

ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Букина Дмитрия Борисовича
на тему: «Задачи Монжа и Канторовича в бесконечномерных
пространствах» по специальности 01.01.01 – «вещественный,
комплексный и функциональный анализ»

Работа Дмитрия Букина «Задачи Монжа и Канторовича в бесконечномерных пространствах» посвящена актуальному и весьма популярному направлению – задаче Канторовича и теории оптимальной транспортировки. По этому направлению идет чрезвычайно активная работа по всему миру, в год публикуются сотни статей на эту тему. Ранее известные работы о бесконечномерных аспектах теории были в основном посвящены распределениям на пространстве Винера с функцией стоимости, равной квадрату нормы Камерона-Мартина. В работе изучен следующий естественный вопрос: можно ли естественным образом расширить класс бесконечномерных распределений, для которых имеет смысл транспортная задача с такой же функцией стоимости? Несмотря на то, что получен скорее отрицательный ответ, он имеет важное теоретическое значение. В классе гауссовских мер получены сравнительные характеристики оптимальных отображений и так называемых треугольных. Поскольку треугольные отображения, в отличие от оптимальных, строятся конструктивно, эта часть работы может иметь значение для исследований в вычислительной математике.

Настоящая работа состоит из трех глав.

В первой главе собраны известные ранее результаты, использующиеся в работе.

Во второй части работы исследован следующий вопрос: рассмотрим меру, являющуюся образом меры Винера на $C([0,1])$ относительно композиции траектории с некоторой фиксированной гладкой возрастающей функцией f , а также некоторую меру, абсолютно непрерывную относительно первой. В каких ситуациях расстояние Канторовича относительно функции стоимости, равной квадрату расстояний Камерона-Мартина, конечно? Оказывается, что для очень широкого класса функций это случается только в тривиальной ситуации (меры совпадают). Случаи, когда существуют нетривиальные примеры конечного функционала, сводятся к ситуации, когда отображение f совпадает с тождественным на некотором отрезке. Технически доказательство основано на использовании закона двойного логарифма для траекторий винеровского процесса. Из этого факта и из условия конечности нормы Камерона-Мартина почти всюду на решении выводится нетривиальное соотношение между функцией f и точками решения. Далее доказываем, что нетривиальных решений не существует в предположении достаточной гладкости f и отсутствии изолированных нулей второй производной f . Этот результат был опубликован в первой работе автора. Во второй работе содержится усовершенствование этого результата, а именно, предполагается, что множество нулей имеет нулевую меру Лебега.

Во второй части диссертации изучен следующий вопрос: рассмотрим треугольное преобразование стандартной гауссовской меры в другую центрированную гауссовскую меру. Найдём значение квадратичного функционала Канторовича на этом отображении и поделим его на минимальное значение этого функционала (т.е., квадрат расстояния Канторовича). Обозначим супремум этого соотношения на множестве всех центрированных гауссовских мер через K . Можно ли оценить K ? Неформально задачу можно сформулировать так – насколько больше значения функционала Канторовича на треугольных отображениях, чем минимальное значение, на множестве гауссовских мер? В работе получена оценка для K снизу, зависящая только от размерности пространства и стремящаяся к

бесконечности при увеличении размерности. Этот результат был опубликован в третьей работе автора. Так как и оптимальные и треугольные отображения в гауссовском случае линейны, то технически результат получен методами линейной алгебры, но при основан на довольно нетривиальных выкладках. Несмотря на то, что из этого результата следует, что даже для гауссовских мер расхождение между значениями функционала может стремиться к бесконечности при увеличении размерности, еще один результат автора (опубликованный в четвертой работе) показывает, что существуют ситуации, в которых значение функционала Канторовича на треугольных отображениях и его минимум отличаются не более чем на универсальный множитель (и, таким образом, имеют смысл в бесконечномерном случае) для широкого класса мер. Для этого надо ввести ограничения на ковариационную матрицу гауссовской меры. В этом результате используются предыдущие конструкции и транспортные неравенства Талагранна. Отметим, что для негауссовского случая такого рода задачи едва ли являются разрешимыми, потому что явные конструкции оптимальных отображений в общем случае невозможны. Несмотря на то, что в этой части изучался исключительно гауссовский случай, настоящие оценки могут иметь приложения, например, в вычислительных приложениях. Отметим в связи с этим, что явные вычисления геодезических барицентров мер (весьма актуальное приложение задачи Канторовича в современной вычислительной математике) также известны (и возможны) только в гауссовской ситуации.

Результаты получены автором самостоятельно и своевременно опубликованы.

В тексте диссертации допущены некоторые неточности. В том числе:

1. Во введении в формулировке теоремы 2.1.1 опущено важное условие (присутствующее в основном тексте) – конечность функционала Канторовича, без него не удастся понять смысл утверждения.

2. Стр. 7 “Если коэффициент диффузии постоянный, то распределение диффузионного процесса будет абсолютно непрерывно относительно меры Винера”. Видимо, имеется ввиду “коэффициент диффузии единичный” или „растянутой меры Винера”.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования и не влияют на его положительную оценку. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Букин Дмитрий Борисович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
ПРОФЕССОР факультета математики
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»»

КОЛЕСНИКОВ Александр Викторович

подпись

21.04.2020

Контактные данные:

тел.: 7(495) 772-9590 *15337, e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

119048, г. Москва, ул. Усачева, д. 6,
НИУ ВШЭ, факультет математики
Тел.: 7(495) 772-9590 *15337; e-mail:

Подпись сотрудника

ОРГАНИЗАЦИИ И.О. Фамилия удостоверяю:
руководитель/кадровый работник

дата

И.О. Фамилия