Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2019, № 10, с. 75–86 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

К.Б. САБИТОВ, Н.В. ЗАЙЦЕВА

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Для гиперболического уравнения с оператором Бесселя в прямоугольной области исследована начально-граничная задача в зависимости от числового параметра, входящего в оператор. Решение построено в виде ряда Фурье-Бесселя. Единственность решения задачи обоснована методом интегральных тождеств. Для доказательства существования решения задачи используются оценки коэффициентов ряда и системы собственных функций, которые установлены на основании асимптотических формул для функции Бесселя и нулей этой функции. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений. Доказана теорема устойчивости решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, начально-граничная задача, единственность, существование, ряд Фурье–Бесселя, равномерная сходимость, устойчивость.

УДК: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-75-86

Введение

В современной теории дифференциальных уравнений в частных производных одним из важнейших разделов является теория краевых задач для вырождающихся уравнений, что обусловлено ее многочисленными приложениями в различных областях науки и техники. Интерес к вырождающимся уравнениям вызван не только необходимостью решения прикладных задач, но и интенсивным развитием теории уравнений смешанного типа. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [1]. Особое место в данной теории занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу и продолжено в теории обобщенного осесимметрического потенциала [2]–[7]. Важность данного класса уравнений обусловлена их использованием в приложениях к задачам газовой динамики и акустики [4]–[6], теории струй в гидродинамике [8], к линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна [9], [10], в теории упругости и пластичности [11]. Уравнения трех основных классов, содержащие оператор Бесселя, согласно терминологии [12] называются B-эллиптическими, $B-$гиперболическими и B-параболическими. Обширное исследование B-гиперболических уравнений представлено в работе [13]. Достаточно полный обзор

Поступила в редакцию 02.09.2018, после доработки 02.09.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Регионального научно-образовательного математического центра Казанского (Приволжского) федерального университета, проект № 0212/02.12.10179.001.

работ, посвященный изучению краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, приведен в монографии [14].

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ — заданные действительные числа, B-гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right)$ — оператор Бесселя, $k \neq 0$ — заданное действительное число.

Уравнение (1) с $k = 1$ возникает, например, при изучении свободных колебаний под действием силы тяжести тяжелой однородной подвешенной нити, при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке, с $k = 2$ — при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы ([15], сс. 176, 185, 191). В работе [16] впервые и обстоятельно изучены задачи Коши и Коши–Гурса для уравнения (1) при всех $k \geq 1$ в характеристическом треугольнике, а в работе [17] показана некорректность постановки этих задач при $k < 0$. Работа [18] посвящена изучению задачи Трикоми для уравнения смешанного типа, у которого гиперболическая часть совпадает с уравнением (1). В работах [19], [20] изучены задачи Дирихле и Келдыша для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя в прямоугольной области, а в работах [21], [22] исследованы на корректность начально-граничные задачи с интегральным условием для уравнения (1).

Поскольку начально-граничные задачи с нелокальным интегральным условием типа Самарского–Ионкина сводятся к смешанным задачам для уравнения (1), то возникла необходимость более детального изучения начально-граничных задач для уравнения (1), исследования которых нам не известны. Поэтому в данной работе исследована вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения (1) в прямоугольной области D при всех $k \neq 0$.

Постановка задачи. *Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x,t) \in C(\overline{D}), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k| < 1, \tag{6}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k \leq -1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$.

Задача (2)–(5) при $k \geq 1$ — задача с неполными граничными данными. В случае B-эллиптического уравнения

$$u_{tt} + x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0$$

при $k \geq 1$ в силу результатов работ [1], [23] в классе ограниченных решений отрезок $x = 0$ границы области освобождается от граничного условия. При этом в работах ([23], [24], с. 68) показано, что производная по нормали, т. е. u_x, на отрезке $x = 0$ равна нулю. Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения (1). Разделяя переменные, нетрудно показать, что при $k \geq 1$ справедливо равенство

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{8}$$

Тем самым устанавливается дополнительное свойство решения задачи (2)–(5) при $k \geq 1$. В дальнейшем равенством (8) можно воспользоваться или нет в последующих доказательствах в зависимости от поведения производной u_x при $x \to 0$. Если эта производная при $x \to 0$ остается ограниченной, то в условии (8) необходимости нет.

1. Единственность решения задачи

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(7), *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (2)–(7). Тогда их разность $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (2), (3), (5) и (6) и однородным начальным условиям

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{4_0}$$

Рассмотрим в области D тождество

$$x^k v_t \Box_B v(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[x^k\left(v_t^2 + v_x^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k v_t v_x\right) \equiv 0.$$

Интегрируя это тождество по области $D_{\tau,\varepsilon} = D \cap \{0 < \varepsilon < x < l,\, 0 < t < \tau \leq T\}$, где ε и τ — произвольные числа в указанных пределах, будем иметь

$$\int_{\partial D_{\tau,\varepsilon}} x^k\left(v_x^2 + v_t^2\right)\,dx + 2x^k v_x v_t dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \tag{9}$$

По отдельности вычислим интегралы

$$I_1 = \int_0^l x^k\left(v_x^2(x,0) + v_t^2(x,0)\right)\,dx = 0, \quad I_2 = 2\int_0^\tau x^k v_x v_t\Big|_{x=l} dt = 0,$$

$$I_3 = -\int_0^l x^k\left(v_x^2 + v_t^2\right)\Big|_{t=\tau} dx, \quad I_4 = -\int_0^\tau 2x^k v_x v_t\Big|_{x=\varepsilon} dt.$$

Отметим, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} I_4 = 0$, так как произведение $x^k v_x$ стремится к нулю при $x \to 0$, когда $k > -1$, и это произведение ограничено при $x \to 0$, когда $k \leq -1$. Тогда из (9) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int_0^l x^k\left(v_x^2 + v_t^2\right)\Big|_{t=\tau} dx = 0.$$

Отсюда следует $v_x \equiv 0$ и $v_t \equiv 0$ на отрезке $t = \tau$, и в силу произвольности выбора $\tau \in (0,T]$ получим $v(x,t) \equiv \text{const}$ в $\overline{D}$. Тогда с учетом нулевых начальных условий (4_0) имеем $v(x,t) \equiv 0$. Таким образом, $u_1 \equiv u_2$. $\square$

2. Существование и устойчивость решения задачи при $k \geq 1$

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2) и (5), будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив данную функцию в уравнение (1) и условие (5), после разделения переменных получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{11}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Умножим уравнение (10) на x^2 и с помощью замены переменных по формулам

$$X(x) = x^{\frac{1-k}{2}} Z(\xi), \quad \xi = \lambda x, \tag{12}$$

уравнение (10) приведем к уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) Z = 0, \quad \nu = (k-1)/2,$$

общее решение которого имеет вид

$$Z(\xi) = P_1 J_\nu(\xi) + P_2 Y_\nu(\xi), \tag{13}$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго родов соответственно, порядка $\nu = (k-1)/2$, P_1, P_2 — произвольные постоянные.

С учетом (12) и (13) общее решение уравнения (10) при $k \geq 1$ определяется по формуле

$$\widetilde{X}(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} Y_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{14}$$

Для того, чтобы функция (14) удовлетворяла первому условию из (11), положим $P_2 = 0$ и примем $P_1 = 1$, так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Тогда решение примет вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{15}$$

Отметим, что функция (15) удовлетворяет условию (8). Подставив теперь функцию (15) во второе условие из (11), найдем

$$\begin{gathered} \lambda_0 = 0, \\ \widetilde{X}'(l) = \left(x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) \right)'_x \Big|_{x=l} = -l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l), \end{gathered} \tag{16}$$

откуда получим

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{17}$$

Из теории бесселевых функций известно ([25], с. 530), что функция $J_\nu(\xi)$ при $\nu > -1$ имеет счетное множество вещественных нулей. Тогда, обозначив n-й корень уравнения (17) через μ_n при заданном k, найдем собственные значения $\lambda_n = \mu_n / l$ задачи (10) и (11).

Согласно ([26], с. 317) для нулей уравнения (17) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} k + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (10) и (11) имеет собственную функцию, равную константе, которую примем за единицу. Таким образом, система собственных функций задачи (10), (11) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{19}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где собственные значения λ_n определяются как нули уравнения (17).

Отметим, что система собственных функций (19) и (20) задачи (10) и (11) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k, а также образует полную систему в этом пространстве ([27], с. 343).

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций

$$X_n(x) = \frac{1}{\|\widetilde{X}_n(x)\|} \widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где

$$\|\widetilde{X}_n(x)\|^2 = \int_0^l \rho(x)\,\widetilde{X}_n^2(x)\,dx, \quad \rho(x) = x^k. \tag{22}$$

Теперь согласно [28] рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (21).

На основании (23) введем вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{24}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Продифференцировав равенство (24) по переменной t дважды при $0 < t < T$, с учетом уравнения (1) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k X_n(x)\,dx = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \left(u_{xx} + \frac{k}{x}u_x\right) x^k X_n(x)\,dx =$$
$$= \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)X_n(x)\,dx = x^k u_x X_n(x)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx. \tag{25}$$

Из (24) в силу уравнения (10) будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\left[X''_n(x) + \frac{k}{x}X'_n(x)\right]dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\frac{d}{dx}\left(x^k X'_n(x)\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx\right],$$

откуда находим

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon}.$$

Подставив последнее равенство в (25), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon}. \tag{26}$$

В силу (2) функции $u(x,t)$ и $x^k u_x(x,t)$ непрерывны в $\overline{D}$. Тогда при переходе в (26) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (5) и (11) для определения функций $u_n(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t, \tag{27}$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные, требующие определения. С этой целью функции (23) удовлетворим начальным условиям (4)

$$u_n(0) = \int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \quad u'_n(0) = \int_0^l \psi(x)x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \tag{28}$$

Из (27) и (28) будем иметь $a_n = \varphi_n, b_n = \psi_n/\lambda_n$. Подставив найденные значения в (27), найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{29}$$

Аналогично находим

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t, \tag{30}$$

$$u_0(0) = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \varphi(x) x^k dx = \varphi_0, \quad u_0'(0) = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \psi(x) x^k dx = \psi_0. \tag{31}$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, тогда из (28) и (31) следует $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, и из (29) и (30) получим $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда из (23) при любом $t \in [0, T]$ имеем $\int_0^l u(x,t) x^k X_n(x)\, dx = 0$. Отсюда в силу полноты системы (21) в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k следует $u(x,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку согласно (2) функция $u(x,t) \in C(\overline{D})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Таким образом, доказана единственность решения задачи (2)–(5) на основании полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи.

На основании найденных частных решений запишем решение задачи (2)–(5) в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,t) = u_0(t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{32}$$

где функции $u_n(t)$ определяются по формуле (29), $X_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — по формуле (21), функция $u_0(t)$ — по формуле (30).

Вместе с рядом (32) рассмотрим следующие ряды:

$$u_t(x,t) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x), \quad u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n'(x); \tag{33}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x), \quad u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n''(x). \tag{34}$$

Докажем равномерную сходимость рядов (32)–(34) в области $\overline{D}$, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчинить некоторым дополнительным условиям.

Из формул (29) и (18) получается

Лемма 1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \le C_1 \left(|\varphi_n| + |\psi_n|/n\right), \tag{35}$$

$$|u_n'(t)| \le C_2 \left(n|\varphi_n| + |\psi_n|\right),$$

$$|u_n''(t)| \le C_3 \left(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\right);$$

здесь и далее C_i — положительные постоянные.

Лемма 2 ([22]). *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0,l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \le C_4, \quad |X_n'(x)| \le C_5 n, \quad |X_n''(x)| \le C_6 n^2.$$

Согласно леммам 1 и 2 при любом $(x,t) \in \overline{D}$ ряд (32) мажорируется рядом

$$C_7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + |\psi_n|/n\right), \tag{36}$$

ряды (33) и (34) мажорируются соответственно рядами

$$C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n|\varphi_n| + |\psi_n|\right), \tag{37}$$

$$C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\right). \tag{38}$$

Исследуем (36)–(38) на сходимость.

Лемма 3 ([22]). *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0,l]$, функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0,l]$, и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leq C_{10} n^{-4}, \quad |\psi_n| \leq C_{11} n^{-3}. \tag{39}$$

Согласно лемме 3 ряды (36)–(38) мажорируются числовым рядом

$$C_{14} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}, \tag{40}$$

а следовательно, ряды (32)–(34) в замкнутой области $\overline{D}$ сходятся равномерно.

Таким образом, построенная функция $u(x,t)$, определяемая рядом (32), удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(5). Тем самым доказана

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2)–(5), определяемое рядом (32), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 3. *Для решения задачи (2)–(5) справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\| \leq C_{15}(\|\varphi(x)\| + \|\psi(x)\|), \tag{41}$$

где $\|f(x)\|^2 = \int_0^l \rho(x)|f(x)|^2 dx$, $\rho(x) = x^k$.

Доказательство. Из (32) на основании оценки (35) найдем

$$\|u\|^2 = \int_0^l x^k u^2(x,t)\,dx = \int_0^l x^k \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t) X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2(t) = u_0^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leq (\varphi_0 + \psi_0 t)^2 + C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\right)^2 \leq$$

$$\leq C_0(\varphi_0^2 + \psi_0^2) + 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n|^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n|^2\right) \leq$$

$$\leq C_0(\varphi_0^2 + \psi_0^2) + 2C_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2\right) = C_{15}\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right). \quad \square$$

3. Существование и устойчивость решения задачи при $-1 < k < 1$, $k \neq 0$

Разделив переменные в уравнении (1), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{42}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^k X'(x) = 0, \quad X'(l) = 0. \tag{43}$$

Общее решение уравнения (42) при $|k| < 1$, $k \neq 0$ определим по формуле

$$\widetilde{X}(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{44}$$

так как $\frac{1-k}{2}$ не является целым числом, а значит, $J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x)$ и $J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)$ — линейно независимые решения уравнения Бесселя.

Из этой формулы вычислим

$$X'(x) = P_1 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x) - P_2 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Поскольку при $x \to 0$ $x^k X'(x) = O(P_1 + P_2 x^{k+1})$, то чтобы функция (44) удовлетворяла первому условию из (43), нужно положить $P_1 = 0$. Пусть $P_2 = 1$.

Тогда решение уравнения (42), удовлетворяющее первому условию из (43), определяется равенством

$$X(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x),$$

которое по внешнему виду совпадает с (15), но здесь $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$.

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию из (43):

$$\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l} = \left.\left(x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)'\right|_{x=l} = -\lambda l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l) = 0, \tag{45}$$

откуда получим

$$\lambda_0 = 0,$$

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu_n) = 0, \quad \mu_n = \lambda_n l. \tag{46}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (42), (43) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где собственные значения λ_n определяются как нули уравнения (46).

Аналогично случаю $k \geq 1$ получим следующие утверждения.

Теорема 4. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 3, *то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи* (2)–(6), *определяемое рядом* (32), *при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 5. *Для решения задачи* (2)–(6) *справедлива оценка* (41).

4. Существование и устойчивость решения задачи при $k \le -1$

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2), (5) и (7), будем искать в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив данное выражение в уравнение (1) и условия (5) и (7), получим относительно неизвестной функции $X(x)$ задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{47}$$

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \tag{48}$$

В силу (13) общее решение уравнения (47) при $k \le -1$ определяется по формуле

$$X(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} Y_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x). \tag{49}$$

Вычислим

$$X'(x) = P_1 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + P_2 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} Y_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Так как при $x \to 0$ функция $X(x) = O(P_1 x^{1-k} + P_2) = O(1)$, а производная при этом $X'(x) = O(P_1 x^{-k} + P_2 x) = O(x)$, то для выполнения первого условия из (48) в (49) нужно положить значения констант $P_1 = 1$ и $P_2 = 0$. В результате данное решение принимает вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x). \tag{50}$$

Подставив функцию (50) во второе граничное условие из (48), получим $\lambda_0 = 0$,

$$J_{-\frac{k+1}{2}}(\mu_n) = 0, \quad \mu_n = \lambda_n l. \tag{51}$$

Но при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (47), (48) имеет только тривиальное решение, а значит, не является собственной функцией. Таким образом, система собственных функций задачи (47) и (48) имеет вид

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

где собственные значения λ_n определяются как нули уравнения (51). Система функций (52) ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k как решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (47) с граничными условиями (48). Также отметим, что для нулей уравнения (51) согласно ([26], с. 317) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n - \frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{53}$$

Далее будем рассматривать ортонормированную систему собственных функций

$$X_n(x) = \widetilde{X}_n(x)/\|\widetilde{X}_n\|, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{54}$$

где норма определяется по формуле (22).

С учетом (54) введем функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t) x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{55}$$

Аналогично решению задачи при $k \ge 1$ с учетом уравнений (1) и (47) получим равенство

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t) x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{56}$$

Из формулы (52) следует $X_n(x) = O(x^{1-k})$ и $X'_n(x) = O(x^{-k})$ при $x \to 0$. При переходе в (56) к пределу при $\varepsilon \to 0$ в силу условий (2), (5), (7) и (48) будем иметь

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0, T). \tag{57}$$

Удовлетворив далее функции (55) начальными условиями (4), получим равенства (28). Единственное решение задачи (57), (28) определяется по формуле (29).

На основании найденных частных решений (54) и (29) решение задачи (2)–(5), (7) запишем формально в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{58}$$

для коэффициентов которого справедливы оценки лемм 1 и 2, следовательно, при любом $(x,t) \in \overline{D}$ ряд (58) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием первого и второго порядков, мажорируются рядом

$$C_{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 |\varphi_n| + n|\psi_n| \right). \tag{59}$$

Лемма 4. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0,l]$, функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0,l]$, и*

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(l) = \psi(l) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

то выполняются оценки (39).

Доказательство проводится аналогично доказательству в работе [29].

Согласно лемме 4 ряд (59) оценивается сверху сходящимся числовым рядом (40), а значит, сумма ряда (58) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$. Построенная функция $u(x,t)$, определяемая рядом (58), удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(5), (7). Таким образом, доказана

Теорема 6. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 4, *то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи* (2)–(5), (7), *определяемое рядом* (58), *при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 7. *Для решения задачи* (2)–(5), (7) *справедлива оценка*

$$\|u\| \le C_{17}(\|\varphi\| + \|\psi\|), \tag{60}$$

где постоянная C_{17} не зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Литература

[1] Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области*, ДАН СССР **77** (2), 181–183 (1951).

[2] Weinstein A. *Discontinuous integrals and generalized theory of potential*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (2), 342–354 (1948).

[3] Weinstein A. *Generalized axially symmetric potential theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **59**, 20–38 (1953).

[4] Bers L. *On a class of differential equations in mechanics of continua*, Quart. Appl. Math. **5** (1), 168–188 (1943).

[5] Bers L. *A remark on an applications of pseudo-analytic functions*, Amer. J. Math. **78** (3), 486–496 (1956).

[6] Bers L., Gelbart A. *On a class of functions defined by partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **56**, 67–93 (1944).

[7] Gilbert R.P. *Function theoretic method in partial differential equations* (Academic Press, New York–London, 1969).
[8] Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости* (Наука, М., 1979).
[9] Бицадзе А.В., Пашковский В.И. *К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна*, ДАН СССР **216** (2), 9–10 (1974).
[10] Бицадзе А.В., Пашковский В.И. *О некоторых классах решений уравнения Максвелла–Эйнштейна*, Тр. МИАН СССР **134**, 26–30 (1975).
[11] Джаяни Г.В. *Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам* (Изд-во Тбилис. ун-та, Тбилиси, 1982).
[12] Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи* (Наука, Физматлит, М., 1997).
[13] Carroll R.W., Showalter R.E. *Singular and degenerate Cauchy problems* (Academic Press, New York, 1976).
[14] Катрахов В.В., Ситник С.М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений*, Современная матем. Фундамент. направления **64** (2), 211–426 (2018).
[15] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики* (Высш. школа, М., 1970).
[16] Пулькин С.П. *Некоторые краевые задачи для уравнений* $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$, Учен. зап. Куйбышевск. гос. педагогического ин-та. Вып. 21, 3–55 (1958).
[17] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. *О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 5, 59–63 (2001).
[18] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. *Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом*, Изв. вузов. Матем., № 2, 64–71 (2004).
[19] Сафина Р.М. *Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя*, Дифференц. уравнения **51** (10), 1354–1366 (2015).
[20] Сабитов К.Б., Сафина Р.М. *Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом*, Изв. РАН. Сер. матем. **82** (2), 79–112 (2018).
[21] Zaitseva N.V. *Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind*, Lobachevskii J. Math. **38** (1), 162–169 (2017).
[22] Сабитов К.Б., Зайцева Н.В. *Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода*, Дифференц. уравнения **54** (1), 123–135 (2018).
[23] Пулькин С.П. *О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта*, Изв. вузов. Матем., № 6, 214–225 (1960).
[24] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного типа* (Физматлит, М., 2014).
[25] Ватсон Г.Н. *Теория Бесселевых функций. Ч. 1* (ИЛ, М., 1949).
[26] Олвер Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции* (Мир, 1986).
[27] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* Изд. 4-е (Наука, Физматлит, М., 1981).
[28] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области*, Дифференц. уравнения **49** (1), 68–78 (2013).
[29] Sabitov K.B., Zaitseva N.V. *Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind*, Lobachevskii J. Math. **39** (9), 1419–1427 (2018).

Камиль Басирович Сабитов

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, д. 37, Россия;
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан,
ул. Одесская, д. 68, г. Стерлитамак, 453103, Россия,

e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Наталья Владимировна Зайцева

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 35, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

K.B. Sabitov and N.V. Zaitseva

Second initial-boundary value problem for B-hyperbolic equation

Abstract. We investigate an initial-boundary value problem in a rectangular domain for a hyperbolic equation with Bessel operator. The solution is obtained in the form of the Fourier–Bessel series. The uniqueness of solution of the problem is established by means of the method of integral identities. At the existence of the proof we use assessment of coefficients of series, the asymptotic formula for Bessel function and asymptotic formula for eigenvalues. We obtain sufficient conditions on the functions defining initial data of the problem and prove the stability theorem for the solution of the problem.

Keywords: hyperbolic equation, Bessel differential operator, initial-boundary value problem, uniqueness, existence, Fourier–Bessel series, uniform convergence, stability.

Kamil Basirovich Sabitov

Sterlitamak branch of Bashkir State University;
37 Lenin Ave., Sterlitamak, 453103 Russia;
Institute of Strategic Studies of Bashkortostan Republic,
68 Odesskaya str., Sterlitamak, 453103 Russia,

e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Natalya Vladimirovna Zaitseva

Kazan Federal University,
35 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru