

**ОТЗЫВ официального оппонента**  
**на диссертацию на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук Букина Дмитрия Борисовича**  
**на тему: «Задачи Монжа и Канторовича в бесконечномерных**  
**пространствах» по специальности 01.01.01 – «вещественный,**  
**комплексный и функциональный анализ»**

Рассматриваемая диссертация Д.Б. Букина относится к теории меры и функциональному анализу. В ней исследованы задачи оптимальной транспортировки мер в формах Монжа и Канторовича в бесконечномерных пространствах, в том числе в пространстве непрерывных функций для распределений, порождаемых диффузионными процессами. Тематика этой работы относится к активно развивающемуся направлению исследований на стыке нелинейного функционального анализа, теории меры, теории экстремальных задач и стохастического анализа. Актуальность изучения задач оптимальной транспортировки (оптимальных отображений) мер в бесконечномерных пространствах подтверждается большим числом прикладных исследований, касающихся распределения ресурсов и управления транспортными потоками с очень большим числом параметров. Такого рода исследования ведутся во многих научных центрах России и всего мира, их результаты публикуются в центральных международных математических журналах.

В диссертации имеются введение, три главы, разбитые на 8 параграфов, а также заключение и библиография. Введение близко к автореферату и содержит компактный обзор, мотивировку и формулировки основных результатов.

Первая глава имеет вспомогательный характер и содержит список используемых утверждений из теории меры, теории оптимальных отображений и теории диффузионных процессов.

Центральная для диссертации вторая глава посвящена задачам Монжа и Канторовича об оптимальных транспортировках на пространстве функций, непрерывных на отрезке, причем в качестве отображаемых мер берутся распределения диффузионных процессов. Здесь рассматривается функция стоимости, порожденная нормой пространства Камерона--Мартина меры Винера. Это вполне естественная постановка для процессов, распределения которых абсолютно непрерывны относительно меры Винера. Интерес к такого рода задачам возник после работ французских математиков Д. Фейеля и А.С. Устюнеля, где фактически рассматривались процессы с постоянной матрицей диффузии. Основным результатом второй главы утверждает, что для широкого класса распределений диффузионных процессов с непостоянным коэффициентом диффузии в задаче Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона--Мартина, нет решений в случае несовпадающих исходных мер. Данный отрицательный результат важен и интересен тем, что из него видно, что для распределений диффузионных процессов с непостоянными коэффициентами диффузии требуется совершенно иная функция стоимости.

Третья глава посвящена интересному классу канонических треугольных преобразований гауссовских мер. Здесь производится сравнение стоимостей транспортировок посредством треугольных отображений с оптимальными транспортировками. Один из центральных результатов главы дает оценки, которые зависят от размерности пространства и демонстрируют отличие стоимостей транспортировки при треугольных отображениях от оптимальных стоимостей. Здесь же аналогичная задача рассмотрена в бесконечномерном пространстве, причем для некоторого специального класса гауссовских мер (достаточно конструктивно описанного) получены не зависящие от размерности сравнения стоимостей.

Перечислим важнейшие результаты данной диссертации.

1. Для распределений диффузионных процессов, которые являются нелинейным преобразованием процесса Винера, получены необходимые

условия на нелинейное преобразование, при которых соответствующая задача Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона—Мартин классической меры Винера, разрешима. Найдены простые и эффективно проверяемые условия, при которых такая задача не имеет решений.

2. Для задачи Канторовича с функцией стоимости, порожденной нормой пространства Камерона—Мартин классической меры Винера, установлено, что она не имеет нетривиальных решений для широкого класса распределений диффузионных процессов, включая случай непостоянных аналитических коэффициентов диффузии.

3. Для гауссовских мер получены оценки функционалов стоимости в задаче Монжа для треугольных и для оптимальных отображений, показано, что соответствующие величины асимптотически не сравнимы по размерности для весьма широкого класса отображаемых мер. Исследованы аналогичные задачи в бесконечномерном случае. Найдены конструктивные условия, позволяющие в бесконечномерном случае оценить с универсальной константной стоимостью транспортировки при треугольном отображении через оптимальную стоимость.

Все результаты диссертации являются новыми и были получены автором самостоятельно. Они достаточно подробно обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации автором опубликованы 4 статьи в журналах из баз данных WoS и Scopus (Математические заметки и Theory of Stochastic Processes). Содержащиеся в диссертации результаты прошли апробацию на нескольких научных семинарах и конференциях, например результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, С.В. Шапошникова, на международном научно-исследовательском семинаре «Infinite-dimensional stochastic analysis» в университете г. Билефельда.

Результаты диссертации носят теоретический характер и будут полезны в решении задач нелинейного функционального анализа, теории меры и стохастического анализа. Они могут быть использованы в исследованиях, которые ведутся многими специалистами в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, НИУ «Высшая школа экономики», Новосибирском государственном университете Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН.

Текст представленной работы содержит некоторое количество опечаток, а местами изложен небрежно. Первая глава, в которой собраны используемые в основном тексте диссертации утверждения, имеет фактически вид справочника утверждений без каких-либо пояснений, а в некоторых случаях и определений. Например, понять утверждение Теоремы 1.2.2. на странице 22 очень трудно из-за отсутствия условий на коэффициенты стохастического уравнения и определения решения. Кроме того, я не смог обнаружить в дальнейшем тексте диссертации ссылки на данное утверждение, которое по всей видимости относится ко второй главе диссертации. В главе 2 на странице 26 после обсуждения общих постановок задач Монжа и Канторовича формулируются эти задачи для конкретной рассматриваемой в диссертации ситуации и не приводятся определения мер, транспортировка которых изучается. Нет четкого определения, что значит, что задачи Монжа и Канторовича не имеют решения. Означает ли это отсутствие отображения или плана, на которых достигается минимум, или вообще отсутствие плана, относительно которого функция стоимости почти всюду конечна? Только из последующих утверждений становится ясно, что доказано отсутствие конечных планов. В главе 3 в формулировке Теоремы 3.2.1. используется матрица  $A$ , определение которой дано лишь в доказательстве этой теоремы. Данная погрешность имеет место и во введении.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования и не влияют на положительное заключение о диссертации. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Букин Дмитрий Борисович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,  
ПРОФЕССОР кафедры математического анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

ШАПОШНИКОВ Станислав Валерьевич

Дата подписания 20.04.2020

Контактные данные:

тел.: +7 (495)9391801, e-mail: mmmf@mech.math.msu.su

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет

Тел.: +7 (495)9391801; e-mail: mmmf@mech.math.msu.su

Подпись профессора С.В. Шапошникова удостоверяю

Декан механико-математического

факультета МГУ,

член-корр. РАН, профессор

А.И. Шафаревич