А. Х. Галстян, Проблема Ферма—Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 175, 44–55

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-175-44-55

**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.**
**Современная математика и ее приложения.**
**Тематические обзоры.**
**Том 175 (2020). С. 44–55**
**DOI: 10.36535/0233-6723-2020-175-44-55**

УДК 514.12

# ПРОБЛЕМА ФЕРМА—ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2020 г. **А. Х. ГАЛСТЯН**

Аннотация. Проблема Ферма—Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства $Y$, для каждой из которых сумма расстояний до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A$ пространства $Y$ минимальна. В работе изучается эта проблема в случае, когда $Y$ — это пространство компактных подмножеств евклидовой плоскости, наделенное метрикой Хаусдорфа, а точки из $A$ — это конечные попарно непересекающиеся компакты.

***Ключевые слова*:** проблема Ферма—Штейнера, расстояние Хаусдорфа, компактное подмножество, евклидово пространство, компакт Штейнера.

# THE FERMAT–STEINER PROBLEM IN THE SPACE OF COMPACT SUBSETS OF THE EUCLIDEAN PLANE

© 2020 **A. H. GALSTYAN**

Abstract. The Fermat–Steiner problem if the problem of finding all points of a metric space $Y$ such that the sum of the distances from them to points of a certain fixed finite subset $A$ of the space $Y$ is minimal. In this paper, we examine the Fermat–Steiner problem in the case where $Y$ is the space of compact subsets of the Euclidean plane endowed with the Hausdorff metric, and points of $A$ are finite pairwise disjoint compact sets.

***Keywords and phrases*:** Fermat–Steiner problem, Hausdorff distance, compact subset, Euclidean space, Steiner compact.

***AMS Subject Classification*:** 51E99

**1. Введение.** Основными результатами данной работы являются критерий минимального компакта Штейнера в классе решений для поиска таких компактов (теорема 4.1) и верхние оценки количества точек в минимальных компактах (теоремы 4.2, 4.11). Также в работе освещаются некоторые факты из устройства минимальных компактов (утверждения 4.5, 4.8), которые и дали возможность получить оценки их мощностей. Эти факты потребовали введения нового понятия — *точки сцепки.* Более того, они позволили вывести критерий, когда класс решений содержит из минимальных всего один компакт Штейнера (теорема 4.15). Помимо этого из утверждений 4.5 и 4.8 выводятся следствия, интересные сами по себе, также отражающие устройство компактов Штейнера (следствие 4.6 и утверждение 4.16).

Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-6399.2018.1).

Отметим, что данная работа носит обзорный характер имеющихся новых результатов, основные из которых перечислены выше. Однако часть из них представлена полностью вместе с доказательствами.

**2. Основные определения и предварительные результаты.** Проблема Ферма—Штейнера тесно связана с понятием графа в метрическом пространстве.

**Определение 2.1** (см. [3]). *Простым графом* называется пара $(V, E)$, состоящая из конечного множества $V$ и некоторого множества $E$ двухэлементных подмножеств $\{u, v\} \subset V$. Элементы множества $V$ называют *вершинами*, а элементы множества $E$ — *ребрами*.

Для удобства часто пишут вместо $\{u, v\}$ просто $uv$ и говорят, что вершина $u$ соединена ребром с вершиной $v$. Далее рассматриваются только простые графы, поэтому слово «простой» будем опускать.

**Определение 2.2** (см. [3]). Пусть $M$ — произвольное множество. Граф $G = (V, E)$ называется *графом на множестве* $M$, если $V \subset M$.

**Определение 2.3** (см. [2]). Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_l, v_{l+1}$ вершин и ребер графа, удовлетворяющая условию $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = \overline{1, l}$, называется *маршрутом, соединяющим вершины* $v_1$ *и* $v_{l+1}$ (или $(v_1, v_{l+1})$-*маршрутом*).

$(v_1, v_{l+1})$-Маршрут можно задать последовательностью $v_1, v_2, \ldots, v_{l+1}$ его вершин, а также последовательностью $e_1, e_2, \ldots, e_l$ ребер.

**Определение 2.4** (см. [2]). Граф $G$ называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

**Определение 2.5** (см. [3]). Пусть граф $G = (V, E)$ является связным и пусть $A \subset V$; тогда говорят, что $G$ *соединяет* $A$; при этом вершины из $A$ называют *граничными*, а из $V \setminus A$ — *внутренними*.

**Определение 2.6** (см. [2]). Пусть $G = (V, E)$ — граф, $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ — вещественнозначная функция, ставящая в соответствие каждому ребру $e$ неотрицательное число $\omega(e)$. Тогда $\omega(e)$ называется *весом* ребра $e$, а пара $(G, \omega)$ называется *взвешенным графом*.

**Определение 2.7** (см. [2]). *Длиной* (или *весом*) $\omega(G)$ взвешенного графа $(G, \omega)$ называется сумма весов его ребер.

**Определение 2.8** (см. [2]). *Путем* в графе $G$ называется маршрут, все вершины которого различны.

Пусть $A$ — конечное множество с введенной на нем (псевдо)метрикой $\rho$, $\Big(G = (V, E), \omega\Big)$ — конечный связный взвешенный граф, соединяющий $A$. Определим на множестве $V$ (псевдо)метрику $d_\omega$ по следующему правилу: расстояние между двумя вершинами есть наименьший из весов путей, соединяющих их в графе $(G, \omega)$.

**Определение 2.9** (см. [5]). *Заполнением* конечного (псевдо)метрического пространства $A$ называется такой взвешенный граф $\mathfrak{G} = (G, \omega)$, соединяющий $A$, что для любых $p, q \in A$ выполнено неравенство $\rho(p, q) \leqslant d_\omega(p, q)$.

**Определение 2.10** (см. [5]). Граф $G$ заполнения $\mathfrak{G}$ называется *типом* этого заполнения.

Каждое решение проблемы Ферма—Штейнера можно рассматривать как заполнение типа «граф-звезда» (терминологию теории графов см. в [2]) конечного подмножества $A$ метрического пространства $X$ с метрикой $\rho$. Множество листьев графа равно $A$, а узел — это найденная точка $x \in X$, находящаяся на наименьшем суммарном расстоянии от точек множества $A$. Весовая функция $\omega$ на графе-звезде ставит в соответствие каждому ребру $ax$ ($a \in A$) число, равное $\rho(a, x)$.

Действительно, одним из условий на функцию, чтобы она была (псевдо)метрикой, является неравенство треугольника. В нашем случае для любых $a_1, a_2 \in A$ имеем $d_\omega(a_1, a_2) = \rho(a_1, x) + \rho(x, a_2)$. Отсюда согласно неравенству треугольника получаем, что

$$\rho(a_1, a_2) \leqslant \rho(a_1, x) + \rho(x, a_2) = d_\omega(a_1, a_2),$$

т.е. данный взвешенный граф-звезда является заполнением метрического пространства $A$ с метрикой, которая есть сужение на $A$ метрики объемлющего пространства $X$.

Отметим, что ввиду того, что граф-звезда соединяет $A$, элементы пространства $A$ являются по нашему определению граничными. В связи с этим множество $A$ далее будем называть *границей*.

В настоящей работе изучается частный случай проблемы Ферма—Штейнера, когда в качестве метрического пространства $X$ рассматривается множество $H(\mathbb{R}^2)$ всех непустых компактных подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^2$. На $H(\mathbb{R}^2)$ вводится метрика Хаусдорфа (определение напомним ниже). В качестве $A$ берется некоторое непустое подмножество $H(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $(X, \rho)$ — произвольное метрическое пространство, $a$ и $b$ — произвольные его точки; тогда расстояние $\rho(a, b)$ между ними для краткости будем обозначать $|ab|$.

**Определение 2.11** (см. [7]). *Расстоянием от точки $p$ до непустого подмножества $A$ метрического пространства будем называть величину*

$$|pA| = \inf\big\{|pa| : a \in A\big\}.$$

**Определение 2.12** (см. [1]). *Замкнутой окрестностью радиуса $r$ с центром в непустом подмножестве $A$ метрического пространства называется множество точек $p$ этого пространства вида*

$$B_r(A) = \big\{p : |pA| \leqslant r\big\}.$$

**Определение 2.13** (см. [1]). *Открытой окрестностью радиуса $r$ с центром в непустом подмножестве $A$ метрического пространства называется множество точек $p$ этого пространства вида*

$$U_r(A) = \big\{p : |pA| < r\big\}.$$

**Определение 2.14** (см. [1]). *Сферой радиуса $r$ с центром в непустом подмножестве $A$ называется множество*

$$S_r(A) = \big\{p : |pA| = r\big\}.$$

Отметим, что в частном случае, когда $A = \{a\}$, для удобства опускают фигурные скобки и пишут просто $B_r(a)$, $U_r(a)$ и $S_r(a)$ соответственно.

**Определение 2.15** (см. [1]). *Расстоянием Хаусдорфа между непустыми подмножествами $A$ и $B$ метрического пространства называется величина*

$$d_H(A, B) = \inf\Big\{r \;\Big|\; A \subset B_r(B) \text{ и } B \subset B_r(A)\Big\}.$$

Нам понадобится также эквивалентное определение расстояния Хаусдорфа.

**Определение 2.16** (см. [1]). *Расстояние Хаусдорфа между непустыми подмножествами $A$ и $B$ метрического пространства — это величина*

$$d_H(A, B) = \max\Big\{\sup_{a \in A} |aB|,\ \sup_{b \in B} |bA|\Big\}.$$

Другими словами, в нашем случае проблема может быть представлена в следующем виде. Задан некоторый конечный набор $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ элементов множества $H(\mathbb{R}^2)$. Всюду далее считаем, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. *В настоящей работе будем рассматривать случай конечных подмножеств $A_i$ евклидова пространства* $\mathbb{R}^2$. Мощность произвольного множества $M$ далее будем обозначать $\#M$. Количество элементов в компакте $A_i$ будем обозначать $m_i$, т.е. $\#A_i = m_i \neq 0$. Требуется найти такой элемент $K$ (множество элементов) из $H(\mathbb{R}^2)$, который бы минимизировал следующую функцию:

$$S_A(K) = d_H(A_1, K) + \ldots + d_H(A_n, K).$$

Выше было отмечено, что элементы конечного метрического пространства $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ мы называем граничными, а пространство $A$ — границей. В связи с этим компакты $A_i$ будем называть *граничными множествами* (*компактами*). Обозначим $j$-ю точку $i$-го компакта через $a^i_j$, т.е.

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \{a^i_j\}, \quad a^i_j \in \mathbb{R}^2, \quad a^i_j \neq a^i_k \text{ при } j \neq k \text{ для всех } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Положим $d_i = d_H(A_i, K)$. Тогда задача состоит в том, чтобы минимизировать сумму

$$S_A(K) = \sum_{i=1}^{n} d_i;$$

минимальное ее значение обозначим через $S_A$.

Известно (см. [8]), что множество решений проблемы Ферма—Штейнера в рассматриваемом случае непусто; обозначим это множество $\Sigma(A)$. Каждый элемент из $\Sigma(A)$ далее будем называть *компактом Штейнера*. Множество всех векторов расстояний Хаусдорфа $d = (d_1, \dots, d_n)$, реализующих $S_A$, обозначим $\Omega(A)$.

Через $\Sigma_d(A)$ обозначим все компакты Штейнера, соответствующие некоторому вектору $d \in \Omega(A)$. В связи с тем, что для двух произвольных компактов расстояние Хаусдорфа между ними определяется однозначно, все множество $\Sigma(A)$ разбивается на непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$.

Также известно (см. [8]), что по включению в каждом классе $\Sigma_d(A)$ имеется единственный максимальный компакт $K_d$, причем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i),$$

и имеется минимальный компакт (возможно, не один) $K_\lambda$. При этом $K \in \Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда $K_\lambda \subset K \subset K_d$ для некоторого $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$.

Всюду далее будем использовать следующие обозначения:

(i) через $A = (A_1, \dots, A_n)$ мы будем обозначать границу, где под $A_i$ будем понимать $i$-й граничный компакт;
(ii) $m_i$ — количество точек в $A_i$;
(iii) $a^i_j$ — $j$-я точка $i$-го граничного компакта;
(iv) $\Sigma(A)$ — множество решений проблемы Ферма–Штейнера для границы $A$;
(v) $d = (d_1, \dots, d_n)$ — вектор расстояний Хаусдорфа между граничными компактами и компактом Штейнера, где $d_i$ — расстояние Хаусдорфа между $A_i$ и компактом Штейнера;
(vi) $\Sigma_d(A)$ — класс решений, соответствующий вектору $d$;
(vii) $K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$;
(viii) через $K_\lambda$ будем обозначать минимальные компакты Штейнера в классе.

**Утверждение 2.17.** *Пусть $\mathfrak{G} = (G, \omega)$ — заполнение типа граф-звезда конечного метрического пространства $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, а множество листьев графа $G$ есть $X$. Тогда*

$$\omega(\mathfrak{G}) \geqslant \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \rho(x_i, x_j).$$

*Доказательство.* Исходя из определения заполнения метрического пространства, для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеем $d_w(x_i, x_j) \geqslant \rho(x_i, x_j)$. Обозначим узел графа $\mathfrak{G}$ через $k$. Следовательно,

$$\omega(\mathfrak{G}) = d_\omega(x_1, k) + d_\omega(x_2, k) + \ldots + d_\omega(x_n, k).$$

Заметим, что

$$d_\omega(x_i, k) + d_\omega(x_j, k) = d_\omega(x_i, x_j) \geqslant \rho(x_i, x_j).$$

Отсюда получаем

$$\rho(x_1, x_2) + \rho(x_1, x_3) + \ldots + \rho(x_1, x_n) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_2, x_4) + \ldots + \rho(x_2, x_n) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(d_\omega(x_1,k)+d_\omega(x_2,k)\Big)+\Big(d_\omega(x_1,k)+d_\omega(x_3,k)\Big)+\ldots+$$
$$+\Big(d_\omega(x_1,k)+d_\omega(x_n,k)\Big)+\ldots+\Big(d_\omega(x_{n-1},k)+d_\omega(x_n,k)\Big)=$$
$$=(n-1)d_\omega(x_1,k)+(n-1)d_\omega(x_2,k)+(n-1)d_\omega(x_n,k)=(n-1)\omega(\mathfrak{G}).$$

Следовательно,

$$\omega(\mathfrak{G})\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\rho(x_i,x_j).\qquad\square$$

**Следствие 2.18.** *Пусть количество граничных компактов равно $n$. Тогда*

$$S_A=\sum_{i=1}^{n}d_i\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}d_H(A_i,A_j).$$

## 3. Некоторые вспомогательные результаты.

**Утверждение 3.1.** *Для любого компакта $K\in\Sigma_d(A)$ и для любых $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $j\in\{1,\ldots,m_i\}$ справедливо соотношение*

$$K\cap B_{d_i}(a^i_j)\neq varnothing.$$

Напомним, что данная работа посвящена случаю проблемы Ферма—Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости. Однако утверждение 3.1 справедливо для любого метрического пространства, не только для $H(\mathbb{R}^2)$. Чтобы его сформулировать для произвольного пространства $X$ с метрикой $\rho$, достаточно лишь заменить $\mathbb{R}^2$ в определениях, где оно фигурирует, на рассматриваемое пространство $X$, а все остальные обозначения оставить теми же.

**Лемма 3.2.** *Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — попарно различные точки некоторого нормированного линейного пространства со строго выпуклой нормой. Если*

$$\#\Big(B_{r_1}(a_1)\cap B_{r_2}(a_2)\cap\ldots\cap B_{r_n}(a_n)\Big)>1,$$

*то это пересечение имеет непустую внутренность.*

*Доказательство.* Так как по условию мощность пересечения больше 1, то рассмотрим произвольные две точки $p$ и $q$ из этого множества. Они принадлежат всем замкнутым окрестностям $B_{r_i}(a_i)$, поэтому отрезок в пространстве, соединяющий точки $p$ и $q$ с удаленными концами полностью содержится в $U_{r_i}(a_i)$ для всех $i$ ввиду строгой выпуклости нормы пространства. Отсюда

$$\operatorname{Int}\Big(B_{r_1}(a_1)\cap B_{r_2}(a_2)\cap\ldots\cap B_{r_n}(a_n)\Big)=U_{r_1}(a_1)\cap U_{r_2}(a_2)\cap\ldots\cap U_{r_n}(a_n)\neq\varnothing.\qquad\square$$

**Лемма 3.3.** *Пусть $C_1,\ldots,C_n$ — произвольные попарно различные конечные компакты,*

$$C_i=\bigcup_{j=1}^{p_i}\{c^i_j\},$$

*некоторого метрического пространства, $r=(r_1,\ldots,r_n)$ — вектор с неотрицательными компонентами, для которого*

$$I=\bigcap_{i=1}^{n}B_{r_i}(C_i)\neq\varnothing.$$

*Тогда для любого $X\subseteq I$, удовлетворяющего условию $X\cap B_{r_i}(c^i_j)\neq\varnothing$ при всех $i$ и $j$, справедливо неравенство $d_H(C_i,X)\leqslant r_i$ при каждом $i$.*

*Доказательство.* Так как по условию $X \subseteq I$, то $X \subset B_{r_i}(C_i)$ для всех $i$. Ввиду того, что

$$X \cap B_{r_i}(c^i_j) \neq \varnothing \quad \text{для всех } i \text{ и } j,$$

имеем $C_i \subset B_{r_i}(X)$. Поэтому $d_H(C_i, X) \leqslant r_i$ при каждом $i$. □

Далее сформулируем задачу, идеи которой нам пригодятся в следующем разделе, а также дадим ответ на нее. Напомним, что *отношением* между множествами $X$ и $Y$ называется произвольное подмножество декартова произведения $X \times Y$. Отношение $R$ между $X$ и $Y$ называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций $\pi_X : X \times Y \to X$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$ на $R$ — сюръекции. Отношение включения задает на множестве всех соответствий между $X$ и $Y$ частичный порядок: $R_1 \leqslant R_2$, если и только если $R_1 \subset R_2$ (см. [6]).

**Задача 3.4.** Предположим, что множество $Y$ представлено в виде дизъюнктного объединения непустых конечных множеств $C_1, \dots, C_n$, $1 < n < \infty$, с мощностями $p_1, \dots, p_n$ соответственно. Требуется определить, каково может быть максимальное количество точек во множестве $X$, при котором существует по крайней мере одно соответствие $R$ между $X$ и $Y$, удовлетворяющее сформулированным ниже условиям 3.5.

**Условия 3.5.**

(1) Каждый элемент из $X$ состоит в отношении $R$ хотя бы с одним элементом из каждого множества $C_i$.
(2) При удалении любого элемента из $X$ перестроенное естественным образом соответствие $R$ перестает быть соответствием.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Построим соответствие $R$ из условия задачи 3.4 в виде двудольного графа $G = (X \cup Y, R)$. В этом графе каждая вершина $x_k \in X$ смежна с некоторой вершиной $y_{i,j} \in C_i$, причем найдутся такие $i = i'$ и $j = j'$, что вершина $y_{i',j'}$ имеет степень 1 в графе $G$. Ровно одну такую вершину $y_{i',j'}$ степени 1 (заметим, что их, вообще говоря, у каждой точки из $X$ может быть больше одной) назовем *вершиной, помеченной вершиной* $x_k$, а все остальные $y_{i,j}$ — *вершинами, не помеченными вершиной* $x_k$. Точку $y \in Y$, помеченную некоторой вершиной $x_k \in X$, назовем *особой*, а точки, которые не помечены ни одной вершиной из $X$ — *неособыми.* Следующее очевидное наблюдение является ключевым в нашем решении.

**Лемма 3.6.** *Каждая особая точка $y \in Y$ помечается ровно одной вершиной $x_k$. Каждая вершина $y \in Y$, не помеченная вершиной $x_k$, но смежная с ней, является неособой.*

Таким образом, число особых вершин графа $G$ в точности равно $N$, т.е. имеет место биекция между $X$ и особыми точками в $Y$. Окончательным ответом к задаче 3.4 служит следующая теорема.

**Теорема 3.7.** *Пусть множества $X$, $Y$ и отношение $R$ удовлетворяют условиям* 3.5. *Если все $C_i$, кроме, быть может, одного, одноточечны, то*

$$\#X \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - n + 1\right).$$

*Если по меньшей мере два множества $C_i$ состоят больше чем из одной точки, то*

$$\#X \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - n\right).$$

*В обоих случаях оценка точная.*

Добавим еще один пункт к условиям 3.5.

**Условия 3.8.**

(1) Каждый элемент из $X$ состоит в отношении $R$ хотя бы с одним элементом из каждого множества $C_i$.

(1′) Существуют такой элемент $x \in X$ и такой номер $k \in \{1, \dots, n\}$, что $x$ состоит в отношении $R$ не менее чем с двумя точками из $C_k$ (предполагаем, что $p_k > 1$).
(2) При удалении любого элемента из $X$ перестроенное естественным образом соответствие $R$ перестает быть соответствием.

Ответ на задачу 3.4 в рамках условий 3.8 содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.9.** *Пусть множества $X$, $Y$ и отношение $R$ удовлетворяют условиям 3.8. Количество точек в множестве $X$ не превосходит*

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - n\right),$$

*причем данная оценка точна.*

## 4. Основные результаты.

**Теорема 4.1** (критерий минимального компакта)**.** *Компакт $K \subset \mathbb{R}^2$ является минимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*:
(1) $K \subseteq K_d$;
(2) $K \cap B_{d_i}(a_j^i) \neq \varnothing$ *для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m_i\}$;
(3) *для любого* $p \in K$ *существуют такие* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m_i\}$, *что*

$$\big(K \setminus \{p\}\big) \cap B_{d_i}(a_j^i) = \varnothing.$$

*Доказательство. Достаточность.* Пусть выполнены условия (1)–(3). Сначала покажем, что компакт $K$, удовлетворяющий этим условиям, принадлежит классу $\Sigma_d(A)$.

Так как $K \subseteq K_d$, то для всех $i$ выполнено $K \subset B_{d_i}(A_i)$. По условию (2)

$$K \cap B_{d_i}(a_j^i) \neq \varnothing \quad \text{для любых } i \text{ и } j.$$

Отсюда в силу леммы 3.3 для всех $i$ имеем $d_H(A_i, K) \leqslant d_i$. Но $d$ — вектор расстояний, реализующий минимум функции

$$S_A(K) = \sum_{i=1}^{n} d_i;$$

значит, ни для какого $i$ знака строгое неравенство выполняться не может. Поэтому $d_H(A_i, K) = d_i$ для всех $i$. Следовательно, по определению, $K$ — компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.

Покажем теперь, что $K$ является минимальным компактом в своем классе. Предположим обратное. Допустим, что существует такой компакт $K' \in \Sigma_d(A)$, что

$$\#K' < \#K, \quad K' \subset K \subset K_d.$$

Тогда по условию (3) существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m_i\}$, что

$$K' \cap B_{d_i}(a_j^i) = \varnothing.$$

Но тогда, согласно утверждению 3.1, $K'$ не является компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$; противоречие. Следовательно, $K$ — минимальный компакт Штейнера.

*Необходимость.* Пусть $K$ — минимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A)$. Тогда согласно результатам работы [8] имеем $K \subseteq K_d$. Согласно утверждению 3.1,

$$K \cap B_{d_i}(a_j^i) \neq \varnothing \quad \text{для всех } i \text{ и } j;$$

условие (3) прямо следует из определения минимального компакта Штейнера. □

Далее будет идти речь о мощности минимального компакта Штейнера. Но прежде мы приведем пример, показывающий, что в рамках одного класса $\Sigma_d(A)$ минимальные компакты могут содержать разное количество точек (см. рис. 1).

Граница $A$ состоит из двух компактов:

$$A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1\}, \quad A_2 = \{a_1^2, a_2^2\}.$$

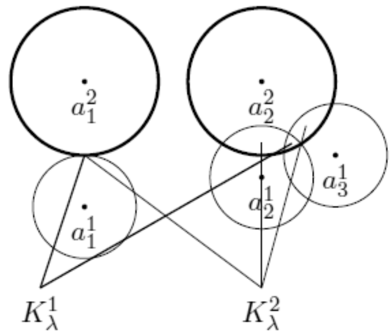


Рис. 1. Случай разномощных минимальных компактов

Пусть $d_H(A_1, A_2) > d_1 > 0$; тогда $d_2 = d_H(A_1, A_2) - d_1$. Выберем компакты $K_\lambda^1$ и $K_\lambda^2$ следующим образом. В оба компакта включим точку $B_{d_1}(a_1^1) \cap B_{d_2}(a_1^2)$. Затем в $K_\lambda^1$ возьмем произвольную точку из пересечения трех окрестностей

$$B_{d_1}(a_2^1) \cap B_{d_1}(a_3^1) \cap B_{d_2}(a_2^2),$$

а в компакт $K_\lambda^2$ включим произвольную точку из

$$\big(B_{d_1}(a_2^1) \cap B_{d_2}(a_2^2)\big) \setminus B_{d_1}(a_3^1)$$

и произвольную точку из

$$\big(B_{d_1}(a_3^1) \cap B_{d_2}(a_2^2)\big) \setminus B_{d_1}(a_2^1).$$

Замечаем, что оба компакта удовлетворяют всем трем пунктам теоремы 4.1; следовательно, $K_\lambda^1$ и $K_\lambda^2$ — минимальные компакты Штейнера в классе $\Sigma_{(d_1,d_2)}(A)$, причем

$$2 = \#K_\lambda^1 < \#K_\lambda^2 = 3,$$

что и требовалось показать.

**Теорема 4.2.** *Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является конечным множеством, количество его точек не превосходит*

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) - n + 1\right),$$

*а в случае, когда имеется больше одного номера $i$, для которого $m_i > 1$, оно не превосходит*

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) - n\right),$$

*где $n$ — количество граничных компактов. В обоих случаях оценка точна.*

*Доказательство.* Определим отношение $R$ между минимальным компактом $K_\lambda$ и множеством $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ следующим образом: для $p \in K_\lambda$ и $a_j^i \in A$ положим $(p, a_j^i) \in R$, если и только если $|pa_j^i| \leqslant d_i$. Из теоремы 4.1 вытекает, что $R$ является соответствием, удовлетворяющим условиям 3.5. Осталось применить теорему 3.7. $\square$

Из теоремы 4.2 следует, что если класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе всего один компакт, то он является конечным, причем количество точек в нем не превосходит оценки, данной в теореме 4.2, так как в этом случае $K_d = K_\lambda$. Однако из того, что максимальный компакт $K_d$ является компактом конечной мощности, не следует, что класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе всего один элемент.

Ниже мы построим соответствующий пример, но для начала приведем описание общего случая границы из двух компактов $A = \{A_1, A_2\}$, рассматриваемого также в [4, 10]. Так как расстояние Хаусдорфа является метрикой, то для компакта Штейнера $K \in \Sigma_d(A)$ выполняется неравенство

$$d_H(A_1, A_2) \leqslant d_H(A_1, K) + d_H(A_2, K) = d_1 + d_2 = S_A,$$

причем равенства можно достичь, положив, например, $K = A_1$. Следовательно, минимальное значение функции $S_A(K)$ равно $d_H(A_1, A_2)$. Отметим, что каждый класс решений $\Sigma_d(A)$ определяется выбором значения $d_1 \in \Big[0; d_H(A_1, A_2)\Big]$, так как $d_2 = d_H(A_1, A_2) - d_1$. В случае конечных компактов расстояние $d_H(A_1, A_2)$ несложно вычисляется посредством соответствующих определений 2.15 и 2.16.

Нахождение максимального компакта, как известно, при заданном векторе расстояний Хаусдофа является элементарным:

$$K_d = B_{d_1}(A_1) \cap B_{d_2}(A_2).$$

Опишем алгоритм поиска минимальных компактов $K_\lambda$, причем для общего случая границы $A$, состоящей из $n$ компактых множеств.

**Алгоритм 4.3.**

Шаг 1. Определим отношение $E$ между максимальным компактом $K_d$ и множеством $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ (все $A_i$ попарно не пересекаются в силу сделанных в начале работы предположений) следующим образом: для $p \in K_d$ и $a_j^i \in A$ положим $(p, a_j^i) \in E$, если и только если $|pa_j^i| \leqslant d_i$. Получим в итоге двудольный граф $G_d(A) = (K_d \cup A, E)$ с долями $K_d$ и $A$, вообще говоря, бесконечный.

Шаг 2. Для каждой точки $a_j^i$ выберем ровно одну точку $p \in K_d$, смежную с ней, и обозначим через $K$ множество выбранных точек. Отметим, что выбор точки $p$ неоднозначен (может быть даже бесконечно много вариантов). После прохода по всем точкам рассмотрим ограничение $E'$ отношения $E$ на декартово произведение множеств $K$ и $A$. Таким образом получим граф $G'_d(A) = (K \cup A, E')$, являющийся подграфом исходного.

Шаг 3. Если в $K$ содержатся точки, смежные лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем ее из графа $G'_d(A)$. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока это возможно.

В результате получим перестроенное множество $K$, которое удовлетворяет условиям теоремы 4.1 и, значит, является минимальным компактом Штейнера. Можно показать, что все минимальные компакты Штейнера могут быть построены таким образом.

**Замечание 4.4.** Если множество $K_d$ конечно, то можно пропустить миновать шаг 2, положив $K = K_d$ и ограничившись лишь шагами 1 и 3. В случаях, когда это целесообразно, будем поступать именно так.

Однако если компакт $K_d$ содержит бесконечное число точек, то без шага 2, возможно, придется делать бесконечное число шагов 3. Если же выполнить шаг 2, то сразу придем к конечному множеству $K$, которое перестроим в минимальный компакт за конечное число шагов 3.

Теперь построим пример, когда $K_d$ является конечным и $K_d \neq K_\lambda$ (см. рис. 2).

Пусть граф $G_d(A)$ конечен, вершина $p_2 \in K$ смежна с вершинами $a_1^2$ и $a_2^1$, имеющими степень 2; следовательно, в соответствии с алгоритмом 4.3, точка $p_2$ может быть удалена из $K$. В полученном графе $G'_d(A)$ все вершины $a_j^i$ имеют степень 1, поэтому алгоритм 4.3 останавливается, и множество $K = K_d \setminus \{p_2\}$ является минимальным компактом Штейнера.

**Теорема 4.5.** *Существуют такие $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, что множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ имеет лишь конечное число точек.*

**Следствие 4.6.** *Пусть $K$ — компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Тогда $K \cap \partial K_d \neq \varnothing$.*

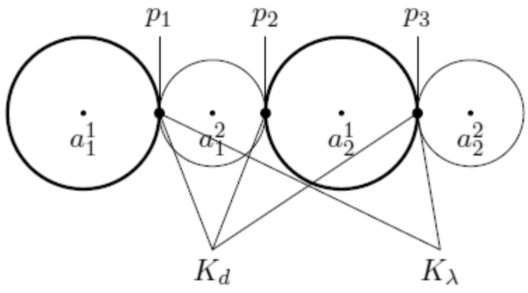


Рис. 2. Пример, когда $K_d$ является конечным и $K_d \neq K_\lambda$

*Доказательство.* Согласно утверждению 3.1 компакт $K$ пересекает каждый шар $B_{d_i}(a_j^i)$. По теореме 4.5 одно из пересечений $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ конечно, поэтому все входящие в него точки — граничные для $K_d$. Так как $K \subset K_d$, то

$$\varnothing \neq B_{d_i}(a_j^i) \cap K \subset B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d \subset \partial K_d,$$

поэтому $K$ содержит точки из $\partial K_d$. □

**Следствие 4.7.** *Пусть все $m_i = 1$. Тогда $\#K_d = \#K_\lambda = 1$.*

*Доказательство.* Так как $A_i = \{a_1^i\}$, то

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}(a_1^i).$$

Пусть $\#K_d > 1$. По лемме 3.2 внутренность $K_d$ непуста, поэтому $\#K_d = \infty$. Но согласно теореме 4.5 существует такое $k$, что $B_{d_k}(a_1^k) \cap K_d$ конечно. В силу сказанного выше, $B_{d_k}(a_1^k) \cap K_d = K_d$, поэтому $K_d$ также конечно; противоречие. □

Следствие 4.6 можно переформулировать следующим образом: каждый компакт Штейнера выходит на границу максимального компакта $K_d$ в своем классе.

Из следствия 4.6 возникает вопрос, можно ли в общем случае заменить пересечение на включение хотя бы для минимального компакта $K_\lambda$? Ответ отрицательный; приведем пример, когда включение не выполнено (см. рис. 3).

Граф $G_d(A)$ бесконечен в силу бесконечности максимального компакта $K_d$, который в данном случае равен $B_{d_2}(a_1^2) \cup \{p\}$, где

$$\{p\} = B_{d_1}(a_2^1) \cap B_{d_2}(a_2^2).$$

Применяя алгоритм 4.3, находим один из минимальных компактов Штейнера $K_\lambda$, выбирая (на шаге 2) для $a_1^1$ и $a_1^2$ одну и ту же точку из $U_{d_2}(a_1^2)$. Осталось заметить, что этот компакт не содержится полностью в границе $K_d$.

**Утверждение 4.8.** *Предположим, что для каждой изолированной точки $p$ максимального компакта $K_d$ имеем*

$$p \notin U_{d_i}(a_j^i) \quad \text{для всех точек } a_j^i.$$

*Тогда существуют такие $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, что*

$$U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \varnothing.$$

**Утверждение 4.9.** *Пересечение $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ конечно тогда и только тогда, когда каждая точка из $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ является граничной в $K_d$.*

**Утверждение 4.10.** *Пусть множество $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ пусто. Тогда множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ конечно.*

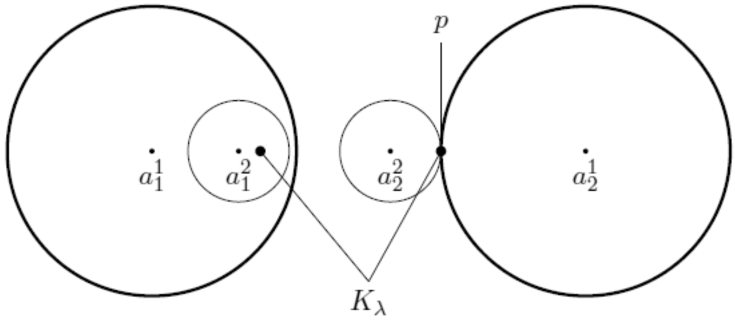


Рис. 3. Случай, когда нарушается условие $K_\lambda \subset \partial K_d$

**Теорема 4.11.** *Если все компоненты связности максимального компакта $K_d$ имеют бесконечное количество точек, то*

$$\#K_\lambda \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) - n\right),$$

*причем данная оценка точна.*

*Доказательство.* Согласно следствию 4.7, если все $m_i$ равны 1, то $\#K_d = 1$, и поэтому условие теоремы не выполняется. Таким образом, без ограничения общности будем предполагать, что хотя бы для одного $i$ имеем $m_i > 1$.

Определим отношение $R$ между минимальным компактом $K_\lambda$ и множеством $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ следующим образом: для $p \in K_\lambda$ и $a_j^i \in A$ положим $(p, a_j^i) \in R$, если и только если $|pa_j^i| \leqslant d_i$. Из теоремы 4.1 вытекает, что $R$ является соответствием, удовлетворяющим условиям 3.5.

По условию теоремы все компоненты линейной связности $K_d$ бесконечны, поэтому в максимальном компакте нет изолированных точек. Следовательно, согласно утверждению 4.8 найдется такая точка $a_j^i$, что

$$U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \varnothing.$$

Отсюда согласно утверждению 4.10 множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ конечно. Но компонеты связности $K_d$, с которыми пересекается $B_{d_i}(a_j^i)$, бесконечны. Поэтому каждая точка из множества $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ лежит еще в некотором замкнутом шаре $B_{d_i}(a_k^i)$, отличном от $B_{d_i}(a_j^i)$. Минимальный компакт $K_\lambda$ должен содержать в себе по крайней мере одну точку из множества $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$. Отсюда вытекает, что соответствие $R$ удовлетворяет условиям 3.8. Осталось применить теорему 3.9. ☐

**Утверждение 4.12.** *Если максимальный компакт $K_d$ является линейно связным, то все множества $B_{d_i}(A_i)$ линейно связны, а также для любых $i$ и $j$ существует такое $k$, что справедливо соотношение*

$$\Big(B_{d_i}(a_j^i) \cap B_{d_i}(a_k^i)\Big) \cap K_d \neq \varnothing.$$

**Определение 4.13.** Будем называть $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ *множеством сцепки $K_d$ с замкнутой окрестностью $a_j^i$*, если

$$\#\Big(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\Big) < \infty.$$

Множество сцепки $K_d$ с $B_{d_i}(a_j^i)$ обозначим через $\mathrm{HP}(a_j^i)$ (от англ. hooking points — точки сцепки). Каждую точку из $\mathrm{HP}(a_j^i)$ будем называть *точкой сцепки.*

Положим $\mathrm{HP}(a_j^i) = \varnothing$, если

$$\#\Big(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\Big) = \infty.$$

В связи с этим объединение $\bigcup \mathrm{HP}(a_j^i)$ по всем точкам $a_j^i$ обозначим через $\mathrm{HP}(A)$.

**Определение 4.14.** Множество $\mathrm{HP}(A)$ назовем *множеством сцепки максимального компакта с границей $A$.*

Отметим, что $\mathrm{HP}(A) \subset \partial K_d$ согласно утверждению 4.9. Теорема 4.5 говорит о том, что для любой границы $A$ множество $\mathrm{HP}(A)$ существует и всегда непусто, причем если $\#K_d < \infty$, то $\mathrm{HP}(A) = K_d$. Благодаря ограниченности количества граничных компактов и точек в них множество точек сцепки всегда конечно.

Выше было показано на примере, что в общем случае включение $K_\lambda \subset \partial K_d$ неверно. Однако, оно справедливо, если $K_\lambda$ — единственный минимальный компакт в своем классе.

**Теорема 4.15** (критерий единственности минимального компакта)**.** *Минимальный компакт Штейнера $K_\lambda$ является единственным минимальным в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует такая точка $a_j^i$, что $\mathrm{HP}(a_j^i) = p$.*

**Утверждение 4.16.** *Пусть $K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Тогда существуют такие $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, что $a_j^i \notin K_d$.*

Автор выражает благодарность своим научным руководителям профессору А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. — Москва–Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004.
2. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
3. *Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А.* Проблема Штейнера в пространстве Громова—Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств// Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — *23*, № 4. — С. 152–161.
4. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа: случай компактов. — М., 2017.
5. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 5. — С. 65–118.
6. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Расстояние Громова—Хаусдорфа, неприводимые соответствия, проблема Штейнера и минимальные заполнения. — М., 2016.
7. *Ivanov A., Iliadis S., Tuzhilin A.* Realizations of Gromov–Hausdorff distance/ `arXiv:1603.08850v1`.
8. *Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A.* Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance// J. Geometry — 2017. — *108*, № 2. — P. 575–590.
9. *Ivanov A., Tuzhilin A.* Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems. — Singapore: World Scientific, 2001.
10. *Schlicker S.* The Geometry of the Hausdoff Metric. — Allendale: Grand Valley State University, 2008.

Галстян Арсен Хачатурович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `ares.1995@mail.ru`