in \mathbb{A}$, а P_1, как легко видеть, можно выбрать из $\mathbb{A}[z]$. Пусть $\deg P_1 = n > 0$. Рассмотрим многочлен $P_2 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg P_2 \leqslant n-1$, такой, что функция $f_1 = (f - P_2)/z^n$ является целой и, следовательно, E-функцией. Согласно лемме 6 функция $f - P_2$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a_3 + \frac{a_4}{z}\right) y' + \left(a_5 + \frac{a_6}{z} + \frac{a_7}{z^2}\right) y = P_3 + \frac{a_{10}}{z} + \frac{a_{11}}{z^2}, \qquad (21)$$

где $a_{10}, a_{11} \in \mathbb{A}$, $P_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg P_3 \leqslant n$, а функция f_1 — уравнению вида (21), где числа $a_3, \ldots, a_7$, вообще говоря, изменятся, а правая часть поделится на z^n. Поскольку функция f_1 — целая, то правая часть этого нового уравнения должна иметь вид $a_{12} + a_{13}/z + a_{14}/z^2$. В случае $a_7 = 0$ имеем также $a_{14} = 0$ и лемма справедлива. Если $a_7 \neq 0$, то, рассмотрев функцию $f_1 - a_{14}/a_7$, получим, что она удовлетворяет уравнению (0.24). Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Пусть E-функция*

$$f = R_0 g + R_1 g' + R, \qquad R_0, R_1, R \in \mathbb{A}(z), \qquad (22)$$

а g *— E-функция, удовлетворяющая уравнению*

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right) y + \left(P + \frac{a}{z}\right) \varphi_\lambda(\alpha z) + R_2, \qquad (23)$$

где $a_0, a_1, a, \alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $P \in \mathbb{A}[z]$, $R_2 \in \mathbb{A}(z)$. *Тогда*

$$f = R_3 \varphi_\lambda(\alpha z) + R_4 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + R_5, \qquad \lambda_1 \in \mathbb{Q},\ \alpha_1 \in \mathbb{A}, \qquad (24)$$

либо

$$f = R_3 f_1 + R_4 f_1' + R_5, \qquad R_3, R_4, R_5 \in \mathbb{A}(z), \qquad (25)$$

где f_1 — E-функция, удовлетворяющая уравнению вида (0.24).

Доказательство. Из уравнений (22) и (23) получаем

$$f = R_6 g + R_7 \varphi_\lambda(\alpha z) + R_8, \qquad R_6, R_7, R_8 \in \mathbb{A}(z). \tag{26}$$

Функция $g + cz^k \varphi_\lambda(\alpha z)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $c \in \mathbb{A}$, как следует из уравнения (23) и леммы 4, удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right) y + \left(P + (\alpha - a_0)cz^k + (k - \lambda - a_1)cz^{k-1} + \frac{a}{z}\right) \varphi_\lambda(\alpha z) +$$

$$+ R_2 + \lambda c z^{k-1}.$$

Отсюда видно, что в случае $\alpha - a_0 \neq 0$ и в случае $\alpha - a_0 = 0$, $k - \lambda - a_1 \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, можно подобрать $P_1 = \sum c_k z^k \in \mathbb{A}[z]$ так, чтобы функция $f_2 = g + P_1 \varphi_\lambda(\alpha z)$ удовлетворяла уравнению вида (23), но уже с $P \equiv 0$. В случае $\alpha - a_0 = 0$, $k_0 - \lambda - a_1 = 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ очевидно, что при правильном выборе P_1 можно обнулить все одночлены в многочлене P, кроме, быть может, одного, содержащего z^{k_0-1}, а также дробь a/z. Таким образом, во всех случаях функция f_2 удовлетворяет уравнению (20), где $k \geqslant -1$. Если в уравнении (20) для f_2 $a_2 \neq 0$, то из определения функции f_2, равенств (26) и (20) получим $f = R_9 f_2 + R_{10} f_2' + R_{11}$, где $R_9, R_{10}, R_{11} \in \mathbb{A}(z)$. Согласно лемме 14, для некоторых $n \in \mathbb{Z}^+$ и $P_2 \in \mathbb{A}[z]$ справедливо равенство $f_2 = z^n f_1 + P_2$, где f_1 — E-функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (0.24). Следовательно, функция f имеет вид (25), что и требовалось доказать. Если $a_2 = 0$, то согласно теореме 6 $f_2 = P_3 \varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z) + P_4$, $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1 \in \mathbb{A}$, $P_3, P_4 \in \mathbb{A}[z]$. Выразив g через f_2 и подставив результат в (26), получим равенство (24). Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (0.27), то она имеет вид либо (24), либо (25), где $f_1(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению (0.24).*

Доказательство осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 7, с некоторым усложнением рассуждений. Действительно, согласно теореме 5 достаточно ограничиться рассмотрением уравнения

$$y'' + \left(a + \frac{Q_1}{Q_2}\right) y' + \left(b + \frac{Q_0}{Q_2}\right) y = \frac{Q}{Q_2}, \quad (a, b) \neq (0, 0), \tag{27}$$

где $a, b \in \mathbb{A}$, $Q_0, Q_1, Q_2, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_0) < \deg Q_2$. Обозначим $\xi_0 = 0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ все конечные особые точки уравнения (27). Пусть его наименьший показатель в точке ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, равен $n_j \geqslant 0$, а λ, λ_1 — его показатели в точке $\xi_0 = 0$. Рассмотрим многочлен $P = (z-\xi_1)^{n_1} \ldots (z-\xi_m)^{n_m}$. Согласно леммам 2.4–2.6, 2.10, 6, 13 найдётся многочлен $P_1 \in \mathbb{A}[z]$ такой, что функция $g(z) = (f(z)-P_1)/P$ является E-функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению вида (27), не имеющему особых точек, отличных от $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$, причём всякая особая точка является регулярной. Из выбора многочлена P следует, что наименьший показатель полученного дифференциального уравнения в каждой точке $\xi_j \neq 0$ равен нулю. Отсюда и леммы 10 получаем, что функция Q_0/Q_2 в точке $\xi_j \neq 0$ может иметь полюс не более чем 1-го порядка. Тогда из леммы 2.7 следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет либо дифференциальному уравнению (0.24), либо дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{1-\lambda-\lambda_1}{z} - \frac{k_1}{z-\xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z-\xi_m}\right) y' + \\ + \left(b + \frac{b_0}{z} + \frac{\lambda\lambda_1}{z^2} + \frac{b_1}{z-\xi_1} + \cdots + \frac{b_m}{z-\xi_m}\right) y = \frac{Q_3}{Q_2}, \qquad (28)$$

где $a, \lambda, \lambda_1, b, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{A}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $k = k_1 + \cdots + k_m$. Дальнейшее доказательство леммы будем проводить индукцией по k. Если $k = 0$, то утверждение леммы выполняется. Предположим, что утверждение справедливо для всех E-функций, удовлетворяющих произвольным дифференциальным уравнениям вида (28) при любых $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \leqslant n-1$, $n \geqslant 1$, и докажем его для $k = n$. Если $(\lambda\lambda_1, b_m) \neq (0,0)$, рассмотрим функцию $g_1(z) = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} g(z)$, где $\alpha_1 = \lambda/\xi_m - b_m/k_m$. Как следует из леммы 6, $g_1(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha_1 + \frac{1-\lambda_1+\lambda}{z} - \frac{k_1}{z-\xi_1} - \cdots - \frac{k_m}{z-\xi_m}\right) y' + \\ + \left(b^* + \frac{b_0^*}{z} + \frac{b_1^*}{z-\xi_1} + \cdots + \frac{b_{m-1}^*}{z-\xi_{m-1}}\right) y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} \frac{Q_3}{Q_2},$$

где $b^*, b_0^*, \ldots, b_{m-1}^* \in \mathbb{A}$, которое можно записать в виде

$$y'' + \frac{Q_4}{Q_2} y' + \frac{Q_5}{Q_2} y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda} \frac{Q_3}{Q_2}, \qquad (29)$$

где $Q_4, Q_5 \in \mathbb{A}[z],\ \deg Q_4 \leqslant m+1,\ Q_2 = z(z-\xi_1)\dots(z-\xi_m)$.

Рассмотрим случай $Q_5 \equiv 0$. Тогда решениями однородных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнениям (29) и (28), являются функции $y_* \equiv 1$ и $v_* = e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda}$ соответственно. Будем искать функцию $g(z)$ в виде

$$g = v_* \int w\, dz. \tag{30}$$

Дифференцируя равенство (30), получаем

$$g' = \left(-\alpha_1 + \frac{\lambda}{z}\right) g + v_* w, \tag{31}$$

откуда следует, что zv_*w есть E-функция. Подставляя выражение (30) в уравнение (28), найдём, что

$$w' = \left(-a - \frac{2v_*'}{v_*} - \frac{1-\lambda-\lambda_1}{z} + \frac{k_1}{z-\xi_1} + \dots + \frac{k_m}{z-\xi_m}\right) w + \frac{Q_3}{v_* Q_2}.$$

Далее, воспользовавшись леммой 4, получим, что E-функция zv_*w удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(\alpha_1 - a + \frac{\lambda_1}{z} + \frac{k_1}{z-\xi_1} + \dots + \frac{k_m}{z-\xi_m}\right) y + \frac{zQ_3}{Q_2}.$$

Согласно доказательству теоремы 6, отсюда имеем $zv_*w = P_2\varphi_{-\lambda_1}((\alpha_1 - a)z) + P_3,\ \ P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z],\ \lambda_1 \in \mathbb{Q}$. Из этого равенства и (31) следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет уравнению (23), откуда ввиду леммы 15 получаем доказываемое утверждение.

Если же в уравнении (29) $Q_5 \not\equiv 0$, то $Q_5 = z^{l_0}(z-\xi_1)^{l_1}\dots(z-\xi_m)^{l_m} Q_6,\ l_j \geqslant 0,\ l_m \geqslant 1,\ Q_6 \in \mathbb{A}[z],\ \deg Q_6 = \mu \leqslant m+1-(l_0+l_1+\dots+l_m),\ \ Q_6 = c(z-\beta_1)^{p_1}\dots(z-\beta_s)^{p_s},\ p_i \in \mathbb{N},\ \beta_i \neq \beta_j,\ \beta_i \neq \xi_j,\ c \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$.

Согласно лемме 7 функция $g_1'(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha_1 + \frac{1-a_0-l_0}{z} - \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j - 1 + l_j}{z-\xi_j} - \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{z-\beta_i}\right) y' +$$

$$+ \left(\frac{a_0 l_0}{z^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j l_j}{(z-\xi_j)^2} + \frac{Q_7}{Q_9}\right) y = e^{\alpha_1 z} z^{-\lambda-1} \frac{Q_8}{Q_{10}},$$

где $Q_7, Q_8, Q_{10} \in \mathbb{A}[z],\ Q_9 = (z-\beta_1)\dots(z-\beta_s)Q_2,\ a_0 = \lambda_1 - \lambda - 1$.

Функция $e^{-\alpha_1 z}z^{\lambda+1}g_1'(z)$ является E-функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a - \frac{\lambda_1+\lambda+l_0}{z} - \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j-1+l_j}{z-\xi_j} - \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i}{z-\beta_i}\right)y' +$$

$$+\left(\frac{a_1\lambda_1}{z^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{k_jl_j}{(z-\xi_j)^2}+\frac{Q_{11}}{Q_9}\right)y=\frac{Q_8}{Q_{10}}, \qquad (32)$$

где $Q_{11}\in\mathbb{A}[z],\ a_1=\lambda+l_0+1$.

Показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (32), в точке $\xi_j\neq 0$ согласно лемме 10 равны l_j и k_j. Рассмотрим многочлен $P_4=(z-\xi_1)^{l_1^*}\dots\ (z-\xi_m)^{l_m^*}$, где $l_j^*=\min(l_j,k_j),\ \ 1\leqslant j\leqslant m,\ \ l_m^*\geqslant 1$. Согласно леммам 2.10, 6 и 10 существует многочлен $P_5\in\mathbb{A}[z]$ такой, что функция $g_2(z)=(e^{-\alpha_1 z}z^{\lambda+1}g_1'(z)-P_5)/P_4$ является E-функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, коэффициент которого при y в точках $\xi_j\neq 0$ имеет полюса не более чем 1-го порядка, а коэффициент при y' равен

$$a - \frac{\lambda_1+\lambda+l_0}{z} - \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j-1+l_j-2l_j^*}{z-\xi_j} - \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i}{z-\beta_i}.$$

Величина k у полученного дифференциального уравнения равна

$$n+\mu-m+(l_1+\dots+l_m)-2(l_1^*+\dots+l_m^*)\leqslant n+1-2(l_1^*+\dots+l_m^*)\leqslant n-1.$$

Согласно индуктивному предположению функция $g_2(z)$ и, следовательно, $e^{-\alpha_1 z}z^{\lambda+1}g_1'(z)$ имеет вид (24) или (25), а $g_1'(z)$ имеет вид

$$(R_0\varphi_\lambda(\alpha z)+R_1\varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z)+R)e^{\alpha_1 z}z^{-\lambda-1}$$

либо

$$(R_0f_1(z)+R_1f_1'(z)+R)e^{\alpha_1 z}z^{-\lambda-1},$$

где $R_0,R_1,R\in\mathbb{A}(z),\ f_1(z)$ — E-функция, являющаяся решением уравнения (0.24). Но тогда из уравнения (29), которому удовлетворяет функция $g_1(z)$, получаем, что $g_1(z)$ имеет аналогичный вид. Следовательно, $g(z)$ и $f(z)$ имеют вид (24) или (25). Лемма 16 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 10.

Достаточность условий теоремы проверяется прямым вычислением (подробнее об этом см. далее, леммы 18 и 19).

Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно лемме 16 функция $f(z)$ имеет вид (25) или (24). Из равенства (25) следует $f'(z) = p_0 f_1(z) + p_1 f_1'(z) + p_2$, где $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{A}(z)$. Если $R_4 p_0 - R_3 p_1 \equiv 0$, то $R_4 f'(z) - p_1 f(z) = (R_4 p_0 - R_3 p_1) f_1(z) + R_4 p_2 - R_5 p_1 \in \mathbb{A}(z)$ и, следовательно, $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. Тогда согласно теореме 6 $f(z) = P\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, и теорема справедлива. Если $R_4 p_0 - R_3 p_1 \not\equiv 0$, то функции $f_1(z)$, $f_1'(z)$ линейно выражаются через функции $f(z)$, $f'(z)$ и поэтому являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{C}(z)$. Предположив, что функция $f_1(z)$ имеет вид (0.25) или (0.26), из равенства (25) получим, что функция $f(z)$ также имеет вид (0.25) (соответственно (0.26), но уже с $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}(z)$. Если $f(z)$ имеет вид (24), то с помощью аналогичных рассуждений убеждаемся, что справедливо равенство (0.26) либо функции $\varphi_\lambda(\alpha z)$ и $\varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Но тогда ввиду [36:6] и формулы (0.10) снова получим, что имеют место равенства (0.25) или (0.26) с $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}(z)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, во-первых, что если $f(z)$ удовлетворяет уравнению (0.24) и алгебраически зависима с $f'(z)$, то справедливо равенство (0.25) или (0.26) с $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}(z)$, и, во-вторых, что из этих равенств следуют включения $P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$.

Следующая лемма дополняет утверждение леммы 9.

Лемма 17. *Если E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (0.24) и алгебраически зависит с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$, то существует решение y_* однородного уравнения, соответствующего уравнению (0.24), линейно зависимое с y_*' над $\mathbb{C}(z)$.*

Доказательство. Согласно [36:12, гл. 6, лемма 10] однородное уравнение, соответствующее уравнению (0.24), имеет решение y_* такое, что его логарифмическая производная y_*'/y_* есть алгебраическая функция над $\mathbb{C}(z)$. Функция $v_* = \exp(az/2) y_*$ согласно следствию из леммы 6 удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{a_1}{z} y' + \left(b^* + \frac{b_1^*}{z} + \frac{b_2^*}{z^2}\right) y = 0, \qquad a_1, b^*, b_1^*, b_2^* \in \mathbb{A}. \qquad (33)$$

Рассмотрим функцию $u = v_*'/v_* = y_*'/y_* + a/2$. Она является алгебраической и удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{a_1}{z}\,u + b^* + \frac{b_1^*}{z} + \frac{b_2^*}{z^2} = 0. \tag{34}$$

Пусть $b^* \neq 0$. Докажем, что $z = \infty$ не является точкой ветвления функции u. Отсюда будет следовать, что эта функция не имеет точек ветвления вообще.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = \infty$ в степенной ряд с рациональными показателями:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{r_k}, \qquad c_1 \neq 0, \qquad r_1 > r_2 > r_3 > \dots \tag{35}$$

Подставив разложение (35) в уравнение (34), убеждаемся, что $r_1 = 0,\ c_1^2 = -b^*$. Если не все показатели r_k в ряду (35) целые, то пусть r_{k_1} — наибольший дробный показатель такой, что $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставляя разложение (35) в уравнение (34) и рассматривая коэффициент при наибольшей дробной степени z, получаем $c_1 c_{k_1} = 0$, что противоречит нашим допущениям. Следовательно, $u \in \mathbb{C}(z)$.

Пусть теперь в уравнении (33) $b^* = 0$. Обозначив λ_1 и λ_2 показатели этого уравнения в точке $z = 0$, ввиду леммы 10 получим $a_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2,\ b_2^* = \lambda_1\lambda_2$. Функция $v_{**} = z^{-\lambda_1} v_*$ согласно лемме 6 удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{1-l}{z}\,y' + \frac{\alpha}{z}\,y = 0, \tag{36}$$

где $l = \lambda_2 - \lambda_1,\ \alpha = b_1^*$.

Если $\alpha = 0$, то уравнению (36) удовлетворяет функция $y \equiv 1$, а однородному уравнению, соответствующему (0.24) — функция $y_* = z^{\lambda_1} e^{-az/2}$, откуда снова получаем $y_*'/y_* \in \mathbb{C}(z)$. Если $\alpha \neq 0$, то алгебраическая функция $u = v_{**}'/v_{**} = -\lambda/z + a/2 + y_*'/y_*$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{1-l}{z}\,u + \frac{\alpha}{z} = 0. \tag{37}$$

Подставляя разложение (35) в уравнение (37), убеждаемся, что $r_1 = -1/2,\ c_1 = {}^{+}_{-}\sqrt{-\alpha},\ r_2 = -1,\ c_2 = l/2 - 1/4$. Докажем, что знаменатели рациональных показателей в ряду (35) не могут быть больше, чем 2.

Если это не так, то пусть r_{k_1} — наибольший показатель со знаменателем, содержащим простой множитель $p > 2$ или множитель 2^n, $n > 1$, а $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставив разложение (35) в уравнение (37), получим, что наибольший показатель со знаменателем, содержащим аналогичный множитель, равен $-1/2 + r_{k_1}$, а коэффициент при степени z с таким показателем — $2c_1c_{k_1} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что наибольший общий знаменатель показателей $r_1, r_2, r_3, \dots$ равен 2.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = 0$:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{t_k}, \qquad d_1 \neq 0, \qquad t_1 < t_2 < t_3 < \dots \tag{38}$$

Подставив разложение (38) в уравнение (37), убеждаемся, что $-1 \leqslant t_1 \leqslant 0$, причём если $t_1 = -1$, то $d_1 = l$. Поскольку порядки ветвления в точках $z = 0$ и $z = \infty$, очевидно, совпадают, то наибольший общий знаменатель показателей $t_1, t_2, t_3, \dots$ также равен 2. Обозначим t_{k_1} наименьший показатель вида $m+1/2$, где $m \in \mathbb{Z}$. Подставляя разложение (38) в уравнение (37), в случае $t_1 \neq -1$ получим $(m+3/2-l)d_{k_1} = 0$, а в случае $t_1 = -1$ соответственно $(m+3/2+l)d_{k_1} = 0$, откуда l должно равняться половине нечётного числа. Показатели дифференциального уравнения (36) в точке $z = 0$ есть числа l и 0. Следовательно, фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции $f_1(z)$ и $z^l f_2(z)$, где $f_1(z), f_2(z)$ — некоторые целые функции, определяемые однозначно с точностью до множителя из $\mathbb{C}$, $f_1(0)f_2(0) \neq 0$. Нетрудно проверить, что уравнению (36) удовлетворяют функции

$$K_{-l}(2\sqrt{\alpha z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!(1-l)\dots(n-l)} z^n,$$

$$z^l\, K_l(2\sqrt{\alpha z}) = z^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!(l+1)\dots(l+n)} z^n,$$

где $K_\lambda(z)$ — функция Зигеля (см. [36:12, стр. 18, 19]). Однородное уравнение, соответствующее исходному уравнению (0.24), имеет фундаментальную систему решений $e^{-az/2}z^{\lambda_1}f_1(z)$, $e^{-az/2}z^{l+\lambda_1}f_2(z)$. Эти функции вместе с исходной функцией $f(z)$ образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения 3-го порядка (2.11), где $m = 2$. Но согласно доказанному И. Андрэ (см.

[38:1, следствие 4.4]), фундаментальную систему решений в нашем случае должны образовывать функции $f(z)$, $z^{\alpha_1}f_3(z)$, $z^{\alpha_2}f_4(z)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, $f_3(z), f_4(z)$ — E-функции. Тогда $e^{-az/2}f_1(z)$ и $e^{-az/2}f_2(z)$ должны быть E-функциями, что при $\alpha \neq 0$ невозможно. Лемма 17 доказана.

Записав функцию $u = y_*'/y_* = P/S$ в виде суммы простейших дробей и подставив её в уравнение (34), приходим к выводу, что $S = z(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_l)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$, $y_*'/y_* = P/S = b_0 + b/z + \sum_{j=1}^{l} 1/(z-\alpha_j)$, $b_0, b \in \mathbb{A}$.

Представим функцию f в виде

$$f = y_* \int w\,dz. \tag{39}$$

Дифференцируя равенство (39), получаем

$$f' = \frac{P}{S}\,f + y_* w, \tag{40}$$

откуда следует, что $y_* w S$ есть целая функция. Подставив равенство (39) в уравнение (0.24), получим, что $w' = (-2y_*'/y_* - a - a_1/z)w + (c + c_1/z)/y_*$, а функция $y_* w S$ согласно лемме 4 удовлетворяет уравнению $y' = (S'/S - a - a_1/z - P/S)y + (c + c_1/z)S$, равносильному

$$y' = \left(a^* + \frac{a_1^*}{z}\right) y + \left(c + \frac{c_1}{z}\right) S, \quad a^*, a_1^*, c, c_1 \in \mathbb{A}.$$

Следовательно, $y_* w S = b_1 \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $\alpha, \lambda \in \mathbb{A}$, $b_1 \in \mathbb{C}$, $P_1 \in \mathbb{C}[z]$ (см. доказательство теоремы 6). Отсюда и уравнения (40) получим, что E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \frac{P}{S}\,y + \frac{b_1}{S}\,\varphi_\lambda(\alpha z) + \frac{P_1}{S}. \tag{41}$$

Согласно лемме 2.1, $b_1 \in \mathbb{A}$, $P, P_1, S \in \mathbb{A}[z]$. Тогда ввиду уравнения (40) $y_* w S$ есть E-функция, а $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Из равенства (41) и условий теоремы следует, что функции $f(z)$ и $\varphi_\lambda(\alpha z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть $G(x) = x^r + u_{r-1}x^{r-1} + \dots + u_1 x + u_0$ — минимальный многочлен функции $f(z)$ над полем $\mathbb{P} = \mathbb{C}(z, \varphi_\lambda(\alpha z))$. Сопряжённые над $\mathbb{P}$ с $f(z)$ функции $f_1 = f(z), f_2, \dots, f_r$ удовлетворяют уравнению (41) (см. [36:12, гл. 9, следствие из леммы

2]). Следовательно, $f_2 = f + c_2\psi, \dots, f_r = f + c_r\psi$, где $\psi = e^{b_0 z} z^{b-1} S$ — решение однородного уравнения $y' = (P/S)y$, $c_i \neq c_j \neq 0$ при $i \neq j$. Подставив полученные выражения для функций f_j, $j = 2, \dots, r$ в тождество $G(f_j) - G(f) = 0$, имеем

$$rf^{r-1}c_j\psi + \dots + (c_j\psi)^r + ((r-1)f^{r-2}c_j\psi + \dots + (c_j\psi)^{r-1})u_{r-1} + \dots +$$
$$+(2fc_j\psi + (c_j\psi)^2)u_2 + c_j\psi u_1 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, r,$$

что равносильно

$$(c_j\psi)^{r-1} + (c_j\psi)^{r-2}v_{r-2} + \dots + c_j\psi v_1 + v_0 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, r,$$
$$v_k \in \mathbb{P}[f],\ k = 0, 1, \dots, r-2,\ v_{r-2} = rf + u_{r-1}.$$

При $r = 2$ отсюда имеем $c_2\psi + 2f + u_1 = 0$. Если $r \geqslant 3$, то полученные равенства можно рассматривать как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно функций $\psi^{r-1}, \psi^{r-2}v_{r-2}$, $\dots, \psi v_1$, определитель матрицы коэффициентов которой есть определитель Вандермонда $V = V(c_2, \dots, c_r) \neq 0$, умноженный на $c_2 \dots c_r \neq 0$. Согласно правилу Крамера,

$$\psi^{r-1}D = -v_0 \begin{vmatrix} 1 & c_2^{r-2} & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_r^{r-2} & \dots & c_r \end{vmatrix}, \quad \psi^{r-2}v_{r-2}D = -v_0 \begin{vmatrix} c_2^{r-1} & 1 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_r^{r-1} & 1 & \dots & c_r \end{vmatrix},$$

где $D = c_2 \dots c_r V$. Умножив первое равенство на v_{r-2} и разделив на второе, получим $\psi = c_* v_{r-2} = c_*(rf + u_{r-1})$, $c_* \in \mathbb{C}$. Таким образом, при любом $r \in \mathbb{N}$ $f(z) = c^* e^{b_0 z} z^{b-1} S + u^*$, где $c^* \in \mathbb{C}$, $u^* \in \mathbb{P}$. Ввиду алгебраической зависимости функций $f(z)$ и $\varphi_\lambda(\alpha z)$ это возможно лишь в следующих случаях (см. [36:12, гл. 5, лемма 6]):
1. $\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $c^* = 0$, $f(z) \in \mathbb{P}$.
2. $\lambda = k \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha = \sigma b_0$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $f(z) \in \mathbb{C}(z, e^{\alpha_* z})$, $\alpha_* \in \mathbb{A}$.

Рассмотрим случай 1. Пусть $f(z) = A/B$, где

$$A = A_k\varphi_\lambda^k(\alpha z) + \dots + A_1\varphi_\lambda(\alpha z) + A_0, \quad B = B_n\varphi_\lambda^n(\alpha z) + \dots + B_1\varphi_\lambda(\alpha z) + B_0,$$

$A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_n \in \mathbb{C}[z]$, $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Докажем, что $n = 0$. Дифференцируя равенство $Bf = A$, с учётом (41) получим

$$\left(B' + \frac{P}{S}B\right) f = A' - (b_1\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1)\frac{B}{S}. \qquad (42)$$

Отсюда, поскольку степень многочлена $B'+PB/S$ относительно $\varphi_\lambda(\alpha z)$ не превосходит степени B, следует, что эти многочлены отличаются друг от друга множителем из $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что $n \geqslant 1$. Тогда

$$(B_n' + n(\alpha - \lambda/z)B_n + (P/S)B_n)/B_n =$$

$$= (B_{n-1}' + (n-1)(\alpha - \lambda/z)B_{n-1} + (P/S)B_{n-1} + (n\lambda/z)B_n)/B_{n-1},$$

что равносильно равенству

$$\frac{B_n'}{B_n} + \alpha - \frac{\lambda}{z} = \frac{B_{n-1}'}{B_{n-1}} + \frac{n\lambda B_n}{zB_{n-1}}. \tag{43}$$

Пусть многочлены B_n и B_{n-1} имеют число 0 корнем кратности, соответственно, $l \geqslant 0$ и $l_1 \geqslant 0$. Так как в разложении на простейшие дроби левой (а следовательно, и правой) части равенства (43) могут присутствовать только дроби с линейными функциями в знаменателе, то $l_1 \leqslant l$. Если $l_1 < l$, то $\lambda \in \mathbb{N}$, что противоречит условию. Поэтому $l_1 = l$. Если $\xi \neq 0$ — корень многочлена B_n, то из равенства (43) следует, что он должен быть также корнем многочлена B_{n-1} не меньшей кратности. Но тогда $\deg B_n \leqslant \deg B_{n-1}$ и из (43) получаем, что $\alpha = 0,\ f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Таким образом, далее можно считать, что $n = 0,\ B \in \mathbb{C}[z]$.

Допустим, что $k \geqslant 3$. Тогда из равенства (42) получим

$$(A_k' + k(\alpha - \lambda/z)A_k)/A_k = (A_{k-1}' + (k-1)(\alpha - \lambda/z)A_{k-1} + (k\lambda/z)A_k)/A_{k-1},$$

что равносильно равенству

$$\frac{A_k'}{A_k} + \alpha - \frac{\lambda}{z} = \frac{A_{k-1}'}{A_{k-1}} + \frac{k\lambda A_k}{zA_{k-1}}.$$

Поскольку полученное равенство полностью аналогично (43), делаем вывод, что $k \leqslant 2$,

$$f(z) = \frac{P_2}{P_5}\,\varphi_\lambda^2(\alpha z) + \frac{P_3}{P_5}\,\varphi_\lambda(\alpha z) + \frac{P_4}{P_5}, \tag{44}$$

где $P_2, \ldots, P_5$ — взаимно простые многочлены из $\mathbb{C}[z]$. Согласно лемме 2.1, можно считать, что $P_2, \ldots, P_5 \in \mathbb{A}[z]$. Многочлен P_5 не может иметь корнем число $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, так как отсюда следовало бы, что $\varphi_\lambda(\alpha\xi) \in \mathbb{A}$. Поэтому $P_5 = z^l,\ l \in \mathbb{Z}^+$. Но тогда, выражая $\varphi_\lambda(\alpha z)$ через

$\varphi_{\lambda+l}(\alpha z)$ по формуле (0.10), получаем, что многочлены в числителе преобразованной правой части равенства (44) также делятся на z^l. Следовательно, в случае 1 утверждение теоремы справедливо.

Случай 2 рассматривается аналогично случаю 1 с той лишь разницей, что при $\lambda = 0$ к противоречию должны приводиться утверждения, что многочлен B содержит хотя бы два члена различных степеней относительно $e^{\alpha_* z} = \varphi_0(\alpha_* z)$, а многочлен A — более двух таких членов различных ненулевых степеней. В результате вместо равенства (44) мы получим равенство

$$f(z) = \frac{P_2}{P_5}\,\varphi_0(\alpha_* lz) + \frac{P_3}{P_5}\,\varphi_0(\alpha_* sz) + \frac{P_4}{P_5}, \quad P_2, \ldots, P_5 \in \mathbb{A}[z],\ l, s \in \mathbb{Z},$$

и, повторяя оставшиеся рассуждения в доказательстве случая 1, завершаем доказательство теоремы 10.

Перейдём к доказательству теоремы 11.

Если функции $f(z)$ и $f'(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то утверждение теоремы 11 следует из теоремы I А.Б. Шидловского. Если же они алгебраически зависимы, то при условиях теоремы 11 функция $f(z)$ имеет вид (0.25), где $\sigma\alpha P_0 P_1 \not\equiv 0$, $\sigma \neq 1$, либо вид (0.26), где $\alpha P_0 \not\equiv 0$. Непосредственным вычислением можно найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет такая функция и доказать следующие две леммы.

Лемма 18. *Функция $f(z)$, имеющая вид (0.25), удовлетворяет уравнениям*

$$y' = \left(P_0' + \left(\alpha - \frac{k}{z}\right)P_0\right)\varphi_k(\alpha z) + \left(P_1' + \left(\sigma\alpha - \frac{k}{z}\right)P_1\right)\varphi_k(\sigma\alpha z) +$$

$$+\frac{k}{z}P_0 + \frac{k}{z}P_1 + P', \tag{45}$$

$$y' = \left(\alpha - \frac{k}{z} + \frac{P_0'}{P_0}\right)y + T\varphi_k(\sigma\alpha z) + R,$$

$$y'' = \left((\sigma+1)\alpha - \frac{2k}{z} + \frac{P_0'}{P_0} + \frac{T'}{T}\right)y' + R_1 y + R_2, \tag{46}$$

где

$$T = P_1' + \left((\sigma-1)\alpha - \frac{P_0'}{P_0}\right)P_1, \quad R, R_1, R_2 \in \mathbb{A}(z).$$

Лемма 19. *Функция $f(z)$, имеющая вид (0.26), удовлетворяет уравнениям*

$$y' = \left(P_0' + 2\left(\alpha - \frac{\lambda}{z}\right)P_0\right)\varphi_\lambda^2(\alpha z) +$$

$$+\left(P_1' + \left(\alpha - \frac{\lambda}{z}\right)P_1 + \frac{2\lambda}{z}P_0\right)\varphi_\lambda(\alpha z) + \frac{\lambda}{z}P_1 + P', \tag{47}$$

$$y' = \left(2\left(\alpha - \frac{\lambda}{z}\right) + \frac{P_0'}{P_0}\right)y + T\varphi_\lambda(\alpha z) + R,$$

$$y'' = \left(3\left(\alpha - \frac{\lambda}{z}\right) + \frac{P_0'}{P_0} + \frac{T'}{T}\right)y' + R_1 y + R_2, \tag{48}$$

где

$$T = P_1' + \left(-\alpha + \frac{\lambda}{z} - \frac{P_0'}{P_0}\right)P_1 + \frac{2\lambda}{z}P_0, \quad R, R_1R_2 \in \mathbb{A}(z).$$

Легко видеть, что при условиях теоремы 11 рациональные функции, являющиеся коэффициентами дифференциальных уравнений (45) – (48), определены однозначно. Докажем, что всякая точка $\xi \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$, для которой числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 являются линейно зависимыми над $\mathbb{A}$, есть особая точка уравнения (0.27). Действительно, в силу линейной независимости над $\mathbb{A}$ значений функций $\varphi_k(\alpha z)$, $\varphi_k(\sigma\alpha z)$ (соответственно $\varphi_\lambda(\alpha z)$, $\varphi_\lambda^2(\alpha z)$) и 1 в точке ξ из равенств (0.25), (0.26), (45), (47) следует, что числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$ и 1 линейно зависимы тогда и только тогда, когда вектор $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ коллинеарен, соответственно, векторам

$$\left\{P_0'(\xi) + \left(\alpha - \frac{k}{\xi}\right)P_0(\xi), \quad P_1'(\xi) + \left(\sigma\alpha - \frac{k}{\xi}\right)P_1(\xi)\right\}, \tag{49}$$

$$\left\{P_0'(\xi) + 2\left(\alpha - \frac{\lambda}{\xi}\right)P_0(\xi), \quad P_1'(\xi) + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\xi}\right)P_1(\xi) + \frac{2\lambda}{\xi}P_0(\xi)\right\}. \tag{50}$$

Если $P_0(\xi) = 0$, $P_1(\xi) \neq 0$, то отсюда $P_0'(\xi) = 0$ и, следовательно, ξ есть нуль многочлена P_0 кратности не меньше чем 2. Но тогда ξ — полюс 1-го порядка функции T и коэффициента при y' в уравнении

(46) (соответственно (48)). Случай $P_1(\xi) = 0,\ P_0(\xi) \neq 0$ для функции $f(z)$ вида (0.25) разбирается аналогично, а для функции вида (0.26) в силу пропорциональности векторов $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ и (50) имеем $P_1'(\xi) + (2\lambda/\xi)P_0(\xi) = 0$. Но тогда ξ — нуль функции T и полюс 1-го порядка коэффициента при y' в уравнении (48). Если $P_0(\xi)P_1(\xi) \neq 0$, то в силу пропорциональности векторов $\{P_0(\xi), P_1(\xi)\}$ и (49) (соответственно (50)) имеем, соответственно,

$$\frac{P_1'(\xi)}{P_1(\xi)} - \frac{P_0'(\xi)}{P_0(\xi)} + (\sigma - 1)\alpha = 0,$$

$$\frac{P_1'(\xi)}{P_1(\xi)} - \frac{P_0'(\xi)}{P_0(\xi)} + \frac{2\lambda}{\xi}\frac{P_0(\xi)}{P_1(\xi)} - \alpha + \frac{\lambda}{\xi} = 0.$$

Отсюда $T(\xi) = 0$ и точка ξ снова является полюсом 1-го порядка коэффициента при y'. Если, наконец, $P_0(\xi) = P_1(\xi) = 0$, то ξ — неособая точка функции T и вновь полюс 1-го порядка коэффициента при y'. Теорема 11 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 9.

Достаточность условий теоремы следует из того, что функция $f(z)$, определяемая равенством (0.22) или (0.23) (где E-функция $f_1(z)$ удовлетворяет уравнению (0.24)), является E-функцией, линейно зависимой с $f'(z), f''(z)$ и 1 над $\mathbb{C}(z)$.

Для доказательства необходимости заметим, что согласно лемме 16 всякая E-функция, удовлетворяющая уравнению (0.27), имеет вид (24) либо

$$f(z) = \frac{P_0}{P_3}f_1(z) + \frac{P_1}{P_3}f_1'(z) + \frac{P_2}{P_3}, \tag{51}$$

где $P_0, \ldots, P_3$ — взаимно простые многочлены из $\mathbb{A}[z]$, $f_1(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению (0.24). Если функции $f_1(z)$, $f_1'(z)$ и 1 линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$, то функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, и доказываемая теорема следует из теоремы 6. Предположим, что функции $f_1(z), f_1'(z)$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Многочлен P_3 не может иметь корнем число $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, так как отсюда следовала бы линейная зависимость чисел $f_1(\xi), f_1'(\xi)$ и 1 над $\mathbb{A}$, что противоречит теореме 11. Поэтому $P_3 = z^l,\ l \in \mathbb{Z}^+$. Рассмотрим многочлен $P_4 \in \mathbb{A}[z],\ \deg P_4 \leqslant l$, такой, что функция

$g(z) = (f_1(z) - P_4)/z^{l+1}$ является целой и, следовательно, E-функцией. Тогда $f_1(z) = z^{l+1}g(z) + P_4$ и, подставляя это выражение в (51), получим $f(z) = P_5 g(z) + P_6 g'(z) + P_7$, где $P_5, P_6, P_7 \in \mathbb{A}[z]$. Повторяя конец доказательства леммы 14, заключаем, что функция $g(z)$ либо $g(z)+c$, где $c \in \mathbb{A}$, удовлетворяет уравнению (0.24). Если же $f(z)$ имеет вид (24), то рассуждения проводятся аналогично, с использованием в случае $P_3 = z^l$ равенства (0.10). Теорема 9 доказана.

§4. Доказательство теоремы 13

Лемма 20. *Производная E-функции, получаемой с помощью операций, перечисленных в условии теоремы 13, из алгебраических констант и гипергеометрических E-функций ${}_lF_q(z)$ при некотором наборе пар (l, q), может быть выражена таким же способом.*

Доказательство. Назовём E-функцию $f(z)$ функцией k-й ступени, если она получена с помощью k операций, описанных в условии леммы 20, где k — наименьшее из возможных. Если $k = 0$, то лемма справедлива ввиду равенства

$$ {}_lF'_q\left(\begin{matrix}\nu_1, \ldots, \nu_l \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_q\end{matrix}\middle| z\right) = \frac{\nu_1 \ldots \nu_l}{\lambda_1 \ldots \lambda_q}\, {}_lF_q\left(\begin{matrix}\nu_1+1, \ldots, \nu_l+1 \\ \lambda_1+1, \ldots, \lambda_q+1\end{matrix}\middle| z\right) $$

(см. [22:1, п. 5.2.2]). Пусть лемма справедлива для всех функций с величиной ступеней $k \leqslant n-1$, $n \in \mathbb{N}$, докажем её для произвольной функции $f(z)$ ступени n. Если $f(z) = f_1(z) \pm f_2(z)$, $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, $f(z) = f_1(\alpha z)$, где $f_1(z), f_2(z)$ — функции ступени $n-1$, то шаг индукции, очевидно, проходит. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a)_n/(b)_n z^n$, а $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — функция ступени $n-1$. Так как функция $f_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ согласно индуктивному предположению выражается с помощью операций, описанных в условии леммы 20, то и

$$ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{(a)_n}{(b)_n} z^{n-1} = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{(a+1)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}} z^{n-1}, $$

очевидно, выражается таким же образом. Лемма 20 доказана.

Ввиду теоремы 9, леммы 20 и того, что при $\nu \in \mathbb{Z}^-$ $A_{\mu,\nu} \in \mathbb{Q}[z]$, доказательство теоремы 13 достаточно провести в случае, когда E-функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (0.24). Если обозначить λ, λ_1

показатели соответствующего ему однородного дифференциального уравнения в точке $z = 0$, то уравнение (0.24) примет вид

$$y'' + \left(a + \frac{1-\lambda-\lambda_1}{z}\right)y' + \left(b + \frac{b_1}{z} + \frac{\lambda\lambda_1}{z^2}\right)y = c + \frac{c_1}{z}. \qquad (52)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{N}$. Как установлено в конце доказательства леммы 14, найдётся E-функция $f_*(z)$, удовлетворяющая уравнению вида (0.24) и такая, что $f(z) = z^\lambda f_*(z) + P,\ P \in \mathbb{A}[z]$. Так как $f_*(z) = z^{-\lambda}(f(z) - P)$, то показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению, которому удовлетворяет $f_*(z)$, согласно леммам 6 и 10, равны 0 и $\lambda_1 - \lambda$. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что либо $(\lambda, \lambda_1) = (0, 0)$, либо $\lambda \notin \mathbb{Z}^+$.

Рассмотрим функцию $g(z) = z^{-\lambda}e^{\alpha z}f(z)$, где $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$. Согласно лемме 6 она удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha + \frac{1+\lambda-\lambda_1}{z}\right)y' + \frac{b_1 + a\lambda - \alpha(1+\lambda-\lambda_1)}{z}y =$$

$$= cz^{-\lambda}e^{\alpha z} + c_1 z^{-\lambda-1}e^{\alpha z}.$$

Тогда функция $g_1(z) = g(z/(2\alpha - a)) = z^{-\lambda}f_1(z)$, где $f_1(z) = a_1 e^{\alpha_1 z}$ $f(z/(2\alpha - a)),\ \alpha_1 = \alpha/(2\alpha - a),\ a_1 \in \mathbb{A}$, удовлетворяет уравнениям

$$y'' + \left(-1 + \frac{1+\lambda-\lambda_1}{z}\right)y' - \frac{a_2}{z}y = a_3 z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z} + a_4 z^{-\lambda-1}e^{\alpha_1 z}, \qquad (53)$$

$$zy'' + (-z + 1 + \lambda - \lambda_1)y' - a_2 y = a_3 z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z} + a_4 z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z}. \qquad (54)$$

Докажем, что $\lambda, \lambda_1, a_2 \in \mathbb{Q}$. Фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (52), образуют функции $z^\lambda f_2(z)$ и $z^{\lambda_1}f_3(z)$ либо, если $\lambda - \lambda_1 \in \mathbb{Z}$, $z^\lambda f_2(z)$ и $z^\lambda(f_2(z)\ln z + f_3(z))$, где $f_2(z)$, $f_3(z)$ — целые функции (см., например, [12:1, гл. 4, §§ 3, 4]). Всякое решение уравнения (52), как и соответствующего ему однородного уравнения, удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению 3-го порядка (2.11) при $m = 2$. Тогда функции $f(z)$, $z^\lambda f_2(z)$ и $z^{\lambda_1}f_3(z)$ (либо $z^\lambda(f_2(z)\ln z + f_3(z))$) образуют фундаментальную систему решений этого однородного дифференциального уравнения. Согласно доказанному И. Андрэ ([38:1, следствие 4.4 и замечание на стр. 746]) $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, а $f_2(z)$ есть E-функция. Следовательно, E-функция $f_2(z/(2\alpha - a))e^{\alpha_1 z}$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (53). Если взять $\lambda \geqslant \lambda_1$, то показателями последнего уравнения будут числа 0 и $\lambda_1 - \lambda \leqslant 0$. Поэтому всякое его целое решение должно быть пропорционально $A_{1+\lambda-\lambda_1,a_2}(z)$. Но тогда $A_{1+\lambda-\lambda_1,a_2}(z)$ есть E-функция и, следовательно (см. [10:2]), $a_2 \in \mathbb{Q}$.

Выразим $f(z)$ через функции Куммера методом вариации постоянных. В случае $\lambda - \lambda_1 \notin \mathbb{Z}$ однородное уравнение, соответствующее (53), имеет фундаментальную систему решений $\{A_{1+\lambda-\lambda_1,a_2}(z); z^{\lambda_1-\lambda}A_{1+\lambda_1-\lambda,a_2+\lambda_1-\lambda}(z)\}$ и вронскиан $(\lambda_1-\lambda)z^{\lambda_1-\lambda-1}e^z$ (см. [22:1, п. 7.5] или лемму 4.6). Отсюда нетрудно получить, что

$$f(z/(2\alpha - a)) =$$

$$= a_5 A_{1+\lambda-\lambda_1,a_2}(z) z^{\lambda} e^{-\alpha_1 z} \int z^{-\lambda}(a_3 z + a_4) e^{(\alpha_1-1)z} A_{1+\lambda_1-\lambda,a_2+\lambda_1-\lambda}(z)\,dz +$$

$$+ a_6 A_{1+\lambda_1-\lambda,a_2+\lambda_1-\lambda}(z) z^{\lambda_1} e^{-\alpha_1 z} \int z^{-\lambda_1}(a_3 z + a_4) e^{(\alpha_1-1)z} A_{1+\lambda-\lambda_1,a_2}(z)\,dz.$$

Но в случае $\lambda - \lambda_1 \in \mathbb{Z}$ последнее рассуждение некорректно, так как, например, при $\lambda = \lambda_1$ не ясно, как выразить через гипергеометрические функции фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (53) (см. [22:1, п. 7.5]).

Применим к обеим частям уравнения (54) преобразование Лапласа, ставящее в соответствие функции $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ функцию

$$v\hat{}(z) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-zt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{z^{n+1}}$$

(см., например, [13:1, гл. 2]). Из свойств преобразования Лапласа (см. там же) следует, что

$$(zv)\hat{} = -(v\hat{})'; \quad (v')\hat{} = zv\hat{} - v(0); \quad z\left(\int_0^z v(t)\,dt\right)\hat{} = v\hat{};$$

$$(zv')\hat{} = -z(v\hat{})' - v\hat{}; \quad (zv'')\hat{} = -z^2(v\hat{})' - 2zv\hat{} + v(0). \qquad (55)$$

Преобразование Лапласа можно использовать как формальное преобразование степенных рядов с произвольными показателями степеней следующим образом. При $\varkappa \in \mathbb{C}$, $Re\,\varkappa > -1$ имеем $(z^{\varkappa})\hat{} =$

$\Gamma(\varkappa+1)z^{-\varkappa-1}$ (см. [13:1, гл. 2, §4]). Поскольку правая часть последнего равенства имеет смысл при всех $\varkappa\in\mathbb{C},\ -\varkappa\notin\mathbb{N}$, то можно определить преобразование Лапласа степенного ряда $g(z)=z^{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ равенством

$$g\hat{\ }(z)=\left(z^{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\hat{\ }=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z^{n+\varkappa})\hat{\ }=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma(\varkappa+n+1)z^{-\varkappa-n-1}=$$

$$=\Gamma(\varkappa+1)z^{-\varkappa-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varkappa+1)\ldots(\varkappa+n)a_n}{z^n},\tag{56}$$

где $\varkappa\in\mathbb{C},\ -\varkappa\notin\mathbb{N}$. Если $\varkappa\notin\mathbb{Z}^-$, то вместо формул (55) получим

$$(zg)\hat{\ }=-(g\hat{\ })';\quad (g')\hat{\ }=zg\hat{\ };\quad z\left(\int_0^z g(t)\,dt\right)\hat{\ }=g\hat{\ };$$

$$(zg')\hat{\ }=-z(g\hat{\ })'-g\hat{\ };\quad (zg'')\hat{\ }=-z^2(g\hat{\ })'-2zg\hat{\ }.\tag{57}$$

Первые два из равенств (57) доказываются непосредственной проверкой, путём подстановки $g(z)=z^{\varkappa},\ \varkappa\notin\mathbb{Z}^-$, остальные являются их следствием. В результате применения преобразования Лапласа к равенству (54), где $y=g_1(z)$, с учётом равенств (57) в случае $(\lambda,\lambda_1)\neq(0,0)$ и равенств (55) в случае $(\lambda,\lambda_1)=(0,0)$ получим

$$(-z^2+z)(y\hat{\ })'+(1-a_2+(\lambda-\lambda_1-1)z)y\hat{\ }=a_3(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ }+a_4(z^{-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ },$$

$$(y\hat{\ })'+\left(\frac{1-a_2}{z}+\frac{\lambda-\lambda_1-a_2}{1-z}\right)y\hat{\ }=\frac{1}{z-z^2}(a_3(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ }+a_4(z^{-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ }).$$

Тогда ввиду леммы 4

$$\frac{(z^{-\lambda}y\hat{\ })'}{\Gamma(1-\lambda)}+\left(\frac{1-a_2+\lambda}{z}+\frac{\lambda-\lambda_1-a_2}{1-z}\right)\frac{z^{-\lambda}y\hat{\ }}{\Gamma(1-\lambda)}=$$

$$=\frac{1}{z-z^2}\left(\frac{1-\lambda}{z}\,\frac{a_3z^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ }+\frac{a_4z^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}(z^{-\lambda}e^{\alpha_1z})\hat{\ }\right).\tag{58}$$

Из равенств (56) и $1/z^{n+1}=(z^n)\hat{\ }/n!$ следует, что при $\alpha\in\mathbb{C},\ -\alpha\notin\mathbb{N}$

$$\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(z^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\hat{\ }=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}a_nz^n\right)\hat{\ }.\tag{59}$$

Поэтому
$$\frac{z^{1-\lambda}(z^{1-\lambda}e^{\alpha_1 z})\hat{}}{\Gamma(2-\lambda)}=(A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z))\hat{};\quad \frac{z^{-\lambda}(z^{-\lambda}e^{\alpha_1 z})\hat{}}{\Gamma(1-\lambda)}=(A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z))\hat{},$$
а функция Φ, определяемая равенством $\Phi\hat{}=z^{-\lambda}(g_1(z))\hat{}/\Gamma(1-\lambda)$, является E-функцией, удовлетворяющей согласно (58) уравнению
$$(\Phi\hat{})'+\left(\frac{1-a_2+\lambda}{z}+\frac{\lambda-\lambda_1-a_2}{1-z}\right)\Phi\hat{}=$$
$$=\frac{1}{z-z^2}\left(\frac{a_7}{z}(A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z))\hat{}+a_4(A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z))\hat{}\right). \qquad (60)$$
Заметим, что при $\lambda\lambda_1\neq 0$ $\Phi(0)=v(0)=0$, а при $\lambda\lambda_1=0$ согласно нашим допущениям $\lambda_1=0$. Умножив (60) на $z-z^2$, с помощью формул (55) получим
$$(z\Phi'')\hat{}+((-z+1-\lambda_1)\Phi')\hat{}-(a_2-\lambda)\Phi\hat{}=a_4(A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z))\hat{}+$$
$$+a_7\left(\int A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z)\,dz\right)\hat{},$$
откуда
$$\Phi''+\left(-1+\frac{1-\lambda_1}{z}\right)\Phi'-\frac{a_2-\lambda}{z}\Phi=\frac{a_4}{z}A_{1,1-\lambda}(\alpha_1 z)+\frac{a_7}{z}\int A_{1,2-\lambda}(\alpha_1 z)\,dz. \qquad (61)$$
Если $a_2-\lambda\in\mathbb{Z}^-$, то функция $A_{1-\lambda_1,a_2-\lambda}(z)$, удовлетворяющая однородному уравнению, соответствующему (61), является многочленом степени $k=\lambda-a_2$. Тогда ввиду (59) некоторый многочлен P степени k является решением однородного уравнения, соответствующего линейному дифференциальному уравнению
$$Q_2y''+Q_1y'+Q_0y=Qe^{\alpha_1 z},\qquad Q_2,Q_1,Q_0,Q\in\mathbb{A}[z], \qquad (62)$$
которому удовлетворяет функция $f_1(z)$. Согласно лемме 7 функция $f_1^{(k)}(z)$ является решением аналогичного уравнения, а функция $P^{(k)}\equiv c\in\mathbb{A}$ удовлетворяет соответствующему (62) однородному уравнению. Последнее возможно только при $Q_0\equiv 0$. Следовательно, ввиду леммы 4 и теоремы 6 $e^{-\alpha_1 z}f_1^{(k+1)}(z)=P_1\varphi_{\lambda_2}(z)+P_2$, где $P_1,P_2\in\mathbb{A}[z]$, $\lambda_2\in\mathbb{Q}$. Отсюда вытекает справедливость теоремы 13 в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $\nu = a_2 - \lambda \notin \mathbb{Z}^-$. Рассмотрим функцию Ψ, такую, что $z^{\nu-1}(z^{\nu-1}\Psi)^{\hat{}}/\Gamma(\nu) = \Phi^{\hat{}}$. Ввиду равенства (59) функция Ψ является E-функцией и, кроме того,

$$(A_{1,2-\lambda}(z))^{\hat{}} = \frac{z^{\nu+1}(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(z))^{\hat{}}}{\Gamma(\nu+2)};\ \ (A_{1,1-\lambda}(z))^{\hat{}} = \frac{z^{\nu}(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(z))^{\hat{}}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Перепишем равенство (60) в виде

$$\left(\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}(z^{\nu-1}\Psi)^{\hat{}}\right)' + \left(\frac{1-a_2+\lambda}{z} + \frac{\lambda-\lambda_1-a_2}{1-z}\right)\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}(z^{\nu-1}\Psi)^{\hat{}} =$$

$$= \frac{1}{1-z}\left(\frac{a_7\, z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+2)}(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}} + \frac{a_4\, z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}}\right),$$

откуда согласно лемме 4

$$((z^{\nu-1}\Psi)^{\hat{}})' + \frac{\lambda-\lambda_1-a_2}{1-z}(z^{\nu-1}\Psi)^{\hat{}} =$$

$$= \frac{1}{1-z}\left(a_8(z^{\nu+1}A_{\nu+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}} + a_9(z^{\nu}A_{\nu+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}}\right),$$

$$(1-z)((z^{a_2-\lambda-1}\Psi)^{\hat{}})' + (\lambda-\lambda_1-a_2)(z^{a_2-\lambda-1}\Psi)^{\hat{}} =$$
$$= a_8(z^{a_2-\lambda+1}A_{a_2-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}} + a_9(z^{a_2-\lambda}A_{a_2-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))^{\hat{}}.$$

Из полученного равенства с учётом формул (57) следует

$$(z^{a_2-\lambda-1}\Psi)' + \left(-1 + \frac{1-a_2+\lambda-\lambda_1}{z}\right)z^{a_2-\lambda-1}\Psi =$$

$$= z^{a_2-\lambda-1}(a_8 z A_{a_2-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_9 A_{a_2-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z)),$$

откуда согласно лемме 4

$$(z^{-\lambda_1}e^{-z}\Psi)' = z^{-\lambda_1}e^{-z}(a_8 z A_{a_2-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_9 A_{a_2-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z)),$$

$$\Psi = e^z z^{\lambda_1}\int z^{-\lambda_1}e^{-z}(a_8 z A_{a_2-\lambda+2,2-\lambda}(\alpha_1 z) + a_9 A_{a_2-\lambda+1,1-\lambda}(\alpha_1 z))\,dz.$$

Поскольку функция $f_1(z)$ получается из Ψ путём умножения n-го члена степенного разложения на $(\nu)_n/(1-\lambda)_n$, теорема 13 доказана.

Глава 4. Алгебраические свойства решений гипергеометрических уравнений

§1. Доказательство теорем 14 и 15

Лемма 1. *Функция (либо, при $l > q$, формальный степенной ряд)* $z^{\gamma}{}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)$, *где* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $l, q \in \mathbb{Z}^+$, $l + q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\left(\prod_{i=1}^{q}(\delta + p(\lambda_i - 1) - \gamma) - \alpha p^{q-l} z^p \prod_{i=1}^{l}(\delta + p\nu_i - \gamma)\right) y = p^q z^{\gamma} \prod_{i=1}^{q}(\lambda_i - 1),$$

пустое произведение скобок равно 1.

Следствие 1. *Функция (либо формальный степенной ряд)* $z^{\gamma}{}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$L(\vec{\nu} - \gamma; \vec{\lambda} - \gamma; z)\, y = (\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_q - 1) z^{\gamma}.$$

Следствие 2. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geqslant \max(1, l)$, *то функции (0.29) образуют фундаментальную систему решений уравнения* $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)\, y = 0$ *без ограничения* $\lambda_1 = 1$.

Следствие 3. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geqslant \max(1, l)$, *то функции (0.29), умноженные на* z^{γ}, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$, *образуют фундаментальную систему решений уравнения* $L(\vec{\nu} - \gamma; \vec{\lambda} - \gamma; z) y = 0$.

Следствие 4. *Если* $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geqslant \max(1, l)$, *то функции (0.30) образуют фундаментальную систему решений уравнения* $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\, y = 0$.

Следствие 5. *Если* $\nu_i - \nu_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, *то* l *формальных степенных рядов*

$$z^{-\nu_k}{}_qF_{l-1}(\nu_k + 1 - \vec{\lambda}; \nu_k + 1 - \vec{\nu}; (-1)^{q-l}/z), \quad k = 1, \ldots, l$$

линейно независимы и удовлетворяют уравнению $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)\, y = 0$ *без ограничения* $\lambda_1 = 1$ *(как в [22:1, п. 5.7.1, формула (8)]).*

Доказательство. Рассуждая аналогично [36:12, гл. 5, §1], получим

$$(\delta + pa - \gamma) z^{pn+\gamma} = p(n + a) z^{pn+\gamma},\ a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\prod_{i=1}^{q}(\delta + p(\lambda_i - 1) - \gamma)\, y = p^q z^{\gamma} \prod_{i=1}^{q}(\lambda_i - 1) +$$

$$+\alpha p^q z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_{n+1} \ldots (\nu_l)_{n+1}}{(\lambda_1)_n \ldots (\lambda_q)_n} \alpha^n z^{pn+\gamma},$$

$$\prod_{i=1}^{l} (\delta + p\nu_i - \gamma)\, y = p^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_{n+1} \ldots (\nu_l)_{n+1}}{(\lambda_1)_n \ldots (\lambda_q)_n} \alpha^n z^{pn+\gamma},$$

откуда следует утверждение леммы. Следствие 2 получается из того, что функции

$$z^{1-\lambda_k}{}_l\varphi_q(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; z), \quad k = 1, \ldots, q,$$

согласно следствию 1 удовлетворяют уравнению $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)y = 0$, линейно независимы над $\mathbb{C}$ и могут быть записаны в виде (0.29), так как k-я компонента вектора $\vec{\lambda} + 1 - \lambda_k$ равна 1. Заметим, что ограничение $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$ существенно: при $\lambda_i = \lambda_k$ среди функций (0.29) найдутся одинаковые, а при $\lambda_i - \lambda_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не все из них определены.

Лемма 2. *Пусть* $\delta = zd/dz$, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, ζ, θ *— произвольные аналитические функции от* z, $\theta \not\equiv 0$. *Тогда*

$$P(\delta + \zeta) \circ \theta = \theta P\left(\delta + \zeta + \frac{z\theta'}{\theta}\right).$$

Следствие 1. *Пусть* f, b, θ *— произвольные аналитические функции, причём* $\theta \not\equiv 0$, *а* f *удовлетворяет уравнению* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = b$, *где* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда функция* θf *удовлетворяет уравнению*

$$L\left(\vec{\nu} - \frac{z\theta'}{\theta p}; \vec{\lambda} - \frac{z\theta'}{\theta p}; \alpha z^p\right) y = b\theta.$$

Следствие 2. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geqslant \max(1, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_q$ *— фундаментальная система решений уравнения*

$$L(\vec{\nu} + 1 - \lambda_s; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_s; \alpha z^p)y = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant q.$$

Тогда функции $z^{(1-\lambda_s)p} f_1, \ldots, z^{(1-\lambda_s)p} f_q$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$.

Доказательство вытекает из равенств

$$P(x) = a(x + \alpha_1) \ldots (x + \alpha_n), \quad (\delta + \zeta + \alpha) \circ \theta = \theta\left(\delta + \zeta + \alpha + \frac{z\theta'}{\theta}\right).$$

Лемма 3. *Пусть* $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ — *фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций* $\{v_1, \ldots, v_q\}$, $\{z^\beta v_1, \ldots, z^\beta v_q\}$, $\{e^{\gamma z} v_1, \ldots, e^{\gamma z} v_q\}$ *и* $\{e^{\gamma z^p} v_1, \ldots, e^{\gamma z^p} v_q\}$ *соответственно*, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Phi_1 = z^\beta B_1 \Phi, \qquad \Phi_2 = e^{\gamma z} B_2 \Phi, \qquad \Phi_3 = e^{\gamma z^p} B_3 \Phi,$$

где $B_1 \in SL(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$, $B_2 \in SL(q, \mathbb{C})$, $B_3 \in SL(q, \mathbb{C}[z])$, *причём матрицы* B_1, B_2, B_3 *являются нижнетреугольными с единицами на главной диагонали и не зависят от* $v_1, \ldots, v_q$.

Доказательство. Применяя формулу Лейбница, выразим k-ю строку матрицы Φ_1 в виде произведения z^β на линейную комбинацию первых k строк матрицы Φ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z^{-1}]$, причём коэффициент при k-й строке будет равен 1. Эти коэффициенты в совокупности составят матрицу B_1 с требуемыми свойствами. Аналогично вычисляются матрицы B_2 и B_3.

Из леммы 3 и следствия 2 леммы 2 вытекает

Лемма 4. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geqslant \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 — *произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов* $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ *и* $L(\vec{\nu} + 1 - \lambda_s; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_s; \alpha z^p)$, $1 \leqslant s \leqslant q$. *Тогда*

$$\Phi_1 = z^{(1-\lambda_s)p} B \Phi_2 C,$$

где $C \in GL(q, \mathbb{C})$, B — *нижнетреугольная матрица из* $SL(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$ *с единицами на главной диагонали.*

Лемма 5. *Пусть* $\Phi = \Phi(z)$, $\Psi = \Psi(z)$ — *фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций* $\{v_1(z), \ldots, v_q(z)\}$ *и* $\{v_1(\alpha z^p), \ldots, v_q(\alpha z^p)\}$ *соответственно*, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Psi(z) = B \Phi(\alpha z^p),$$

где $B \in M(q, \mathbb{C}[z])$ — *нижнетреугольная матрица с определителем* $|B| = (\alpha p z^{p-1})^{q(q-1)/2}$, *не зависящая от* $v_1, \ldots, v_q$.

Доказательство. Рассуждая аналогично доказательству леммы 3 и используя формулы производной сложной функции и производной произведения, выразим k-ю строку матрицы Ψ в виде линейной комбинации первых k строк матрицы $\Phi(\alpha z^p)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$, причём коэффициент при k-й строке будет равен $(\alpha p z^{p-1})^{k-1}$. Эти коэффициенты в совокупности составят матрицу B с требуемыми свойствами.

Как следует из леммы 1, уравнение $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)y=0$ при $q-l>1$, $q-l=1,\ q-l=0$, соответственно, имеет вид

$$\begin{gathered}
z^q y^{(q)} + \left((\lambda_1+\dots+\lambda_q-q)p+(q-1)\frac{q}{2}\right) z^{q-1}y^{(q-1)}+ \\
+\dots+p^q((\lambda_1-1)\dots(\lambda_q-1)-\alpha\nu_1\dots\nu_l z^p)y=0, \\
z^q y^{(q)} + \left((\lambda_1+\dots+\lambda_q-q)p+(q-1)\frac{q}{2}-\alpha p z^p\right) z^{q-1}y^{(q-1)}+ \\
+\dots+p^q((\lambda_1-1)\dots(\lambda_q-1)-\alpha\nu_1\dots\nu_{q-1} z^p)y=0, \qquad (1) \\
(1-\alpha z^p)z^q y^{(q)} + \Bigg((\lambda_1+\dots+\lambda_q-q)p+(q-1)\frac{q}{2}- \\
-\alpha\left((\nu_1+\dots+\nu_q)p+(q-1)\frac{q}{2}\right)z^p\Bigg) z^{q-1}y^{(q-1)}+ \\
+\dots+p^q((\lambda_1-1)\dots(\lambda_q-1)-\alpha\nu_1\dots\nu_q z^p)y=0.
\end{gathered}$$

Лемма 6. *Пусть* $\vec{\nu}\in\mathbb{C}^l,\ \vec{\lambda}\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^q,\ l,q\in\mathbb{Z}^+,\ q\geqslant\max(1,l),$ $\alpha\in\mathbb{C},\ p\in\mathbb{N}$. *Тогда:*

1°. *Определитель Вронского уравнения* $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)y=0$ *равен*

$$W=cz^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_q-q)p-(q-1)q/2}(1-\alpha z^p)^{(\lambda_1+\dots+\lambda_q-\nu_1-\dots-\nu_q-q)\varepsilon}e^{\alpha z^p\varepsilon_1}, \qquad (2)$$

где $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \varepsilon=\delta_q^l,\ \varepsilon_1=\delta_q^{l+1}$.

2°. *Если* $\lambda_i-\lambda_k\notin\mathbb{Z},\ i\neq k$, *а* W *отвечает функциям (0.30), то*

$$c=p^{q(q-1)/2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant q}(\lambda_i-\lambda_j).$$

Доказательство. При $\alpha=p=1$ равенство (2) вытекает из (1) и формулы Лиувилля. Отсюда, сделав подстановку $z\to\alpha z^p$, с помощью леммы 5 получаем утверждение 1° леммы 6 при произвольных α и p. Для доказательства утверждения 2° в предположении, что $\lambda_1,\dots,\lambda_q\notin\mathbb{Z}$, рассмотрим члены наименьшей степени разложений по z функций (0.30) и их производных, составляющих определитель W:

$$\begin{vmatrix} z^{p-\lambda_1 p} & \dots & z^{p-\lambda_q p} \\ (z^{p-\lambda_1 p})' & \dots & (z^{p-\lambda_q p})' \\ \dots & \dots & \dots \\ (z^{p-\lambda_1 p})^{(q-1)} & \dots & (z^{p-\lambda_q p})^{(q-1)} \end{vmatrix} = z^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_q-q)p-(q-1)q/2}.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ p-\lambda_1 p & \dots & p-\lambda_q p \\ \dots & \dots & \dots \\ \prod\limits_{0\leqslant i\leqslant q-2}(p-\lambda_1 p-i) & \dots & \prod\limits_{0\leqslant i\leqslant q-2}(p-\lambda_q p-i) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В полученном числовом определителе элемент, стоящий в k-й строке и j-м столбце, является многочленом от $-\lambda_j p$ с коэффициентами, не зависящими от j и старшим членом $(-\lambda_j p)^{k-1}$. Поэтому, последовательно вычитая из каждой строки некоторую линейную комбинацию предыдущих, мы получим определитель Вандермонда от $-\lambda_1 p, \dots, -\lambda_q p$, равный c. Если же какое-либо из $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ принадлежит $\mathbb{Z}$, то утверждение 2° получается с помощью предельного перехода, так как функции ${}_lF_q(z)$ непрерывно зависят от параметров (см. [4:1, п. 2.1.6]). Лемма 6 доказана.

Перейдём к непосредственному доказательству теоремы 14.

Доказательство начнём со следующего замечания. Пусть Ψ — фундаментальная матрица некоторой линейной однородной системы $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\Omega = \Omega(z)$ и C — произвольные невырожденные матрицы одинакового с $A = A(z)$ размера, $C' = 0$. Элементарные вычисления показывают, что $\Psi_1 = \Omega\Psi C$ является фундаментальной матрицей системы $\vec{y}\,' = A_1\vec{y}$, где $A_1 = (\Omega' + \Omega A)\Omega^{-1}$. С другой стороны, если Ψ_1 — фундаментальная матрица системы $\vec{y}\,' = A_1\vec{y}$, то, положив $\Psi_2 = \Omega^{-1}\Psi_1$, имеем

$$\Psi_2' = (\Omega^{-1}\Psi_1)' = -\Omega^{-1}\Omega'\Omega^{-1}\Psi_1 + \Omega^{-1}A_1\Psi_1 = A\Omega^{-1}\Psi_1 = A\Psi_2,$$

откуда $\Psi_2 = \Psi C$, а $\Psi_1 = \Omega\Psi C$. Если $\vec{\psi}, \vec{\psi}_1$ — произвольные решения линейных систем $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{c}$ и $\vec{y}\,' = A_1\vec{y} + \vec{c}_1$ соответственно, причём $\vec{\psi}_1 = \Omega\vec{\psi} + \vec{c}_2$, то снова получаем $A_1 = (\Omega' + \Omega A)\Omega^{-1}$. Следовательно, из равенства $\vec{\psi}_1 = \Omega\vec{\psi} + \vec{c}_2$ для каких-либо решений наших систем вытекает равенство $\Psi_1 = \Omega\Psi C$ для произвольных фундаментальных матриц однородных систем, соответствующих рассмотренным. Если $\Omega \in M(q, \mathbb{C}(z))$, $\vec{c}, \vec{c}_1, \vec{c}_2 \in (\mathbb{C}(z))^q$, то в случае линейной неприводимости (или линейной однородной неприводимости соответствующих однородных систем) матрицы Ω и A_1 определены однозначно, причём Ω гарантированно невырождена.

Ввиду леммы 5 равенства (0.32) достаточно получить лишь в случае $\alpha = p = 1$. Кроме того, при доказательстве теоремы достаточно ограничиться случаем, когда $\nu_{1,j} = \nu_{2,j} = \nu_j$, $\lambda_{1,t} = \lambda_{2,t} = \lambda_t$ для всех параметров, кроме одного, различающегося на 1. Допустим, что это параметр ν_k, $1 \leqslant k \leqslant l$.

Будем считать, что $\nu_k = \nu_{2,k} = \nu_{1,k} - 1$. Дифференцируя тождество

$$\nu_k \varphi_2(\nu_k +) = (\delta + \nu_k)\varphi_2 = \nu_k \varphi_2 + z\varphi_2'$$

(см. [22:1, п. 5.2.2] или доказательство леммы 1) $j-1$ раз, $j = 2, \ldots, q$, получим

$$\nu_k \vec{\varphi}_1 = \bar{\Omega}\vec{\varphi}_2 + (0, \ldots, 0, bz^{1-q}(1-z)^{\varepsilon})^T,$$

где $b = (\lambda_1 - 1) \ldots (\lambda_q - 1)$, $\bar{\Omega}$ — такая матрица, что то её j-я строка при $j \neq q$ содержит только два ненулевых элемента: $a_{j,j} = \nu_k + j - 1$, $a_{j,j+1} = z$, а элементы q-й строки получаются очевидным образом из коэффициентов уравнения $L(\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2; z)y = b$ и согласно (1) принадлежат $\mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1-z)^{\varepsilon}]$. Из линейной неприводимости рассматриваемых уравнений следуют неравенства $\nu_k \neq 0$ и $|\bar{\Omega}| \not\equiv 0$. Всё вышесказанное означает, что $\nu_k \Phi_1 = \bar{\Omega}\Phi_2 C$, а отсюда, учитывая равенство (2) и включение $|\bar{\Omega}| \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1-z)^{\varepsilon}]$, получаем $|\bar{\Omega}| = az^n(1-z)^{m\varepsilon}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n, m \in \{0, 1, -1\}$, $\bar{\Omega} \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1-z)^{\varepsilon}])$.

Отсюда следует, что в случае увеличения (а потому и уменьшения) ν_k на 1 утверждение теоремы справедливо.

Если в наборах параметров $(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1)$, $(\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2)$ не совпадает значение λ_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, рассуждения проводятся аналогично, с использованием тождества

$$(\lambda_k - 1)\varphi(\lambda_k -) = (\lambda_k - 1)\varphi + z\varphi'.$$

Теорема 14 доказана.

Напомним, что сопряжённым к дифференциальному уравнению

$$Ly \equiv a_m y^{(m)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4}$$

называется уравнение

$$\overline{L}v \equiv (-1)^m (a_m v)^{(m)} + \cdots - (a_1 v)' + a_0 v = 0$$

(см., например, [1:1; п. 5.3], [29:1; гл. 2, §5]). Таким же образом определяются сопряжённые дифференциальные операторы L и $\overline{L}$.

Из формулы Лиувилля следует, что если W и W_0 — вронскианы операторов L и $\overline{L}$ соответственно, то $W_0 = c\, a_m^{-m} W^{-1}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Лемма 7. *При условиях леммы 2*

$$\overline{\theta P(\delta+\zeta)} = \theta P\left(-\delta-1+\zeta-\frac{z\theta'}{\theta}\right).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\overline{\theta(\delta+\zeta+\alpha)} = -\theta\left(\delta-\zeta-\alpha+1+\frac{z\theta'}{\theta}\right),\ \overline{L+Q}=\overline{L}+\overline{Q},\ \overline{\alpha L}=\alpha\overline{L},$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$. Кроме того, $\overline{LQ}=\overline{Q}\ \overline{L}$ (см. [1:1, пп. 5.3, 17.4]). Отсюда, учитывая лемму 2 и перестановочность операторов вида $\delta+\zeta+\alpha_k$, индукцией по n получаем

$$\overline{\theta(\delta+\zeta+\alpha_1)\dots(\delta+\zeta+\alpha_n)} =$$

$$=(-1)^n\theta\left(\delta-\zeta+1+\frac{z\theta'}{\theta}-\alpha_1\right)\dots\left(\delta-\zeta+1+\frac{z\theta'}{\theta}-\alpha_n\right),$$

что равносильно утверждению леммы.

Лемма 8. *Пусть* $\vec{\nu}-\zeta\in\mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}-\eta\in\mathbb{C}^q$, $\alpha,\gamma\in\mathbb{C}$, $l,q\in\mathbb{Z}^+$, $l+q\neq 0$, $p\in\mathbb{N}$, ζ,η *— произвольные аналитические функции. Тогда*

$$\overline{z^\gamma L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)} = (-1)^q z^\gamma L\left(1-\vec{\nu}+\frac{1+\gamma}{p};2-\vec{\lambda}+\frac{1+\gamma}{p};(-1)^{q-l}\alpha z^p\right).$$

Доказательство. Согласно леммам 1 и 7

$$\overline{z^\gamma L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)} = \overline{z^\gamma\prod_i(\delta+p(\lambda_i-1))}-\alpha p^{q-l}\overline{z^{p+\gamma}\prod_i(\delta+p\nu_i)} =$$

$$=(-1)^q z^\gamma(\prod_i(\delta+p(1-\lambda_i)+1+\gamma)-(-1)^{q-l}\alpha p^{q-l}z^p\prod_i(\delta+p(1-\nu_i)+1+\gamma)),$$

что равносильно утверждению леммы.

Лемма 9. *Пусть* $\vec{\nu}\in\mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$, $q\geqslant\max(2,l)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $p\in\mathbb{N}$, Φ_1,Φ_2 *— произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов* $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)$ *и* $L(1-\vec{\nu};2-\vec{\lambda};(-1)^{q-l}\alpha z^p)$. *Тогда существует матрица* $C\in GL(q,\mathbb{C})$ *такая, что* $\Phi_1(\Phi_2C)^T=B\in GL(q,\mathbb{C}[z^{\pm1},(1-\alpha z^p)^\varepsilon])$, $\varepsilon=-\delta_q^l$.

Доказательство. Согласно лемме 8, в которой положим $\gamma=-1$, $\zeta\equiv\eta\equiv 0$, свойствам решений сопряжённых дифференциальных уравнений (см., например, [29:1, гл. 2, §5.2]) и формулам (1), для любой фундаментальной матрицы Φ_1 уравнения $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)y = 0$ найдётся фундаментальная матрица Φ_2 уравнения $L(1-\vec{\nu};2-\vec{\lambda};(-1)^{q-l}\alpha z^p)y = 0$ такая, что $\Phi_1\Phi_2^T = B = \|b_{i,j}\|_{i,j}$ является матрицей, у которой

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^k a_0^{-1}, \quad a_0 = z^{q-1}(1-\alpha z^p)^{-\varepsilon}, \quad k = 1,\dots,q,$$

а выше этих элементов стоят нули. Здесь a_0 — старший коэффициент уравнения $z^{-1}L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)y = 0$. Другими словами, если $\vec{v}$ и $\vec{g}$ — фундаментальные системы решений, соответствующие Φ_1, Φ_2, то для скалярных произведений их производных имеем $(\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = 0$ при $s+k < q-1$ и $(\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = (-1)^k a_0^{-1}$ при $s+k = q-1$. Дифференцируя эти скалярные произведения и заменяя с помощью дифференциальных уравнений (1) производные $\vec{v}^{(q)}, \vec{g}^{(q)}$ на линейные комбинации векторов $\vec{v}^{(0)},\dots,\vec{v}^{(q-1)}$, $\vec{g}^{(0)},\dots,\vec{g}^{(q-1)}$, получим, что все элементы матрицы B принадлежат $\mathbb{C}[z^{\pm1},(1-\alpha z^p)^{\varepsilon}]$. Лемма 9 доказана.

Первое утверждение теоремы 15 следует из леммы 9 и её доказательства. Перейдём к доказательству второго утверждения теоремы. Предположим, что разность любых двух параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ не принадлежит $\mathbb{Z}$. Согласно леммам 1 и 8 функции (0.34) образуют фундаментальную систему решений оператора $L(1-\vec{\nu};2-\vec{\lambda};(-1)^{q-l}\alpha z^p)$. В качестве Φ_1 и Φ_2 возьмём фундаментальные матрицы, соответствующие множествам функций (0.30) и (0.34). Тогда, как уже было сказано, найдётся вектор $\vec{g} = \{g_1,\dots,g_q\}$, где все g_k являются линейными комбинациями функций (0.34) с коэффициентами из $\mathbb{C}$, такой, что скалярные произведения вектора с компонентами (0.30) и векторов $\vec{g},\vec{g}',\dots,\vec{g}^{(q-2)}$ равны нулю. Рассмотрев в этих скалярных произведениях слагаемые, не содержащие дробных степеней z, приходим к выводу, что можно положить $g_k = a_k f_k$, $k = 1,\dots,q$. Числа a_k найдём следующим образом. Рассмотрим вектор, компоненты которого являются членами наименьшей степени разложений по z соответствующих компонент вектора $\vec{g}$, т. е. вектор $\{a_1 z^{(\lambda_1-1)p},\dots,a_q z^{(\lambda_q-1)p}\}$. Известно (см. [29:1, гл. 2, §5.2], [16:1, п. 17.7]), что в качестве $\vec{g}$ можно взять вектор $(-1)^q(a_0W)^{-1}\{A_{q,1},\dots,A_{q,q}\}$, где $A_{q,k}$ — алгебраические дополнения к элементам последней строки вронскиана W, отвечающего функциям (0.30), $a_0 = z^{q-1}(1-\alpha z^p)^{-\varepsilon}$ — старший коэффициент соответствующего уравнения (1), делённого на z. Заменим каждый элемент фундаментальной матрицы, соответствующей (0.30), на младший член его разложения по степеням z. В предположении, что $\lambda_1, \dots, \lambda_q \notin \mathbb{Z}$, получаем, что член наименьшей степени разложения по z функции $A_{q,k}$ (обозначим его $A^\circ_{q,k}$) равен алгебраическому дополнению элемента с такими же индексами определителя в левой части равенства (3). Следовательно,

$$A^\circ_{q,k} = (-1)^{q+k} z^{(\lambda_k - \sum \lambda_s + q-1)p-(q-1)(q-2)/2}\, p^{(q-1)(q-2)/2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant q;\, i,j\neq k} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Умножив вектор $\{A^\circ_{q,1}, \dots, A^\circ_{q,q}\}$ на член наименьшей степени по z произведения $(-1)^q z^{1-q}(1-\alpha z^p)^\varepsilon W^{-1}$, ввиду леммы 6 получим вектор $\{a_1 z^{(\lambda_1-1)p}, \dots, a_q z^{(\lambda_q-1)p}\}$, где числа a_k совпадают с диагональными элементами матрицы C в формулировке теоремы 15, делёнными на число c_0. Таким образом, для рассматриваемого случая утверждение 2° теоремы 15 доказано. Если же некоторые из параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ совпадают между собой или с целыми числами, то утверждение 2° получается с помощью предельного перехода, так как функции ${}_lF_q(z)$ и, следовательно, все компоненты матрицы $\Phi_1(\Phi_2 C)^T$ непрерывно зависят от параметров (см. [4:1, п. 2.1.6]).

§2. О коградиентности и контргградиентности дифференциальных уравнений и систем

Лемма 10. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— дифференциальное поле с полем констант* $\mathbb{C}$. *Пусть* $\Phi_k = \|v^{(i)}_{k,s}\|_{i=0,\dots,q_k-1;\, s=1,\dots,q_k}$ *— фундаментальная матрица дифференциального уравнения*

$$y^{(q_k)} + P_{k,q_k-1} y^{(q_k-1)} + \dots + P_{k,0} y = 0, \qquad q_k \geqslant 2, \quad P_{k,s} \in \mathbb{F}, \tag{5}$$

$|\Phi_k| \in \mathbb{F}$, $k = 1, \dots, n$. *Пусть поле констант дифференциального поля* $\mathbb{L} = \mathbb{F}\langle v_{1,1}, \ \dots, v_{n,q_n}\rangle$ *есть* $\mathbb{C}$, *а* $\deg tr_{\mathbb{F}} \mathbb{L} < q_1^2 + \dots + q_n^2 - n$. *Тогда либо* $\deg tr_{\mathbb{F}} \mathbb{F}\langle v_{k,1}, \ \dots, v_{k,q_k}\rangle < q_k^2 - 1$ *для некоторого* k, *либо для некоторых индексов* $1 \leqslant j < k \leqslant n$ $q_j = q_k = q$ *и выполняется хотя бы одно из равенств*

$$\Phi_j = aB\Phi_k C, \qquad \Phi_j = aB(\Phi_k^{-1})^T C, \tag{6}$$

где $a \in \mathbb{L}$, $a^q \in \mathbb{F}$, $B \in GL(q, \mathbb{F})$, $C \in GL(q, \mathbb{C})$.

Доказательство. Е. Колчин [52:2] доказал утверждение леммы 10 в случае, когда $q_1 = \dots = q_n = q$, а поля констант полей $\mathbb{F}$ и $\mathbb{L}$ являются произвольным полем $\mathbb{B}$ характеристики 0. Схема рассуждений была следующей. Сначала доказывалась теорема о подгруппах прямого произведения $G_1 \times \cdots \times G_n$ алгебраических групп G_k, определённых над полем K, с центрами Z_k, одним из утверждений которой являлось существование K-изоморфизма $G_j/Z_j \longrightarrow G_k/Z_k,\ 1 \leqslant j < k \leqslant n$. Под K-изоморфизмом понимался изоморфизм, задаваемый на многообразиях G_j, G_k рациональными функциями с коэффициентами из поля K. Далее в качестве $G_k,\ k = 1, \dots, n$ брались группы Галуа соответствующих дифференциальных уравнений, совпадающих, как было показано, с $SL(q, \mathbb{B})$. Центры Z_k этих групп состоят из конечного числа элементов — единичных матриц, умноженных на корни степени q из единицы. Соотношения (6) выводились из того, что все K-автоморфизмы группы $SL(q, K)$ имеют вид $x \longrightarrow BxB^{-1}$ либо $x \longrightarrow B(x^{-1})^T B^{-1}$, где $B \in GL(q, K)$. Поэтому для доказательства леммы 10 достаточно дополнить рассуждения Е. Колчина доказательством невозможности существования $\mathbb{C}$-изоморфизма $G_j/Z_j \longrightarrow G_k/Z_k$ при $q_j \neq q_k$. Последнее вытекает из того, что группы G_j и G_k как многообразия имеют разные размерности, $\mathbb{C}$-изоморфизм непрерывен в обычной евклидовой топологии, Z_j и Z_k конечны, а известная теорема Брауэра (см., например, [2:1, ч. 5, гл. 3, §1]) утверждает о негомеоморфности топологических многообразий разных размерностей. Лемма 10 доказана.

Заметим, что автоморфизмами $x \longrightarrow BxB^{-1}$ исчерпываются также все автоморфизмы групп $Sp(2k, \mathbb{C})$ и $SO(n, \mathbb{C}),\ n \geqslant 3,\ n \neq 8$ [51:1, п. 1.8.1]. Для этих групп имеет место обобщение утверждения леммы 10 [51:1, предложение 1.8.2]. В неявном виде аналог леммы 10 для групп Галуа, содержащих $SL(m), Sp(2k)$, использовался в статье [43:1] при доказательстве теоремы 2.3.

Полагая в лемме 10 $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$ и изменяя, при необходимости, нумерацию уравнений, равенства (6) можно записать в виде

$$\Phi_1 = A\Phi_2 C, \qquad \Phi_1 = A(\Phi_2^{-1})^T C, \tag{7}$$

где A — матрица, элементы которой являются аналитическими функциями, вообще говоря, неоднозначными.

Пусть A_k — матрица коэффициентов системы, соответствующей дифференциальному уравнению с номером k, $k = 1, \dots, n$. Тогда, дифференцируя первое из равенств (7), получим $A_1\Phi_1 = (A' + AA_2)\Phi_2 C$, что вместе с $A_1\Phi_1 = A_1 A\Phi_2 C$ даёт

$$A' = A_1 A - AA_2. \tag{8}$$

Если справедливо второе из равенств (7), то, поскольку Φ_2 и $(\Phi_2^{-1})^T$ являются фундаментальными матрицами сопряжённых систем (доказательство воспроизведено в [43:1, §1]), равенство (8) переходит в $A' = A_1 A + A(A_2)^T$.

Лемма 11. *Если при условиях леммы 10* $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, $A_j \in M(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, $j = 1, \ldots, n$, *то в равенствах (7)* $A = z^r B$, $B \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, $r \in \mathbb{Q}$, $rq \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. При условиях леммы 11 элементы матрицы A согласно лемме 10 являются алгебраическими функциями, а ввиду (8) — компонентами решения системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой голоморфны в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому они также не имеют особенностей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, откуда получаем утверждение леммы.

Для применения лемм 10 и 11 к первым двум уравнениям (1), где, с точки зрения метода Зигеля, наиболее интересен случай $p = q - l \geqslant 1$, а в (2), следовательно, $W = cz^\sigma e^{\alpha z}$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, понадобится ещё несколько лемм.

Лемма 12. *Пусть* $v_1(z), \ldots, v_q(z)$ *— фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения с коэффициентами из* $\mathbb{C}(x)$. *Тогда функции* $z^\gamma e^{\beta z^p} v_1(z), \ldots, z^\gamma e^{\beta z^p} v_q(z)$ *и* $v_1(\beta z^p), \ldots, v_q(\beta z^p)$, *где* $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, *также составляют фундаментальные системы решений линейных однородных дифференциальных уравнений того же порядка с коэффициентами из* $\mathbb{C}(x)$, *причём первое уравнение не имеет новых особых точек в* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство проводится несложными вычислениями с использованием утверждений лемм 3 и 5 соответственно.

Лемма 13. *Пусть* $v_1(z), \ldots, v_q(z)$ *— фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения с коэффициентами из* $\mathbb{C}(x)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$, $w_k = v_k(\alpha z^p)$, $k = 1, \ldots, q$, $\Phi = \|v_s^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q}$, $\Psi = \|w_s^{(i)}\|$ *— фундаментальные матрицы соответствующих дифференциальных уравнений,* $W = |\Phi|$, $W^\circ = |\Psi|$. *Тогда равенство*

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)} \mathbb{C}\left\langle v_1, \ldots, v_q \right\rangle = q^2 - 1 \tag{9}$$

равносильно равенству

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W^\circ)}\mathbb{C}\left\langle w_1,\ldots,w_q\right\rangle = q^2-1.$$

Доказательство. Так как α не влияет на степень трансцендентности, то положим $\alpha=1$. Пусть G — группа Галуа исходного уравнения. Равенство (9) равносильно тому, что группа Галуа того же уравнения над $\mathbb{C}(z,W)$ совпадает с $SL(q,\mathbb{C})$ (см. [52:2, стр. 1157, 1158]). С другой стороны, последняя равна $G\bigcap SL(q,\mathbb{C})$ [17:1, лемма 6.2], откуда $SL(q,\mathbb{C})\subseteq G$. Так как для любого $p\in\mathbb{N}$ группа Галуа нового уравнения является нормальной подгруппой конечного индекса в G (доказательство аналогично рассуждениям доказательства предложения 2.4 из [43:1]), то размерности этих групп равны. Поэтому группа Галуа нового уравнения как над $\mathbb{C}(z)$, так и над $\mathbb{C}(z,W^\circ)$ содержит подгруппу $SL(q,\mathbb{C})$ размерности q^2-1. Отсюда следует утверждение леммы 13.

Лемма 13 является частным случаем следующей более общей леммы, доказываемой без использования понятия группы Галуа.

Лемма 14. *При условиях леммы 13*

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)}\mathbb{C}\left\langle v_1,\ldots,v_q\right\rangle = \deg tr_{\mathbb{C}(z,W^\circ)}\mathbb{C}\left\langle w_1,\ldots,w_q\right\rangle.$$

Доказательство. Согласно лемме 5 элементы матрицы Ψ являются линейными комбинациями элементов матрицы $\Phi(\alpha z^p)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}(x)$ и наоборот, а $W^\circ/W(\alpha z^p)=|B|\in\mathbb{C}(z)$. Отсюда следует утверждение леммы 14.

Заметим, что аналог леммы 14 для фундаментальных матриц системы $\vec{y}\,'=A\vec{y}$, где $A\in M(q,\mathbb{C}(z))$, доказывается ещё проще.

Если группа Галуа уравнения $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)\;y=0$ содержит $SL(q,\mathbb{C})$, то из рассуждений доказательства леммы 13 получаем, что выполняется равенство (9), откуда ввиду формулы Лиувилля

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z)}\mathbb{C}\left\langle v_1W^{-1/q},\ldots,v_qW^{-1/q}\right\rangle = q^2-1.$$

Таким образом, из лемм 12, 11, 3, 13 следует, что лемму 10 можно распространить на случай $|\Phi_k|=c_kz^{\sigma_k}\exp(\alpha_kz^{p_k}),\ \ \mathbb{F}=\mathbb{C}(z)$. Для этого нужно умножить функции $v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k}$ на $(z^{\sigma_k}\exp(\alpha_kz^{p_k}))^{-1/q}$, а равенства (6) согласно лемме 3 заменить на

$$\Phi_j=z^r\exp(\gamma_kz^{p_k}+\gamma_jz^{p_j})B\Phi_kC,\qquad \Phi_j=z^r\exp(\gamma_kz^{p_k}+\gamma_jz^{p_j})B(\Phi_k^{-1})^TC, \tag{10}$$

где $r, \gamma \in \mathbb{C}$, $B \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, причём в случае, когда Φ_k соответствуют уравнениям вида $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)\, y = 0$ и $q - l > 1$, можно ввиду (2) положить $\gamma = 0$. Заметим, что в ситуации $p = 1$, а также в ситуации $p = q - l$, наиболее важной с точки зрения метода Зигеля, равенства (10) переходят в

$$\Phi_j = z^r e^{\gamma z} B \Phi_k C, \qquad \Phi_j = z^r e^{\gamma z} B (\Phi_k^{-1})^T C. \tag{11}$$

Равенства (10) (а в случае $p = q - l$ равенства (11)) являются частными случаями равенств (0.31) в определении коградиентности и контрградиентности уравнений или систем.

Нетрудно проверить, что коградиентность систем является отношением эквивалентности. Так же легко проверяется

Лемма 15. *Если системы (A_1) и (A_2) контрградиентны, то системы (A_2) и (A_3) контрградиентны тогда и только тогда, когда (A_1) и (A_3) коградиентны.*

Таким образом, коградиентность или контрградиентность систем в совокупности также является отношением эквивалентности. Несложные вычисления к тому же показывают, что в случае $m = 2$ свойства коградиентности и контрградиентности как уравнений, так и систем равносильны.

С помощью следующих четырёх лемм находятся условия, при которых в определениях коградиентности и контрградиентности уравнений или систем равенства (0.31) можно заменить на (10) или (11).

Лемма 16. *Пусть $\mathbb{V}$ — произвольное дифференциальное поле аналитических функций, содержащее $\mathbb{C}(z)$, но не содержащее иррациональных функций, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$. Тогда любые линейно независимые над $\mathbb{C}(z)$ функции, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$, будут линейно независимыми над $\mathbb{V}$.*

Доказательство. Пусть

$$\varkappa_1 f_1 + \cdots + \varkappa_n f_n = 0, \tag{12}$$

$$\varkappa_k \in \mathbb{V},\ \varkappa_k \not\equiv 0,\ f_k'/f_k = g_k \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, n,$$

причём $n \geqslant 2$ — наименьшее из возможных. Дифференцируя равенство (12), получим

$$(\varkappa_1' + \varkappa_1 g_1) f_1 + \cdots + (\varkappa_n' + \varkappa_n g_n) f_n = 0. \tag{13}$$

Ввиду минимальности числа n линейные комбинации в левых частях равенств (12) и (13) должны быть пропорциональны. Таким образом,

$$\frac{\varkappa_1'}{\varkappa_1}+g_1=\frac{\varkappa_k'}{\varkappa_k}+g_k,\quad k=1,\ldots,n.$$

Отсюда $(\varkappa_k/\varkappa_1)'/(\varkappa_k/\varkappa_1)\in\mathbb{C}(z)$ и, так как $\varkappa_k/\varkappa_1\in\mathbb{V}$, то $\varkappa_k/\varkappa_1\in\mathbb{C}(z)$, $k=1,\ldots,n$. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Пусть* $\Phi_k=\|v_{k,i,s}\|_{i,s=1,\ldots,q_k}$ — *фундаментальная матрица системы*

$$\vec{v}\,'_k=A_k\vec{v}_k,\qquad A_k\in M(q_k,\mathbb{C}(z)),\quad q_k\geqslant 2,\tag{14}$$

$|\Phi_k|=W_k=|v_{k,i,s}|_{i,s}\in\mathbb{C}(z)$*,* $k=1,\ldots,n$*, а функции*

$$\Big\{v_{k,i,s}\big|_{k=1,\ldots,n;\,i,s=1,\ldots,q_k;\,(i,s)\neq(q_k,q_k)}\Big\}\tag{15}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$*. Тогда поле* $\mathbb{V}$*, порождённое над* $\mathbb{C}(z)$ *функциями (15), не содержит иррациональных функций, логарифмические производные которых принадлежат* $\mathbb{C}(z)$*.*

Следствие. *Любые линейно (алгебраически) независимые над* $\mathbb{C}(z)$ *функции, логарифмические производные которых принадлежат* $\mathbb{C}(z)$*, при условиях леммы 17 будут линейно (соответственно алгебраически) независимыми над* $\mathbb{V}$*.*

Доказательство. Если функции (15) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то все операции с ними удобно проводить формально, как с соответствующими им переменными

$$\Big\{x_{k,i,s}\big|_{k=1,\ldots,n;\,i,s=1,\ldots,q_k;\,(i,s)\neq(q_k,q_k)}\Big\}.\tag{16}$$

Фундаментальная матрица Φ_k принимает вид

$$\Phi_k=\begin{pmatrix} x_{k,1,1} & \ldots & x_{k,1,q_k}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ x_{k,q_k,1} & \ldots & \hat{x}_{k,q_k,q_k}\end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_{k,q_k,q_k}$ — рациональная функция от переменных (16), определяемая уравнением $|\Phi_k|=b_k\in\mathbb{C}(z)$, равносильным

$$A_{k,q_k,1}x_{k,q_k,1}+\cdots+A_{k,q_k,q_k-1}x_{k,q_k,q_k-1}+A_{k,q_k,q_k}\hat{x}_{k,q_k,q_k}=b_k,$$

откуда

$$\hat{x}_{k,q_k,q_k} = \frac{b_k - A_{k,q_k,1}x_{k,q_k,1} - \cdots - A_{k,q_k,q_k-1}x_{k,q_k,q_k-1}}{A_{k,q_k,q_k}}, \tag{17}$$

где $A_{k,q_k,1}, \ldots, A_{k,q_k,q_k}$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы Φ_k, являющиеся многочленами от переменных (16). Заметим, что при другом выборе функций (15), входящих в W_k, функция $b_k \in \mathbb{C}(z)$, вообще говоря, умножается на некоторый множитель из $\mathbb{C}$.

Производные по z от переменных (16) можно вычислять формально, исходя из систем уравнений (14) и равенств (17).

Пусть функция v удовлетворяет уравнению

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{C}(z) \tag{18}$$

и принадлежит полю $\mathbb{V}$, т. е. представляется в виде

$$v = T = \frac{P}{Q}, \tag{19}$$

где T — рациональная функция над $\mathbb{C}$ от функций (15) и z, P и Q — многочлены от тех же функций, $(P, Q) = 1$.

Заменив в равенстве (19) функции (15) на переменные (16) и продифференцировав его по z, получим

$$v' = \frac{P_1}{Q_1},$$

где P_1, Q_1 — многочлены от переменных (16) и z, $(P_1, Q_1) = 1$. Ввиду равенства (18)

$$\frac{P_1}{Q_1} = a\,\frac{P}{Q}$$

тождественно по (16) и z. Отсюда следует, что если в равенство (19) вместо $\vec{v}_{k,1}, \ldots, \vec{v}_{k,q_k}$, $k = 1, \ldots, n$ подставить любые другие линейно независимые решения соответствующих систем (A_k), такие, что $W_k = b_k$, то функция $u = T$ будет решением уравнения (18) и, следовательно, $u = cv$, $c \in \mathbb{C}$. Пусть T действительно зависит от переменных, входящих в матрицу Φ_1, а $q_1 \geqslant 3$. Подставим в T вместо переменных $x_{1,i,1}$ функции $v_{1,i,1} + \lambda v_{1,i,2}$, $i = 1, \ldots, q_1$, где λ — новая переменная, а вместо остальных переменных (16) — соответствующие им функции (15). Очевидно, что якобиан W_k при этом не изменится. Тогда

$$c(\lambda)v = T(v_{1,1,1} + \lambda v_{1,1,2}, \ldots, v_{1,q_1,1} + \lambda v_{1,q_1,2}, v_{1,1,2}, \ldots, v_{n,q_n-1,q_n}). \quad (20)$$

Ввиду алгебраической независимости функций (15) это равенство сохранится при замене функций (15) на соответствующие переменные (16). Дифференцируя после такой замены равенство (20) по λ и полагая затем $\lambda = 0$, получим

$$c'(0)T = \frac{\partial T}{\partial x_{1,1,1}} x_{1,1,2} + \frac{\partial T}{\partial x_{1,2,1}} x_{1,2,2} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial x_{1,q_1,1}} x_{1,q_1,2}. \quad (21)$$

Определим степень рациональной функции по какой-либо совокупности переменных как разность степеней числителя и знаменателя по этой совокупности. Легко проверить, что при таком определении степень произведения рациональных функций равна сумме степеней сомножителей, степень суммы не превосходит максимума степеней слагаемых, а при взятии частной производной по какой-либо переменной из выбранной совокупности степень уменьшается. Следовательно, степень правой части равенства (21) по совокупности переменных $x_{1,1,1}, \ldots, x_{1,q_1,1}$ строго меньше степени левой части, за исключением случая, когда T не зависит от этих переменных, а $c'(0) = 0$. Точно такие же рассуждения показывают, что в случае $q_1 \geqslant 3$ T не зависит от $x_{1,1,s}, \ldots, x_{1,q_1,s}$, $2 \leqslant s \leqslant q_1$, а в случае $q_1 = 2$ T не зависит от $x_{1,1,2}$. Осталось доказать, что при $q_1 = 2$ T не зависит от $x_{1,1,1}, x_{1,2,1}$. Повторив предыдущие рассуждения с учётом того, что согласно формуле Лиувилля $v_{1,2,2} = (v_{1,2,1}v_{1,1,2} + b_1)/v_{1,1,1}$, вместо (21) получим

$$c'(0)Tx_{1,1,1} = \frac{\partial T}{\partial x_{1,1,1}} x_{1,1,1}x_{1,1,2} + \frac{\partial T}{\partial x_{1,2,1}} x_{1,2,1}x_{1,1,2} + \frac{\partial T}{\partial x_{1,2,1}} b_1.$$

Сравнивая степени по совокупности переменных $x_{1,1,1}$, $x_{1,2,1}$ левой и правой частей полученного равенства, заключаем, что T не зависит от $x_{1,1,1}$ и $x_{1,2,1}$. Таким образом, T не зависит от переменных (16), входящих в Φ_1, а потому и от всех переменных (16). Лемма 17 доказана.

Следствие из леммы 17 получаем с помощью леммы 16 и того факта, что любое произведение степеней функций, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$, является функцией с таким же свойством.

Лемма 18. *Пусть система уравнений*

$$\vec{v}\,' = A\vec{v}, \quad A \in M(q, \mathbb{C}(z)), \quad q \geqslant 2, \tag{22}$$

не имеет нетривиальных решений, содержащих нулевые компоненты, а $\Phi = \|v_{i,s}\|_{i,s=1,\ldots,q}$ *— произвольная фундаментальная матрица этой системы. Тогда для любого* $t \in \{1,\ldots,q\}$ *матрица* $\Psi = \|u_s^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q-1;s=1,\ldots,q}$*, где* $u_s = v_{t,s}$*, является фундаментальной матрицей дифференциального уравнения*

$$v^{(q)} + a_{q-1}v^{(q-1)} + \cdots + a_0 v = 0, \qquad q \geqslant 2, \quad a_j \in \mathbb{C}(z),$$

причём $\Psi = \Omega\Phi$, $\Omega \in GL(q, \mathbb{C}(z))$.

Следствие. *Пусть при условиях леммы 18* $W = |\Phi|$, $W^\circ = |\Psi|$. *Тогда*

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)}\mathbb{C}\left\langle u_1,\ldots,u_q\right\rangle = \deg tr_{\mathbb{C}(z,W^\circ)}\mathbb{C}\left\langle v_{1,1},\ldots,v_{q,q}\right\rangle.$$

Доказательство. Из [36:12, гл. 3, лемма 7] следует, что если R_1 — любая линейная форма вида (1.2), где $m = q$, а ранг множества линейных форм (1.3) меньше q, то существует хотя бы одно нетривиальное решение системы (22), при подстановке которого все линейные формы (1.3) обращаются в нуль. Если $R_1 = v_{t,s}$, где $t, s \in \{1,\ldots,q\}$, это означает, что $v_{t,s} \equiv 0$. Но тогда ввиду условий леммы получаем, что при любых фиксированных s и t функции $v_{t,s},\ldots,v_{t,s}^{(q-1)}$ являются линейно независимыми линейными формами от $v_{1,s},\ldots,v_{q,s}$. Коэффициенты этих линейных форм не зависят от s и поэтому составляют матрицу $\Omega \in GL(q, \mathbb{C}(z))$, причём $\Psi = \Omega\Phi$. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Пусть* $\Phi_k = \|v_{k,t,s}\|_{t,s=1,\ldots,q}$ *— фундаментальная матрица системы (14), причём*

$$A_k \in M(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}]), \quad q \geqslant 2, \quad \deg tr_{\mathbb{C}(z,W_k)}\mathbb{C}\left\langle v_{k,1,1},\ldots,v_{k,1,q}\right\rangle = q^2 - 1,$$

$$W_k = |\Phi_k| = c_k z^{\sigma_k}\exp(\alpha_k z^{p_k}),\ p_k \in \mathbb{N},\ c_k, \sigma_k, \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда для коградиентности и контргградиентности систем $(A_1), (A_2)$ *необходимо и достаточно выполнение условий (10).*

Доказательство. Достаточно показать, что если условия (10) не выполняются, то не выполняются и условия (0.31).

Нетрудно проверить, что матрица $\Phi_k^\circ = W_k^{-1/q}\Phi_k$ будет фундаментальной матрицей системы (B_k), где

$$B_k = A_k + g_k E, \quad g_k = -\frac{W_k'}{qW_k} = -\frac{\mathrm{Tr}A_k}{q} \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}], \quad |\Phi_k^\circ| = 1, \quad k = 1, 2.$$

Матрица Φ_k° удовлетворяет условиям леммы 18, поэтому матрица $\Psi_k = \|(W_k^{-1/q} v_{k,1,s})^{(i)}\|_{i=0,\dots,q-1;\, s=1,\dots,q}$ является фундаментальной матрицей дифференциального уравнения

$$v^{(q)} + a_{k,q-1}v^{(q-1)} + \cdots + a_{k,0}v = 0, \qquad a_{k,j} \in \mathbb{C}(z),$$

причём $\Psi_k = \Omega_k \Phi_k^\circ$, $\Omega_k \in GL(q, \mathbb{C}(z))$, $k = 1, 2$. Если условия (10) не выполняются для матриц Φ_k при $B \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, то согласно лемме 11 они не выполняются и для Φ_k° при $B \in GL(q, \mathbb{C}(z))$. Но тогда условия (6) леммы 10, в которой положим $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, не могут выполняться для матриц Ψ_k. Поэтому из леммы 10 получаем, что $2q^2 - 2$ функций

$$\left\{ (W_k^{-1/q} v_{k,1,s})^{(i)} \Big|_{k=1,2;\, i=0,\dots,q-1;\, s=1,\dots,q;\, (i,s)\neq(q-1,q)} \right\}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда ввиду следствия леммы 18 алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ $2q^2 - 2$ функций

$$\left\{ W_k^{-1/q} v_{k,t,s} \Big|_{k=1,2;\, t,s=1,\dots,q;\, (t,s)\neq(q,q)} \right\}.$$

Так как $(W_k^{1/q})'/W_k^{1/q} \in \mathbb{C}(z)$, то отсюда, учитывая следствие из леммы 17, заключаем, что равенства (0.31) невозможны. Лемма 19 доказана.

Заметим, что если $A_k \in \mathbb{C}(z)$, то $(W_k^{1/q})'/W_k^{1/q} = (1/q)(W_k'/W_k) = (1/q)\mathrm{Tr}A_k \in \mathbb{C}(z)$. Поэтому лемму 19 можно обобщать на другие классы уравнений и систем, например, на уравнения, которым удовлетворяют G-функции.

Лемма 20. *Равенство* $P_0 + P_1 \ln z + \cdots + P_n \ln^n z = Pz^c$, *где* $P, P_0, \dots, P_n$ — *однозначные аналитические функции на множестве* $0 < |z| < R$, $P_n P \not\equiv 0$, $c \in \mathbb{C}$, *возможно только в случае* $n = 0$, $c \in \mathbb{Z}$.

Доказательство легко проводится индукцией по n.

Лемма 21. *Для коградиентности линейно однородно неприводимых уравнений* $L(\vec{\nu}_1;\vec{\lambda}_1;\alpha_1 z)y=0$ *и* $L(\vec{\nu}_2;\vec{\lambda}_2;\alpha_2 z)y=0$, *где* $\vec{\nu}_i\in\mathbb{C}^{l_i}$, $\vec{\lambda}_i\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_i}$, $q_i>\max(1,l_i)$, $\alpha_i\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $i=1,2$, *необходимо и достаточно условие*

$$q_1=q_2=q,\ l_1=l_2=l,\ \alpha_1=\alpha_2,$$

$$(\vec{\nu}_2;\vec{\lambda}_2)-\lambda_{2,1}\sim(\vec{\nu}_1;\vec{\lambda}_1)-\lambda_{1,s},\ 1\leqslant s\leqslant q,$$

а для контрградиентности — условие

$$q_1=q_2=q,\ l_1=l_2=l,\ \alpha_1=(-1)^{q-l}\alpha_2,$$

$$(\vec{\nu}_2;\vec{\lambda}_2)-\lambda_{2,1}\sim\lambda_{1,s}-(\vec{\nu}_1;\vec{\lambda}_1),\ 1\leqslant s\leqslant q.$$

Доказательство. Равенство $q_1=q_2$ следует непосредственно из определений коградиентности и контрградиентности. Согласно леммам 15 и 4 без уменьшения общности можно ограничиться случаем $\lambda_{1,1}=\lambda_{2,1}=1$.

Достаточность условий леммы 21 следует из лемм 9, 4, 15 и теоремы 14.

Перейдём к доказательству необходимости условий леммы. Если в уравнении (0.28) среди $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ имеется $m\geqslant 1$ параметров, отличающихся от $\lambda\in\mathbb{C}$ на целое число, то этим параметрам соответствуют m решений

$$y_s=z^{-\lambda}\sum_{k=0}^{s-1}P_{k,s}\ln^k z,\quad s=1,\ldots,m,$$

где $P_{0,s},\ldots,P_{s-1,s}$ — однозначные аналитические функции в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (см. [1:1, гл. 16], [16:1, п. 18.2]). Следовательно, $\Phi_i=\tilde{\Phi}_i D_i$, где

$$D_i=\operatorname{diag}(1,z^{-\lambda_{i,2}},\ldots,z^{-\lambda_{i,q}}),\qquad i=1,2,$$

а элементы матриц $\tilde{\Phi}_i$, $\tilde{\Phi}_i^{-1}$ являются многочленами от $\ln z$ с однозначными коэффициентами (последнее вытекает из того, что таковыми являются алгебраические дополнения всех элементов матрицы $\tilde{\Phi}_i$, а её определитель согласно (2) и лемме 3 однозначен).

Условие коградиентности согласно лемме 19 в нашем случае имеет вид $\Phi_1=z^r e^{\gamma z}B\Phi_2 C$, что эквивалентно $z^r D_2 C D_1^{-1}=\tilde{\Phi}_2^{-1}B^{-1}\tilde{\Phi}_1 e^{-\gamma z}$, где $r\in\mathbb{C}$, откуда ввиду леммы 20 произведение

$$z^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-\lambda_{2,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-\lambda_{2,q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q,1} & \dots & c_{q,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{\lambda_{1,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\lambda_{1,q}} \end{pmatrix}$$

принадлежит $M(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$. Так как $|C| \neq 0$, то существует перестановка π чисел $1, \dots, q$, такая, что $c_{1,\pi(1)} \dots c_{q,\pi(q)} \neq 0$. Следовательно, $c_{k,\pi(k)} \neq 0$, $r - \lambda_{2,k} + \lambda_{1,\pi(k)} \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, q$. Полагая $k = 1$, получим $r + \lambda_{1,\pi(1)} \in \mathbb{Z}$, откуда $\vec{\lambda}_2 \sim \vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,s}$, где $1 \leqslant s \leqslant q$.

Условие контрградиентности $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B(\Phi_2^{-1})^T C$ эквивалентно

$$z^r D_2^{-1} C D_1^{-1} = \tilde{\Phi}_2^T B^{-1} \tilde{\Phi}_1 e^{-\gamma z},$$

которое, в свою очередь, аналогично условию коградиентности, если в нём заменить $\vec{\lambda}_2$ на $-\vec{\lambda}_2$. Следовательно, $\vec{\lambda}_2 \sim \lambda_{1,s} - \vec{\lambda}_1$, и можно считать $r = -\lambda_{1,s}$, где $1 \leqslant s \leqslant q$.

В случае, если $\nu_i - \nu_j \notin \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, в [43:1, предложение 4.1] указан полный набор линейно независимых формальных решений уравнения (0.28) при $z = \infty$, состоящий из l асимптотических разложений

$$z^{-\nu_\tau} {}_qF_{l-1}(\nu_\tau + 1 - \vec{\lambda}; \nu_\tau + 1 - \vec{\nu}; (-1)^{q-l}/z), \quad \tau = 1, \dots, l$$

(см. также следствие 5 леммы 1) и $q - l$ разложений

$$\exp((l-q)\zeta^\tau t) t^\mu \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j (\zeta^\tau t)^{-j}, \quad \theta_j \in \mathbb{C}, \quad \tau = 1, \dots, q - l,$$

где $t^{q-l} = z$, ζ — примитивный корень степени $q - l$ из единицы, $\mu = \sum_{1 \leqslant j \leqslant l} \nu_j - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \lambda_j - (l - q - 1)/2$. Поэтому справедливы асимптотические разложения $\Phi_i \asymp \hat{\Phi}_i \hat{D}_i C_i$, где $i = 1, 2$,

$$\hat{D}_i = \operatorname{diag}(z^{-\nu_{i,1}}, \dots, z^{-\nu_{i,l_i}}, \exp(\alpha_{i,1} t_i) t_i^{\mu_i}, \dots, \exp(\alpha_{i,q-l_i} t_i) t_i^{\mu_i}),$$
$$t_i^{q-l_i} = z, \ \alpha_{i,j} = (l_i - q)\zeta_i^j (\alpha_i)^{1/(q-l_i)}, \ C_i \in GL(q, \mathbb{C}),$$

$\hat{\Phi}_i$ — матрица, элементы которой в первых l_i столбцах являются формальными рядами по отрицательным степеням z, а в остальных столбцах — по отрицательным степеням t_i. Очевидно, что числа $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,q-l_i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и попарно различны.

Подставляя в равенство $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B \Phi_2 C$ разложения $\Phi_i \asymp \hat{\Phi}_i \hat{D}_i C_i$, получим

$$z^r e^{\gamma z} \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1} = \hat{\Phi}_2^{-1} B^{-1} \hat{\Phi}_1, \tag{23}$$

где $r = -\lambda_{1,s}$, $S \in GL(q, \mathbb{C})$.

Пусть $0 \leqslant l_2 \leqslant l_1 < q-1$. Тогда в (11) и (23) $\gamma = 0$, а элементы матрицы $z^r e^{\gamma z} \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1}$, стоящие в первых l_1 столбцах и последних $q-l_2$ строках, имеют вид

$$s_{l_2+k,j} z^r z^{\nu_{1,j}} \exp(\alpha_{2,k} t_2) t_2^{\mu_2} = s_{l_2+k,j} \exp(\alpha_{2,k} t_2) t_2^{\beta_{k,j}}, \quad \beta_{k,j} \in \mathbb{C}.$$

Так как $\alpha_{2,k} \neq 0$, то $s_{i,j} = 0$ при $i = l_2+1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, l_1$. Аналогично доказывается, что $s_{i,j} = 0$ при $i = 1, \ldots, l_2$; $j = l_1 + 1, \ldots, q$. Поскольку $|S| \neq 0$, то $q - l_2 + l_1 \leqslant q$, $l_1 = l_2$, а матрица S блочно-диагональна.

Допустим теперь, что $0 \leqslant l_2 < l_1 = q-1$. Тогда в (11) и (23) $\gamma = \alpha_1/q \neq 0$. Кроме того, $\alpha_{2,k} t_2 \neq \pm\gamma z$, $k = 1, \ldots, q-l_2$. Отсюда следует равенство нулю всех элементов матрицы S, стоящих в первых $q-1$ столбцах, что невозможно. Таким образом, доказано, что $l_1 = l_2 = l$, а матрица S имеет блочно-диагональный вид. Аналогичные рассуждения проводились М.А. Черепнёвым [34:2]. Другое доказательство равенства $l_1 = l_2$ в случае $l_1, l_2 < q-1$ состоит в том, что при $l_1 \neq l_2$ компоненты первых столбцов матриц Φ_1, Φ_2 являются целыми функциями разного порядка, а согласно (11) это невозможно.

Равенство (23) равносильно равенству $z^r e^{\gamma z} \hat{\Phi}_2 \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1} = B^{-1} \hat{\Phi}_1$, которое запишем в виде

$$z^r e^{\gamma z} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} & 0 \\ 0 & T_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$r = -\lambda_{1,s},\ T_{1,1} = \|s_{i,j} z^{-\nu_{2,i}+\nu_{1,j}}\|_{i,j=1,\ldots,l},$$

$$T_{2,2} = \|s_{l+k,l+j} \exp(\alpha_{2,k} t - \alpha_{1,j} t) t^{\mu_2-\mu_1}\|_{k,j=1,\ldots,q-l},$$

$A_{1,1}, B_{1,1}$ — матрицы размера $l \times l$ с элементами, являющимися формальными рядами по отрицательным степеням z, $A_{2,2}, B_{2,2}$ — матрицы размера $(q-l) \times (q-l)$ с элементами, являющимися формальными рядами по отрицательным степеням t. Отсюда $\gamma = 0$, $z^r A_{1,1} T_{1,1} = B_{1,1}$, $z^r T_{1,1} = A_{1,1}^{-1} B_{1,1}$, $z^r A_{2,2} T_{2,2} = B_{2,2}$. Так как $|T_{1,1}||T_{2,2}| \neq 0$, то существуют перестановка π чисел $1,\dots,l$ и хотя бы одна пара $k,j\in\{1,\dots,q-l\}$ такие, что $s_{1,\pi(1)}\dots s_{l,\pi(l)}\neq 0,\ \ s_{l+k,l+j}\neq 0$, откуда $-\nu_{2,i}+\nu_{1,\pi(i)}-\lambda_{1,s}\in\mathbb{Z},\ \ i=1,\dots,l$ и $\alpha_{2,k}-\alpha_{1,j}=0$. Поэтому $\vec{\nu}_2\sim\vec{\nu}_1-\lambda_{1,s},\ \alpha_1=\alpha_2$.

В случае контрградиентности, подставляя в равенство $\Phi_1=z^re^{\gamma z}B(\Phi_2^{-1})^TC$, где $r=-\lambda_{1,s}$, асимптотические разложения $\Phi_i\asymp\hat{\Phi}_i\hat{D}_iC_i$, получим

$$z^re^{\gamma z}\hat{D}_2^{-1}S\hat{D}_1^{-1}=\hat{\Phi}_2^TB^{-1}\hat{\Phi}_1.$$

Рассуждая, как и в случае коградиентности, заключаем, что матрица S блочно-диагональна, $l_1=l_2$, а последнее равенство записывается в виде

$$z^re^{\gamma z}\begin{pmatrix}T_{1,1} & 0\\ 0 & T_{2,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{1,1} & A_{1,2}\\ A_{2,1} & A_{2,2}\end{pmatrix},$$

откуда $\gamma=0,\ \vec{\nu}_2\sim\lambda_{1,s}-\vec{\nu}_1,\ \alpha_1=(-1)^{q-l}\alpha_2$.

В случае, если $\nu_{i,j}-\nu_{i,k}\in\mathbb{Z}$ для некоторых $i\in\{1,2\},\ 1\leqslant j<k\leqslant l_i$, для получения утверждений о $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ надо использовать линейно независимые асимптотические разложения из статьи [28:3] (фактически достаточно уточнить выкладки в статье [34:2]).

Лемма 21 доказана.

Напомним, что при замене z на z^{q-l} функция ${}_l\varphi_q(z)$ превращается в E-функцию. Из [43:1, теоремы 2.2 и 2.4] следует

Лемма 22. *Пусть $\vec{y}\,'=A\vec{y},\ \ \vec{y}\,'=B\vec{y}$ — неприводимые системы линейных однородных дифференциальных уравнений размера $n\times n,\ n\geqslant 2$ с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, $p\in\mathbb{N}$, $(A_p),(B_p)$ — системы дифференциальных уравнений, полученные из систем $(A),(B)$ заменой $z\to z^p$. Тогда, если системы $(A_p),(B_p)$ коградиентны или контрградиентны, то это же условие выполняется для систем $(A),(B)$.*

Поставим вопрос о том, может ли возникнуть коградиентность или контрградиентность, если при подстановке $z\to\alpha z^p$ брать значения p, не совпадающие для систем (A) и (B). Ответом служат приведённые во введении тождества (0.36) и (0.37). Для их обоснования умножим обе части тождества (0.21) на произвольную аналитическую функцию $g(z)$ и заменим в нём λ на $-\lambda$. Тогда тождество (0.21) распространяется на вектор-функции и принимает вид

$$(K_\lambda(z),g(z)K_{-\lambda}(z))=e^{-iz}(A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2iz),g(z)A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2iz)),$$

откуда согласно лемме 3, полагая $g(z) = z^{-2\lambda}$, получаем тождество (0.36) при $\alpha = p = 1$. Тождество (0.37) при $\alpha = p = 1$ следует из (0.36) и доказательства утверждения 2° теоремы 15. Таким образом, имеем

$$\Phi_1 = e^{-iz} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Phi_2,$$

$$\Phi_1 (\Phi_3)^T = 2\lambda z^{-1} e^{-iz} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -i + 2\lambda z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Сделав в этих тождествах подстановку $z \to \alpha z^p$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, с помощью леммы 5, где, как легко видеть, $B = \mathrm{diag}(1, \alpha p z^{p-1})$, получим (0.36) и (0.37) при произвольных α и p. В качестве Φ_1, Φ_2, Φ_3 можно брать любые фундаментальные матрицы уравнений (0.1), (0.18) и уравнения, сопряжённого с (0.18), если умножить Φ_2 и Φ_3 на $C \in GL(q, \mathbb{C})$. Дальнейшее обобщение тождеств можно получить, изменяя параметры гипергеометрических функций на целые числа, принимая во внимание теорему 14 и лемму 4. Тогда они будут выражать, соответственно, коградиентность и контргградиентность двух гипергеометрических уравнений, удовлетворяющих условию (0.38).

Обобщением леммы 21 является

Лемма 23. *Для коградиентности и контргградиентности линейно однородно неприводимых уравнений* $L(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z^{p_i})y = 0$, *где* $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (0.38) либо* $p_1 = p_2$ *и выполнялись условия, сформулированные в лемме 21.*

Доказательство. Если $p_1 = p_2$, то утверждение леммы 23 следует из лемм 5, 21 и 22. Пусть далее $p_1 \neq p_2$. В этом случае, ввиду сказанного перед формулировкой леммы 23, достаточно проверить только необходимость её условий.

Допустим, что рассматриваемые уравнения коградиентны или контргградиентны. Повторяя доказательство леммы 21, получаем, что $q_1 = q_2 = q$, $p_2\vec{\lambda}_2 \sim p_1\vec{\lambda}_1 - p_1\lambda_{1,s}$ при коградиентности уравнений и $p_2\vec{\lambda}_2 \sim p_1\lambda_{1,s} - p_1\vec{\lambda}_1$ при контргградиентности, $r = -p_1\lambda_{1,s}$, где $1 \leqslant s \leqslant q$.

В случае $0 \leqslant l_2 \leqslant l_1 < q - 1$ при условии коградиентности так же, как и в лемме 21, доказывается, что $l_1 = l_2 = l$, а матрица S в равенстве (23) блочно-диагональна.

В случае $0 \leqslant l_2 < l_1 = q-1$ равенство (23) переходит в

$$z^r \exp\left(\frac{\alpha_1}{q} z^{p_1}\right) \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1} = \hat{\Phi}_2^{-1} B^{-1} \hat{\Phi}_1. \tag{24}$$

Если

$$\frac{\alpha_1}{q} z^{p_1} \neq -\alpha_{2,k} t_2^{p_2} = (q-l_2)(\alpha_2)^{1/(q-l_2)} \zeta_2^k z^{p_2/(q-l_2)},\ k = 1, \ldots, q-l_2, \tag{25}$$

то все элементы матрицы S, стоящие в первых $q-1$ столбцах, равны нулю, что противоречит допущению $|S| \neq 0$. Отсюда снова получаем, что $l_1 = l_2 = l = q-1$, а матрица S блочно-диагональна. Тогда равенство (23) переходит в

$$z^r \exp\left(\frac{\alpha_1}{q} z^{p_1} - \frac{\alpha_2}{q} z^{p_2}\right) \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1} = \hat{\Phi}_2^{-1} B^{-1} \hat{\Phi}_1.$$

Элементы матрицы в левой части этого равенства, стоящие в в первых $q-1$ столбцах и $q-1$ строках, имеют вид

$$s_{i,j} z^r z^{\nu_{i,j}} \exp\left(\frac{\alpha_1}{q} z^{p_1} - \frac{\alpha_2}{q} z^{p_2}\right),$$

что при $p_1 \neq p_2$ невозможно.

При условии контргградиентности (считая справедливыми неравенства (25) и $p_1 \neq p_2$), также приходим к противоречию.

Пусть теперь $0 \leqslant l_2 < l_1 = q-1$ и для некоторого $1 \leqslant k \leqslant q - l_2$ условие (25) неверно (очевидно, что таких значений k не более одного). В этом случае, так как $\alpha_1/q \neq 0$, равны нулю все элементы матрицы S, стоящие в первых $q-1$ столбцах и во всех строках, кроме, быть может, одной. Так как $|S| \neq 0$, то отсюда $q = 2$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $p_2 = 2p_1$, $\nu_{1,1} = \nu$, $2\vec{\lambda}_2 \sim \vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,s}$, $\alpha_1^2 = 16\alpha_2$, а левая часть (24) имеет вид

$$z^{-\lambda_{1,s}p_1} \exp\left(\frac{\alpha_1}{2} z^{p_1}\right) \begin{pmatrix} \exp(-2\alpha_2^{1/2} z^{p_1}) z^{\mu_2 p_1} & 0 \\ 0 & \exp(2\alpha_2^{1/2} z^{p_1}) z^{\mu_2 p_1} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\nu p_1} & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha_1 z^{p_1}) z^{-\mu_1 p_1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, числа $\mu_2 - \mu_1 - \lambda_{1,s} = \lambda_{1,2} - \lambda_{2,2} - \lambda_{1,s} - \nu + 1/2$ и $\mu_2 + \nu - \lambda_{1,s} = \nu - \lambda_{2,2} - \lambda_{1,s} + 1/2$ являются целыми, откуда $2\nu - \lambda_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

При условии контрградиентности приходим к аналогичному выражению

$$z^{-\lambda_{1,s}p_1}\exp\left(\frac{\alpha_1}{2}z^{p_1}\right)\begin{pmatrix}\exp(2\alpha_2^{1/2}z^{p_1})z^{-\mu_2p_1} & 0\\ 0 & \exp(-2\alpha_2^{1/2}z^{p_1})z^{-\mu_2p_1}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}s_{1,1} & s_{1,2}\\ s_{2,1} & s_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{\nu p_1} & 0\\ 0 & \exp(-\alpha_1z^{p_1})z^{-\mu_1p_1}\end{pmatrix},$$

получающемуся заменой μ_2 на $-\mu_2$, и условие (0.38) также выполняется. Лемма 23 доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 17. Определители Вронского $W_k=|v_{k,s}^{(i)}|_{i,\,s}$ операторов $L(\vec{\nu}_k;\vec{\lambda}_k;\alpha_kz^{p_k})$ имеют вид (2), где $\varepsilon=0$. Функции $w_{k,s}=W_k^{-1/q_k}v_{k,s},\ s=1,\dots,q_k$ согласно леммам 12 и 3 составляют фундаментальную систему решений уравнения вида (5), где $\mathbb{F}=\mathbb{C}(z)$, с определителем Вронского $|w_{k,s}^{(i)}|_{i,\,s}=1$. Условия (0.40) ввиду замечания после леммы 14 будут выполнены и для функций $w_{k,1},\dots,w_{k,q_k}$, а условия (6) в силу лемм 3 и 19 перейдут в (10). Тогда при условиях теоремы 17 согласно леммам 10 и 23 функции

$$\left\{w_{k,s}^{(i)}\Big|_{k=1,\dots,n;\,i=0,\dots,q_k-1;\,s=1,\dots,q_k;\,(i,s)\neq(q_k-1,q_k)}\right\}\tag{26}$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$. Если во множестве $\{W_k^{-1/q_k}\}$ имеются функции, алгебраически независимые над $\mathbb{C}$ с функциями

$$e^{\gamma_1z},\dots,e^{\gamma_mz},z^{\beta_1},\dots,z^{\beta_p}\tag{27}$$

из формулировки теоремы 17, то присоединим их к набору (27). Функции полученного набора вместе с функциями (26) согласно следствию из леммы 17 алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, откуда следует утверждение теоремы 17.

С учётом теоремы I А.Б. Шидловского из теоремы 17 следует теорема 16.

Перейдём к доказательству теоремы 18. Для дифференциального оператора L вида (4) справедливо тождество Лагранжа

$$uLv-v\overline{L}u=\frac{d}{dz}\psi(v,u)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^kv^{(i-1-k)}(a_iu)^{(k)}\right),$$

где u, v — произвольные аналитические функции (см., например, [29:1, гл. 2, §5], [16:1, п. 17.6]). Отсюда следует

Лемма 24. *Если $L \in \mathbb{C}[z, d/dz]$ — дифференциальный оператор порядка m, а u, v — аналитические функции такие, что $Lu = 0$, $\overline{L}v = 0$, то $\psi(u, v) = c(u, v) \in \mathbb{C}$.*

Аналог утверждения леммы 24 для производных вида $\delta = zd/dz$ при менее общих условиях имеется в [8:1, формула (27)].

Леммы 9 и 24 показывают, что условие 2° теоремы 18, исключающее контрградиентность рассматриваемых уравнений, существенно. Коградиентность же уравнений, вообще говоря, допустима, так как если $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (\vec{\nu}_s; \vec{\lambda}_s) - \lambda_{s,j}$, $j \in \{2, \ldots, q_s\}$, $\alpha_k = \alpha_s$, но $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \not\sim (\vec{\nu}_s; \vec{\lambda}_s)$, то функции $F_s(z), z^{1-\lambda_{s,j}} F_k(z)$ с учётом возможности изменения параметров на целые числа принадлежат фундаментальной системе решений одного уравнения (см. (0.29)) и алгебраически независимы. Нужно только, чтобы количество таких функций не превышало $q_s - 1$ — иначе они составят полную фундаментальную систему решений и вместе со своими производными будут связаны соотношением Лиувилля.

Суммируя сказанное, получаем, что теорема 18 следует из леммы 23, леммы 24 и теоремы I А.Б. Шидловского.

§3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\Phi = \|v_s^{(i)}\|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q}$ — фундаментальная матрица дифференциального уравнения

$$Lv \equiv v^{(q)} + a_{q-1}v^{(q-1)} + \cdots + a_1 v' + a_0 v = 0, \quad q \geqslant 2, \quad a_j \in \mathbb{C}(z), \tag{28}$$

$W = |\Phi|$. Обозначим

$$V_1 = (-1)^{q+1} \begin{vmatrix} v_2 & \ldots & v_q \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2^{(q-2)} & \ldots & v_q^{(q-2)} \end{vmatrix}, \ldots, V_q = w = \begin{vmatrix} v_1 & \ldots & v_{q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{(q-2)} & \ldots & v_{q-1}^{(q-2)} \end{vmatrix}$$

алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы Φ.

Очевидно, что $V_1, \ldots, V_{q-1}$ являются линейными комбинациями функций $v_q, v_q' \ldots, v_q^{(q-2)}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}(v_1, \ldots, v_{q-1}^{(q-2)})$. Докажем, что верно и обратное.

Лемма 25. *Справедливы равенства*

$$wv_q^{(s)} = -V_1 v_1^{(s)} - \dots - V_{q-1} v_{q-1}^{(s)}, \qquad s = 0, 1, \dots, q-2.$$

Действительно,

$$\begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_q \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(q-2)} & \dots & v_q^{(q-2)} \\ v_1^{(s)} & \dots & v_q^{(s)} \end{vmatrix} = V_1 v_1^{(s)} + \dots + wv_q^{(s)} = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant s \leqslant q-2, \\ W, \text{ если } s = q-1, \end{cases} \tag{29}$$

откуда следует утверждение леммы.

Обозначим V_k°, $k = 1, \dots, q-1$, $q \geqslant 3$, определители, получающиеся из V_k вычёркиванием последней строки и последнего столбца, а при $q = 2$ положим $V_1^\circ = -1$.

Лемма 26. *Справедливы равенства*

$$V_j' = \frac{w'}{w} V_j + \frac{V_j^\circ}{w} W, \qquad j = 1, \dots, q-1.$$

Доказательство. Утверждение леммы равносильно тому, что $(V_j/w)' = V_j^\circ W/w^2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 v_1 & + & c_2 v_2 & + & \dots & + & c_{q-1} v_{q-1} & = & -v_q \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_1 v_1^{(q-2)} & + & c_2 v_2^{(q-2)} & + & \dots & + & c_{q-1} v_{q-1}^{(q-2)} & = & -v_q^{(q-2)}. \end{cases} \tag{30}$$

Воспользовавшись правилом Крамера (или равенствами (29) при $s \leqslant q-2$), имеем $c_j = V_j/w$. Последовательно дифференцируя равенства (30), с учётом (29) при $s = q-1$, получим систему

$$\begin{cases} c_1' v_1 & + & c_2' v_2 & + & \dots & + & c_{q-1}' v_{q-1} & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_1' v_1^{(q-3)} & + & c_2' v_2^{(q-3)} & + & \dots & + & c_{q-1}' v_{q-1}^{(q-3)} & = & 0 \\ c_1' v_1^{(q-2)} & + & c_2' v_2^{(q-2)} & + & \dots & + & c_{q-1}' v_{q-1}^{(q-2)} & = & -W/w. \end{cases}$$

Согласно правилу Крамера, $c_j' = V_j^\circ W/w^2$. Лемма 26 доказана.

Следующие две леммы позволяют выражать друг через друга решения уравнения (28) и сопряжённого с ним (определение сопряжённых уравнений в общем случае дано перед леммой 7).

Лемма 27 [29:1, гл. 2, §5.2], [16:1, п. 17.7]. *Функции* $V_1/W, \ldots, V_{q-1}/W, w/W$ *образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения, сопряжённого с уравнением (28).*

Пусть $\Phi^* = \|(V_s/W)^{(i)}\|_{s=1,\ldots,q;\, i=0,\ldots,q-1}$ — фундаментальная матрица, отвечающая функциям из леммы 27. Как уже было сказано перед леммой 7, $W^* = |\Phi^*| = cW^{-1},\ c \in \mathbb{C}$. Обозначим $V_k^*,\ k = 1, \ldots, q$, алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы Φ^*.

Лемма 28. *Справедливы равенства*

$$v_k = (-1)^{q-1} V_k^*/W^*, \qquad k = 1, \ldots, q.$$

Доказательство. Из леммы 27 и свойств сопряжённых дифференциальных уравнений ([29:1, гл. 2, §5.2, формула (11)]) следует, что

$$\begin{cases} v_1 V_1/W + \cdots + v_q w/W & = & 0 \\ \quad \ldots \qquad \ldots & & \\ v_1 (V_1/W)^{(q-2)} + \cdots + v_q (w/W)^{(q-2)} & = & 0 \\ v_1 (V_1/W)^{(q-1)} + \cdots + v_q (w/W)^{(q-1)} & = & (-1)^{q-1}. \end{cases} \tag{31}$$

Систему уравнений (31) можно получить также из равенств (29) путём деления их на W и дифференцирования. Выражая из системы (31) $v_1, \ldots, v_q$ по правилу Крамера, получаем утверждение леммы 28.

Лемма 29. *Пусть* $v, S, T_0, T_1, \ldots, T_{q-1}$ — *произвольные аналитические функции,* v *удовлетворяет уравнению (28), функции* $v, v', \ldots, v^{(q-1)}$ *линейно независимы над* $\mathbb{C}\langle z, S, T_0, T_1 \ldots, T_{q-1}\rangle$,

$$R = T_* + T_0 v + T_1 v' + \cdots + T_{q-1} v^{(q-1)}, \qquad R' = vS, \qquad T_* \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\overline{L}\, T_{q-1} = -S$, *где* $\overline{L}$ — *дифференциальный оператор, сопряжённый с* L.

Доказательство. Из условий леммы последовательно получаем

$$R' = T_0' v + (T_0 + T_1') v' + (T_1 + T_2') v'' + \cdots + (T_{q-2} + T_{q-1}') v^{(q-1)} + T_{q-1} v^{(q)} = vS,$$

$$(T_0' - S) v + (T_0 + T_1') v' + (T_1 + T_2') v'' + \cdots + (T_{q-2} + T_{q-1}') v^{(q-1)} + T_{q-1} v^{(q)} = 0,$$

$$T_{q-1} a_0 = T_0' - S, \qquad T_{q-1} a_1 = T_0 + T_1', \qquad T_{q-1} a_2 = T_1 + T_2',\ \ldots,$$

$$T_{q-1} a_{q-2} = T_{q-3} + T_{q-2}', \qquad T_{q-1} a_{q-1} = T_{q-2} + T_{q-1}'.$$

Дифференцируя последние q равенств, соответственно, $0, 1, \ldots, q-1$ раз и рассматривая их алгебраическую сумму с чередующимися знаками, имеем

$$(-1)^q T_{q-1}^{(q)} + (-1)^{q-1}(a_{q-1}T_{q-1})^{(q-1)} + \cdots - (a_1 T_{q-1})' + a_0 T_{q-1} = -S.$$

Лемма 29 доказана.

Пусть в уравнении (28) $a_t z^q \in \mathbb{C}[z]$, $t = 0, \ldots, q-1$, $W = |\Phi| \in \mathbb{C}[e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_h z}, z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p}]$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_h, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{C}$, $1/\beta_1 = b \in \mathbb{N}$. Если функции

$$\left\{ v_s^{(i)} \Big|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q;\, (i,s)\neq(q-1,q)} \right\}, e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_h z}, z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p} \qquad (32)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, то все операции с ними можно проводить, заменяя их на соответствующие переменные

$$\left\{ x_{i,s} \big|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q;\, (i,s)\neq(q-1,q)} \right\}, x_1, \ldots, x_h, z_1, \ldots, z_p. \qquad (33)$$

В силу сказанного будем считать, что W совпадает с некоторым многочленом $\hat{W}$ от переменных

$$x_1, \ldots, x_h, z_1, \ldots, z_p, \qquad (34)$$

а V_k, V_k° и w, введённые перед леммами 25 и 26 — с многочленами $\hat{V}_k, \hat{V}_k^\circ$ и $\hat{w}$ от переменных (33), кроме (34). При другом выборе решений v_s вронскиан W, вообще говоря, будет равен $c\hat{W}$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, но, умножив какое-нибудь v_s на c^{-1} либо все v_s на $c^{-1/q}$, получим, что $W = \hat{W}$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 17, заметим, что фундаментальная матрица Φ имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_{0,1} & \ldots & x_{0,q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{q-1,1} & \ldots & \hat{x}_{q-1,q} \end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_{q-1,q}$ — рациональная функция от переменных (33), определяемая уравнением $|\Phi| = \hat{W}$, равносильным

$$\hat{V}_1 x_{q-1,1} + \cdots + \hat{V}_{q-1} x_{q-1,q-1} + \hat{w}\hat{x}_{q-1,q} = \hat{W},$$

откуда

$$\hat{x}_{q-1,q} = \frac{\hat{W} - \hat{V}_1 x_{q-1,1} - \cdots - \hat{V}_{q-1} x_{q-1,q-1}}{\hat{w}}. \qquad (35)$$

Операции дифференцирования по z рациональных функций, зависящих от (32), будет соответствовать оператор

$$\mathfrak{D}=\sum_{j=1}^{h}\gamma_j x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\frac{z_j}{z_1^b}\,\frac{\partial}{\partial z_j}+\sum_{\substack{i,s\\ i\neq q-1;\ (i,s)\neq(q-2,q)}}x_{i+1,s}\,\frac{\partial}{\partial x_{i,s}}-$$

$$-\sum_{s\neq q}\left(\sum_{j=0}^{q-1}a_j x_{j,s}\right)\frac{\partial}{\partial x_{q-1,s}}+\hat{x}_{q-1,q}\,\frac{\partial}{\partial x_{q-2,q}}. \tag{36}$$

Если P — многочлен от переменных (33), а Q — многочлен от переменных

$$\left\{x_{i,s}\big|_{i=0,\dots,q-1;\ s=1,\dots,q-1}\right\} \tag{37}$$

и (34), то, очевидно, $z_1^{qb}\hat{w}\mathfrak{D}P$ и $z_1^{qb}\mathfrak{D}Q$ есть многочлены от тех же переменных. Отметим также, что согласно свойствам определителей многочлен $\hat{w}$ является неприводимым (см. [7:1, § 23, задача 3]).

Лемма 30. *Пусть функции (32) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, а $P\not\equiv 0$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ от $q^2-1+h+p$ переменных (33). Тогда:*

1°. *Если $z_1^{qb}\mathfrak{D}P$ есть многочлен от переменных (33), то $z_1^{qb}\mathfrak{D}P$ делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P=\sigma z_1^{b_1}\dots z_p^{b_p}x_1^{k_1}\dots x_h^{k_h},\quad \sigma\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ b_i,k_i\in\mathbb{Z}^+. \tag{38}$$

2°. *Многочлен $z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}\hat{w}\mathfrak{D}P$, где $c_i,s_i\in\mathbb{Z}^+,\ c_1\geqslant qb$, делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P=\sigma z_1^{b_1}\dots z_p^{b_p}x_1^{k_1}\dots x_h^{k_h}\hat{w}^m,\quad \sigma\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \ b_i,k_i,m\in\mathbb{Z}^+. \tag{39}$$

Доказательство. Пусть многочлен P зависит от переменных

$$x_{i,q},\quad i=0,\dots,q-2. \tag{40}$$

Как следует из леммы 25, переменные (40) взаимно однозначно и линейно выражаются через переменные $V_1,\dots,V_d$, где $d=q-1$, обозначающих, соответственно, многочлены $\hat{V}_1,\dots,\hat{V}_d$, откуда вытекает, что $V_1,\dots,V_d$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ вместе с переменными (33), кроме (40). Очевидно, что P является однозначно определённым многочленом от $V_1, \dots, V_d$ с коэффициентами — рациональными функциями от переменных (33), кроме (40), причём хотя бы одна переменная $V = V_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d$ действительно входит в P. Таким образом,

$$P = P_s V^s + \dots + P_1 V + P_0, \quad P_s \not\equiv 0,\ s \geqslant 1,$$

где $P_s, \dots, P_0$ — многочлены от $V_1, \dots, V_d$, кроме V, с коэффициентами — рациональными функциями от переменных (33), кроме (40).

Из формулы частной производной сложной функции следует, что при взаимно однозначном и дифференцируемом в обе стороны преобразовании переменных $(y_1, \dots, y_n) \longleftrightarrow (u_1, \dots, u_n)$ дифференциальный оператор

$$\mathfrak{Q} = A_1(\vec{y})\,\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + A_n(\vec{y})\,\frac{\partial}{\partial y_n}$$

переходит в оператор

$$\mathfrak{Q}_1 = B_1(\vec{u})\,\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + B_n(\vec{u})\,\frac{\partial}{\partial u_n},$$

где $B_i = \mathfrak{Q}(u_i(\vec{y})),\ i = 1, \dots, n$. Отсюда получаем, что если переменные $y_1, \dots, y_k$, где $k < n$, отображаются в себя, а $A_1, \dots, A_k$ зависят только от $y_1, \dots, y_k$, то $B_i \equiv A_i,\ i = 1, \dots, k$.

Докажем, что при рассмотренной замене переменных оператор $\mathfrak{D}$ перейдёт в

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_0 + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\mathfrak{D}\hat{w}}{\hat{w}} V_j + \frac{\hat{V}_j^{\circ}}{\hat{w}} \hat{W} \right) \frac{\partial}{\partial V_j},$$

где $\mathfrak{D}_0$ — оператор, определяемый равенством (36), из которого исключены слагаемые, содержащие частные производные по переменным (40). Действительно, как уже установлено выше, слагаемые из $\mathfrak{D}$, содержащие частные производные по переменным (37) и (34), не изменятся, а остальные перейдут в сумму вида

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left(\mathfrak{D}\hat{V}_j \right) \frac{\partial}{\partial V_j}.$$

Следовательно, остаётся доказать, что

$$\mathfrak{D}\hat{V}_j = \frac{\mathfrak{D}\hat{w}}{\hat{w}} \hat{V}_j + \frac{\hat{V}_j^{\circ}}{\hat{w}} \hat{W}, \qquad j = 1, \dots, q-1.$$

Для этого достаточно дословно повторить доказательство леммы 26.

Таким образом,

$$\mathfrak{D}_1 P = \left(\mathfrak{D}_1 P_s + \frac{sP_s\mathfrak{D}\hat{w}}{\hat{w}}\right) V^s + \dots .$$

По условиям в 1° и 2° $\mathfrak{D}_1 P/P$ — многочлен от V. Так как степени многочленов $\mathfrak{D}_1 P$ и P по V равны,

$$\frac{\mathfrak{D}_1 P}{P} = \frac{\mathfrak{D}_1 P_s}{P_s} + \frac{s\mathfrak{D}\hat{w}}{\hat{w}}.$$

Подставив в это равенство вместо переменных (33) функции (32), получим дифференциальное уравнение, решив которое, имеем $P = \sigma P_s \hat{w}^s$, $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, P не зависит от V, а потому и от переменных (40).

Докажем теперь первое утверждение леммы. Так как степень многочлена $z_1^{qb}\mathfrak{D}P$ по совокупности переменных (37) и (34), кроме z_1, такая же, как у P, а степень по z_1 может быть больше чем у P на qb, то частное от деления $z_1^{qb}\mathfrak{D}P$ на P будет многочленом от z_1 степени не выше qb,

$$z_1^{qb}\mathfrak{D}P = (a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_{qb-b} z_1^{qb-b} + \dots + a_{qb} z_1^{qb})P, \quad a_0, \dots, a_{qb} \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Допустим, что P зависит от переменных (37). Ввиду возможности изменения нумерации, будем считать, что P зависит от $x_{0,1}, \dots$, $x_{q-1,1}$ и P_* — совокупность однородных членов старшей степени по этим переменным. Так как оператор $\mathfrak{D}$ переводит совокупность однородных членов от переменных $x_{0,1}, \dots, x_{q-1,1}$ фиксированной степени в совокупность таких же членов, то P_* также удовлетворяет уравнению (41). Положим в (41) $x_{i,1} = c_1 v_1^{(i)} + \dots + c_q v_q^{(i)}$, где $c_1 v_1 + \dots + c_q v_q$ — ненулевое решение уравнения (28). Переменные $x_{i,s}$ с индексами $s \neq 1$ заменим на линейно независимые с выбранным решения того же уравнения и их производные. Как уже было сказано перед леммой 30, это можно сделать, не изменив вронскиан W. Заменяя оставшиеся переменные (34) на соответствующие функции (32) и решив полученное дифференциальное уравнение (41), имеем

$$P_* = \sigma(c_1, \dots, c_q) z^{a_{qb-b}} e^{a_{qb} z + \dots - a_0/((q-1)z^{q-1})}. \tag{42}$$

Поскольку левая часть (42) — однородный многочлен от $c_1, \ldots, c_q$, то постоянная $\sigma(c_1, \ldots, c_q)$ также будет однородным многочленом от этих величин. Поэтому соотношение между $c_1, \ldots, c_q$ можно выбрать так, что для некоторого решения соответствующего дифференциального уравнения $\sigma(c_1, \ldots, c_q) = 0$ и $P_* = 0$, что противоречит алгебраической независимости функций, входящих в P_*. Следовательно, P не зависит от переменных (37) и имеет вид

$$P = T_1 z_1^{l_{1,1}} \ldots z_p^{l_{1,p}} x_1^{\omega_{1,1}} \ldots x_h^{\omega_{1,h}} + \cdots + T_s z_1^{l_{s,1}} \ldots z_p^{l_{s,p}} x_1^{\omega_{s,1}} \ldots x_h^{\omega_{s,h}}, \qquad (43)$$

где $l_{i,j}, \omega_{i,j} \in \mathbb{Z}^+$, вектора $(l_{i,2}, \ldots, l_{i,p}, \omega_{i,1}, \ldots, \omega_{i,h})$ попарно различны, $T_i \in \mathbb{C}[z_1]$, $(T_i, z_1) = 1$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда

$$\mathfrak{D}P = \left(\frac{\mathfrak{D}T_1}{T_1} + \sum_{j=1}^{p} \frac{l_{1,j}\beta_j}{z_1^b} + \sum_{j=1}^{h} \omega_{1,j}\gamma_j \right) T_1 z_1^{l_{1,1}} \ldots z_p^{l_{1,p}} x_1^{\omega_{1,1}} \ldots x_h^{\omega_{1,h}} +$$

$$+ \cdots + \left(\frac{\mathfrak{D}T_s}{T_s} + \sum_{j=1}^{p} \frac{l_{s,j}\beta_j}{z_1^b} + \sum_{j=1}^{h} \omega_{s,j}\gamma_j \right) T_s z_1^{l_{s,1}} \ldots z_p^{l_{s,p}} x_1^{\omega_{s,1}} \ldots x_h^{\omega_{s,h}}.$$

Отсюда получаем $\mathfrak{D}P/P = \mathfrak{D}T_1/T_1 + (\sum l_{1,j}\beta_j)/z_1^b + \sum \omega_{1,j}\gamma_j$, $P = T_1 z_1^{l_{1,1}} \ldots z_p^{l_{1,p}} x_1^{\omega_{1,1}} \ldots x_h^{\omega_{1,h}}$ и что многочлен $z_1^b \mathfrak{D}T_1$ делится на T_1. Но тогда $T_1 \in \mathbb{C}$, а P имеет вид (38).

Докажем второе утверждение леммы. Пусть

$$P = Q z_1^{d_1} \ldots z_p^{d_p} x_1^{t_1} \ldots x_h^{t_h} \hat{w}^m, \qquad d_i, t_i, m \in \mathbb{Z}^+,$$

где Q — многочлен от переменных (37) и (34), $(Q, \hat{w} x_1 \ldots x_h z_1 \ldots z_p) = 1$. Тогда

$$\frac{z_1^{c_1} \ldots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \ldots x_h^{s_h} \hat{w} \mathfrak{D}P}{P} = z_1^{c_1} \ldots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \ldots x_h^{s_h} \hat{w} \frac{\mathfrak{D}Q}{Q} +$$

$$+ z_1^{c_1} \ldots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \ldots x_h^{s_h} \hat{w} \left(\frac{1}{z_1^b} \sum_j d_j \beta_j + \sum_j t_j \gamma_j + \frac{m}{\hat{w}} \mathfrak{D}\hat{w} \right). \qquad (44)$$

Так как первое слагаемое правой части (44) обязано быть многочленом, а Q не делится на $\hat{w}, x_1, \ldots, x_h, z_1, \ldots, z_p$, то многочлен $z_1^{qb} \mathfrak{D}Q$ должен делиться на Q. Тогда по первому утверждению леммы Q имеет вид (38), а P — вид (39). Лемма 30 доказана.

Для дальнейшего необходимо обобщить лемму 30 на случай нескольких дифференциальных уравнений.

Пусть $\Phi_k = \|v_{k,s}^{(i)}\|_{i=0,\dots,q_k-1;\, s=1,\dots,q_k}$, $k=1,\dots,m$ — фундаментальные матрицы дифференциальных уравнений

$$v^{(q_k)} + a_{k,q_k-1}v^{(q_k-1)} + \dots + a_{k,1}v' + a_{k,0}v = 0, \quad q_k \geqslant 2, \quad a_{k,j} \in \mathbb{C}(z),$$

таких, что $a_{k,t}z^{q_k} \in \mathbb{C}[z]$, $t=0,\dots,q_k-1$, $|\Phi_k| = W_k \in \mathbb{C}[e^{\gamma_1 z},\dots,e^{\gamma_h z}, z^{\beta_1},\dots,z^{\beta_p}]$, $\gamma_1,\dots,\gamma_h$, $\beta_1,\dots,\beta_p \in \mathbb{C}$, $1/\beta_1 = b \in \mathbb{N}$. Если функции

$$\left\{ v_{k,s}^{(i)} \Big|_{k=1,\dots,m;\, i=0,\dots,q_k-1;\, s=1,\dots,q_k;\, (i,s)\neq(q_k-1,q_k)} \right\}, e^{\gamma_1 z},\dots,e^{\gamma_h z}, z^{\beta_1},\dots,z^{\beta_p} \tag{45}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, то все операции с ними можно проводить, заменяя их на соответствующие переменные

$$\left\{ x_{k,i,s}\big|_{k=1,\dots,m;\, i=0,\dots,q_k-1;\, s=1,\dots,q_k;\, (i,s)\neq(q_k-1,q_k)} \right\}, x_1,\dots,x_h, z_1,\dots,z_p. \tag{46}$$

Обозначим $V_{k,s}$, $s=1,\dots,q_k$, алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы Φ_k, $w_k = V_{k,q_k}$. Тогда величины $V_{k,s}$ и w_k можно рассматривать как многочлены $\hat{V}_{k,s}$ и $\hat{w}_k$ от переменных $x_{k,i,s}$, а W_k — как многочлен $\hat{W}_k$ от переменных (34). Фундаментальная матрица Φ_k принимает вид

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} x_{k,0,1} & \dots & x_{k,0,q_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{k,q_k-1,1} & \dots & \hat{x}_{k,q_k-1,q_k} \end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_{k,q_k-1,q_k}$ — рациональная функция от переменных (46), определяемая аналогично (35).

Операции дифференцирования по z рациональных функций, зависящих от (45), в этом случае будет соответствовать оператор

$$D = \sum_{j=1}^{h} \gamma_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \frac{z_j}{z_1^b}\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{\substack{k,i,s \\ i\neq q_k-1;\, (i,s)\neq(q_k-2,q_k)}} x_{k,i+1,s}\frac{\partial}{\partial x_{k,i,s}} -$$

$$- \sum_{k,s;\, s\neq q_k} \left(\sum_{j=0}^{q_k-1} a_{k,j}x_{k,j,s} \right) \frac{\partial}{\partial x_{k,q_k-1,s}} + \sum_{k=1}^{m} \hat{x}_{k,q_k-1,q_k}\frac{\partial}{\partial x_{k,q_k-2,q_k}}, \tag{47}$$

аналогичный (36). Если P — многочлен от переменных (46), а Q — многочлен от переменных

$$\left\{ x_{k,i,s}|_{k=1,\dots,m;\, i=0,\dots,q_k-1;\, s=1,\dots,q_k-1} \right\} \tag{48}$$

и (34), то, очевидно, $z_1^{qb}(\prod_k \hat{w}_k)DP$ и $z_1^{qb}DQ$, где $q = \max q_k$, есть многочлены от тех же переменных. Снова отметим, что все многочлены $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m$ являются неприводимыми.

Лемма 31. *Пусть функции (45) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, а $P \not\equiv 0$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ от $q_1^2 + \dots + q_m^2 - m + h + p$ переменных (46). Тогда:*

1°. *Если $z_1^{qb}DP$ есть многочлен от переменных (46), то $z_1^{qb}DP$ делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P = \sigma z_1^{b_1} \dots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \dots x_h^{k_h}, \quad \sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ b_i, k_i \in \mathbb{Z}^+.$$

2°. *Многочлен $z_1^{c_1} \dots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h}(\prod_i \hat{w}_i)DP$, где $c_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, $c_1 \geqslant qb$, делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P = \sigma z_1^{b_1} \dots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \dots x_h^{k_h} \prod_i \hat{w}_i^{m_i}, \quad \sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \ b_i, k_i, m_i \in \mathbb{Z}^+. \tag{49}$$

Доказательство является точным обобщением доказательства леммы 30. Пусть многочлен P зависит от переменных

$$x_{k,i,q_k}, \quad k = 1, \dots, m,\ i = 0, \dots, q_k - 2. \tag{50}$$

Ввиду возможности изменения нумерации, будем считать, что P зависит от переменных

$$x_{1,0,q_1}, x_{1,1,q_1}, \dots, x_{1,q_1-2,q_1}. \tag{51}$$

Тогда, как следует из леммы 25, он является однозначно определённым многочленом от переменных $V_1, \dots, V_d$, где $d = q_1 - 1$, обозначающих, соответственно, многочлены $\hat{V}_{1,1}, \dots, \hat{V}_{1,d}$, причём хотя бы одна переменная $V = V_j$, $\ 1 \leqslant j \leqslant d$ действительно входит в P. Очевидно, что переменные $V_1, \dots, V_d$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ вместе с переменными (46), кроме (51). Таким образом,

$$P = P_s V^s + \dots + P_1 V + P_0, \quad P_s \not\equiv 0,\ s \geqslant 1,$$

где $P_s, \ldots, P_0$ — многочлены от $V_1, \ldots, V_d$, кроме V, с коэффициентами — рациональными функциями от переменных (46), кроме (51). Согласно рассуждению, проведённому при доказательстве леммы 30, операции дифференцирования по z в этом случае будет соответствовать оператор

$$D_1 = D_0 + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{D\hat{w}_1}{\hat{w}_1} V_j + \frac{\hat{V}_j^{\circ}}{\hat{w}_1} \hat{W} \right) \frac{\partial}{\partial V_j},$$

где D_0 — оператор, определяемый равенством (47), из которого исключены слагаемые, содержащие частные производные по переменным (51). Тогда

$$D_1 P = \left(D_1 P_s + \frac{s P_s D\hat{w}_1}{\hat{w}_1} \right) V^s + \ldots .$$

По условиям в 1° и 2° D_1P/P — многочлен от V. Так как степени многочленов D_1P и P по V равны,

$$\frac{D_1 P}{P} = \frac{D_1 P_s}{P_s} + \frac{s D\hat{w}_1}{\hat{w}_1}.$$

Подставив в это равенство вместо переменных (46) функции (45), получим дифференциальное уравнение, решив которое, имеем $P = \sigma P_s \hat{w}_1^s$, $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, P не зависит от V, а потому и от переменных (50).

Докажем теперь первое утверждение леммы. Так как степень многочлена $z_1^{qb} DP$ по совокупности переменных (48) и (34), кроме z_1, такая же, как у P, а степень по z_1 может быть больше чем у P на qb, то частное от деления $z_1^{qb} DP$ на P будет многочленом от z_1 степени не выше qb,

$$z_1^{qb} DP = (a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{qb-b} z_1^{qb-b} + \cdots + a_{qb} z_1^{qb}) P, \quad a_0, \ldots, a_{qb} \in \mathbb{C}. \tag{52}$$

Допустим, что P зависит от переменных (48). Ввиду возможности изменения нумерации, будем считать, что P зависит от $x_{1,0,1}, \ldots,$ $x_{1,q_1-1,1}$ и P_* — совокупность однородных членов старшей степени по этим переменным. Так как оператор D переводит совокупность однородных членов от переменных $x_{1,0,1}, \ldots,$ $x_{1,q_1-1,1}$ фиксированной степени в совокупность таких же членов, то P_* также удовлетворяет уравнению (52). Положим в (52) $x_{1,i,1} = c_1 v_{1,1}^{(i)} + \dots + c_{q_1} v_{1,q_1}^{(i)}$, где $c_1 v_{1,1} + \dots + c_{q_1} v_{1,q_1}$ — ненулевое решение первого из заданных уравнений. Переменные $x_{1,i,s}$ с индексами $s \neq 1$ заменим на линейно независимые с рассмотренным решения того же уравнения и их производные. Как и при доказательстве леммы 30, это можно сделать так, что вронскиан W_1 не изменится. Заменив остальные переменные (46) на соответствующие функции (45) и решив полученное дифференциальное уравнение (52), имеем

$$P_* = \sigma(c_1, \dots, c_{q_1}) z^{a_{qb-b}} e^{a_{qb}z + \dots - a_0/((q-1)z^{q-1})}. \tag{53}$$

Поскольку левая часть (53) — однородный многочлен от $c_1, \dots, c_{q_1}$, то постоянная $\sigma(c_1, \dots, c_{q_1})$ также будет однородным многочленом от этих величин. Поэтому соотношение между $c_1, \dots, c_{q_1}$ можно выбрать так, что для некоторого решения соответствующего дифференциального уравнения $\sigma(c_1, \dots, c_{q_1}) = 0$ и $P_* = 0$, что противоречит алгебраической независимости функций, входящих в P_*. Следовательно, P не зависит от переменных (48) и имеет вид (43). Далее, дословно повторив соответствующие рассуждения доказательства леммы 30, получим, что P имеет вид (38), что доказывает первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть

$$P = Q z_1^{d_1} \dots z_p^{d_p} x_1^{t_1} \dots x_h^{t_h} \prod_i \hat{w}_i^{m_i}, \qquad d_i, t_i, m_i \in \mathbb{Z}^+,$$

где Q — многочлен от переменных (48) и (34), $(Q, \hat{w}_1 \dots \hat{w}_m x_1 \dots x_h z_1 \dots z_p) = 1$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{z_1^{c_1} \dots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h} (\prod_i \hat{w}_i) DP}{P} = z_1^{c_1} \dots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h} (\prod_i \hat{w}_i) \frac{DQ}{Q} + \\ + z_1^{c_1} \dots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h} (\prod_i \hat{w}_i) \left(\frac{1}{z_1^b} \sum_j d_j \beta_j + \sum_j t_j \gamma_j + \sum_i \frac{m_i}{\hat{w}_i} D\hat{w}_i \right).\end{gathered} \tag{54}$$

Так как первое слагаемое правой части (54) обязано быть многочленом, а Q не делится на $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m, x_1, \dots, x_h, z_1, \dots, z_p$, то многочлен $z_1^{qb} DQ$ должен делиться на Q. Тогда по первому утверждению леммы Q имеет вид (38), а P — вид (49). Лемма 31 доказана.

Лемма 32 [58:1], [52:2]. *Если* $\mathbb{F}$ *— дифференциальное поле функций, мероморфных в некоторой области, содержащее поле* $\mathbb{C}$, *а* $\psi_1, \ldots, \psi_m$ *— функции, производные которых принадлежат* $\mathbb{F}$, *то* $\psi_1, \ldots, \psi_m$ *алгебраически зависят над* $\mathbb{F}$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_m\psi_m \in \mathbb{F}$ *при некоторых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m| \neq 0$.

§4. Доказательство теорем 19, 20 и 21

Поскольку теорема 19 является частным случаем теоремы 20, ограничимся доказательством теорем 20 и 21. Непосредственное доказательство теоремы 19 подробно проведено в статье автора [64:22].

Лемма 33. *Пусть функции (45) алгебраически независимы над* $\mathbb{C}$; $\delta_{i,j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^+$, $\delta_{i,l} - \delta_{i,k} \notin \mathbb{Z}$, $l \neq k$, $i = 1, \ldots, \varkappa$, $j = 1, \ldots, \varkappa_0$; $\omega_1, \ldots, \omega_\varkappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и различны. Тогда функции (45) вместе с* $\varkappa\varkappa_0$ *функциями*

$$\int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz, \quad i = 1, \ldots, \varkappa, \ j = 1, \ldots, \varkappa_0$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, порождённое над $\mathbb{C}$ функциями (45). Изменяя при необходимости числа β_k, γ_k, p, h, можно считать, что $\delta_{i,j} = \sum_k c_{i,j,k}\beta_k$, $\omega_i = \sum_k c_{i,k}\gamma_k$, $c_{i,j,k}, c_{i,k} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, \varkappa$, $j = 1, \ldots, \varkappa_0$. Согласно лемме 32 при некоторых $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{\varkappa,\varkappa_0} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{1,1}| + \cdots + |\alpha_{\varkappa,\varkappa_0}| \neq 0$

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz = \frac{P}{Q}, \tag{55}$$

где P, Q — многочлены над $\mathbb{C}$ от функций (45), $(P, Q) = 1$. Дифференцируя равенство (55), получим

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} = (P/Q)'. \tag{56}$$

Заменяя в этом равенстве функции (45) на переменные (46), имеем

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} z_1^{c_{i,j,1}} \ldots z_p^{c_{i,j,p}} \, x_1^{c_{i,1}} \ldots x_h^{c_{i,h}} = \frac{QDP - PDQ}{Q^2}. \tag{57}$$

Отсюда следует, что многочлен $z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}(\prod_i \hat w_i)DQ$ при некоторых $c_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, $c_1 \geqslant qb$, делится на Q. Тогда согласно лемме 31 Q имеет вид (49) и не зависит от переменных (50).

Докажем, что многочлен P также не зависит от переменных (50). Ввиду возможности изменения нумерации, для этого достаточно доказать, что P не зависит от переменных (51). Допустив противное и воспользовавшись леммой 25, можно считать, что в выражение P/Q входит одночлен максимальной степени $s \geqslant 1$ по совокупности переменных $V_1 = V_{1,1}, \dots, V_d = V_{1,d}$, где $d = q_1 - 1$, вида

$$A_1 = P_1 V_1^{s_1}\dots V_d^{s_d}, \quad s_1,\dots,s_d \in \mathbb{Z}^+,\ s_1 \geqslant 1,\ s_1+\dots+s_d = s,\ P_1 \not\equiv 0,$$

где P_1 — многочлен от переменных (48), $\hat w_1^{-1},\dots,\hat w_m^{-1}$,

$$z_1^{\pm1},\dots,z_p^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_h^{\pm1} \tag{58}$$

и (50), кроме (51). Так как

$$D_1A_1 = \left(DP_1 + \left(s_1\frac{D\hat w_1}{\hat w_1} + \dots + s_d\frac{D\hat w_1}{\hat w_1}\right)P_1\right)V_1^{s_1}\dots V_d^{s_d} + \dots,$$

то

$$DP_1 + s\frac{D\hat w_1}{\hat w_1}P_1 = 0, \quad P_1 = c_1\hat w_1^{-s}, \quad c_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Аналогично, если в P/Q входят одночлены

$$A_2 = P_2V_1^{s_1-1}V_2^{s_2+1}V_3^{s_3}\dots V_d^{s_d},\ \dots,\ A_d = P_dV_1^{s_1-1}V_2^{s_2}\dots V_d^{s_d+1},$$

то

$$P_2 = c_2\hat w_1^{-s},\ \dots,\ P_d = c_d\hat w_1^{-s}, \quad c_2,\dots,c_d \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим также одночлен

$$A_0 = P_0V_1^{s_1-1}V_2^{s_2}\dots V_d^{s_d}.$$

Приравняв в (57) коэффициенты при $V_1^{s_1-1}V_2^{s_2}\dots V_d^{s_d}$, получим

$$DP_0 + (s-1)\frac{D\hat w_1}{\hat w_1}P_0 + \frac{(c_1s_1\hat V_1^\circ + \dots + c_d(s_d+1)\hat V_d^\circ)\hat W_1}{\hat w_1^{s+1}} = \varepsilon, \tag{59}$$

где ε равно левой части (57), если $s = 1$, и нулю, если $s \geqslant 2$. Как уже выяснено, знаменатель рациональной функции P_0 имеет вид (49).

Поэтому $P_0 = R/\hat{w}_1^r$, где $r \in \mathbb{Z}$, R — многочлен от переменных (48), (58), $\hat{w}_2^{-1}, \ldots, \hat{w}_m^{-1}$ и (50), кроме (51), $(R, \hat{w}_1) = 1$. Тогда из (59) следует

$$\hat{w}_1 DR + (s-r-1) R D\hat{w}_1 = -\hat{w}_1^{r-s}(c_1 s_1 \hat{V}_1^{\circ} + \cdots + c_d(s_d+1)\hat{V}_d^{\circ})\hat{W}_1 + \varepsilon \hat{w}_1^{r+1}. \tag{60}$$

Так как левая часть равенства (60) является многочленом от $x_{1,0,1}, x_{1,1,1}, \ldots, x_{1,d,d}$, не делящимся на $\hat{w}_1$, то $r = s$. Выделяя в (60) слагаемые, не содержащие ни одну из переменных $x_{1,0,1}, x_{1,1,1}, \ldots, x_{1,d,1}$, получим $c_1 s_1 \hat{V}_1^{\circ}\hat{W}_1 = 0$, что невозможно, так как $c_1 s_1 \neq 0$.

Полученное противоречие означает, что P/Q не зависит от переменных (50). Следовательно, Q имеет вид (38), $P/Q = T$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ от переменных (48) и (58),

$$DT = \sum_j \alpha_{1,j} z^{\delta_{1,j}} e^{\omega_1 z} + \cdots + \sum_j \alpha_{\varkappa,j} z^{\delta_{\varkappa,j}} e^{\omega_\varkappa z}. \tag{61}$$

Пусть $T = B + B_1$, где B_1 — совокупность всех одночленов многочлена T, содержащих хотя бы одну из переменных (48). Из уравнения (61) получаем, что $DB_1 = 0$, $B_1 = 0$, а P не зависит от переменных (48).

Таким образом, доказано, что в выражении P/Q $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_p, x_1, \ldots, x_h]$, а $Q = \sigma z_1^{b_1} \ldots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \ldots x_h^{k_h}$. Но тогда, заменяя переменные (34) на соответствующие функции (45), ввиду (56) имеем

$$T = T_1 e^{\omega_1 z} + \cdots + T_\varkappa e^{\omega_\varkappa z}, \quad T' = (T_1' + \omega_1 T_1) e^{\omega_1 z} + \cdots + (T_\varkappa' + \omega_\varkappa T_\varkappa) e^{\omega_\varkappa z},$$

где $z^\beta T_i \in \mathbb{C}[z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p}]$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, \varkappa$, $\beta = \sum_l b_l \beta_l$.

Можно считать, что $\sum_j |\alpha_{1,j}| \neq 0$. Из равенства (61) следует

$$\sum_j \alpha_{1,j} z^{\delta_{1,j}} = T_1' + \omega_1 T_1. \tag{62}$$

Так как $\delta_{1,j} \neq 0$, $\delta_{1,j} \neq \delta_{1,k}$, $j \neq k$, то $T_1 \notin \mathbb{C}$. Пусть

$$T_1 = a_1 z^{\alpha_1} + \cdots + a_s z^{\alpha_s}, \quad a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \Re e\ \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \Re e\ \alpha_s,$$

причём если $\Re e\ \alpha_k = \Re e\ \alpha_{k+1}$, то $\Im m\ \alpha_k < \Im m\ \alpha_{k+1}$. Пусть $\tau \in \mathbb{N}$ — наибольшее число, такое, что $\alpha_\tau - \alpha_1 \in \mathbb{Z}^+$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то правая часть (62) будет содержать по крайней мере две степени z с показателями, различающимися на целое число: $\alpha_1 - 1$ и α_τ. Так как в левой части (62) таких показателей быть не может, получаем противоречие.

Если $\alpha_1 = 0$, то правая часть (62) будет содержать степень z с показателем $\alpha_\tau \in \mathbb{Z}^+$, что также невозможно. Лемма 33 доказана.

Лемма 34. *Пусть выполнены условия леммы 33,* $v_{k,s} = \Delta_k y_{k,s}$, $s = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, m$, *где* $y_{k,1}, \dots, y_{k,q_k}$ *— линейно независимые решения уравнений* $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})y = 0$, $p_k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k^{-q_k}$ *совпадают с вронскианами этих уравнений,* $\vec{\nu}_k \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k > \max(1, l_k)$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *а* $V_{k,s}$ *— функции, определённые после леммы 30. Пусть* $\sigma_{k,s,j,r} \in \mathbb{C}$, $(\sigma_{k,s,j,r} - \sigma_{k,s,i,r})/p_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$, $(-1)^r \sigma_{k,s,j,r}/p_k + \lambda_{k,t} \notin \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, \varkappa_0$, $r = 0, 1$, $t = 1, \dots, q_k$. *Тогда функции (45) вместе с* $(\varkappa + q_1 + \dots + q_m)\varkappa_0$ *функциями*

$$\int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz, \int z^{\sigma_{k,s,j,0} - q_k} \Delta_k V_{k,s} dz,$$

$$i = 1, \dots, \varkappa,\ k = 1, \dots, m,\ s = 1, \dots, q_k,\ j = 1, \dots, \varkappa_0$$

и теми из $(q_1 + \dots + q_m)\varkappa_0$ *функций*

$$\int z^{\sigma_{k,s,j,1} - 1} \Delta_k^{-1} v_{k,s} dz, \quad k = 1, \dots, m,\ s = 1, \dots, q_k,\ j = 1, \dots, \varkappa_0,$$

для которых $q_k \geqslant 3$, *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Ограничение $q_k \geqslant 3$ для последних из рассмотренных в лемме функций вызвано тем, что при $q_k = 2$ $v_{k,1} = V_{k,2} = w_k$, $v_{k,2} = -V_{k,1}$. Изменяя при необходимости в (45) числа β_k, γ_k, p, h, можно считать, что

$$z^{\delta_{i,j}}, z^{\sigma_{k,s,j,r}}, z^{\pm 1}, e^{\omega_i z}, \Delta_k \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \dots, z^{\pm\beta_p}, e^{\pm\gamma_1 z}, \dots, e^{\pm\gamma_h z}].$$

Повторяя начало доказательства леммы 33, получим вместо равенств (55), (56) соответственно равенства

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz + \sum_{k,s,j} \alpha_{k,s,j,0} \int z^{\sigma_{k,s,j,0} - q_k} \Delta_k V_{k,s} dz +$$

$$+ \sum_{k,s,j} \alpha_{k,s,j,1} \int z^{\sigma_{k,s,j,1} - 1} \Delta_k^{-1} v_{k,s} dz = \frac{P}{Q}, \tag{63}$$

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} + \sum_{k,s,j} \alpha_{k,s,j,0} z^{\sigma_{k,s,j,0} - q_k} \Delta_k V_{k,s} + \sum_{k,s,j} \alpha_{k,s,j,1} z^{\sigma_{k,s,j,1} - 1} \Delta_k^{-1} v_{k,s} =$$

$$= (P/Q)', \tag{64}$$

и то, что Q как многочлен от переменных (46) имеет вид (49) и не зависит от переменных (50).

Если $\sum|\alpha_{k,s,j,1}| \neq 0$, то, изменив при необходимости нумерацию, можно считать, что $\alpha_{1,q_1,1,1} \neq 0$. Докажем, что многочлен P является линейной функцией от переменных (51). В противном случае, воспользовавшись леммой 25, можно считать, что в выражение P/Q входит одночлен максимальной степени $t \geqslant 2$ по переменным $V_1 = V_{1,1}, \ldots, V_d = V_{1,d},\ d = q_1 - 1$, вида

$$A_1 = P_1 V_1^{t_1} \ldots V_d^{t_d}, \quad t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{Z}^+,\ t_1 \geqslant 1,\ t_1 + \cdots + t_d = t,\ P_1 \not\equiv 0,$$

где P_1 — многочлен от переменных (48), (58), $\hat{w}_1^{-1}, \ldots, \hat{w}_m^{-1}$ и (50), кроме (51).

Далее, дословно повторяя рассуждения леммы 33, получим равенства (59) и (60), где ε равно нулю, если $t \geqslant 3$, и левой части равенства (64), выраженной через переменные $V_1, \ldots, V_d$ и (46), кроме (51), если $t = 2$. Отсюда, как и в лемме 33, приходим к противоречию, означающему, что

$$P/Q = \sum_s B_s V_s + B,$$

где $B_1, \ldots, B_d, B$ — многочлены от переменных (48), (58), $\hat{w}_1^{-1}, \ldots, \hat{w}_m^{-1}$ и (50), кроме (51). Заменим в P/Q все переменные соответствующими функциями (45). Тогда $(P/Q)'$ имеет вид

$$\sum (B_s' + B_s w_1'/w_1) V_s + \sum B_s V_{1,s}^{\circ}/w_1 + B',$$

откуда, выразив в левой части (64) $v_{1,d+1}$ по лемме 25 и приравняв коэффициенты при $V_{1,1}$, получим

$$\sum_j \alpha_{1,1,j,0} z^{\sigma_{1,1,j,0} - q_1} \Delta_1 w_1 - \sum_j \alpha_{1,d+1,j,1} z^{\sigma_{1,d+1,j,1} - 1} \Delta_1^{-1} v_{1,1} = (w_1 B_1)'. \tag{65}$$

Равенство (65) аналогично (64), но имеет левую часть, не зависящую от $v_{k,q_k}^{(i)},\ k = 1, \ldots, m,\ i = 0, \ldots, q_k - 2$. Поэтому, повторив рассуждения доказательства леммы 33 до равенства (61), получим, что $w_1 B_1$ является многочленом от функций

$$\left\{ v_{k,s}^{(i)} \Big|_{k=1,\ldots,m;\, i=0,\ldots,q_k-1;\, s=1,\ldots,q_k-1} \right\}, e^{\pm\gamma_1 z}, \ldots, e^{\pm\gamma_h z}, z^{\pm\beta_1}, \ldots, z^{\pm\beta_p} \tag{66}$$

Обозначим R сумму одночленов многочлена w_1B_1 вида

$$R = T_0 v_{1,1} + T_1 v'_{1,1} + \dots + T_d v^{(d)}_{1,1},$$

где $\Delta_1 z^{1-q_1} T_i \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \dots, z^{\pm\beta_p}]$, $i = 0, 1, \dots, d$. Поскольку производные других одночленов из w_1B_1 не имеют вид одночленов, входящих в R, то из равенства (65) с учётом $q_1 \geqslant 3$ следует, что

$$R' = -v_{1,1} z^{-1} \Delta_1^{-1} \sum_j \alpha_{1,d+1,j,1} z^{\sigma_{1,d+1,j,1}}.$$

Так как функция $v_{1,1}$ — решение уравнения $z^{-q_1}\Delta_1 L \circ \Delta_1^{-1} v = 0$, то ввиду леммы 29 и тождества $\overline{LQ} = \overline{Q}\,\overline{L}$ функция T_d — решение уравнения

$$\overline{z^{-q_1}\Delta_1 L \circ \Delta_1^{-1}} T_d = \Delta_1^{-1} \overline{z^{-1} L} \circ (z^{1-q_1}\Delta_1) T_d = z^{-1}\Delta_1^{-1} \sum_j \alpha_{1,d+1,j,1} z^{\sigma_{1,d+1,j,1}},$$

где $L = L(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1; \alpha_1 z^{p_1})$. Отсюда и леммы 8 следует, что функция $T^* = z^{1-q_1}\Delta_1 T_d$ удовлетворяет уравнению

$$L(1 - \vec{\nu}_1; 2 - \vec{\lambda}_1; (-1)^{q_1 - l_1}\alpha_1 z^{p_1}) T^* = (-1)^{q_1} \sum_j \alpha_{1,d+1,j,1} z^{\sigma_{1,d+1,j,1}}.$$

Сделав в T^* замену $z^{p_1} \to z$ и изменив при необходимости числа $\beta_1, \dots, \beta_p$, получим функцию $T^{**} \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \dots, z^{\pm\beta_p}]$, удовлетворяющую уравнению

$$L(1 - \vec{\nu}_1; 2 - \vec{\lambda}_1; (-1)^{q_1 - l_1}\alpha_1 z) T^{**} = (-1)^{q_1} \sum_j \alpha_{1,d+1,j,1} z^{\sigma_j},$$

где $\sigma_j = \sigma_{1,d+1,j,1}/p_1$. Так как $\sigma_1 - \sigma_j \notin \mathbb{Z}$, $j \neq 1$, то в T^{**} должна содержаться сумма вида

$$T^{***} = a_0 z^{\sigma} + a_1 z^{\sigma+1} + \dots + a_s z^{\sigma+s}, \quad a_0 a_s \neq 0,\ s \in \mathbb{Z}^+,\ \sigma - \sigma_1 \in \mathbb{Z},$$

причём $L(1 - \vec{\nu}_1; 2 - \vec{\lambda}_1; (-1)^{q_1 - l_1}\alpha_1 z) T^{***} = (-1)^{q_1}\alpha_{1,d+1,1,1} z^{\sigma_1}$. Отсюда согласно следствию 1 леммы 2 функция $T = z^{-\sigma_1} T^{***} \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ удовлетворяет уравнению

$$L(1 - \vec{\nu}_1 + \sigma_1; 2 - \vec{\lambda}_1 + \sigma_1; (-1)^{q_1 - l_1}\alpha_1 z) T = (-1)^{q_1}\alpha_{1,d+1,1,1}.$$

Но тогда (см., например, [34:1, лемма]) $\lambda_{1,t} - \sigma_1 \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant t \leqslant q_1$, что невозможно. Следовательно, $\sum |\alpha_{k,s,j,1}| = 0$.

Пусть $\sum|\alpha_{k,s,j,0}| \neq 0$. Повторяя предыдущие рассуждения вплоть до равенства (65) и считая $\alpha_{1,1,1,0} \neq 0$, представим $w_1 B_1$ как

$$w_1 B_1 = S_0 w_1 + S_1 w_1' + \dots + S_d w_1^{(d)} + S_*,$$

где $\Delta_1^{-1} S_i \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \dots, z^{\pm\beta_p}]$, $i = 0, 1, \dots, d$, а S_* — многочлен от функций (66), не содержащий одночленов вида стоящих перед ним. Тогда из равенства (65) следует, что $S_* \in \mathbb{C}$. Согласно лемме 27

$$\overline{z^{-q_1} \Delta_1 L(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1; \alpha_1 z^{p_1}) \circ \Delta_1^{-1}} w_1 = 0,$$

а функции S_d и $S^* = \Delta_1^{-1} S_d$ ввиду леммы 29 удовлетворяют уравнениям

$$L(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1; \alpha_1 z^{p_1}) \circ \Delta_1^{-1} S_d = L(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1; \alpha_1 z^{p_1}) S^* = -\sum_j \alpha_{1,1,j,0} z^{\sigma_{1,1,j,0}}.$$

Далее, повторяя рассуждения предыдущего случая, получим $\sigma_1 + \lambda_{1,l} \in \mathbb{Z}$, что противоречит условиям леммы. Следовательно, $\sum|\alpha_{k,s,j,0}| = 0$, а равенство (63) совпадает с (55). Лемма 34 доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 20. Можно считать, что вектора $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n$ не содержат компонент из $\mathbb{N}$. Пусть $p_i = q_i - l_i$. Функция $f_i(z) = {}_{l_i}\varphi_{q_i}(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z^{p_i})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L_i y = c_i z^{-q_i}$, где $L_i \equiv z^{-q_i} L(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z^{p_i})$, коэффициент при $y^{(q_i)}$ равен 1, $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, вронскиан W_i оператора L_i принадлежит $\mathbb{C}[z^{\beta_i}, e^{\alpha_i z}]$ (лемма 1 и (2)). Рассмотрим функции

$$g_i(z) = \Delta_i f_i(z) = \Delta_i\, {}_{l_i}\varphi_{q_i}(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z^{p_i}), \quad \Delta_i = W_i^{-1/q_i},\ i = 1, \dots, n.$$

Из лемм 1, 2, 3, 5 получаем, что функция g_i удовлетворяет дифференциальному уравнению $G_i y = c_i z^{-q_i} \Delta_i$, где $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$G_i \equiv z^{-q_i} L(\vec{\nu}_i - \frac{z\Delta_i'}{p_i \Delta_i}; \vec{\lambda}_i - \frac{z\Delta_i'}{p_i \Delta_i}; \alpha_i z^{p_i}),$$

фундаментальная матрица $\Psi_i = \|v_{i,s}^{(k)}\|_{k=0,\dots,q_i-1;\, s=1,\dots,q_i}$ оператора G_i удовлетворяет условиям (0.40) и $|\Psi_i| \equiv 1$. Согласно лемме 8

$$\overline{G_i} \equiv \frac{(-1)^{q_i}}{z^{q_i}} L(1 - \vec{\nu}_i + \frac{z\Delta_i'}{p_i \Delta_i} + \frac{1 - q_i}{p_i}; 2 - \vec{\lambda}_i + \frac{z\Delta_i'}{p_i \Delta_i} + \frac{1 - q_i}{p_i}; (-1)^{p_i} \alpha_i z^{p_i}).$$

Ввиду леммы 15 множество уравнений $\{L_i y = 0\}$ разбивается на классы эквивалентности. Пусть S — множество взятых по одному представителей этих классов. Уравнения в S попарно некоградиентны и неконтргградиентны, а для каждого уравнения, не входящего в S, найдётся коградиентное или контргградиентное ему уравнение из S. Согласно лемме 23, если уравнения $L_k y = 0$ и $L_j y = 0$ коградиентны (контргградиентны) и не выполнено условие (0.38), то $q_k = q_j = q$, $l_k = l_j = l$, $(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) - \lambda_{k,1} \sim (-1)^r((\vec{\nu}_j; \vec{\lambda}_j) - \lambda_{j,s})$, $\alpha_k = (-1)^{pr}\alpha_j$, $p = q - l$, где $r = 0$ (соответственно $r = 1$), $s = s(j)$, $1 \leqslant s \leqslant q$. Ввиду теоремы 14 без ограничения общности можно считать, что $(\vec{\nu}_j; \vec{\lambda}_j) - (\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) = \lambda_{j,s} - \lambda_{k,1}$, если $r = 0$, и $\vec{\nu}_j + \vec{\nu}_k = \lambda_{j,s} + \lambda_{k,1} + 1$, $\vec{\lambda}_j + \vec{\lambda}_k = \lambda_{j,s} + \lambda_{k,1} + 2$, если $r = 1$. Отсюда и леммы 6 следует, что в первом случае $\Delta_j / \Delta_k = cz^{(\lambda_{j,s} - \lambda_{k,1})p}$, а во втором — $\Delta_j \Delta_k = cz^{(\lambda_{j,s} + \lambda_{k,1})p + q - 1}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Но тогда в первом случае операторы G_j и G_k совпадают, а во втором являются сопряжёнными. Можно сказать, что с помощью теоремы 14, лемм 1, 2, 3, 8, 9, 15 и 23 в доказательстве теоремы коградиентность уравнений $L_j y = 0$ и $L_k y = 0$ заменяется их совпадением, а контргградиентность — сопряжённостью. При этом из совпадения левых частей уравнений для g_i не следует, разумеется, совпадение их правых частей.

Применяя метод вариации постоянных, получаем

$$g_i^{(k)} = c_{i,1}(z) v_{i,1}^{(k)} + \cdots + c_{i,q_i}(z) v_{i,q_i}^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, q_i - 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c'_{i,1}(z) v_{i,1} + \cdots + c'_{i,q_i}(z) v_{i,q_i} & = & 0 \\ \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ c'_{i,1}(z) v_{i,1}^{(q_i - 2)} + \cdots + c'_{i,q_i}(z) v_{i,q_i}^{(q_i - 2)} & = & 0 \\ c'_{i,1}(z) v_{i,1}^{(q_i - 1)} + \cdots + c'_{i,q_i}(z) v_{i,q_i}^{(q_i - 1)} & = & c_i z^{-q_i} \Delta_i. \end{array} \right.$$

Отсюда, так как $|\Psi_i| \equiv 1$,

$$c_{i,s}(z) = c_i \int z^{-q_i} \Delta_i V_{i,s} dz, \quad s = 1, \ldots, q_i.$$

Очевидно, что множества функций $\{g_1, g'_1, \ldots, g_n^{(q_n - 1)}\}$ и $\{c_{1,1}(z), \ldots, c_{n,q_n}(z)\}$ алгебраически эквивалентны над полями $\mathbb{C}\left\langle v_{1,1}, \ldots, v_{n,q_n} \right\rangle$ и $\mathbb{L}_1$ из теоремы 20, причём ввиду леммы 27 можно считать, что множества функций, порождающих эти поля, соответствуют уравнениям только из S. Согласно сказанному выше и лемме 28 в случае коградиентности уравнений $L_j y = 0$ и $L_k y = 0$ имеем $v_{j,s} = v_{k,s}$, $\Delta_j = cz^{(\lambda_{j,s}-\lambda_{k,1})p}\Delta_k$, а в случае контрградиентности — $V_{j,s} = (-1)^{q_k-1}v_{k,s}$, $\Delta_j = cz^{(\lambda_{j,s}+\lambda_{k,1})p+q-1}\Delta_k^{-1}$.

Допустим, что функции $c_{1,1}(z), \ldots, c_{n,q_n}(z)$ алгебраически зависимы над $\mathbb{L}_1$. Согласно лемме 34, где полагаем m равным числу уравнений в S, это возможно только при условии $(\sigma_{k,s,j,r}-\sigma_{k,s,i,r})/p_k \in \mathbb{Z}$, равносильном в нашем случае условию $\lambda_{j,s(j)} - \lambda_{i,s(i)} \in \mathbb{Z}$, откуда $(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i) \sim (\vec{\nu}_j; \vec{\lambda}_j)$, либо при условии $(-1)^r\sigma_{k,s,j,r}/p_k + \lambda_{k,t} \in \mathbb{Z}$, равносильном $(-1)^r\lambda_{j,s(j)} - \lambda_{k,1} + \lambda_{k,t} \in \mathbb{Z}$, что ввиду $\lambda_{k,t} = (-1)^r\lambda_{j,t} - (-1)^r\lambda_{j,s(j)} + \lambda_{k,1} + 1 - (-1)^r$ даёт $\lambda_{j,t} \in \mathbb{Z}$. Если $q_i = q_j = 1$, $f_i(z) = {}_0\varphi_1(\lambda_i; \alpha_i z)$, то получим условие $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i = \alpha_j$, либо $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Если, наконец, для операторов L_j и L_k выполнено условие (0.38), то рассуждения проводятся аналогично. Теорема 20 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 21. Условия $\vec{\lambda}_k + 1/d \not\sim \vec{\lambda}_k$ необходимы и достаточны для неприводимости уравнений $L_k y = 0$, соответствующих функциям ${}_0\varphi_{q_k}(\vec{\lambda}_k; z)$ (см. [28:4]). Тогда ввиду нечётности q_k группа Галуа каждого из этих уравнений должна содержать $SL(q, \mathbb{C})$ [43:1, теорема 2.2] и, следовательно, условие (0.40) выполнено. Применяя теорему 20, теоремы 16 – 18 и теорему I А.Б. Шидловского, получаем требуемое утверждение.

Для доказательства следствия из теоремы 21 необходимо рассмотреть ещё случай, когда $\vec{\lambda} + 1/d \sim \vec{\lambda}$, где $d > 1$ — делитель числа q, наибольший из возможных. Согласно доказанному в [28:5, §5] можно считать, что $q/d = \tau > 1$,

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{\gamma_i + j - d}{d},\ i = 1, \ldots, \tau,\ j = 0, 1, \ldots, d-1\right), \quad 0 \leqslant \Re e\, \gamma_i < 1.$$

Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau)$, $\psi(z) = {}_0\varphi_\tau(\vec{\gamma}; (z/\tau)^\tau)$, $\phi(z) = {}_0\varphi_q(\vec{\lambda}; (z/q)^q)$. Тогда (см. там же) уравнение $L(\vec{\gamma}; \tau^{-\tau}(z/\tau)^\tau)y = 0$ неприводимо,

$$\phi(z) = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} \psi(\xi^k z),$$

ξ — примитивный корень степени q из 1. Из доказанного в [28:5, §5] следует, что множества функций $\{{}_0\varphi_q^{(i)}(\vec{\lambda}; \alpha_j q^{-q} z^q)$, $i = 0, \ldots, q-1$, $j =$

$1, \ldots, n\}$ и $\{{}_0\varphi_\tau^{(i)}(\vec{\gamma}; \alpha_j^{1/d}\xi^{k\tau}\tau^{-\tau}z^\tau),\ i = 0, \ldots, \tau - 1,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 0, \ldots, d-1\}$ алгебраически эквивалентны над $\mathbb{C}(z)$. Легко видеть, что $\alpha_i^{1/d}\xi^{s\tau} \neq \alpha_j^{1/d}\xi^{k\tau}$, а при $\alpha_i \neq -\alpha_j$ также $\alpha_i^{1/d}\xi^{s\tau} \neq -\alpha_j^{1/d}\xi^{k\tau}$. Кроме того, нетрудно проверить, что если $\vec{\gamma} \sim \gamma_k - \vec{\gamma}$, то $\vec{\lambda} \sim \lambda_s - \vec{\lambda}$. Отсюда, применяя теорему 21, получаем требуемый результат.

Глава 5. Алгебраические свойства гипергеометрических функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям 2-го порядка.

§1. Об алгебраических соотношениях между рассматриваемыми гипергеометрическими функциями

Во введении перед формулировкой теоремы 22 были выписаны все соотношения смежности для рассматриваемых в настоящей главе функций.

Воспроизведём из этих соотношений только те, что непосредственно используются для вывода других алгебраических тождеств, а также те, левые части которых при некоторых допустимых значениях параметров исчезают:

$$\begin{array}{rcl}(\nu-\mu)A(\nu-) & = & -zA'+(z+\nu-\mu)A,\\ (\nu-\mu)A'(\nu-) & = & (\nu-1)A'+(1-\nu)A,\\ (\nu-\mu)A(\mu+) & = & \mu A'-\mu A,\\ (\nu-\mu)zA'(\mu+) & = & -\mu^2A'+\nu\mu A,\\ (\zeta+1)\bar{A}(\zeta+) & = & z\bar{A}'+(\zeta+1)\bar{A},\\ (\zeta-\theta)(\zeta-\eta)\bar{A}(\zeta-) & = & -\zeta z\bar{A}'+\zeta(z+\zeta-\theta-\eta)\bar{A}+\theta\eta,\\ (\zeta-\theta)z\bar{A}(\theta+) & = & (\theta+1)z\bar{A}'-(\theta+1)(z-\eta)\bar{A}-(\theta+1)\eta,\end{array} \qquad (1)$$

где $A=A_{\mu,\nu}(z)$, $\bar{A}=A_{\theta,\eta,\zeta}(z)$.

Необходимость условий теорем 22 – 25 вытекала из алгебраических тождеств, приведённых во введении после формулировки каждой теоремы. Из этих тождеств нуждаются в доказательстве тождества (0.44) – (0.46), используемые для обоснования необходимости условия 4° теоремы 24.

Тождество (0.44) является следствием пятого тождества из (1).

Заменяя в тождестве (0.44) θ,η,z соответственно на $0,\theta,-z$, получаем

$$\theta e^{-z}=z(A_{0,\theta,\theta-1}(-z))'+\theta A_{0,\theta,\theta-1}(-z),$$

что вместе с (0.47) даёт (0.46).

Равенство (0.45), очевидно, справедливо при $z=0$. Далее, если умножить обе его части на $z^{\theta_1+\theta_2}$, продифференцировать и разделить на $z^{\theta_1+\theta_2-1}$, то получится тождество

$$(\theta_1+\theta_2)(\theta_1\varphi_{\theta_2}(-z)+\theta_2\varphi_{\theta_1}(z))=(\theta_1+\theta_2)(\theta_2A_{\theta_1,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(z)+$$

$$+\theta_1 A_{\theta_2,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(-z))+z(\theta_2 A'_{\theta_1,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(z)-\theta_1 A'_{\theta_2,\theta_1+\theta_2,\theta_1+\theta_2-1}(-z)),$$

справедливость которого вытекает из (0.44). Число $\theta_1+\theta_2$ как параметр гипергеометрической функции не может быть целым отрицательным. Поэтому, если перенести все слагаемые из (0.45) в одну часть, разложить в ряд Тейлора и умножить на $z^{\theta_1+\theta_2}$, то не возникнет членов, не зависящих от z. Если производная такого ряда тождественно равна нулю, то ряд также тождественно равен нулю. Таким образом, тождество (0.45) доказано.

§2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (см. [36:12, гл. 9, теорема 1], [5:3, лемма 2]). *Пусть дифференциальные уравнения*

$$y'' + a_i y' + b_i y = 0, \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}(z),\ i = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 1, \tag{2}$$

удовлетворяют условиям:

1°. *Существуют функции $w_i \in \mathbb{C}(z)$, $w_i \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что*

$$w_i' + a_i w_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2°. *Любое нетривиальное решение каждого из уравнений (2) алгебраически независимо над $\mathbb{C}(z)$ со своей производной.*

Пусть, далее, $f_1, \ldots, f_n$ — набор нетривиальных решений дифференциальных уравнений (2).

Тогда либо $2n$ функций $f_1, f_1', \ldots, f_n, f_n'$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, либо существуют нетривиальные решения v_i, v_j, $i \neq j$, соответствующих дифференциальных уравнений (2), а также функции $S = \omega\omega_1$, $T = \omega\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2, \omega^2 \in \mathbb{C}(z)$, такие, что

$$v_i = S v_j + T v_j', \tag{3}$$

$$\begin{gathered} S'' + a_i S' + (b_i - b_j) S - 2 b_j T' + (a_j b_j - a_i b_j - b_j') T = 0, \\ T'' + (a_i - 2a_j) T' + (a_j^2 - a_j' - a_i a_j + b_i - b_j) T + 2S' + (a_i - a_j) S = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Лемма 1 следует также из результатов статьи [52:2].

Лемма 2. *Если при условиях леммы 1 $a_i, b_i \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, $i = 1, \ldots, n$, то $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, $\omega = z^k$, $k \in \{0, 1/2\}$.*

Доказательство. При условиях леммы 2 функции S и T являются компонентами решения системы линейных дифференциальных уравнений (4), коэффициенты которой голоморфны в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Поэтому функции $\omega_1, \omega_2, \omega, \omega^2$ также не имеют особенностей в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, откуда получаем утверждение леммы.

Рассмотрим функции $z^{(\mu_i-1)/2}e^{-\alpha_i z/2}A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$y'' + \frac{1}{z}\,y' - \left(\frac{\alpha_i^2}{4} + \frac{\alpha_i\tau_i}{z} + \frac{\varkappa_i^2}{z^2}\right) y = 0, \tag{5}$$

где $\tau_i = \nu_i - \mu_i/2,\ \varkappa_i = (\mu_i - 1)/2$.

Лемма 3. *Если* $\alpha_i, \tau_i, \varkappa_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i \neq 0,\ \ \tau_i \pm \varkappa_i + 1/2 \notin \mathbb{Z},\ \ i = 1, \ldots, n$, *то любое нетривиальное решение каждого из уравнений (5) алгебраически независимо над* $\mathbb{C}(z)$ *со своей производной.*

Доказательство. Допустим, что функция $v_i \not\equiv 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяет уравнению (5) и алгебраически зависима с v_i' над $\mathbb{C}(z)$. Тогда согласно лемме 3.8 существует решение y_* уравнения (5) такое, что $u = y_*'/y_*$ является алгебраической функцией. Точками ветвления функции u могут быть только $z = 0$ и $z = \infty$. Нетрудно видеть, что функция u удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + \frac{1}{z}\,u + u^2 = \frac{\alpha_i^2}{4} + \frac{\alpha_i\tau_i}{z} + \frac{\varkappa_i^2}{z^2}. \tag{6}$$

Пусть

$$u = c_0 z^{r_0} + c_1 z^{r_1} + \cdots + c_k z^{r_k} + \ldots, \quad c_k \in \mathbb{C},\ c_0 \neq 0, \tag{7}$$

— разложение любой ветви u в окрестности $z = \infty$ с убывающими рациональными показателями r_k. Подставив разложение (7) в уравнение (6), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(r_k + 1)c_k z^{r_k - 1} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_k c_l z^{r_k + r_l} = \frac{\alpha_i^2}{4} + \frac{\alpha_i\tau_i}{z} + \frac{\varkappa_i^2}{z^2}. \tag{8}$$

Сравнивая коэффициенты при наибольших степенях z, получаем, что $r_0 = 0,\ c_0 = \pm\alpha_i/2,\ r_1 = -1,\ c_1 = \pm\tau_i - 1/2$. Докажем, что в разложении (7) все $r_k \in \mathbb{Z}$. Действительно, в противном случае рассмотрим показатель $r_s \notin \mathbb{Z},\ c_s \neq 0$, где индекс s — наименьший из возможных.

Тогда, сравнивая в (8) коэффициенты при наибольшей дробной степени z, получим $c_0 c_s = 0$, что невозможно. Следовательно, функция u не разветвляется в окрестности $z = \infty$. Отсюда получаем, что $z = 0$ также не является точкой ветвления и $u \in \mathbb{C}(z)$.

Ввиду того, что в (7) $r_0 = 0$, разложение функции $u = y_*'/y_* \in \mathbb{C}(z)$ на простейшие дроби имеет вид

$$u = c_0 + \frac{a}{z} + \sum_{k=0}^{s} \frac{n_k}{z - z_k}, \tag{9}$$

где $s \in \mathbb{Z}^+,\ z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n_k \in \mathbb{N},\ a$ — вычет функции u в точке $z = 0$. Чтобы найти a, выпишем разложение функции u в окрестности точки $z = 0$:

$$u = \gamma_0 z^{r_0} + \gamma_1 z^{r_1} + \dots + \gamma_k z^{r_k} + \dots, \quad \gamma_k \in \mathbb{C},\ \gamma_0 \neq 0, \tag{10}$$

где показатели r_k есть последовательно возрастающие целые числа. Подставляя разложение (10) в (6), вновь получим соотношение (8), где $c_k = \gamma_k$ и, сравнивая в нём коэффициенты при наименьших степенях z, имеем либо $r_0 = -1,\ \gamma_0 = \pm\varkappa_i$, либо $r_0 = 0,\ \varkappa_i = 0$, откуда $a = \pm\varkappa_i$. Сопоставляя разложения (7) и (9), получим $c_1 = \pm\tau_i - 1/2 = \pm\varkappa_i + n_1 + \dots + n_s$. Но тогда хотя бы одно из чисел $\tau_i \pm \varkappa_i + 1/2$ является целым. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и если $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то число $2(\tau_i - (\alpha_i/\alpha_j)\tau_j)$ и любое из чисел $2(\varkappa_i \pm \varkappa_j)$ не являются целыми числами одинаковой чётности. Тогда $2n$ функций*

$$v_1, v_1', \dots, v_n, v_n', \tag{11}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Замечание. В дальнейшем будет показано, что путём изменения параметров гипергеометрических функций на целые числа с помощью соотношений смежности условие $2(\varkappa_i \pm \varkappa_j) \in \mathbb{Z}$ можно превратить в $\varkappa_i \pm \varkappa_j = 0$, а условие $\tau_i - (\alpha_i/\alpha_j)\tau_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_i^2 = \alpha_j^2$ — в $\alpha_i\tau_i = \alpha_j\tau_j$. Таким образом, для гипергеометрических функций условия леммы 4 являются необходимыми и достаточными, так как в случае их нарушения соответствующие уравнения (5) совпадают.

Доказательство. Если доказываемое утверждение не верно, то согласно лемме 1 должно выполняться равенство (3), где без ограничения общности можно положить $j = 1,\ i = 2$. Тогда система (4) запишется в виде

$$S'' + \frac{1}{z}S' + \left(\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_1\tau_1-\alpha_2\tau_2}{z} + \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}{z^2}\right)S +$$
$$+\left(\frac{\alpha_1^2}{2} + \frac{2\alpha_1\tau_1}{z} + \frac{2\varkappa_1^2}{z^2}\right)T' - \left(\frac{\alpha_1\tau_1}{z^2} + \frac{2\varkappa_1^2}{z^3}\right)T = 0, \qquad (12)$$
$$T'' - \frac{1}{z}T' + \left(\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_1\tau_1-\alpha_2\tau_2}{z} + \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2+1}{z^2}\right)T + 2S' = 0.$$

Согласно лемме 2 имеют место равенства

$$S = c_0z^{m_1}+c_1z^{m_1+1}+\cdots+c_{n_1}z^{m_1+n_1}, \quad T = d_0z^{m_2}+\cdots+d_{n_2}z^{m_2+n_2}, \quad (13)$$

где $c_0c_{n_1}d_0d_{n_2}\neq 0,\ m_1-m_2\in\mathbb{Z},\ 2m_1\in\mathbb{Z}$.

Подставляя разложения (13) в систему (12) и сравнивая коэффициенты при наибольших степенях z, убеждаемся, что $\alpha_1^2=\alpha_2^2$. Следовательно, эту систему можно записать в виде

$$S'' + \frac{1}{z}S' + \left(\frac{\alpha\tau}{z} + \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}{z^2}\right)S + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha\tau_1}{z} + \frac{2\varkappa_1^2}{z^2}\right)T' -$$
$$-\left(\frac{\alpha\tau_1}{z^2} + \frac{2\varkappa_1^2}{z^3}\right)T = 0, \qquad (14)$$
$$T'' - \frac{1}{z}T' + \left(\frac{\alpha\tau}{z} + \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2+1}{z^2}\right)T + 2S' = 0,$$

где $\alpha=\alpha_1,\ \ \tau=(\tau_1-(\alpha_2/\alpha_1)\tau_2)$.

Сравнивая коэффициенты при наибольших степенях z в системе (14), убеждаемся, что если $\tau\neq 0$, то $m_1+n_1=m_2+n_2$ и

$$\begin{cases} \alpha\tau c_{n_1} &= -(m_1+n_1)\alpha^2 d_{n_2}/2, \\ \alpha\tau d_{n_2} &= -2(m_1+n_1)c_{n_1}. \end{cases}$$

Перемножив два последних равенства, получим $\tau=\pm(m_1+n_1)$. Если же $\tau=0$, то убеждаемся, что $m_1+n_1=0$ или $m_2+n_2=0$, откуда $m_1\in\mathbb{Z}$. Следовательно, в обоих случаях 2τ и $2m_1$ есть целые числа одинаковой чётности.

Аналогично, сравнивая в (14) коэффициенты при наименьших степенях z, убедимся, что хотя бы одно из чисел $2(\varkappa_1\pm\varkappa_2)$, есть целое число той же чётности, что и $2m_1$. Действительно, если $m_1 \leqslant m_2 - 2$, то получаем, что $m_1 = 0$, $\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 = 0$. Если $m_1 \geqslant m_2$, то

$$\begin{cases} 2m_2\varkappa_1^2 d_0 - 2\varkappa_1^2 d_0 &= 0, \\ m_2(m_2-1)d_0 - m_2 d_0 + (\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 + 1)d_0 &= 0, \end{cases}$$

что равносильно равенствам $\varkappa_1^2(m_2 - 1) = 0$, $(m_2-1)^2 + \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 = 0$, откуда $m_2 = 1$, $\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 = 0$ либо $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \pm(m_2 - 1)$. Если, наконец, $m_1 = m_2 - 1 = m$, то получаем систему

$$\begin{cases} m(m-1)c_0 + mc_0 + (\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)c_0 + 2(m+1)\varkappa_1^2 d_0 - 2\varkappa_1^2 d_0 &= 0, \\ (m+1)md_0 - (m+1)d_0 + (\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 + 1)d_0 + 2mc_0 &= 0, \end{cases}$$

эквивалентную

$$\begin{cases} (m^2 + \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)c_0 &= -2m\varkappa_1^2 d_0, \\ (m^2 + \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)d_0 &= -2mc_0. \end{cases}$$

Перемножив два последних равенства, получим $m^2 + \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 = \pm 2m\varkappa_1$, что равносильно $(m \pm \varkappa_1)^2 - \varkappa_2^2 = 0$, или, в более подробной записи,

$$(m_1 + \varkappa_1 + \varkappa_2)(m_1 - \varkappa_1 - \varkappa_2)(m_1 + \varkappa_1 - \varkappa_2)(m_1 - \varkappa_1 + \varkappa_2) = 0.$$

Таким образом, во всех трёх случаях по крайней мере одно из чисел $2(\varkappa_1 \pm \varkappa_2)$ есть целое число той же чётности, что и 2τ. Лемма 4 доказана.

Лемма 5 (см. [36:12, гл. 9, лемма 9]). *Пусть $\mathbb{V}$ — произвольное дифференциальное поле аналитических функций, содержащее поле $\mathbb{C}$, а дифференциальные уравнения*

$$y'' + a_i y' + b_i y = 0, \quad a_i, b_i \in \mathbb{V},\ i = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 1, \tag{15}$$

удовлетворяют условиям:

1°. *Существуют функции $w_i \in \mathbb{V}$, $w_i \not\equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что*

$$w_i' + a_i w_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2°. *Для любых нетривиальных решений $v_1, \ldots, v_n$ соответствующих уравнений (15) $2n$ функций $v_1, v_1', \ldots, v_n, v_n'$ алгебраически независимы над $\mathbb{V}$.*

Пусть, далее, $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ — решения соответствующих уравнений (15) такие, что $\hat{v}_i$ линейно независимо над $\mathbb{C}$ с решением v_i, $i =$

$1,\dots,n$. *Тогда* $3n$ *функций* $v_i, v_i', \hat{v}_i$, $i=1,\dots,n$, *алгебраически независимы над* $\mathbb{V}$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы 4, числа* $\gamma_1,\dots,\gamma_h$, *а также* $\beta_1,\dots,\beta_p$, *принадлежат* $\mathbb{C}$ *и линейно независимы над* $\mathbb{Q}$, $1/\beta_1 = b \in \mathbb{N}$. *Тогда для любых линейно независимых решений* $v_i, \hat{v}_i$, $i=1,\dots,n$ *соответствующих уравнений (5)* $3n+h+p$ *функций*

$$v_1, v_1', \hat{v}_1, \dots, v_n, v_n', \hat{v}_n, e^{\gamma_1 z}, \dots, e^{\gamma_h z}, z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_p} \tag{16}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство с учётом лемм 4 и 5 можно провести аналогично доказательству утверждений 1° и 2° леммы 10 гл. 9 книги [36:12], либо применить следствие из леммы 4.17.

Под дифференцированием по z функций, зависящих от (16), всюду понимается нахождение полной производной по z с последующей заменой появляющихся при этом функций $v_i'', \hat{v}_i'$ через функции (16) с помощью уравнений (5) и формул Лиувилля

$$\hat{v}_i' = \hat{v}_i v_i'/v_i + \chi_i/(z v_i), \quad \chi_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ i=1,\dots,n.$$

Все операции с алгебраически независимыми функциями (16) удобно проводить формально, как с соответствующими им переменными

$$\left\{ x_{i,s}\big|_{i=1,\dots,n;\, s=1,2,3} \right\}, x_1, \dots, x_h, z_1, \dots, z_p. \tag{17}$$

Операции дифференцирования по z рациональных функций, зависящих от (16), будет соответствовать оператор

$$D = \sum_{j=1}^{h} \gamma_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \frac{z_j}{z_1^b} \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} \frac{\partial}{\partial x_{i,1}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{z_1^b} x_{i,2} + \left(\frac{\alpha_i^2}{4} + \frac{\alpha_i \tau_i}{z_1^b} + \frac{\varkappa_i^2}{z_1^{2b}} \right) x_{i,1} \right) \frac{\partial}{\partial x_{i,2}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i,2} x_{i,3}}{x_{i,1}} + \frac{\chi_i}{z_1^b x_{i,1}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{i,3}}.$$

Если P — многочлен от переменных (17), а Q — многочлен от переменных

$$\left\{ x_{i,s}\big|_{i=1,\dots,n;\, s=1,2} \right\}, x_1, \dots, x_h, z_1, \dots, z_p, \tag{18}$$

то, очевидно, $z_1^{2b}(\prod_i x_{i,1})DP$ и $z_1^{2b}DQ$ есть многочлены от тех же переменных.

Следующая лемма является частным случаем леммы 4.31, но её доказательство технически менее сложно.

Лемма 7. *Пусть функции (16) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$, а $P \not\equiv 0$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ от $3n+h+p$ переменных (17). Тогда:*

1°. *Если $z_1^{2b}DP$ есть многочлен от переменных (17), то $z_1^{2b}DP$ делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P = \sigma z_1^{b_1} \dots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \dots x_h^{k_h}, \quad \sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ b_i, k_i \in \mathbb{Z}^+. \tag{19}$$

2°. *Многочлен $z_1^{c_1} \dots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h} (\prod_i x_{i,1})DP$, где $c_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, $c_1 \geqslant 2b$, делится на P тогда и только тогда, когда*

$$P = \sigma z_1^{b_1} \dots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \dots x_h^{k_h} \prod_i x_{i,1}^{m_i}, \quad \sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad b_i, k_i, m_i \in \mathbb{Z}^+. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть многочлен P зависит хотя бы от одной переменной $x_{i,3}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е.

$$P = P_s x_{i,3}^s + \dots + P_1 x_{i,3} + P_0, \quad P_s \not\equiv 0,\ s \geqslant 1,$$

где $P_s, \dots, P_0$ — многочлены, не зависящие от $x_{i,3}$. Тогда

$$DP = \left(DP_s + \frac{sP_s x_{i,2}}{x_{i,1}} \right) x_{i,3}^s + \dots$$

является многочленом от $x_{i,3}$ с коэффициентами из поля рациональных функций над $\mathbb{C}$ от всех переменных (17), кроме $x_{i,3}$. Так как степени многочленов DP и P по $x_{i,3}$ равны, то их частное совпадает с частным от деления коэффициентов при $x_{i,3}^s$. Поэтому

$$\frac{DP}{P} = \frac{DP_s}{P_s} + \frac{sx_{i,2}}{x_{i,1}}.$$

Поставив в это равенство вместо переменных (17) функции (16), получим дифференциальное уравнение, решив которое, имеем $P = \sigma P_s x_{i,1}^s$, $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, P не зависит от переменных

$$x_{1,3}, \dots, x_{n,3}. \tag{21}$$

Докажем теперь первое утверждение леммы. Так как степень многочлена $z_1^{2b}DP$ по переменным (18), кроме z_1, равна степени P, а степень по $z_1 = z^{1/b}$ может быть больше степени P на $2b$, то частное от деления $z_1^{2b}DP$ на P будет многочленом от z_1 степени не выше $2b$,

$$z_1^{2b}DP = (a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_b z_1^b + \cdots + a_{2b} z_1^{2b})P, \quad a_0, \ldots, a_{2b} \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

Допустим, что P зависит хотя бы от одной пары переменных $x_{i,1}, x_{i,2}$, например, $x_{1,1}, x_{1,2}$, а P_0 — совокупность однородных членов старшей степени по этим двум переменным. Так как оператор D переводит совокупность однородных членов фиксированной степени от переменных $x_{i,1}, x_{i,2}$ в совокупность таких же членов, то P_0 также удовлетворяет дифференциальному уравнению (22). Положим в (22) $x_{1,s} = c_1 v_1^{(s-1)} + \hat{c}_1 \hat{v}_1^{(s-1)}$, $c_1, \hat{c}_1 \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2$, где $c_1 v_1 + \hat{c}_1 \hat{v}_1$ — ненулевое решение первого из уравнений (5). Переменную $x_{1,3}$ заменим на решение того же уравнения, линейно независимое с выбранным. Умножая, при необходимости, $x_{1,s}$, $s = 1, 2$ на некоторую константу, можно добиться, что вронскиан χ_i/z не изменится. Заменив остальные переменные (18) соответствующие функции (16) и решив полученное дифференциальное уравнение (22), имеем

$$P_0 = \sigma_1(c_1, \hat{c}_1) z^{a_b} e^{a_{2b} z + \cdots - a_0/z}. \quad (23)$$

Поскольку левая часть (23) — однородный многочлен от $c_1, \hat{c}_1$, то постоянная $\sigma_1(c_1, \hat{c}_1)$ также будет однородным многочленом от этих величин, и поэтому отношение $c_1 : \hat{c}_1$ можно выбрать так, что для некоторого решения нашего дифференциального уравнения $\sigma_1(c_1, \hat{c}_1) = 0$ и $P_0 = 0$, что противоречит алгебраической независимости функций, входящих в P_0. Следовательно, P не зависит от переменных

$$\left\{ x_{i,s}\big|_{i=1,\ldots,n;\, s=1,2} \right\} \quad (24)$$

и имеет вид (4.43). Далее, дословно повторив соответствующие рассуждения доказательства леммы 4.30, получим, что P имеет вид (19), что доказывает первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть

$$P = Q z_1^{d_1} \ldots z_p^{d_p} x_1^{t_1} \ldots x_h^{t_h} \prod_i x_{i,1}^{m_i}, \qquad d_i, t_i, m_i \in \mathbb{Z}^+,$$

где Q — многочлен от переменных (18), $(Q, x_{1,1}\dots x_{n,1}x_1\dots x_h z_1\dots z_p) = 1$. Тогда

$$\frac{z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}(\prod_i x_{i,1})DP}{P} = z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}(\prod_i x_{i,1})\frac{DQ}{Q} +$$

$$+ z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}(\prod_i x_{i,1})\left(\frac{1}{z_1^b}\sum_j d_j\beta_j + \sum_j t_j\gamma_j + \sum_i \frac{m_i x_{i,2}}{x_{i,1}}\right). \tag{25}$$

Так как первое слагаемое правой части (25) обязано быть многочленом, а Q не делится на $x_{1,1},\dots,x_{n,1},x_1,\dots,x_h,z_1,\dots,z_p$, то многочлен $z_1^{qb}DQ$ должен делиться на Q. Тогда по первому утверждению леммы Q имеет вид (19), а P — вид (20). Лемма 7 доказана.

§3. Доказательство теоремы 23

Лемма 8. *Пусть функции (16) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$; $\delta_{i,j} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^+$, $\delta_{i,l}-\delta_{i,k}\notin\mathbb{Z}$, $l\neq k$, $i=1,\dots,\varkappa$, $j=1,\dots,m$; $\omega_1,\dots,\omega_\varkappa \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и различны. Тогда функции (16) вместе с $m\varkappa$ функциями*

$$\int z^{\delta_{i,j}}e^{\omega_i z}dz, \quad i=1,\dots,\varkappa,\ j=1,\dots,m$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Изменяя при необходимости числа β_k,γ_k,p,h, можно считать, что $\delta_{i,j}=\sum_k c_{i,j,k}\beta_k$, $\omega_i=\sum_k c_{i,k}\gamma_k$, $c_{i,j,k},c_{i,k}\in\mathbb{Z}$, $i=1,\dots,\varkappa$, $j=1,\dots,m$. Согласно лемме 4.32 при некоторых $\alpha_{1,1},\dots,\alpha_{\varkappa,m}\in\mathbb{C}$, $|\alpha_{1,1}|+\dots+|\alpha_{\varkappa,m}|\neq 0$

$$\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\int z^{\delta_{i,j}}e^{\omega_i z}dz = \frac{P}{Q}, \tag{26}$$

где P,Q — многочлены над $\mathbb{C}$ от функций (16), $(P,Q)=1$. Дифференцируя равенство (26), получим

$$\sum_{i,j}\alpha_{i,j}z^{\delta_{i,j}}e^{\omega_i z} = (P/Q)'. \tag{27}$$

Заменяя в этом равенстве функции (16) на переменные (17), имеем

$$\sum_{i,j}\alpha_{i,j}z_1^{c_{i,j,1}}\dots z_p^{c_{i,j,p}}\,x_1^{c_{i,1}}\dots x_h^{c_{i,h}} = \frac{QDP-PDQ}{Q^2}. \tag{28}$$

Отсюда следует, что многочлен $z_1^{c_1}\dots z_p^{c_p}x_1^{s_1}\dots x_h^{s_h}(\prod_i x_{i,1})DQ$ при некоторых $c_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, $c_1 \geqslant 2b$, делится на Q. Тогда согласно лемме 7 Q имеет вид (20) и не зависит от переменных (21).

Докажем, что от переменных (21) не зависит и многочлен P. В противном случае, изменив при необходимости нумерацию переменных, можно считать, что

$$P/Q = P_s x_{1,3}^s + P_{s-1}x_{1,3}^{s-1} + \dots + P_0, \quad P_s \not\equiv 0,\ s \geqslant 1,$$

где $P_s, \dots, P_0$ — многочлены от переменных (24), $x_{1,1}^{-1}, \dots, x_{n,1}^{-1}$,

$$z_1^{\pm 1}, \dots, z_p^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_h^{\pm 1} \tag{29}$$

и (21), кроме $x_{1,3}$. Так как

$$D\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(DP_s + \frac{sx_{1,2}}{x_{1,1}}P_s\right)x_{1,3}^s +$$

$$+\left(DP_{s-1} + \frac{(s-1)x_{1,2}}{x_{1,1}}P_{s-1} + \frac{s\chi_1}{z_1^b x_{1,1}}P_s\right)x_{1,3}^{s-1} + \dots,$$

то

$$DP_s + \frac{sx_{1,2}}{x_{1,1}}P_s = 0, \quad P_s = cx_{1,1}^{-s}, \quad c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Приравняв в равенстве (28) коэффициенты при $x_{1,3}^{s-1}$, получим

$$DP_{s-1} + \frac{(s-1)x_{1,2}}{x_{1,1}}P_{s-1} + \frac{s\chi_1}{z_1^b x_{1,1}^{s+1}} = \varepsilon, \tag{30}$$

где ε равно левой части (28), если $s = 1$, и нулю, если $s \geqslant 2$. Как уже выяснено, знаменатель рациональной функции P_{s-1} имеет вид (20). Поэтому $P_{s-1} = V/x_{1,1}^r$, где $r \geqslant 0$,

$$V \in \mathbb{C}[x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}^{\pm 1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{n,1}^{\pm 1}, x_{n,2}, x_{n,3}, z_1^{\pm 1}, \dots, z_p^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_h^{\pm 1}],$$

а дробь считаем несократимой. Тогда из (30) следует

$$x_{1,1}DV + (s-r-1)x_{1,2}V = -\frac{cs\chi_1 x_{1,1}^{r-s}}{z_1^b} + \varepsilon x_{1,1}^{r+1}. \tag{31}$$

Так как левая часть равенства (31) есть многочлен от $x_{1,1}$, то $r \geqslant s \geqslant 1$. Но тогда $(V, x_{1,1}) = 1$ и левая часть (31) является многочленом, не делящимся на $x_{1,1}$. Следовательно, $r = s$. Выделяя в (31) слагаемые, не делящиеся на $x_{1,1}$, получим $x_{1,2}V = cs\chi_1/z_1^b$, что невозможно, так как $cs\chi_1 \neq 0$.

Полученное противоречие означает, что P/Q не зависит от переменных (21). Повторяя начало доказательства леммы, заключаем, что Q имеет вид (19), $P/Q = T$ — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ от переменных (24) и (29),

$$DT = \sum_j \alpha_{1,j} z^{\delta_{1,j}} e^{\omega_1 z} + \cdots + \sum_j \alpha_{\varkappa,j} z^{\delta_{\varkappa,j}} e^{\omega_\varkappa z}. \tag{32}$$

Пусть $T = B + B_1$, где B_1 — совокупность всех одночленов многочлена T, содержащих хотя бы одну из переменных (24). Из уравнения (32) получаем, что $DB_1 = 0$, $B_1 = 0$, а P не зависит от переменных (24).

Таким образом, доказано, что в выражении P/Q $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_p, x_1, \ldots, x_h]$, а $Q = \sigma z_1^{b_1} \ldots z_p^{b_p} x_1^{k_1} \ldots x_h^{k_h}$. Далее, дословно повторяя соответствующие рассуждения конца доказательства леммы 4.33, вновь приходим к противоречию. Лемма 8 доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 23. Как было показано перед формулировкой леммы 3, $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z) = z^{-(\mu_i-1)/2} e^{\alpha_i z/2} v_i$, где v_i — решение уравнения (5). Поэтому пара функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$ функциям $e^{\alpha_i z/2} v_i$, $e^{\alpha_i z/2} v_i'$, где $\beta_1, \ldots, \beta_p$ — базис линейного пространства над $\mathbb{Q}$, содержащего числа $1, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_n, \nu_n$.

Заметим, далее, что из определения множеств $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$ и условий теоремы 23 следует, что каждому индексу $i \in \mathbb{J}_1$ сопоставляется индекс j, $j > i$, множество которых обозначим $\mathbb{J}_1^*$, причём, как нетрудно видеть, это сопоставление взаимно однозначно, а множества $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_1^*$ и $\mathbb{J}_2$ попарно не пересекаются. Соответствующее индексам i, j множество из четырёх функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A_{\mu_j,\nu_j}(\alpha_j z)$, $A'_{\mu_j,\nu_j}(\alpha_j z)$ алгебраически эквивалентно над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$ функциям $v_i, v_i', \hat{v}_i, e^{\alpha_i z}$.

Если $i \notin \mathbb{J}_2$, то выполнение условий $\tau_i \pm \varkappa_i + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ леммы 3, равносильных $\nu_i \notin \mathbb{Z}$, $\nu_i - \mu_i \notin \mathbb{Z}$, следует из условий теоремы 23. Докажем, что для совокупности функций v_i, v_i', $i = 1, \ldots, n, i \notin \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2$, выполнены также условия леммы 4. Действительно, иначе при $\alpha_i = \alpha_j$ имеем $2(\tau_i - \tau_j) = (2\nu_i - \mu_i) - (2\nu_j - \mu_j) \in \mathbb{Z}$. Если целым числом той же чётности, что и $2(\tau_i - \tau_j)$, является число $2(\varkappa_i - \varkappa_j) = \mu_i - \mu_j$, то, складывая их, получаем $\nu_i - \nu_j \in \mathbb{Z}$, откуда $\mu_i - \mu_j \in \mathbb{Z}$, а если число $2(\varkappa_i + \varkappa_j)$, то получаем $\nu_i - \nu_j + \mu_j \in \mathbb{Z}$, откуда $\mu_i + \mu_j \in \mathbb{Z}$, что противоречит условиям теоремы и условию $i \notin \mathbb{J}_1$. В случае $\alpha_i = -\alpha_j$ рассуждения аналогичны.

Если $i \in \mathbb{J}_2$, то пара функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$ алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$ функциям $e^{\alpha_i z}$, $\varphi_{\nu_i}(-\alpha_i z)$. Для функций $\varphi_{\nu_i}(-\alpha_i z)$ справедливо представление

$$\varphi_{\nu_i}(-\alpha_i z) = \nu_i(-\alpha_i z)^{-\nu_i} e^{-\alpha_i z} \int^{-\alpha_i z} t^{\nu_i - 1} e^{-t} dt = \nu_i z^{-\nu_i} e^{-\alpha_i z} \int^{z} \xi^{\nu_i - 1} e^{\alpha_i \xi} d\xi, \tag{33}$$

где символ интеграла означает ту первообразную функции $t^{\nu_i-1}e^{-t}$, которая получается после умножения всех членов ряда Тейлора функции e^{-t} на t^{ν_i-1} и почленного интегрирования с постоянной интегрирования, равной нулю (см. [36:12, гл. 5, §2]). Поэтому в случае $i \in \mathbb{J}_2$ пара функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$ алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$ функциям $e^{\alpha_i z}$, $\int z^{\nu_i-1} e^{\alpha_i z} dz$.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — любой базис линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поскольку числа α_i, $i \in \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то можно считать, что они принадлежат множеству $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$. Из леммы 8, выполнение условий которой нетрудно проверить, вытекает алгебраическая независимость функций $e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_p z}, \int z^{\nu_i-1} e^{\alpha_i z} dz$, $i \in \mathbb{J}_2$, с функциями $v_i, v'_i, \hat{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $i \notin \mathbb{J}_2 \cup \mathbb{J}_1^*$, над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$ и, следовательно, алгебраическая независимость функций $A_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $A'_{\mu_i,\nu_i}(\alpha_i z)$, $i = 1, \ldots, n$ над $\mathbb{C}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_p})$. Отсюда получаем утверждение теоремы 23.

§4. Доказательство теоремы 22

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 8;* $\sigma_{k,j} \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$; $(\sigma_{k,i} - \sigma_{k,j})/2 \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$, $(\sigma_{k,i} \pm \varkappa_k + 1)/2 \notin \mathbb{Z}$, *а если* $\tau_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *то* $\sigma_{k,i} - \sigma_{k,j} \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$, $\sigma_{k,i} \pm \varkappa_k \notin \mathbb{Z}$. *Тогда* $(2n + \varkappa)m$ *функций*

$$\int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz, \int z^{\sigma_{k,j}} v_k dz, \int z^{\sigma_{k,j}} \hat{v}_k dz,$$

$$i = 1, \ldots, \varkappa,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n$$

вместе с функциями (16) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Изменяя при необходимости числа β_k, γ_k, p, h, можно считать, что

$$z^{\delta_{i,j}}, z^{\sigma_{k,j}}, e^{\omega_i z} \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \ldots, z^{\pm\beta_p}, e^{\pm\gamma_1 z}, \ldots, e^{\pm\gamma_h z}].$$

Повторяя начало доказательства леммы 8, получим вместо равенств (26) и (27) соответственно равенства

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz + \sum_{k,j} \alpha_{k,j,1} \int z^{\sigma_{k,j}} v_k dz + \sum_{k,j} \alpha_{k,j,2} \int z^{\sigma_{k,j}} \hat{v}_k dz = \frac{P}{Q}, \tag{34}$$

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} + \sum_{k,j} \alpha_{k,j,1} z^{\sigma_{k,j}} v_k + \sum_{k,j} \alpha_{k,j,2} z^{\sigma_{k,j}} \hat{v}_k = (P/Q)', \tag{35}$$

и то, что Q как многочлен от переменных (17) имеет вид (20) и не зависит от переменных (21).

Докажем, что многочлен P является линейной функцией от переменных (21). В противном случае, изменив при необходимости нумерацию переменных, можно считать, что в правую часть (34) входит одночлен максимальной степени по переменным (21) вида

$$A_1 = P_1 x_{1,3}^{s_1} \ldots x_{n,3}^{s_n}, \quad s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}^+,\ s_1 \geqslant 1,\ s_1 + \cdots + s_n \geqslant 2,\ P_1 \not\equiv 0,$$

где P_1 — многочлен от переменных (24), (29), $x_{1,1}^{-1}, \ldots, x_{n,1}^{-1}$. Так как

$$DA_1 = \left(DP_1 + \left(s_1 \frac{x_{1,2}}{x_{1,1}} + \cdots + s_n \frac{x_{n,2}}{x_{n,1}} \right) P_1 \right) x_{1,3}^{s_1} \ldots x_{n,3}^{s_n} + \ldots,$$

то

$$DP_1 + \left(s_1 \frac{x_{1,2}}{x_{1,1}} + \cdots + s_n \frac{x_{n,2}}{x_{n,1}} \right) P_1 = 0, \quad P_1 = c_1 x_{1,1}^{-s_1} \ldots x_{n,1}^{-s_n},\ c_1 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Аналогично, если в правую часть равенства (34) входят одночлены

$$A_2 = P_2 x_{1,3}^{s_1-1} x_{2,3}^{s_2+1} x_{3,3}^{s_3} \ldots x_{n,3}^{s_n},\ \ldots,\ A_n = P_n x_{1,3}^{s_1-1} x_{2,3}^{s_2} \ldots x_{n,3}^{s_n+1},$$

то

$$P_2 = c_2 x_{1,1}^{-s_1+1} x_{2,1}^{-s_2-1} x_{3,1}^{-s_3} \ldots x_{n,1}^{-s_n},\ \ldots,\ P_n = c_n x_{1,1}^{-s_1+1} x_{2,1}^{-s_2} x_{3,1}^{-s_3} \ldots x_{n,1}^{-s_n-1},$$

где $c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Рассмотрим также одночлен

$$A_0 = P_0 x_{1,3}^{s_1-1} x_{2,3}^{s_2} \ldots x_{n,3}^{s_n}.$$

Приравняв в (35) коэффициенты при $x_{1,3}^{s_1-1}x_{2,3}^{s_2}\dots x_{n,3}^{s_n}$, получим

$$DP_0+\left((s_1-1)\frac{x_{1,2}}{x_{1,1}}+s_2\frac{x_{2,2}}{x_{2,1}}+\dots+s_n\frac{x_{n,2}}{x_{n,1}}\right)P_0+$$

$$+\frac{1}{z_1^b x_{1,1}^{s_1-1}x_{2,1}^{s_2}\dots x_{n,1}^{s_n}}\left(\frac{b_1}{x_{1,1}^2}+\frac{b_2}{x_{2,1}^2}\dots+\frac{b_n}{x_{n,1}^2}\right)=\varepsilon, \qquad (36)$$

где $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}$, $b_1\neq 0$, ε равно сумме соответствующих слагаемых из $\sum\alpha_{k,j,2}z^{\sigma_{k,j}}$, если $s_1+\dots+s_n=2$, и нулю, если $s_1+\dots+s_n\geqslant 3$. Как уже выяснено, знаменатель рациональной функции P_0 имеет вид (20). Поэтому $P_0=V/x_{1,1}^r$, где $r\geqslant 0$,

$$V\in\mathbb{C}[x_{1,1},x_{1,2},x_{2,1}^{\pm1},x_{2,2},\dots,x_{n,1}^{\pm1},x_{n,2},z_1^{\pm1},\dots,z_p^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_h^{\pm1}],$$

а дробь считаем несократимой. Тогда из (36) следует

$$x_{1,1}DV+x_{1,1}\left((s_1-r-1)\frac{x_{1,2}}{x_{1,1}}+s_2\frac{x_{2,2}}{x_{2,1}}+\dots+s_n\frac{x_{n,2}}{x_{n,1}}\right)V=$$

$$=-z_1^{-b}x_{1,1}^{r-s_1+2}x_{2,1}^{-s_2}\dots x_{n,1}^{-s_n}\left(\frac{b_1}{x_{1,1}^2}+\dots+\frac{b_n}{x_{n,1}^2}\right)+\varepsilon x_{1,1}^{r+1}. \qquad (37)$$

Так как левая часть равенства (37) есть многочлен от $x_{1,1}$, то $r\geqslant s_1\geqslant 1$. Но тогда $(V,x_{1,1})=1$ и левая часть (37) является многочленом, не делящимся на $x_{1,1}$. Следовательно, $r=s_1$. Выделяя в (37) слагаемые, не делящиеся на $x_{1,1}$, получим

$$x_{1,2}V=b_1z_1^{-b}x_{2,1}^{-s_2}\dots x_{n,1}^{-s_n}.$$

Но это равенство невозможно, так как в правую часть не входит переменная $x_{1,2}$, а $b_1\neq 0$.

Полученное противоречие означает, что

$$P/Q=B_1x_{1,3}+\dots+B_nx_{n,3}+B, \qquad (38)$$

где $B_1,\dots,B_n,B$ — многочлены от переменных (24), (29), $x_{1,1}^{-1},\dots,x_{n,1}^{-1}$. Тогда правая часть равенства (35) имеет вид

$$\left(DB_1+\frac{x_{1,2}}{x_{1,1}}B_1\right)x_{1,3}+\dots+$$

$$+\left(DB_n+\frac{x_{n,2}}{x_{n,1}}B_n\right)x_{n,3}+\frac{\chi_1}{z_1^b x_{1,1}}B_1+\dots+\frac{\chi_n}{z_1^b x_{n,1}}B_n+DB.$$

Пусть в левой части равенства (34) $\sum|\alpha_{k,j,2}|\neq 0$. Изменив при необходимости нумерацию функций v_k, можно считать, что $\sum|\alpha_{1,j,2}|\neq 0$,

$$DB_1+\frac{x_{1,2}}{x_{1,1}}B_1=\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}}.$$

Поскольку знаменатель рациональной функции B_1 имеет вид (20), то $B_1=V_1/(x_{1,1}^{m_1}\dots x_{n,1}^{m_n})$, где V_1 — многочлен от переменных (24) и (29), а дробь считаем несократимой. Тогда

$$x_{1,1}\dots x_{n,1}DV_1-x_{1,1}\dots x_{n,1}\left(\frac{m_1-1}{x_{1,1}}x_{1,2}+\frac{m_2}{x_{2,1}}x_{2,2}+\dots+\frac{m_n}{x_{n,1}}x_{n,2}\right)V_1=$$

$$=x_{1,1}^{m_1+1}\dots x_{n,1}^{m_n+1}\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}},$$

откуда $m_1=1,\ m_2=\dots=m_n=0$ и, следовательно,

$$DV_1=x_{1,1}\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}}. \tag{39}$$

Из равенства (39) получаем, что если V_1 записать в виде

$$V_1=Tx_{1,2}+T_1x_{1,1}+T_2,$$

где $T,T_1\in\mathbb{C}[z_1^{\pm1},\dots,z_p^{\pm1}]$, а многочлен T_2 не содержит одночленов вида стоящих перед ним, то $T_2\in\mathbb{C}$. Тогда, подставляя в равенство (39) вместо переменных (17) соответствующие функции (16), имеем

$$Tv_1''+(T'+T_1)v_1'+(T_1'-\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}})v_1=0.$$

Так как коэффициенты этого уравнения и соответствующего уравнения (5) ввиду леммы 5 и следствия из леммы 4.17 должны быть пропорциональны, то

$$T'+T_1=\frac{1}{z}T,\qquad T_1'-\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}}=-\left(\frac{\alpha_1^2}{4}+\frac{\alpha_1\tau_1}{z}+\frac{\varkappa_1^2}{z^2}\right)T,$$

откуда

$$T''-\frac{1}{z}T'-\left(\frac{\alpha_1^2}{4}+\frac{\alpha_1\tau_1}{z}+\frac{\varkappa_1^2-1}{z^2}\right)T=-\sum_j \alpha_{1,j,2}z^{\sigma_{1,j}}. \tag{40}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Re e\ \sigma_{1,1} \leqslant \cdots \leqslant \Re e\ \sigma_{1,m}$, причём если $\Re e\ \sigma_k = \Re e\ \sigma_{k+1}$, то $\Im m\ \sigma_k < \Im m\ \sigma_{k+1}$. Из уравнения (40) следует, что старший член многочлена T имеет вид $a_0 z^{\sigma_{1,m}}$, где $a_0 = 4\alpha_{1,m,2}/\alpha_1^2$. Если $\tau_1 \neq 0$, то обозначим $s,\ s \in \mathbb{Z}^+$, наибольшее число, такое, что одночлен $a_s z^{\sigma_{1,m}-s}$ также принадлежит T. Тогда, приравняв в (40) коэффициенты при $z^{\sigma_{1,m}-s-2}$, с учётом условий леммы получим

$$(\sigma_{1,m} - \varkappa_1 - s - 1)(\sigma_{1,m} + \varkappa_1 - s - 1) = 0,$$

что невозможно. Если $\tau_1 = 0$, то, определив s как чётное число и повторяя рассуждения предыдущего случая, также приходим к противоречию. Следовательно, в равенстве (34) $\sum |\alpha_{k,j,2}| = 0$. Но тогда, вновь повторяя рассуждения доказательства леммы 8 вплоть до уравнения (32), убеждаемся, что в равенстве (38) $B_1 = \cdots = B_n = 0$, а B — многочлен над $\mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \ldots, z^{\pm\beta_p}, e^{\pm\gamma_1 z}, \ldots, e^{\pm\gamma_h z}]$ от переменных (24), удовлетворяющий уравнению

$$B' = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} + \sum_{k,j} \alpha_{k,j,1} z^{\sigma_{k,j}} v_k.$$

Отсюда получаем, что

$$B = V_{1,1}v_1' + V_{1,2}v_1 + \cdots + V_{n,1}v_n' + V_{n,2}v_n + V_0,$$

где $V_0, V_1, \ldots, V_n \in \mathbb{C}[z^{\pm\beta_1}, \ldots, z^{\pm\beta_p}, e^{\pm\gamma_1 z}, \ldots, e^{\pm\gamma_h z}]$.

Допустим, что $\sum |\alpha_{k,j,1}| \neq 0$. Изменив, при необходимости, нумерацию функций v_k, можно считать, что $\sum |\alpha_{1,j,1}| \neq 0$, а многочлен $V_1 = V_{1,1}v_1' + V_{1,2}v_1$ удовлетворяет уравнению

$$V_1' = v_1 \sum_j \alpha_{1,j,1} z^{\sigma_{1,j}}.$$

Полученное равенство аналогично равенству (39), противоречащему, как уже выяснено, условиям леммы. Это означает, что в равенстве (34) $\sum |\alpha_{k,j,1}| = 0$. Но тогда равенство (34) совпадает с (26), а лемма 9 переходит в лемму 8. Таким образом, лемма 9 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 22. Согласно лемме 3.6 функции $F_k = z^{\lambda_k+\mu_k} K_{\lambda_k,\mu_k}(\alpha_k z),\ \ k = 1, \ldots, n$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$y'' + (1/z)y' + (\alpha_k^2 - (\lambda_k - \mu_k)^2/z^2)y = 4\lambda_k\mu_k z^{\lambda_k+\mu_k-2}. \qquad (41)$$

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение совпадает с (5), где $\tau_i = 0$, $\varkappa_i = \lambda_k - \mu_k$, $\alpha_i = 2\sqrt{-1}\alpha_k$.

Если $v_k, \hat{v}_k$ — линейно независимые решения уравнений (5), а $\lambda_k\mu_k \neq 0$, то, применяя к уравнению (41) метод вариации постоянных, представим функции F_k, F_k' в виде

$$F_k = c_k(z)v_k + \hat{c}_k(z)\hat{v}_k, \qquad F_k' = c_k(z)v_k' + \hat{c}_k(z)\hat{v}_k',$$

где

$$\begin{cases} c_k'(z)v_k + \hat{c}_k'(z)\hat{v}_k &= 0, \\ c_k'(z)v_k' + \hat{c}_k'(z)\hat{v}_k' &= 4\lambda_k\mu_k z^{\lambda_k+\mu_k-2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$c_k(z) = c_k\int z^{\lambda_k+\mu_k-1}\hat{v}_k dz, \quad \hat{c}_k(z) = \hat{c}_k\int z^{\lambda_k+\mu_k-1}v_k dz, \quad c_k, \hat{c}_k \in \mathbb{C}.$$

Пара функций F_k, F_k', $1 \leqslant k \leqslant n$, алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}\langle v_k, \hat{v}_k\rangle$ функциям $c_k(z), \hat{c}_k(z)$.

Ввиду соотношений смежности без ограничения общности можно считать, что если $\lambda_k \in \mathbb{N}$ или $\mu_k \in \mathbb{N}$, то, соответственно, $\lambda_k = 0$ или $\mu_k = 0$. Изменяя, при необходимости, нумерацию, можно добиться, что множество всех функций F_k с условием $\lambda_k\mu_k = 0$ совпадает с множеством F_k, $k = 1, \ldots, n_1$. Такие функции, очевидно, удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям (5). Для функций F_k, $k > n_1$, с помощью соотношений смежности и перестановки параметров λ_k, μ_k аналогично добиваемся, что если $(\lambda_k - \mu_k) - (\lambda_l - \mu_l) \in \mathbb{Z}$ или $(\lambda_k - \mu_k) + (\lambda_l - \mu_l) \in \mathbb{Z}$, то $0 \leqslant \lambda_k - \mu_k = \lambda_l - \mu_l \leqslant 1$.

Нетрудно проверить, что если $\lambda_k - \mu_k = 1/2$, то можно положить $v_k = z^{-1/2}e^{i\alpha_k z}$, $\hat{v}_k = z^{-1/2}e^{-i\alpha_k z}$, где $i = \sqrt{-1}$.

Пусть $\alpha_{n_1+1}^2, \ldots, \alpha_m^2$ — максимальный набор попарно различных чисел среди $\alpha_{n_1+1}^2, \ldots, \alpha_n^2$. Для каждого l, $n_1 < l \leqslant m$, рассмотрим все функции $K_{\lambda_k,\mu_k}(\alpha_k z)$, где $\alpha_k^2 = \alpha_l^2$, и обозначим $\varkappa_{l,j}$, $j = 1, \ldots, t_l$ все попарно различные числа вида $\lambda_k - \mu_k$, не равные $1/2$, соответствующие таким функциям. После этого, занумеровав величины $\varkappa_{l,j}$ одним индексом, получим множество $\varkappa_j$, $j = 1, \ldots, n_2$, где $n_2 = t_1 + \cdots + t_m$. Каждому $\varkappa_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_2$, будет соответствовать m_j чисел $\sigma_{j,i} = \lambda_k + \mu_k - 1$, $i = 1, \ldots, m_j$, где $\lambda_k - \mu_k = \varkappa_j$, а параметры λ_k, μ_k соответствуют тому же множеству функций, что и $\varkappa_j$. Определим числа $\varkappa_j, \sigma_{j,i}$, $j = n_2 + 1, \ldots, n_3$, $n_3 \geqslant n_2$ аналогичным образом, с той лишь разницей, что $\lambda_k - \mu_k = 1/2$, $\sigma_{j,i} = \lambda_k + \mu_k - 3/2$. Соответствие между парами λ_k, μ_k и $\varkappa_j, \sigma_{j,i}$ взаимно однозначно, так как если паре $\varkappa_j, \sigma_{j,i}$ соответствуют две пары λ_k, μ_k и λ_l, μ_l, то $\lambda_k = \lambda_l$, $\mu_k = \mu_l$, что противоречит условиям теоремы. Поэтому множество функций $F_k,\ k = 1, \ldots, n$, представимо в виде объединения множества $F_k,\ k = 1, \ldots, n_1$ и множества $F_{j,i},\ j = 1, \ldots, n_3,\ i = 1, \ldots, m_j$, где функция $F_{j,i}$ соответствует паре $\varkappa_j, \sigma_{j,i}$.

Перенумеруем функции v_k и числа $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n$, следующим образом. Если $k = 1, \ldots, n_1$, то пусть функция v_k соответствует функции F_k, а если $k = n_1+1, \ldots, n_1+n_3$, то функции $F_{k-n_1,i}$ при каком-либо $i,\ 1 \leqslant i \leqslant m_{k-n_1}$, остальные функции v_k нумеруются произвольно. Пусть $\gamma_1,\ \ldots, \gamma_h$ — любой базис линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого теми числами $\sqrt{-1}\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n$, что $\lambda_k - \mu_k = 1/2$. Тогда множество функций $F_j, F_j',\ j = 1, \ldots, n$ алгебраически эквивалентно над $\mathbb{C}(z, e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_h z}, v_{n_1+1}, \hat{v}_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}, \hat{v}_{n_1+n_2})$ множеству

$$v_k, v_k', \int z^{\sigma_{j,i}} v_j dz, \int z^{\sigma_{j,i}} \hat{v}_j dz, \int z^{\sigma_{l,s}} e^{\sqrt{-1}\alpha_l z} dz, \int z^{\sigma_{l,s}} e^{-\sqrt{-1}\alpha_l z} dz, \tag{42}$$

где $k = 1, \ldots, n_1,\ j = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2,\ i = 1, \ldots, m_j,\ l = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n_1 + n_3,\ s = 1, \ldots, m_l$.

Проверим, что при условиях теоремы 22 для функций (42) выполнены условия лемм 3, 4, 8 и 9. Действительно, условия леммы 3 в нашем случае равносильны условиям $\lambda_j - \mu_j \neq 1/2$, а условия леммы 4 — условиям $\lambda_i - \mu_i \pm (\lambda_j - \mu_j) \notin \mathbb{Z}$, совпадающим при наших допущениях с $\lambda_i - \mu_i \neq \lambda_j - \mu_j$. Условия леммы 8 равносильны условиям $\lambda_k + \mu_k - 3/2 \notin \mathbb{Z}^+$, $\lambda_k + \mu_k - (\lambda_l + \mu_l) \notin \mathbb{Z}$. Поскольку $\lambda_k - \mu_k = 1/2$, $\lambda_l - \mu_l = 1/2$, то они совпадают с $2\mu_k \notin \mathbb{N}$, $2(\mu_k - \mu_l) \notin \mathbb{Z}$. Но если $\mu_k = a/2,\ a \in \mathbb{N}$, то $\lambda_k = (a+1)/2$, откуда $(\lambda_k, \mu_k) \sim (0, 1/2)$, что невозможно. Если же $\mu_k - \mu_l = a/2,\ a \in \mathbb{Z}$, то либо $\mu_k - \mu_l = \lambda_k - \lambda_l \in \mathbb{Z}$, либо $\mu_k - \mu_l + 1/2 = \lambda_k - \mu_l = \mu_k - \lambda_l + 1 \in \mathbb{Z}$, откуда $(\lambda_k, \mu_k) \sim (\lambda_l, \mu_l)$, что также противоречит условиям теоремы 22. Условия $(\sigma_{k,i} - \sigma_{k,j})/2 \notin \mathbb{Z}$ леммы 9 записываются в виде $(\lambda_i + \mu_i - (\lambda_k + \mu_k))/2 \notin \mathbb{Z}$. Так как при наших допущениях $\lambda_i - \mu_i = \lambda_k - \mu_k$, они следуют из $(\lambda_i, \mu_i) \not\sim (\lambda_k, \mu_k)$. Условия $(\sigma_{k,i} \pm \varkappa_k + 1)/2 \notin \mathbb{Z}$ леммы 9 записываются в виде $(\lambda_i + \mu_i \pm (\lambda_j - \mu_j))/2 \notin \mathbb{Z}$. Они равносильны условиям $\lambda_i, \mu_i \notin \mathbb{Z}$.

Таким образом, все условия леммы 9 выполняются, и функции

(42) алгебраически независимы над полем

$$\mathbb{C}(z, e^{\gamma_1 z}, \ldots, e^{\gamma_h z}, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{n_1}, v_{n_1+1}, v'_{n_1+1}, \hat{v}_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}, v'_{n_1+n_2}, \hat{v}_{n_1+n_2}).$$

Отсюда получаем утверждение теоремы 22.

§5. Доказательство теорем 24 и 25

Лемма 10. *Пусть функции (16) алгебраически независимы над* $\mathbb{C}$; $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\beta_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ *при* $\beta_i = \beta_j$, $i \neq j$. *Тогда* n *функций*

$$\varphi_{\lambda_i}(\beta_i z), \quad i = 1, \ldots, n \tag{43}$$

вместе с функциями (16) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Лемма 10 следует из леммы 8 и интегральных представлений (33).

На основании леммы 10 список переменных (17) можно расширить, добавив к ним переменные

$$u_1, \ldots, u_n, \tag{44}$$

соответствующие функциям (43). Операции дифференцирования по z рациональных функций, зависящих от (16) и (43), будет соответствовать оператор

$$D_1 = D + \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\beta_i - \frac{\lambda_i}{z_1^b} \right) u_i + \frac{\lambda_i}{z_1^b} \right) \frac{\partial}{\partial u_i},$$

где D — оператор, введённый перед леммой 7. Если P — многочлен от переменных (17) и (44), то, очевидно, $z_1^{2b}(\prod_i x_{i,1}) D_1 P$ есть многочлен от тех же переменных.

Лемма 11. *Пусть при условиях леммы 10* $P \not\equiv 0$ *— многочлен с коэффициентами из* $\mathbb{C}$ *от* $4n + h + p$ *переменных (17) и (44). Тогда многочлен* $z_1^{c_1} \ldots z_p^{c_p} x_1^{s_1} \ldots x_h^{s_h} (\prod_i x_{i,1}) DP$, *где* $c_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, $c_1 \geqslant 2b$, *делится на* P *тогда и только тогда, когда* P *имеет вид (20).*

Доказательство. Пусть многочлен P зависит хотя бы от одной переменной u_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е.

$$P = P_s u_i^s + \cdots + P_1 u_i + P_0, \quad P_s \not\equiv 0,\ s \geqslant 1,$$

где $P_s, \ldots, P_0$ — многочлены, не зависящие от u_i. Тогда

$$D_1 P = \left(D_1 P_s + s \left(\beta_i - \frac{\lambda_i}{z} \right) P_s \right) u_i^s + \ldots$$

является многочленом от u_i с коэффициентами из поля рациональных функций над $\mathbb{C}$ от всех переменных (17) и (44), кроме u_i. Так как степени многочленов D_1P и P по u_i равны, то их частное не зависит от u_i и совпадает с частным от деления коэффициентов при u_i^s. Поэтому

$$\frac{D_1P}{P} = \frac{D_1P_s}{P_s} + s\left(\beta_i - \frac{\lambda_i}{z}\right),$$

откуда $P = \sigma P_s e^{s\beta_i z} z^{-s\lambda_i}$, $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, P не зависит от переменных (44) и согласно лемме 7 имеет вид (20).

Лемма 12. *Пусть выполнены условия леммы 6;* $\beta_i, \sigma_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\nu_{i,j}, \sigma_{i,j} \in \mathbb{C}$, $\sigma_{i,j} \pm \varkappa_i \notin \mathbb{Z}$, $\nu_{i,j} - \lambda_i \notin \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$; $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$ *при* $\beta_i = \beta_k$, $j \neq k$; $\sigma_{i,j} - \sigma_{i,k}, \nu_{i,j} - \nu_{i,k} \notin \mathbb{Z}$ *при* $j \neq k$; $\nu_{i,j} - \lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$ *при* $\beta_i = -\beta_k$. *Тогда* $5mn$ *функций*

$$\int z^{\sigma_{i,j}} e^{\pm\sigma_i z} v_i dz, \int z^{\sigma_{i,j}} e^{\pm\sigma_i z} \hat{v}_i dz, \int z^{\nu_{i,j}} \varphi_{\lambda_i}(\beta_i z) dz,$$
$$i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$$

вместе с функциями (16) и (43) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство. Повторив начало доказательства леммы 8, заменяя в нём лемму 7 на лемму 11, получим вместо равенств (26) и (27) соответственно равенства

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j,1} \int z^{\sigma_{i,j}} e^{\sigma_i z} v_i dz + \cdots + \sum_{i,j} \alpha_{i,j,5} \int z^{\nu_{i,j}} \varphi_{\lambda_i}(\beta_i z) dz = \frac{P}{Q}, \tag{45}$$

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j,1} z^{\sigma_{i,j}} e^{\sigma_i z} v_i + \cdots + \sum_{i,j} \alpha_{i,j,5} z^{\nu_{i,j}} \varphi_{\lambda_i}(\beta_i z) = (P/Q)', \tag{46}$$

откуда следует, что Q как многочлен от переменных (17), (44) имеет вид (20) и не зависит от переменных (21) и (44).

Докажем, что многочлен P является линейной функцией от переменных (44). В противном случае, изменив при необходимости нумерацию переменных u_i, можно считать, что в правую часть (45) входит одночлен максимальной степени по переменным (44) вида

$$A_1 = P_1 u_1^{s_1} \ldots u_n^{s_n}, \quad s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}^+,\ s_1 \geqslant 1,\ s_1 + \cdots + s_n \geqslant 2,\ P_1 \not\equiv 0,$$

где P_1 — многочлен от переменных (21), (24), (29), $x_{1,1}^{-1},\ldots,x_{n,1}^{-1}$. Так как

$$D_1A_1=\left(D_1P_1+\left(s_1\left(\beta_1-\frac{\lambda_1}{z}\right)+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,s_n\left(\beta_n-\frac{\lambda_n}{z}\right)\right)P_1\right)u_1^{s_1}\ldots u_n^{s_n}+\ldots,$$

то

$$D_1P_1+\left(s_1\left(\beta_1-\frac{\lambda_1}{z}\right)+\cdots+s_n\left(\beta_n-\frac{\lambda_n}{z}\right)\right)P_1=0,\ P_1=c_1e^{-\beta z}z^{\lambda},$$

$$c_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad \beta=s_1\beta_1+\cdots+s_n\beta_n,\quad \lambda=s_1\lambda_1+\cdots+s_n\lambda_n.$$

Аналогично, если в правую часть равенства (45) входят одночлены

$$A_2=P_2u_1^{s_1-1}u_2^{s_2+1}u_3^{s_3}\ldots u_n^{s_n},\ \ldots,\ A_n=P_nu_1^{s_1-1}u_2^{s_2}\ldots u_n^{s_n+1},$$

то

$$P_2=c_2e^{-(\beta-\beta_1+\beta_2)z}z^{\lambda-\lambda_1+\lambda_2},\ \ldots,\ P_n=c_ne^{-(\beta-\beta_1+\beta_n)z}z^{\lambda-\lambda_1+\lambda_n},$$

где $c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$. Рассмотрим также одночлен

$$A_0=P_0u_1^{s_1-1}u_2^{s_2}\ldots u_n^{s_n}.$$

Приравняв в (46) коэффициенты при $u_1^{s_1-1}u_2^{s_2}\ldots u_n^{s_n}$, получим

$$D_1P_0+\left((s_1-1)\left(\beta_1-\frac{\lambda_1}{z}\right)+\cdots+s_n\left(\beta_n-\frac{\lambda_n}{z}\right)\right)P_0+$$

$$+e^{-(\beta-\beta_1)z}z^{\lambda-\lambda_1-1}(c_1s_1\lambda_1e^{-\beta_1z}z^{\lambda_1}+c_2(s_2+1)\lambda_2e^{-\beta_2z}z^{\lambda_2}+\cdots+$$

$$+c_n(s_n+1)\lambda_ne^{-\beta_nz}z^{\lambda_n})=\delta_1\sum_j\alpha_{1,j,5}z^{\nu_{1,j}}+\cdots+\delta_n\sum_j\alpha_{n,j,5}z^{\nu_{n,j}},\quad (47)$$

где числа $\delta_1,\ldots,\delta_n$ равны нулю за исключением случая $s_1+\cdots+s_n=2$, когда $\delta_1=1$ при $s_1=2$, и $\delta_k=1,\ \ 2\leqslant k\leqslant n$, при $s_1=1$, $s_k=1$. В силу последнего замечания общее решение уравнения (47) имеет вид

$$P_0=ce^{-(\beta-\beta_1)z}z^{\lambda-\lambda_1}-c_1s_1\lambda_1e^{-(\beta-\beta_1)z}z^{\lambda-\lambda_1}\int z^{\lambda_1-1}e^{-\beta_1z}dz-$$

$$-c_2(s_2+1)\lambda_2e^{-(\beta-\beta_1)z}z^{\lambda-\lambda_1}\int z^{\lambda_2-1}e^{-\beta_2z}dz-$$

$$-\dots - c_n(s_n+1)\lambda_n e^{-(\beta-\beta_1)z} z^{\lambda-\lambda_1}\int z^{\lambda_n-1}e^{-\beta_n z}dz +$$

$$+\delta_1 e^{-\beta_1 z} z^{\lambda_1}\sum_j \alpha_{1,j,5}\int z^{\nu_{1,j}-\lambda_1}e^{\beta_1 z}dz + \dots +$$

$$+\delta_n e^{-\beta_n z} z^{\lambda_n}\sum_j \alpha_{n,j,5}\int z^{\nu_{n,j}-\lambda_n}e^{\beta_n z}dz, \quad c\in\mathbb{C}.$$

Так как $c_1 s_1 \neq 0$, то в случае $s_1+\dots+s_n>2$ полученное равенство противоречит лемме 8. Пусть $s_1+\dots+s_n=2$. Тогда для некоторого $k,\ 1\leqslant k\leqslant m,\ \delta_k=1,\ \beta_k=-\beta_1,\ \nu_{k,j}-\lambda_k-\lambda_1\in\mathbb{Z}$, что противоречит условиям леммы 12. Следовательно,

$$P/Q = B_1u_1+\dots+B_nu_n+B,$$

где $B_1,\dots,B_n,B$ — многочлены от переменных (21), (24), (29), $x_{1,1}^{-1}$, $\dots,x_{n,1}^{-1}$. Тогда равенство (46) принимает вид

$$\sum_{i,j}\alpha_{i,j,1}z^{\sigma_{i,j}}e^{\sigma_j z}v_j+\dots+\sum_{i,j}\alpha_{i,j,5}z^{\nu_{i,j}}\varphi_{\lambda_j}(\beta_j z) =$$

$$=\left(B_1'+\left(\beta_1-\frac{\lambda_1}{z}\right)B_1\right)u_1+\dots+\left(B_n'+\left(\beta_n-\frac{\lambda_n}{z}\right)B_n\right)u_n+$$

$$+\frac{\lambda_1}{z}B_1+\dots+\frac{\lambda_n}{z}B_n+B'.$$

Если $\sum|\alpha_{i,j,5}|\neq 0$, то, изменив при необходимости нумерацию функций (43), можно считать, что $\sum|\alpha_{1,j,5}|\neq 0$,

$$B_1'+\left(\beta_1-\frac{\lambda_1}{z}\right)B_1=\sum_j\alpha_{1,j,5}z^{\nu_{1,j}}.$$

Это уравнение имеет решение

$$B_1 = ce^{-\beta_1 z}z^{\lambda_1}+e^{-\beta_1 z}z^{\lambda_1}\sum_j\alpha_{1,j,5}\int z^{\nu_{1,j}-\lambda_1}e^{\beta_1 z}dz, \quad c\in\mathbb{C},$$

что противоречит лемме 8. Следовательно, в равенстве (45) $\sum|\alpha_{i,j,5}| = 0$. Далее, повторив почти дословно доказательство леммы 9, получим, что $\sum|\alpha_{i,j,1}|=\dots=\sum|\alpha_{i,j,4}|=0$. Лемма 12 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 24. Пусть $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{J}$ — это множество индексов от 1 до n_2, $\theta_k \notin \mathbb{Z}$, $k \leqslant n_1$, $\theta_k \in \mathbb{Z}^+$, $n_1 < k \leqslant n_2$, причём если $k \in \mathbb{J}$, то $\eta_k - \zeta_k = 1$, а если и $\theta_k - \zeta_k \in \mathbb{N}$, то $\theta_k = \eta_k$. Согласно формуле (21) гл. 5 книги [36:12]

$$F_k = A_{\theta_k,\eta_k,\eta_k-1}(\alpha_k z) = \eta_k z^{-\eta_k} \int^z \xi^{\eta_k-1}\varphi_{\theta_k}(\alpha_k\xi)d\xi, \quad k = 1,\ldots,n_2.$$

Если $k \in \mathbb{J}$, а $\theta_k \in \mathbb{Z}^+$, то пара функций F_k, F_k' алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}(z)$ функциям $e^{\alpha_k z}, \varphi_{\eta_k}(-\alpha_k z)$ (формула (0.43)).

Для $k > n_2$ положим $F_k = z^{(\theta_k+\eta_k)/2}\, e^{-\alpha_k z/2}\, A_{\theta_k,\eta_k,\zeta_k}(\alpha_k z)$. Функции F_k, $k > n_2$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$y'' + \frac{1}{z}y' - \left(\frac{\alpha_k^2}{4} + \frac{\alpha_k(2\zeta_k - \theta_k - \eta_k + 1)}{2z} + \frac{(\theta_k - \eta_k)^2}{4z^2}\right) y = \\ = \theta_k\eta_k z^{(\theta_k+\eta_k)/2-2} e^{-\alpha_k z/2}. \tag{48}$$

Соответствующие однородные дифференциальные уравнения совпадают с (5), где $\tau_i = (2\zeta_k - \theta_k - \eta_k + 1)/2$, $\varkappa_i = (\theta_k - \eta_k)/2$.

Если $v_k, \hat{v}_k$ — линейно независимые решения уравнений (5), а $\theta_k\eta_k \neq 0$, то, применяя к уравнению (48) метод вариации постоянных, представим функции F_k, F_k' в виде

$$F_k = c_k(z)v_k + \hat{c}_k(z)\hat{v}_k, \qquad F_k' = c_k(z)v_k' + \hat{c}_k(z)\hat{v}_k',$$

где

$$\begin{cases} c_k'(z)v_k + \hat{c}_k'(z)\hat{v}_k &= 0, \\ c_k'(z)v_k' + \hat{c}_k'(z)\hat{v}_k' &= \theta_k\eta_k z^{(\theta_k+\eta_k)/2-2} e^{-\alpha_k z/2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$c_k(z) = c_k \int z^{(\theta_k+\eta_k)/2-1} e^{-\alpha_k z/2}\hat{v}_k dz,\ \hat{c}_k(z) = \hat{c}_k \int z^{(\theta_k+\eta_k)/2-1} e^{-\alpha_k z/2} v_k dz,$$

где $c_k, \hat{c}_k \in \mathbb{C}$. Пара функций F_k, F_k', $n_2 < k \leqslant n$, в рассматриваемых случаях алгебраически эквивалентна над $\mathbb{C}\langle v_k, \hat{v}_k\rangle$ функциям $c_k(z)$, $\hat{c}_k(z)$.

Ввиду соотношений смежности без ограничения общности можно считать, что если $\theta_k \in \mathbb{N}$ или $\eta_k \in \mathbb{N}$, то, соответственно, $\theta_k = 0$ или $\eta_k = 0$. Изменяя, при необходимости, нумерацию, можно добиться, что множество всех функций F_k с условием $\theta_k\eta_k = 0$ совпадает с множеством F_k, $k = n_2+1,\dots,n_3$, $n_2 \leqslant n_3 \leqslant n$. Такие функции, очевидно, удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям (5).

Для функций F_k, $k > n_3$, с помощью соотношений смежности и перестановки параметров θ_k, η_k аналогично добиваемся, что если $(\theta_k-\eta_k)-(\theta_l-\eta_l) \in \mathbb{Z}$ или $(\theta_k-\eta_k)+(\theta_l-\eta_l) \in \mathbb{Z}$, то $0 \leqslant \theta_k-\eta_k = \theta_l-\eta_l \leqslant 1$. Если после проведения этих преобразований окажется, что для некоторых k и l $\theta_k-\eta_k = \theta_l-\eta_l$, $\alpha_k^2 = \alpha_l^2$, $(2\zeta_k-\theta_k-\eta_k)/2 - (\alpha_k/\alpha_l)(2\zeta_l-\theta_l-\eta_l)/2 = \tau \in \mathbb{Z}$, то с учётом соотношений смежности можно считать, что $\tau = 0$.

Пусть $\alpha_{n_3+1}^2,\dots,\alpha_m^2$ — максимальный набор попарно различных чисел среди $\alpha_{n_3+1}^2,\dots,\alpha_n^2$. Для каждого l, $n_3 < l \leqslant m$, рассмотрим все функции $A_{\theta_k,\eta_k,\zeta_k}(\alpha_k z)$, где $\alpha_k^2 = \alpha_l^2$, и все отличные друг от друга пары $(\alpha_k(2\zeta_k-\theta_k-\eta_k+1)/2, (\theta_k-\eta_k)/2) = (\alpha_{l,j}\tau_{l,j}, \varkappa_{l,j})$, $j = 1,\dots,t_l$, соответствующие таким функциям. Рассмотрим соответствующее множество пар $(\tau_{l,j}, \varkappa_{l,j})$. Занумеровав эти пары одним индексом, получим множество $(\tau_j, \varkappa_j)$, $j = 1,\dots,n_4$, где $n_4 = t_{n_3+1}+\dots+t_m$ (некоторые из этих пар могут повторяться). Каждой паре $(\tau_j, \varkappa_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n_4$, будет соответствовать m_j чисел $\sigma_{j,i} = (\theta_k+\eta_k)/2-1$, $i = 1,\dots,m_j$, где $(\theta_k-\eta_k)/2 = \varkappa_j$, а параметры $\theta_k, \eta_k, \zeta_k$ соответствуют тому же множеству функций, что и пара $\tau_j, \varkappa_j$. Тройке $\alpha_j\tau_j, \varkappa_j, \sigma_{j,i}$ могут соответствовать две тройки $\theta_k, \eta_k, \zeta_k$ и $\theta_l, \eta_l, \zeta_l$, если $\alpha_k = -\alpha_l$, но в случае $\alpha_k = \alpha_l$ отсюда бы следовало $\theta_k = \theta_l$, $\eta_k = \eta_l$, $\zeta_k = \zeta_l$, что противоречит условиям теоремы.

Перенумеруем функции v_k и числа α_k, $k = n_3+1,\dots,n$, следующим образом. Если $k = n_3+j$, $1 \leqslant j \leqslant n_4$, то пусть функция v_k соответствует функции, определяемой тройкой $\tau_j, \varkappa_j, \sigma_{j,i}$ при какомлибо i, $1 \leqslant i \leqslant m_j$, остальные функции v_k нумеруются произвольно. Рассмотрим произвольный базис линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого числами α_k, $k = n_1+1,\dots,n_3+n_4$. Можно считать, что в этот базис входят числа α_k, $k = n_1+1,\dots,n_2$, так как по условиям теоремы они линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Остальные элементы базиса обозначим $\gamma_1,\dots,\gamma_h$. Обозначим $\beta_1,\dots,\beta_p$ базис линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порождённого всеми параметрами θ, η, ζ рассматриваемых функций, $1/\beta_1 \in \mathbb{N}$. Тогда множество функций F_j, F_j', $j = 1,\dots,n$ алгебраически эквивалентно над

$$\mathbb{C}\left\langle e^{\gamma_1 z},\dots,e^{\gamma_p z},z^{\beta_1},\dots,z^{\beta_p},v_{n_3+1},\hat{v}_{n_3+1},\dots,v_{n_3+n_4},\hat{v}_{n_3+n_4}\right\rangle$$

некоторому подмножеству множества функций

$$\begin{gathered}\int z^{\eta_l-1}\varphi_{\theta_l}(\alpha_l z)dz,\ \int z^{\sigma_{j,i}}e^{\pm\alpha_j z/2}v_j dz,\ \int z^{\sigma_{j,i}}e^{\pm\alpha_j z/2}\hat{v}_j dz,\\ v_k,\ v_k',\ \varphi_{\theta_l}(\alpha_l z),\ \varphi_{\eta_s}(-\alpha_s z),\ e^{-\alpha_s z},\end{gathered}\tag{49}$$

где $l=1,\dots,n_1,\ \ s=n_1+1,\dots,n_2,\ \ k=n_2+1,\dots,n_3,\ \ j=n_3+1,\dots,n_3+n_4,\ \ i=1,\dots,m_j$.

Проверим, что при условиях теоремы 24 для функций (49) выполнены условия лемм 3, 4 и 12. Действительно, условия леммы 3 в нашем случае равносильны условиям $\zeta_k-\theta_k,\zeta_k-\eta_k\notin\mathbb{Z}$. Условия леммы 4 при наших допущениях совпадают с условием: если $\alpha_k^2=\alpha_j^2$, $\theta_k-\eta_k=\theta_j-\eta_j$, то $(2\zeta_k-\theta_k-\eta_k)/2-(\alpha_j/\alpha_k)(2\zeta_j-\theta_j-\eta_j)/2\neq 0$. Это условие выполняется ввиду того, что $n_3<k,j\leqslant n_3+n_4$. Условия $\sigma_{i,j}\pm\varkappa_i\notin\mathbb{Z}$ леммы 12 совпадают с $(\theta_i+\eta_i\pm(\theta_i-\eta_i))/2\notin\mathbb{Z}$. Они равносильны условиям $\theta_i,\eta_i\notin\mathbb{Z}$, справедливым в силу того, что $i>n_3$. Условия $\nu_{i,j}-\lambda_i\notin\mathbb{Z}^+$ леммы 12 равносильны условиям $\eta_l-\theta_l\notin\mathbb{N}$. Они выполняются, так как если $\eta_l-\theta_l\in\mathbb{Z}$, то при наших допущениях $\eta_l=\theta_l$. Условия $\lambda_i-\lambda_k\notin\mathbb{Z}$ леммы 12 равносильны условиям $\theta_k-\theta_l\notin\mathbb{Z}$, если $\alpha_k=\alpha_l,\ \ \theta_k,\theta_l\notin\mathbb{Z}$, условиям $\eta_k-\eta_l\notin\mathbb{Z}$, если $\alpha_k=\alpha_l,\ \ \theta_k,\theta_l\in\mathbb{Z}$, и условиям $\theta_k-\eta_l\notin\mathbb{Z}$, если $\alpha_k=-\alpha_l$, $\theta_k\notin\mathbb{Z},\ \ \theta_l\in\mathbb{Z}$. Условия $\sigma_{i,j}-\sigma_{i,k}\notin\mathbb{Z}$ леммы 12 записываются в виде $(\theta_j+\eta_j-(\theta_k+\eta_k))/2\notin\mathbb{Z}$. Так как при наших допущениях $\theta_j-\eta_j=\theta_k-\eta_k$, $\alpha_j=\alpha_k$, $2\zeta_k-\theta_k-\eta_k=2\zeta_j-\theta_j-\eta_j$, они равносильны $(\zeta_i;\theta_i,\eta_i)\not\sim(\zeta_j;\theta_j,\eta_j)$. Легко проверяются и остальные условия леммы 12.

Таким образом, функции (49) алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z,e^{\gamma_1 z},\dots,e^{\gamma_h z},z^{\beta_1},\dots,z^{\beta_p},\hat{v}_{n_2+1},\dots,\hat{v}_{n_3},v_{n_3+1},v_{n_3+1}',\hat{v}_{n_3+1},\dots,$ $v_{n_3+n_4},v_{n_3+n_4}',\hat{v}_{n_3+n_4})$. Отсюда получаем утверждение теоремы 24.

Лемма 13. *Пусть выполнены условия леммы 9;* $\beta_i,\sigma_i\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \nu_{i,j},d_{i,j}\in\mathbb{C},\ d_{i,j}\pm\varkappa_i\notin\mathbb{Z},\ \ \nu_{i,j}-\lambda_i\notin\mathbb{Z}^+,\ \ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$; $\lambda_i-\lambda_k\notin\mathbb{Z}$ *при* $\beta_i=\beta_k,\ i\neq k$; $d_{i,j}-d_{i,k},\nu_{i,j}-\nu_{i,k}\notin\mathbb{Z}$ *при* $j\neq k$; $\nu_{i,j}-\lambda_i-\lambda_k\notin\mathbb{Z}$ *при* $\beta_i=-\beta_k$.

Тогда $8mn$ *функций*

$$\int z^{\delta_{i,j}} e^{\omega_i z} dz, \int z^{\sigma_{i,j}} v_i dz, \int z^{\sigma_{i,j}} \hat{v}_i dz, \int z^{d_{i,j}} e^{\pm\sigma_i z} v_i dz, \int z^{d_{i,j}} e^{\pm\sigma_i z} \hat{v}_i dz,$$

$$\int z^{\nu_{i,j}} \varphi_{\lambda_i}(\beta_i z) dz, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$$

вместе с функциями (16) и (43) алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Доказательство леммы 13 аналогично доказательству леммы 12.

Перейдём к доказательству теоремы 25. Применим к функциям $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$, $K_\lambda(\beta z), K_{\delta,\rho}(\xi z), A_{\theta,\eta,\zeta}(\omega z)$ те же преобразования, что применялись к ним при доказательствах теорем 22 – 24. По сравнению с каждым из этих доказательств совокупность функций $\{v_i, v_i'\}$ и число уравнений в системе (5) может увеличиться. Если функция v_i соответствует какой-либо функции вида $A_{\mu,\nu}(\alpha z)$, а v_k — функции вида $K_\lambda(\beta z)$, то условия леммы 4 в этом случае нарушаются лишь тогда, когда $4\beta^2 = -\alpha^2$, а число $2\nu - \mu$ и хотя бы одно из чисел $\mu \pm 2\lambda - 1$ — целые одинаковой чётности. Но отсюда получаем $(\mu; \nu) \sim \pm(2\lambda; \lambda + 1/2)$, что противоречит условиям теоремы. Если функция v_i, соответствующая какой-либо функции вида $K_{\delta,\rho}(\xi z)$ или $A_{\theta,\eta,\zeta}(\omega z)$, удовлетворяющей неоднородному дифференциальному уравнению, будет алгебраически зависимой с множеством уже рассмотренных функций, то с помощью изменения параметров на целые числа можно добиться, чтобы v_i принадлежала ему. Далее применяем лемму 13, выполнение условий которой следует из рассуждений, проведённых при доказательстве теорем 22 – 24. В результате получаем утверждение теоремы 25.

Глава 6. Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций.

§1. Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{K}$E-функции (в смысле определения 3) (0.4) составляют решение системы (0.5) либо системы (0.6). Без уменьшения общности будем считать, что все коэффициенты этих систем принадлежат $\mathbb{K}(z)$. Зафиксируем многочлен $T = T(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ — наименьшее общее кратное знаменателей функций $Q_{k,i}$, т. е. такой, что все $TQ_{k,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$. Наибольшую из степеней многочленов $T, TQ_{k,i}$ и наибольший из размеров этих многочленов будем называть соответственно степенью и размером системы (0.5) (системы (0.6)) и обозначать через q и t.

Обозначим b максимальный из порядков нуля функций (0.4). Всюду в дальнейшем условимся считать относительно эффективных положительных постоянных с различными индексами и без них, что

1) постоянные η зависят от поля $\mathbb{K}$ и числа c из определения 3.

2) постоянные γ — от поля $\mathbb{K}$, чисел c, α, b, q, t, h (степени поля) и

$$\max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ f_i(\alpha) \neq 0}} |\ln |f_i(\alpha)||.$$

Неэффективные положительные постоянные σ зависят от функций (0.4) и чисел m, α, h.

Пусть степень однородной трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ совокупности функций (0.4) не меньше двух. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ обозначим через L_N множество $\omega_{N,m} = (N+m-1)!/N!(m-1)!$ произведений

$$f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z), \quad k_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = N.$$

Обозначим $\mathbb{L}_N$ линейное пространство над $\mathbb{C}(z)$, натянутое на элементы L_N. Пусть B_N — фиксированное подмножество L_N, являющееся базисом пространства $\mathbb{L}_N$. Произвольно занумеруем все элементы базиса B_N и обозначим их

$$F_1, \dots, F_M, \quad M = M_N = \dim \mathbb{L}_N. \tag{1}$$

Функции из L_N, не вошедшие в выбранный базис, единственным образом представляются в виде

$$F_i = \sum_{i=1}^{M} R_{i,k} F_k, \quad R_{i,k} \in \mathbb{K}(z), \quad i = M+1, \ldots, \omega_{N,m}. \tag{2}$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ фиксируем многочлен $S_N \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ такой, что $S_N R_{i,k} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$.

Особой точкой базиса B_N назовём любой из нулей многочлена S_N. Наибольшую из степеней многочленов $S_N, S_N R_{i,k}$ в представлениях (2) и наибольший из размеров этих многочленов будем называть степенью и размером базиса B_N, обозначив их соответственно λ_N и τ_N.

Если функции (0.4) удовлетворяют системе (0.5), то функции (1), как легко видеть, также удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{K}(z)$. Степень и размер этой системы будем обозначать соответственно q_N и t_N. Обозначим Λ множество, состоящее из нуля и всех особых точек всех таких систем. Легко проверяются неравенства

$$q_N \leqslant q + \lambda_N, \quad t_N \leqslant Ntq\tau_N \left(\binom{N+m-1}{m-1} - M + 1 \right). \tag{3}$$

Лемма 1 (см. [36:12, гл. 13, лемма 7]). *Если $\mathbb{K}E$-функции (0.4), $m \geqslant 2$, удовлетворяют определению 3, то при любом $N \in \mathbb{N}$ произведения степеней*

$$f_m^{k_m}(z) \ldots f_1^{k_1}(z), \quad k_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = N \quad \left(\sum_{i=1}^{m} k_i \leqslant N \right),$$

также являются $\mathbb{K}E$-функциями, удовлетворяющими определению 3, при этом величина c заменяется на $\max(Nc,\ c^{m(\ln N+1)})$.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{K}E$-функции (0.4), $m \geqslant 2$, удовлетворяют определению 3, $n \in \mathbb{N}$, $\omega = \omega(n)$ — неубывающая функция от n, $2 \leqslant \omega(n) \leqslant n$. Тогда для функций (1) существует M многочленов*

$$P_k = P_k(z) = \sum_{l=0}^{n} b_{k,l} z^l, \quad b_{k,l} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k = 1, \ldots, M,$$

не все из которых тождественно равны нулю, со следующими свойствами:

1) $\overline{|b_{k,l}|} < n^n \exp(\eta_1 M^2 mn\omega \ln(N+1)), \quad l = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, M;$

2) линейная форма

$$R = R(z) = P_1(z)F_1(z) + \dots + P_M(z)F_M(z) = \sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$$

такова, что

$$\operatorname{ord} R \geqslant \tau, \quad \tau = M(n+1) - [n\omega^{-1}] - 1;$$

3) коэффициенты a_ν формы R удовлетворяют условию

$$\overline{|a_\nu|} < n^n (2Nc)^\nu \exp(\eta_2 M^2 mn\omega \ln(N+1)).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2 работы [36:10] с использованием леммы 1.

Пусть

$$R_1 = P_{1,1}F_1 + \dots + P_{1,M}F_M, \quad P_{1,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \tag{4}$$

— произвольная линейная форма от функций (1). Тогда её производная R_1' по z будет линейной формой от $F_1, \dots, F_M, F_1', \dots, F_M'$. Подставив в R_1' вместо $F_1', \dots, F_M'$ правые части соответствующих дифференциальных уравнений из системы, которой удовлетворяют функции (1), и умножив результат на многочлен T_N, являющийся наименьшим общим кратным знаменателей коэффициентов этой системы, получим, что $T_N R_1'$ — линейная форма от функций (1) с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$. Поэтому, если положить $R_k = T_N R_{k-1}'$, $k = 2, 3, \dots$, получим совокупность линейных форм от функций (1)

$$R_k = P_{k,1}F_1 + \dots + P_{k,M}F_M, \quad P_{k,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \quad k = 1, 2, \dots.$$

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{K}E$-функции (0.4), $m \geqslant 2$, составляющие решение системы (0.5), удовлетворяют определению 3, а линейная форма (4) от функций (1) базиса B_N построена по лемме 2 при $n \geqslant n_0$, где $n_0 = \sigma N^{m^m+m}$, или, если каждое решение системы (0.5) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций, $n_0 = m^{(\gamma m)^m} N^{m^m+m}$, или же, если совокупность функций (1) образует неприводимую систему функций, $n_0 = bN + q_N M(M-1)/2$. Пусть также $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, а*

$$s = [n\omega^{-1}] + bN + \frac{1}{2}\, q_N M(M-1). \tag{5}$$

Тогда матрица $\|P_{k,i}(\alpha)\|_{k=1,\dots,M+s;\,i=1,\dots,M}$ *коэффициентов линейных форм* $R_1(\alpha),\dots,R_{M+s}(\alpha)$ *имеет ранг* M.

Доказательство проводится аналогично доказательству лемм 4 и 8 из [36:10] с использованием теоремы 2 из [25:1] и результатов работ [26:2], [46:1], [26:3].

Лемма 4. *Пусть среди* $\mathbb{K}E$*-функций (0.4), удовлетворяющих определению 3 и составляющих решение системы (0.5), имеются по крайней мере две однородно алгебраически независимых над* $\mathbb{C}(z)$*, линейная форма (4) от функций (1) базиса* B_N *построена по лемме 2 при некотором* $n\in\mathbb{N}$*, удовлетворяющем условию*

$$\ln n > \max(q_N, \ln t_N, 4M^2 m\ln(N+1)), \tag{6}$$

$\alpha\in\mathbb{K}$*, а число* s *определяется равенством (5). Тогда для любого* $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant M+s$*, выполняются неравенства*

$$\overline{|P_{k,l}(\alpha)|} < n^n\exp(\gamma_1 Mn\sqrt{m\ln(N+1)\ln n}), \tag{7}$$

$$|R_k(\alpha)| < n^{-(M-1)n}\exp(\gamma_2 Mn\sqrt{m\ln(N+1)\ln n}), \tag{8}$$

$$\max_{k,l}\deg P_{k,l}(z)\leqslant \gamma_3 nq_N, \tag{9}$$

причём они остаются справедливыми при замене всех коэффициентов степенных рядов функций (0.4), коэффициентов многочленов $P_{k,l}$ *и числа* α *сопряжёнными в поле* $\mathbb{K}_{[j]}$, $1\leqslant j\leqslant h$*, где* $h=[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если среди функций (0.4) есть по крайней мере две однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$, то $M_N=\dim\mathbb{L}_N\geqslant N+1$. Используя лемму 2 и повторив рассуждения доказательства леммы 5 работы [36:10], получим, что при $k\leqslant M+s$

$$\begin{aligned}\overline{|P_{k,l}(\alpha)|} &< n^n\exp(k\ln t_N+(kq_N+n)\ln(1+\alpha)+\\ &\quad+\gamma_4 M^2 mn\omega\ln(N+1)+\gamma_5 k\ln n),\\ |R_k(\alpha)| &< n^{-(M-1)n}\exp(k\ln t_N+kq_N\ln(1+\alpha)+\\ &\quad+\gamma_6 M^2 mn\omega\ln(N+1)+\gamma_7 k\ln n).\end{aligned} \tag{10}$$

Положим

$$\omega=\sqrt{\ln n}\,(M\sqrt{m\ln(N+1)})^{-1}. \tag{11}$$

Согласно неравенству (6) $\omega > 2$. Далее,

$$n\omega^{-1} = \frac{Mn\sqrt{m\ln(N+1)}}{\sqrt{\ln n}} > \frac{Mn}{\sqrt{\ln n}} > M\ln^{3/2} n > q_N M^2,$$

откуда

$$k \leqslant M + s = M + [n\omega^{-1}] + bN + \frac{1}{2}\, q_N M(M-1) < \gamma_8 n\omega^{-1}. \qquad (12)$$

Из неравенств (10), (6), (12) имеем

$$\overline{|P_{k,l}(\alpha)|} < n^n \exp(\gamma_9 n\omega^{-1}\ln n + \gamma_4 M^2 mn\omega\ln(N+1))$$

$$|R_k(\alpha)| < n^{-(M-1)n} \exp(\gamma_{10} n\omega^{-1}\ln n + \gamma_6 M^2 mn\omega\ln(N+1)). \qquad (13)$$

Из неравенств (11), (13) следуют оценки (7) и (8). Степень многочлена $P_{k,l}(z)$ не превосходит $n + (k-1)q_N$, откуда с помощью неравенства (12) устанавливается оценка (9).

Учитывая оценки (3), условие (6) можно заменить условием

$$\ln n > \gamma_{11}\max(\lambda_N, \ln\tau_N, M^2 m\ln(N+1)). \qquad (14)$$

§2. Доказательство теорем 26, 26′, 27, 27′

Лемма 5. *Пусть однородно алгебраически независимые над* $\mathbb{C}(z)$ $\mathbb{K}E$*-функции (0.4),* $m \geqslant 2$*, удовлетворяют определению 3 и составляют решение системы (0.5),* $P = P(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z_1,\ldots,z_m]$ *— однородный многочлен степени* $s \in \mathbb{N}$*,* $\overline{|P|} \leqslant H$*,* $\alpha \in \mathbb{A}$*,* $\alpha T(\alpha) \neq 0$*,* $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$*,* $N > s$*,* $v = M_{N-s}$*,* $w = M - v$*. Тогда если*

$$\frac{w}{M} \leqslant \frac{\varkappa - 1}{\varkappa h}, \quad \varkappa \in \mathbb{R},\ \varkappa > 1, \qquad (15)$$

то существуют постоянные γ *и* σ*, для которых при*

$$\ln\ln H > \gamma\max(\sigma\ln N, M^2 m\ln N\varkappa^6/(\varkappa-1)^2) \qquad (16)$$

выполняется неравенство

$$|P(\alpha)| = |P(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha))| > H^{-\varkappa hM}.$$

В случае, если каждое решение системы (0.5) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$

функций, в неравенстве (16) $\sigma = (\gamma m)^m$, а в случае неприводимости совокупности функций $F_1, \dots, F_M$ $\sigma = 0$.

Доказательство. При условиях леммы 5 $B_N = L_N$, $\lambda_N = 0$, $\tau_N = 1$, а множество Λ состоит из точки 0 и нулей многочлена $T(z)$. Обозначим через $G_1(z), \dots, G_v(z)$ функции, входящие в B_{N-s}. Рассмотрим v многочленов от чисел $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$:

$$\psi_i(\alpha) = G_i(\alpha) P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) =$$

$$= a_{i,1} F_1(\alpha) + \dots + a_{i,M} F_M(\alpha), \quad a_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}.$$

Так как число членов в многочлене P не превосходит

$$\binom{m+s-1}{m-1} = \frac{(s+1)\dots(s+m-1)}{2\dots(m-1)} \leqslant m s^{m-1},$$

то

$$\overline{|a_{i,j}|} \leqslant H m s^{m-1} \leqslant H e^{\gamma_{12} m \ln N}. \tag{17}$$

Числовые линейные формы $\psi_1(\alpha), \dots, \psi_v(\alpha)$ от чисел $F_1(\alpha), \dots, F_M(\alpha)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ являются линейно независимыми. Действительно, расположим члены многочлена P в лексикографическом порядке, и тогда, очевидно, старшие члены полученных линейных форм будут различными. По леммам 3, 4 при

$$\ln n > \gamma_{11} \max(\ln n_0, M^2 m \ln N) \tag{18}$$

построим M линейно независимых числовых форм. Из них выберем $w = M - v$ форм $R_{i_k}(\alpha)$, $k = v+1, \dots, M$, линейно независимых с числовыми формами $\psi_1(\alpha), \dots, \psi_v(\alpha)$. Пусть Δ — определитель матрицы, состоящей из коэффициентов линейных форм $\psi_1(\alpha), \dots, \psi_v(\alpha)$, $R_{i_{v+1}}(\alpha), \dots, R_{i_M}(\alpha)$.

Поскольку $\alpha T(\alpha) \neq 0$, то хотя бы одно из чисел $F_1(\alpha), \dots, F_M(\alpha)$ отлично от нуля. Можно считать, что

$$|F_1(\alpha)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant M} |F_i(\alpha)|, \quad e^{-\gamma_{13} N} \leqslant |F_1(\alpha)| \leqslant e^{\gamma_{13} N},$$

$$\gamma_{13} = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ f_i(\alpha) \neq 0}} |\ln|f_i(\alpha)||, \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant v} |G_k(\alpha)| \leqslant e^{\gamma_{13} N}.$$

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_M$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца в определителе Δ. Тогда

$$\Delta F_1(\alpha) = \Delta_1 \psi_1(\alpha) + \dots + \Delta_v \psi_v(\alpha) + \Delta_{v+1} R_{i_{v+1}}(\alpha) + \dots + \Delta_M R_{i_M}(\alpha),$$

$$|\Delta| \leqslant |F_1(\alpha)|^{-1} \left(\max_{1\leqslant k\leqslant v} |G_k(\alpha)||P(\alpha)| \max_{1\leqslant k\leqslant v} |\Delta_k| v + \right.$$

$$\left. + \max_{v+1\leqslant k\leqslant M} |\Delta_k| \max_{v+1\leqslant k\leqslant M} |R_{i_k}(\alpha)| w \right). \qquad (19)$$

Из (9) следует, что $e^{\gamma_{14}qwn}\Delta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и

$$|\mathrm{Norm}\,(\, e^{\gamma_{14}qwn}\Delta)| \geqslant 1. \qquad (20)$$

Пусть θ в этом и следующем параграфах обозначает выражение $M^2 n\sqrt{m\ln N \ln n}$. Тогда из оценок (7), (17), учитывая, что при условиях леммы $M > N$ и что согласно (18) $mv\ln N < \ln n < \theta$, $M! < M^M = e^{M\ln M} < e^{\theta}$, получим

$$\overline{|\Delta_k|} \leqslant H^{v-1} n^{nw} e^{\gamma_{15}\theta}, \quad k = 1, \dots, v;$$

$$\overline{|\Delta_k|} \leqslant H^{v} n^{n(w-1)} e^{\gamma_{15}\theta}, \quad k = v+1, \dots, M; \qquad (21)$$

$$\overline{|\Delta|} \leqslant H^{v} n^{nw} e^{\gamma_{15}\theta}.$$

Из неравенств (8), (19)–(21) имеем

$$|P(\alpha)| e^{\gamma_{14}hqwn} H^{hv-1} n^{nhw} e^{\gamma_{16}\theta} + e^{\gamma_{14}hqwn} H^{hv} n^{n(hw-M)} e^{\gamma_{16}\theta} \geqslant 1,$$

$$|P(\alpha)| H^{hv-1} n^{nhw} e^{\gamma_{17}\theta} + H^{hv} n^{n(hw-M)} e^{\gamma_{17}\theta} \geqslant 1. \qquad (22)$$

Из условия (15) следуют оценки

$$M - hw = \frac{(\varkappa-1)M - \varkappa hw + M}{\varkappa} \geqslant \frac{M}{\varkappa}, \qquad (23)$$

$$\varkappa hM - hv - \varkappa h^2 w \geqslant Mh\left(\varkappa - 1 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa h}(1-\varkappa h)\right) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}M. \qquad (24)$$

Выберем минимальное n, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\ln n > \max(\gamma_{11}, 4\gamma_{17}^2)\max(\ln n_0, M^2 m\varkappa^2 \ln N), \qquad (25)$$

$$n^n \left(\frac{1}{2}\, e^{-\gamma_{17}\theta}\right)^{\varkappa/M} > H^{\varkappa h}. \qquad (26)$$

Тогда при $H \geqslant H_0(n_0, N)$ справедливо неравенство

$$(n-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\exp(-\gamma_{17}M^2(n-1)\sqrt{m\ln N\ln(n-1)})\right)^{\varkappa/M} \leqslant H^{\varkappa h},$$

из которого получаем

$$n^n \left(\frac{1}{2}\, e^{-\gamma_{17}\theta}\right)^{\varkappa/M} < H^{\varkappa h} n \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < enH^{\varkappa h}. \tag{27}$$

Логарифмируя, имеем

$$n\ln n - (\varkappa/M)\ln(1/2) - \gamma_{17}\theta\varkappa/M < 1 + \ln n + \varkappa h \ln H.$$

Отсюда, учитывая, что при условиях (25)

$$2\gamma_{17}\theta\varkappa/M \leqslant 2\gamma_{17}Mn\varkappa\sqrt{m\ln N\ln n} < n\ln n,$$

получаем

$$n\ln n - (1/2)n\ln n < 1 + \ln n + (\varkappa/M)\ln 2 + \varkappa h\ln H,$$

$$n\ln n < \gamma_{18}\varkappa\ln H. \tag{28}$$

Из неравенства (26) следует неравенство $n^n > H^{\varkappa h}$, логарифмируя которое и учитывая (28), (25), выводим

$$\begin{gathered} n\ln n < \gamma_{18}\varkappa\ln H < \gamma_{19}n\ln n, \qquad n < \gamma_{19}\ln H, \\ \ln n < \gamma_{19}\ln\ln H < \gamma_{20}\ln n. \end{gathered} \tag{29}$$

Эти же неравенства верны, очевидно, и для $H_0(n_0, N)$, поэтому можно положить

$$\ln\ln H_0(n_0, N) = \gamma_{21}\max(\ln n_0, M^2 m\varkappa^2\ln N).$$

Тогда из (27), (29) получается, что при

$$\ln\ln H > \gamma_{21}\max(\ln n_0, M^2 m\varkappa^2\ln N) \tag{30}$$

выполняется неравенство

$$n^{-n} > H^{-\varkappa h}(\gamma_{22}\ln H)^{-1}\left(\frac{1}{2}\, e^{-\gamma_{17}\theta}\right)^{\varkappa/M}. \tag{31}$$

При условиях (25), (26), учитывая неравенство (23), для второго слагаемого левой части неравенства (22) получаем оценку

$$H^{hv}n^{n(hw-M)}e^{\gamma_{17}\theta} \leqslant H^{hv}n^{-nM/\varkappa}e^{\gamma_{17}\theta} < \frac{1}{2}H^{hv-hM} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда из неравенств (22), (31), (24), учитывая, что при условии (15) $\varkappa hw/M+1\leqslant\varkappa$, имеем

$$|P(\alpha)|>\frac{1}{2}H^{1-hv}n^{-nhw}e^{-\gamma_{17}\theta}>\frac{1}{2}H^{1-hv-\varkappa h^2w}(\gamma_{22}\ln H)^{-hw}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\,e^{-\gamma_{17}\theta}\right)^{\varkappa hw/M}e^{-\gamma_{17}\theta}\geqslant H^{1-\varkappa hM+M(\varkappa-1)/\varkappa}(\gamma_{23}\ln H)^{-hw}\cdot$$

$$\cdot e^{-\gamma_{24}\theta(\varkappa hw/M+1)}\geqslant H^{1-\varkappa hM+M(\varkappa-1)/\varkappa}\cdot$$

$$\cdot H^{-\gamma_{25}w\ln\ln H/\ln H}\exp\left(-\gamma_{26}n\ln n\frac{M^2\varkappa\sqrt{m\ln N}}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Воспользовавшись неравенствами (29), отсюда выводим

$$|P(\alpha)|>H^{-\varkappa hM}H^{1-\gamma_{25}w\ln\ln H/\ln H+M(\varkappa-1)/\varkappa-\gamma_{27}M^2\varkappa^2\sqrt{m\ln N}/\sqrt{\ln\ln H}}.$$

Нетрудно видеть, что при

$$\ln\ln H>\gamma_{28}\max(\ln n_0,M^2m\ln N\varkappa^6/(\varkappa-1)^2) \tag{32}$$

последний сомножитель больше 1 и выполняется условие (30). Подставив в неравенство (32) оценки для n_0 из леммы 3, получаем утверждение леммы 5.

Лемма 6. *Пусть* $\varphi(x)=c(x+1)\ldots(x+n)$, $c\in\mathbb{R}$, $n,s\in\mathbb{N}$. *Тогда при* $N\geqslant(s-1)(n-1)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\varphi(N)-\varphi(N-s)}{\varphi(N)}\leqslant\frac{sn}{N+n}.$$

Действительно,

$$\frac{\varphi(N)-\varphi(N-s)}{\varphi(N)}=1-\prod_{i=1}^{n}\frac{N-s+i}{N+i}=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{s}{(N+n)-n+i}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(N+n)/s-n+i}\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\frac{(N+n)/s-n+i-1}{(N+n)/s-n+i}=$$

$$=1-\frac{(N+n)/s-n}{(N+n)/s}=\frac{sn}{N+n}.$$

Замечание. В утверждении леммы 6 точное значение знаменателя правой части неравенства равно $N + n + (s-1)(n-1)(1+\gamma)/2$, где $0 < \gamma = \gamma(N, n, s) < sn/2N$ (см. Горелов В.А., Завьялова О.А. Об одном вспомогательном утверждении метода Зигеля // Научн. труды Ивановского гос. ун-та. Сер. Математика. Вып. 1. Иваново, 1997. – С. 23 – 26). В настоящей диссертации этот результат не используется.

Следствие. Если $M = c(N+1)\dots(N+n)$, $c \in \mathbb{R}$, то для выполнения условия (15) достаточно взять N наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим неравенству

$$N \geqslant \frac{ns\varkappa h}{\varkappa - 1} - n. \tag{33}$$

При условиях теоремы 26 $M = (N+m-1)!/N!(m-1)!$. Положив $n = m-1$, $\varkappa = m$, $N = smh - m + 1$, убеждаемся, что справедливы оценки (33) и

$$M \leqslant \frac{1}{(m-1)!}(N+1)\dots(N+m-1) \leqslant \frac{(msh)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Из леммы 5 следует, что при $\ln\ln H > \sigma\gamma^m s^{2m-2}\ln(s+1)$ выполняется неравенство

$$\Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha); s; H) > CH^{-\rho s^{m-1}},$$

где ρ и C определены в теореме 26, а при $\ln\ln H \leqslant \sigma\gamma^m s^{2m-2}\ln(s+1)$ имеем

$$\Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha); s; H) \geqslant$$
$$\geqslant \Phi^{\circ}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha); s; \exp\exp(\sigma\gamma^m s^{2m-2}\ln(s+1))) >$$
$$> \exp(-\rho s^{m-1}\exp(\sigma\gamma^m s^{2m-2}\ln(s+1))) > C.$$

При условии, что каждое решение системы (0.5) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций, согласно лемме 5 получаются те же неравенства с $\sigma = m^m$, а при условии неприводимости совокупности функций (1) — с $\sigma = 1$.

Из доказанных неравенств следуют теоремы 26, 26$'$ в однородном случае. Общий случай следует из однородного при добавлении к рассматриваемой совокупности функций (0.4) функции $f_0(z) \equiv 1$.

Для доказательства теоремы 27 необходимо обобщить леммы 4 и 5.

Пусть для каждого вектора $\bar{N} = (N_1, \ldots, N_r) \in \mathbb{N}^r$, $\omega_{N,m} = (N+m-1)!/N!(m-1)!$, $L_{\bar{N}}$ обозначает множество $\omega_{\bar{N},\bar{m}} = \omega_{N_1,m_1} \ldots \omega_{N_r,m_r}$ произведений степеней функций (0.49), однородных по каждой из r подсовокупностей, из которых состоит совокупность функций (0.49), степеней по этим подсовокупностям соответственно $N_1, \ldots, N_r$. При условиях теоремы 27 элементы множества $L_{\bar{N}}$ являются, очевидно, линейно независимыми над $\mathbb{C}(z)$ и удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений, степень q_N и размер t_N которой не превосходят соответственно q и $t \max N_i$, где q и t — степень и размер системы дифференциальных уравнений, являющейся объединением всех систем (0.50).

Для каждого вектора $\bar{N}$ обозначим $|\bar{N}|$ сумму его координат. Положим $N = |\bar{N}|$, $M = \omega_{\bar{N},\bar{m}}$, $m = |\bar{m}|$.

Лемма 7. *Пусть совокупность функций (0.49), удовлетворяющих определению 3, не связана алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$, однородным по каждой из r подсовокупностей, из которых она состоит, линейная форма (4) от функций множества $L_{\bar{N}}$ построена по лемме 2 при некотором $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем условию $\ln n > \max(q, \ln(tN), 4M^2 m \ln(N+1))$, $\alpha \in \mathbb{K}$, а число s определяется равенством (5). Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant M+s$, выполняются неравенства (7)–(9), где $q_N = q$, причём они остаются справедливыми при замене всех коэффициентов степенных рядов функций (0.49), коэффициентов многочленов $P_{k,l}$ и числа α сопряжёнными в поле $\mathbb{K}_{[j]}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, где $h = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4 с заменой функций (0.4) функциями (0.49), полагая $q_N = q$, $t_N = tN$, $\lambda_N = 0$, $\tau_N = 1$.

Лемма 8. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и каждая из r совокупностей $\mathbb{K}E$-функций (0.49), удовлетворяющих определению 3, составляет решение соответствующей системы линейных однородных дифференциальных уравнений (0.50) и функции (0.49) не связаны алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$, однородным по каждой из r совокупностей. Пусть $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ и не является особой точкой систем (0.50), $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, а $P = P(z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}; \ldots; z_{r,1}, \ldots, z_{r,m_r})$ — много-*

член с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $P(\alpha) = P(\varphi_{1,1}(\alpha), \dots, \varphi_{r,m_r}(\alpha)) \neq 0$, $\overline{|P|} \leqslant H$, *однородный по каждой из* r *совокупностей переменных* $z_{k,1}, \dots, z_{k,m_k}$, $k = 1, \dots, r$, *степеней соответственно* $s_1, \dots, s_r$ *по этим совокупностям. Пусть, далее,* $N_i \geqslant s_i$, $i = 1, \dots, r$, $|\bar{N}| > |\bar{s}| \in \mathbb{N}$, *и имеет место неравенство (15), где*

$$M = \omega_{\bar{N},\bar{m}},\ w = M - v,\ v = \omega_{\bar{N}-\bar{s},\bar{m}},\ \bar{N} - \bar{s} = (N_1 - s_1, \dots, N_r - s_r). \tag{34}$$

Тогда существуют постоянные γ *и* σ, *для которых при*

$$\ln\ln H > \gamma \max(\sigma \ln N, M^2 m \ln N \varkappa^6/(\varkappa - 1)^2), \tag{35}$$

где $N = |\bar{N}|$, $m = |\bar{m}|$, *выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)| > H^{-\varkappa h M}.$$

В случае, если каждое решение системы (0.50) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ *функций, в неравенстве (35)* $\sigma = (\gamma m)^m$, *а в случае неприводимости совокупности функций* $L_{\bar{N}}$ $\sigma = 0$.

Доказательство. Занумеруем функции (0.49) одним индексом и обозначим их $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Обозначим через $F_1, \dots, F_M$ все функции, входящие в $L_{\bar{N}}$, а через $G_1, \dots, G_v$ — все функции, входящие в $L_{\bar{N}-\bar{s}}$. Рассмотрим v многочленов от чисел $\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)$:

$$\psi_i(\alpha) = G_i(\alpha) P(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)) = a_{i,1} F_1(\alpha) + \dots + a_{i,M} F_M(\alpha),$$

где $a_{i,j}$ — коэффициенты многочлена P и, следовательно, $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\overline{|a_{i,j}|} \leqslant H$. Числовые линейные формы $\psi_1(\alpha), \dots, \psi_v(\alpha)$ от чисел $F_1(\alpha)$, $\dots, F_M(\alpha)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ являются линейно независимыми, так как если расположить члены многочлена P в лексикографическом порядке, то старшие члены полученных линейных форм будут различными. Далее дословно повторяем рассуждения леммы 5.

Лемма 9. *Пусть* $M_i, v_i \in \mathbb{N}$, $M_i > v_i$, $M_i \geqslant c(M_i - v_i)$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$, $i = 1, \dots, r$. *Тогда*

$$M_1 \dots M_r \geqslant \frac{c}{r}(M_1 \dots M_r - v_1 \dots v_r).$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что $M_i(c-1) \leqslant c v_i$. Перемножив эти неравенства, получим $M_1 \dots M_r (c-1)^r \leqslant c^r v_1 \dots v_r$

или

$$((c-1)^r-(c^r-rc^{r-1})+(c^r-rc^{r-1}))M_1\dots M_r\leqslant c^rv_1\dots v_r. \qquad (36)$$

Докажем, что выполняется неравенство

$$(c-1)^r-(c^r-rc^{r-1})\geqslant 0. \qquad (37)$$

Оно равносильно неравенству

$$(1-1/c)^r-(1-r/c)\geqslant 0. \qquad (38)$$

Последнее при $c\leqslant r$ очевидно. Пусть $c>r$. Применяя формулу бинома, представим левую часть (38) в виде

$$\frac{r(r-1)}{2!c^2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{3!c^3}+\dots+\frac{(-1)^r}{c^r}. \qquad (39)$$

Очевидно, что при $c>r$ слагаемые в сумме (39) монотонно убывают по модулю и знаки их чередуются. Поскольку первое из них положительно, то положительна и вся сумма (39), а значит, справедливы неравенства (38) и (37).

В силу (36), (37) $(c^r-rc^{r-1})M_1\dots M_r\leqslant c^rv_1\dots v_r$. Отсюда $rc^{r-1}M_1\dots M_r\geqslant c^r(M_1\dots M_r-v_1\dots v_r)$. Разделив последнее неравенство на rc^{r-1}, получим утверждение леммы 9.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 27. Добавим к каждой совокупности функций (0.51) функцию, тождественно равную 1. Тогда системы дифференциальных уравнений (0.52) станут однородными. Пусть $M_i=\omega_{N_i,m_i}$, $i=1,\dots,r+p$, где $m_{r+k}=\mu_k+1$, $k=1,\dots,p$.

Согласно лемме 6 при $N_i=(r+p)s_im_ih-m_i+1$, где $s_{r+k}=\nu_k$, имеем

$$M_i\geqslant(r+p)\frac{m_ih}{m_i-1}(M_i-v_i)\geqslant(r+p)\frac{m_0h}{m_0-1}(M_i-v_i),\ i=1,\dots,r+p.$$

Применяя лемму 9, в которой положим $r=r+p$, $c=(r+p)(m_0h/(m_0-1)$, получим, что выполняется неравенство (15) с условиями (34). Из доказательства теоремы 26 следует, что все M_i, $i=1,\dots,r+p$, удовлетворяют неравенствам

$$M_i\leqslant\frac{((r+p)m_is_ih)^{m_i-1}}{(m_i-1)!}.$$

Тогда

$$\varkappa h M \leqslant m_0 h(h(r+p))^{m-r}\left(\prod_{l=1}^{r}\frac{(m_l s_l)^{m_l-1}}{(m_l-1)!}\right)\prod_{j=1}^{p}\frac{((\mu_j+1)\nu_j)^{\mu_j}}{\mu_j!},$$

где $\varkappa = m_0,\ \ m = m_1+\dots+m_r+\mu_1+\dots+\mu_p$.

Согласно лемме 8 при

$$\ln\ln H > \sigma((r{+}p)^2\gamma)^m\left(\prod_{l=1}^{r} s_l^{2m_l-2}\right)\left(\prod_{j=1}^{p}\nu_j^{2\mu_j}\right)\ln\left(\sum_{l=1}^{r}s_l+\sum_{j=1}^{p}\nu_j+1\right)$$

имеет место неравенство

$$|P(\varphi_{1,l}(\alpha),\dots,\varphi_{r,m_r}(\alpha);\psi_{1,1}(\alpha),\dots,\psi_{p,\mu_p}(\alpha))| > CH^{-\rho},$$

где ρ определено в утверждении теоремы 27.

Далее рассуждаем так же, как при доказательстве теорем 26 и $26'$.

§3. Доказательство теорем 28 и $28'$

Лемма 10. *Пусть среди $\mathbb{K}E$-функций (0.4), удовлетворяющих определению 3 и составляющих решение системы (0.5), имеются по крайней мере две однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$, $F_1,\dots,F_M$ — базис линейного пространства $\mathbb{L}_N$, $\ N\geqslant 2,\ \alpha\in\mathbb{A}\setminus\Lambda$, $h=[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, $l=l(z_1,\dots,z_M)$ — произвольная линейная форма с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $l\not\equiv 0$, $\overline{|l|}=H$. Тогда существуют постоянные σ, γ_{29} и γ_{30}, для которых при*

$$\ln\ln H > \gamma_{29}\max(\sigma\ln N, \lambda_N, \ln\tau_N, M^4 m\ln N) \tag{40}$$

выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant h}|l_{[j]}(F_{1[j]}(\alpha_{[j]}),\dots,F_{M[j]}(\alpha_{[j]}))| > H^{1-M-\delta}, \tag{41}$$

где

$$\delta=\frac{\gamma_{30}M^3\sqrt{m\ln N}}{\sqrt{\ln\ln H}}.$$

Доказательство. Без уменьшения общности можно считать, что $\alpha\in\mathbb{K}$. Пусть

$$L_0 = l(F_1(\alpha),\dots,F_M(\alpha)) = a_{0,1}F_1(\alpha)+\dots+a_{0,M}F_M(\alpha),\ \ l\not\equiv 0,$$

$$a_{0,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ |a_{0,i}| \leqslant H,\ i = 1, \ldots, M,$$

$$L_{0,j} = l_{[j]}(F_{1[j]}(\alpha_{[j]}), \ldots, F_{M[j]}(\alpha_{[j]})) = \sum_{i=1}^{M} (a_{0,i})_{[j]} F_{i[j]}(\alpha_{[j]}), \qquad (42)$$
$$j = 1, \ldots, h.$$

Согласно леммам 3 и 4 существуют линейно независимые формы

$$L_k = \sum_{i=1}^{M} a_{k,i} F_i(\alpha), \quad a_{k,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k = 1, \ldots, M, \qquad (43)$$

такие, что

$$\overline{|a_{k,i}|} < n^n \exp(\gamma_{31} M n \sqrt{m \ln N \ln n}),$$
$$|L_{k,j}| < n^{-(M-1)n} \exp(\gamma_{31} M n \sqrt{m \ln N \ln n}), \qquad (44)$$

где

$$L_{k,j} = \sum_{i=1}^{M} (a_{k,i})_{[j]} F_{i[j]}(\alpha_{[j]}), \quad k = 1, \ldots, M. \qquad (45)$$

Среди линейных форм (43) можно выбрать $M-1$ форму так, что вместе с формой L_0 они будут линейно независимы. Можно считать, что это — первые $M-1$ форм.

Обозначим $\Delta,\ \Delta \neq 0$, определитель линейных форм $L_1, \ldots, L_{M-1}$, L_0. Обозначим символом $\Delta_{k,i,j}$ алгебраическое дополнение элемента k-й строки и i-го столбца в $\Delta_{[j]}$. Так как $\Delta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и $\Delta \neq 0$, то $\Delta_{[1]} \ldots \Delta_{[h]} \geqslant 1$. Отсюда, при некотором значении $j,\ 1 \leqslant j \leqslant h$ выполняется неравенство

$$|\Delta_{[j]}| \geqslant 1. \qquad (46)$$

Из равенств (45), (42) при каждом $i,\ 1 \leqslant i \leqslant M$, имеем

$$\Delta_{[j]} F_{i[j]}(\alpha_{[j]}) = \Delta_{1,i,j} L_{1,j} + \cdots + \Delta_{M-1,i,j} L_{M-1,j} + \Delta_{M,i,j} L_{0,j}. \qquad (47)$$

Выберем i так, чтобы $F_{i[j]}(\alpha_{[j]}) \neq 0$, что возможно, так как $T(\alpha_{[j]}) \neq 0$. Тогда из (47) находим, что

$$\overline{|\Delta_{M,i,j}|}|L_{0,j}| \geqslant |F_{i[j]}(\alpha_{[j]})||\Delta_{[j]}| - (M-1) \max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{|\Delta_{k,i,j}|} \max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} |L_{k,j}|. \qquad (48)$$

Поскольку оценки (44) справедливы для любого j, то

$$\overline{|\Delta_{M,i,j}|} \leqslant (M-1)! n^{(M-1)n} \exp(\gamma_{31} M n \sqrt{m \ln N \ln n}(M-1)),$$
$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{|\Delta_{k,i,j}|} \leqslant (M-1)! H n^{(M-2)n} \exp(\gamma_{31} M n \sqrt{m \ln N \ln n}(M-2)), \tag{49}$$
$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} |L_{k,j}| \leqslant n^{-(M-1)n} \exp(\gamma_{31} M n \sqrt{m \ln N \ln n}).$$

Пусть θ, как и в предыдущем параграфе, обозначает выражение $M^2 n \sqrt{m \ln N \ln n}$. Поскольку $M! < M^M < e^{\theta}$, из неравенств (49) следует

$$\overline{|\Delta_{M,i,j}|} < n^{(M-1)n} e^{\gamma_{32}\theta},$$
$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{|\Delta_{k,i,j}|} < H n^{(M-2)n} e^{\gamma_{32}\theta}, \tag{50}$$
$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} |L_{k,j}| < n^{-(M-1)n} e^{\gamma_{32}\theta}.$$

Из (48), (50), (46) получаем

$$n^{(M-1)n} e^{\gamma_{32}\theta} |L_{0,j}| \geqslant |F_{i[j]}(\alpha_{[j]})| - H n^{-n} e^{\gamma_{33}\theta}.$$

Поскольку $e^{-\gamma_{34}\theta} < e^{-\gamma_{34} N} < |F_{i[j]}(\alpha_{[j]})| < e^{\gamma_{34} N} < e^{\gamma_{34}\theta}$, где

$$\gamma_{34} = \max_{f_{k[j]}(\alpha_{[j]}) \neq 0} |\ln |f_{k[j]}(\alpha_{[j]})||,$$

то

$$|L_{0,j}| \geqslant n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_{32}\theta} (|F_{i[j]}(\alpha_{[j]})| - H n^{-n} e^{\gamma_{33}\theta}) \geqslant$$
$$\geqslant n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_{32}\theta} (e^{-\gamma_{34}\theta} - H n^{-n} e^{\gamma_{33}\theta}) \geqslant$$
$$\geqslant n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_{32}\theta} e^{-\gamma_{34}\theta} (1 - H n^{-n} e^{\gamma_{33}\theta} e^{\gamma_{34}\theta}),$$
$$|L_{0,j}| \geqslant n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_{35}\theta} (1 - H n^{-n} e^{\gamma_{36}\theta}). \tag{51}$$

Выберем минимальное n, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\ln n > \max(\sigma \ln N, q_N, \ln t_N, 16\gamma_{36} M^4 m \ln N),$$
$$n^n > 2 e^{\gamma_{36}\theta} H. \tag{52}$$

Тогда неравенство (51) перейдёт в

$$|L_{0,j}| > n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_{35}\theta} \left(1 - \frac{1}{2}\right) > e^{-\gamma_{37}\theta} n^{-(M-1)n}. \tag{53}$$

При сделанном предположении, начиная с некоторого H, выполняется неравенство

$$(n-1)^{n-1} \leqslant 2H \exp(\gamma_{36} M^2 (n-1)\sqrt{m \ln N \ln(n-1)}).$$

Увеличивая в правой части этого неравенства n на единицу, получим

$$n^{n-1} \leqslant 2H \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} e^{\gamma_{36}\theta} < 2eHe^{\gamma_{36}\theta} < 6He^{\gamma_{36}\theta}. \qquad (54)$$

Прологарифмируем это неравенство:

$$(n-1)\ln n < \ln H + \ln 6 + \gamma_{36}\theta.$$

Отсюда, учитывая, что при условиях (52)

$$\gamma_{36}\theta = \gamma_{36} M^2 n \sqrt{m \ln N \ln n} < \frac{1}{4} n \ln n,$$

получаем

$$\frac{3}{4} n \ln n < \ln n + \ln H + \ln 6,$$

$$n \ln n < \gamma_{38} \ln H, \qquad (55)$$

$$n < \gamma_{38} \ln H. \qquad (56)$$

Из неравенства (54), используя оценку (56), получаем

$$n^n < 6nHe^{\gamma_{36}\theta} < H \ln He^{\gamma_{39}\theta}.$$

Подставив эту оценку в неравенство (53), имеем

$$|L_{0,j}| > (H \ln He^{\gamma_{39}\theta})^{1-M} e^{-\gamma_{37}\theta} \geqslant$$

$$\geqslant H^{1-M} (\ln H)^{1-M} e^{-\gamma_{40}\theta M}.$$

Преобразуем последний сомножитель. Из условия (52) следует, что $n^n > H$, откуда $\ln n + \ln\ln n > \ln\ln H$,

$$\ln n > \gamma_{41} \ln\ln H. \qquad (57)$$

Из неравенств (57) и (55) получаем

$$e^{-\gamma_{40}\theta M} = \exp\left(-\frac{\gamma_{40} M^3 n \sqrt{m \ln N} \ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) >$$

$$> \exp\left(-\frac{\gamma_{42}M^3\sqrt{m\ln N}\ln H}{\sqrt{\ln\ln H}}\right) = H^{-\gamma_{42}M^3\sqrt{m\ln N}/\sqrt{\ln\ln H}}.$$

В итоге имеем оценку

$$|L_{0,j}| > H^{1-M}H^{(1-M)\ln\ln H/\ln H}H^{-\gamma_{42}M^3\sqrt{m\ln N}/\sqrt{\ln\ln H}}.$$

Так как последний показатель с ростом H стремится к нулю медленнее чем предыдущий, отсюда следует неравенство (41). Лемма 10 доказана.

Лемма 11 [33:1, теорема 5.1]. *Пусть* $n, m, X \in \mathbb{N}$, $n > m$,

$$l_r = a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,n}x_n, \quad a_{r,j} \in \mathbb{R},\ r = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

$$A_r \geqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{r,j}|.$$

Тогда существует набор $x_{1,0}, \dots, x_{n,0} \in \mathbb{Z}$, *удовлетворяющий условиям*

$$0 < \max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_{j,0}| \leqslant X, \quad |l_r| < A_r X^{1-n/m}, \quad r = 1, \dots, m.$$

Лемма 12. *Пусть среди* $\mathbb{K}E$*-функции (0.4), удовлетворяющих определению 3 и составляющих решение системы (0.5), имеются по крайней мере две однородно алгебраически независимых над* $\mathbb{C}(z)$, $P = P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z_1, \dots, z_m]$ — *однородный многочлен степени* $s \in \mathbb{N}$, $\overline{|P|} \leqslant H$, $\alpha \in \mathbb{A}\setminus\Lambda$, $P(\alpha) = P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \neq 0$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, $N > s$, $v = M_{N-s}$, $w = M - v$. *Тогда если справедливо условие (15), то существуют постоянные* γ *и* σ, *для которых при*

$$\ln\ln H > \gamma\max(\sigma\ln N, \lambda_N, \ln\tau_N, M^4 m\ln N\varkappa^4/(\varkappa-1)^2) \tag{58}$$

выполняется неравенство

$$|P(\alpha)| > H^{-\varkappa h M}.$$

В случае, если каждое решение системы (0.5) с ненулевыми компонентами состоит из однородно алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ *функций, в неравенстве (58)* $\sigma = (\gamma m)^m$, *а в случае неприводимости совокупности функций* $F_1, \dots, F_M$ $\sigma = 0$.

Доказательство. Без уменьшения общности можно считать, что $\alpha \in \mathbb{K}$. В случае $h = 1$ лемма 12 следует непосредственно из неравенства (41). Поэтому далее считаем, что $h \geqslant 2$. В этом случае условие (15) равносильно

$$\frac{w}{M} \leqslant \frac{\varkappa' - 1}{\varkappa' h - 1}, \tag{59}$$

где $\varkappa'$ — число, удовлетворяющее уравнению $(\varkappa' - 1)/(\varkappa' h - 1) = (\varkappa - 1)/(\varkappa h)$, откуда

$$\varkappa' = \varkappa - \frac{\varkappa - 1}{h}, \quad 1 < \varkappa' < \varkappa,$$
$$\frac{1}{\varkappa'} - \frac{1}{\varkappa} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa^2(h-1) + \varkappa} > \frac{\varkappa - 1}{\varkappa^2 h}. \tag{60}$$

Из условия (59) (при $h \geqslant 2$) следуют неравенства

$$\frac{v}{M} \geqslant \frac{h-1}{h - 1/\varkappa'}, \quad M \leqslant \frac{h - 1/\varkappa'}{h-1} v < 2v. \tag{61}$$

Рассмотрим линейную форму

$$L = L(\alpha) = a_1 G_1(\alpha) + \dots + a_v G_v(\alpha), \quad a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k = 1, \dots, v,$$

где $G_1, \dots, G_v$ — базис линейного пространства $\mathbb{L}_{N-s}$. Разложим все коэффициенты a_k линейной формы L по базису $\omega_1, \dots, \omega_h$ кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ с целыми рациональными коэффициентами $x_{k,i}$. Тогда L можно рассматривать как линейную форму L_1 от hv величин $x_{k,i}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$:

$$L_1 = x_{1,1}\omega_1 G_1(\alpha) + \dots + x_{1,h}\omega_h G_1(\alpha) + \dots + x_{v,h}\omega_h G_v(\alpha).$$

Пусть

$$L_j = x_{1,1}\omega_{1,j} G_{1,j}(\alpha_{[j]}) + \dots + x_{v,h}\omega_{h,j} G_{v,j}(\alpha_{[j]}),\ j = 1, \dots, h$$

— линейные формы, получающиеся из L_1 путём замены чисел ω_i, коэффициентов степенных рядов функций $G_k(z)$ и числа α на алгебраически сопряжённые из поля $\mathbb{K}_{[j]}$, $\mathbb{K}_{[1]} = \mathbb{K}$. Множество полей $\mathbb{K}_{[j]}$, не являющихся действительными, разбивается на пары комплексно сопряжённых. Соответствующее множество линейных форм L_j также разбивается на пары комплексно сопряжённых, с совпадающими действительными частями и противоположными по знаку мнимыми. Поэтому из форм $L_1, \dots, L_h$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ можно получить h линейных форм $l_1, \dots, l_h$ от hv целых рациональных величин $x_{k,i}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $l_1 = \Re e\ L_1$. Согласно лемме 11 для любого $X \in \mathbb{N}$ найдётся hv целых рациональных величин $x_{k,i}$, не равных нулю в совокупности (тем самым $|a_1| + \dots + |a_v| \neq 0$), по модулю не превосходящих X, таких, что при подстановке их в линейные формы $l_2, \dots, l_h$ выполняется неравенство

$$\max_{2 \leqslant j \leqslant h} |l_j| < e^{\gamma_{43} M} X^{1 - \frac{hv}{h-1}},$$

откуда

$$\max_{2 \leqslant j \leqslant h} |L_j| < \sqrt{2}\, e^{\gamma_{43} M} X^{1 - \frac{hv}{h-1}}$$

и $L(\alpha) = L_1(\alpha_{[1]}) \neq 0$ ввиду (41), где заменяем M на v. Так как

$$\max_{2 \leqslant j \leqslant h} |P_{[j]}(\alpha_{[j]})| < e^{\gamma_{44} M} H, \quad |L| = |L_1| < e^{\gamma_{45} M} X,$$

то

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |P_{[j]}(\alpha_{[j]}) L_j| < \max\left(|P(\alpha)| e^{\gamma_{45} M} X,\ e^{\gamma_{46} M} H X^{1 - \frac{hv}{h-1}}\right). \tag{62}$$

Поскольку $P(\alpha) L(\alpha) \neq 0$, то $PL \not\equiv 0$ как линейная форма от функций $F_1, \dots, F_M$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Рассмотрим линейную форму

$$\psi(\alpha) = \nu^{\lambda_N} S_N(\alpha) P(\alpha) L(\alpha) = \beta_1 F_1(\alpha) + \dots + \beta_M F_M(\alpha),$$

где $\nu = \operatorname{den} \alpha$, а многочлен $S_N(z)$ определён перед леммой 1. Так как число членов в многочлене P не превосходит $\binom{m+s-1}{m-1} \leqslant m s^{m-1}$, то для коэффициентов β_k справедлива оценка

$$\overline{|\beta_k|} < M H X e^{\gamma_{47}(\lambda_N + \ln \tau_N + m \ln N)}.$$

Согласно лемме 10 при условии (40) выполняется неравенство

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |\psi_{[j]}(\alpha_{[j]})| > (HX)^{1 - M - \delta} e^{-\gamma_{48} M (\lambda_N + \ln \tau_N + m \ln M)}.$$

С другой стороны, ввиду (62)

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant h} |\psi_{[j]}(\alpha_{[j]})| < e^{\gamma_{49} M (\lambda_N + \ln \tau_N)} \max\left(|P(\alpha)| X,\ H X^{1 - \frac{hv}{h-1}}\right).$$

Сравнивая эти оценки, получим

$$(HX)^{1-M-\delta} <$$

$$< e^{\gamma_{50}M(\lambda_N+\ln\tau_N+m\ln M)}\max\left(|P(\alpha)|X,\ HX^{1-\frac{hv}{h-1}}\right). \tag{63}$$

Выберем X так, что

$$HX^{1-\frac{hv}{h-1}} < |P(\alpha)|X,$$

то есть

$$X > (H/|P(\alpha)|)^{\frac{h-1}{hv}}.$$

Можно считать, что $|P(\alpha)| < 1$. Поскольку $X \in \mathbb{N}$, положим

$$X = \gamma_{51}(H/|P(\alpha)|)^{\frac{h-1}{hv}}, \quad 1 < \gamma_{51} \leqslant 2.$$

Тогда, учитывая также условие (58), неравенство (63) перейдёт в

$$|P(\alpha)| > H^{1-M-\delta}X^{-M-\delta}e^{-\gamma_{52}(\ln\ln H)^2},$$

$$|P(\alpha)| > H^{1-M-\delta}(H/|P(\alpha)|)^{-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}}e^{-\gamma_{52}(\ln\ln H)^2},$$

$$|P(\alpha)|^{1-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}} > H^{1-M-\delta-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}}e^{-\gamma_{52}(\ln\ln H)^2},$$

$$|P(\alpha)| > H^{1-\frac{M+\delta}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}}\exp\left(-\gamma_{52}\frac{(\ln\ln H)^2}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}\right).$$

Из неравенств (58), (60), (61) и $v/\varkappa' \leqslant hv-(h-1)M < M$, увеличивая, в случае необходимости, в (58) постоянную γ, последовательно получаем

$$h\delta = \frac{\gamma_{30}hM^3\sqrt{m\ln N}}{\sqrt{\ln\ln H}} < \frac{(\varkappa-1)M}{2\varkappa^2 h} < \frac{(\varkappa-1)v}{\varkappa^2 h} < \left(\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right)v,$$

$$1-(M+\delta)\frac{h-1}{hv} = \frac{1}{hv}(hv-(h-1)M-(h-1)\delta) \geqslant \frac{1}{hv}(hv-(h-1)M-h\delta) >$$

$$> \frac{1}{hv}\left(\frac{v}{\varkappa'}-\left(\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right)v\right) = \frac{1}{\varkappa h},$$

$$\frac{M+\delta}{1-(M+\delta)(h-1)/hv} = hv\frac{M+\delta}{hv-(h-1)M-h\delta+\delta} <$$

$$< \frac{hvM}{hv-(h-1)M-h\delta} < \frac{M}{1/(\varkappa h)} = \varkappa hM,$$

$$\gamma_{52}\frac{(\ln\ln H)^2}{1-(M+\delta)(h-1)/hv} < \gamma_{52}\frac{(\ln\ln H)^2}{1/(\varkappa h)} < \gamma_{53}\varkappa(\ln\ln H)^2,$$

$$|P(\alpha)| > H^{1-\varkappa hM}e^{-\gamma_{53}\varkappa(\ln\ln H)^2} =$$

$$= H^{-\varkappa hM+1-\gamma_{53}\varkappa(\ln\ln H)^2/\ln H}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы 12.

Лемма 12 является обобщением леммы 5 на случай алгебраической зависимости функций (0.4). При её доказательстве использовались идеи, высказанные А.И. Галочкиным [10:4]. Имеется также другой подход к обобщению леммы 5 (см. [36:12, гл. 12, §1], [64:4, лемма 4]). При этом подходе удаётся получить (см. [64:4,5]) немного менее стеснительные ограничения на H, чем (58), но количество функций из множества (0.8), входящих в многочлен P, зависит от уравнений связи (0.53) и, вообще говоря, может быть меньше l.

Очевидна следующая

Лемма 13. *Пусть многочлены $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, $i = 1,\ldots,r$ при $N \geqslant s$ принимают положительные значения и удовлетворяют условию*

$$\frac{\varphi_i(N)-\varphi_i(N-s)}{\varphi_i(N)} \leqslant c, \quad i = 1,\ldots,r.$$

Тогда их сумма удовлетворяет тому же условию.

Лемма 14 (см. [36:12, гл. 4, §10]). *Пусть степень однородной трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ функций (0.4) равна l, $2 \leqslant l \leqslant m-1$, а уравнения (0.53) со старшими членами (0.54) образуют систему однородных минимальных уравнений для функций (0.4) над $\mathbb{C}(z)$. Тогда совокупность (0.56) произведений степеней функций (0.4) образует базис B_N линейного пространства $\mathbb{L}_N$.*

Нетрудно видеть, что множество Λ состоит из числа 0 и нулей многочленов $T, A_1, \ldots, A_\tau$.

Лемма 15 (см. [25:1, доказательство леммы 10]). *При условиях леммы 14 число M элементов базиса B_N (0.56) удовлетворяет неравенству*

$$M < \varkappa_0^{m-l}\binom{m}{l}\frac{(N+1)\ldots(N+l-1)}{(l-1)!}.$$

Лемма 16 (см. [25:1, лемма 11]). *При условиях леммы 12 степень* λ_N *и размер* τ_N *базиса* B_N *(0.56) пространства* $\mathbb{L}_N$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_N < c^2\lambda_0 N^2, \quad \tau_N < cN\tau_0^{c^2N^2}, \quad c = (\Omega_0+1)^{m-l},$$

где числа λ_0, τ_0 *и* Ω_0 *вводятся после определения минимальных уравнений (0.53).*

При $N \geqslant N_0$ имеем $M = \varphi(N) \in \mathbb{R}[N]$, $\deg\varphi(N) = l-1$ (см. [36:12, гл. 4, §11]). Из доказательства этого утверждения следует, что N_0 достаточно положить равным $m(\varkappa_0 - 1)$.

Лемма 17. *При условиях леммы 14 для любого натурального* $N \geqslant slh + m(\varkappa_0-1)+1$ *число* $M = \varphi(N)$ *элементов базиса* B_N *(0.56) удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\varphi(N)-\varphi(N-s)}{\varphi(N)} \leqslant \frac{l-1}{lh}. \tag{64}$$

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 13 гл. 4 книги [36:12], выберем из каждого члена (0.54) ненулевой показатель степени какой-либо функции из (0.4), причём если в получившийся набор входят несколько показателей степеней одной функции, то из них оставляется только наименьший. Полученный так набор упорядочим согласно нумерации функций (0.4). В него входят d элементов, $d \leqslant \min(\tau, m) \leqslant m$, а число n таких наборов не превосходит $\varkappa_0^m$. Каждому полученному набору $\{h_{i_1}, \dots, h_{i_d}\}$ соответствует множество $B^{(i)} \subseteq L_N$, $1 \leqslant i \leqslant n$, произведений степеней функций (0.4) вида

$$f_1^{k_1}(z)\dots f_m^{k_m}(z),$$

$$k_{i_1} = 0, 1, \dots, h_{i_1}-1, \dots, k_{i_d} = 0, 1, \dots, h_{i_d}-1.$$

Каждый элемент множества $B^{(i)}$ принадлежит, очевидно, базису B_N. С другой стороны, любой элемент базиса B_N принадлежит хотя бы одному множеству $B^{(i)}$. Следовательно,

$$B_N = \bigcup_{i=1}^{n} B^{(i)}.$$

При этом можно считать, что $B^{(i)} \nsubseteq B^{(j)}$, $i \neq j$.

Представим B_N в виде объединения

$$B_N = \bigcup_{i=1}^{n} A^{(i)}$$

непересекающихся множеств $A^{(i)} = B^{(i)} \setminus (B^{(1)} \cup \dots \cup B^{(i-1)}),\ A^{(1)} = B^{(1)}$.

Пусть $N > m(\varkappa_0 - 1)$. Тогда множество $B^{(i)}$ распадается на подмножества

$$k_{i_{d+1}} + \dots + k_{i_m} = N - k_{i_1} - \dots - k_{i_d}, \quad d \leqslant m - 1,$$

соответствующие фиксированным значениям $k_{i_1} < h_{i_1}, \dots, k_{i_d} < h_{i_d}$.

Число элементов каждого такого подмножества при $d \leqslant m - 2$ есть многочлен от N вида

$$\psi(N) = \frac{(N - k_{i_1} - \dots - k_{i_d} + m - d - 1)!}{(N - k_{i_1} - \dots - k_{i_d})!(m - d - 1)!} =$$

$$= \frac{(N - k_{i_1} - \dots - k_{i_d} + 1) \dots (N - k_{i_1} - \dots - k_{i_d} + m - d - 1)}{(m - d - 1)!},$$

причём ввиду сказанного перед леммой 17 $\deg \psi(N) = m - d - 1 \leqslant l - 1$. Согласно лемме 6 при $N \geqslant s(m-d)h - (m-d) + d(\varkappa_0 - 1) + 1$ этот многочлен удовлетворяет неравенству

$$\frac{\psi(N) - \psi(N-s)}{\psi(N)} \leqslant \frac{m-d-1}{(m-d)h} \leqslant \frac{l-1}{lh}.$$

В случае $d > m - 2$ это неравенство также справедливо.

Из леммы 13 получаем, что число элементов множества $A^{(1)} = B^{(1)}$ есть многочлен от N, удовлетворяющий неравенству (64).

Рассмотрим множество $A^{(i)},\ i \geqslant 2$. Оно разбивается на конечное число непересекающихся подмножеств вида

$$k_{i_{d+\mu+1}} + \dots + k_{i_m} = N - k_{i_1} - \dots - k_{i_{d+\mu}}, \quad k_{i_{d+\mu+1}} \geqslant \varkappa_0, \dots, k_{i_m} \geqslant \varkappa_0,$$

соответствующие фиксированным значениям $0 \leqslant \mu \leqslant m - d - 1$,

$$i_{d+1}, \dots, i_{d+\mu}, \quad k_{i_1} < h_{i_1}, \dots, k_{i_d} < h_{i_d},\ k_{i_{d+1}} < \varkappa_0, \dots, k_{i_{d+\mu}} < \varkappa_0,$$

подобранным так, чтобы соответствующее подмножество не принадлежало ни одному из $B^{(j)},\ j < i$.

Число элементов каждого такого подмножества есть многочлен от N вида

$$\frac{1}{(m-d-\mu-1)!}(N-k_{i_1}-\dots-k_{i_{d+\mu}}-(m-d-\mu)\varkappa_0+1)\dots$$
$$\dots(N-k_{i_1}-\dots-k_{i_{d+\mu}}-(m-d-\mu)\varkappa_0+m-d-\mu-1),$$

удовлетворяющий при

$$N\geqslant s(m-d-\mu)h-(m-d-\mu)+(\varkappa_0-1)(d+\mu)+\varkappa_0(m-d-\mu)+1$$

неравенству (64).

Отсюда ввиду леммы 13 получаем утверждение леммы 17.

Лемма 18. *Пусть выполнены условия леммы 14,* $N=slh+m(\varkappa_0-1)+1$, $h\geqslant 2$, $l\leqslant m-2$. *Тогда*

$$M<\frac{1}{(l-1)!}(2\varkappa_0)^{m-1}(smh)^{l-1}.$$

Доказательство. В силу свойств биномиальных коэффициентов (см., например, [18:1, п. 21.5-1])

$$\binom{m}{l}=\binom{m-1}{l-1}+\binom{m-1}{l}\leqslant 2^{m-1}.$$

Отсюда и леммы 15 в случае $\varkappa_0\geqslant 2$ имеем

$$M<\binom{m}{l}\varkappa_0^{m-l}\frac{(N+l-1)^{l-1}}{(l-1)!}<\frac{2^{m-1}\varkappa_0^{m-l}}{(l-1)!}(slh+m\varkappa_0)^{l-1}<$$
$$<\frac{2^{m-1}\varkappa_0^{m-l}(\varkappa_0 smh)^{l-1}}{(l-1)!}=\frac{(2\varkappa_0)^{m-1}(smh)^{l-1}}{(l-1)!}.$$

В случае $\varkappa_0=1$ величину M оценим сверху числом произведений степеней функций (0.4), у которых не менее $m-l$ показателей равны нулю. Из комбинаторных соображений получаем

$$M=\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}\binom{N-k+k-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}\binom{slh}{k-1}<$$
$$<\binom{slh}{l-1}\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}<\frac{(slh)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}<\frac{(smh)^{l-1}}{(l-1)!}\left(\frac{1}{m/l}\right)^{l-1}2^m,$$

откуда ввиду $(m/l)^{l-1} \geqslant (1+2/l)^{l-1} \geqslant 2$ следует утверждение леммы 18.

Если $l = m-1$, то лемма 18 справедлива при любом $h \in \mathbb{N}$. Действительно, в этом случае система минимальных уравнений (0.53) состоит только из одного уравнения

$$B = B(f_1(z), \ldots, f_m(z)) = 0,$$

где B — однородный неприводимый и примитивный многочлен степени k с коэффициентами из $\mathbb{K}[z]$. Заменяя в рассуждениях [36:12, гл. 12, §3] лемму 1 из [36:12, гл. 12] на лемму 6 настоящей диссертации, получим, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$M < \frac{k}{(m-2)!}(N+1)\ldots(N+m-2),$$

$$\frac{w}{M} < \frac{\psi(N)-\psi(N-s)}{\psi(N)}, \quad \psi(N) = (N+1)\ldots(N+m-1).$$

Полагая в лемме 6 $n = m-1$, убеждаемся, что при $\varkappa = m-1$, $N = [s(m-1)^2h/(m-2)] - m + 2$, выполняется неравенство (15) и имеет место оценка

$$M < \frac{k}{(m-2)!}\left(\frac{(m-1)^2}{m-2}sh\right)^{m-2} = \frac{k(m-1)^{2m-3}(m-2)^{2-m}}{(m-1)!}(sh)^{m-2}.$$

Согласно лемме 16 при

$$\ln\ln H \geqslant \sigma\gamma^m k^4 s^{4m-8}\ln(s+1)\max(1, \deg B_z, \ln\overline{|B|})$$

мы находимся в условиях леммы 12.

В случае $l \leqslant m-1$ неравенство (15) согласно лемме 17 выполняется при $N = slh + m(\varkappa_0 - 1) + 1$, $\varkappa = l$. Поэтому ввиду лемм 16 и 18 при

$$\ln\ln H \geqslant \sigma\gamma^m m^{4l}\varkappa_0^{4m-4}\ln(\varkappa_0+1)\Omega_0^{2m}s^{4l-4}\ln(s+1)\max(1, \lambda_0, \ln\tau_0),$$

$h \geqslant 2$, мы также находимся в условиях леммы 12.

Далее рассуждаем как при доказательстве теорем 26 и 26$'$.

Наконец, при $h = 1$ теорема 28 вытекает непосредственно из неравенства (41), если положить $N = s$, а M ввиду леммы 15 оценить как

$$M < \varkappa_0^{m-l}\binom{m}{l}\frac{(s+1)\ldots(s+l-1)}{(l-1)!} < \varkappa_0^{m-l}2^{m-1}ls^{l-1}.$$

Этот случай исследовался также в работе Нгуен Тьен Тая [25:1].

Теоремы 28 и 28′ доказаны.

§4. О неприводимости произведений степеней решений систем линейных дифференциальных уравнений

Следующая лемма обобщает утверждения о неприводимости произведений степеней аналитических функций, доказанные Ю.Н. Макаровым в работе [23:2].

Лемма 19. *Пусть $r, p \in \mathbb{Z}^+$, $r + p \geqslant 1$ и каждая из r совокупностей функций (0.49) составляет решение соответствующей системы линейных однородных дифференциальных уравнений (0.50), а каждая из p совокупностей функций (0.51) — решение соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений (0.52). Пусть $\|y_{k,t,l}\|_{k,t}$ и $\|u_{i,s,j}\|_{i,s}$ — фундаментальные матрицы, соответственно, систем (0.50) и систем однородных дифференциальных уравнений, соответствующих системам (0.52), $W_l = |y_{k,t,l}|_{k,t}$, $l = 1, \ldots, r$, $\tilde{W}_j = |u_{i,s,j}|_{i,s}$, $j = 1, \ldots, p$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z, W_l, \ldots, W_r, \tilde{W}_l, \ldots, \tilde{W}_p)$, а степень трансцендентности над полем $\mathbb{F}$ функций*

$$y_{k,t,l}, u_{i,s,j}, \psi_{i,j}, \tag{65}$$

$$l = 1, \ldots, r;\ k, t = 1, \ldots, m_l;\ j = 1, \ldots, p;\ i, s = 1, \ldots, \mu_j$$

равна

$$\sum_{l=1}^{r} m_l^2 + \sum_{j=1}^{p} (\mu_j^2 + \mu_j) - r - p. \tag{66}$$

Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ совокупность произведений степеней

$$\left(\prod_{l=1}^{r} \varphi_{1,l}^{n_{1,l}} \ldots \varphi_{m_l,l}^{n_{m_l,l}}\right) \prod_{j=1}^{p} \psi_{1,j}^{l_{1,j}} \ldots \psi_{\mu_j,j}^{l_{\mu_j,j}},$$

$$n_{k,l}, l_{i,j} \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_l} n_{k,l} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_j} l_{i,j} \leqslant N \tag{67}$$

образует неприводимую систему функций.

Доказательство. Общие решения систем дифференциальных уравнений (0.50) и (0.52) имеют вид:

$$y_{k,l} = \sum_{t=1}^{m_l} c_{t,l} y_{k,t,l},\ l = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, m_l, \tag{68}$$

$$u_{i,j} = \psi_{i,j} + \sum_{s=1}^{\mu_j} \tilde{c}_{s,j} u_{i,s,j},\ j = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, \mu_j, \tag{69}$$

где $c_{t,l},\ \tilde{c}_{s,j}$ — произвольные постоянные.

Пусть

$$\begin{gathered} \bar{n} = (n_{1,1}, \ldots, n_{m_1,1}, \ldots, n_{1,r}, \ldots, n_{m_r,r}), \\ \bar{l} = (l_{1,1}, \ldots, l_{\mu_1,1}, \ldots, l_{1,p}, \ldots, l_{\mu_p,p}). \end{gathered} \tag{70}$$

Рассмотрим совокупность произведений степеней функций (68), (69) вида

$$V_{\bar{n},\bar{l}} = \left(\prod_{l=1}^{r} y_{1,l}^{n_{1,l}} \ldots y_{m_l,l}^{n_{m_l,l}} \right) \prod_{j=1}^{p} u_{1,j}^{l_{1,j}} \ldots u_{\mu_j,j}^{l_{\mu_j,j}},$$

где $\bar{n},\ \bar{l}$ — наборы (70) с условием (67). Эта совокупность, очевидно, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$V'_{\bar{n},\bar{l}} = \sum_{\bar{\tau},\bar{\sigma}} Q_{\bar{\tau},\bar{\sigma},\bar{n},\bar{l}} V_{\bar{\tau},\bar{\sigma}}, \quad Q_{\bar{\tau},\bar{\sigma},\bar{n},\bar{l}} \in \mathbb{C}(z), \tag{71}$$

где суммирование происходит по всем наборам $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$ вида (70) с условием (67).

Определим функции

$$V_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}} = V_{n_{1,1},\ldots,n_{m_r,r},l_{1,1},\ldots,l_{\mu_p,p},\rho_{1,1},\ldots,\rho_{m_r,r},\nu_{1,1},\ldots,\nu_{\mu_p,p}}, \tag{72}$$

где наборы $\bar{n},\ \bar{l}$ и $\bar{\rho},\ \bar{\nu}$ имеют вид (70) и удовлетворяют условию (67), следующим образом:

1) если

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m_l} \rho_{k,l} - \sum_{k=1}^{m_l} n_{k,l} = 0, \quad l = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i=1}^{\mu_j} \nu_{i,j} - \sum_{k=1}^{\mu_j} l_{i,j} \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p, \end{gathered} \tag{73}$$

то положим тождественно по переменным

$$c_{1,1}, \ldots, c_{m_1,1}, \ldots, c_{1,r}, \ldots, c_{m_r,r}, \tilde{c}_{1,1}, \ldots, \tilde{c}_{\mu_1,1}, \ldots, \tilde{c}_{1,p}, \ldots, \tilde{c}_{\mu_p,p} \tag{74}$$

$$V_{\bar{n},\bar{l}} = \left(\prod_{l=1}^{r} \prod_{k=1}^{m_l} \left(\sum_{t=1}^{m_l} c_{t,l} y_{k,t,l} \right)^{n_{k,l}} \right) \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\mu_j} \left(\psi_{i,j} + \sum_{s=1}^{\mu_j} \tilde{c}_{s,j} u_{i,s,j} \right)^{l_{i,j}} =$$

$$= \sum_{\bar\rho,\bar\nu} c_{1,1}^{\rho_{1,1}} \dots c_{m_1,1}^{\rho_{m_1,1}} \dots c_{1,r}^{\rho_{1,r}} \dots c_{m_r,r}^{\rho_{m_r,r}} \tilde c_{1,1}^{\nu_{1,1}} \dots \tilde c_{\mu_1,1}^{\nu_{\mu_1,1}} \dots \tilde c_{1,p}^{\nu_{1,p}} \dots \tilde c_{\mu_p,p}^{\nu_{\mu_p,p}} V_{\bar n,\bar l;\bar\rho,\bar\nu}, \tag{75}$$

где суммирование в правой части равенства (75) производится по всем наборам $\bar\rho$, $\bar\nu$ вида (70), удовлетворяющим условиям (67), (73);

2) если набор индексов $\bar n$, $\bar l$, $\bar\rho$, $\bar\nu$ не удовлетворяет условиям (73), то соответствующую функцию (72) считаем равной нулю.

Легко убедиться, что при фиксированных наборах $\bar\rho$, $\bar\nu$ функции $V_{\bar n,\bar l;\bar\rho,\bar\nu}$ (72) составляют решение системы (71). Для этого достаточно все функции $V_{\bar n,\bar l}$, $V_{\bar\tau,\bar\sigma}$, входящие в систему (71), заменить на правые части уравнений (75), а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменных (74).

Докажем, что функции (72) образуют фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений (71). Для этого достаточно установить, что найденные решения линейно независимы над $\mathbb{C}$.

Допустим, что существует набор отличных в совокупности от нуля чисел $d_{\bar\rho,\bar\nu} \in \mathbb{C}$, где $\bar\rho, \bar\nu$ пробегают все возможные наборы вида (70) с условием (67), такой, что для всех наборов $\bar n, \bar l$ (70) с условием (67) тождественно по z выполняется равенство

$$\sum_{\bar\rho,\bar\nu} d_{\bar\rho,\bar\nu} V_{\bar n,\bar l;\bar\rho,\bar\nu} = 0. \tag{76}$$

Пусть $N_1 \leqslant N$ — максимальное число такое, что существуют наборы $\bar\rho, \bar\nu$ с условием

$$d_{\bar\rho,\bar\nu} \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{m_1} \rho_{k,1} = N_1.$$

Пусть $N_2 \leqslant N$ — максимальное число такое, что существуют наборы $\bar\rho, \bar\nu$ с условием

$$d_{\bar\rho,\bar\nu} \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{m_1} \rho_{k,1} = N_1, \quad \sum_{k=1}^{m_2} \rho_{k,2} = N_2.$$

Рассуждая таким образом, определим $r+p$ чисел $N_1, \dots, N_r, N_1', \dots, N_p'$. Тогда из равенства (76) следует

$$\sum_{\bar\rho,\bar\nu} d_{\bar\rho,\bar\nu} V_{N_1,0,\dots,0,\dots,N_r,0,\dots,0,N_1',\dots,0,\dots,N_p',0,\dots,0;\bar\rho,\bar\nu} = 0. \tag{77}$$

где суммирование производится по всем наборам $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$ таким, что

$$\sum_{k=1}^{m_l} \rho_{k,l} = N_l, \quad \sum_{i=1}^{\mu_j} \nu_{i,j} = N'_j, \quad l = 1, \dots, r; \ j = 1, \dots, p.$$

Согласно равенству (75),

$$V_{N_1,0,\dots,0,\dots,N_r,0,\dots,0,N'_1,\dots,0,\dots,N'_p,0,\dots,0;\bar{\rho},\bar{\nu}} =$$

$$= \left(\left(\prod_{l=1}^{r} \prod_{k=1}^{m_l} \rho_{k,l}! \right) \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\mu_j} \nu_{i,j}! \right)^{-1} \frac{\partial^{\rho_{1,1}}}{\partial c_{1,1}^{\rho_{1,1}}} \cdots \frac{\partial^{\rho_{m_r,r}}}{\partial c_{m_r,r}^{\rho_{m_r,r}}} \cdot \frac{\partial^{\nu_{1,1}}}{\partial \tilde{c}_{1,1}^{\nu_{1,1}}} \cdots \frac{\partial^{\nu_{\mu_p,p}}}{\partial \tilde{c}_{\mu_p,p}^{\nu_{\mu_p,p}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{l=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{m_l} c_{t,l} y_{1,t,l} \right)^{N_l} \right) \prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{\mu_j} \tilde{c}_{s,j} u_{1,s,j} \right)^{N'_j} = \tag{78}$$

$$= \frac{\left(\prod_{l=1}^{r} N_l!\right) \prod_{j=1}^{p} N'_j!}{\left(\prod_{l=1}^{r} \prod_{k=1}^{m_l} \rho_{k,l}!\right) \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\mu_j} \nu_{i,j}!} y_{1,1,1}^{\rho_{1,1}} \cdots y_{1,m_1,1}^{\rho_{m_1,1}} \cdots y_{1,1,r}^{\rho_{1,r}} \cdots y_{1,m_r,r}^{\rho_{m_r,r}} \cdot$$

$$\cdot u_{1,1,1}^{\nu_{1,1}} \cdots u_{1,\mu_1,1}^{\nu_{\mu_1,1}} \cdots u_{1,1,p}^{\nu_{1,p}} \cdots u_{1,\mu_p,p}^{\nu_{\mu_p,p}}.$$

Пусть

$$\delta_l = \exp \int \sum_{k=1}^{m_l} Q_{k,k,l}\, dz, \quad l = 1, \dots, r,$$

$$\tilde{\delta}_j = \exp \int \sum_{i=1}^{\mu_j} q_{i,i,j}\, dz, \quad j = 1, \dots, p,$$

где интеграл означает фиксированную первообразную для подынтегральной функции. Согласно формулам Лиувилля

$$|y_{k,t,l}|_{k,t} = W_l = \gamma_l \delta_l, \quad |y_{i,s,j}|_{i,s} = \tilde{W}_j = \tilde{\gamma}_j \tilde{\delta}_j, \tag{79}$$

где $\gamma_l, \tilde{\gamma}_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Подставив выражения (78) в равенство (77), получим нетривиальное алгебраическое уравнение над $\mathbb{C}$ между функциями

$$y_{1,t,l}, u_{1,s,j}, \quad l = 1, \dots, r; \ t = 1, \dots, m_l; \ j = 1, \dots, p; \ s = 1, \dots, \mu_j.$$

Но поскольку степень трансцендентности функций (65) над полем $\mathbb{F}$ равна величине (66), то, исключая $r + p$ функций $y_{m_l,1,l}$, $u_{\mu_j,1,j}$ с помощью формул (79) из совокупности (65), заключаем, что остальные функции алгебраически независимы над $\mathbb{F}$. Полученное противоречие доказывает, что совокупность функций (72) образует фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений (71).

Пусть наборы $\bar{n}$, $\bar{l}$ и $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$ имеют вид (70) и удовлетворяют условиям (67), (73). Докажем, что равенство

$$P = \sum F_{\bar{n},\bar{l}} c_{\bar{\rho},\bar{\nu}} V_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}} = 0, \ F_{\bar{n},\bar{l}} \in \mathbb{C}[z], \ c_{\bar{\rho},\bar{\nu}} \in \mathbb{C}, \tag{80}$$

где суммирование производится по всем наборам $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{n}$, $\bar{l}$, выполняется тогда и только тогда, когда для всех таких наборов

$$F_{\bar{n},\bar{l}} c_{\bar{\rho},\bar{\nu}} = 0 \tag{81}$$

тождественно по z. Из этого будет следовать утверждение леммы.

Обозначим $v_l = W_l, \ \tilde{v}_j = \tilde{W}_j$,

$$x_l = \begin{vmatrix} y_{2,2,l} & \dots & y_{2,m_l,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{m_l,2,l} & \dots & y_{m_l,m_l,l} \end{vmatrix}, \qquad z_j = \begin{vmatrix} u_{2,2,j} & \dots & u_{2,\mu_j,j} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{\mu_j,2,j} & \dots & u_{\mu_j,\mu_j,j} \end{vmatrix},$$

$$l = 1, \dots, r; \ \ j = 1, \dots, p.$$

Будем рассматривать $v_l, x_l, \tilde{v}_j, z_j$ как многочлены от переменных

$$y_{k,t,l}, u_{i,s,j}, \tag{82}$$

$$l = 1, \dots, r; \ k, t = 1, \dots, m_l; \ j = 1, \dots, p; \ i, s = 1, \dots, \mu_j.$$

Заметив, что P есть многочлен от переменных (65), докажем, что тождественно по этим переменным выполняется равенство

$$x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} z_1^{l_1} \dots z_p^{l_p} P \equiv \sum_{l=1}^{r} (v_l - \gamma_l \delta_l) P_l + \sum_{j=1}^{p} (\tilde{v}_j - \tilde{\gamma}_j \tilde{\delta}_j) \tilde{P}_j, \tag{83}$$

где $n_1, \dots, n_r, l_1, \dots, l_p \in \mathbb{Z}^+$, а P_l, $\tilde{P}_j$ — многочлены от переменных (65) с коэффициентами из $\mathbb{F}$.

Если многочлен P не зависит от переменной $y_{1,1,1}$, то положим в равенстве (83) $n_1 = 0$ и $P_1 \equiv 0$. Если степень P по $y_{1,1,1}$ равна $n \geqslant 1$, то многочлен P имеет вид

$$P = y_{1,1,1}^n R_n + \dots + y_{1,1,1} R_1 + R_0,$$

где R_i — многочлены от остальных переменных (65). Вычитая из x_1P многочлен $(v_1-\gamma_1\delta_1)y_{1,1,1}^{n-1}R_n$, получим многочлен, имеющий степень по $y_{1,1,1}$ не выше $n-1$. Повторив эту операцию не более n раз, получим равенство

$$x_1^{n_1}P-(v_1-\gamma_1\delta_1)R=S,$$

где R и S — многочлены от переменных (65), причём S не зависит от $y_{1,1,1}$.

Аналогично, исключая переменные $y_{1,1,2},\dots,y_{1,1,r},u_{1,1,1},\dots,u_{1,1,p}$, приходим к равенству

$$x_1^{n_1}\dots x_r^{n_r}z_1^{l_1}\dots z_p^{l_p}P-\sum_{l=1}^{r}(v_l-\gamma_l\delta_l)P_l-\sum_{j=1}^{p}(\tilde v_j-\tilde\gamma_j\tilde\delta_j)\tilde P_j=P_0, \quad (84)$$

в котором многочлен P_{l+1} не зависит от переменных $y_{1,1,1},\dots,y_{1,1,l}$, $l=1,\dots,r-1$, многочлен $\tilde P_{j+1}$ не зависит от переменных $y_{1,1,1},\dots,y_{1,1,r}$ и $u_{1,1,1},\dots,u_{1,1,j}$, $j=1,\dots,p-1$, а многочлен P_0 не зависит от переменных $y_{1,1,1},\dots,y_{1,1,r},u_{1,1,1},\dots,u_{1,1,p}$. Заменим в равенстве (84) переменные (65) на соответствующие функции из решений уравнений (0.50) и (0.52). Тогда ввиду равенств (79) и (80) получаем, что левая часть равенства (84) есть функция, тождественно равная нулю по z, а правая — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{F}$ от алгебраически независимых над $\mathbb{F}$ функций. Следовательно, $P_0=0$ тождественно по переменным (65), что и доказывает тождество (83).

Рассмотрим совокупность P° однородных по переменным (82) членов многочлена P старшей степени $N_0\leqslant N$. Они соответствуют максимальному значению суммы

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_l}\rho_{k,l}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_j}\nu_{i,j}=N_0\leqslant N. \quad (85)$$

Из (83) следует, что тождественно по переменным (65)

$$x_1^{n_1}\dots x_r^{n_r}z_1^{l_1}\dots z_p^{l_p}P^\circ=\sum_{l=1}^{r}v_lP_l^\circ+\sum_{j=1}^{p}\tilde v_j\tilde P_j^\circ, \quad (86)$$

где P_l°, $\tilde P_j^\circ$ — многочлены, однородные по переменным (82).

Введём в рассмотрение новые переменные

$$\mu_{k,l},\lambda_{k,l},\tilde\mu_{i,j},\tilde\lambda_{i,j}, \quad (87)$$

$$l=1,\dots,r;\ k=1,\dots,m_l;\ j=1,\dots,p;\ i=1,\dots,\mu_j.$$

Пользуясь тождественностью соотношения (86), положим в нём

$$y_{k,t,l}=\mu_{k,l}\lambda_{t,l},\quad l=1,\dots,r;\ k=1,\dots,m_l;\ t=1,2,$$

$$u_{i,s,j}=\tilde{\mu}_{i,j}\tilde{\lambda}_{s,j},\quad j=1,\dots,p;\ i=1,\dots,\mu_j;\ s=1,2,$$

а остальные переменные (82) оставим без изменения. После такой замены переменных все определители $v_l,\tilde{v}_j,\ l=1,\dots,r;\ j=1,\dots,p$, входящие в тождество (86), будут равны нулю, так как первые два столбца в них пропорциональны, а каждый из определителей $x_l,z_j,\ l=1,\dots,r;\ j=1,\dots,p$ отличен от нуля. Следовательно, тождественно по переменным (65) и (87)

$$P^\circ=0 \tag{88}$$

Заменим в тождестве (88) остальные переменные (82):

$$y_{k,t,l}=\mu_{k,l}\lambda_{t,l},\quad l=1,\dots,r;\ k=1,\dots,m_l;\ t=3,\dots,m_l;$$

$$u_{i,s,j}=\tilde{\mu}_{i,j}\tilde{\lambda}_{s,j},\quad j=1,\dots,p;\ i=1,\dots,\mu_j;\ s=3,\dots,\mu_j.$$

При этом многочлен P° превратится в многочлен Q от переменных (87) и $\psi_{i,j}$, все коэффициенты которого согласно тождеству (88) равны нулю. Докажем, что это возможно лишь при выполнении условий (81).

Действительно, так как левая часть тождества (75) равна

$$\left(\prod_{l=1}^{r}\prod_{k=1}^{m_l}\mu_{k,l}^{n_{k,l}}\left(\sum_{t=1}^{m_l}c_{t,l}\lambda_{t,l}\right)^{n_{k,l}}\right)\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{\mu_j}\left(\psi_{i,j}+\tilde{\mu}_{i,j}\sum_{s=1}^{\mu_j}\tilde{c}_{s,j}\tilde{\lambda}_{s,j}\right)^{l_{i,j}},$$

то из этого тождества получаем, что совокупность однородных членов старшей степени многочлена $V_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}}$ по переменным (82) равна

$$V^\circ_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}}=\left(\prod_{l=1}^{r}\frac{(\sum_{k=1}^{m_l}n_{k,l})!}{\prod_{k=1}^{m_l}\rho_{k,l}!}\right)\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{(\sum_{i=1}^{\mu_j}l_{i,j})!}{\prod_{i=1}^{\mu_j}\nu_{i,j}!}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{l=1}^{r}\prod_{k=1}^{m_l}\mu_{k,l}^{n_{k,l}}\lambda_{k,l}^{\rho_{k,l}}\right)\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{\mu_j}\tilde{\mu}_{i,j}^{l_{i,j}}\tilde{\lambda}_{i,j}^{\nu_{i,j}}.$$

Из этого и равенств (80), (88) следует, что тождественно по переменным (87)

$$Q=\sum F_{\bar{n},\bar{l}}c_{\bar{\rho},\bar{\nu}}V^\circ_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}}=\sum F_{\bar{n},\bar{l}}c_{\bar{\rho},\bar{\nu}}\omega_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}}. \tag{89}$$

$$\cdot\left(\prod_{l=1}^{r}\prod_{k=1}^{m_l}\mu_{k,l}^{n_{k,l}}\lambda_{k,l}^{\rho_{k,l}}\right)\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{\mu_j}\tilde{\mu}_{i,j}^{l_{i,j}}\tilde{\lambda}_{i,j}^{\nu_{i,j}}=0,\quad \omega_{\bar{n},\bar{l};\bar{\rho},\bar{\nu}}\neq 0,$$

где суммирование производится по всевозможным наборам $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$, $\bar{n}$, $\bar{l}$ вида (70), удовлетворяющим условиям (67), (73), (85). Поскольку различным наборам $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$, $\bar{n}$, $\bar{l}$ в тождестве (89) соответствуют различные произведения степеней переменных (87), то из тождества (89) следуют равенства (81) и лемма 19 доказана.

Пусть аналитические функции (0.49) составляют решения систем (0.50), а $\|y_{k,t,l}\|_{k,t}$ — фундаментальные матрицы систем (0.50). Для любого $N\in\mathbb{N}$ рассмотрим совокупность произведений степеней

$$V_{\bar{n}}=V_{n_{1,1},\dots,n_{m_1,1},\dots,n_{1,r},\dots,n_{m_r,r}}=\varphi_{1,1}^{n_{1,1}}\dots\varphi_{m_1,1}^{n_{m_1,1}}\dots\varphi_{1,r}^{n_{1,r}}\dots\varphi_{m_r,r}^{n_{m_r,r}},$$
$$n_{k,l}\in\mathbb{Z}^+,\quad \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_l}n_{k,l}\leqslant N. \tag{90}$$

Функции $V_{\bar{n}}$ удовлетворяют, очевидно, системе линейных дифференциальных уравнений

$$V_{\bar{n}}'=\sum_{\bar{\tau}}Q_{\bar{\tau},\bar{n}}V_{\bar{\tau}},\quad Q_{\bar{\tau},\bar{n}}\in\mathbb{C}(z), \tag{91}$$

где $\bar{\tau},\bar{n}$ пробегают все наборы с условием (90).

Лемма 20 [26:2, лемма 19]. *Элементы любой фундаментальной матрицы системы (91) являются многочленами от функций $y_{k,t,l}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$.*

Лемма 21. *Пусть для любого $N\in\mathbb{N}$ совокупность произведений степеней (90) образует неприводимую систему функций, а функции $e^{\alpha_1 z},\dots,e^{\alpha_p z}$, где $\alpha_i\in\mathbb{C}$, линейно независимы над полем $\mathbb{F}_1=\mathbb{C}(z,y_{1,1,1},\dots,y_{m_1,m_1,1},\dots,y_{m_r,m_r,r})$. Тогда для любого $N\in\mathbb{N}$ совокупность функций*

$$V_{i,\bar{n}}=e^{\alpha_i z}V_{\bar{n}},$$

где $i=1,\dots,p$, а $\bar{n}$ пробегает все наборы с условием (90), также образует неприводимую систему.

Доказательство. Обозначим $\|V_{\bar{n},\bar{\rho}}\|_{\bar{n},\bar{\rho}}$ фундаментальную матрицу системы дифференциальных уравнений (91). Все функции $V_{\bar{n},\bar{\rho}}$ согласно лемме 20 принадлежат полю $\mathbb{F}_1$. Тогда функции $V_{i,\bar{n}}$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$V'_{i,\bar{n}} = \alpha_i V_{i,\bar{n}} + \sum_{\bar{\tau}} Q_{\bar{\tau},\bar{n}} V_{i,\bar{\tau}},$$

а матрица $\|e^{\alpha_i z} V_{\bar{n},\bar{\rho}}\|_{i,\bar{n};i,\bar{\rho}}$ является, очевидно, фундаментальной матрицей этой системы.

Пусть $F_{i,\bar{n}} \in \mathbb{C}[z]$, $c_{i,\bar{\rho}} \in \mathbb{C}$ и имеет место равенство

$$\sum_{i,\bar{n}} F_{i,\bar{n}} \left(\sum_{\bar{\rho}} c_{i,\bar{\rho}} e^{\alpha_i z} V_{\bar{n},\bar{\rho}} \right) \equiv 0. \tag{92}$$

Поскольку функции $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_p z}$ линейно независимы над полем $\mathbb{F}_1$, то из равенства (92) следует

$$\sum_{\bar{n}} F_{i,\bar{n}} \left(\sum_{\bar{\rho}} c_{i,\bar{\rho}} V_{\bar{n},\bar{\rho}} \right) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

а так как функции $V_{\bar{n}}$ образуют неприводимую систему, то из этих равенств для всех i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и наборов $\bar{n}$ с условием (90) имеем

$$F_{i,\bar{n}} \left(\sum_{\bar{\rho}} c_{i,\bar{\rho}} V_{\bar{n},\bar{\rho}} \right) \equiv 0.$$

Следовательно, равенство (92) возможно лишь в случае, когда

$$F_{i,\bar{n}} \left(\sum_{\bar{\rho}} c_{i,\bar{\rho}} e^{\alpha_i z} V_{\bar{n},\bar{\rho}} \right) = 0$$

тождественно по z, что и доказывает лемму 21.

§5. Доказательство теоремы 29

Лемма 22. *Пусть $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\nu = \operatorname{den} \alpha$,*

$$C_\omega = \begin{cases} \sqrt{-\frac{2[\omega]}{\|\omega\|}}, & \text{если } \omega < 0, \\ 1, & \text{если } \omega \geqslant 0, \end{cases}$$

где $-\omega \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\|\omega\|$ — расстояние от ω до ближайшего целого числа. Тогда функция $K_\lambda(\alpha z)$ является $\mathbb{K}E$-функцией, удовлетворяющей определению 3, в котором

$$c = \max(\overline{|\alpha|} C_\lambda,\ 2\nu e^{|a|+b}).$$

Доказательство. Пусть $\omega = \omega_1/\omega_2,\ \omega_1 \in \mathbb{Z},\ \omega_2 \in \mathbb{N},\ (\omega_1, \omega_2) = 1$. Обозначим

$$S_{\omega,n} = \frac{n!}{(\omega+1)\dots(\omega+n)}.$$

Запишем ряд Тейлора функции $K_\lambda(\alpha z)$ в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{z^k}{k!}.$$

Тогда

$$d_k = \begin{cases} S_{\lambda,n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^n, & \text{\textit{если}}\ \ k = 2n,\ n = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

При доказательстве леммы 5 работы [28:2] установлено, что $|S_{\omega,n}| \leqslant (C_\omega)^{2n}$ и существует последовательность $\{q_n\},\ \ q_n \in \mathbb{N}$, такая, что $q_n S_{\omega,k} \in \mathbb{Z},\ \ k = 0, 1, \dots, n,\ \ \ln q_n \leqslant 2n(|\omega_1| + \omega_2)$. Поскольку

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n} < 2^{2n}, \quad \frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{Z},$$

лемма 22 доказана.

Функция $K_{\lambda_j}(\xi_j z)$, как следует из (0.1), является решением дифференциального уравнения

$$y_j'' + \frac{2\lambda_j + 1}{z} y_j' + \xi_j^2 y_j = 0. \tag{93}$$

Лемма 23 (см. [36:12, гл. 9, лемма 10] или доказательство теоремы 17). *Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ и линейно независимы над $\mathbb{Q}$; $-\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N},\ \xi_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \lambda_j + 1/2 \notin \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n$; если $\xi_i^2 = \xi_j^2$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\lambda_i \pm \lambda_j \notin \mathbb{Z}$; $n, p \in \mathbb{N}$; $y_{j,1}$ и $y_{j,2}$ — любые линейно независимые решения соответствующих дифференциальных уравнений (93). Тогда функции*

$$y_{j,1}, y_{j,1}', y_{j,2}, e^{\alpha_i z}, \quad i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, n$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Из лемм 19, 21 и 23 следует

Лемма 24. *При условиях теоремы 29 для любого* $N \in \mathbb{N}$ *совокупность произведений*

$$e^{\alpha_i z} \prod_{j=1}^{r} K_{\lambda_j}^{k_j}(\xi_j z) \left(K'_{\lambda_j}(\xi_j z) \right)^{k'_j}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$k_j, k'_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{j=1}^{r} (k_j + k'_j) \leqslant N$$

образует неприводимую систему функций.

Пусть $\alpha \in \mathbb{K}$, $\nu = \operatorname{den} \alpha$. Тогда функция $e^{\alpha z}$ является, очевидно, $\mathbb{K}$E-функцией, удовлетворяющей определению 3, в котором $c = \max(\overline{|\alpha|},\ \nu)$. Теорема 29 при $r = 1$ следует из лемм 22, 24 и теоремы 26$'$, а при $r \geqslant 2$ — из тех же лемм и теоремы 27$'$, где полагаем $r = 1,\ m_1 = r,\ s_1 = 1,\ p = 1,\ \mu_1 = 2n,\ \nu_1 = s,\ m = 2n + r$.

Заключение

В диссертации получены следующие научные результаты.

1. Метод Зигеля впервые применён к исследованию арифметической природы значений E-функций в особых точках систем дифференциальных уравнений.

2. Впервые получен эффективный аналог теоремы II А.Б. Шидловского.

3. Для случая линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка доказана гипотеза Зигеля.

4. Гипотеза Зигеля доказана также для некоторых важных случаев линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка. В общем случае линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка приведены аргументы в пользу того, что гипотеза Зигеля не выполняется и схема возможного доказательства этого утверждения.

5. Доказана равносильность определений E-функции в узком и широком смысле для случая E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка.

6. Полностью решён вопрос об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ множества всех гипергеометрических E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка, а также о возможных алгебраических связях между ними.

7. Получены теоремы общего характера с необходимыми и достаточными условиями об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ решений произвольных совокупностей гипергеометрических уравнений различных порядков. Эти теоремы охватывают "почти все" гипергеометрические уравнения за исключением тех, наборы параметров которых могут быть представлены точками некоторых определённых алгебраических подмногообразий малых размерностей.

8. Найдено значительное количество новых алгебраических тождеств, связывающих гипергеометрические функции.

9. Получены новые оценки многочленов от значений E-функций.

Литература

1. Айнс Э.Л.
   1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939.
2. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.
   1. Геометрия. – М: Наука, 1990.
3. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж.
   1. Специальные функции. – М: МЦНМО, 2013.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А.
   1. Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1965.
5. Белогривов И.И.
   1. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1967. – № 2. – С. 55 – 62.
   2. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // Матем. сборник. – 1970. – Т. 82 (124), № 3 (7). – С. 387 – 408.
   3. О трансцендентности и алгебраической независимости значений функций Куммера // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12, № 5. – С. 961 – 982.
   4. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса // Сибирский математический журнал. – 1973. – Т. 14, № 1. – С. 16 – 35.
6. Валирон Ж.
   1. Аналитические функции. – М: Гостехиздат, 1957.
7. Ван дер Варден.
   1. Современная алгебра. – М: Гостехиздат, 1947.
8. Вискина Г.Г., Салихов В.Х.
   1. Алгебраические соотношения между гипергеометрической E-функцией и её производными // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 6. – С. 832 – 844.
9. Виттих Г.
   1. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М: ФМ, 1960.
10. Галочкин А.И.
   1. Оценка меры взаимной трансцендентности значений E-функций // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, вып. 4. – С. 377 – 386.

2. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, вып. 1. – С. 3 – 14.
3. Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E-функций // Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, вып. 1. – С. 305 – 309.
4. О некотором варианте принципа переноса // Тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы теории чисел". – Тула. – 1993. – С. 33.

11. Гельфонд А.О.
   1. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières. – Tôhoku Math. J. – 1929. – V. 30, № 3, 4. – P. 280 – 285.
   2. Sur les nombres transcendantes // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1929. – V. 189. – P. 1224 – 1228.
   3. О седьмой проблеме Гильберта // ДАН СССР. – 1934. – Т. 2, № 1. – С. 1 – 6.
   4. Трансцендентные и алгебраические числа. – М: Гостехиздат, 1952.
12. Голубев В.В.
   1. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М-Л: Гостехиздат, 1950.
13. Диткин В.А., Прудников А.П.
   1. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М: ФМ, 1961.
14. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.
   1. Компьютерная алгебра. – М: Мир, 1991.
15. Казаков В.В.
   1. О линейной неприводимости одного вида линейных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, вып. 1. – С. 48 – 56.
16. Камке Э.
   1. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Наука, 1971.
17. Капланский И.
   1. Введение в дифференциальную алгебру. – М: ИЛ, 1959.
18. Корн Г., Корн Т.

1. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М: Наука, 1984.

19. Кратцер А., Франц В.
   1. Трансцендентные функции. – М: ИЛ, 1963.
20. Кузьмин Р.О.
   1. Об одном новом классе трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1930. – Т. 3. – С. 583 – 597.
21. Кулагин В.А.
   1. Об алгебраической независимости значений одного подкласса целых функций // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, вып. 6. – С. 46 – 51.
   2. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических функций одного класса // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, вып. 3. – С. 402 – 414.
22. Люк Ю.
   1. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М: Мир, 1980.
23. Макаров Ю.Н.
   1. Об оценках мер линейной независимости значений E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1978. – № 2. – С. 3 – 12.
   2. Об эффективных оценках мер взаимной трансцендентности значений некоторых классов E-функций // Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 2223 – 80.
24. Маркус М., Минк Х.
   1. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М: Наука, 1972.
25. Нгуен Тьен Тай.
   1. Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и приложении их к оценкам меры взаимной трансцендентности значений E-функций // Матем. сборник. – 1983. – Т. 120, № 1. – С. 112 – 142.
26. Нестеренко Ю.В.
   1. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, вып. 5. – С. 587 – 598.

2. Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – Т. 41, № 2. – С. 253 – 284.
3. Эффективные оценки меры алгебраической независимости значений E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1988. – № 4. – С. 85 – 88.
4. Приближения Эрмита–Паде обобщённых гипергеометрических функций // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 10. – С. 39 – 72.

27. Олейников В.А.
1. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1962. – № 6. – С. 34 – 38.
2. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, № 1. – С. 63 – 92.

28. Салихов В.Х.
1. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13, вып. 1. – С. 29 – 40.
2. Об оценках мер линейной независимости и трансцендентности значений некоторых E-функций в рациональных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1978. – № 3. – С. 9 – 18.
3. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Труды Моск. матем. общества. – 1988. – Т. 51. – С. 223 – 256.
4. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arith. – 1990. – V. 53, № 5 – P. 453 – 471.
5. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E-функций // Матем. сборник. – 1990. – Т. 181, № 2. – С. 189 – 211.
6. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (чётный случай) // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64, вып. 2. – С. 273 – 284.

29. Сансоне Дж.
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: ИЛ, 1953.

30. Спринджук В.Г.

1. Иррациональность значений некоторых трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, № 1. – С. 93 – 107.

31. Стрелиц Ш.И.

1. О росте решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сборник. – 1958. – Т. 46, № 4. – С. 433 – 450.

32. Тыртышников Е.Е.

1. Основы алгебры. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2017.

33. Фельдман Н.И.

1. Приближения алгебраических чисел. – М: Изд-во МГУ, 1981.
2. Седьмая проблема Гильберта. – М: Изд-во МГУ, 1982.

34. Черепнёв М.А.

1. Об алгебраической независимости некоторых подклассов гипергеометрических функций // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1, С. 117 – 129.
2. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, вып. 6, С. 896 – 912.

35. Чирский В.Г.

1. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, вып. 1. – С. 83 – 94.

36. Шидловский А.Б.

1. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. – 1954. – Т. 96, № 4. – С. 697 – 700.
2. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций // ДАН СССР. – 1955. – Т. 100, № 2. – С. 221 – 224.
3. О новом критерии трансцендентности и алгебраической независимости значений одного класса целых функций // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106, № 3. – С. 399 – 400.
4. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // Учён. зап. МГУ. – 1959. –

Вып. 186. Мат. 9. – С. 11 – 70.

5. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – Т. 23, № 1. – С. 35 – 66.
6. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций // Труды Моск. мат. о-ва. – 1959. – Т. 8. – С. 283 – 320.
7. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, связанных любым числом алгебраических уравнений в поле рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – Т. 26, № 6. – С. 877 – 910.
8. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2, вып. 1. – С. 33 – 44.
9. Об арифметических свойствах значений аналитических функций // Труды МИАН СССР. – 1973. – Т. 132. – С. 169 – 202.
10. On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E-functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1979. – V. 27. – P. 385 – 407.
11. Об оценках многочленов от значений E-функций // Матем. сборник. – 1981. – Т. 115 (157), № 1 (5). – С. 3 – 39.
12. Трансцендентные числа. – М: Наука, 1987.
13. О трансцендентности значений одного подкласса E-функций // Успехи матем. наук. – 1992. – Т. 47, вып. 4 (286). – С. 215 – 216.
14. О трансцендентности значений E-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сборник. – 1993. – Т. 184, № 5. – С. 75 – 84.
15. О линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 2. – С. 174 – 185.

37. Шмелёв А.А.
    1. Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Известия Вузов. Математика. – 1969. – № 4 (83). – С. 103 – 111.
38. Andre Y.
    1. Séries Gevrey de type arithmétique // Annals of Mathematics. – 2000. – V. 151. – P. 705 – 756.
    2. Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous

varieties: a new differential Galois correspondence. // Annales scientifiques ENS. – 2014. – 47, № 2. – P. 449 – 467.

39. Baker A.
    1. Transcendental Number Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1975.
40. Bertrand D.
    1. Un analogue différentiel de la théorie de Kummer // Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants / ed. P. Philippon, Luminy, 1990. Berlin: de Gruyter, – 1992. – P. 39 – 49.
41. Bertrand D., Beukers F.
    1. Equations differentielles lineaires et majorations de multiplicities // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 ser. – 1985. – V. 18. – P. 181 – 192.
42. Beukers F.
    1. Some new results on algebraic independence of E-functions // New advances in transcendence theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1988. – P. 56 – 67.
    2. A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem // Annals of Mathematics. – 2006. – 163. – P. 369 – 379; arxiv:math. NT/0405549 v3 6 Aug 2004.
43. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.
    1. Siegel normality // Annals of Math. – 1988. – V. 127. – P. 279 – 308.
44. Beukers F., Jouhet F.
    1. Duality relations for hypergeometric series // Bulletin of the London Math. Soc. – 2015. – V. 47. – P. 343 – 358.
45. Borel E.
    1. Sur la nature arithmétique du nombre e // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1899. – V. 128. – P. 596 – 599.
46. Brownawell W.D.
    1. Effectivity in independence measures for values of E-functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1985. – V. 40. – P. 227 – 240.
47. Dube Thomas W.
    1. The structure of polynomial ideals and Grobner bases // SIAM J. Comp. – 1990. – V. 19, № 4. – P. 750 – 773.
48. Feng R., Kuznetsov A., Yang F.
    1. A short proof of duality relations for hypergeometric functions // J. of Math. Analysis and Applications – 2016. – V. 443. – P. 116 – 122.

49. Hermite Ch.

1. Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – V. 77. – P. 18 – 24, 74 – 79, 221 – 233, 285 – 293; Œuvres. – V. 3. – P. 150 – 181.

50. Hendriks P.A.

1. Shidlovskii irreducibility // Indag. Mathem., N.S. – 1994. – V. 5, № 4. – P. 439 – 456.

51. Katz N.M.

1. Exponential Sums and Differential Equations. – Ann. of Math. Stud., V. 124. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1990.

52. Kolchin E.R.

1. Algebraic matric groups and the Picard–Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations // Ann. of Math. – 1948. – V. 49, № 1. – P. 1 – 42.
2. Algebraic groups and algebraic dependence // Amer. J. Math. – 1968. – V. 90, № 4. – P. 1151 – 1164.

53. Lang S.

1. A transcendence measure for E-functions // Mathematika. – 1962. – V. 9. – P. 157 – 161.

54. Lindemann F.

1. Über die Zahl π // Math. Ann. – 1882. – Bd. 20. – S. 213 – 225.

55. Liouville J.

1. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationelles algébriques // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1844. – V. 18. – P. 883 – 885.

56. Mahler K.

1. Arithmetische Eigenschaften der Lôsungen einer Klasse Funktionalgleichungen // Math. Ann. – 1929. – Bd. 101, № 4. – S. 342 – 366.
2. Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen // Math. Z. – 1930. – Bd. 32, № 4. – S. 545 – 586.
3. Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in specielen Punktfolgen // Math. Ann. – 1930. – Bd. 103, № 4, 5. – S. 573 – 587.
4. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. 1 // J. reine und angew. Math. – 1932. – Bd. 166. – S. 118 – 136.

5. Applications of a theorem by A.B. Shidlovski // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1968. – V. 305. – P. 149 – 173.

57. Nishioka K.

1. Mahler functions and transcendence. Lect. Notes in Math. – 1996. – V. 1631.

58. Ostrowski A.

1. Sur les relations algébriques entre les intégrales indéfinies // Acta Mathematica. – 1946. – V. 78. – P. 315 – 318.

59. Perron O.

1. Über lineare differentialgleichungen mit rationalen koeffizienten // Acta Mathematica. – 1911. – Bd. 34. – S. 139 – 163.

60. Schneider Th.

1. Transcendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. 1 // J. reine und angew. Math. – 1934. – Bd. 172. – S. 65 – 69.
2. Transcendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. 2 // J. reine und angew. Math. – 1934. – Bd. 172. – S. 70 – 74.
3. Über die Approximation algebraischer Zahlen // J. reine und angew. Math. – 1936. – Bd. 175. – S. 182 – 192.
4. Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale // Math. Ann. – 1937. – V. 113. – P. 1 – 13.
5. Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale // J. reine und angew. Math. – 1941. – Bd. 183. – S. 110 – 128.

61. Siegel C.L.

1. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. – Math. Kl. – 1929 – 1930. – № 1. – S. 1 – 70.
2. Transcendental numbers. – Princeton: Princeton University Press, 1949.

62. Slater L.J.

1. Generalized Hypergeometric Functions. – London and New York: Cambridge University Press, 1966.

63. Väanänen K.

1. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A: Math. – 1975. – V. 1. – P. 93 – 109.
2. On the algebraic independence of the values of some E-functions related to Kummers functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A:

Math. – 1975. – V. 1. – P. 183 – 194.

64. Горелов В.А.

1. Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1981. – № 1. – С. 47 – 51.
2. Об одном утверждении Зигеля // Сборник "Диофантовы приближения". – Ч. I. – 1985. – М: изд-во МГУ. – С. 25 – 36.
3. Эффективные оценки мер алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // Сборник "Диофантовы приближения". – Ч. II. – 1986. – М: изд-во МГУ. – С. 12 – 23.
4. Об оценках мер алгебраической независимости значений E-функций // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 31 – 45.
5. Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций // Известия Вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 6 – 11.
6. Эффективные оценки многочленов от значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями // Деп. в ВИНИТИ 10.01.95 № 46 – В95. 19 с.
7. Алгебраическая независимость значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, вып. 2. – С. 751 – 755.
8. Об алгебраической независимости значений E-функций и гипотезе Зигеля для дифференциальных уравнений 1-го порядка // Деп. в ВИНИТИ 27.01.99 № 256 – В99. 22 с.
9. Об алгебраической независимости значений E-функций в особых точках и гипотезе Зигеля // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 2. – С. 174 – 190.
10. О гипотезе Зигеля для E-функций, удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка // Деп. в ВИНИТИ 26.05.00 № 1535 – В00. 20 с.
11. О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75, вып. 4. – С. 549 – 565.
12. Частный случай задачи о линейной независимости значений E-

функций // Вестник МЭИ. – 2004. – № 6. – С. 39 – 42.

13. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, вып. 3. – С. 331 – 348.
14. Об ослабленной гипотезе Зигеля // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, вып. 6. – С. 33 – 39. Перевод: On the weakened Siegel's conjecture // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – V. 146, № 2. – P. 5649 – 5654.
15. Критерий алгебраической независимости совокупностей значений функций Куммера и их производных // Вестник МЭИ. – 2007. – № 6. – С. 30 – 42.
16. О новых алгебраических тождествах между обобщёнными гипергеометрическими функциями // Вестник МЭИ. – 2008. – № 6. – С. 129 – 138.
17. Критерий алгебраической независимости совокупностей значений гипергеометрических функций некоторого вида // Вестник МЭИ. – 2009. – № 6. – С. 15 – 32.
18. Об алгебраических тождествах между обобщёнными гипергеометрическими функциями // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88, вып. 4. – С. 511 – 516.
19. Об алгебраических свойствах решений гипергеометрических уравнений // Труды 18-й МНТК "Информационные средства и технологии". Москва, МЭИ, 2010. 8 с.
20. Об алгебраических свойствах обобщённых гипергеометрических функций // Труды 19-й МНТК "Информационные средства и технологии". Москва, МЭИ, 2011. 7 с.
21. Об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 1. – С. 94 – 108.
22. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, вып. 5. – С. 658 – 672.
23. On contiguity relations for generalized hypergeometric functions // Problemy Analiza - Issues of Analysis. – 2018. – V. 7(25), № 2. – P. 39 – 46.
24. Об алгебраических тождествах между фундаментальными мат-

рицами уравнений Бесселя и Куммера // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 258 – 262.

25. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, вып. 1. – С. 1 – 10.